ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

«ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗ ΟΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΡΩΤΗ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΚΑΙ ΕΠΕΙΤΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΛΑΒΗΣ ΤΩΝ ΠΡΟΙΟΝΤΩΝ, ΕΧΟΝΤΑΣ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ»

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΣΙΑΤΑ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΜΑΡΙΝΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΧΑΝΙΑ, 2019

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Μαρινάκη Ιωάννη, για όλη τη βοήθεια του, την καθοδήγηση του πάνω στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου, που μέσα στα χρόνια σπουδών μου, μου έδωσαν τα εφόδια να κοιτάζω το μέλλον με αισιοδοξία και προοπτική.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη τους και την εμπιστοσύνη τους καθώς και τους φίλους μου.

Περιεχόμενα

ΤΙΤΛΟΣ .... **Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.**
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ 2
Κεφάλαιο 1 5
1.1 Εισαγωγή 5
1.1.1 Η έννοια της εφοδιαστικής αλυσίδας 5
1.1.2 Εφοδιαστική αλυσίδα 6
1.2 Βασικά προβλήματα που ασχολείται η εφοδιαστική αλυσίδα 7
1.2.1 Προβλήματα μεταφοράς και χωροθέτησης 7
1.2.2 Προβλήματα συσκευασίας 7
1.2.3 Προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής 7
1.2.4 Προβλήματα μεταφορών και διανομής 8
1.2.4α Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων 9
Κεφάλαιο 2. 10
2.1 Εισαγωγή 10
2.2 Περιγραφή προβλήματος οχημάτων 10
2.2.1 Πρόβλημα πλανόδιου πωλητή 12
2.2.2 Το περιορισμένης χωρητικότητας πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Capacitated Vehicle Routing Problem) 15
2.2.3 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με χρονικά περιθώρια (Vehicle Routing Problem with Time Windows) 20
2.2.4 Η ύπαρξη πολλαπλών αποθηκών (Multi depot Vehicle Routing) 24
2.2.5 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με διανομή και παραλαβή προϊόντων κατά τη διάρκεια της διαδρομής (Vehicle routing problem with pick up and delivery) 25
2.2.6 Στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Stochastic or Probabilistic Vehicle Routing Problem) 25
2.2.7 Προβλήματα προγραμματισμού οχημάτων (Vehicle Scheduling Problem - VSP) 26
2.2.8 Το πρόβλημα δρομολόγησης τόξων (Arc Routing Problem) 26
2.2.9 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής (Vehicle Routing Problem with backhauls and linehauls customers) 26
Κεφάλαιο 3 28
3.1 Σπουδαιότητα μελέτης του προβλήματος 28
3.2 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής (Vehicle routing problem with backhauls and linehauls customers) 28
3.3 Το μικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής (The Mixed Vehicle Routing Problem with Backhauls (MVRPB) 31
3.4 Το μικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής και πολλές αποθήκες (The Multiple Depot Mixed Vehicle Routing Problem with backhauls -MDMVRPB) ... 32
3.5 Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής και χρονικά παράθυρα (The Vehicle Routing Problem with Backhauls and Time Windows (VRPBTW) 32
3.6 Το μικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής με χρονικά παράθυρα (The Mixed Vehicle Routing Problem with Backhauls and Time Windows - MVRPBTW) 33
Κεφάλαιο 4 34
4.1 Αλγόριθμοι και το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων 34
4.1.1 Ευρετικοί Αλγόριθμοι 34
4.1.1a Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων – Ο αλγόριθμος των εξοικονομήσεων των Clarke&Wright (The savings algorithm) 37
4.1.1βΤο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων – Μέθοδοι δύο φάσεων 38
4.1.1γ Η μέθοδος των δύο φάσεων των Fisher&Jaikumar(18) 38
4.1.1δ Η μέθοδος των δύο φάσεων των Mole&Jameson(19). 39

4.1.1εΗ μέθοδος των δύο φάσεων των Christofides, Mignozzi&Toth(2) 39
4.1.2 Αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης (Local search algorithms) 40
4.1.2αΤο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων και οι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης 41
4.1.3 Διαδικασία άπληστης Τυχοποιημένης Προσαρμοστικής Αναζήτησης – Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι...42
4.1.3.α Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι και το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων............................43
4.2 Οι αλγόριθμοι επίλυσης...44
4.2.1 Οι αλγόριθμοι DB – SF- LHBH – TV(28) 45
4.2.2 Οι αλγόριθμοι OPEN – K-TREE – K-TREE_R(29) 48
4.2.3 Αλγόριθμος CLOVES (30) 52
4.2.4 Ο αλγόριθμος LNS (31)...53
4.2.5 Ο αλγόριθμος STANDARD..55
Κεφάλαιο 5 56
Αποτελέσματα 56
Πίνακας 1. 58
Πίνακας 2. 60
Πίνακας 3. 62
Πίνακας 4. 64
Πίνακας 5. 66
Συμπεράσματα..68
Ξένηβιβλιογραφία 69

Κεφάλαιο 1

1.1 Εισαγωγή

1.1.1 Η έννοια της εφοδιαστικής αλυσίδας

Με τον όρο Εφοδιαστική αλυσίδα εννοούμε όχι μόνο τη ροή υλικών από τον προμηθευτή πρώτων υλών ή τον κατασκευαστή μέχρι τον τελικό καταναλωτή, αλλά και τη ροή πληροφοριών μεταξύ των μελών της ίδιας αλυσίδας. Σύμφωνα με το Council project management καλείται η διαδικασία με την οποία προγραμματίζεται και πραγματοποιείται ο έλεγχος για οποιαδήποτε εφικτή και αποδοτική ροή των αγαθών από τον τρόπο που αποθηκεύονται στο αρχικό σημείο έως το τελικό σημείο που θα τα βρουν οι πελάτες.

Η εφοδιαστική αλυσίδα στο σύνολο της ασχολείται με την ανάπτυξη και την πραγματοποίηση τρόπων και μεθόδων για να υπάρξει πιο αποτελεσματική ανάπτυξη και επίτευξη των στόχων που έχει θέσει η επιχείρηση. Αποτελεί το σύνολο από τα στάδια τα οποία αρχίζουν από την παραγωγική μονάδα και φτάνουν μέχρι τον τελικό καταναλωτή και θα πρέπει να ικανοποιηθούν στο μέγιστο δυνατό βαθμό. Ο Βασικός σκοπός της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι η αποτελεσματικότητα και η μείωση του κόστους.

Η ολοκληρωμένη μεθοδολογία της Εφοδιαστικής αλυσίδας που ακολουθείται σε κάθε εφαρμογή συμπεριλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

I. Εντοπισμός του προβλήματος και εφαρμογή μεθόδων ανάλυσης για την οριοθέτηση των συστατικών του ή και των παραγόντων που το επηρεάζουν και τον προσδιορισμό των στρατηγικών –επιχειρησιακών στόχων και των περιορισμών που το διέπουν.

II. Μαθηματική η συστηματική προτυποποίηση για την ορθολογιστική απεικόνιση του προβλήματος.

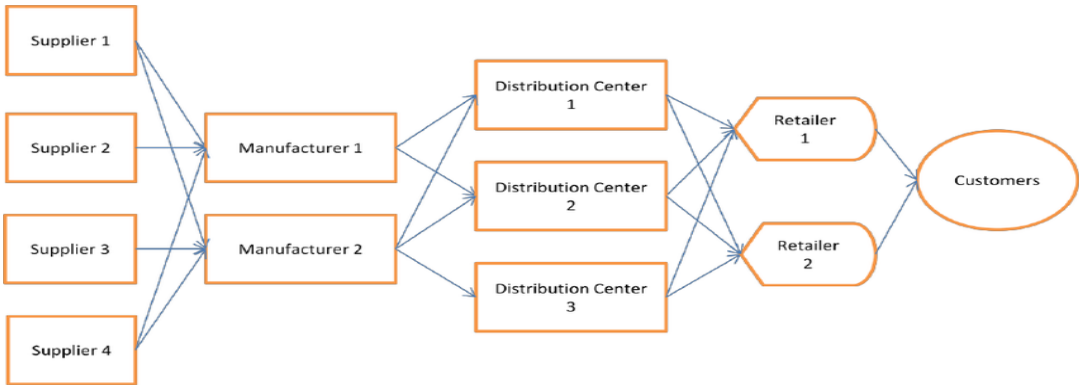
III. Ανάπτυξη (ή επιλογή υπαρχόντων) τεχνικών επίλυσης των προβλημάτων μέσω μαθηματικού προγραμματισμού, ευρετικών αλγορίθμων η άλλων υπολογιστικών μεθόδων ώστε να είναι δυνατή η σύγκλιση σε μια εφικτή ή και βέλτιστη λύση.

IV. Υλοποίηση των τεχνικών επίλυσης σε κατάλληλη πλατφόρμα που εξαρτάται από την πληροφοριακή υποδομή της αντίστοιχης εταιρείας, την ύπαρξη πακέτων λογισμικού, και τις ανάγκες για αποτελεσματικότητα και ταχύτητα στην εξεύρεση λύσεων.

V. Σχεδιασμός και σύνθεση των υποστηρικτικών πληροφοριακών συστημάτων που ενσωματώνουν τις τεχνικές επίλυσης και επιτρέπουν τη διεπαφή των μάνατζερ που πρέπει να λαμβάνουν τις αποφάσεις και των συστημάτων που περιέχουν τα δεδομένα και τις αλγοριθμικές προσεγγίσεις.

1.1.2 Εφοδιαστική αλυσίδα

Μια εφοδιαστική αλυσίδα (supply chain) ή και δίκτυο εφοδιαστικής (logistics network) αποτελείται από όλα τα στάδια που εμπλέκονται, έμμεσα ή άμεσα, στην ικανοποίηση των απαιτήσεων του πελάτη. Επομένως η εφοδιαστική αλυσίδα αποτελείται από κατασκευαστές, προμηθευτές, από χώρους αποθήκευσης, κέντρα διανομών μεταφορείς, πωλητές λιανικής, πελάτες αλλά και από τις πρώτες ύλες, τα αποθέματα κατά την διαδικασία παραγωγής και τα έτοιμα προϊόντα που ρέουν μεταξύ αυτών των σημείων (Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Εφοδιαστική Αλυσίδα

Η εφοδιαστική αλυσίδα είναι δυναμική και εμπλέκει την ροή προϊόντων, πληροφοριών και κεφαλαίων μεταξύ των διάφορων σταδίων. Κάθε στάδιο της αλυσίδας δεν είναι υποχρεωτικά παρόν σε όλες τις εφοδιαστικές αλυσίδες. Ο κατάλληλος σχεδιασμός της εφοδιαστικής αλυσίδας εξαρτάται τόσο από τις απαιτήσεις των πελατών όσο και από τον ρόλο που διάφορα στάδια διαδραματίζουν στην ικανοποίηση αυτών των απαιτήσεων. Είναι εμφανές από το Σχήμα 1 ότι η εφοδιαστική αλυσίδα λαμβάνει υπόψη της όλα τα έξοδα που δημιουργούνται στα διάφορα στάδια καθώς και από την αλληλεπίδραση των διάφορων σταδίων. Παρατηρούμε ότι σε κάθε εφοδιαστική αλυσίδα υπάρχει μόνο μία πηγή προσόδων: ο πελάτης. Από την άλλη πλευρά, όλες οι ροές πληροφοριών, προϊόντων, ή κεφαλαίων δημιουργούν δαπάνες. Υπολογίζεται ότι σε πολλές περιπτώσεις το κόστος της ροής των υλικών μέσω της αλυσίδας πλησιάζει το 75% του ολικού προϋπολογισμού.

Τρία είναι τα κριτήρια για την απόδοση της εφοδιαστικής αλυσίδας:

- Το ολικό κόστος
- Το ολικό κέρδος
- Ο χρονικός κύκλος

Ο βασικός σκοπός της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι να μεγιστοποιήσει την ολική αξία (overallvalue), όπου η αξία αναφέρεται στη διαφορά μεταξύ του τι αξίζει το τελικό προϊόν για τον πελάτη και την προσπάθεια που καταβλήθηκε από την εφοδιαστική αλυσίδα για να ικανοποιήσει την απαίτηση του πελάτη. Συνεπώς ο σκοπός της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι να την καταστήσει εφικτή και αποτελεσματική ως προς το κόστος καθ' όλο το μήκος του συστήματος. Το *ολικό κόστος* που προέρχεται από τις μεταφορές, την διανομή, κλπ. πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

Παρομοίως, το *ολικό κέρδος* (overall profitability) της εφοδιαστικής αλυσίδας αναφέρεται στο ολικό κέρδος που πρέπει να διανεμηθεί κατά μήκος της αλυσίδας. Συνεπώς, ο σκοπός της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας εμπεριέχει την διαχείριση των ροών μεταξύ των σταδίων της εφοδιαστικής αλυσίδας για να μεγιστοποιήσει το ολικό κέρδος.

Ο *χρονικός κύκλος (cycletime)* είναι ο ολικός χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί η ολική διαδικασία από τις πρώτες ύλες στο έτοιμο προϊόν στο πελάτη. Υπολογίζεται ότι γενικά μόνο το 5% του κύκλου χρησιμοποιείται για την εκτέλεση της πραγματικής διαδικασίας. Η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας θα πρέπει να αποσκοπεί στην βελτίωση αυτής της απόδοσης.

1.2 Βασικά προβλήματα που ασχολείται η εφοδιαστική αλυσίδα

1.2.1 Προβλήματα μεταφοράς και χωροθέτησης

Η εφοδιαστική αλυσίδα μπορεί να αποδοθεί με ένα δίκτυο αποτελούμενο από διάφορα επίπεδα (level) ή στρώματα (layers) κόμβων όπου τόξα τα συνδέουν μεταξύ τους. Τα προβλήματα μεταφοράς αναφέρονται στις μετακινήσεις αγαθών μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων κόμβων.

Το πρόβλημα χωροθέτησης εγκαταστάσεων είναι μείζονος σημασίας για μια εταιρεία. Η βέλτιστη διασπορά των εγκαταστάσεων της μπορούν να την οδηγήσουν στην ανάπτυξη. Πιο αναλυτικά, έχουμε μία η περισσότερες εγκαταστάσεις στις οποίες έχει ανατεθεί προς εξυπηρέτηση, συγκεκριμένος αριθμός χωρικά διατεταγμένων απαιτήσεων (πελάτες). Ο αντικειμενικός στόχος είναι η βέλτιστη τοποθέτηση των εγκαταστάσεων με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζουν ελαχιστοποίηση του κόστους εγκατάστασης και μεγιστοποίηση του κέρδους της εταιρείας.

1.2.2 Προβλήματα συσκευασίας

Τα προβλήματα συσκευασίας (bin packing) αναφέρονται στην τοποθέτηση ή στοίβαξη αντικειμένων σε έναν δεδομένο χώρο. Τα προβλήματα αυτά κατηγοριοποιούνται συνήθως ως προς τις διαστάσεις των προς στοίβαξη αντικειμένων. Έχουμε έτσι μονοδιάστατη, δισδιάστατη, τρισδιάστατη, κλπ.Στοίβαξη, αλλά και ως προς το σχήμα των προς στοίβαξη αντικειμένων.

1.2.3 Προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής

Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας είναι δυναμικά προβλήματα παραγωγής και αποθεματοποίησης. Τα προβλήματα αυτά αναφέρονται στον προγραμματισμό παραγωγής για έναν χρονικό ορίζοντα διαιρεμένο σε ισομεγέθη χρονικές περιόδους και στον προγραμματισμό των αποθεμάτων για την στήριξη της παραγωγής σε μελλοντικές περιόδους έτσι ώστε να επιτευχθεί η ικανοποίηση της ζήτησης των πελατών σε κάθε περίοδο και οι αποθεματικές απαιτήσεις στο τέλος του ορίζοντα προγραμματισμού με το ελάχιστο δυνατόν συνολικό κόστος παραγωγής και αποθεματοποίησης

1.2.4 Προβλήματα μεταφορών και διανομής

Η αποστολή της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι να μεταφερθούν τα κατάλληλα προϊόντα ή οι κατάλληλες υπηρεσίες στο κατάλληλο μέρος την κατάλληλη ώρα στην επιθυμητή κατάσταση και συγχρόνως να πραγματοποιείται μέγιστη απόδοση για την εταιρεία. Οι δραστηριότητες της εφοδιαστικής αλυσίδας λειτουργούν ως σύνδεσμος μεταξύ της παραγωγής και της κατανάλωσης και ενώνουν τις τοποθεσίες παραγωγής με τις τοποθεσίες που βρίσκονται οι αγοραστές ή οι προμηθευτές που χωρίζονται τοπικά και χρονικά.

Ένα σύστημα μεταφοράς μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή δικτύου κόμβων και τόξων, όπου οι κόμβοι τυπικά αντιπροσωπεύουν πόλεις, αεροδρόμια, στάσεις και αποθήκες και τα τόξα αντιπροσωπεύουν τους συνδέσμους ή τις διαδρομές μεταξύ των κόμβων. Οι κόμβοι και τα τόξα μπορεί να έχουν περιορισμούς χωρητικότητας.

Οι 5 τρόποι μεταφοράς είναι:

I. Οι σιδηροδρομικοί μεταφορείς. Οι σιδηροδρομικοί μεταφορείς έχουν τη δυνατότητα μεταφοράς μεγάλων ποσοτήτων σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις με μικρό κόστος και μπορούν να μεταφέρουν υλικά σε οποιαδήποτε μορφή. Για το σκοπό αυτό παρέχουν τις κατάλληλες εγκαταστάσεις, αλλά και τον κατάλληλο εξοπλισμό χειρισμού υλικών.

II. Οι οδικοί μεταφορείς. Υπάρχουν σήμερα πάρα πολλές παραλλαγές οδικών μεταφορικών μέσων τα οποία καλύπτουν οποιαδήποτε μεταφορική ανάγκη. Οι οδικοί μεταφορείς έχουν τη δυνατότητα μεταφοράς από πόρτα σε πόρτα χωρίς να απαιτείται κάποια μετατροπή καθώς και πάρα πολύ μεγάλη ευελιξία επιλογής δρομολογίων και αλλαγής κατευθύνσεων.

III. Οι θαλασσιοί μεταφορείς. Οι θαλάσσιοι μεταφορείς χωρίζονται σε εγχώριους και σε υπερπόντιους και έχουν τη δυνατότητα μεταφοράς πολύ μεγάλων και παντός είδους φορτίων με χαμηλό κόστος ανά μίλι, πράγματα που αντικαθιστούν το γεγονός ότι απαιτείται αρκετά μεγάλος χρόνος για την ολοκλήρωση της μεταφοράς. Ο τύπος του θαλάσσιου μεταφορέα εξαρτάται από το είδος του μεταφερόμενου φορτίου και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μεταφορά ορισμένων επικίνδυνων και εξειδικευμένων φορτίων καθώς αυτό μπορεί να επιβάλλεται είτε για λόγους ασφαλείας είτε γιατί κάποιες χώρες ίσως να μην επιτρέπουν τη μεταφορά ορισμένων φορτίων από την επικράτειά τους.

IV. Οι αεροπορικοί μεταφορείς. Με τους αεροπορικούς μεταφορείς μεταφέρονται στην πλειονότητα επιβάτες και μόνο σε ποσοστό περίπου 10% μεταφέρονται φορτία. Τα φορτία που μεταφέρονται αεροπορικώς είναι γενικά μεγάλης αξίας ή υλικά που έχουν μικρή διάρκεια ζωής ή έχουν το χαρακτήρα του επείγοντος.

V. Οι αγωγοί μεταφορών. Οι αγωγοί μεταφορών μεταφέρουν υγρά φορτία και αέρια. Η μεταφορά μέσω αγωγών παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι μπορεί να γίνει μόνο όπου υπάρχει εγκαταστημένο δίκτυο και κυρίως προς μία μόνο κατεύθυνση αν και η αλλαγή κατεύθυνσης παρόλο που είναι εφικτή σε θεωρητικό επίπεδο, στην πράξη απαιτεί την τροποποίηση του δικτύου αντλιών γεγονός που την καθιστά δύσκολη. Η μεταφορά με αγωγούς έχει το χαμηλότερο κόστος μεταφοράς και δεν απαιτεί συσκευασία των προϊόντων, ούτε υπάρχει ανεκμετάλλευτος ή υποαπασχολούμενος εξοπλισμός.

1.2.4α Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων

Τα προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων για την παράδοση ή την παραλαβή προϊόντων στους/από τους πελάτες προκύπτουν στα πλαίσια των επιχειρησιακών δραστηριοτήτων μεταφοράς. Αυτά τα προβλήματα ανήκουν στην ομάδα προβλημάτων που είναι γνωστά με τον όρο Προβλήματα Δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problems). Η διανομή προϊόντων αφορά την εξυπηρέτηση, σε μια δεδομένη χρονική περίοδο σε ένα σύνολο από πελάτες από ένα σύνολο από οχήματα, που έχουν σαν αφετηρία τους μία συγκεκριμένη αποθήκη, χρησιμοποιούνται από ένα συγκεκριμένο αριθμό από οδηγούς και πραγματοποιούν τις κινήσεις τους χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο οδικό δίκτυο.

Γενικά η σωστή επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων έχει σαν αποτέλεσμα τον καθορισμό ενός συνόλου από διαδρομές, κάθε μία από αυτές ξεκινά και καταλήγει σε μια αποθήκη, ικανοποιώντας τις απαιτήσεις των πελατών, μη παραβιάζοντας τους περιορισμούς και έχοντας ελαχιστοποιήσει το κόστος διανομής.

Κεφάλαιο 2.

2.1 Εισαγωγή

Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρήθηκε μια αυξανόμενη χρήση των πακέτων βελτιστοποίησης, με βάση τις τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας και Μαθηματικού Προγραμματισμού, για την αποτελεσματική διαχείριση της παροχής αγαθών και υπηρεσιών στα συστήματα διανομής. Ο μεγάλος αριθμός των πραγματικών εφαρμογών, τόσο στη Βόρεια Αμερική όσο και στην Ευρώπη, έχουν δείξει ευρέως ότι η χρήση ηλεκτρονικών διαδικασιών για τον προγραμματισμό της διανομής εξοικονομεί (κατά κανόνα από 5% έως 20%) του κόστους μεταφοράς. Ο αντίκτυπος αυτών των αποταμιεύσεων στο παγκόσμιο οικονομικό σύστημα είναι σημαντικός. Η επιτυχία της αξιοποίησης των Τεχνικών Επιχειρησιακής Έρευνας οφείλεται στην ανάπτυξη συστημάτων πληροφορικής τόσο από πλευράς υλικού όσο και λογισμικού, και στην αυξανόμενη ενσωμάτωση των συστημάτων πληροφοριών στις παραγωγικές και εμπορικές διαδικασίες. Ένας επιπλέον σημαντικός παράγοντας όσο και οι άλλοι, είναι η ανάπτυξη της μοντελοποίησης και τα αλγοριθμικά εργαλεία που εφαρμόστηκαν τα τελευταία χρόνια.

2.2 Περιγραφή προβλήματος οχημάτων

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problem - VRP) απαιτεί τον προσδιορισμό του βέλτιστου συνόλου διαδρομών που πρέπει να εκτελεσθούν από ένα στόλο οχημάτων για να εξυπηρετήσουν ένα συγκεκριμένο σύνολο πελατών. Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων είναι ένα εκ των σημαντικότερων συνδυαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης που έχουν μελετηθεί. Ειδικότερα, η λύση ενός VRP (Vehicle Routing Problem) απαιτεί τον προσδιορισμό ενός συνόλου διαδρομών, εκάστη εκτελούμενη από ένα μόνο όχημα που αρχίζει και τελειώνει στη δική του αποθήκη, έτσι ώστε όλες οι απαιτήσεις των πελατών να πληρούνται, όλοι οι επιχειρησιακοί περιορισμοί να ικανοποιούνται και το κόστος μεταφοράς να μειώνεται στο ελάχιστο. Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε τα τυπικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων δρομολόγησης και προγραμματισμού εξετάζοντας τα κύρια στοιχεία τους (οδικό δίκτυο, πελάτες, αποθήκες, οχήματα και οδηγούς), τους διαφορετικούς επιχειρησιακούς περιορισμούς που μπορεί να υπάρχουν και τους πιθανούς στόχους που πρέπει να επιτευχθούν στο πλαίσιο της διαδικασία βελτιστοποίησης.

Το οδικό δίκτυο που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά αγαθών περιγράφεται γενικά από ένα γράφημα, του οποίου τα τόξα αντιπροσωπεύουν τα τμήματα του δρόμου και των οποίων οι κορυφές αντιστοιχούν στις τοποθεσίες αποθηκών και πελατών. Τα τόξα (και κατά συνέπεια τα αντίστοιχα γραφήματα) μπορούν να είναι μονής η διπλής κατεύθυνσης. Κάθε τόξο σχετίζεται με ένα κόστος, το οποίο γενικά αντιπροσωπεύει το μήκος του και ένα χρόνο ταξιδιού.

