ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ Μ.Δ.Ε.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΙΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΟΛΓΑ Φ. ΜΠΕΤΣΙΘΕΜΗ

Επιβλέπων καθηγητής: **Κανδυλάκης Δημήτριος**

ΧΑΝΙΑ, 2018

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτήν την διπλωματική διατριβή θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη λύσεων για τα προβλήματα συνοριακών τιμών για ελλειπτικές μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Για τον σκοπό αυτό θα αντιστοιχίσουμε τις πιθανές λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης με τα σημεία μηδενισμού ενός συναρτησιακού ορισμένο σε έναν κατάλληλο χώρο συναρτήσεων (χώροι Sobolev, weak formulation, εξίσωση Euler) και ακολούθως θα χρησιμοποιήσουμε αποτελέσματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης για τον εντοπισμό αυτών των ριζών.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 4: Θεωρήματα Εμφύτευσης

Εισαγωγή.

Θεωρήματα εμφύτευσης για τους χώρους $\mathbf{W}_{\mathbf{p}}^{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{\Omega})$.

Ισοδύναμες νόρμες.

1. *Γραμμικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και οι νόρμες σε αυτούς τους χώρους.*
2. *Ισοδύναμες νόρμες στον χώρο $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{\Omega})$.*
3. *Ο δυικός του $\dot{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\Omega})$.*
4. *Το ίχνος στο σύνορο.*

Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές σε ελλειπτικά συνοριακά προβλήματα.

***Η* εξίσωση Poisson με συνοριακές συνθήκες Dirichlet.**

Πρόβλημα* Dirichlet *με φασματική παράμετρο.

Θεώρημα Hilbert-Schmidt.

Κεφάλαιο 6: Βιβλιογραφία.

Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγή

Σε πολλά προβλήματα μαθηματικής φυσικής προβλήματα και λογισμού μεταβολών δεν αρκεί να ασχολούμαστε μόνο με τις κλασσικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων. Είναι απαραίτητο να εισαχθεί η έννοια της ασθενούς παραγώγου και να ασχοληθούμε με τους λεγόμενους χώρους Sobolev.

Ας θεωρήσουμε ένα απλό παράδειγμα, το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Laplace σε έναν φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta u = 0, \qquad x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), x \in \vartheta\Omega \end{array}\right\} \quad (*)$$

όπου η $\varphi(x)$ είναι μια δοσμένη συνάρτηση στο σύνορο $\vartheta\Omega$. Είναι γνωστό ότι η εξίσωση Laplace είναι η εξίσωση Euler για το συναρτησιακό

$$\ell(u) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\vartheta u}{\vartheta x_j}\right|^2 dx.$$

Θεωρούμε την σχέση $(*)$ ως ένα πρόβλημα μεταβολών: θέλουμε να βρούμε την συνάρτηση η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $\ell(u)$ και προερχεται απο ένα σύνολο συναρτήσεων που ικανοποιούν την συνθήκη $u|_{\vartheta\Omega} = \varphi$. Είναι ευκολότερο να ελαχιστοποιήσουμε το παραπάνω συναρτησιακό όχι στον $C^1(\overline{\Omega})$ αλλά σε μια μεγαλύτερη οικογένεια συναρτήσεων και συγκεκριμένα στον χώρο συναρτήσεων Sobolev $W_2^1(\Omega)$. Ο χώρος $W_2^1(\Omega)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in L_2(\Omega)$ που έχουν ασθενή παράγωγο $\vartheta_j u \in L_2(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$. Εάν το σύνορο $\vartheta\Omega$ είναι λείο, τότε το ίχνος της συνάρτησης $u(x)$ στο σύνορο αυτό είναι καλά ορισμένο και η σχέση έχει νόημα (αυτό προκύπτει από το λεγόμενο θεώρημα ίχνους στο σύνορο για τις συναρτήσεις σε χώρους Sobolev). Η συνάρτηση $u \in W_2^1(\Omega)$, η οποία δίνει το ελάχιστο του $\ell(.)$ υπό την συνθήκη $u|_{\vartheta\Omega} = \varphi$, καλείται ασθενής λύση του προβλήματος Dirichlet. Εάν θεωρήσουμε ότι το $\ell(u)$ είναι ορισμένο στον $W_2^1(\Omega)$, τότε μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος μεταβολών. Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των χώρων Sobolev τα θεωρήματα εμφύτευσης, το ίχνος στο σύνορο και τα θεωρήματα επέκτασης. Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε αυτές τις ιδιότητες για να λύσουμε ελλειπτικά προβλήματα συνοριακών τιμών.

Κεφάλαιο 2 : Προκαταρτικά

Ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ καλείται περιοχή. Θα θεωρήσουμε ως $\overline{\Omega}$ την κλειστότητα του και $\vartheta\Omega$ το σύνορό του.

Αν Ω' είναι ένα υποσύνολο του Ω, θα γράφουμε $\Omega' \subset\subset \Omega$ άν $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Αν η περιοχή Ω' είναι φραγμένη και $\Omega' \subset\subset \Omega$, τότε dist $\{\Omega', \vartheta\Omega\} > 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\vartheta_j u = \frac{\vartheta u}{\vartheta x_j}$$

Ο $\mathrm{a} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots \mathrm{a}_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ είναι ένας πολλαπλός δείκτης με $|\mathrm{a}| = \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \dots + \mathrm{a}_n$.

Ακόμη

$$\vartheta^{\mathrm{a}} u = \frac{\vartheta^{|\mathrm{a}|} u}{\vartheta^{\mathrm{a}_1} x_1\, \vartheta^{\mathrm{a}_2} x_2 \dots \vartheta^{\mathrm{a}_n} x_n},$$

$$\nabla u = (\vartheta_1 u,\ \vartheta_2 u, \dots, \vartheta_j u),$$

$$|\nabla u| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\vartheta_j u|^2\right)^{1/2}.$$

Κεφάλαιο 3 : Χώροι Sobolev

Ορισμός: Με $L_q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, συμβολίζουμε το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $u: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ για τις οποίες ισχύει ότι $\int_\Omega |u(x)|^q \, dx < \infty$. Η νόρμα της συνάρτησης u στο χώρο αυτό είναι η

$$\|u(x)\|_{q,\Omega} = (\int_\Omega |u(x)|^q \, dx)^{1/q} ,$$

ταυτίζοντας τις συναρτήσεις οι οποίες συμφωνούν σε σχεδόν όλα τα σημεία της περιοχής Ω. Τότε έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα: Ο χώρος $L_q(\Omega)$ είναι ένας χώρος Banach για $1 \leq q < \infty$.

Ορισμός: Έστω $u \in L_q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$. Θέτουμε

$$J_\rho(u; L_q) = sup_{|z| \leq \rho} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+z) - u(x)|^q \, dx \right)^{1/q},$$

θεωρώντας ότι η συνάρτηση u εκτός του Ω είναι ίση με το 0. Η $J_\rho(u; L_q)$ λέγεται μέτρο της συνέχειας της συνάρτησης u . Ισχύει ότι $J_\rho(u; L_q) \xrightarrow{\rho \to 0} 0$.

Ορισμός: Με $L_{q,loc}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, συμβολίζουμε τον χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων u στην περιοχή Ω για τις οποίες το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega'} |u(x)|^p \, dx$ είναι πεπερασμένο για κάθε φραγμένο υποσύνολο $\Omega' \subset\subset \Omega$ (δηλαδή $\overline{\Omega}' \subseteq \Omega$).

Παρατήρηση:

Ο χώρος $L_{q,loc}(\Omega)$ αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο ο οποίος δεν είναι Banach. Θα λέμε ότι $u_k \xrightarrow{k \to \infty} u$ στον χώρο $L_{q,loc}(\Omega)$ εάν για κάθε φραγμένη περιοχή $\Omega' \subset\subset \Omega$ ισχύει ότι

$$\|u_k - u\|_{q,\Omega'} \xrightarrow{q \to \infty} 0.$$

Ορισμός: Με $L_\infty(\Omega)$ συμβολίζουμε τον χώρο των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων στην περιοχή Ω για τις οποίες ισχύει $ess\ sup_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty$, με την νόρμα της συνάρτησης u να είναι η

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = ess\ sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Ορισμός: Με $C^{\ell}(\overline{\Omega})$ συμβολίζουμε τον χώρο Banach που αποτελείται από τις ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις u οι οποίες έχουν ομοιόμορφα συνεχείς παραγώγους $\vartheta^{a}u$ μέχρι τάξη ℓ στην περιοχή $\overline{\Omega}$ και η παρακάτω έκφραση

$$\|u\|_{C^{1}(\overline{\Omega})} = \sum_{|a|\leq \ell} (sup_{x\in \Omega}|\vartheta^{a}u(\mathrm{x})|)$$

(που αποτελεί τη νόρμα του χώρου) είναι πεπερασμένη. Στην περίπτωση όπου ο πολλαπλός δείκτης $\mathrm{a} = 0$, ορίζουμε $C^{0}(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$.