Τυπικά χαρακτηριστικά των πελατών είναι :

•Το σημείο του γραφήματος διανομής στο οποίο βρίσκεται ο πελάτης.

•Η ποσότητα των αγαθών (ζήτηση), ενδεχομένως διαφορετικού είδους, η οποία πρέπει να παραδοθεί στο πελάτη η να συλλεχθεί από αυτόν.

• Τα χρονικά διαστήματα (time windows) κατά τη διάρκεια της ημέρας στα οποία ο πελάτης μπορεί να εξυπηρετηθεί (όπως για παράδειγμα εξαιτίας συγκεκριμένων περιόδων κατά τις οποίες η εταιρεία του πελάτη λειτουργεί ή η τοποθεσία του είναι προσπελάσιμη βάσει συγκοινωνιακών περιορισμών.

• Ο χρόνος που απαιτείται για την παράδοση ή τη συλλογή των εμπορευμάτων από τον πελάτη (εκφόρτωση ή χρόνοι φόρτωσης, αντίστοιχα), ανάλογα με τον τύπο του οχήματος.

• Το είδος των διαθέσιμων οχημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξυπηρέτηση του πελάτη (για παράδειγμα, λόγω πιθανών περιορισμών πρόσβασης ή απαιτήσεων φόρτωσης και εκφόρτωσης).

Μερικές φορές δεν είναι δυνατή η πλήρης ικανοποίηση των απαιτήσεων του κάθε πελάτη. Σε αυτές τις περιπτώσεις η ποσότητα των αγαθών που διανέμεται ή συλλέγεται μπορεί να μειωθεί ή ένα σύνολο πελατών να μην εξυπηρετηθεί. Για την αντιμετώπιση αυτών των καταστάσεων διάφορες προτεραιότητες που σχετίζονται με τη μερική ή την πλήρη έλλειψη εξυπηρέτησης μπορούν να ανατεθούν στους πελάτες.
Οι διαδρομές που εκτελούνται για την εξυπηρέτηση των πελατών ξεκινούν και καταλήγουν σε μία ή περισσότερες αποθήκες, οι οποίες αντιστοιχούν σε συγκεκριμένους κόμβους του δικτύου. Κάθε αποθήκη χαρακτηρίζεται από τον αριθμό και το πλήθος των οχημάτων που συνδέονται με αυτή και από τη μέγιστη χωρητικότητα των αγαθών που μπορεί να αντιμετωπίσει.

Η μεταφορά εμπορευμάτων πραγματοποιείται με τη χρησιμοποίηση στόλου οχημάτων των οποίων η σύνθεση και το μέγεθος μπορεί να καθοριστεί ή μπορεί να οριστεί σύμφωνα με τις απαιτήσεις των πελατών.

<u>Τυπικά χαρακτηριστικά των οχημάτων είναι :</u>

• Η αποθήκη που θα ξεκινήσει το όχημα και η δυνατότητα τερματισμού σε διαφορετική αποθήκη από την αρχική.

• Αν τα οχήματα έχουν ένα τμήμα ή όχι και αν όχι πως θα φορτωθεί το κάθε τμήμα του οχήματος.

• Η πιθανή υποδιαίρεση των οχημάτων σε ομάδες, κάθε μία από τις οποίες χαρακτηρίζεται από τη χωρητικότητα και από το είδος των προϊόντων που μπορεί να μεταφέρει.

• Το σύνολο των δρόμων που είναι προσπελάσιμοι από το όχημα

• Η χωρητικότητα του οχήματος, εκφρασμένη ως το μέγιστο βάρος ή τον όγκο ή την ποσότητα αγαθών που το όχημα μπορεί να φορτώσει.

• Ο διαθέσιμες συσκευές για τις εργασίες φόρτωσης και εκφόρτωσης.

• Οι δαπάνες που σχετίζονται με τη χρήση του οχήματος (ανά μονάδα απόστασης, ανά μονάδα χρόνου, ανά διαδρομή κ.λπ.).

Οι οδηγοί που χειρίζονται τα οχήματα πρέπει να ικανοποιούν αρκετούς περιορισμούς που καθορίζονται από την ένωση οδηγών και εταιρικούς κανονισμούς (π.χ περίοδοι εργασίας κατά τη διάρκεια της ημέρας, αριθμός και διάρκεια διαλείμματος κατά τη διάρκεια της υπηρεσίας, μέγιστη διάρκεια οδήγησης, υπερωρίες). Επιπλέον οι διαδρομές πρέπει να ικανοποιούν αρκετούς επιχειρησιακούς περιορισμούς, οι οποίοι εξαρτώνται από τη φύση των μεταφερομένων αγαθών, της ποιότητας του επιπέδου των υπηρεσιών και των χαρακτηριστικών των πελατών και των οχημάτων.

Μερικοί τυπικοί επιχειρησιακοί περιορισμοί είναι οι εξής:

- Η συνολική ζήτηση της κάθε διαδρομής δεν μπορεί να υπερβαίνει τη συνολική χωρητικότητα του οχήματος.

- Οι πελάτες που εξυπηρετούνται σε μια διαδρομή μπορούν να απαιτήσουν μόνο την παράδοση ή τη συλλογή αγαθών ή και τα δύο.

- Οι πελάτες μπορούν να εξυπηρετηθούν μόνο μέσα στα χρονικά τους περιθώρια και τις περιόδους εργασίας των οδηγών που συνδέονται με τα οχήματα που τους επισκέπτονται. Μπορούν να επιβληθούν περιορισμοί στη σειρά με την οποία επισκέπτονται τα οχήματα τους πελάτες που εξυπηρετούνται σε μια διαδρομή.

- Τα οχήματα μπορεί να μεταφέρουν παραπάνω από ένα προϊόντα.

Οι στόχοι που τίθενται στην περίπτωση επίλυσης των προβλημάτων δρομολόγησης οχημάτων είναι οι ακόλουθοι :

- Η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς των προϊόντων, το οποίο εξαρτάται από τη συνολική διανυθείσα απόσταση ή από το συνολικό χρόνο που απαιτείται για τη μεταφορά των προϊόντων, και του πάγιου κόστους το οποίο σχετίζεται με τον αριθμό των οχημάτων και των οδηγών που θα χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση του προβλήματος.

- Η ελαχιστοποίηση του αριθμού των οχημάτων ή των οδηγών που απαιτούνται για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών.

- Η ισορροπία μεταξύ των διαδρομών που θα προκύψουν στο τελικό μοντέλο σχετικά με τις ώρες που απαιτούνται για να διανυθούν αυτές ή μεταξύ των φορτίων που αντιστοιχούν σε κάθε διαδρομή.

- Η ελαχιστοποίηση των ποινών που αφορούν μερική ικανοποίηση των πελατών.

2.2.1 Πρόβλημα πλανόδιου πωλητή (traveling salesman problem - TSP)

Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (traveling salesman problem - TSP) αφορά την εύρεση της συντομότερης (σε χρόνο, απόσταση ή άλλο κόστος) διαδρομής για ένα όχημα (ή πωλητή) με αφετηρία κάποιο σημείο π.χ ένα κέντρο διανομής, και επιστροφή στο ίδιο σημείο αφού επισκεφθεί έναν σταθερό αριθμό πελατών ακριβώς μία φορά τον καθένα.

Για την διαμόρφωση ενός μαθηματικού προτύπου υποθέτουμε ότι οι κόμβοι ανήκουν σε ένα μη-διατεταγμένο γράφημα που είναι πλήρες. Ας είναι $i = 2,\dots,n$ οι κόμβοι των πελατών και $i = 1$ ο κόμβος αφετηρίας. Από την υπόθεση, κάθε μη-διατεταγμένο ζεύγος $\{i,j\}$ με $i \neq j$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,n$, αντιστοιχεί σε ένα σύνδεσμο ή ακμή του γραφήματος. Σε κάθε τέτοιο σύνδεσμο αντιστοιχίζουμε ένα σταθμό c_{ij} που είναι ίσο με το κόστος της διαδρομής του οχήματος από το i στο j ή αντίστροφα.

Επειδή ένας τέτοιος σύνδεσμος δεν αντιστοιχεί πάντοτε σε κάποιο φυσικό τμήμα δρόμου θα υποθέσουμε ότι τα σταθμά έχουν υπολογιστεί έτσι ώστε να αντιστοιχούν στην διαδρομή ελαχίστου κόστους μεταξύ των δύο κόμβων, οπότε ικανοποιούν τις δύο συνθήκες :

- Συμμετρία : $c_{ij} = c_{ji}$, $i \neq j$, i=1,…,n, j=1,…,n
- Τριγωνική ανισότητα : $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$, $i \neq j \neq k$, i=1,…,n, j=1,…,n, k=1,…,n.

Οι οποίες υπό αυτές τις συνθήκες είναι φυσιολογικές, καθώς η συνθήκη της συμμετρίας απεξαρτεί το κόστος του απευθείας ταξιδιού μεταξύ i και j από την κατεύθυνση, ενώ η συνθήκη της τριγωνικής ανισότητας διατυπώνει ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι ο απευθείας.

Αν ορίσουμε τις δυαδικές μεταβλητές

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{εάν το όχημα κάνει χρήση του συνδέσμου } \{i,j\} \\ 0, \text{αλλιώς}, \text{για κάθε } i,j, i \neq j \end{cases}$$

Τότε το πρότυπο διαμορφώνεται ως εξής:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i \neq j}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\text{Υπό} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 2, i=1,\dots,n \quad (2.2)$$

$$\sum_{i \in C} \sum_{j \in \bar{C}} x_{ij} \geq 1, \ \forall C \subset \{1,\dots,n\}, \ C \neq \emptyset \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall i, \forall j, \ i \neq j \quad (2.4)$$

Οι περιορισμοί (2.2) επιβάλλουν στην λύση να έχει δύο συνδέσμους σε κάθε κόμβο, έτσι ώστε το όχημα να εισέλθει κατά μήκος του ενός και να εξέλθει κατά μήκος του άλλου, ενώ οι περιορισμοί (2.3) αποβλέπουν στην εξάλειψη κυκλικών διαδρομών (υποκύκλων) που δεν διέρχονται από όλους τους κόμβους απαιτώντας από κάθε εν δυνάμει υποκύκλο, που αντιπροσωπεύεται από ένα κατάλληλο μη- κενό υποσύνολο C των κόμβων, να διαθέτει στην λύση τουλάχιστον ένα σύνδεσμο που οδηγεί στο συμπληρωματικό του υποσύνολο $\bar{C}$ = {1,…,n} \ C.

Όταν η φορά του οχήματος, εάν δηλαδή κινείται από το i στο j ή από το j στο i, παίζει ρόλο τότε, το γράφημα αποτελείται από τόξα που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη (i,j) και (j,i) αντίστοιχα και ως τέτοια $(i,j) \not\equiv (j,i)$. Υπό αυτές τις συνθήκες η συνθήκη συμμετρίας δεν ισχύει (Εάν ίσχυε, τότε θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε τα διατεταγμένα ζεύγη από τα αντίστοιχα μη-διατεταγμένα και θα είχαμε την περίπτωση που ήδη εξετάσαμε) οπότε $c_{ij} \neq c_{ji}$ τουλάχιστον για κάποια i και j. Το μαθηματικό πρότυπο σε αυτήν τη περίπτωση διαμορφώνεται από το (2.1) – (2.4), αντικαθιστώντας όμως τον περιορισμό (2.2) με δύο νέους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i=1,\dots,n \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j=1,\dots,n \quad (2.6)$$

Όπου ο (2.5) εγγυάται ότι το όχημα εξέρχεται από τον κόμβο i χρησιμοποιώντας ένα ακριβώς τόξο προς κάποιον άλλο κόμβο j, ενώ ο (2.6) εγγυάται ότι το όχημα εισέρχεται στον κόμβο j χρησιμοποιώντας ένα ακριβώς τόξο από κάποιον άλλο κόμβο i.

Αμφότερα τα πρότυπα έχουν ένα μειονέκτημα: ο αριθμός των περιορισμών (2.3) αυξάνει εκρηκτικά με τον αριθμό των κόμβων. Υπάρχει η δυνατότητα διατύπωσης προτύπου με περιορισμένο αριθμό περιορισμών. Για τον λόγο αυτό θα θεωρήσουμε ότι στην αφετηρία παράγεται μία μονάδα κάποιου αγαθού για κάθε πελάτη και ότι τα αγαθά αυτά δεν αναμειγνύονται. Επιπρόσθετα θα δημιουργήσουμε έναν ακόμη πελάτη n_o=n+1 δημιουργώντας ένα αντίγραφο της αφετηρίας (μαζί με τα τόξα που της ανήκουν). Έτσι για κάθε τόξο (i,j) ορίζουμε τις μεταβλητές y^k_{ij}που αναφέρει την ποσότητα (από την μία μονάδα) που διακινείται στο τόξο με προορισμό τον πελάτη k, k=2,…,n_o. Το πρότυπο δύναται τότε να διατυπωθεί ως εξής:

$$\min \sum_{i=1}^{no} \sum_{j=1\ i\neq j}^{no} c_{ij} x_{ij} \quad (2.7)$$

$$\text{υπό} \sum_{j=1}^{no} x_{ij}=1,\ i=1,\ldots,n \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ j=2,\ldots,n_o \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^{no} y^k_{ij} - \sum_{j=1\ j\neq i}^{no} y^k_{ji} = \begin{cases} 1, εάν\ i=1 \\ -1, εάν\ i=k, & \forall i, \forall k \\ 0, αλλιώς \end{cases} \quad (2.10)$$

$$y^k_{ij} \leq x_{ij},\ \forall i, \forall j,\ i\neq j,\ \forall k \quad (2.11)$$

$$y^k_{ij} \geq 0,\ \forall i, \forall j,\ i\neq j,\ \forall k \quad (2.12)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\},\ \forall i, \forall j,\ i\neq j \quad (2.13)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (2.7) και οι περιορισμοί (2.8-2.9) και (2.13) παραμένουν στην ουσία οι ίδιοι με πριν, ενώ οι περιορισμοί (2.3) έχουν αντικατασταθεί από τους (2.10), (2.11),(2.12) που ο αριθμός τους είναι $O(n^3)$ συγκριτικά με τον αριθμό $O(2^n)$ των προηγούμενων προτύπων. Φυσικά το επιτύχαμε αυτό εισάγοντας $O(n^3)$ νέες μεταβλητές. Οι περιορισμοί (2.10) είναι γνωστές εξισώσεις ισορροπίας της ροής και εγγυώνται ότι η μία και μονάδα από το σημείο αφετηρίας με προορισμό τον πελάτη k αφικνείται στον προορισμό της χωρίς να απορροφηθεί από ενδιάμεσους κόμβους i. Οι περιορισμοί αυτοί διατυπώνονται για κάθε κόμβο i και για κάθε πελάτη k στην μορφή εκροή από τον κόμβο i – εισροή στον κόμβο i. Τέλος οι περιορισμοί (2.11) εγγυώνται ότι το αγαθό με προορισμό τον πελάτη kκινείται μόνον σε τόξα για τα οποία xij = 1, τόξα με άλλα λόγια που έχουν επιλεγεί για την βέλτιστη λύση.

Στο πρότυπο αυτό κάθε εφικτή λύση έχει αναγκαστικά, όπως το επιβάλλουν οι περιορισμοί (2.8) και (2.9), ένα τόξο εισόδου και ένα τόξο εξόδου για κάθε έναν από τους κόμβους με εξαίρεση τον κόμβο αφετηρίας 1 όπου ζητάμε μόνον ένα τόξο εξόδου και το αντίγραφο του n_oόπου απαιτούμε μόνο ένα τόξο εισόδου. Οι περιορισμοί ροών απαιτούν την επιλογή αυτών τόξων με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει δυνατότητα για κάθε αγαθό να αφιχθεί στον προορισμό του και άρα πρέπει η εφικτή λύση να προδιαγράφει μία πλήρη διαδρομή από την αφετηρία σε κάθε πελάτη συμπεριλαμβανομένου και του n_o. Για την ικανοποίηση αυτής της απαίτησης αρκούν n_o-1 τόξα για την δημιουργία μιας διαδρομής που από την αφετηρία εξυπηρετεί όλους τους n_o-1 πελάτες. Η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, και εφόσον όλα τα cij είναι θετικά, δεν πρόκειται να επιτρέψει την χρήση περισσότερων τόξων. Άρα η βέλτιστη λύση θα αποτελείται από n τόξα τα οποία, εάν συμπτύξουμε την αφετηρία και το αντίγραφο της, θα μας δώσουν τον ζητούμενο κύκλο του πλανόδιου πωλητή.

2.2.2 Το περιορισμένης χωρητικότητας πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Capacitated Vehicle Routing Problem)

Το περιορισμένης χωρητικότητας πρόβλημα της δρομολόγησης οχημάτων (Capacitated Vehicle Routing Problem) ή απλούστερα το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problem) είναι στην ουσία επέκταση του προβλήματος του πλανόδιου πωλητή στις περιπτώσεις όπου ένα μόνο όχημα δεν δύναται να επισκεφτεί όλους τους πελάτες. Σε αυτήν την περίπτωση, αναζητούνται πολλαπλοί υπόκυκλοι (κυκλικές διαδρομές), όλοι με αρχή και τέλος το ίδιο σημείο αφετηρίας, όπου έκαστος επισκέπτεται ένα υποσύνολο πελατών και όπου οι πελάτες καλύπτονται από το σύνολο των υποκύκλων, χωρίς κάποιος πελάτης να καλύπτεται από περισσότερους τους ενός υποκύκλους. Όπως και στην περίπτωση του πλανόδιου πωλητή, στο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων αναζητούμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος των κυκλικών διαδρομών που εξυπηρετούν τους πελάτες από την αφετηρία. Οι λόγοι για τους οποίους αδυνατεί ένα όχημα να εξυπηρετήσει όλους τους πελάτες μπορεί να είναι πολλοί, π.χ. η συνολική ζήτηση των πελατών υπερβαίνει την δυναμικότητα του οχήματος, η ζήτηση πρέπει να ικανοποιηθεί μέσα σε ορισμένα χρονικά όρια που είναι αδύνατον να επιτευχθούν από ένα μόνο όχημα, η ζήτηση διαφόρων πελατών αφορά διαφορετικά προϊόντα και αυτά δεν μπορούν να αναμειχθούν, κ.α.

Είναι δυνατόν να προταθούν διαφορετικά μαθηματικά πρότυπα για αυτό το πρόβλημα, όλα ισοδύναμα από άποψη προτυποποίησης αλλά με διαφορετικά αλγοριθμικά χαρακτηριστικά.

Θα υποθέσουμε ότι όλες οι εφικτές (ως προς τους περιορισμούς δυναμικότητας των οχημάτων, χρονικών ορίων εξυπηρέτησης κ.α) διαδρομές με αρχή το σημείο αφετηρίας έχουν απαριθμηθεί και ότι ο αριθμός τους είναι M. Ας είναι Nο αριθμός των πελατών. Δημιουργούμε τότε έναν πίνακα $A=[\alpha_{ji}]$ διαστάσεων M x N, όπου

$$\alpha_{ij}=\begin{cases} 1, \; εάν\ ο\ πελάτης\ i\ εξυπηρετείται\ απο\ την\ διαδρομή\ j \\ 0, αλλιώς, i=1,\dots,N, j=1,\dots,M, \end{cases} \qquad (2.14)$$

που τον θεωρούσαμε ως δεδομένο, οπότε για κάθε διαδρομή j μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος της cj, j=1,…,M. Εάν τώρα ορίσουμε τις μεταβλητές

$$x_j=\begin{cases} 1\ εάν\ η\ διαδρομή\ j\ επιλέγεται \\ 0, αλλιώς, j=1,\dots,M \end{cases} \qquad (2.15)$$

Τότε το πρότυπο διαμορφώνεται ως εξής:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{M} c_j x_j \qquad (2.16)$$

$$\text{υπό} \sum_{j=1}^{M} a_{ji} x_j = 1,\ i=1,\dots,N \qquad (2.17)$$

$$x_j \in \{0,1\},\ j=1,\dots,M \qquad (2.18)$$

Το πρότυπο αποκρύπτει σε μεγάλο βαθμό τις πραγματικές δυσκολίες: η απαρίθμηση των κυκλικών διαδρομών και μάλιστα αυτών που είναι εφικτές ως προς τους περιορισμούς δυναμικότητας και χρονικών ορίων είναι ένα ιδιαίτερο δύσκολο πρόβλημα και σχεδόν πρακτικά αδύνατη για τη περίπτωση 20 ή περισσότερων πελατών καθώς ο αριθμός των εφικτών διαδρομών αυξάνει εκρηκτικά με τον αριθμό των πελατών. Η αντιμετώπιση του προβλήματος δρομολόγησης μέσα αυτού του προτύπου βασίζεται στην μέθοδο δημιουργίας στηλών, την δημιουργία δηλαδή μιας διαδρομής εάν και όποτε αυτή απαιτείται και όχι στην εκ των προτέρων δημιουργία όλων των πιθανών διαδρομών. Μία τέτοια διαδρομή δημιουργείται με την επίλυση κατάλληλα τροποποιημένου προβλήματος πλανόδιου πωλητή, π.χ λαμβάνοντας υπ’ όψιν μόνο ένα σύνολο των πελατών που η συνολική τους ζήτηση μπορεί να ικανοποιηθεί από ένα όχημα, δεδομένης της δυναμικότητας του.

Είναι δυνατόν να δοθούν πρότυπα που εκφράζουν πιο έντονα τα επιμέρους στοιχεία του προβλήματος και των οποίων ο αριθμός μεταβλητών είναι περιορισμένος. Έτσι, το περιορισμένης χωρητικότητας πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων μπορεί να περιγράφει με όρους θεωρίας γραφημάτων ως ακολούθως. Έστω ότι έχουμε ένα πλήρες γράφημα G=(V,A),όπου V={0,…,n} είναι το σύνολο των κόμβων με τον κόμβο 0 να αντιστοιχεί στην αποθήκη και οι υπόλοιποι κόμβοι αντιστοιχούν στους πελάτες. Σε πολλές περιπτώσεις, ανάλογα με την μορφοποίηση του προβλήματος, στην αποθήκη αντιστοιχίζεται και κόμβος n+1.

Ένα μη αρνητικό κόστος c_{ij}συσχετίζεται με κάθε τόξο (i,j) και αντιπροσωπεύει το κόστος ταξιδιού από τον κόμβο i στον κόμβο j. Όταν τα τόξα είναι μη προσανατολισμένα τότε το πρόβλημα ονομάζεται το συμμετρικό περιορισμένης χωρητικότητας πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων ενώ αν είναι προσανατολισμένα τα τόξα τότε το πρόβλημα ονομάζεται το μη συμμετρικό περιορισμένης χωρητικότητας πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων.

Σε πολλές περιπτώσεις, οι τιμές του πίνακα κόστους ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

$c_{ik}+ c_{kj}\geq c_{ij}\forall i, j,k\in V$

Αυτό σημαίνει ότι το ιδανικό είναι να πάμε άμεσα από τον κόμβο i στον κόμβο j, χωρίς να περάσουμε από τον κόμβο k. Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές οι κόμβοι συσχετίζονται με σημεία στο επίπεδο δηλαδή τα δεδομένα είναι συντεταγμένες, και το κόστος c_{ij}για κάθε τόξο (i,j) υπολογίζεται από την Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα δύο σημεία που αντιστοιχούν στους κόμβους i και j. Σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας κόστους είναι συμμετρικός και ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, το πρόβλημα ονομάζεται Ευκλείδειο περιορισμένης χωρητικότητας πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων.

Το περιορισμένης χωρητικότητας πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων έχει σαν στόχο την εύρεση K απλών κύκλων (όπου ο κάθε ένας αντιστοιχεί σε ένα όχημα) με το ελάχιστο δυνατό κόστος, που καθορίζεται σαν άθροισμα όλων των κοστών των τόξων που ανήκουν στους κύκλους, και έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά.

- Κάθε κύκλος περνάει από την αποθήκη
- Κάθε πελάτης επισκέπτεται από ένα μόνο κύκλο
- Το άθροισμα της ζήτησης των κόμβων που επισκέπτονται από ένα κύκλο δεν ξεπερνάει την χωρητικότητα του οχήματος.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις βασικές μορφοποιήσεις που έχουν παρουσιαστεί για την επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων (VRP). Στην ουσία τριών τύπων προτυποποιήσεις έχουν δοθεί για το πρόβλημα. Η πρώτη από αυτές είναι μορφοποίησης που στηρίζεται στην ροή των οχημάτων, χρησιμοποιεί ακέραιες μεταβλητές που συσχετίζονται με κάθε τόξο του γραφήματος και που στην ουσία μετρούν τον αριθμό των φορών που ένα όχημα περνάει από κάθε τόξο. Είναι κατάλληλη για τις περιπτώσεις όπου το κόστος μπορεί να εκφραστεί σαν το άθροισμα των κοστών που συσχετίζονται με τα τόξα. Η δεύτερη ομάδα μορφοποιήσεων στηρίζεται στην ροή των προϊόντων. Σε αυτού του είδους την προτυποποίηση, επιπρόσθετες ακέραιες μεταβλητές συσχετίζονται με τα τόξα και αναπαριστούν την ροή από προϊόντα στα τόξα που περνάνε τα οχήματα. Τα πρότυπα της τελευταίας κατηγορίας έχουν συνήθως εκθετικό αριθμό από δυαδικές μεταβλητές. Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων στην συνέχεια προτυποποιείται σαν πρόβλημα τμηματοποίησης συνόλου και προσπαθεί να καθορίσει ένα σύνολο από κύκλους ελαχίστου κόστους, που ικανοποιούν κάθε πελάτη μια φορά και πιθανώς ικανοποιεί και κάποιους επιπλέον περιορισμούς.

Αρχικά ξεκινάμε με την πρώτη κατηγορία, δηλαδή τα πρότυπα ροής οχημάτων. Η μορφοποίηση που θα δούμε είναι μια από τις κλασικότερες προτυποποιήσεις για το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων περιορισμένης χωρητικότητας και έχει παρουσιαστεί από τους Fisher&Jaikumar. Έστω (1)

$$x_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{εάν το όχημα } k \text{ επισκέπτεται τον πελάτη } j \text{ αμέσως μετά τον πελάτη } i \\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases} \qquad (2.20)$$

$$y_{jk}=\begin{cases}1, & \text{εάνοπελάτης } i \text{ επισκέπτεταιαποτοόχημα } k \\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases} \qquad (2.21)$$

Το βασικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων μπορεί να καθοριστεί ως εξής:

$$\mathrm{Min}\sum_{i,j} c_{ij}\sum_k x_{ijk} \quad (2.22)$$

Υπό

$$\sum_\kappa y_{ik}=\begin{cases}1, & i = 2, \dots, n \\ m, & i = 1\end{cases} \quad (2.23)$$

$$\sum_i q_i y_{ij} \le Q_k \quad k=1,\dots,m \qquad (2.24)$$

$$\sum_j x_{ijk} =\sum_j x_{jik} =y_{ik} \quad i=1,\dots,n$$
$$k=1,\dots,m \quad (2.25)$$

$$\sum_{i,j\in S} x_{ijk}\le |S|- 1, \quad \text{για όλα τα } S\subseteq \{2,\dots,n\},\ k=1,\dots,m \quad (2.26)$$

$$y_{ik}\in \{0,1\}, \qquad i=1,\dots,n$$
$$k=1,\dots,m \qquad (2.27)$$

$$x_{ijk}\in \{0,1\}, \qquad i,j=1,\dots,n$$
$$k=1,\dots,m \quad (2.28)$$

Ο περιορισμός (2.23) δείχνει ότι κάθε πελάτης εκχωρείται σε ένα μόνο όχημα, εκτός από την αποθήκη που την επισκέπτονται όλα τα οχήματα, ο περιορισμός (2.24) είναι ο περιορισμός χωρητικότητας των οχημάτων, ο περιορισμός (2.25) δείχνει ότι ένα όχημα που επισκέπτεται ένα πελάτη φεύγει από τον πελάτη.

Έστω (2), ότι όλες οι εφικτές απλές διαδρομές για το όχημα 1 στο VRP έχουν σαν δείκτες

$r=1,\ldots,\hat{r}$.Έστω ότι το σύνολο των πελατών που αντιστοιχούν σε μια διαδρομή r είναι M, και το κόστος της διαδρομής είναι d_r. Χρησιμοποιούμε $N_i = \{ r \mid i \in M_r \}$. Υποθέτουμε ότι οι διαδρομές κατατάσσονται σε αύξουσα σειρά με βάση την φόρτωση τους $K_r = \sum_{i \in Mr} q_i$και χρησιμοποιούμε το r_k σαν τη μικρότερη τιμή του r τέτοια ώστε $K_r \leq Q_k$. Θεωρούμε ότι $r_{m+1}=\hat{r}+1$.Έστω

$$y_r=\begin{cases} 1, \text{αν η διαδρομή } r \text{ είναι βέλτιστη για το } VRP \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.29)$$

Το βασικό VRPείναι

$$\mathrm{Min} \sum_{r=1}^{\hat{r}} d_r y_r \quad (2.30)$$

Υπό

$$\sum_{r \in Ni} y_r = 1 \quad i=2,\ldots,n \quad (2.31)$$

$$\kappa \sum_{r=1}^{rk+1} y_r \leq k, \quad r_k \neq r_{k+1}, \; k=1,\ldots,m \quad (2.32)$$

$$k \sum_{r=1}^{r} y_r = m \quad (2.33)$$

$$yr \in \{0,1\}, \quad r=1,\ldots,\hat{r} \quad (2.34)$$

ο περιορισμός (2.31) βεβαιώνει ότι κάθε πελάτης επισκέπτεται ενώ οι δύο επόμενοι, (2.32), (2.33) ότι οι m διαδρομές που έχουν επιλεγεί για την λύση είναι εφικτές.

Οι δύο προηγούμενες μορφοποιήσεις είναι μορφοποιήσεις ακεραίου προγραμματισμού. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε μια μορφοποίηση που βασίζεται στον δυναμικό προγραμματισμό, (2). Έστω ότι $N=\{2,\ldots,n\}$ το σύνολο των πελατών. Για κάθε $T \subseteq N$, έστω f(k,T) είναι το ελάχιστο κόστος του εφοδιασμού των πελατών στο T χρησιμοποιώντας μονάχα τα οχήματα 1,…,k έστω u(T) είναι το ελάχιστο κόστος μιας λύσης του TSP που καθορίζεται από την αποθήκη και τους πελάτες στο Tα, και έστω $q(T)=\sum_{i \in T} q_i$. Οι επαναλήψεις του δυναμικού προγραμματισμού παίρνουν σαν αρχική τιμή για k=1, f(1,T)=u(T) και καθορίζονται για k> 2 με

$$f(k,T) = \min \{f(k-1, T-S)+(S)\} \quad (2.35)$$

υπό

$$q(T) - \sum_{h=1}^{k-1} Q_h \leq q(S) \leq Q_k \quad (2.36)$$

$$k \frac{1}{m-k} q(N-T) \leq q(S) \leq \frac{1}{k} q(T) \quad (2.37)$$

Εδώ το k=2,…,m εκτός από το αριστερό μέρος του τελευταίου περιορισμού για τον οποίο $k \neq m$. Το σύνολο $T \subseteq N$ πρέπει να θεωρείται ότι ικανοποιεί

$$q(N) - \sum_{h=k+1}^{m} Q_h \leq q(T) \leq \sum_{h=1}^{k} Q_h \quad (2.38)$$

Η μορφοποίηση του προβλήματος δρομολόγησης σύμφωνα με τον Golden(3) είναι η ακόλουθη:

$\min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{u=1}^{NV} c_{ij}x^{u}_{ij}$(2.39)

υπό

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{u=1}^{NV} x^{u}_{ij}=1$ $j=2,\ldots,n$(2.40)

$\sum_{j=1}^{n}\sum_{u=1}^{NV} x^{u}_{ij}=1$ $i=2,\ldots,n$ (2.41)

$\sum_{i=1}^{n} x^{n}_{ip}-\sum_{j=1}^{n} x^{n}_{pj}=0$ $u=1,\ldots,NV$, $p=1,\ldots,n$ (2.42)

$\sum_{i=1}^{n} d_i\sum_{j=1}^{n} x^{n}_{ij}\leq k_u$ $u=1,\ldots,NV$ (2.43)

$\sum_{i=1}^{n} t^{u}_{i}\sum_{j=1}^{n} x^{u}_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t^{u}_{ij}x^{u}_{ij}\leq Tu$ $u=1,\ldots,NV$ (2.44)

$\sum_{j=2}^{n} x^{u}_{1j}\leq 1$ $u=1,\ldots,NV$ (2.45)

$\sum_{i=2}^{n} x^{u}_{i1}\leq 1$ $u=1,\ldots,NV$ (2.46)
$X\in S$(2.47)

$X^{u}_{ij}=0$ ή 1 για όλα i,j,u(2.48)

Όπου n είναι ο αριθμός των κόμβων, NV ο αριθμός των οχημάτων, K_u η χωρητικότητα του οχήματος u, T_u ο μέγιστος χρόνος όπου ένα όχημα επιτρέπεται να βρίσκεται σε μια διαδρομή, d_i η ζήτηση στον κόμβο i ($d_1=0$), t^{u}_{i} ο χρόνος που απαιτείται για κάποιο όχημα για να κάνει κάποια παράδοση σε κάποιο κόμβο i (t^{u}_{1}), t^{u}_{ij}ο χρόνος που χρειάζεται ένα όχημα να πάει από τον κόμβο i στον κόμβο j, c^{u}_{ij} το κόστος που απαιτείται για ένα όχημα πηγαίνοντας από τον κόμβο i στον κόμβο j, $x^{u}_{ij}=1$ εάν το τόξο επισκέπτεται από ένα όχημα και 0 αλλιώς.

Η αντικειμενική συνάρτηση (2.39) καθορίζει τη συνολική απόσταση που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. Οι 2 πρώτες εξισώσεις, (2.40),(2.41) λένε ότι το κάθε σημείο ζήτησης θα εξυπηρετηθεί από ένα και μόνο όχημα. Στην εξίσωση (2.42) παρουσιάζεται η συνέχεια μιας διαδρομής, δηλαδή αν ένα όχημα μπει σε κάποιο κόμβο θα πρέπει να φύγει και από αυτόν τον κόμβο. Η εξίσωση (2.43) δείχνει τους περιορισμούς χωρητικότητας και η (2.44) τους χρονικούς περιορισμούς. Τέλος η (2.45) και η (2.46) εγγυούνται ότι η διαθεσιμότητα των οχημάτων δεν έχει ξεπεραστεί.

Στα πρότυπα ροής προϊόντων απαιτείται ο καθορισμός ενός επιπλέον συνόλου από μεταβλητές που συσχετίζονται με τα τόξα και που δείχνουν την ποσότητα προϊόντων που μεταφέρονται προς τους πελάτες διαμέσου των χρησιμοποιούμενων τόξων. Η μορφοποίηση απαιτεί την πρόσθεση στο γράφημα ενός επιπλέον κόμβου (n+1) που αντιστοιχεί στην αποθήκη. Οι διαδρομές εδώ πέρα θεωρούνται μονοπάτια από τον κόμβο 0 (την αποθήκη) στον κόμβο n+1 (την αποθήκη). Δυο μη αρνητικές μεταβλητές ροής προϊόντων συσχετίζονται με κάθε τόξο, οι μεταβλητές y_{ij} και y_{ji}, οι οποίες δείχνουν ότι αν το όχημα ταξιδεύει από τον πελάτη i στον j, τότε η y_{ij} είναι η φόρτωση του οχήματος στον πελάτη i και η y_{ji} είναι ο κενός χώρος που υπάρχει στο όχημα εκείνη τη στιγμή. Δηλαδή αν πούμε ότι C είναι η συνολική ποσότητα προϊόντος που είχε το όχημα τη στιγμή που ξεκίνησε τότε $y_{ji}= C-y_{ij}$. Οι ρόλοι αντιστρέφονται και το όχημα ταξιδεύει ανάποδα.

Για κάθε διαδρομή μιας εφικτής λύσης, οι μεταβλητές ροής καθορίζουν δύο μονοπάτια, ένα από την αποθήκη 0 στον κόμβο n+1, που δείχνει την φόρτωση του οχήματος, και μια άλλη από την αποθήκη n+1 στην αποθήκη 0, όπου οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν την ποσότητα που έχει αφήσει σε κάθε πελάτη το όχημα. Η μορφοποίηση του προβλήματος είναι η ακόλουθη :

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \textit{εάν ο πελάτης } i \textit{ επισκέπτεται αμέσως πριν τον πελάτη } j \\ 0, \qquad \textit{αλλιώς}\end{cases} \quad (2.49)$$

$$\min\sum_{ij} c_{ij}x_{ij} \quad (2.50)$$

υπό

$$\sum_{j\in V}(y_{ji}-y_{ij})=2d_i,\ \forall i\in V-\{0,n+1\} \quad (2.51)$$

$$\sum_{j\in V-\{0,n+1)}(y_{0j}=d(V-\{0,n+1\}) \quad (2.52)$$

$$\sum_{j\in V-\{0,n+1)}(y_{j0}=KC-d(V-\{0,n+1\}) \quad (2.53)$$

$$\sum_{j\in V-\{0,n+1)} y_{n+1j}=KC \quad (2.54)$$

$$y_{ji}+y_{ij}=Cx_{ij},\ \forall\ (i,j)\ \in A \quad (2.55)$$

$$\sum_{j\in V}(x_{ji}+x_{ij)}=2,\ \forall i\in V-\{0,n+1\} \quad (2.56)$$

$$y_{ij}\geq 0,\ \forall\ (i,j)\in A \quad (2.57)$$

$$x_{ij}\in \{0,1\},\ \forall (i,j)\in A \quad (2.58)$$

Οι περιορισμοί (2.51) δείχνουν ότι η διαφορά ανάμεσα στις μεταβλητές ροής προϊόντων που συσχετίζονται με τα τόξα που μπαίνουν και βγαίνουν από κάθε τόξο είναι ίση με την διπλάσια ποσότητα ζήτησης. Οι περιορισμοί (2.52)-(2.54) επιβάλλουν τις σωστές τιμές για τις μεταβλητές ροές προϊόντων που είναι κοντά στην αποθήκη. Τέλος, οι περιορισμοί (2.55)-(2.56) δείχνουν την σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές ροής προϊόντων, στις μεταβλητές ροής οχημάτων και στον βαθμό των κόμβων, αντίστοιχα. Λέγοντας βαθμό των κόμβων εννοούμε το πλήθος των τόξων που εισέρχονται και που εξέρχονται από ένα κόμβο.

2.2.3 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με χρονικά περιθώρια (Vehicle Routing Problem with Time Windows)

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με χρονικά παράθυρα μπορεί να καθοριστεί ως εξής: κάθε πελάτης i πρέπει να εξυπηρετηθεί μέσα σε μία χρονική περίοδο $[\alpha_i, \beta_i]$ η οποία ονομάζεται χρονικό παράθυρο. Τα επιπλέον δεδομένα που δίνονται για το πρόβλημα είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία τα οχήματα φεύγουν από την αποθήκη, ο χρόνος ταξιδιού t_{ij}, για κάθε τόξο (i,j) και φυσικά ένας χρόνος εξυπηρέτησης για κάθε πελάτη. Η εξυπηρέτηση για κάθε πελάτη πρέπει να αρχίσει μέσα στο χρονικό παράθυρο που μπορεί ο πελάτης να εξυπηρετηθεί, και το όχημα πρέπει να παραμείνει στην τοποθεσία που βρίσκεται ο πελάτης για χρόνο s_i. Επιπλέον, αν κάποιο όχημα φτάσει σε κάποιον πελάτη νωρίτερα από τον προκαθορισμένο χρόνο, στις περισσότερες περιπτώσεις το όχημα επιτρέπεται να παραμείνει στην τοποθεσία του πελάτη μέχρι να ξεκινήσει το χρονικό παράθυρο.

Στις περισσότερες φορές οι πίνακες κόστους και ταξιδιού συμπίπτουν, και τα χρονικά παράθυρα καθορίζονται βάση το γεγονός ότι όλα τα οχήματα φεύγουν από την αποθήκη τη χρονική στιγμή 0. Επιπλέον τα χρονικά παράθυρα απαιτούν ένα πλήρη προσανατολισμό της κάθε διαδρομής ακόμα και αν οι αρχικοί πίνακες είναι συμμετρικοί. Άρα στις περισσότερες φορές το πρόβλημα προτυποποιείται σαν μη συμμετρικό πρόβλημα.

Υπάρχουν δύο ειδών χρονικά παράθυρα, τα χαλαρά κατά τα οποία αν ένα όχημα φτάσει σε κάποιο πελάτη κάποια χρονική στιγμή εκτός του χρονικού παραθύρου ,μπορεί να ξεκινήσει την εξυπηρέτηση του εκείνη τη στιγμή και τα σκληρά χρονικά παράθυρα που δεν επιτρέπουν να φτάσει το όχημα στον πελάτη μετά από τον αργότερο χρόνο εξυπηρέτησης. Σε αυτές τις περιπτώσεις αν ένα όχημα φτάσει στον νωρίτερα από το χρονικό παράθυρο τότε θα περιμένει για να αρχίσει η εξυπηρέτηση.

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με χρονικά παράθυρα αποτελείται από την εύρεση K ακριβώς κύκλων με ελάχιστο κόστος τέτοιους ώστε :

- Κάθε κύκλος περνάει από την αποθήκη.
- Κάθε πελάτης επισκέπτεται από ένα μόνο κύκλο.
- Το άθροισμα της ζήτησης των κόμβων που επισκέπτονται από ένα κύκλο δεν ξεπερνάει την χωρητικότητα του οχήματος.
- Για κάθε πελάτη η εξυπηρέτηση πρέπει να ξεκινήσει και να ολοκληρωθεί μέσα στο χρονικό παράθυρο $[\alpha_i,\beta_i]$ ενώ το όχημα θα παραμείνει στον χώρο του πελάτη για χρόνο s_i μέχρι να ξεφορτώσει.

Στη συνέχεια θα δούμε μια μορφοποίηση του προβλήματος. Το πρόβλημα δρομολόγησης με χρονικά παράθυρα αναφέρεται σε ένα γράφημα G = (V,A), όπου η αποθήκη συμβολίζεται με τους κόμβους 0 και n+1. Όλες οι εφικτές διαδρομές αντιπροσωπεύουν μονοπάτια που ξεκινούν από το 0 και καταλήγουν στο n+1. Ένα χρονικό παράθυρο αντιστοιχίζεται και με την αποθήκη είτε αναφερόμαστε στον κόμβο 0 είτε στον κόμβο n+1, για παράδειγμα $\{\alpha_0,\beta_0\}=\{\alpha_{n+1},\beta_{n+1}\}=\{E,L\}$ όπου τα E και L, είναι η ελάχιστη πιθανή αναχώρηση από την αποθήκη και η αργότερη δυνατή άφιξη. Επιπλέον, μηδενική ζήτηση και χρόνοι εξυπηρέτησης καθορίζονται για αυτούς τους δύο κόμβου, δηλαδή $d_0=d_{n+1}=s_0=s_{n+1}=0$

Στο πρότυπο που ακολουθεί περιλαμβάνονται δύο ειδών μεταβλητές ροής:

$$x_{ijk}=\begin{cases}1, εάν το όχημα\ k\ επισκέπτεται τον πελάτη\ j\ αμέσως μετά τον πελάτη\ i \\ 0, αλλιώς\end{cases} \quad (2.59)$$

και μία οι χρονικές μεταβλητές w_{ik} που καθορίζουν πότε θα ξεκινήσει η εξυπηρέτηση στον πελάτη i από το όχημα k.
Το βασικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων μπορεί να καθοριστεί ως εξής:

$$\min\sum_{i,j} c_{ij}\sum_k x_{ijk} \quad (2.60)$$

υπό

$$\sum_{k\in K}\sum_{j\in V} x_{ijk}=1 \quad \forall i\in N \quad (2.61)$$

$\sum_{i\in V-\{0\}} x_{0jk}=1$ ∀j∈N, k∈K(2.62)

$\sum_{i\in V-\{j\}} x_{ijk}$ - $\sum_{i\in V-\{j\}} x_{jik}=0$ ∀j∈N, k∈K(2.63)

$\sum_{i\in V-\{n+1\}} x_{in+1k}=1$ ∀k ∈ K (2.64)

$X_{ijk}(w_{ik}+s_i+t_{ij}-w_{jk})\leq 0$ ∀k ∈ K(i,j) ∈ A (2.65)

$αi\sum_{j\in V} x_{ijk} \leq w_{ik} \leq βi\sum_{j\in V} x_{ijk}$∀i∈ N, k ∈ K (2.66)

$E\leq w_{ik}\leq L$∀i∈(0,n+1), k ∈ K (2.67)

$\sum_{i\in N} d_i\sum_{j\in V} x_{ijk}\leq C$ ∀k ∈ K (2.68)

$x_{ijk}\geq 0$ ∀k∈K,(i,j) ∈ A (2.69)

$x_{ijk}\in \{0,1\}$ ∀k ∈ K, (i,j) ∈A (2.70)

Η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει το συνολικό κόστος. Οι περιορισμοί (2.61) περιορίζουν την εκχώρηση κάθε πελάτη σε ένα και μόνο όχημα. Οι περιορισμοί (2.62)-(2.64) χαρακτηρίζουν τη ροή στο μονοπάτι που ακολουθείται από το όχημα k. Οι περιορισμοί (2.65),(2.67),(2.68) εγγυώνται την εφικτότητα των διαδρομών με βάση τους χρονικούς περιορισμούς και τους περιορισμούς χωρητικότητας των οχημάτων. Τέλος, ο περιορισμός (2.66) εξαναγκάζει το w_{ik} για ένα δεδομένο k να γίνει ίσο με το 0 αν το όχημα δεν επισκέπτεται τους πελάτες i και j σε αυτήτη διαδρομή.

Μια πιο σύνθετη εφαρμογή είναι αν υποθέσουμε επίσης ότι σε κάθε πελάτη, το όχημα που τον επισκέπτεται εκτελεί όχι μόνο παράδοση εμπορεύματος αλλά και παραλαβή, μέσα στα πλαίσια της αντίστροφης εφοδιαστικής (reverselogistics). Ο σκοπός είναι να ορισθούν κυκλικές διαδρομές για τα οχήματα που να καλύπτουν όλους τους πελάτες με το ελάχιστο δυνατόν κόστος.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας στόλος K οχημάτων, όλα με την ίδια δυναμικότητα u και ένα σύνολο n πελατών που πρέπει να εξυπηρετηθούν από ένα κέντρο, το οποίο όπως και στο πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή θα το διαιρέσουμε σε δύο κόμβους: 0 και n+1. Για κάθε πελάτη i θα υποθέσουμε ότι υπάρχει αίτημα για παράδοση di μονάδων και παραλαβή pi μονάδων από το όχημα που τον επισκέπτεται και ότι η επίσκεψη του οχήματος θα πρέπει να πραγματοποιηθεί στο χρονικό διάστημα [αi,bi].

Επειδή κάθε πελάτης εξυπηρετείται από ένα και μόνο όχημα που τον επισκέπτεται μία και μόνη φορά θα υποθέσουμε αναγκαστικά ότι $0 \leq d_i,p_i \leq u$, ∀i. Επίσης είναι φυσιολογικό να δεχτούμε ότι ένα όχημα μπορεί να αφικνείται στον χώρο του πελάτη i πριν τη χρονική στιγμή αi και ότι τότε αναμένει ως την έναρξη του χρονικού διαστήματος εξυπηρέτησης. Χωρίς απώλεια της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι η αναμονή αυτή δεν κοστίζει. Φυσικά και δεν επιτρέπεται η άφιξη του οχήματος καθυστερημένα, δηλαδή μετά την χρονική στιγμή b_i. Τέλος, δεδομένου του μεγέθους του στόλου οχημάτων, η κάλυψη όλων των πελατών δύναται να γίνει χρησιμοποιώντας το πολύ K κυκλικές διαδρομές.

Ας είναι το c_{ij} το κόστος και t_{ij} ο χρόνος της απευθείας κίνησης ενός οχήματος από το i=0,1,…,n,n+1 στο j=0,1,n,n+1, j≠i. Ορίζοντας τότε τις μεταβλητές

$x_{ij}^{k}=\begin{cases} 1, εάν\ το\ όχημα\ k\ ταξιδεύει\ απευθείας\ απο\ το\ i\ στο\ j \\ 0, αλλιώς, \forall i, \forall j, i \neq j, k=1,\dots,K \end{cases}$

$y_i^k =$ η ποσότητα από τις απομένουσες παραδόσεις που διεκπεραιώνονται από το όχημα k όταν αυτό εκκινεί από τον πελάτη i, ∀k, ∀i

z_i^k= η ποσότητα από τις απομένουσες παραλαβές που διεκπεραιώνονται από το όχημα k όταν αυτό εκκινεί από τον πελάτη i, ∀k,∀i

t_i^k= η χρονική αρχή για την εξυπηρέτηση του πελάτη i, από το όχημα k∀i, ∀k,

Τότε το μαθηματικό πρότυπο διαμορφώνεται ως εξής:

Min $\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0\ i\neq j}^{n+1} c_{ij}x_{ij}^{k}$(2.71)

Υπό

$\sum_{\kappa=1}^{K}\sum_{j=0}^{n+1} x_{ij}^{k}=1$, i=1,…, n(2.72)

$\sum_{i=0}^{n+1} x_{il}^{k}-\sum_{j=0}^{n+1} x_{lj}^{k}=0$, l=1,…,n, ∀k (2.73)

$\sum_{j=1}^{n} x_{0j}^{k}\leq 1$, ∀k (2.74)

$\sum_{i=1}^{n} x_{i,n+1}^{k}-\sum_{j=1}^{n} x_{0j}^{k}=0$, ∀k (2.75)

$y_i^k + z_i^k \leq u$, i=1,…,n, ∀k (2.76)

$y_{n+1}^{k}=0$, ∀k (2.77)

$y_0^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1\ \ i\neq j}^{n} d_i x_{ij}^{k}$, ∀k (2.78)

$z_{n+1}^{k}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij}^{k}$,∀k (2.79)

$z_0^k=0$, ∀k(2.80)

$x_{ij}^{k}(z_i^k + p_j - z_j^k)=0$, ∀i, ∀j, i≠j, ∀k (2.81)

$x_{ij}^{k}(y_i^k - d_j - y_j^k)=0$, ∀i, ∀j, i≠j, ∀k (2.82)

$x_{ij}^{k}(t_i^k + t_{ij} - t_j^k)\leq 0$, ∀i, ∀j, i≠j, ∀k (2.83)

$\alpha_i \leq t_i^k \leq b_i$, ∀i, ∀k (2.84)

$y_i^k \geq 0$, ∀i, ∀k, (2.85)

$z_i^k \geq 0$, ∀i, ∀k, (2.86)

$x_{ij}^{k} \in \{0,1\}$, ∀i, ∀j, i≠j, ∀k(2.87)

Η αντικειμενική συνάρτηση (2.71) ελαχιστοποιεί το ολικό κόστος των διαδρομών. Οι περιορισμοί (2.72) επιβάλλουν την εξυπηρέτηση κάθε πελάτη από ακριβώς ένα όχημα, ενώ οι (2.73) εγγυώνται ότι το όχημα που εισέρχεται και εξέρχεται από κάθε κόμβο είναι το ίδιο.