Παρατήρηση:

Αν η περιοχή Ω είναι φραγμένη, τότε η παραπάνω έκφραση είναι πεπερασμένη δεδομένης της ομοιόμορφης συνέχειας των συναρτήσεων u και των ασθενών παραγώγων τους μέχρι τάξης α.

Ορισμός: Ο $C^{\ell}(\Omega)$ αποτελείται από την οικογένεια των συναρτήσεων ορισμένων στην περιοχή Ω ώστε όλες οι συναρτήσεις u και οι ασθενείς παράγωγοι τους $\vartheta^{a}u$ (με $|\mathrm{a}| \leq \ell$), να είναι συνεχείς στην περιοχή αυτή.

Παρατήρηση:

Ακόμη και εάν η περιοχή Ω είναι φραγμένη, η συνάρτηση $u \in C^{\ell}(\Omega)$ δεν είναι απαραίτητα φραγμένη διότι μπορεί να αυξάνεται με αυθαίρετο τρόπο κοντά στο σύνορο.

Ορισμός: Με $C_0^{\infty}(\Omega)$ συμβολίζουμε την οικογένεια των συναρτήσεων u ορισμένων στην περιοχή Ω για τις οποίες ισχύουν:

- Η u έχει συνεχή παράγωγο κάθε τάξης στο Ω.
- Ο φορέας των συναρτήσεων u, δηλαδή το supp $u = \overline{\{x: u(x) \neq 0\}}$, είναι ένα συμπαγές υποσύνολο της περιοχής Ω.

Παρατήρηση:

Οι συναρτήσεις στον χώρο $C_0^{\infty}(\Omega)$ και οι παράγωγοι κάθε τάξης τους είναι ομοιόμορφα συνεχείς .

3. *Ορισμός ομαλοποίησης.*

Θα προσεγγίσουμε τις συναρτήσεις $u \in \mathrm{L_q}(\Omega)$, με λείες συναρτήσεις χρησιμοποιώντας την διαδικασία της ομαλοποίησης (mollification).

Θεωρούμε μια συνάρτηση ω: $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω

$\omega \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, $\omega(\mathrm{x}) \geq 0$, $\omega(\mathrm{x}) = 0$ για $|\mathrm{x}| \geq 1$ και $\int_{\mathbb{R}} \omega(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = 1$.

Για $\mathrm{p} > 0$ ορίζουμε $\omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = \mathrm{p}^{-n}\, \omega_{\mathrm{p}}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{p}}\right), \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Τότε $\omega_{\mathrm{p}} \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, $\omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) \geq 0$, $\omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = 0$ για $|\mathrm{x}| \geq \mathrm{p}$, και $\int_{\mathbb{R}} \omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = 1$.

<u>Ορισμός</u>: Η συνάρτηση ω_{p} λέγεται ομαλοποιητής ή κανονικοποιητής (mollifier).

Θεωρούμε μια περιοχή $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ και $u \in \mathrm{L_q}(\Omega)$, $1 \leq \mathrm{q} < \infty$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση u είναι ίση με το 0 εκτός του Ω. Ορίζουμε την συνέλιξή της u με την ω_{p} ως εξής

$$\omega_{\mathrm{p}} * \mathrm{u} := \mathrm{u_p}\ , \text{όπου}\ \mathrm{u_p}(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\, \mathrm{u}(\mathrm{y})\,\mathrm{dy}$$

Το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται πάνω στον χώρο $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, αλλά πάνω στην περιοχή $\Omega \cap \{\mathrm{y}: |\mathrm{x}-\mathrm{y}| < \mathrm{p}\}$,επειδή η u μηδενίζεται εκτός του Ω.

<u>Ορισμός</u>: Η u_{p} λέγεται ομαλοποίηση ή κανονικοποίηση της u.

4. *Οι ιδιότητες της ομαλοποίησης.*

1. $u_{\mathrm{p}} \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ και

$$\vartheta^{\alpha}\, u_{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \vartheta_{\mathrm{x}}^{\alpha}\ \omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\, u(\mathrm{y})\,\mathrm{dy},$$

επειδή η ω_{p} έχει παραγώγους κάθε τάξης.

2. Η $u_{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = 0$ όταν dist (x,Ω) ≥ p, επειδή $\omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x} - \mathrm{y}) = 0$ για κάθε $\mathrm{y} \in \Omega$.

3. Αν $u \in \mathrm{L_q}(\Omega)$ τότε ο μετασχηματισμός $u \to u_{\mathrm{p}}$ είναι γραμμικός και φραγμένος, με $\mathcal{Y}_{\mathrm{p}}: \mathrm{L_q}(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ και $\|\mathcal{Y}_{\mathrm{p}}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})} \leq 1$.

4. Αν $u \in \mathrm{L_q}(\Omega)$, $1 \leq \mathrm{q} < \infty$, επειδή $\|u_{\mathrm{p}} - u\|_{\mathrm{q},\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \xrightarrow{\mathrm{p}\to 0} 0$, τότε $\|u_{\mathrm{p}} - u\|_{\mathrm{q},\Omega} \xrightarrow{\mathrm{p}\to 0} 0$.

Στην συνέχεια ακολουθούν οι αποδείξεις των ιδιοτήτων 3 και 4.

Απόδειξη 3ης ιδιότητας:

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για τις τιμές της μεταβλητής q.

<u>Περίπτωση 1η</u>: $1 < \mathrm{q} < \infty$.

Θεωρούμε τις συζυγείς μεταβλητές q, q' : $\frac{1}{\mathrm{q}} + \frac{1}{\mathrm{q}'} = 1$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder και την σχέση

$$u_{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \omega_{\mathrm{p}}(x - y)\, u(y)\, \mathrm{d}y$$

έχουμε ότι

$$|u_{\mathrm{p}}(\mathrm{x})| = \left| \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \omega_{\mathrm{p}}(x - y)^{1/q} \omega_{\mathrm{p}}(x - y)^{1/q'}\, u(y)\, \mathrm{d}y \right|$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x} - \mathrm{y}) \right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x} - \mathrm{y})\, |u(y)|^q \,\mathrm{d}y \right)^{1/q},$$

και επειδή $\int_{\mathbb{R}} \omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} = 1$, παίρνουμε

$$|u_{\mathrm{p}}(y)|^q \leq \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x} - \mathrm{y})\, |u(y)|^q \,\mathrm{d}y.$$

Έτσι

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} |u_{\mathrm{p}}(x)|^q \,\mathrm{dx} \leq \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \mathrm{dx} \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \omega_{\mathrm{p}}(\mathrm{x} - \mathrm{y})\, |u(y)|^q \,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, |u(y)|^q \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, \mathrm{d}x \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, \mathrm{d}y.$$

<u>Περίπτωση 2η</u>: $q = \infty$.

$$|u_p(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, |u(y)|^q \, \mathrm{d}y$$

$$\le \|u\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, \mathrm{d}y = \|u\|_\infty,$$

δηλαδή,

$$\|u_p\|_\infty \le \|u\|_\infty$$

<u>Περίπτωση 3η</u>: $q = 1$.

Ολοκληρώνουμε την ανίσωση

$$|u_p(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, |u(y)| \mathrm{d}y$$

και έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_p(x)| \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, |u(y)| \mathrm{d}y$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |u_p(y)|\, \mathrm{d}y.$$

Απόδειξη 4ης ιδιότητας:

Η απόδειξη βασίζεται στην ακόλουθη ιδιότητα:

Αν η συνάρτηση $u \in L_q(\Omega)$ θεωρηθεί ότι εκτός της περιοχής Ω ισούται με το 0, τότε

$$\sup_{|z| \le \rho} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+z) - u(x)|^q \, \mathrm{d}x \right)^{1/q} =: J_\rho(u; L_q) \xrightarrow{\rho \to 0} 0.$$

(Η $J_\rho(u; L_q)$ καλείται μέτρο της συνέχειας της συνάρτησης u στον χώρο L_q.)

Θεωρούμε ξανά περιπτώσεις για τις τιμές της μεταβλητής q.

Περίπτωση 1^{η}: $1 < q < \infty$.

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις

$$\int_{\mathbb{R}} \omega_p(x)\, dx = 1\,, \qquad u_p(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, u_p(y)\, dy$$

έχουμε ότι

$$|u_p(x) - u(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\,(u(y) - u(x))dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\omega_p(x-y)\right)^{1/q'} \left(\omega_p(x-y)\right)^{1/q} (u(y) - u(x))dy.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder προκύπτει ότι

$$|u_p(x) - u(x)| \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, dy\right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, |u(y) - u(x)|^q\, dy\right)^{1/q}.$$

οπότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_p(x) - u(x)|^q\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, |u(y) - u(x)|^q\, dy.$$

Θέτουμε $x - y = z$ και παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, |u(y) - u(x)|^q\, dy = \int_{|z|\le\rho} dz\, \omega_p(z) \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(y+z)\, |u(y) - u(y)|^q\, dy$$

$$\le \sup_{|z| \le \rho} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y+z) - u(y)|^q\, dy \int_{|z|\le\rho} dz\, \omega_p(z) = \left(J_\rho(u; L_q)\right)^q.$$

$$\Rightarrow \|u_p - u\|_{q,\mathbb{R}^n} \le J_\rho(u; L_q) \xrightarrow{\rho\to 0} 0.$$

Περίπτωση 2^{η}: $q = 1$. Παρατηρούμε ότι

$$|u_p(x) - u(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, |u(y) - u(x)|dy$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|u_p(x) - u(x)\right| dx \le \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(x-y)\, |u(y) - u(x)| dy.$$

Θέτοντας $x - y = z$, προκύπτει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|u_p(x) - u(x)\right| dx$$

$$= \int_{|z|\le\rho} dz\, \omega_p(z) \int_{\mathbb{R}^n} |u(y+z) - u(y)|^q\, dy \le J_\rho(u; L_1) \xrightarrow{\rho\to 0} 0.$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Αν q =∞, μια ιδιοτητα αυτής της μορφής δεν ισχύει επειδή το L_∞-όριο των λείων συναρτήσεων u_p είναι μια συνεχής συνάρτηση. Εάν $u_p \in C(\overline{\Omega})$ και επεκτείνουμε την u να είναι ίση με το 0 εκτός Ω, τότε μπορεί να χαθεί η συνέχεια.

Γενικά $\left\|u_p - u\right\|_{C(\overline{\Omega})} \nrightarrow 0$, καθώς $p \to 0$.

Ισχύει όμως η παρακάτω ιδιότητα:

5. Εάν η συνάρτηση $u \in C(\overline{\Omega})$ και η περιοχή Ω΄ είναι φρεγμένη με Ω ΄⊂⊂ Ω, τότε ισχύει

$$\left\|u_p - u\right\|_{C(\overline{\Omega'})} \xrightarrow{p\to 0} 0.$$

Ο χώρος $C_0^\infty(\Omega)$

<u>Ορισμός</u>: Με $C_0^\infty(\Omega)$ συμβολίζεται ο χώρος των συναρτήσεων οι οποίες

(α) έχουν συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης και

(β) έχουν συμπαγή φορέα, δηλαδή μηδενίζονται εκτός ενός συμπαγούς υποσυνόλου του Ω.

Παρακάτω διατυπώνονται δύο βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων αυτού του χώρου.

Θεώρημα 1. Το σύνολο $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνό στον χώρο $L_q(\Omega), 1 \leq q < \infty$.

Θεώρημα 2. Έστω $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ και $\int_\Omega u(x)n(x)\,dx = 0$, για κάθε $n \in C_0^\infty(\Omega)$. Τότε η συνάρτηση u είναι ταυτοτικά 0 στην περιοχή Ω.

Ασθενής παράγωγος

6. Ορισμός της ασθενούς παραγώγου.

__Ορισμός__: Έστω ότι $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ και a ένας πολλαπλός δείκτης. Αν μια συνάρτηση $\upsilon(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_\Omega u(x)\, \vartheta^a n(x)dx = (-1)^{|a|} \int_\Omega \upsilon(x)\, n(x)dx\,, \quad \text{για κάθε } n \in C_0^\infty(\Omega)$$

τότε η υ θα λέγεται ασθενής παράγωγος (ή παράγωγος με την έννοια των κατανομών) της συνάρτησης u στην περιοχή Ω και θα συμβολίζεται με $\vartheta^a u(x)$.

Αν η συνάρτηση u έχει συνεχείς παραγώγους, τότε με κατά μέρη ολοκλήρωση έχουμε

$$\int_\Omega u(x)\, \vartheta^a n(x)\, dx = \int_\Omega (-1)^{|a|}\, \vartheta^a \upsilon(x)\, n(x)\, dx\ , \forall\, n \in C_0^\infty(\Omega),$$

οπότε η κλασσική παράγωγος ταυτίζεται με την ασθενή παράγωγο.

Παρατηρούμε ότι, επειδή η ασθενής παράγωγος ορίζεται ως ένα στοιχείο του χώρου $L_{1,loc}(\Omega)$, μπορούμε να την αλλάξουμε σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν χωρίς να διαταραχθεί η παραπάνω ισότητα.

7. *Ιδιότητες της ασθενούς παραγώγου.*

- Μοναδικότητα (εκτός απο ένα συνολο μετρου 0).

- Γραμμικότητα: Θεωρούμε $u_1, u_2 \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ για τις οποίες υπάρχουν οι ασθενείς παράγωγοι $\upsilon_1 = \vartheta^{\mathrm{a}} u_1$ και $\upsilon_2 = \vartheta^{\mathrm{a}} u_2$ Τότε υπάρχει η ασθενής παράγωγος του αθροίσματος και ισούται με
$$\vartheta^{\mathrm{a}}\,(\mathrm{c}_1\, u_1 + \mathrm{c}_2\, u_2) = \mathrm{c}_1 \vartheta^{\mathrm{a}} u_1 + \mathrm{c}_2\, \vartheta^{\mathrm{a}} u_2,\ \ \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{C}.$$

- Εάν $\upsilon = \vartheta^{\mathrm{a}}\, u$ στο Ω, τότε επίσης $\upsilon = \vartheta^{\mathrm{a}}\, u$ για κάθε $\Omega^{'} \subset \Omega$.

- “Η ομαλοποίηση της παραγώγου ισούται με την παράγωγο της ομαλοποίησης”, δηλαδή αν $u, \upsilon \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ με $\vartheta^{\mathrm{a}} u = \upsilon$, τότε $\upsilon_{\mathrm{p}} = \vartheta^{\mathrm{a}} u_{\mathrm{p}}$, με την προϋπόθεση ότι $dist\{\mathrm{x}, \vartheta\Omega\} > p$. Οι συναρτήσεις $\upsilon_{\mathrm{p}}, u_{\mathrm{p}}$ είναι λείες και η έκφραση $\vartheta^{\mathrm{a}} u_{\mathrm{p}}$ συμβολίζει την κλασσική παράγωγο.

- Θεωρούμε $u \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει η ασθενής παράγωγος $\vartheta^{\mathrm{a}} \mathrm{u}(\mathrm{x}) \in \mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega), 1 \leq \mathrm{q} < \infty$. Αν $\Omega \subset\subset \Omega^{'}$, τότε
$$\left\| \vartheta^{\mathrm{a}} u_{\mathrm{p}} - \vartheta^{\mathrm{a}} u \right\|_{\mathrm{q},\Omega^{'}} \xrightarrow{\mathrm{p}\to 0} 0.$$

8. *Εναλλακτικός ορισμός ασθενούς παραγώγου.*

<u>Ορισμός</u>: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $u, \upsilon \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $\mathrm{u}_{\mathrm{m}}(\mathrm{x}) \in \mathrm{C}^{\ell}(\Omega), \mathrm{m} \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $u_m \xrightarrow{\mathrm{m}\to\infty} u$ και $\vartheta^{\mathrm{a}} u_{\mathrm{m}} \xrightarrow{\mathrm{m}\to\infty} \upsilon$ στον χώρο $\mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, (όπου a ένας πολλαπλός δείκτης με $|\mathrm{a}| = \ell$).