Οι περιορισμοί (2.74) και (2.75) επιβάλλουν τη χρήση κάθε οχήματος το πολύ μία φορά. Οι περιορισμοί (2.73),(2.74) και (2.75) αντιστοιχούν στην ισορροπία ροής και απαιτούν ότι κάθε όχημα εκκινεί από τον κόμβο αφετηρίας (κόμβος 0) το πολύ μία φορά, ότι εξέρχεται από έναν κόμβο l μόνο εάν έχει εισέλθει σε αυτόν και τέλος επιστρέφει στο αρχικό σημείο εκκίνησης (κόμβος n+1) το πολύ μία φορά. Οι περιορισμοί (2.76) εγγυώνται ότι το φορτίο ενός οχήματος, όταν αυτό εκκινεί από έναν πελάτη, δεν υπερβαίνει την δυναμικότητα του.

Οι περιορισμοί (2.77) και (2.79) εγγυώνται ότι όταν ένα όχημα εκκινεί από το κέντρο έχει όλο το αναγκαίο φορτίο για τις παραδόσεις στους πελάτες που εξυπηρετεί και το φορτίο παραλαβής του είναι μηδενικό. Οι περιορισμοί (2.78) και (2.80) εγγυώνται ότι όταν το όχημα επιστρέφει στην αφετηρία έχει επιτελέσει όλες τις διανομές και έχει παραλάβει όλες τις ποσότητες που του αντιστοιχούν. Οι μη-γραμμικοί περιορισμοί (2.81)-(2.82) επιβάλλουν την μείωση του φορτίου παράδοσης ενός οχήματος k με d_j μονάδες όταν αυτό έχει κινηθεί απευθείας από το i στο j και αντίστοιχα την αύξηση του φορτίου παραλαβής με p_j μονάδες, διότι η κίνηση αυτή επιφέρει την εξυπηρέτηση του πελάτη j.

Οι μη-γραμμικοί περιορισμοί (2.83) συνεπάγονται ότι εάν το όχημα k κινηθεί απευθείας από το i στο j τότε ο πελάτης j αρχίζει να εξυπηρετείται κάποια χρονική στιγμή που είναι ίση ή μεγαλύτερη της χρονικής στιγμής που άρχισε η εξυπηρέτηση του πελάτη i συν το χρόνο που χρειάστηκε το όχημα για το απευθείας ταξίδι από το i στο j. Οι περιορισμοί αυτοί επιτρέπουν το όχημα να παραμείνει σε αναμονή σε κάθε πελάτη μέχρι να έρθει η καθορισμένη από τον πελάτη στιγμή έναρξης του χρονικού διαστήματος εξυπηρέτησης. Οι περιορισμοί (2.84) επιβάλλουν την έναρξη εξυπηρέτησης να ανήκει χρονικά στα πλαίσια που έχει καθορίσει ο πελάτης. Τέλος οι περιορισμοί (2.85)-(2.87) είναι αυτοί που επιβάλλουν τη μη-αρνητικότητα και την δυαδικότητα των αντίστοιχων μεταβλητών.

2.2.4 Η ύπαρξη πολλαπλών αποθηκών (Multi depot Vehicle Routing)

Μια πολύ ενδιαφέρουσα παραλλαγή του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων είναι η παραλλαγή που χρησιμοποιεί παραπάνω από μία αποθήκες. Υπάρχουν δύο τρόποι για την επίλυση αυτού του προβλήματος:

1. Η κάθε μία από τις αποθήκες να έχει τον δικό της αριθμό οχημάτων και τους δικούς της πελάτες να εξυπηρετήσει.
2. Στην δεύτερη περίπτωση ένα όχημα ξεκινάει από μια αποθήκη και είτε τερματίζει σε μια άλλη, είτε ενδιάμεσα σταματάει σε κάποια άλλη αποθήκη για να φορτώσει.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί σαν πρόβλημα ομαδοποίησης αφού ο στόχος είναι να βρεθούν οι διαδρομές των οχημάτων που ανήκουν σε κάθε αποθήκη. Το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί σαν πρόβλημα δύο φάσεων, στην πρώτη φάση έχουμε ανάθεση των πελατών στις αποθήκες και στην δεύτερη φάση δημιουργούνται τα δρομολόγια για κάθε μία αποθήκη και για κάθε ένα όχημα.

2.2.5 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με διανομή και παραλαβή προϊόντων κατά τη διάρκεια της διαδρομής (Vehicle routing problem with pick up and delivery)

Το πρόβλημα περιλαμβάνει διανομές και παραλαβές από τους πελάτες κατά την διάρκεια μιας διαδρομής. Ο πελάτης σε αυτή την περίπτωση μπορεί να θέλει να του διανεμηθούν προϊόντα από το όχημα που θα περάσει αλλά και το όχημα να παραλάβει από αυτόν προϊόντα. Στη βασική μορφή αυτού του προβλήματος, κάθε πελάτης συσχετίζεται με δύο ποσότητες d_i και p_i που αντιπροσωπεύουν την ζήτηση των προϊόντων που πρέπει να διανεμηθούν και να παραληφθούν από τον πελάτη i, αντίστοιχα. Πολλές φορές μόνο μία ποσότητα d_i=d_i-p_i χρησιμοποιείται για τον κάθε πελάτη, που δείχνει την διαφορά ανάμεσα στις δύο ποσότητες. Για κάθε πελάτη καθορίζονται και δύο κόμβοι ο O_i και ο D_i, που είναι οι κόμβοι από τους οποίους ξεκινάνε τα προϊόντα που πρέπει να διανεμηθούν στον πελάτη και καταλήγουν τα προϊόντα που συλλέγονται από τον πελάτη. Πολλές φορές αυτοί οι δύο κόμβοι αναφέρονται στον ίδιο κόμβο όπου είναι η κεντρική αποθήκη.

Ένας πολύ βασικός περιορισμός είναι ότι σε κάθε πελάτη η διανομή των προϊόντων γίνεται πριν τη παραλαβή, έτσι η συνολική φόρτωση ενός οχήματος όταν φτάσει στον πελάτη i είναι ίση με την αρχική φόρτωση του οχήματος μείον το άθροισμα των προϊόντων που παρέδωσε στους πελάτες πριν τον i συν το άθροισμα των προϊόντων που παρέλαβε από τους πελάτες πριν τον i.

Τα κύρια χαρακτηριστικά του προβλήματος είναι τα εξής:

- Κάθε κύκλος περνάει από την αποθήκη.
- Κάθε πελάτης επισκέπτεται από ένα μόνο κύκλο.
- Η συνολική ποσότητα που μεταφέρει ένα όχημα πρέπει να είναι μην αρνητική και να μην ξεπερνάει την χωρητικότητα του οχήματος.
- Για κάθε πελάτη i ο κόμβος O_i, αν είναι διαφορετικός από την αποθήκη, πρέπει να εξυπηρετηθεί στην ίδια διαδρομή και πριν από τον πελάτη i.
- Για κάθε πελάτη i ο κόμβος D_i, αν είναι διαφορετικός από την αποθήκη, πρέπει να εξυπηρετηθεί στην ίδια διαδρομή και μετά από τον πελάτη i.

2.2.6 Στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Stochastic or Probabilistic Vehicle Routing Problem)

Τα μοντέλα που επικεντρώνονται στην στοχαστικότερα της πληροφορίας είναι γνωστά στην Βιβλιογραφία σαν Στοχαστικά Προβλήματα Δρομολόγησης οχημάτων (stochasticVRPs (SVRPs)) .

Τα στοιχεία του προβλήματος όπως το σύνολο των πελατών, ή οι χρόνοι ταξιδιού μοντελοποιούνται σαν στοχαστικές μεταβλητές με γνωστές κατανομές πιθανοτήτων και η αντικειμενική συνάρτηση είναι συνήθως το αναμενόμενο κόστος των σχεδιασμένων διαδρομών. Στα στοχαστικά προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων πρέπει να καθοριστεί επίσης ο τρόπος που οι σχεδιασμένες διαδρομές θα τροποποιηθούν σε ανταπόκριση της πραγματοποίησης της στοχαστικής πληροφορίας.

Στα προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων με Στοχαστική ζήτηση (Vehicle Routing Problem Stochastic Demand) ένα όχημα πεπερασμένης χωρητικότητας φεύγει από την αποθήκη με πλήρες φορτίο και πρέπει να εξυπηρετήσει ένα σύνολο πελατών των οποίων η ακριβής ζήτηση είναι γνωστή μόνο όταν θα φτάσει στην τοποθεσία του κάθε πελάτη.

Μια σχεδιασμένη διαδρομή μέσα σε αυτό το πλαίσιο είναι μια διαδρομή π ξεκινά από την αποθήκη και περνάει από όλους τους πελάτες ακριβώς μία φορά. Αυτό καλείται επίσης μία εκ των προτέρων διαδρομή. Η εκ των προτέρων διαδρομή καθορίζει την σειρά με την οποία οι πελάτες θα εξυπηρετηθούν αλλά η ακριβής διαδρομή που θα κάνει το όχημα περιλαμβάνει και διαδρομές επιστροφής στην αποθήκη για ανεφοδιασμό όταν χρειάζεται. Τα σημεία από τα οποία πραγματοποιούνται διαδρομές επιστροφής είναι γενικά στοχαστικά. Η αντικειμενική συνάρτηση που θα ελαχιστοποιηθεί είναι το αναμενόμενο κόστος της εκ των προτέρων διαδρομής.

2.2.7 Προβλήματα προγραμματισμού οχημάτων (Vehicle Scheduling Problem - VSP)

Τα προβλήματα προγραμματισμού οχημάτων θεωρούνται σαν προβλήματα δρομολόγησης με επιπλέον περιορισμούς που σχετίζονται με τους χρόνους με τους οποίους γίνονται κάποιες εργασίες. Τα προβλήματα δρομολόγησης δίνουν ιδιαίτερη σημασία στα χωρικά χαρακτηριστικά των ενεργειών που γίνονται. Στα προβλήματα προγραμματισμού, ο χρόνος σχετίζεται με κάθε δραστηριότητα. Η εφικτότητα μιας ενέργειας επηρεάζεται, επίσης από χρονικά και χωρικά χαρακτηριστικά. Η διαδοχή των δραστηριοτήτων των οχημάτων και στο χώρο και στο χρόνο είναι βασικό σημείο σε αυτά τα προβλήματα. Οι τρεις βασικοί περιορισμοί των προβλημάτων οχημάτων είναι οι εξής :

- Ο περιορισμός του μήκους χρόνου που ένα όχημα εξυπηρετεί πριν επιστρέψει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό.
- Ο περιορισμός ότι ορισμένου τύπου έργα μπορούν να εξυπηρετηθούν μόνο από ορισμένου τύπου οχήματα.
- Η παρουσία πολλών αποθηκών όπου τα οχήματα μπορούν να στεγαστούν

2.2.8 Το πρόβλημα δρομολόγησης τόξων (Arc Routing Problem)

Ο όρος δρομολόγηση τόξων αναφέρεται σε προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων που οι βασικές δραστηριότητες εξυπηρέτησης βρίσκονται πάνω στα τόξα ενός δικτύου (γραφήματος). Ένα κλασικό πρόβλημα καθορισμού διαδρομών με την ζήτηση πάνω σε κόμβους μπορεί πολύ εύκολα να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα δρομολόγησης τόξων με την αντικατάσταση κάθε κόμβου με ένα τόξο. Ομοίως ένα πρόβλημα δρομολόγησης τόξων μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο κλασικό πρόβλημα καθορισμού διαδρομών με την αντίστροφη διαδικασία.

2.2.9 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής (Vehicle Routing Problem with backhauls and linehauls customers)

Το πρόβλημα είναι μία επέκταση του βασικού προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων όπου οι πελάτες χωρίζονται σε δύο υποσύνολα. Το πρώτο υποσύνολο είναι οι πελάτες που απαιτούν τη διανομή κάποιας ποσότητας προϊόντων (linehauls customers). Το δεύτερο υποσύνολο αποτελείται από πελάτες που ο κάθε ένας εκ των οποίων απαιτεί μια ποσότητα προϊόντος να περισυλλεχθεί από αυτόν (backhauls customers). Οι πελάτες έχουν την ακόλουθη αρίθμηση. Οι πρώτοι πελάτες δίδονται από το $L=\{1, \ldots, n\}$, ενώ οι δεύτεροι από το $B=\{n+1, \ldots, n+m\}$.

Σε αυτό το πρόβλημα υπάρχει ένας πολύ βασικός περιορισμός ανάμεσα στους δύο τύπους πελατών: οποτεδήποτε εξυπηρετούνται από μία διαδρομή πελάτες και των δύο τύπων όλοι οι πελάτες του πρώτου τύπου πρέπει να εξυπηρετηθούν πριν από τους πελάτες του δεύτερου τύπου. Το πρόβλημα πρέπει να καθορίσει ένα σύνολο από διαδρομές για ένα δεδομένο σύνολο οχημάτων που πρέπει να επισκεφτούν όλους τους πελάτες.

Για αυτό το πρόβλημα ισχύουν τα εξής :

- Κάθε όχημα ακολουθεί μονάχα μια διαδρομή που ξεκινάει και καταλήγει στην αποθήκη.
- Κάθε πελάτης επισκέπτεται από ένα μόνο κύκλο.
- Για κάθε διαδρομή η συνολική φόρτωση και για τα δύο είδη πελατών δεν ξεπερνάει τη χωρητικότητα των οχημάτων.
- Το μέγιστο μήκος της κάθε διαδρομής δεν πρέπει να ξεπερνάει τη συνολική απόσταση που μπορεί να διανύσει το όχημα.
- Σε κάθε διαδρομή οι πελάτες του δεύτερου τύπου επισκέπτονται έπειτα από τους πελάτες του πρώτου τύπου.
- Διαδρομές που περιλαμβάνουν πελάτες μόνο του δεύτερου τύπου δεν επιτρέπονται.
- Πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η συνολική απόσταση που θα διανύσουν τα οχήματα.

Κεφάλαιο 3

3.1 Σπουδαιότητα μελέτης του προβλήματος

Σε μελέτη που πραγματοποιήθηκε από το εθνικό συμβούλιο διαχείρισης διανομής το 1984 στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής υπολογίστηκε ότι το ετήσιο κόστος διανομής το οποίο αντιστοιχούσε στο 21% του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος, σε χρηματικά ποσά ισοδυναμούσε με 650 δισεκατομμύρια δολάρια. Από αυτό το ποσό προέκυψε ότι το κόστος για την εφοδιαστική αλυσίδα αντιπροσωπεύει το 22,5% του συνόλου του κόστους κατασκευής.

Η μελέτη και η επίλυση του προβλήματος με πελάτες που άλλοι έχουν μόνο παραλαβές και άλλοι μόνο διανομές έχει ως σκοπό να βελτιώσει την παραγωγικότητα στη βιομηχανία στις χώρες της Ευρώπης, προσπαθώντας να περιορίσει, να υπολογίσει και να ρυθμίσει τις αποστάσεις της διανομής.

Έχει αναπτυχθεί σημαντικός αριθμός διαδικασιών και αλγορίθμων οι οποίοι αποσκοπούν όχι μόνο στη βελτιστοποίηση εύρεσης λύσης αλλά και σε διαδικασίες με τις οποίες θα μελετηθούν και θα υπολογιστούν οι αποστάσεις σε προβλήματα παράδοσης - παραλαβής. (4)

3.2 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής (Vehicle routing problem with backhauls and linehauls customers)

Το κλασικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (VRP) περιλαμβάνει ένα σύνολο σημείων παράδοσης που πρέπει να εξυπηρετηθούν από ένα σύνολο οχημάτων που στεγάζονται σε μία κεντρική αποθήκη. Ο στόχος του προβλήματος είναι να αναπτύξει μια σειρά από διαδρομές, όπου όλες οι παραδόσεις στους πελάτες εξυπηρετούνται χωρίς να παραβιαστούν οι περιορισμοί χωρητικότητας των οχημάτων και η συνολική απόσταση που διανύεται από όλα τα οχήματα να ελαχιστοποιηθεί. Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής (VRPB), είναι μια επέκταση του VRP όπου οι πελάτες χωρίζονται σε δύο υποσύνολα. Το πρώτο υποσύνολο είναι οι πελάτες που απαιτούν τη διανομή κάποιας ποσότητας προϊόντων (linehauls customers) και το δεύτερο υποσύνολο αποτελείται από πελάτες που ο κάθε ένας εκ των οποίων απαιτεί μια ποσότητα προϊόντος να περισυλλεχθεί από αυτόν (backhauls customers). Ο βασικός περιορισμός αυτού του προβλήματος είναι ότι όλες οι παραδόσεις κάθε διαδρομής πρέπει να πραγματοποιηθούν πριν από οποιαδήποτε παραλαβή. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι τα οχήματα είναι φορτωμένα και η αναδιάταξη των φορτίων στα σημεία παράδοσης δεν θεωρείται εφικτή. Οι ποσότητες που πρέπει να παραδοθούν και να παραληφθούν είναι σταθερές και γνωστές εκ των προτέρων όπως και η χωρητικότητα των οχημάτων.

Επομένως μια εφικτή λύση του προβλήματος είναι ένα σύνολο διαδρομών όπου όλες οι παραδόσεις για κάθε διαδρομή ολοκληρώνονται πριν από οποιαδήποτε παραλαβή και οι περιορισμοί χωρητικότητας των οχημάτων δεν παραβιάζονται. Ο στόχος είναι να βρεθεί ένα τέτοιο σύνολο διαδρομών που ελαχιστοποιεί τη συνολική απόσταση που πρέπει να διανυθεί.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές περιγραφές για την συγκεκριμένη παραλλαγή του προβλήματος. Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα των περιπτώσεων εταιρειών που πωλούν πυροσβεστήρες όπου καλούνται να παραδώσουν τους νέους και να συλλέξουν τους παλιούς. Στο παρακάτω πρακτικό επίπεδο υπάρχει πλήθος παραδειγμάτων και περιπτώσεων χρήσης αυτής της μεθόδου όπως είναι και οι περιπτώσεις οχημάτων που απαιτείται να κάνουν πολλαπλά ταξίδια ανά ημέρα.

Διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

- Οι παραλαβές μπορούν να γίνουν πριν από τις παραδόσεις
- Οι παραλαβές μπορούν να γίνουν ταυτόχρονα με τις παραδόσεις
- Σε μια διαδρομή εξυπηρετούνται πρώτα οι πελάτες που απαιτούν παραδόσεις (linehaul) και αργότερα οι πελάτες που απαιτούν παραλαβές (backhaul).

Μια πρόσφατη μελέτη είναι αυτή του Οσμάν το 2002 που ασχολήθηκε με την αναζήτησή αλγορίθμου που θα βρίσκει πολύ καλύτερες λύσεις, καθότι απαιτεί πολύ περισσότερο χρόνο για υπολογισμούς. Με τη μέθοδο ταμπού η γειτονιά ορίζεται από την ένωση δύο διαδοχικών πελατών με δύο δρομολόγια. Η επίλυση του συνίσταται στην εξερεύνηση ενός συνόλου δρομολογίων ξεκινώντας και τελειώνοντας στην αποθήκη με το ελάχιστο συνολικό κόστος που δίνεται από το άθροισμα των τόξων που ανήκουν στις διαδρομές ώστε:

- Κάθε όχημα εκτελεί ακριβώς μία διαδρομή.
- Σε μία διαδρομή οι πελάτες Linehaul εξυπηρετούνται πριν από τους backhaul με τον περιορισμό ότι κανένας πελάτης δεν μπορεί μόνο να παραδώσει.
- Η συνολική ζήτηση όλων των πελατών δεν θα πρέπει να υπερβαίνει τη χωρητικότητα του οχήματος.
- Κάθε πελάτης θα επισκέπτεται μόνο μια φορά από τα οχήματα και θα πρέπει να είναι πλήρως εκπληρωμένο το δρομολόγιο.
- Όλα τα οχήματα έχουν την ίδια χωρητικότητα
- Δεν επιτρέπεται διαδρομή μόνο με πελάτες Backhaul

Μία μοντελοποίηση ακέραιου προγραμματισμού του προβλήματος που εισάγεται παρακάτω ακολουθεί το μοντέλο του Fisher και του Jaikumar (1978) για το VRP και τη δομή που βρέθηκε εδώ είναι παρόμοια με αυτή που παρατηρείται στο μοντέλο τους.

<u>Μαθηματικό μοντέλο</u>

Σταθερές

K = Ο αριθμός των οχημάτων,

N = Ο αριθμός των Linehaul πελατών , N= 1 , 2 . . . . . N,

M = Ο αριθμός των Backhaul πελατών, N + I , N + 2 . . . . . N + M (Το 0 υποδηλώνει το κέντρο διανομής),

a_i = Η ζήτηση των πελατών linehaul, i = 1,2 . . . . . N

b_i, = Η ποσότητα που παραδίδεται από τον backhaul πελάτη i, i= N + 1, N + 2 . . . . . N + M ,

C = Η χωρητικότητα των οχημάτων,

c_{ij} = Το κόστος της διαδρομής από τον πελάτη i στον πελάτη j. i, j = 0, 1. . . . , N, N +1.... , N + M .

Μεταβλητές

u_{ik} , $= \begin{cases} 1 \text{ εάνοπελάτης linehaul i εξυπηρετηθείαπότοόχημα k}, i = 0,1,\dots,N \\ 0 \text{ αλλιώς} \end{cases}$

v_{jk} , $= \begin{cases} 1 \text{ εάνοπελάτης backhaul j εξυπηρετηθείαπότοόχημα k}, j = N+1, N+2, \dots, N+M, j = 0 \\ 0 \text{ αλλιώς} \end{cases}$

x_{ijk},$= \begin{cases} 1 \text{ εάντοόχημα k ταξιδέψειαπευθείαςαπότονπελάτη i στον j}, i,j = 0,1,\dots,N, N+1,\dots,N+M, \\ 0 \text{ αλλιώς} \end{cases}$

Διατύπωση

Minimize $\sum_{K=1}^{K} \sum_{i=0}^{N+M} \sum_{j=0}^{N+M} c_{ij} x_{ijk}$

Υπό

$\sum_{K=1}^{N} a_i u_{ik} \leq C$, k=1,2,…,K (3.1)

$\sum_{K=1}^{K} u_{ik} = 1$, i=1,2,…,n (3.2)

$u_{0k}=1$, k=1,2,…,K

$u_{ik}=0$ ή 1, i=1,2,…,N, k=1,2,…,K (3.3)

$\sum_{i=N+1}^{N+M} b_i v_{ik} \leq C$, k=1,2,…,K (3.4)

$\sum_{k=1}^{K} v_{ik} = 1$, i=N+1,N+2,…,N+M, (3.5)

$v_{0k}=1$, k=1,2,…,K,

v_{ik}=0 ή 1, i=N+1,N+2,…,N+M, k=1,2,…,K, (3.6)

$\sum_{i=0}^{N+M} x_{ijk}=\begin{cases} ujk \;\; εάν\; j = 1, \dots, N \\ vjk \;\; εάν\; j = N+1, N+2, \dots, N+M \;και\; j = 0, k = 1,2, \dots, K \end{cases}$ (3.7)

$\sum_{j=0}^{N+M} x_{ijk}=\begin{cases} uik \quad εάν\; i = 0,1, \dots, N \\ vik \;εάν\; i = N+1, N+2, \dots, N+M, \;\; k = 1,2, \dots, K \end{cases}$ (3.8)

$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=N+1\; and\; j=0}^{N+M} \quad x_{ijk}$=1, k=1,2,…,K (3.9)

$x_{ijk} \in$ S, (3.10)

x_{ijk}=0 ή 1 , i,j =0,1,…,N, N+1,…,N+M, k=1,2,…,K (3.11)

Το S= $\left\{για\; όλαταxijk\; για\; τα\; οποία\; \sum_{iEQ} \sum_{jEQ} \leq |Q| - 1\right\}$

Για κάθε μη κενό Q από {1,2,…,N,N+1,…,N+M}

Οι περιορισμοί (3.1) και (3.4) αναπαριστούν την προϋπόθεση ότι τα φορτηγά δεν μπορούν να υπερφορτωθούν σε οποιαδήποτε διαδρομή. Οι περιορισμοί (3.2) και (3.5) δείχνουν ότι μόνο ένα όχημα μπορεί να αντιστοιχιστεί σε κάθε διαδρομή γραμμής και οπισθοπορείας, αντίστοιχα, και ότι τα οχήματα δεν μπορούν να υπερβούν το K. Το σύνολο περιορισμών (3.7) λέει ότι ακριβώς ένα όχημα πρέπει να εισέλθει σε κάθε τοποθεσία πελάτη linehaul, ενώ ο περιορισμός (3.8) λέει ότι ακριβώς ένα όχημα πρέπει να εισέλθει σε κάθε τοποθεσία πελάτη backhaul μία φορά. Ο περιορισμός (3.9) δείχνει ότι πρέπει να υπάρχει ακριβώς ένας σύνδεσμος από κάθε όχημα από κάθε πελάτη linehaul σε πελάτη backhaul σε κάθε διαδρομή. Ο περιορισμός (3.10) είναι ο συνηθισμένος περιορισμός απομάκρυνσης για ένα πρόβλημα πλανόδιου πωλητή.