Τότε η υ είναι η ασθενής παράγωγος της συνάρτησης u στην περιοχή Ω, δηλαδή ισχύει $\vartheta^{\mathrm{a}} u = \upsilon$.

Θεώρημα 3. Θεωρούμε μια συνάρτηση $u_{\mathrm{m}} \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ για την οποία ισχύει οτι $u_{\mathrm{m}} \xrightarrow{\mathrm{m}\to\infty} u$ στον χώρο $\mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η ασθενής παράγωγος $\vartheta^{\mathrm{a}} u_{\mathrm{m}} \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ η οποία συγκλίνει στον χώρο $\mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, δηλαδή ισχύει ότι $\vartheta^{\mathrm{a}} u_{\mathrm{m}} \xrightarrow{\mathrm{m}\to\infty} \upsilon$.

Τότε $\upsilon = \vartheta^{\mathrm{a}} u$.

Από το παραπάνω θεώρημα συνάγουμε ότι ο τελεστής ϑ^{a} είναι κλειστός (έχει δηλαδή κλειστό γράφημα.

Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει επίσης όταν υποθέσουμε ότι

$$\int_{\Omega} u_{\mathrm{m}}\, n\, \mathrm{dx} \xrightarrow{\mathrm{m}\to\infty} \int_{\Omega} u\, n\, \mathrm{dx}\,,$$

και

$$\int_{\Omega} \vartheta^{\mathrm{a}}\, u_{\mathrm{m}}\, n\, \mathrm{dx} \xrightarrow{\mathrm{m}\to\infty} \int_{\Omega} u\, n\, \mathrm{dx}$$

για κάθε $n \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega)$.

9. *Η ασθενής παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων*.

<u>**Πρόταση**</u>: Υποθέτουμε ότι $u, \vartheta_{\mathrm{j}} u \in \mathrm{L}_{\mathrm{q},\mathrm{loc}}(\Omega), 1 < \mathrm{q} < \infty$ και $\upsilon, \vartheta_{\mathrm{j}} \upsilon \in \mathrm{L}_{\mathrm{q}',\mathrm{loc}}(\Omega)$ με τις μεταβλητές q, q′ να είναι συζυγείς $\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right)$ ή ότι ισχύει ότι $u, \vartheta_{\mathrm{j}} u \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, και $\upsilon, \vartheta_{\mathrm{j}} \upsilon \in C(\Omega)$. Τότε

$$\vartheta_{\mathrm{j}}(u\,\upsilon) = \left(\vartheta_{\mathrm{j}}\, u\right) \upsilon + u \left(\vartheta_{\mathrm{j}}\, \upsilon\right).$$

Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις που παραγωγίζονται με τον κλασσικό τρόπο και οι παράγωγοι κ τάξης τους μηδενίζονται είναι πολυώνυμα βαθνού το πολύ κ-1. Το παρακάτω θεώρημα διατυπώνει ότι το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει επίσης για τις ασθενείς παραγώγους.

Θεώρημα 4. Θεωρούμε μια συνάρτηση $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ και υποθέτουμε ότι οι ασθενείς παράγωγοί της $\vartheta^a u$, $|a| = \ell \in \mathbb{N}$, υπάρχουν. Αν $\vartheta^a u = 0$ για κάθε $|a| = \ell$, τότε η u είναι ένα πολυώνυμο τάξης το πολύ $\ell - 1$ στο Ω.

10. *Η απόλυτη συνέχεια.*

Η ύπαρξη της ασθενούς παραγώγου σχετίζεται με την ιδιότητα της απόλυτης συνέχειας. Παραθέτουμε παρακάτω τον ορισμό της απολύτως συνεχούς συνάρτησης.

Ορισμός: Μια συνάρτηση u λέγεται απόλυτα συνεχής στο $[a, \beta]$ αν $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε πεπερασμένο σύνολο ξένων ανά 2 διαστημάτων $(x_1, x'_1), \dots, (x_m, x'_m) \subset [a, \beta]$ με $\sum_{j=1}^{m} |x_j, x'_j| < \delta$

$$\text{ισχύει } \sum_{j=}^{m} \left| u(x'_j) - u(x'_j) \right| < \varepsilon.$$

Οι παρακάτω ιδιότητες είναι συνέπειες της απόλυτης συνέχειας.

1. Η συνάρτηση $u: [a, \beta] \to \mathbb{R}^n$ είναι απόλυτα συνεχής αν και μόνο εάν υπάρχει συνάρτηση $\upsilon \in L_{1,loc}(a, \beta)$

   $$\text{τέτοια ώστε } u(x) = u(a) + \int_a^x \upsilon(t)dt,\ x \in [a, \beta].$$

2. Εάν η συνάρτηση $u: [a, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής τότε υπάρχει η παράγωγος $\frac{du(x)}{dt}$, για σχεδόν κάθε $x \in [a, \beta]$ και $\frac{du}{dx} = \upsilon(x),\ \upsilon \in L_1(a, \beta)$.

Για το παρακάτω θεώρημα υποθέτουμε ότι $n = 1$.

Θεώρημα. Μια μετρήσιμη συνάρτηση u είναι απόλυτα συνεχής στο διάστημα (a, β) αν και μόνον εάν υπάρχει η ασθενής παράγωγός της και $\frac{du}{dx} \in L_1(a, \beta)$. Στην περίπτωση αυτή η ασθενής παράγωγος συμπίπτει σχεδόν παντού με την «κλασσική» παράγωγο.

Οι χώροι Sobolev $W_p^{\ell}(\Omega)$ *και* $\dot{W}_p^{\ell}(\Omega)$

1. Ο χώρος $W_p^{\ell}(\Omega), 1 \le p < \infty, \ \ell \in \mathbb{N}$.

Ο χώρος $W_p^{\ell}(\Omega)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις $u \in L_p(\Omega)$ οι οποίες έχουν ασθενείς παραγώγους $\vartheta^a u(x)$, $|a| \le \ell$, με $\vartheta^a u \in L_p(\Omega)$. Η νόρμα του χώρου $W_p^{\ell}(\Omega)$ είναι η

$$\|u\|_{W_p^{\ell}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|a| \le \ell} |\vartheta^a u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση όπου $\ell = 0, τότε \ W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$.

<u>Πρόταση</u>. Ο χώρος $W_p^{\ell}(\Omega)$ είναι πλήρης, δηλαδή είναι ένας χώρος Banach. Είναι επίσης διαχωρίσιμος όταν $1 < p < +\infty$.

<u>Παρατήρηση:</u>

Στην περίπτωση όπου p=2, ο χώρος $W_2^{\ell}(\Omega)$ είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(u, v)_{W_2^{\ell}(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|a| \le \ell} \vartheta^a u \ \overline{\vartheta^a v}\, dx$.

Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή όταν p=2, ο χώρος $W_2^{\ell}(\Omega)$ θα συμβολίζεται με $H^{\ell}(\Omega)$.

2. Ο χώρος $\dot{W}_p^{\ell}(\Omega)$, $1 \le p < \infty, \ell \in \mathbb{N}$.

<u>Ορισμός</u>: Η κλειστότητα του χώρου $C_0^\infty(\Omega)$ ως προς την νόρμα του $W_p^{\ell}(\Omega)$ συμβολίζεται με $\dot{W}_p^{\ell}(\Omega)$. Για τον λόγο αυτό ο $\dot{W}_p^{\ell}(\Omega)$ αποτελεί υπόχωρο του $W_p^{\ell}(\Omega)$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $u \in \dot{W}_p^{\ell}(\Omega)$ και $\breve{u}$ επέκτασή της στον $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ που ορίζεται να είναι 0 εκτός Ω. Τότε

$$\breve{u} \in W_p^{\ell}(\Omega_1)\ , \forall \Omega_1 \supseteq \Omega, \text{ δηλαδή } \ \breve{u} \in W_p^{\ell}(\mathbb{R}^n).$$

Θεώρημα. Έστω $u \in \dot{W}_p^{\ell}(\Omega)$ και $\breve{u}$ η επέκτασή της στον $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Τότε για τις κανονικοποιήσεις της $u_p(x)$ έχουμε

$$u_p \xrightarrow{p\to 0} u \ \text{ στον } W_p^{\ell}(\Omega).$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Εάν η u αποτελεί μια τυχαία συνάρτηση στον χώρο $W_p^{\ell}(\Omega)$ και η $\breve{u}$ είναι η επέκτασή της στον $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, τότε η συνάρτηση $\breve{u}(x)$ δεν έχει απαραίτητα ασθενείς παραγώγους στον $\mathbb{R}^n$.

Άρα εν γένει έχουμε $\dot{W}_p^{\ell}(\Omega) \neq W_p^{\ell}(\Omega)$.

3. Ολοκλήρωση κατά μέλη.

<u>Πρόταση</u>: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $u \in W_p^{\ell}(\Omega)$ και $\upsilon \in \dot{W}_p^{\ell}(\Omega)$, τότε

$$\int_{\Omega} \vartheta^a u \ \upsilon \, dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} u \, \vartheta^a \upsilon \, dx, \ \ |a| \leq \ell.$$

Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι το σύνορο $\partial\Omega$ του Ω είναι C^1 και $u \in W_p^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.
Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. $u = 0 \ στο \ \partial\Omega$
2. $u \in \dot{W}_p^1(\Omega)$.

Αυτό σημαίνει (με μια παραβίαση της ακρίβειας) ότι οι συναρτήσεις του $\dot{W}_p^1(\Omega)$ είναι όσες συναρτήσεις του $W_p^1(\Omega)$ μηδενίζονται στο σύνορο.

Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι το σύνορο $\partial\Omega$ του Ω είναι C^1 και $u \in \mathrm{L_p}(\Omega), 1 < p < +\infty$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- $u \in \dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$,
- Υπάρχει σταθερα C τέτοια ώστε

$\left|\int_\Omega u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \leq C\|\varphi\|_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)}$ για κάθε $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N), i = 1,2 \dots N$.

- η συνάρτηση $\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \alpha\nu\ x \in \Omega \\ 0, & \alpha\nu\ x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}$

είναι στον $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\mathbb{R}^N)$ και $\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$.

4. *Η ανισότητα του Poincare.*

Υποθέτουμε ότι το Ω είναι μια φραγμένη ανοικτή περιοχή και $1 < p < +\infty$. Τότε υπάρχει μια σταθερά C που εξαρτάται μόνο από το Ω και το p τέτοια ώστε

$\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$ για κάθε $u \in \dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$.

Συνεπώς, η $\|\nabla u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$ είναι μια νόρμα στον $\dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)}$.

<u>Πρόταση</u>: Οι χώροι $\dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\ell}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ και $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\ell}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ είναι ίσοι, δηλαδή $\dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\ell}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) = \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\ell}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$. Αυτό σημαίνει ότι ο $\mathrm{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ είναι πυκνός στον $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\ell}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$.

5. *Ανισότητα Friedrichs .*

Θεώρημα 9: Εάν η περιοχη Ω είναι φραγμένη, τότε για κάθε $\mathrm{u} \in \dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\ell}(\Omega)$ ισχύει η σχέση

$$\|u\|_{\mathrm{p},\Omega} \leq (\mathrm{diam}\ \Omega)^{\ell}\|u\|_{\mathrm{p},\ell,\Omega}$$

όπου $|||u|||_{p,\ell,\Omega} = \left(\sum_{|a|=\ell} \|\vartheta^a u\|_{p,\Omega}^p\right)^{1/p}$.

Η ανισότητα αυτή δεν ισχύει για όλες τις συναρτήσεις $u \in W_p^\ell(\Omega)$, όπως για παράδειγμα για τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ $\ell - 1$ διότι για αυτά ισχύει $|||u|||_{p,\ell,\Omega} = 0$ αλλά $\|u\|_{p,\Omega} \neq 0$ $(αν\ u \neq 0)$.

Κεφάλαιο 4 : Θεωρήματα Εμφύτευσης.

Εισαγωγή.

Τα θεωρήματα εμφύτευσης δίνουν την σχέση που υπάρχει μεταξύ χώρων συναρτήσεων.

Ορισμός: Θεωρούμε τους χώρους Banach $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$. Θα λέμε ότι ο χώρος B_1 εμφυτεύεται στον χώρο B_2 εάν κάθε στοιχείο $u \in \mathrm{B}_1$ ανήκει επίσης στον B_2 και $\|u\|_{\mathrm{B}_2} \leq \mathrm{c}\,\|u\|_{\mathrm{B}_1}$ για κάποιο $c > 0$. Η εμφύτευση αυτή συμβολίζεται με $\mathrm{B}_1 \hookrightarrow \mathrm{B}_2$.

Ο τελεστής εμφύτευσης $\mathrm{J}: \mathrm{B}_1 \longrightarrow \mathrm{B}_2$ απεικονίζει ένα στοιχείο $u \in \mathrm{B}_1$ στο ίδιο στοιχείο του χώρου B_2 οπότε είναι γραμμικός. Η ανισότητα $\|u\|_{\mathrm{B}_2} \leq \mathrm{c}\,\|u\|_{\mathrm{B}_1}$ σημαίνει ότι ο τελεστής J είναι επίσης συνεχής.

Ορισμός: Υποθέτουμε ότι $\mathrm{B}_1 \hookrightarrow \mathrm{B}_2$ και ο τελεστής εμφύτευσης $\mathrm{J}: \mathrm{B}_1 \longrightarrow \mathrm{B}_2$ είναι συμπαγής. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο B_1 εμφυτεύεται συμπαγώς στον B_2.

Η συμπάγεια του τελεστή J ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η κλειστότητα της εικόνας ενός φραγμένου υποσυνόλου του B_1 είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του B_2.

Θεωρήματα εμφύτευσης για τους χώρους $W_p^{\ell}(\Omega)$.

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $\ell = 1$.

Θεώρημα (Rellich-Kondrachov). Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μια φραγμένη περιοχή με ομαλό σύνορο. Τότε οι ακόλουθες εμφυτεύσεις είναι συμπαγείς.

1. $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ για κάθε $q \in [1, p^*)$, όπου $p^* = \frac{np}{n-p}$, αν $p < n$,

2. $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ για κάθε $q \in [1, \infty)$, αν $p = n$,

3. $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ αν $p > n$,

4. $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ για κάθε p και n.

Η εμφύτευση $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ είναι συνεχής.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα σχετίζεται με τις εμφυτεύσεις μεταξύ των χώρων Sobolev.

Θεώρημα

1. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μια φραγμένη περιοχή με ομαλό σύνορο. Θεωρούμε μεταβλητές, που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες: $p \geq 1, 1 \leq q < \infty$, $0 \leq r < \ell$ και ακόμη $\ell - r - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0$, τότε $W_p^\ell(\Omega) \hookrightarrow W_q^r(\Omega)$.

Στην γενικότερη περίπτωση όπου $\ell - r - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$, η εμφύτευση $W_p^\ell(\Omega) \hookrightarrow W_q^r(\Omega)$ είναι συμπαγής.

2. Εάν υποθέσουμε ότι $p\,(\ell - r) > n$, τότε $W_p^\ell(\Omega) \hookrightarrow C^r(\overline{\Omega})$ και η εμφύτευση αυτή είναι συμπαγής.

<u>Ειδικές περιπτώσεις:</u>

Θεωρούμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες: $r = 0$ και $p\,\ell < n$. Ο κρίσιμος εκθέτης q^* απο την ισότητα $\ell - \frac{n}{p} + \frac{n}{q^*} = 0$, οπότε $q^* = \frac{n\,p}{n - \ell\,p}$. Επειδη $p\,\ell < n$, βλέπουμε ότι $q^* < \infty$. Στην περίπτωση $q < q^*$, η εμφύτευση $W_p^\ell(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ είναι συμπαγής και όταν $q = q^*$ είναι μόνο συνεχής.

Αν $p\,\ell = n$, τότε $q^* = \infty$. Σ την περίπτωση αυτή η εμφύτευση $W_p^\ell(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega), \forall\, q < \infty$ είναι συμπαγής. Όμως η εμφύτευση αυτή δεν υφίσταται στην περίπτωση όπου το $q = \infty$.