3.3 Το μικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής (The Mixed Vehicle Routing Problem with Backhauls (MVRPB)

Το μικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής προέρχεται από το VRPB χαλαρώνοντας κάποιους περιορισμούς. Δηλαδή, επιτρέπεται ο συνδυασμός των πελατών που απαιτούν την διανομή κάποιας ποσότητας προϊόντων (linehauls customers) με τους πελάτες που ο κάθε ένας εκ των οποίων απαιτεί μια ποσότητα του προϊόντος να περισυλλεχθεί από αυτόν (backhauls customers) μέσα σε μια διαδρομή και είμαστε ελεύθεροι να χρησιμοποιήσουμε όσα οχήματα θέλουμε. Ισχύουν οι περιορισμοί χωρητικότητας των οχημάτων. Ο έλεγχος για την χωρητικότητα των οχημάτων είναι ελαφρώς πιο περίπλοκος στο πρόβλημα MVRPB καθώς το φορτίο του οχήματος αυξομειώνεται κατά τη διάρκεια της διαδρομής. Επιπλέον, ορισμένα MVRPB έχουν επίσης ένα όριο διάρκειας διαδρομής, αυτό σημαίνει ότι οι διαδρομές θα πρέπει να ολοκληρωθούν εντός συγκεκριμένο χρονικού πλαισίου. Για τέτοιου είδους προβλήματα ο χρόνος ταξιδιού μεταξύ των πελατών και οι χρόνοι εξυπηρετήσεις των πελατών δίνονται. Οι ευρετικοί αλγόριθμοι για αυτό το πρόβλημα παρουσιάζονται από τους Halse(5), Nagy και Salhi(6) (7) και Wade και Salhi(8). Ο στόχος είναι να βρεθεί το σύνολο των διαδρομών με το μικρότερο κόστος όπου:

• Κάθε πελάτης επισκέπτεται ακριβώς μία φορά,

• όλες οι διαδρομές αρχίζουν και τελειώνουν στην αποθήκη,

• το φορτίο του οχήματος σε οποιοδήποτε σημείο της διαδρομής δεν πρέπει να υπερβαίνει την χωρητικότητα του οχήματος.

Το μικτό πρόβλημα είναι πιο περίπλοκο από το κλασσικό VRPB λόγω του κυμαινόμενου φορτίου του οχήματος. Το μικτό VRPB δεν έχει λάβει τόσο μεγάλη προσοχή στη βιβλιογραφία όσο το αντίστοιχο του κλασικό VRPB. Το VRPB είναι στενά συνδεδεμένο με το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (TSP), βασίζουμε τη μέθοδο μας στο σύστημα Ant Colony γνωστό ως ο αλγόριθμος ACS που χρησιμοποιήθηκε επιτυχώς για την επίλυση του TSP, Dorigo και Gambardella(9)

3.4 Το μικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής και πολλές αποθήκες (The Multiple Depot Mixed Vehicle Routing Problem with backhauls -MDMVRPB)

Το μικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής και πολλές αποθήκες είναι μια γενίκευση του MVRPB. Στο MDVRPB χαλαρώνουμε τον περιορισμό των αποθηκών έτσι ώστε αντί να εξετάζουμε απλώς μια αποθήκη αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα των πολλών αποθηκών. Σε κάθε αποθήκη υπάρχει διαθέσιμος περιορισμένος στόλος οχημάτων και κάθε όχημα πρέπει να ξεκινήσει και να τερματίσει τη διαδρομή του στην ίδια αποθήκη. Οι ευρετικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα προτείνονται από τους Nagy και Salhi(6) (7).

3.5 Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής και χρονικά παράθυρα (The Vehicle Routing Problem with Backhauls and Time Windows (VRPBTW)

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής και χρονικά παράθυρα (VRPBTW) επεκτείνει το VRPB ορίζοντας ένα χρονικό παράθυρο σε κάθε πελάτη, συνδέοντας τους χρόνους ταξιδιού με κάθε ζεύγος τοποθεσιών και συνδέοντας τους πελάτες με τους χρόνους εξυπηρέτησης. Οι επισκέψεις σε έναν πελάτη πρέπει να ξεκινούν μέσα στο χρονικό παράθυρο. Αν το αυτοκίνητο φτάσει επίσης νωρίς σε έναν πελάτη πρέπει να περιμένει μέχρι την έναρξη του χρονικού παραθύρου. Εάν το όχημα φτάσει πολύ αργά, η διαδρομή είναι άκυρη. Ο στόχος του VRPBTW είναι είτε η ελαχιστοποίηση της συνολικής διανυθείσας απόστασης είτε η ελαχιστοποίηση του αριθμού των οχημάτων ως πρώτη προτεραιότητα και στη συνέχεια η ελαχιστοποίηση της συνολικής διανυθείσας απόστασης ως δεύτερη προτεραιότητα. Ένας ακριβής αλγόριθμος για το VRPBTW με βάση τη δημιουργία στήλης προτάθηκε από τους Gelinasetal. (10)

και οι ευρετικές μέθοδοι προτάθηκαν από τους Duhameletal. (11), Hasama et al. (12), Reimann et al. (13), Thangiah et αϊ. (14)καιZhongandCole(15).

3.6 Το μικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής με χρονικά παράθυρα (The Mixed Vehicle Routing Problem with Backhauls and Time Windows - MVRPBTW)

Το μικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής και χρονικά παράθυρα προέρχεται από το VRPBTW χαλαρώνοντας τον περιορισμό που επιβάλλει οι πελάτες backhauls να επισκέπτονται μετά τους πελάτες linehauls. Ο λόγος που εξετάστηκε από τη βιβλιογραφία είναι να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των οχημάτων ως πρώτη προτεραιότητα και η απόσταση που διανύθηκε ως η δεύτερη προτεραιότητα. Δύο θεωρητικά μοντέλα έχουν προταθεί από τους Kontoravdis και Bard και Zhong and Cole(15).

Κεφάλαιο 4

4.1 Αλγόριθμοι και το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων

4.1.1 Ευρετικοί Αλγόριθμοι

Η επίλυση ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης γίνεται ολοένα και δυσκολότερη όσο αυξάνεται το μέγεθος του προβλήματος και πολλές φόρες το να προσπαθούμε να βρούμε την ολικά βέλτιστη λύση σε λογικό χρόνο είναι πρακτικά αδύνατο. Για να επιλύσουμε προβλήματα αυτής της μορφής συχνά καταφεύγουμε σε διαφορετικές τεχνικές που μας οδηγούν σε μια σχεδόν βέλτιστη αλλά ικανοποιητική λύση. Μια λύση ενός ευρετικού αλγορίθμου γίνεται αποδεκτή αν ικανοποιεί κάποια κριτήρια όπως η ποιότητα της λύσης, δηλαδή η απόκλιση από τη βέλτιστη, η ευκολία απόκτησης μιας λύσης, η λογική πάνω στην οποία στηρίζονται οι κανόνες του ευρετικού αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκαν για να οδηγηθούμε στη λύση. Για κάποιο πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης δεν υπάρχει μονάχα ένας ευρετικός αλγόριθμος που να δίνει τη βέλτιστη λύση, αλλά έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αλγόριθμοι οι οποίοι συγκρινόμενοι μεταξύ τους μας οδηγούν ολοένα και σε καλύτερες λύσεις. Οι κατηγορίες των ευρετικών αλγορίθμων είναι οι εξής:

- Αλγόριθμοι απληστίας (greedy algorithms)
- Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι (approximation algorithms)
- Αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης (local search algorithms)

Με λίγα λόγια μπορούμε να πούμε ότι οι αλγόριθμοι απληστίας προσπαθούν να οδηγήσουν σε μια εφικτή λύση του προβλήματος, αλλά πολλές φορές χρειάζονται πάρα πολύ μεγάλο χρόνο γιατί είναι μυωπικοί αλγόριθμοι, δηλαδή βλέπουν μόνο μπροστά. Οι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι προσπαθούν να λύσουν αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας επιπλέον πληροφορία. Τέλος οι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης προσπαθούν από μία εφικτή λύση να βελτιώσουν τη λύση με κάποια μέθοδο αναζήτησης στην γειτονιά της λύσης.

Οι Bodin και Golden 1981 ταξινόμησαν τις στρατηγικές επίλυσης για τα προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων (VRP) στις παρακάτω προσεγγίσεις:

I. Ομαδοποίηση πρώτα - δρομολόγηση έπειτα (Cluster first – route second)
II. Δρομολόγηση πρώτα – ομαδοποίηση έπειτα (Route first – cluster second)
III. Εξοικονομήσεις / Καταχώρηση (Savings/Insertion)
IV. Βελτίωση ή ανταλλαγή (Improvement or exchange)
V. Προσέγγιση μαθηματικού προγραμματισμού (Mathematical programming approach)
VI. Αλληλεπιδρών βελτιστοποίηση (Interactive optimization)
VII. Ακριβής διαδικασία (Exact procedure)

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε πιο αναλυτικά ορισμένα χαρακτηριστικά των προσεγγίσεων αυτών

I. Ομαδοποίηση πρώτα – δρομολόγηση έπειτα: Ομαδοποιούμε πρώτα τους κόμβους και / ή τα τόξα ζήτησης και σχεδιάζουμε οικονομικές διαδρομές για κάθε ομάδα σαν δεύτερο στάδιο. Η διαμόρφωση στρατηγικής αυτού του αλγορίθμου αποσκοπεί στο να διαμορφώσει εκείνος τα σημεία της διαδρομής έτσι ώστε το καθένα από τα οχήματα να μην υπερβαίνει τα όρια της χωρητικότητάς του που έχουν τεθεί.

II. Δρομολόγηση πρώτα – ομαδοποίηση έπειτα: Μια μεγάλη (συνήθως μη εφικτή) διαδρομή ή κύκλος κατασκευάζεται που περιλαμβάνει όλες τις οντότητες ζήτησης. Έπειτα η μεγάλη διαδρομή διαμελίζεται σε έναν αριθμό από μικρότερες αλλά εφικτές διαδρομές. Η μέθοδος αυτή επιλύει το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή όπου όλα τα σημεία σχηματίζουν μία μεγάλη διαδρομή. Στη συνέχεια αυτή η διαδρομή χωρίζεται σε μικρότερες διαδρομές ώστε η κάθε μία να ικανοποιεί τους περιορισμούς του κάθε οχήματος. Οι εφαρμογές αυτής της προσέγγισης δίνονται από τους Newton and Thomas (1969) και τους Bodin και Berman (1979) για τη δρομολόγηση σχολικών λεωφορείων. Επέκταση της προσέγγισης της μεθόδου αυτής ως προς το VRPB δεν φαίνεται εφικτή λόγω παραβίασης των περιορισμών προτεραιότητας.

III. Εξοικονομήσεις / καταχώρηση: Στις διαδικασίες εναποθήκευσης ή καταχώρησης κατασκευάζεται μια λύση με τέτοιο τρόπο όπου σε κάθε βήμα της διαδικασίας ένας τρέχον σχηματισμός που πιθανώς να είναι μη εφικτός συγκρίνεται με έναν εναλλακτικό σχηματισμό που μπορεί επίσης να είναι μη εφικτός. Ο εναλλακτικός σχηματισμός είναι αυτός που αποδίδει τις μεγαλύτερες εξοικονομήσεις σε όρους κάποιας συνάρτησης κριτηρίου, όπως του ολικού κόστους, ή καταχωρεί με το ελάχιστο κόστος από μια οντότητα ζήτησης όχι στον τρέχων σχηματισμό μέσα στην υπάρχουσα διαδρομή ή στις υπάρχουσες διαδρομές. Η διαδικασία ολοκληρώνεται με έναν εφικτό σχηματισμό. Ίσως ο πιο γνωστός αλγόριθμος εξοικονόμησης/καταχώρησης αναπτύχθηκε από την Clarke και Wright (1964). Οι Deif και Bodin (1984) έχουν προτείνει την επέκταση αυτού του αλγορίθμου για το VRPB. Η διαδικασία τους βασίζεται σε δύο τροποποιήσεις του αλγορίθμου Clarke-Wright. Η πρώτη τροποποίηση προσθέτει τον περιορισμό ότι μόνο ένας σύνδεσμος από linehaul σε backhaul (ή αντίστροφα) επιτρέπεται σε κάθε διαδρομή και η δεύτερη τροποποίηση συμπεριέλαβε ποινή λόγω της μείωσης του μεγέθους της εξοικονόμησης για τη μετάβαση από linehaul σε backhaul έτσι ώστε να μην καθυστερεί τη σύνδεση.

IV. Βελτίωση ή ανταλλαγή : Οι διαδικασίες βελτίωσης ή ανταλλαγής, ίσως η καλύτερη γνωστή μέθοδος είναι ο r-opt αλγόριθμος των Lin and Kernigham, πάντα διατηρούν την εφικτότητα τους και οδηγούν στην καλύτερη δυνατή λύση. Σε κάθε βήμα μια εφικτή λύση βελτιώνεται (ανταλλάσσοντας κάποιες ακμές) για να οδηγήσει σε μια άλλη εφικτή λύση με μειωμένο το συνολικό κόστος. Αυτή η διαδικασία ακολουθείται μέχρι να μην υπάρχουν μειώσεις στα επιπρόσθετα κόστη. Οι Χριστοφίδης και Έιλον (1972) ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο VRP μετασχηματίζοντας το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα πλανόδιου πωλητή, εφαρμόζοντας 2-opt και 3-opt. Οι τεχνικές βελτιστοποίησης βασίζονται στην ανάπτυξη ενός αλγορίθμου επίλυσης βασισμένου σε μία μαθηματική διατύπωση του προβλήματος. Ο σχεδιασμός βελτιστοποίησης της ευρετικής διαδικασίας περιλαμβάνει την ανάπτυξη ενός μαθηματικού μοντέλου του προβλήματος παρατηρώντας την εξειδικευμένη δομή του μοντέλου, χρησιμοποιώντας μια στρατηγική βελτιστοποίησης όπως η αποσύνθεση της δομής και ίσως να ενισχύσει την διαδικασία επιτρέποντας την είσοδο από το χρήστη.

V. Προσέγγιση μαθηματικού προγραμματισμού: Η προσέγγιση του μαθηματικού προγραμματισμού περιλαμβάνει αλγορίθμους που βασίζονται ευθέως σε μορφοποίηση μαθηματικού προγραμματισμού του θεμελιώδους προβλήματος δρομολόγησης.

VI. Αλληλεπιδρών βελτιστοποίηση: Είναι μια γενικού σκοπού προσέγγιση στην οποία ένας υψηλός βαθμός αλληλεπιδρώντων ατόμων ενσωματώνονται στην διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Η ιδέα είναι ότι ο έμπειρος αποφασίζων μπορεί να έχει την ικανότητα της τοποθέτησης και αναθεώρησης παραμέτρων και να δίνει αντικειμενικές εκτιμήσεις βασισμένος στη γνώση και την διαίσθηση του μοντέλου της βελτιστοποίησης. Αυτό σχεδόν πάντα αυξάνει την πιθανότητα ότι το μοντέλο θα υλοποιηθεί και θα χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά.

VII. Ακριβής διαδικασία: Οι ακριβείς διαδικασίες για την επίλυση προβλημάτων δρομολόγησης περιλαμβάνουν εξειδικευμένους αλγορίθμους branch and bound και cutting planes.

Οι ευρετικοί αλγόριθμοι διακρίνονται σε κατασκευαστικούς και σε βελτιωτικούς. Με τους κατασκευαστικούς αλγορίθμους δημιουργείται μια διαδρομή. Η διαδρομή που θα κατασκευαστεί είναι αποτέλεσμα της ελαχιστοποίησης ενός κριτηρίου σύμφωνα με το οποίο μπορεί να κάνει είτε ένα όχημα δύο διαδοχικά δρομολόγια είτε δύο οχήματα να κινηθούν παράλληλα. Μια γνωστή μέθοδος των κατασκευαστικών αλγορίθμων είναι αυτή του πλησιέστερου γείτονά.

Με τη μέθοδο αυτή μειώνεται η χρονική διάρκεια ολοκλήρωσης της διαδρομής και οι αποστάσεις των σημείων που ακολουθεί το ένα το άλλο καθώς επίσης μελετάται και πιο σημείο θα είναι της παραλαβής και πιο σημείο της παράδοσης. Για να μπορέσει μια λύση να είναι ικανοποιητική θα πρέπει ο χρόνος ολοκλήρωσης του αλγορίθμου καθώς επίσης και οι χωρητικότητες των οχημάτων να μην υπερβαίνουν τα όρια που έχουν τεθεί. Με την εφαρμογή της μεθόδου αυτής δημιουργούνται δρομολόγια στα οποία περιλαμβάνονται όλοι οι κόμβοι του προβλήματος.

Γνωστοί κατασκευαστικοί αλγόριθμοι είναι των Clark and Wright και ο αλγόριθμος που δημιουργήθηκε από τον Solomon σύμφωνα με τον οποίο η διαδρομή ξεκινά από το κεντρικό σημείο όλων των διαδρομών. Για να εισαχθούν νέα σημεία σε ένα δρομολόγιο θα πρέπει να εξυπηρετείται από ένα όχημα έναντι άλλων.

Στους βελτιωτικούς ευρετικούς αλγόριθμους ανήκει η κατηγορία των αλγορίθμων, οι οποίοι βασίζονται στην τοπική αναζήτηση από όπου ξεκινά μία εφικτή λύση και ακολουθεί μια μέθοδος αναζήτησης για την επόμενη λύση. Οι βελτιωτικοί αλγόριθμοι χαρακτηρίζονται για την ταχύτητα και την αποτελεσματικότητα τους.

Ο σχεδιασμός και η πραγματοποίηση ενός βελτιωτικού αλγορίθμου πραγματοποιείται με τα εξής βήματα:

- Προσδιορίζεται ο τρόπος που θα δημιουργηθεί και θα σχεδιαστεί για να εντοπιστεί μια λύση.
- Παρουσιάζονται οι μηχανισμοί οι οποίοι θα διαφοροποιήσουν τη λύση.
- Προσδιορίζεται το κριτήριο με το οποίο θα γίνει αποδεκτή μία λύση.
- Προσδιορίζεται το κριτήριο με το οποίο θα επιλεγεί η βέλτιστη λύση.

Βασικοί τελεστές ανταλλαγής χαρακτηρίζονται οι εξής τρεις:

Relocate: Η επανατοποθέτηση η οποία πραγματοποιείται όταν γίνεται μεταφορά ενός σημείου από ένα δρομολόγιο σε κάποιο άλλο χωρίς να πραγματοποιείται αλλαγή στον συντονισμό τους.

Exchange: Πρόκειται για την περίπτωση όπου δύο σημεία δύο διαδρομών ανταλλάσσονται χωρίς όμως να μεταβάλλεται η επίλυση του προβλήματος.

Cross: Πρόκειται για τη διασταύρωση ζευγών διαδοχικών σημείων χωρίς να αλλάζει κατεύθυνση το δρομολόγιο.

4.1.1a Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων – Ο αλγόριθμος των εξοικονομήσεων των Clarke&Wright (The savings algorithm)

Ο πρώτος κατασκευαστικός αλγόριθμος που έχει προταθεί για την επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων είναι ο αλγόριθμος των εξοικονομήσεων των Clarke&Wright(16). Σε αυτή την μέθοδο αρχικά υπολογίζονται οι εξοικονομήσεις όλων των πελατών και στην συνέχεια δημιουργούνται διαδρομές βάση των καλύτερων εξοικονομήσεων. Η διαδικασία έχει δύο εκδοχές την παράλληλη και την ακολουθητική. Η διαδικασία έχει την παρακάτω μορφή:

Βήμα 1. Υπολογισμός των εξοικονομήσεων (savings) $s_{ij}=c_{1i}-c_{ij}+c_{j1}$ για όλα τα ζεύγη των πελατών i και j. Παρατηρούμε ότι s_{ij} είναι η εξοικονόμηση σε κόστος αν συνδέοντας τις κορυφές i και j παράγουμε την διαδρομή (1,i,j,1) αντί να έχουμε τα i και j σε δύο διαδρομές (1,i,1) και (1,j,1).

Βήμα 2. Κατατάσσουμε τις εξοικονομήσεις σε φθίνουσα σειρά.

Βήμα 3. Ξεκινώντας από την κορυφή της λίστας, κάνουμε τα ακόλουθα :

Παράλληλη εκδοχή

Βήμα 4. Αν μετά τη δημιουργία ενός δεσμού, δημιουργείται μια εφικτή διαδρομή, ικανοποιώντας τους περιορισμούς του VRP, δεχόμαστε τον δεσμό στην λύση, αλλιώς την απορρίπτουμε.

Βήμα 5. Εξετάζουμε τον επόμενο δεσμό στην λίστα και επαναλαμβάνουμε το βήμα 4 εώς ότου να μην μπορεί να επιλεγεί άλλος δεσμός.

Ακολουθητική εκδοχή

Βήμα 4. Βρίσκουμε τον πρώτο εφικτό δεσμό στην λίστα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προεκτείνει ένα από τα δύο άκρα της τρέχουσας διαδρομής.

Βήμα 5. Εάν η διαδρομή δεν μπορεί να επεκταθεί επιπλέον, ολοκληρώνουμε την διαδρομή. Επιλέγουμε τον πρώτο εφικτό δεσμό στην λίστα για να ξεκινήσουμε μια καινούρια διαδρομή.

Βήμα 6. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 4 και 5 μέχρι κανένας δεσμός να μην μπορεί να επιλεγεί.

Και στις δύο μορφές αυτής της διαδικασίας, πρέπει να ελέγχεται η εφικτότητα της μερικής λύσης σε κάθε βήμα, για να βεβαιωθούμε ότι δεν παραβιάζεται κανένας περιορισμός. Αλλιώς, είναι προφανές ότι καμία εφικτή λύση δεν θα έχει βρεθεί στο πρόβλημα. Παρατηρούμε επίσης, ότι στην αρχική λύση όταν όλοι οι πελάτες είναι σε διαφορετική διαδρομή η λύση δεν είναι εφικτή. Όμως, στο τέλος της διαδικασίας υπάρχει η πιθανότητα κάποιοι πελάτες να μείνουν χωρίς διαδρομή.

4.1.1βΤο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων – Μέθοδοι δύο φάσεων

Στις μεθόδους δύο φάσεων, η πρώτη αποτελείται από ομαδοποίηση των πελατών εκχωρώντας τους σε οχήματα, και στην δεύτερη φάση η δρομολόγηση αυτής της διαδρομής. Ο αλγόριθμος σαρώματος των Gillet&Miller(17). Τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη φάση αυτής της διαδικασίας είναι ακολουθητική. Υποθέτουμε ότι οι αποστάσεις μεταξύ των κορυφών είναι ευκλείδειες και ότι οι πελάτες τοποθετούνται βάση των πολικών συντεταγμένων (r_i,θ_i) με την αποθήκη να είναι στο $r_i=0$ και ένας τυχαίος πελάτης i* και θ_i*, Στη συνέχεια κατατάσσουμε τους πελάτες έτσι ώστε $\theta_2 \leq \ldots \leq \theta_n$.