Εάν $p\,\ell > n$, τότε $W_p^\ell(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ και η εμφύτευση αυτή είναι συμπαγής.

Έστω $r < l$ και $p = q$. Τότε η εμφύτευση $W_p^\ell(\Omega) \hookrightarrow W_p^r(\Omega)$ είναι συμπαγής και ειδικότερα η εμφύτευση $W_p^\ell(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$, $\ell \geq 1$ είναι συμπαγής.

Ισοδύναμες νόρμες .

5. *Γραμμικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και οι νόρμες σε αυτούς τους χώρους.*

Θεωρούμε ότι ο X είναι ένας γραμμικός χώρος διάστασης N, γεγονός που εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός συστήματος γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων $x_1, \dots, x_N \in X$ τέτοια ώστε κάθε $x \in X$ να είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \dots, x_N$

$$x = \sum_{k=1}^{N} \xi^k x_k\,, \ \ \xi^k \in \mathbb{C},\ \ k = 1, \dots, N.$$

Υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοίχιση των στοιχείων $x \in X$ και των συντεταγμένων $\xi = \{\xi^k\}_{k=1}^{N}$. Ορίζουμε $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{N} |\xi^k|^2\right)^{1/2}$. Το συναρτησιακό αυτό έχει όλες τις ιδιότητες της νόρμας και ο χώρος X είναι ένας χώρος Banach σε σχέση με την νόρμα αυτή, (για παράδειγμα ο χώρος X με την παραπάνω νόρμα είναι πλήρης). Η αντιστοίχιση $x \mapsto \xi$ αποτελεί έναν ισομετρικό ισομορφισμό των χώρων X και $\mathbb{C}^N$, (με την στάνταρ νόρμα).

<u>Πρόταση:</u> Οποιαδήποτε νόρμα $\langle x \rangle$ στον χώρο X είναι ισοδύναμη με την $\|x\|$. Συνεπώς κάθε δύο νόρμες στον χώρο X είναι ισοδύναμες.

6. *Ισοδύναμες νόρμες στον χώρο $W_p^\ell(\Omega)$.*

Θεωρούμε τη συνήθη νόρμα στον χώρο $W_p^\ell(\Omega)$, $\ell \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$,

$$\|u\|_{W_p^\ell(\Omega)} = \left(\sum_{|a|\le\ell}\|\vartheta^a u(x)\|_{L_p(\Omega)}^p\right)^{1/q}\ ,\ \ \Omega\subseteq\mathbb{R}^d$$

Εισάγουμε στον χώρο $\mathbb{C}^N$ την νόρμα ℓ_p –τύπου από την φόρμουλα

$$\|\vec{\eta}\|_{\mathbb{C}^N}^p = \sum_{s=1}^N |\eta^s|^p\ , \vec{\eta}\in\mathbb{C}^N.$$

Άρα η αρχική σχέση παίρνει την μορφή

$$\|u(x)\|_{W_p^\ell(\Omega)}^p = \ \|\vec{\eta}\|_{\mathbb{C}^N}^p\ , \text{όπου}\ \vec{\eta} = \left\{\|\vartheta^a u(x)\|_{L_p(\Omega)}\right\}, |a|\le\ell.$$

Εάν αντικαταστήσουμε την νόρμα $\|\vec{\eta}\|_{\mathbb{C}^N}^p$ στην παραπάνω σχέση με μια ισοδύναμη νόρμα του διανύσματος $\vec{\eta}$ στον χώρο $\mathbb{C}^N$ τότε η σχέση που θα προκύψει θα ορίζει αυτομάτως μια νόρμα στον χώρο $W_p^\ell(\Omega)$, η οποία θα είναι προφανώς ισοδύναμη με την συνήθη νόρμα.

7. *Ο δυικός του $\dot{W}_p^1(\Omega)$*

Συμβολίζουμε με $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ τον δυικό του $\dot{W}_p^1(\Omega)$ και με $H^{-1}(\Omega)$ τον δυικό του $H_0^1(\Omega)$. Ο δυικός του $L^2(\Omega)$ ταυτίζεται με τον $L^2(\Omega)$. Όμως δεν ταυτίζουμε τον $H_0^1(\Omega)$ με τον δυικό του, τον $H^{-1}(\Omega)$.

Έχουμε τις εμφυτεύσεις

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

οι οποίες είναι συνεχείς, 1-1 και πυκνές.

Αν το Ω είναι φραγμένο, τότε οι εμφυτεύσεις

$$\dot{W}_p^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow W_{p'}^{-1}(\Omega)\ \ \text{όταν}\ \frac{2N}{N+2}\le p<+\infty$$

είναι συνεχείς και πυκνές. Αν το Ω δεν είναι φραγμένο, τοτε οι παραπάνω εμφυτεύσεις ισχύουν όταν $\frac{2N}{N+2}\le p<2$.

Τα στοιχεία του $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ χαρακτηρίζονται από το ακόλουθο:

Θεώρημα. Αν $\Phi \in W_{p'}^{-1}(\Omega)$, τότε υπάρχουν συναρτήσεις $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_N \in L^{p'}(\Omega)$ τέτοιες ώστε

$$\langle F, v\rangle = \int \quad \varphi_0 v + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

και

$$\left||F|\right| = max_{1\leq i\leq N}||\varphi_i||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Αν το Ω είναι φραγμένο μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\varphi_0 = 0$.

8. *Το ίχνος στο σύνορο.*

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι μια συνάρτηση του $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ ορίζεται επίσης στο σύνορο του Ω με την προυπόθεση ότι αυτό είναι C^1.

Θεώρημα. Αν το Ω είναι φραγμένο με ομαλό σύνορο C^1, τότε υπάρχει ένας τελεστής

$$T: \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega) \to \mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\partial\Omega)$$

τέτοιος ώστε

1. $Tu = u_{|\partial\Omega}$ αν $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega) \cap \mathrm{C}(\bar{\Omega})$.

2. $\|Tu\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)}$ για κάθε $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ με την σταθερά C να εξαρτάται μόνον απο το Ω και το p.

   Η εικόνα του T είναι ο χώρος

$$\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) = \left\{\mathrm{u} \in \mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\partial\Omega) : \frac{|\mathrm{u}(\mathrm{x}) - \mathrm{u}(\mathrm{y})|}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^{\frac{\mathrm{N}+\mathrm{p}-1}{\mathrm{p}}}} \in \mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\partial\Omega \times \partial\Omega)\right\}.$$

   Η Tu θα λέγεται το ίχνος της u στο σύνορο $\partial\Omega$.

Όπως διατυπώνεται στο παρακάτω θεώρημα, οι συναρτήσεις του $\dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ έχουν μηδενικό ίχνος στο $\partial\Omega$.

Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι φραγμένο με ομαλό σύνορο C^1 και $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. $u \in \dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$
2. $Tu = 0$ στο $\partial\Omega$.

Θεώρημα (Green). Έστω ότι το Ω είναι φραγμένο με ομαλό σύνορο C^1 και $u, v \in H^1(\Omega)$. Τότε για i=1,…N, έχουμε

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u + \int_{\partial\Omega} TuTv\eta_i,$$

όπου η_i είναι η i-συνιστώσα του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στο σημείο x του $\partial\Omega$.

Κεφάλαιο 5 : Εφαρμογές σε ελλειπτικά συνοριακά προβλήματα.

Θα δούμε τώρα το θεώρημα του Riesz το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Θεώρημα (Riesz). Έστω H ένας χώρος Hilbert και $l: H \to \mathbb{R}$ ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό $v \epsilon H$ τέτοιο ώστε $l(u) = (u, v)$. Επίσης, $||l|| = ||v||$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πυρήνα $N = \{z \epsilon H : l(z) = 0\}$ του l. Ο N είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H. Αν $N = H$, τότε ισχύει ότι $l(u) = 0 \text{ για κάθε } u \epsilon H \text{ οπότε } l = 0$.
Αν $N \neq H$, τότε $N^{\perp} \neq \{0\}$. Άρα υπάρχει $u_0 \neq 0 \;\; \sigma\tau o \;\; N^{\perp}$, οπότε $l(u_0) \neq 0$.
Παρατηρούμε ότι αν $u \epsilon H$, τότε $u - \frac{l(u)}{l(u_0)} u_0 \epsilon N$, επειδή

$$l\left(u - \frac{l(u)}{l(u_0)} u_0\right) = l(u) - \frac{l(u)}{l(u_0)} u_0 = 0.$$

Επειδή $u_0 \epsilon N^{\perp}$, έχουμε

$$\left(u - \frac{l(u)}{l(u_0)} u_0, u_0\right) = 0,$$

οπότε

$$(u, u_0) = \; l(u) \frac{\|u_0\|^2}{l(u_0)}.$$

Αν ορίσουμε $v = \frac{\overline{l(u_0)}}{\|u_0\|^2} v_0$, τότε $l(u) = (u, v)$.

Θα αποδείξουμε ότι το v είναι μοναδικό. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει άλλο ένα $\bar{v}$ με αυτή την ιδιότητα, τότε

$$(u, v) = (u, \bar{v}) \;\; \text{για κάθε } u \epsilon H,$$

δηλαδή $u - \bar{v} \perp H$, που σημαίνει ότι $u = \bar{v}$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $u \epsilon H \backslash \{0\}$ έχουμε

$\frac{|(u,v)|}{\|u\|_H} \leq \|v\|_H$, και για $u = v$ ισχύει ότι $\frac{|(u,v)|}{\|u\|_H} = \|v\|_H$.

Έτσι

$$\|l\| = \sup_{0 \neq u \epsilon H} \frac{|l(u)|}{\|u\|_H} = \sup_{0 \neq u \epsilon H} \frac{|(u,v)|}{\|u\|_H} = \|v\|_H.$$

1. Η εξίσωση Poisson με συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μια φραγμένη περιοχή. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u = F(x), \quad x \in \Omega \\ u|_{\vartheta\Omega} = g \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι άν η u είναι μια λύση του (1) και η $\Phi(.)$ είναι μια συνάρτηση στην περιοχή Ω τέτοια ώστε $\Phi|_{\vartheta\Omega} = g$, τότε η συνάρτηση $\upsilon(x) = u(x) - \Phi(x)$ είναι λύση του προβλήματος

$$\left.\begin{aligned} -\Delta \upsilon = f(x), \quad x \in \Omega \\ \upsilon\, |_{\vartheta\Omega} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

όπου $f(x) = F(x) + \Delta\Phi(x)$,

Θα μελετήσουμε κατ΄αρχάς το πρόβλημα (2) με την ομογενή συνοριακή συνθήκη. Στην κλασσική του μορφή το πρόβλημα αυτό μελετάται όταν το σύνορο είναι επαρκώς λείο, $f \in C^{\ell}(\overline{\Omega})$ με λύση $\upsilon \in C^2(\overline{\Omega})$.

Τώρα θα ορίσουμε την <u>ασθενή λύση</u> του προβλήματος (2). Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση $-\Delta\upsilon = f$ με την δοκιμαστική συνάρτηση $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ και ολοκληρώνοντας πάνω στην περιοχή Ω, έχουμε ότι

$$\int_\Omega \nabla\upsilon\, \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f\, \varphi\, dx, \ \ \text{για κάθε}\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3}$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας είναι καλά ορισμένο για κάθε συνάρτηση $\upsilon \in \dot{H}^1(\Omega) = \dot{W}_2^1(\Omega)$, $\varphi \in \dot{H}^1(\Omega)$, το δε δεξί μέλος της σχέσης είναι επίσης καλά ορισμένο για κάθε $f \in H^{-1}(\Omega)$ και $\varphi \in \dot{H}^1(\Omega)$. Η συνοριακή συνθήκη $\upsilon\,|_{\vartheta\Omega} = 0$ έχει νόημα επειδή $\upsilon \in \dot{H}^1(\Omega)$, οπότε το ίχνος της στο σύνορο είναι μηδέν.

<u>**Ορισμός:**</u> Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένη περιοχή. Μια συνάρτηση $\upsilon \in \dot{H}^1(\Omega)$ καλείται <u>ασθενής λύση</u> του προβλήματος Dirichlet (2) με $f \in H^{-1}(\Omega)$, εάν η υ ικανοποιεί την ιδιότητα (3) για κάθε συνάρτηση $\varphi \in \dot{H}^1(\Omega)$.

Θεώρημα 1: Θεωρούμε $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μια φραγμένη περιοχή. Τότε για κάθε $f \in H^{-1}(\Omega)$ υπάρχει μοναδική ασθενής λύση $\upsilon \in \dot{H}^1(\Omega)$ του προβλήματος Dirichlet (2) και

$$\|\upsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Επιστρέφουμε τώρα στο αρχικό μας πρόβλημα (1) έχοντας με την μη ομογενή συνοριακή συνθήκη $u|_{\vartheta\Omega} = \mathrm{g}$. Υποθέτουμε ότι $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ μια φραγμένη περιοχή με σύνορο C^1. Τότε ο τελεστής ίχνους T είναι συνεχής από τον $\mathrm{H}^1(\Omega)$ στον $\mathrm{H}^{1/2}(\vartheta\Omega)$:

$$T: \mathrm{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathrm{H}^{1/2}(\vartheta\Omega).$$

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\left.\begin{array}{rl} -\Delta u = F, & x \in \Omega \\ Tu = u|_{\vartheta\Omega} = \mathrm{g}(x) & \end{array}\right\}$$

με $F \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ και $\mathrm{g} \in \mathrm{H}^{1/2}(\vartheta\Omega)$. Η u αποτελεί μια ασθενή λύση της αρχικής εξίσωσης (1) εάν $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u\, \overline{\nabla\varphi}\, dx = \int_\Omega F\, \bar{\varphi}\, dx,\ \ \text{για κάθε } \varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$\text{και} \quad Tu = \mathrm{g}.$$

Θεώρημα 2: Θεωρούμε $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ μια φραγμένη περιοχή μα σύνορο C^ℓ. Έστω $F \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ και $\mathrm{g} \in \mathrm{H}^{1/2}(\vartheta\Omega)$. Τότε υπάρχει μοναδική ασθενής λύση $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ του προβλήματος (1) με

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\left(\|F\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)} + \|\mathrm{g}\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\vartheta\Omega)}\right).$$

2. *Dirichlet πρόβλημα με φασματική παράμετρο.*

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\left.\begin{array}{r} -\Delta u = \lambda\, u + f(x) \\ u|_{\vartheta\Omega} = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

με παράμετρο λ, όπου Ω είναι φραγμένη περιοχή.

<u>**Ορισμός:**</u> Θεωρούμε μια περιοχή $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ και $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Με $u \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ θα συμβολίζουμε την ασθενή λύση του παραπάνω προβλήματος (4) η οποία ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_\Omega \nabla u\, \nabla\varphi\, dx = \lambda \int_\Omega u\, \varphi\, dx + \int_\Omega f(x)\, \varphi\, dx\,,$$

για κάθε $\varphi \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$. Όπως και πριν με $[u\,,\varphi] = \int_\Omega \nabla u\, \nabla\varphi\, dx$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$. Η συνάρτηση $\varphi \rightarrow \int_\Omega u\, \varphi\, dx,\ u, \varphi \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$, είναι συνεχής στον χώρο $\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Riesz υπάρχει $Au \in \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε $[Au, \varphi] = \int_\Omega u\, \varphi\, dx$, όπου A γραμμικός συνεχής τελεστής στον χώρο $\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$.

Προφανώς

$$[Au, \varphi] = [u, A\varphi], \quad \text{για κάθε } \varphi, u \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega).$$

Άρα ο τελεστής A ικανοποιεί την $A = A^*$.

Επειδή $[Au, u] = \int_\Omega |u|^2\, dx > 0$ όταν $u \neq 0$, ο τελεστής A είναι θετικός.

<u>Λήμμα:</u> Ο τελεστής A είναι συμπαγής στον χώρο $\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$.