Φάση 1

Βήμα 1. Επέλεξε ένα αχρησιμοποίητο όχημα k.

Βήμα 2. Ξεκινώντας από τον πελάτη i, που δεν είναι στη διαδρομή, με το μικρότερο κόστος θ_i και συμπεριέλαβε τους γειτονικούς του πελάτες στην διαδρομή μέχρι να παραβιαστούν οι περιορισμοί χωρητικότητας του οχήματος.

Βήμα 3. Αν όλοι οι πελάτες έχουν εκχωρηθεί ή όλα τα οχήματα έχουν γεμίσει πήγαινε στη Φάση 2, αλλιώς γύρνα στο βήμα 1.

Φάση 2

Βήμα 4. Λύνουμε το TSP για κάθε σύνολο πελατών που έχουν εκχωρηθεί σε κάποιο όχημα και μορφοποιούμε τις τελικές διαδρομές.

4.1.1γ Η μέθοδος των δύο φάσεων των Fisher&Jaikumar(18).

Αυτή η μέθοδος είναι ίσως η πιο διάσημη ομαδοποίηση πρώτα – δρομολόγηση έπειτα μέθοδος. Η πρώτη φάση αυτής της ευρετικής διαδικασίας βρίσκει μια ανάθεση των πελατών στα οχήματα λύνοντας βέλτιστα ένα γενικευμένο πρόβλημα εκχώρησης (Generalized Assignment Problem - GAP) με αντικειμενική συνάρτηση να είναι μια προσέγγιση του κόστους διανομής. Στην δεύτερη φάση του αλγορίθμου επιλύεται ένα πρόβλημα πλανόδιου πωλητή για κάθε ένα όχημα.

Φάση 1

Βήμα 1. Διαλέγουμε m πελάτες για να είναι οι αρχικοί πελάτες των ομάδων και τοποθετούμε ένα όχημα για τον κάθε ένα από αυτούς.

Βήμα 2. Για κάθε πελάτη i και για κάθε ομάδα k, υπολογίζουμε ένα κόστος εισόδου d_{ik} σε σχέση με τον αρχικό πελάτη της κάθε ομάδας.

Βήμα 3. Επιλύουμε το γενικευμένο πρόβλημα εκχώρησης.

Φάση 2

Βήμα 4. Λύνουμε το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (TSP) για κάθε σύνολο πελατών που έχουν εκχωρηθεί σε κάποιο όχημα και μορφοποιούμε τις τελικές διαδρομές.

4.1.1δ Η μέθοδος των δύο φάσεων των Mole&Jameson(19).

Ο αλγόριθμος των Mole&Jameson είναι μια ακολουθητική διαδικασία στην οποία για μια δεδομένη τιμή των δύο παραμέτρων λ και μ, τα ακόλουθα δύο κριτήρια χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μιας διαδρομής :

$e(i,l,j)=c_{il} + c_{lj} - \mu c_{ij}$
$\sigma(i,l,j)=\lambda c_{0l}-e(i,l,j)$

Ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Βήμα 1. Για κάθε μη δρομολογημένο πελάτη x_l υπολογίζουμε σε ποιο σημείο της διαδρομής μπορεί να εισαχθεί ο πελάτης: $e(i_l,l,j_l)=\min[e(r,l,s)]$ για όλους τους γειτονικούς πελάτες $x_r,x_s ER$, όπου x_{il} και x_{ji} είναι οι πελάτες για τους οποίους η εισαγωγή του πελάτη x_l έχει την καλύτερη δυνατή τιμή.

Βήμα 2. Ο καλύτερος πελάτης x_l* που θα εισαχθεί στην διαδρομή υπολογίζεται να είναι εκείνος για τον οποίο η ακόλουθη έκφραση μεγιστοποιείται:

$\sigma\ (i_l*,l*,j_l*)=\max\ [\sigma(i_l,l,j_l)]$

για τον κάθε πελάτη x_l που δεν βρίσκεται είδη σε κάποια διαδρομή και που δεν παραβιάζει κάποιο περιορισμό.

Βήμα 3. Εισάγουμε x_{l*} στην διαδρομή R ανάμεσα στον x_{il*} και στον x_{jl*}.

Βήμα 4. Βελτιστοποιούμε την διαδρομή R χρησιμοποιώντας μεθόδους r – opt.

Βήμα 5. Επιστρέφουμε στο βήμα 1 για να ξεκινήσουμε μια καινούρια διαδρομή R εκτός αν όλοι οι πελάτες έχουν δρομολογηθεί ή κανένας από τους εναπομείναντες πελάτες δεν μπορεί να δρομολογηθεί.

4.1.1εΗ μέθοδος των δύο φάσεων των Christofides, Mignozzi&Toth(2)

Η πρώτη φάση αυτού του ευρετικού αλγορίθμου αποτελείται από την εφαρμογή ενός αριθμού δοκιμών για την ομαδοποίηση χρησιμοποιώντας ένα κριτήριο εκχώρησης ελαχίστου κόστους.

Φάση 1

Βήμα 1.(Ακολουθητικές δοκιμές) Επιλέγουμε έναν πελάτη που δεν είναι στη διαδρομή για πελάτη σπόρο. Διαλέγουμε ένα όχημα για τον πελάτη.

Βήμα 2. Βάζουμε τους πελάτες που δεν είναι σε διαδρομή σε κάποια ομάδα, βάση κάποιου κόστους εκχώρησης που σχετίζεται με τον πελάτη της κάθε ομάδας, μέχρις ότου να παραβιαστεί ο περιορισμός χωρητικότητας του κάθε οχήματος. Αν όλοι οι πελάτες είναι σε ομάδες ή όλα τα οχήματα έχουν χρησιμοποιηθεί, πηγαίνουμε στο βήμα 3, αλλιώς επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Βήμα 3. (Παράλληλες δοκιμές) Χρησιμοποιώντας όλους τους αρχικούς πελάτες για μια διαδρομή που βρέθηκαν στις ακολουθητικές δοκιμές, απελευθερώνουμε όλους τους πελάτες από τις ομάδες τους.

Βήμα 4. Για κάθε ελεύθερο πελάτη, υπολογίζουμε το κόστος εισόδου σε σχέση με τους αρχικούς πελάτες της κάθε ομάδας, σε μια εφικτή ομάδα. Ελέγχουμε όλες τις ομάδες και στη συνέχεια κρατάμε αυτή με το καλύτερο κόστος για τον πελάτη.

Βήμα 5. Εκχωρούμε τον πελάτη με το καλύτερο κόστος στην ομάδα που αντιστοιχεί.

Βήμα 6. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 4 και 5 για όλους τους ελεύθερους πελάτες.

Φάση 2

Βήμα 7. Και για τις δύο ομαδοποιήσεις λύνουμε ένα πρόβλημα πλανόδιου πωλητή (TSP) και κρατάμε την καλύτερη από τις δύο λύσεις.

4.1.2 Αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης (Local search algorithms)

Η τοπική αναζήτηση βασίζεται (20) στην αρχαιότερη μέθοδο βελτιστοποίησης, την μέθοδο δοκιμής και σφάλματος. Ένας γενικός αλγόριθμος είναι ο εξής:

Έχουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης (F, c) όπου F είναι ένα εφικτό σύνολο και c είναι το κόστος, επιλέγουμε τη γειτονία

$$N: F \rightarrow 2^F$$

Στην οποία εφαρμόζεται αναζήτηση για να βρεθεί καλύτερη λύση από την αρχική αν υπάρχει κάποιο σημείο $S \in N$ που να έχει μικρότερο κόστος από το κόστος που έχουμε αυτή τη στιγμή. Για όσο χρονικό διάστημα βρίσκεται μία καλύτερη λύση, αντικαθιστούμε την υπάρχουσα λύση με την καινούρια και συνεχίζουμε την αναζήτηση μέχρι το σημείο που θα βρούμε κάποιο τοπικό ελάχιστο και η λύση που έχουμε δεν θα βελτιώνεται παραπάνω. Στη συνέχεια περιγράφεται ένας πολύ γενικός αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης. Στον αλγόριθμο ξεκινάμε από μια εφικτή αρχική λύση $t \in F$ και χρησιμοποιούμε την υπορουτίνα improve (i) για να ψάξουμε για μια καλύτερη λύση στη γειτονιά της αρχικής λύσης. Όσο βρίσκουμε μια βελτιωμένη λύση, την εφαρμόζουμε και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αναζήτησης από τη νέα λύση. Όταν φτάσουμε στο τοπικό ελάχιστο σταματάμε.

Διαδικασίαlocal_search
begin
t μια αρχική λύση του προβλήματος
dowhileβρίσκεται μια βελτιωμένη λύση (improve (t))
t=improve(t)
return t
end

Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της τοπικής αναζήτησης είναι το γεγονός ότι μπορεί να εκτελείται από πολλά διαφορετικά αρχικά σημεία και να επιλέγεται το καλύτερο σαν βέλτιστη λύση.

Σε αυτές τις περιπτώσεις μια άλλη απόφαση που πρέπει να πάρουμε είναι πόσα θα είναι τα αρχικά σημεία που θα πρέπει να επιλέξουμε. Το επόμενο πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί για να είμαστε σε θέση να πούμε ότι η τοπική αναζήτηση που εφαρμόζουμε οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα είναι το ότι θα πρέπει να γίνει σωστή επιλογή της γειτονίας που θα πραγματοποιηθεί η αναζήτηση.

Τέλος το σημαντικότερο ίσως στοιχείο για την επιτυχία της διαδικασίας είναι η επιλογή της μεθόδου που θα χρησιμοποιηθεί για την αναζήτηση. Στην βιβλιογραφία του προβλήματος υπάρχουν αρκετές μέθοδοι που έχουν εφαρμοστεί για την επίλυση του προβλήματος, οι σημαντικότερες εκ των οποίων είναι η μέθοδος 2-opt, η μέθοδος 3-opt, η περιορισμένη αναζήτηση και ο αλγόριθμος των Lin-Kernigham.

Τα σημαντικότερα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν κατά την διάρκεια της φάσης της σχεδίασης ενός αλγορίθμου τοπικής αναζήτηση είναι:

- Το πρώτο, όπως είπαμε και παραπάνω, είναι η επιλογή της γειτονιάς, και αυτό σχετίζεται με την ανησυχία που υπάρχει για το αν είναι ή όχι εφικτή η λύση.
- Το δεύτερο πολύ σημαντικό στοιχείο που πρέπει να αντιμετωπίσουμε είναι η ποιότητα της αρχικής λύσης. Είναι ένα πολύ σημαντικό στοιχείο, γιατί όσο καλύτερη είναι η αρχική λύση τόσο περισσότερες πιθανότητες υπάρχουν να οδηγηθούμε ευκολότερα και γρηγορότερα σε βελτίωση της λύσης με την χρήση της τοπικής αναζήτησης.
- Το τρίτο και σημαντικότερο στοιχείο για την επιτυχία του αλγορίθμου είναι η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για να βελτιώσει την αρχική λύση. Οι περισσότερες μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί στην βιβλιογραφία παρουσιάζουν σημαντικά προβλήματα όσον αφορά την ποιότητα της λύσης που επιστρέφουν και αυτό γιατί αν κάποια στιγμή πέσουν σε τοπικό ελάχιστο είναι πολύ δύσκολο να ξεκολλήσουν από εκεί. Από τις μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί και που αποφεύγουν εύκολα την παγίδα του κολλήματος σε τοπικά ελάχιστα είναι η μέθοδος Lin-Kernigham.

4.1.2αΤο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων και οι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης

Στο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων υπάρχουν δύο είδη αποφάσεων, οι αποφάσεις δρομολόγησης των οχημάτων και οι αποφάσεις ανάθεσης πελατών στα οχήματα. Οι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης χωρίζονται και αυτοί σε αλγόριθμους τοπικής αναζήτησης δύο φάσεων. Στους αλγόριθμους που προσπαθούν να βελτιώσουν τη δρομολόγηση των οχημάτων σε μία διαδρομή, οι οποίοι είναι στην ουσία ίδιοι με τους αλγορίθμους που εφαρμόζονται στο πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή και στους αλγορίθμους που προσπαθούν να βελτιώσουν την ανάθεση των πελατών σε οχήματα και οι οποίοι εφαρμόζονται μεταξύ 2 ή και περισσότερων διαδρομών.

Ο Waters(21) πρότεινε έναν αριθμό από διαδικασίες ανταλλαγής που μπορούν να εφαρμοστούν μεταξύ δύο ή περισσότερων διαδρομών. Πρότεινε τέσσερις διαφορετικές διαδικασίες τοπικής αναζήτησης :

1. Μια απλή διαγραφή ενός πελάτη από μια διαδρομή και επανατοποθέτηση του σε μία άλλη διαδρομή με καλύτερο κόστος. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται 1-0 επανατοποθέτηση (1-0 relocate).
2. Μια ταυτόχρονη ανταλλαγή 2 πελατών που βρίσκονται σε διαφορετικές διαδρομές. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται 1-1 ανταλλαγή (1-1 exchange).

3. Μια συνδυασμένη ανταλλαγή όπου ένας πελάτης που ανήκει σε ένα κύκλο ανταλλάσσεται με δύο γειτονικούς πελάτες που ανήκουν σε ένα άλλο κύκλο. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται (1-2 exchange).
4. Μια συνδυασμένη ανταλλαγή όπου δύο γειτονικοί πελάτες που ανήκουν σε ένα κύκλο ανταλλάσσονται με δύο γειτονικούς πελάτες που ανήκουν σε ένα άλλο κύκλο. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται (2-2 exchange).

4.1.3 Διαδικασία άπληστης Τυχοποιημένης Προσαρμοστικής Αναζήτησης – Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι

Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι είναι μέθοδοι επίλυσης που συνδυάζουν διαδικασίες τοπικής αναζήτησης και υψηλότερου επιπέδου στρατηγικές για να δημιουργήσουν μια διαδικασία που είναι ικανή να ξεφύγει από κάποιο τοπικό ελάχιστο. Τα τελευταία χρόνια οι περισσότεροι αλγόριθμοι που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση των προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης ανήκουν σε αυτή τη κατηγορία. Κάποιες από αυτές τις μεθόδους είναι η Προσομοιωμένη Ανόπτηση (Simulated Annealing), η Περιορισμένη Αναζήτηση (Tabu Search),οι Γενετικοί και Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (Genetic and Evolutionary algorithms), τα Νευρωνικά Δίκτυα (Neural Nets), ο Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Αποικίας των Μυρμηγκιών (Ant Colony Optimization), ο Αλγόριθμος Διασκορπισμένης Αναζήτησης (Scatter Search), η Διαδικασία Άπληστης Τυχοποιημένης Προσαρμοστικής Αναζήτησης (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure), ο Αλγόριθμος της Διαφορικής Εξέλιξης (Differential Evolution) και ο Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Σμήνους Σωματιδίων (Particle Swarm Optimization). Σε αυτές τις μεθόδους εξερευνάται το πεδίο λύσης με σκοπό να βρεθεί μια καλύτερη λύση. Τόσο η προσομοιωμένη ανόπτηση όσο και η περιορισμένη αναζήτηση ξεκινάνε από μια αρχική λύση x_1 και προχωράνε σε κάθε επανάληψη t από τη λύση x_1 στη λύση x_{t+1} στη γειτονιά $N(x_t)$ του x_t μέχρι ένα κριτήριο σταματήματος να ικανοποιηθεί. Οι γενετικοί αλγόριθμοι εξετάζουν σε κάθε βήμα ένα πληθυσμό από λύσεις. Κάθε πληθυσμός παράγεται από τον προηγούμενο του, συνδυάζοντας τα καλύτερα στοιχεία του και διαγράφοντας τα χειρότερα του. Η διαδικασία που χρησιμοποιείται για την δημιουργία των απογόνων, ονομάζεται διασταύρωση (crossover). Τα νευρωνικά δίκτυα περικλείουν έναν ευρετικό μάθησης που προσαρμόζει βαθμιαία ένα σύνολο από βάρη μέχρι να φτάσουμε σε μια αποδεκτή λύση. Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι συνήθως χρησιμοποιούν πιο παραδοσιακούς ευρετικούς αλγορίθμους σαν υποδιαδικασίες τους. Πολλές φορές μπορούν να επιτραπούν σε κάποιο μεθευρετικό αλγόριθμο , και βήματα που οδηγούν σε μη εφικτή ενδιάμεση λύση σε κάποιο βήμα του αλγορίθμου. Ο λόγος που επιτρέπεται αυτό είναι για να αποφευχθεί κάποιο τοπικό ελάχιστο και η ολική λύση που θα εξαχθεί από τον αλγόριθμο να είναι καλύτερη. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό αυτών αλγορίθμων είναι ότι προσομοιάζουν μια διαδικασία που συνήθως έχει εφαρμογή στη φύση. Τα στοιχεία που χρησιμοποιούν αυτοί οι αλγόριθμοι και μεταφορικά τα παρατηρούμε στη φύση είναι τα εξής :

- Χρησιμοποιούν έναν αριθμό από επαναληπτικές δοκιμές
- Περιλαμβάνουν ένα ή περισσότερους πράκτορες (νευρώνες, μόρια χρωμοσώματα, μυρμήγκια)
- Λειτουργούν (στην περίπτωση των πολύ - πρακτόρων) βάση ενός μηχανισμού συνεργασίας και ανταγωνισμού.
- Περιλαμβάνουν διαδικασίες αυτό-τροποποιήσεων των ευρετικών παραμέτρων ή ακόμα και της αναπαράστασης του προβλήματος.

Τα χαρακτηριστικά των μεθευρετικών είναι τα εξής:

- Μοντελοποιούν ένα φαινόμενο που υπάρχει στη φύση
- Μπορούν να μεταφερθούν εύκολα σε παράλληλη μορφή
- Είναι προσαρμοστικοί αλγόριθμοι

4.1.3.α Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι και το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων

Μια από τις πρώτες προσπάθειες να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος της περιορισμένης αναζήτησης στο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων οφείλεται στο Willard(22). Εδώ η αρχική λύση μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα πλανόδιου πωλητή και οι γειτονικές λύσεις καθορίζονται σαν όλες τις εφικτές λύσεις που μπορούν να δημιουργηθούν από την τρέχουσα λύση χρησιμοποιώντας 2- opt και 3-opt μεθόδους. Η επόμενη κίνηση καθορίζεται από την καλύτερη μη απαγορευμένη κίνηση. Ο Osman(23) όπως και στην περίπτωση της προσομοιωμένης ανόπτησης καθορίζει τις γειτονιές χρησιμοποιώντας τον μηχανισμό των λ-ανταλλαγών. Η μέθοδος περιλαμβάνει 2-opt κινήσεις, επανατοποθετήσεις κόμβων σε διαφορετικές διαδρομές και ανταλλαγές κόμβων μεταξύ δύο διαφορετικών διαδρομών. Στη μια εκδοχή του αλγόριθμου, που ονομάζεται βέλτιστα επιτρεπτή (best-admissible) , ολόκληρη η γειτονιά εξερευνάται και η καλύτερη επιτρεπτή λύση επιλέγεται. Στην δεύτερη εκδοχή που ονομάζεται πρώτη βέλτιστα επιτρεπτή (first-best-admissible), η πρώτη επιτρεπτή κίνηση, αν υπάρχει, επιλέγεται αλλιώς συνεχίζεται ο αλγόριθμος με την ήδη υπάρχουσα λύση.

Ο Αλγόριθμος TABUROUTE(24) περιλαμβάνει αρκετά πολύπλοκα και καινοτόμα χαρακτηριστικά. Τα οποία είναι τα εξής:

- Η δομή της γειτονιάς καθορίζεται από όλες τις λύσεις στις οποίες μπορεί να οδηγηθούμε από την τρέχουσα λύση διαγράφοντας ένα κόμβο από τη διαδρομή του και εισάγοντας τον σε μια άλλη διαδρομή που περιέχεται ένα από τους p γείτονες του. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στην διαγραφή μιας υπάρχουσας ή στην δημιουργία μιας καινούριας.
- Η διαδικασία αναζήτησης εξετάζει λύσεις που μπορεί να μην είναι εφικτές σε σχέση με τους περιορισμούς χωρητικότητας ή τους περιορισμούς που συσχετίζονται με το μήκος της διαδρομής. Πιο συγκεκριμένα, η αντικειμενική συνάρτηση περιέχει δύο όρους, που ο ένας μετράει την υπερχωρητικότητα, και ο άλλος την υπερδιάρκεια. Ο κάθε ένας από αυτούς έχει κάποιο βάρος: κάθε 10 επαναλήψεις, τα βάρη είτε διαιρούνται με το 2 αν και οι δέκα προηγούμενες επαναλήψεις οδηγούσαν σε εφικτή λύση είτε πολλαπλασιάζεται με το 2 αν και οι δέκα προηγούμενες επαναλήψεις οδηγούν σε μη εφικτές λύσεις. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγεται η περίπτωση ο αλγόριθμος να βρει και να κολλήσει σε κάποιο τοπικό ελάχιστο.
- Ο αλγόριθμος Taburoute δεν χρησιμοποιεί στην ουσία την λίστα περιορισμένων κινήσεων, αλλά τυχαιοποιημένες περιορισμένες ετικέτες.
- Ο αλγόριθμος Taburoute χρησιμοποιεί μια στρατηγική διάχυσης. Αυτό πραγματοποιείται βάζοντας μια ποινή στους κόμβους που έχουν μετακινηθεί πάρα πολλές φορές κατά την διάρκεια των επαναλήψεων με στόχο να αυξηθεί η πιθανότητα να μετακινηθούν οι κόμβοι που δεν έχουν μετακινηθεί πολλές φορές κατά την διάρκεια των επαναλήψεων.

Στον αλγόριθμο Xu και του Kelly χρησιμοποιείται μια πιο περίπλοκη δομή για την εύρεση των γειτονιών. Η διαδικασία που ακολουθείται έχει τρία βασικά χαρακτηριστικά:

- Ανταλλαγές κόμβων ανάμεσα σε δύο διαδρομές.
- Ολική επανατοποθέτηση κάποιων κόμβων σε διαφορετικές διαδρομές.

- Τοπική αναζήτηση σε κάθε διαδρομή.

Η ολική επανατοποθέτηση επιτυγχάνεται με την επίλυση ενός μοντέλου ροής σε δίκτυα. Η βελτίωση μέσα στις ίδιες τις διαδρομές επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της διαδικασίας 3-opt(25). Ο αλγόριθμος έχει πάρα πολλές παραμέτρους οι οποίες δυναμικά αναπροσαρμόζονται κατά την διάρκεια της αναζήτησης. Οι καλύτερες λύσεις που βρίσκονται κρατούνται στην μνήμη και περιοδικά χρησιμοποιούνται για να ξανα-αρχικοποιηθεί η αναζήτηση με καινούριες παραμέτρους.

Το κύριο χαρακτηριστικό του αλγορίθμου των Rego και Roucarol(26) είναι η χρήση των αλυσίδων μετακίνησης για να μετακινηθούμε από τη μία λύση στην άλλη. Μια μετακίνηση αποτελείται από την μετακίνηση μιας κορυφής σε μια θέση που καταλαμβάνεται από μια άλλη κορυφή, και έτσι δημιουργείται μια αλυσίδα αντίδρασης l επιπέδων. Για μία δοσμένη διαδρομή, ορίζουμε σαν v_{i-1} τον προηγούμενο κόμβο του v_i και σαν v_{i+1} τον επόμενο. Μια ενός επιπέδου αλυσίδα μετακίνησης περιλαμβάνει την αντικατάσταση των τριπλετών ($v_{i-1,}^k v_i^k$, v_{i+1}^k, k=0,…,l) με τις τριπλέτες ($v_{i-1,}^m v_i^m$, v_{i+1}^m, m=0,…,l) και ενημερώνουμε το v_i^l.

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες βελτιώσεις στο χώρο της περιορισμένης αναζήτησης είναι ο αλγόριθμος της προσαρμοστικής μνήμης (Adaptive Memory) των Rochat και Traillard(27). Η προσαρμοστική μνήμη δεν χρησιμοποιείται μόνο στον αλγόριθμο περιορισμένης αναζήτησης αλλά και σε άλλους μεθευρετικούς αλγορίθμους. Μια προσαρμοστική μνήμη είναι η συλλογή καλών λύσεων που δυναμικά ενημερώνονται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αναζήτησης. Περιοδικά κάποια στοιχεία εξάγονται από την ομάδα και συνδυάζονται διαφορετικά με τέτοιο τρόπο ώστε να οδηγήσουν σε νέες, πιθανώς, καλύτερες λύσεις. Στο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων, οι διαδρομές των οχημάτων επιλέγονται από πάρα πολλές λύσεις και θα χρησιμοποιηθούν σαν αρχικό σημείο. Η διαδικασία δίνει μεγαλύτερα βάρη σε εκείνες τις διαδρομές που ανήκουν στις καλύτερες λύσεις. Η γειτονιά αναζήτησης που χρησιμοποιείται συνδυάζει τις μερικές διαδρομές με μία διαδικασία εισαγωγής κόμβων για να μπορέσει να ολοκληρώσει τις λύσεις. Στην συνέχεια παρουσιάζεται το βασικό σχήμα της διαδικασίας της Προσαρμοστικής Αναζήτησης.

Βήμα 1. Δημιουργία μιας προσαρμοστικής μνήμης με τις καλύτερες λύσεις.

Βήμα2. Συνδυασμός κάποιων στοιχείων των λύσεων με στόχο την δημιουργία καινούριων λύσεων.

Βήμα 3. Οι μερικές λύσεις ολοκληρώνονται με μια διαδικασία εισαγωγής κόμβων.

Βήμα 4. Εφαρμογή της διαδικασίας της Περιορισμένης Αναζήτησης σε κάθε διαδρομή.

4.2 Οι αλγόριθμοι επίλυσης

Οι ευρετικοί αλγόριθμοι που έχουν προταθεί μέχρι στιγμής για τη λύση των προβλημάτων δρομολόγησης με δύο είδη πελατών (VRPB) είναι επεκτάσεις αλγορίθμων για το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (VRP). Όλοι αυτοί οι ευρετικοί αλγόριθμοι αναπτύχθηκαν για τη συμμετρική, και σε πολλές περιπτώσεις μόνο για την Ευκλείδεια, έκδοση των προβλημάτων. Η επέκταση της μεθόδου για το AVRPB είναι συχνά δύσκολη, ή ακόμα και αδύνατη και μπορεί να οδηγήσει σε απρόβλεπτα αποτελέσματα.

Για την δοκιμή των αλγορίθμων έχουν προταθεί διάφορα σύνολα παραδειγμάτων που όλοι οι αλγόριθμοι δοκιμάζονται σε αυτά. Το σύνολο το οποίο χρησιμοποιείται πιο συχνά είναι εκείνο το οποίο αποτελείται από 62 τυχαίως δημιουργούμενα ευκλείδεια παραδείγματα που προτάθηκαν από τους Goetschalckx και Jacobs-Blecha (1989). Οι συντεταγμένες των κορυφών κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα [0, 24000] για τις τιμές x και στο διάστημα [0, 32000] για τις τιμές y. Η αποθήκη βρίσκεται σε κεντρικό σημείο (12000, 16000).

Το κόστος c_{ij} του τόξου j ορίζεται ως η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των κορυφών i και j. Η ζήτηση της κάθε κορυφής (πελάτη) δημιουργήθηκε από κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και τυπική απόκλιση 200. Οι τιμές για τον συνολικό αριθμό κορυφών, n+m, (από 25 έως 150), με το ποσοστό κορυφών Linehauls ίσο σε 50%, 66% και 80%.

Για κάθε τιμή του n+m, η χωρητικότητα του οχήματος είναι ρυθμισμένη έτσι ώστε περίπου 3 έως 12 οχήματα να χρησιμοποιούνται για να εξυπηρετούν όλες τις απαιτήσεις. Τα δεδομένα εισόδου του προβλήματος, καθώς και οι τιμές λύσης και οι χρόνοι υπολογισμών για τους αλγορίθμους DB, SF και LHBH, παρέχονται από τους MarcGoetschalckx και CharlotteJacobs-Blecha.

Για κάθε πρόβλημα δίνεται το όνομα του προβλήματος, το μέγεθος του προβλήματος, δηλαδή οι τιμές του n και m, ο διαθέσιμος αριθμός οχημάτων K και ο ελάχιστος αριθμός των οχημάτων που απαιτούνται για την εξυπηρέτηση των κορυφών Linehaul και Backhaul, KL και KB αντίστοιχα.

Οι τιμές των KL και KB καθορίζονται με επίλυση του σχετικού BPP χρησιμοποιώντας τον κώδικα MTP από τους Martello και Toth (1990).

Για κάθε ευρετικό αλγόριθμο ο πίνακας δίνει:

- Την τιμή της συνάρτησης.
- Την ποσοστιαία αναλογία της τιμής της συνάρτησης σε σχέση με τη βέλτιστη τιμή της ή τη τιμή του κατώτερου ορίου και οι δύο υπολογίζονται με τον αλγόριθμο από τον Toth και τον Vigo.
- Τον χρόνο υπολογισμού που εκφράζεται σε 386/20 δευτερόλεπτα.

Σημειώνεται ότι η εκατοστιαία αναλογία που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη χαμηλότερη τιμή είναι ένα ανώτερο όριο στην ποσοστιαία αναλογία της τιμής ευρετικής λύσης σε σχέση με τη βέλτιστη τιμή. Η αξία της συνάρτησης που ελήφθη από όλους τους αλγορίθμους υπολογίζεται με τη χρήση μιας πραγματικής κλίμακας μήτρας κόστους c και με στρογγυλοποίηση της τιμής της συνάρτησης στο πλησιέστερο ακέραιο αριθμό.

4.2.1 Οι αλγόριθμοι DB – SF- LHBH – TV(28)

DB

Ο πρώτος ευρετικός αλγόριθμος για το VRPB προτάθηκε από τους Deif και Bodin (1984). Ο αλγόριθμος, αποκαλούμενος DB, είναι μια επέκταση του γνωστού ευρετικού αλγόριθμου Clarke and Wright (1964).

Ο αλγόριθμος Clarke & Wright ξεκινάει με μια μη εφικτή λύση όπου κάθε κορυφή επισκέπτεται από ξεχωριστή διαδρομή. Οι διαδρομές είναι επαναληπτικές και σε συνδυασμό με την εξέταση της "εξοικονόμησης", σε όρους κόστος δρομολόγησης, που μπορεί να επιτευχθεί με την εξυπηρέτηση δύο κορυφών στην ίδια διαδρομή αντί να τις αφήσει σε ξεχωριστές διαδρομές. Η εξοικονόμηση σε όρους κόστους που επιτυγχάνεται με την επίσκεψη των κορυφών i και j σε ακολουθία στην ίδια διαδρομή μπορούν να εκφράζεται ως εξής:

$s_{ij} = c_{0i} + c_{i0} + c_{0j} + c_{j0} – (c_{0i} + c_{ij} + c_{j0}) = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Clarke & Wright για τη λύση του VRPB επηρεάζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό από το γεγονός ότι ο περιορισμός προτεραιότητας μειώνει σημαντικά τον αριθμό των εφικτών συγχωνεύσεων. Οι Deif και Bodin έχουν πειραματικά αποδείξει ότι για το VRPB τα καλύτερα αποτελέσματα λαμβάνονται με την καθυστέρηση του σχηματισμού μικτών διαδρομών. Ως εκ τούτου, πρότειναν να τροποποιηθεί ο ορισμός της εξοικονόμησης έτσι ώστε τα τόξα να συνδέονται με κορυφές διαφόρων τύπων, καθυστερώντας έτσι την ένωση των κορυφών Linehaul και Backhaul.

Η εξοικονόμηση backhaul ορίζεται ως:

$$s'_{ij} = \begin{cases} sij - pS, & αν\ i\ E\ L,\ \ j\ E\ B\ ήτοαντίστροφο \\ \quad sij & \quad αλλιώς \end{cases}$$

όπου S είναι μια εκτίμηση της μέγιστης εξοικονόμησης s_{ij}, και p είναι ένας πραγματικός πολλαπλασιαστής ποινής μεταξύ 0 και 1. Αρκετές τιμές p ελέγχθηκαν και τα αποτελέσματα που προέκυψαν έχουν δείξει ότι οι τιμές του p μεταξύ 0,05 και 0,20 παρήγαγαν τις καλύτερες λύσεις.

Η μέθοδος Clarke & Wright, και ως εκ τούτου ο DB αλγόριθμος, δεν επιτρέπει τον έλεγχο του αριθμού διαδρομών της τελικής λύσης με αποτέλεσμα η τελική λύση να είναι αδύνατη καθώς μπορεί να απαιτούνται περισσότερα οχήματα από αυτά που έχουμε διαθέσιμα. Από πρακτική άποψη, τόσο το κόστος δρομολόγησης της λύσης που πήραμε από τον αλγόριθμο DB, όσο και η πιθανότητα αυτή η λύση να είναι εφικτή, συνδέονται στενά με τον αριθμό συγχωνεύσεων των διαδρομών που εκτελέστηκαν.
Επομένως ακόμη και αν καθυστερήσει ο σχηματισμός των μικτών διαδρομών αυτή η μέθοδος έχει μειωμένη αποτελεσματικότητα στην αντιμετώπιση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών(VRPB) όσον αφορά τόσο το συνολικό κόστος δρομολόγησης όσο και τον αριθμό των εφικτών λύσεων που βρέθηκαν.

SF

Οι Goetschalckx και Jacobs-Blecha (1989) πρότειναν έναν αλγόριθμο, που ονομάζεται SF για το VRPB με ευκλείδειο πίνακα τιμών. Η προσέγγιση βασίζεται στην έννοια των καμπυλών διαστήματος, που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως από τους Bartholdi και Platzman (1982) για τη λύση του προβλήματος του πλανόδιου πωλητή (Traveling Salesman problem).Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό καμπύλης διαστήματος, οι κορυφές Linehaul και Backhaul μετασχηματίζονται ξεχωριστά από σημεία στο επίπεδο σε σημεία κατά μήκος μιας γραμμής. Έπειτα δημιουργούνται δυο ξεχωριστές ακολουθίες σημείων οι οποίες κατανέμονται στη συνέχεια για να σχηματίσουν εφικτές διαδρομές που η κάθε μία περιέχει κορυφές μόνο του ενός τύπου. Κάθε διαδρομή Linehaul με τη σειρά της συγχωνεύεται με την πλησιέστερη διαδρομή Backhaul επιτυγχάνοντας έτσι τη τελική διαδρομή. Επίσης και σε αυτή την περίπτωση, η μέθοδος δεν εγγυάται την κατασκευή λύσεων χρησιμοποιώντας ακριβώς K οχήματα. Ο Goetschalckx και Jacobs-Blecha εξέτασαν και τους δύο αλγόριθμους DB και SF σε 62 ευκλείδειες περιπτώσεις με 25 έως 150 κορυφές. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται από τους Goetschalckx και Jacobs-Blecha (1989) και έδειξαν ότι οι λύσεις του αλγόριθμου DB γενικά είναι καλύτερες παρότι ο αλγόριθμος SF είναι ταχύτερος για μεγαλύτερα προβλήματα.

LHBH

Ο αλγόριθμος LHBH βασίζεται στο πρόβλημα γενικευμένης ανάθεσης (generalized assignment problem - GAP) και εισάγει νέες αποτελεσματικές μεθόδους για τη δημιουργία μιας αρχικής λύσης και για τον εντοπισμό των μεμονωμένων διαδρομών. Τα αποτελέσματα μιας υπολογιστικής μελέτης, συγκρίνοντας τον αλγόριθμο LHBH με άλλους ευρετικούς αλγόριθμους και ένα κατώτερο όριο, δείχνουν ότι ο αλγόριθμος LHBH είναι μια πρακτική και αποτελεσματική προσέγγιση λύσης για ρεαλιστικά μεγέθους προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών(VRPB).

Ο αλγόριθμος LHBH βασίζεται στο πρόβλημα γενικευμένης ανάθεσης και είναι παρόμοιο με τον ευρετικό αλγόριθμο GAP του Fisher και Jaikumar (1981) για το VRP. Ωστόσο, αυτή η μέθοδος διαφέρει από την προσέγγιση του Fisher και του Jaikumar καθώς βασίζεται σε δύο επιπλέον υποθέσεις. Πρώτον, οι αποστάσεις που διανύονται από τα οχήματα μπορούν να υπολογιστούν με επαρκή ακρίβεια αναλογικά προς την ευκλείδεια απόσταση. Δεύτερον, ο αριθμός των σημείων backhaul έχει την ίδια τάξη μεγέθους με τον αριθμό των σημείων γραμμής. Οι Goetschalckx και Jacobs-Blecha (1989) πρότειναν μία μορφοποίηση ακέραιου προγραμματισμού για το πρόβλημα VRPB με επέκταση της μορφοποίησης των Fisher και Jaikumar (1981) ώστε να συμπεριλάβει τα σημεία παραλαβής. Το μοντέλο αποσυντίθεται σε τρία υποπροβλήματα. Τα πρώτα δύο υποπροβλήματα αντιστοιχούν στις αποφάσεις συγκέντρωσης για τους πελάτες παράδοσης και τους πελάτες παραλαβής, τα οποία είναι ανεξάρτητα γενικευμένα προβλήματα ανάθεσης (Generalized Assignment Problems - GAP). Το τρίτο υποπρόβλημα αποτελείται από K ανεξάρτητα προβλήματα πλανόδιου πωλητή(TSP) μίας διαδρομής το καθένα από τους οποία έχει έναν επιπλέον περιορισμό, επιβάλλοντας την ολοκλήρωση όλων των παραδόσεων πριν από την πραγματοποίηση οποιωνδήποτε παραλαβών. Αυτοί οι περιορισμοί προτεραιότητας επιβάλλουν μια σχέση εξάρτησης σε όλα τα στοιχεία του μοντέλου. Αυτή η σχέση είναι επίσης ενδεικτική της σημασίας των δεσμών δρομολόγησης των σημείων παράδοσης με τα σημεία παραλαβής σε κάθε διαδρομή. Αναπτύσσεται επομένως ένας αποδοτικός και αποτελεσματικός αλγόριθμος ευρετικής λύσης για αυτό το πρόβλημα, βασισμένος σε καμπύλες χωροθέτησης.

TV

Είναι ένας ευρετικός αλγόριθμος που ακολουθεί την προσέγγιση ομαδοποίηση πρώτα- δρομολόγηση έπειτα (clusterfirst- routesecond) για το VRPB και AVRPB. Ο ευρετικός αλγόριθμος χρησιμοποιεί μία νέα γενική μέθοδο ομαδοποίησης που εκμεταλλεύεται τις πληροφορίες από τις λύσεις σύμφωνα με ένα κατώτερο όριο. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι είναι σχεδόν πάντα εφικτή η απόκτηση λύσης μέσω της σωστής χαλάρωσης της βελτιστοποίησης του προβλήματος. Επομένως, η ομαδοποίηση με βάση τη χαλάρωση μπορεί να αποτελέσει ένα καλό σημείο εκκίνησης για τις ευρετικές διαδικασίες με βάση την τοπική αναζήτηση που είναι σε θέση να αποκτήσει εφικτές λύσεις γρήγορα.

Η χαλάρωση που χρησιμοποιείται για την εκκίνηση του αλγορίθμου Tv είναι μια λαγκρανζιανή προσέγγιση που περιγράφεται από τους Toth και Vigo. Το βασικό λαγκρανζιανό πρόβλημα προκύπτει από μια νέα διατύπωση του VRPB ως ενός ασύμμετρου προβλήματος και από την ανάλυση της δομής των εφικτών λύσεων του VRPB, το οποίο μπορεί να διαχωριστεί σε τρία μέρη:

1. Ένα σύνολο από K σύντομες διαδρομές που ξεκινούν από την αποθήκη προς όλες τις κορυφές linehaul.
2. Ένα σύνολο από $\widehat{K}$,σύντομες διαδρομές με $K_B \leq \widehat{K} \leq K$, που εισέρχονται στην αποθήκη και

καλύπτουν όλες τις backhauls κορυφές.
3. Ένα σύνολο τόξων διασύνδεσης μεταξύ κόμβων K και $\widehat{K}$.

Ο ευρετικός αλγόριθμος TV υλοποιήθηκε σε FORTRAN και εκτελέστηκε σε προσωπικό υπολογιστή PC486/33 σε προβλήματα δοκιμής VRPB και AVRPB που παρατάθηκαν στη βιβλιογραφία. Τα αποτελέσματα που ελήφθησαν από τον TV συγκρίθηκαν με την τιμή της βέλτιστης λύσης ή με το καλύτερο κατώτατο όριο που περιγράφεται από τους Toth και Vigo και όπου είναι δυνατόν, με τα αποτελέσματα που ελήφθησαν από τους αλγόριθμους DB, SF και LHBH.
Ο αλγόριθμος TV εφαρμόζεται μέχρι να εκτελεστούν 200 επαναλήψεις ή να φτάσει ένα προκαθορισμένο χρονικό όριο.

Κάθε αναφερόμενο αποτέλεσμα είναι το καλύτερο που βρέθηκε σε όλες τις επαναλήψεις και ο υπολογιστικός χρόνος περιλαμβάνει τον υπολογισμό του κατώτατο ορίου. Οι χρόνοι υπολογισμών του αλγορίθμου TV πολλαπλασιάστηκαν με τέσσερα, δεδομένου ότι σύμφωνα με αυτό το είδος αλγορίθμων, ο υπολογιστής PC 486/33 είναι σχεδόν τέσσερις φορές πιο γρήγορος από τον PC386/20 που χρησιμοποιείται από τους Goetschalckx και Jacobs-Blecha.

4.2.2 Οι αλγόριθμοι OPEN – K-TREE – K-TREE_R(29)

Χρησιμοποιούμε δύο μεθόδους για την απόκτηση των αρχικών λύσεων των παρακάτω αλγορίθμων, οι οποίες και οι δύο διερευνούν τις συγγένειες μεταξύ του VRP και του VRPB.

- Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στο γεγονός ότι μία VRPB διαδρομή, με linehauls και backhauls, αποτελείται από δύο χαμιλτονιανές διαδρομές ενωμένες μαζί. Δεδομένου ότι, όπως εξηγείται παρακάτω, αυτό προκύπτει από την ανάλυση δύο ξεχωριστών OVRPs θα την ονομάσουμε ανοικτή αρχική λύση (open initial solution).

- Η δεύτερη μέθοδος βασίζεται σε ένα χαμηλότερο όριο για το VRP, η οποία θα ονομάζεται K-tree initial solution, επειδή χρησιμοποιούμε K-δέντρα για τον υπολογισμό του χαμηλότερου ορίου.

Η ανοιχτή αρχική λύση – (The open initial solution)

Σε ένα πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με δύο είδη πελατών κατά τη διάρκεια της διαδρομής (Vehicle routing problem with backhauls and linehauls customers-VRPB) έχουμε δύο διαφορετικά υποσύνολα πελατών: Το πρώτο υποσύνολο είναι οι πελάτες που απαιτούν τη διανομή κάποιας ποσότητας προϊόντων (linehauls customers) και το δεύτερο αποτελείται από πελάτες που ο κάθε ένας εκ των οποίων απαιτεί μία ποσότητα προϊόντος να περισυλλεχθεί από αυτόν (backhauls customers). Επομένως κάθε σύνολο πελατών εξετάζεται ξεχωριστά και επιλύονται δύο VRP. Έπειτα ενώνονται μαζί τα ζεύγη των διαδρομών, ένα από κάθε VRP, προκειμένου να προκύψει μια λύση VRPB.

Υπάρχει ένα άλλο είδος VRP με πιο κοντινή δομή στο VRPB, το οποίο καλείται ανοιχτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Open vehicle routing problem - OVRP), στο οποίο στο τέλος της διαδρομής τα οχήματα δεν απαιτείται να επιστρέφουν στην αποθήκη. Με αυτόν τον τρόπο, μια καλύτερη εναλλακτική λύση είναι η επίλυση δύο ξεχωριστών OVRP.

Περιγραφή του αλγορίθμου Open

Βήμα 1. Επίλυση δύο ξεχωριστών OVRP, ένα για κάθε σύνολο πελατών. Το πρόβλημα OVRP έχει δύο φάσεις: την *αρχική φάση* (κατασκευή των διαδρομών της αρχικής λύσης) και την *φάση βελτίωσης*. Στην αρχική φάση χρησιμοποιείται η ευρετική διαδικασία του πλησιέστερου γείτονα η οποία δημιουργεί διαδοχικά ένα σύνολο διαδρομών. Κάθε διαδρομή ξεκινά με τον πελάτη που βρίσκεται πλησιέστερα στην αποθήκη και προστίθεται ο πλησιέστερος πελάτης σε αυτόν, και ούτω καθεξής. Ο πελάτης είναι αποδεκτός εάν εισάγεται στη διαδρομή και η ζήτηση του δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα του οχήματος. Όταν κανένας πελάτης δεν είναι αποδεκτός, ξεκινά μια νέα διαδρομή ή η διαδικασία σταματά αν όλοι οι πελάτες έχουν ήδη δρομολογηθεί. Στη φάση βελτίωσης εφαρμόζεται η μέθοδος της απλής αναζήτησης Tabu. Σε αυτή τη φάση για το linehaul OVRP, ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί η συνολική απόσταση που διανύθηκε από τα οχήματα με βάση ένα σταθερό αριθμό οχημάτων, ενώ για το backhaul OVRP, ο πρώτος στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των διαδρομών και ο δεύτερος στόχος να ελαχιστοποιηθεί η συνολική απόσταση των διαδρομών.

Βήμα 2. Κάθε διαδρομή backhaul συνδέεται με το άκρο μίας διαδρομής linehaul. Για κάθε ομάδα διαδρομών (μίας linehaul και μίας backhaul) υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί τρόποι σύνδεσης των άκρων τους. Όλοι αυτοί οι συνδυασμοί εξετάζονται και στο τέλος, επιλέγεται ο σύνδεσμος με το χαμηλότερο κόστος. Έπειτα οι διαδρομές που ενώθηκαν αφαιρούνται από τα σύνολα των διαθέσιμων διαδρομών. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου τα δύο σύνολα είναι κενά. Στο τέλος κάθε διαδρομή linehaul (ή backhaul) που απομένει είναι συνδεδεμένη με την αποθήκη σχηματίζοντας μια κλειστή διαδρομή. Εάν οποιαδήποτε διαδρομή περιέχει μόνο backhauls πελάτες η λύση είναι ανέφικτη αλλά μπορεί εύκολα να επιδιορθωθεί με την μέθοδο της απλής αναζήτηση Tabu.

Η αρχική λύση K-tree (The K-tree initial solution)

Η άλλη μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την απόκτηση της αρχικής λύσης βασίζεται σε ψευδο-χαμηλότερο όριο όπως περιγράφεται παρακάτω. Ας ορίσουμε K τον αριθμό των οχημάτων που απαιτούνται για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών. Το K μπορεί να είναι το ελάχιστο απαραίτητο ή το μέγιστο. Ένα K-δέντρο ορίζεται ως ένα σύνολο από N + K τόξα που ενώνουν ένα γράφημα με N + 1 κόμβους. Το 0-δέντρο είναι το τανυόν δέντρο του γραφήματος. Το ελάχιστο κόστος του K-δέντρου μπορεί να προσδιοριστεί από έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο που παρέχεται από τον Fisher (1994b). Πολύ σύντομα, αυτός ο αλγόριθμος αποτελείται από τα εξής: πρώτα καθορίζεται το ελάχιστο δέντρο επικάλυψης (MST) του γραφήματος και στη συνέχεια K ελάχιστες ακμές κόστους που δεν ανήκουν στο (minimum spanning tree– MST) προστίθενται σε αυτό. Έπειτα γίνονται οι κατάλληλες εναλλαγές των άκρων μέχρι ο βαθμός της αποθήκης να γίνει 2K.

Γενικά, είναι αδύνατη η δημιουργία μιας αρχικής λύσης του VRPB από ένα K-δέντρο είτε λόγω των περιορισμών προτεραιότητας είτε λόγω των περιορισμών χωρητικότητας και ο αριθμός των διαδρομών είναι συνήθως μεγαλύτερος από το K. Καθώς προσπαθούμε να ξεπεράσουμε όλες αυτές τις αιτίες και ταυτόχρονα να βελτιώσουμε την αρχική λύση εφαρμόζουμε τη διαδικασία αναζήτησης tabu που περιγράφεται παρακάτω. Στο τέλος της διαδικασίας παίρνουμε πάντα μια εφικτή λύση όσον αφορά τους περιορισμούς προτεραιότητας. Οι διαδικασίες για τον προσδιορισμό της αρχικής λύσης από ένα ψευδο-χαμηλό όριο συνοψίζονται παρακάτω:
Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος στο VRPB, προκύπτουν οι ακόλουθες παραδοχές:

I. Θεωρούμε τους linehauls και επιπλέον και τους backhauls απλά ως πελάτες. Θεωρούμε την χωρητικότητα του οχήματος ως Q΄ αντί Q. Επομένως, υποθέτουμε ότι το VRPB είναι VRP.
II. Σύμφωνα με τον Fisher (1994a), ο οποίος διατύπωσε το VRP ως K-δέντρο ελαχίστου

κόστους, με βαθμό 2K στην αποθήκη, με τους επιπλέον περιορισμούς ότι οι πελάτες έχουν και αυτοί βαθμό 2. Δηλαδή γίνεται προσπάθεια να επιλυθεί το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων επιλύοντας ένα χαλαρωμένο πρόβλημα, δηλαδή ενώ το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων είναι η κατασκευή ενός κύκλου για κάθε όχημα που θα ξεκινάει και θα καταλήγει στην αποθήκη, στην συγκεκριμένη περίπτωση λέει ότι θα επιλυθεί το πρόβλημα ως δέντρο. Το δέντρο είναι σαν να είναι ένα γράφημα που ξεκινάει από την αποθήκη και συνδέει κάθε κόμβο με 2 τόξα, ένα για το όχημα που εισέρχεται στον κόμβο (πελάτη) και ένα που φεύγει χωρίς να επιστρέφει στην αποθήκη. Ο βαθμός είναι ο αριθμός των τόξων που φεύγουν από τον κόμβο. Αν είναι 2 σημαίνει ότι είναι πελάτης, αν είναι 2K είναι η αποθήκη και το K είναι τα οχήματα που φεύγουν από την αποθήκη και επιστρέφουν σε αυτή.