Όπως πριν, το συναρτησιακό $\ell_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\, dx$, με $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον $\varphi \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Riesz υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $\upsilon \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$\int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx = [\upsilon\,, \varphi], \ \text{για κάθε } \varphi \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$$

και

$$\|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)} = \|\upsilon\|_{\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)}.$$

Ξαναγράφουμε την παραπάνω ιδιότητα της ασθενούς λύσης στην μορφή

$$[u, \varphi] = \lambda[Au, \varphi] + [\upsilon, \varphi], \qquad \text{για κάθε } \varphi, u \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega),$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $u - \lambda\, A\, u = \upsilon$, όπου η συνάρτηση $\upsilon \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ είναι δεδομένη και αναζητούμε για την λύση $u \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$. Για τον λόγο αυτό περιορίζουμε το αρχικό πρόβλημα (4) στην αυθαίρετη εξίσωση

$$u - \lambda\, A\, u = \upsilon \tag{5}$$

με συμπαγή τελεστή A στον χώρο Hilbert $\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$. Στην συνέχεια θα αναλύσουμε την παραπάνω εξίσωση (5) χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συμπαγών τελεστών.

<u>Υποθέτουμε ότι $\upsilon = 0$ $(f = 0)$:</u>

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u = \lambda\, u, x \in \Omega) \\ u|_{\vartheta\Omega} = 0 \end{aligned}\right\}$$

οπότε

$$u - \lambda\, A\, u = 0.$$

Θέτοντας $\mu = \frac{1}{\lambda}$, έχουμε

$$A\, u = \mu\, u.$$

Είναι γνωστό ότι το φάσμα ενός συμπαγούς τελεστή είναι διακεκριμένο, δηλαδή αποτελείται από ιδιοτιμές οι οποίες μπορεί να συσσωρεύονται μόνο στο σημείο $\mu = 0$, κάθε ιδιοτιμή είναι πεπερασμένης πολλαπλότητας και πιο συγκεκριμένα $\dim\ker(A - \mu_j I) < \infty$. Στην περίπτωση που εξετάζουμε $A = A^* > 0$, γεγονός που καθορίζει ότι οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές. Απαριθμούμε τις ιδιοτιμές σε μη αυξανόμενη σειρά μετρώντας τις πολλαπλότητες $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$.Τότε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί σε μια ιδιοσυνάρτηση u_j: $A\, u_j = \mu_j u_j,\ j \in \mathbb{N}$.

Οι ιδιοσυναρτήσεις u_j είναι γραμμικά ανεξάρτητες και $\mu_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$. Άρα οι ιδιοτιμές $\lambda_j = \frac{1}{\mu_j}$ του προβλήματος Dirichlet ικανοποιούν

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq .. \text{ , και } \lambda_j \xrightarrow{j\to\infty} \infty.$$

Έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3: Το φάσμα του προβλήματος Dirichlet είναι διακεκριμένο. Υπάρχει μια μη τετριμμένη λύση μόνο στην περίπτωση που $\lambda = \lambda_j, j \in \mathbb{N}$. Όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές και έχουν πεπερασμένες πολλαπλότητες. Το μοναδικό σημείο συσσώρευσης είναι το άπειρο: $\lambda_j \xrightarrow{j\to\infty} \infty$.

Υποθέτουμε ότι $v \neq 0$ $(f \neq 0)$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u + f\,, x \in \Omega \\ \quad u|_{\vartheta\Omega} = 0 \end{cases}$$

οπότε

$$u - \lambda\, A\, u = v.$$

Γνωρίζουμε ότι για έναν συμπαγή τελεστή A, εάν $\lambda \neq \lambda_j (= \frac{1}{\mu_j})$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$ τότε ο τελεστής $(I - \lambda_j\ A)^{-1}$ είναι φραγμένος. Άρα η εξίσωση $(I - \lambda_j\ A)^{-1} v = u$ έχει μοναδική λύση και

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\|(I - \lambda_j\ A)^{-1}\right\| \|v\|_{H^1(\Omega)} \text{ , όπου } \left\|(I - \lambda_j\ A)^{-1}\right\| = C_\lambda.$$

Επειδή $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$, καταλήγουμε στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4: Υποθέτουμε ότι $\lambda \notin \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, δηλαδή ο λ δεν αποτελεί ιδιοτιμή. Τότε για κάθε $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ υπάρχει μοναδική (ασθενής) λύση του προβλήματος $u \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ με

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C_\lambda \|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $\lambda = \lambda_j$ και $u \neq 0, (f \neq 0)$. Τότε η εξίσωση $u - \lambda_j\, A\, u = \upsilon$ έχει λύση υπο την προυπόθεση ότι η υ ικανοποιεί την συνθήκη : $\upsilon \perp \ker(I - \lambda_j\, A)$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η υ είναι ορθογώνια (αναφορικά με το εσωτερικό γινόμενο [.,.]) στον χώρο $\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ προς ολες τις ιδιοσυναρτήσεις $\varphi_j^{(k)}, k = 1, \dots, p,$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_j (όπου p είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j).

Επειδή $[\upsilon, \varphi] = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx$, η παραπάνω συνθήκη είναι ισοδύναμη με την

$$\int_\Omega f(x)\, \varphi_j^{(k)}(x)\, dx = 0,\ \text{για κάθε}\ k = 1, \dots, p. \tag{6}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε άθροισμα της μορφής $\sum_{j=1}^{p} c_j\, \varphi_j^{(k)}$, $c_j \in \mathbb{R}$, είναι λύση της (4).

Θεώρημα 5: Εάν $\lambda = \lambda_j$ αποτελεί μια ιδιοτιμή του προβλήματος Dirichlet, και $\varphi_j^{(k)}, k = 1, \dots, p,$ είναι οι αντίστοιχες γραμμικώς ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις, τότε το πρόβλημα έχει λύση για κάθε $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες (6).

Η λύση δεν είναι μοναδική και λαμβάνει την εξής μορφή

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^{p} c_j\, \varphi_j^{(k)},$$

Όπου η u_0 είναι μια τυχαία λύση και $c_j \in \mathbb{R}$.

3. *Θεώρημα Hilbert-Schmidt*

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Hilbert-Schmidt για συμπαγείς τελεστές και καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Έστω $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ οι ιδιοτιμές του προβλήματος Dirichlet, οι οποίες επαναλαμβάνονται ανάλογα με την πολλαπλότητα τους.

Υπάρχει ένα ορθογώνιο σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$:

$$\varphi_j - \lambda_j A\varphi_j = 0,\ j \in \mathbb{N},\ \ [\varphi_j, \varphi_\ell] = 0,\ j \neq \ell.$$

Από το φασματικό θεώρημα των Hilbert-Schmidt οι ιδιοσυναρτήσεις $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ αποτελούν μια ορθογώνια βάση στον χώρο $\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$.

Πιο συγκεκριμένα κάθε $u \in \dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ γράφεται

$$,\ u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[u,\varphi_j]}{[\varphi_j,\varphi_j]} \varphi_j .$$

Η ανά δύο καθετότητα των ιδιοσυναρτήσεων φ_j ισχύει επίσης στον χώρο $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Πράγματι,

$$[A\varphi_j, \varphi_\ell] = \int_\Omega \varphi_j \varphi_\ell\, dx = \mu_j [\varphi_j, \varphi_\ell] = 0, \text{όταν } j \neq \ell.$$

Έτσι,

$$[u, \varphi_j] = \lambda_j [u, A\varphi_j] = \lambda_j \int_\Omega u\, \varphi_j\, dx,$$

$$[\varphi_j, \varphi_j] = \lambda_j [A\, \varphi_j, \varphi_j] = \lambda_j \int_\Omega |\varphi_j|^2\, dx,$$

δηλαδή

$$\frac{[u,\varphi_j]}{[\varphi_j,\varphi_j]} = \frac{\int_\Omega u\, \overline{\varphi_j}\, dx,}{\int_\Omega |\varphi_j|^2\, dx} = \frac{(u,\varphi_j)_{\mathrm{L}_2(\Omega)}}{\|\varphi_j\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}} \text{ και } u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(u,\varphi_j)_{\mathrm{L}_2(\Omega)}}{\|\varphi_j\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}} \varphi_j .$$

Έχουμε λοιπόν το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 6: Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μια φραγμένη περιοχή. Τότε υπάρχει ένα ορθογώνιο σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ του προβλήματος Dirichlet που αποτελεί μια βάση για τους χώρους $\mathrm{L}_2(\Omega)$ και $\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)$.

Κεφάλαιο 6 : Βιβλιογραφία

- ✓ R.A. Adams, J.J.F. Fournier, Sobolev Spaces, Academic Press.
- ✓ H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer.
- ✓ Weidl, Sobolev Spaces, διαδικτυακές σημειώσεις.