III. Κάνει τη χαλάρωση Langrange (Lagrangian relaxation- LR). Δηλαδή χαλαρώνει τους 2 περιορισμούς, τον περιορισμό του βαθμού και τον περιορισμό της χωρητικότητας, όπου ο περιορισμός του βαθμού είναι το 2 και η χωρητικότητα είναι να δεχτούν λύσεις που παραβιάζουν τους περιορισμούς σε κάποιο σημείο και μετά αν δεν διορθωθεί να την απορρίψει την λύση.

IV. Λύνουμε το πρόβλημα LR από τη μέθοδο υπόκλισης (subgradient method) και εκτελούμε 1200 επαναλήψεις. Έπειτα επιλέγουμε τα 10 καλύτερα κατώτερα όρια και κρατάμε τα αντίστοιχα 10 K-trees.

V. Χρησιμοποιώντας κάθε ένα από τα 10 K-δέντρα και τη διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως δημιουργούμε 10 αρχικές λύσεις.

Ο αλγόριθμος TSA (Tabu search algorithm)

Ο μεθευρετικός αλγόριθμος της περιορισμένης αναζήτησης παρουσιάστηκε αρχικά από τον Glover (1997). Μια καλή αναζήτηση tabu απαιτεί, εκτός από τη σωστή εφαρμογή των αρχών αναζήτησης tabu και καλή τοπική αναζήτηση με ευρετικούς αλγορίθμους. Ο αλγόριθμος αναζήτησης tabu (TSA) αρχίζει με μία αρχική λύση, εφικτή ή μη εφικτή, που παράγεται από μία από τις μεθόδους που περιγράφονται παρακάτω. Ο αλγόριθμος TSA αποτελείται από τρεις φάσεις που εφαρμόζονται διαδοχικά:

- Φάση I: Γίνεται η πρώτη βελτίωση της αρχικής λύσης και της οποίας κύριος στόχος είναι να δημιουργηθεί μια εφικτή λύση VRPB.
- Φάση II: Που παίρνει το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου υπολογισμού και δίνει τη βασική συμβολή στη βελτίωση της λύσης.
- Φάση III: Που γίνεται η περαιτέρω βελτίωση της λύσης που δημιουργήθηκε στη φάση II, χρησιμοποιώντας μνήμη με βάση τη συχνότητα. Η κύρια δομή του αλγορίθμου σε αυτές τις τρεις φάσεις είναι ίδια. Διαφέρουν μόνο ορισμένες τιμές παραμέτρων, οι τύποι κινήσεων που επιτρέπονται και οι μέθοδοι βελτίωσης των επιμέρους διαδρομών.

Έλεγχος εκτέλεσης και επανεκκίνηση

Στον TSA υπάρχουν τρεις τρόποι ελέγχου του χρόνου εκτέλεσης:a) ο μέγιστος συνολικός αριθμός των επαναλήψεων (N1), b) ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων χωρίς βελτίωση της πλέον γνωστής εφικτής λύσης (N2) και c) ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων χωρίς βελτίωση των πιο γνωστών εφικτών ή ανέφικτων λύσεων (N3). Η εκτέλεση του προγράμματος σταματά όταν επιτευχθούν οι αριθμοί των επαναλήψεων N1 και N2 ή όταν διπλασιαστεί ο αριθμός των επαναλήψεων N1 ή όταν επιτευχθεί ο N3. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων δεν είναι γνωστός εκ των προτέρων και εξαρτάται από της εξέλιξη της αναζήτησης.

Οι τιμές όλων αυτών των παραμέτρων καθορίστηκαν ως συνάρτηση του μεγέθους του προβλήματος (N) και κατά τρόπο που τους επιτρέπει να προσαρμόζονται στην διαδικασία αναζήτησης.

Συνολική περιγραφή του αλγορίθμου

Εφαρμόστηκαν τρεις εκδοχές του TSA που έχουν ονομαστεί open, K-tree και K-tree_r. Αν και η κύρια δομή του TSA είναι η ίδια οι τρεις εκδοχές διαφέρουν σε μερικές λεπτομέρειες, ως εξής:

- Η φάση I είναι ίδια για το K-tree και το K-tree_r, αλλά στο open εφαρμόζεται χωριστά στα σύνολα των πελατών linehaul και backhaul.
- Η φάση II είναι πανομοιότυπη για τις τρεις εκδοχές του TSA. Όμως η φάση II εφαρμόζεται στις λύσεις που προέρχονται από τη φάση I, πράγμα που συνεπάγεται ότι εφαρμόζεται μία φορά στο open, 10 φορές στο K-tree και 20 φορές στο K-tree_r σε αυτή την περίπτωση, εφαρμόζεται δύο φορές σε κάθε αρχική λύση. Στο TSA-K-tree_r τα τρία καλύτερα διαφέρουν και η φάση II επαναλαμβάνεται σε αυτά τα τρία γραφήματα.
- Η φάση III είναι ίδια για τις εκδόσεις K-tree και open, αλλά στο K-tree_r δεν εφαρμόζεται. Εκτός αυτού, στο K-tree εφαρμόζεται τρεις φορές, μία φορά σε κάθε μία από τις τρεις καλύτερες διαφορετικές λύσεις που επιλέχθηκαν στο τέλος της φάσης II. Μετά την ολοκλήρωση αυτής της φάσης της φάσης III, η φάση II εφαρμόζεται και πάλι σε αυτές τις τρεις λύσεις, με διαφορετικές τιμές των N1, N2 και M.

  Έχουμε τις εξής τιμές:

  Φάση I

  I. Για τον TSA-open: $N_1=400\sqrt{N'}$, $N_2=0$, $N_3=20N'$, $M=10N'$ (όπου το N΄=n και N΄=m, για τους linehaulsκαι backhauls πελάτες αντίστοιχα)
  II. Για τον TSA-K-treeκαι τον TSA-K-tree_r: $N_1=400\sqrt{N}$, $N_2=0$, $N_3=7N$, $M=3.5N$

  Φάση II

  I. Και για τις εκδόσεις TSA : $N_1=1000\sqrt{N}$, $N_2=18N$, $N_3=28N$, $M=14N$
  II. Για τον TSA-K-treeαφού εφαρμοστεί η φάση III: $N_1=1300\sqrt{N}$, $N_2=21N$, $N_3=40N$, $M=20N$

  Φάση III

  $N_1=400\sqrt{N}$, $N_2=0$, $N_3=20N$, $M=10N$

Όλα τα προγράμματα ήταν γραμμένα σε γλώσσα C και εκτελέσθηκαν σε Pentium III HPVectraVEi8 στα 500 MHz.

Βελτίωση των διαδικασιών των δρομολογίων

Με μια λύση VRPB, το κόστος της διαδρομής μπορεί να επανεξεταστεί, βελτιστοποιώντας καθεμιά από τις μεμονωμένες διαδρομές. Ωστόσο, για να βρεθεί μια βέλτιστη διαδρομή είναι πρόβλημα το οποίο επιλύεται με χρήση κάποιου αλγόριθμου κατάλληλου για το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (TSP), εάν η διαδρομή περιέχει μόνο πελάτες linehaul, ή ένα πρόβλημα πλανόδιου πωλητή (TSP) με περιορισμούς στην περίπτωση των πελατών που χρησιμοποιούν το σύστημα backhaul που υπάρχει στη διαδρομή. Και στις δύο περιπτώσεις η επίλυση του προβλήματος γίνεται με τη χρήση προσεγγιστικών μεθόδων. Εδώ αναφέρουμε τη μέθοδο της πλησιέστερου γείτονα.

Μέθοδος πλησιέστερου γείτονα (NN)

Έχουμε ένα σύνολο πελατών (S) και μία αποθήκη, αυτή η μέθοδος λειτουργεί ως εξής: Ξεκινώντας από την αποθήκη εισάγεται στη διαδρομή ο πλησιέστερος πελάτης. Στη συνέχεια ο επόμενος πελάτης της ακολουθίας είναι ο πελάτης του S που δεν είναι ακόμη στη διαδρομή και είναι πλησιέστερα στον τελευταίο πελάτη που εισήλθε στην ακολουθία. Αυτή η μέθοδος είναι πολύ απλή και πολύ γρήγορη, αλλά δίνει καλό αποτελέσματα για την επίλυση του ανοιχτού προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων (OVRP) (Brandao, 2004).

Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία της αρχικής λύσης. Εντούτοις, δεν αποδίδει τόσο καλά με VRPB δρομολόγια, επειδή η σύνδεση με την αποθήκη (για διαδρομές μόνο με πελάτες της γραμμής) ή τον σύνδεσμο στον πρώτο πελάτη του backhaul δεν λαμβάνεται υπόψη.

4.2.3 Αλγόριθμος CLOVES (30)

Ένας αλγόριθμος που έχει αντιμετωπίσει το πρόβλημα δρομολόγησης του οχήματος με παράδοση και παραλαβή (VRPDP) με μία επιβαλλόμενη ακολουθία καθαρής παράδοσης, παράδοσης και παραλαβής και καθαρής παραλαβής για αυτό το NP-hard πρόβλημα, είναι ένας αλγόριθμος τεσσάρων σταδίων που ονομάζεται CLOVES, ο οποίος κατασκευάζει μια καλή αρχική λύση και τη χρησιμοποιεί για να επιτύχει γρήγορη σύγκλιση στην τελική εντατική αναζήτηση.

Ο αλγόριθμος CLOVES περιλαμβάνει 4 στάδια:

1. CL=cluster: Στο πρώτο στάδιο γίνεται ομαδοποίηση των κόμβων βάσει της εγγύτητας τους (απόστασης) και καθορίζεται το σύνολο των κόμβων που κάθε όχημα θα επισκεφθεί.
2. O=orient: Στο δεύτερο στάδιο γίνεται ο κατανομή των κόμβων σε κάθε ομάδα (cluster) του πρώτου σταδίου, έτσι ώστε να προσδιορίζεται μια διαδρομή για κάθε όχημα
3. VE=Vehicles: Στο τρίτο στάδιο γίνεται η εκχώρηση των οχημάτων στις διαδρομές σύμφωνα με τους περιορισμούς.
4. S=Search: Στο τέταρτο στάδιο, χρησιμοποιούμε την λύση που προήλθε από τα τρία προηγούμενα στάδια ως είσοδο για να αναζητήσουμε την βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας γενετικό αλγόριθμο (Genetic Algorithm- GA).

Τα 4 στάδια είναι τα εξής:

1. Ομαδοποίηση: Η ομαδοποίηση είναι μια τεχνική ταξινόμησης για την ομαδοποίηση ενός συνόλου αντικειμένων σε ομάδες έτσι ώστε τα αντικείμενα στο το ίδιο σύμπλεγμα να είναι παρόμοια με την ίδια έννοια. Τα μέτρα απόστασης χρησιμοποιούνται συχνά ως βάση για την ομαδοποίηση των κόμβων.
2. Προσανατολισμός των κόμβων: Σε κάθε εφικτό σύμπλεγμα που δημιουργείται από το στάδιο 1, προσανατολίζουμε τους κόμβους σε μια διαδρομή χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Shrink-Wrap (Lawleretal., 1985, Sofgeetal., 2002). Οι κόμβοι χαρτογραφούνται σε πολικές συντεταγμένες (θ,ρ) και ταξινομούνται ανά γωνία (θ) και διευθετούνται σε αύξουσα σειρά. Αν δύο κόμβοι έχουν τις ίδιες πολικές συντεταγμένες γωνίας τότε ταξινομούνται σύμφωνα με την απόσταση ρ. Αυτή η διαδικασία δίνει τη διαδρομή που πρέπει να διασχίζεται μέσα σε κάθε σύμπλεγμα.
3. Κατανομή οχημάτων: Τα οχήματα κατανέμονται στις διαδρομές του κάθε συμπλέγματος. Ο

αριθμός των διαθέσιμων οχημάτων είναι γνωστός εκ των προτέρων (Petch and Salhi, 2003). Τα οχήματα πρέπει να επισκέπτονται κόμβους κατά την παράδοση και την παραλαβή. Δεν επιτρέπονται διαδρομές που περιλαμβάνουν μόνο παραλαβή. Για την κατανομή των οχημάτων στις διαδρομές χρησιμοποιείται η διαδικασία της γενικής εκχώρησης (GAP) (Fisher and Jaikumar, 1981) έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος.

4. Εύρεση βέλτιστης λύσης χρησιμοποιώντας γενετικό αλγόριθμο (GA): Η λύση που προκύπτει από τις τρεις φάσεις του προτεινόμενου ευρετικού αλγορίθμου χρησιμοποιείται ως δεδομένο στον γενετικό αλγόριθμο (GA) (Goldberg, 1989). Αναμένουμε ότι ο αρχικός πληθυσμός δομημένων λύσεων θα εξελιχθεί σε λύσεις υψηλής ποιότητας μέσα σε σχετικά μικρό αριθμό επαναλήψεων.

Η διαδικασία που ακολουθεί ο αλγόριθμος είναι η εξής:

1. Αντιμετωπίζει κάθε σύμπλεγμα (cluster) ως κόμβο.
2. Βρίσκει τις συντεταγμένες κάθε κέντρου των συμπλεγμάτων (clusters).
3. Κατασκευάζει τον πίνακα των αποστάσεων ανάμεσα στα ζευγάρια των ομάδων από κόμβους.
4. Βρίσκει την αθροιστική τιμή της ζήτησης και της παραλαβής για κάθε ομάδα από κόμβους
5. Από τα συμπλέγματα παράδοσης, επιλέγει εκείνο που είναι πλησιέστερο στην αποθήκη.
6. Ελέγχει αν είναι δυνατή η φόρτωση του φορτίου
7. Ολοκληρώνει τη διαδρομή πρώτα ικανοποιώντας τις απαιτήσεις των πελατών παράδοσης (linehauls) και έπειτα παραλαβής (backhauls).
8. Αν η διαδρομή δεν είναι εφικτή, αυξάνει τον αριθμό των οχημάτων και μεταβαίνει στο βήμα (5).
9. Ελέγχει την απόσταση από την αποθήκη του πρώτου και του τελευταίου κόμβου κάθε συμπλέγματος παράδοσης και επιλέγει το κοντινότερο από τα δύο ως το πρώτο σημείο εκκίνησης για μια διαδρομή.
10. Βρίσκει την ακολουθία κόμβων για κάθε όχημα χρησιμοποιώντας την αρχή του πλησιέστερου γείτονα και σταματά.

Ο αλγόριθμος CLOVES κωδικοποιείται στη C και τρέχει σε επεξεργαστή PC Pentium IV 1,70 Ghz. Ο αριθμός των κόμβων, η βέλτιστη λύση που λαμβάνεται από τον ευρετικό αλγόριθμο, ο χρόνος της CPU για CLOVES, η μέση απόκλιση για κάθε σύνολο δεδομένων και η μέση απόκλιση από τις πιο γνωστές λύσεις δείχνουν ότι ο CLOVES έχει αποδώσει καλά.

4.2.4 Ο αλγόριθμος LNS (31)

Πρόσφατες έρευνες σχετικά με τις τοπικές μεθόδους αναζήτησης υποδεικνύουν ότι οι μεγαλύτερες γειτονιές (larger neighborhoods) μπορεί να χρειαστούν για να λυθούν μερικά δύσκολα προβλήματα βελτιστοποίησης. Λόγω του μεγέθους των γειτονιών χρησιμοποιούνται διάφορα ευρετικά αναζήτησης στη γειτονιά ώστε να διατηρηθεί ο χρόνος πολυπλοκότητας σε λογικά επίπεδα. Αυτό σημαίνει ότι η απόδοση ενός τοπικού αλγορίθμου αναζήτησης περιορίζεται από την ποιότητα του ευρετικού που αναζητά στη γειτονιά. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η δυσκολία , Οι Ropke και Pisinger πρότειναν τη χρήση πολλών ευρετικών για την αναζήτηση στη γειτονιά, όπου η συχνότητα χρήσης κάθε ευρετικού βασίζεται σε μερικά εμπειρικά στοιχεία από την έρευνα. Μια εκτεταμένη έκδοση αυτής της ευρετικής χρησιμοποιείται για τη λύση του δικού μας παραδείγματος.

Ο ευρετικός αλγόριθμος LNS (Large Neighborhood Search) που προτάθηκε από τον Shaw(32).Ο ευρετικός μας επανειλημμένα περνάει από τα παρακάτω βήματα:

1. Επιλέγει ένα αλγόριθμο διαγραφής κόμβων R και ένα αλγόριθμο εισαγωγής κόμβων I
2. Διαγράφει ένα αριθμό q από κόμβους από τις διαδρομές χρησιμοποιώντας τον ευρετικό αλγόριθμο R
3. Εισάγει τους ελεύθερους (αυτούς που απομάκρυνε πριν) κόμβους σε κάποια από τις υπάρχουσες διαδρομές χρησιμοποιώντας τον ευρετικό αλγόριθμο I.
4. Υπολογίζει την αντικειμενική συνάρτηση της καινούριας λύσης
5. Εάν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης βελτιώνεται τότε αποδέχεται την καινούρια λύση. Αλλιώς αποδέχεται την νέα λύση με μία πιθανότητα που εξαρτάται από την αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης.

Ο ευρετικός αλγόριθμος LNS δοκιμάζεται σε ένα σύνολο δεδομένων που προτείνονται στη βιβλιογραφία. Η δοκιμή εξυπηρετεί δύο σημαντικούς σκοπούς. Ο πρώτος σκοπός είναι να συγκριθούν οι 3 μορφές του ευρετικού αλγορίθμου LNS
<u>Οι τρεις μορφές είναι:</u>

1. Μια μορφή αντίστοιχη με αυτή που χρησιμοποιήθηκε από τους Ropke και Pisinger. Αυτή η μορφή έχει μία μνήμη όπου μαθαίνει από τις 3 προηγούμενες κινήσεις, την απλή διαγραφή ενός κόμβου, την χειρότερη διαγραφή και την τυχαία διαγραφή ενός κόμβου. Αυτή είναι η τυπική μορφή αλγορίθμων.
2. Η δεύτερη μορφή του αλγορίθμου που χρησιμοποιεί όλους τους 6 ευρετικούς διαγραφής αλλά έχει απενεργοποιημένο το επίπεδο μάθησης. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι αλγόριθμοι διαγραφής και εισαγωγής κόμβων είναι ισοπίθανο να επιλεγούν κατά τη διάρκεια της αναζήτησης. Αυτή η μορφή συμβολίζεται ως 6R-χωρίς μάθηση (6R-nolearning)
3. Η τελευταία μορφή αλγορίθμων είναι παρόμοια με τη δεύτερη, αλλά σε αυτή χρησιμοποιείται και ένας μηχανισμός μάθησης. Η μορφή υποδηλώνεται 6R – normal learning.

Στον ευρετικό αλγόριθμο για την επίλυση του PDPTW ο αλγόριθμος διαγραφής R, διαγράφει το 40% των κόμβων σε κάθε επανάληψη. Αυτό επιτρέπει στον αλγόριθμο να κάνει σημαντικές αλλαγές στην τρέχουσα λύση σε μία απλή επανάληψη. Χρησιμοποιήθηκαν 6 διαφορετικοί αλγόριθμοι , κάθε αλγόριθμος διαγραφής έχει την δική του στρατηγική για την επιλογή των κόμβων που θα διαγραφούν.

Οι ευρετικοί είναι:

- Τυχαία αφαίρεση: Οι κόμβοι που αφαιρούνται επιλέγονται τυχαία
- Αφαίρεση Shaw: Κατάργηση σχετικών κόμβων, δηλαδή διαγράφονται κόμβοι που είναι γεωγραφικά κοντά σε άλλους κόμβους.
- Διαγραφή του χειρότερου κόμβου: Διαγραφή του κόμβου που βελτιώνει περισσότερο το κόστος.
- Διαγραφή ομάδας κόμβων: Προσπάθεια να χωριστούν οι κόμβοι σε υποσύνολα έτσι ώστε οι κόμβοι σε κάθε υποσύνολο είναι με κάποιο τρόπο κοντά ο ένας στον άλλο.
- Διαγραφή με βάση ιστορικά δεδομένα: Αυτός ο ευρετικός χρησιμοποιεί ιστορικές πληροφορίες όταν διαγράφει κάποιο κόμβο.

Τα πρώτα τρία ευρετικά στοιχεία απομάκρυνσης ήταν που χρησιμοποιούνταν στο παρελθόν [31] ενώ τα τελευταία είναι καινούργια. Για να εισαγάγουμε τους κόμβους χρησιμοποιούμε τους πέντε ευρετικούς εισαγωγής που προτείνουν οι Ropke και Pisinger . Τα ευρετικά μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες:

I. Βασικος αλγόριθμος εισαγωγής κόμβων: ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι παρόμοιος με τον αλγόριθμο εισαγωγής του Solomon. Σε κάθε επανάληψη εισέρχεται μέσα στην λύση ένας κόμβος έτσι ώστε η συνάρτηση κόστους αυξάνεται όσο το δυνατό λιγότερο.

II. Αλγόριθμος εισαγωγής ανάμεσα στις 2 καλύτερες επιλογές: είναι ένας αλγόριθμος όπου σε κάθε επανάληψη της βασικής εκδοχής του ένας κόμβος εισέρχεται στην λύση με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιεί το κενό της εισαγωγής του κόμβου μεταξύ της καλύτερης και της δεύτερης καλύτερης διαδρομής.

Αυτές οι τρεις μορφές μας επιτρέπουν να εξετάσουμε εάν οι αλγόριθμοι απομάκρυνσης βελτιώνουν τη ποιότητα του ευρετικού αλγορίθμου. Ο δεύτερος βασικός σκοπός της δοκιμής είναι να γίνει σύγκριση της ποιότητας των αποτελεσμάτων που επιτυγχάνονται από τα ευρετικά με τα αποτελέσματα που προτείνονται για τους διάφορους τύπους προβλημάτων. Θέλουμε να μάθουμε αν ένας γενικός ευρετικός αλγόριθμος μπορεί να είναι ανταγωνιστικός με εξειδικευμένους ευρετικούς αλγορίθμους. Το κριτήριο διακοπής που χρησιμοποιείται είναι να σταματήσει ο ευρετικός αλγόριθμος αφού έχει εκτελέσει 25.000 επαναλήψεις.
Όλα τα προβλήματα που εξετάζονται είναι γεωμετρικά προβλήματα όπου οι αποστάσεις και οι χρόνοι καθορίζονται από την Ευκλείδεια απόσταση, ως εκ τούτου η τριγωνική ανισότητα ικανοποιείται και για τις δύο παραμέτρους. Όλα τα πειράματα πραγματοποιούνται σε PC πουβασίζεται στο Linux, εξοπλισμένο με 256 MB RAM και 1.5 GHzPen - επεξεργαστή IV. Ο ευρετικός αλγόριθμος υλοποιείται στη γλώσσα προγραμματισμού C ++.
Η διαμόρφωση 6R - learning είναι σε θέση να βελτιώσει τις πιο γνωστές λύσεις περισσότερο από 9%. Σε αυτό που πρέπει να δοθεί προσοχή στους ευρετικούς αλγορίθμους του LNS είναι πως είναι αρκετά αργοί όταν αντιμετωπίζουν αυτού του είδους τα προβλήματα, διότι κάθε εντολή αντιπροσωπεύει δύο αιτήσεις και εισάγει σημαντική επιβάρυνση στον αλγόριθμο.

4.2.5 Ο αλγόριθμος STANDARD

Αυτή η ενότητα περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο εκτελείται κάθε πρόβλημα που μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα πλούσιο PDPTW. Ο βασικός μετασχηματισμός είναι να αντιπροσωπεύεται ένας πελάτη linehaul κατόπιν αιτήματος για μια παραλαβή από την αποθήκη με μια παράδοση.
Οι πελάτες Backhauls εκπροσωπούνται από ένα αίτημα για μια παραλαβή από την αποθήκη με μια παράδοση. Αυτή η μεταμόρφωση μπορεί να φαίνεται επαρκής για την εκπροσώπηση του μικτού προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων με πελάτες δύο ειδών στην διαδρομή (Mixed Vehicle Routing Problem with Backhauls) MVRPB, αλλά έχει το μειονέκτημα που επιτρέπει σε ένα όχημα να πάει πίσω στην αποθήκη για εκ νέου αποθεματοποίηση ή εκφόρτωση και στη συνέχεια να συνεχίσει το δρομολόγιο του.
Το πρόβλημα έχει λυθεί με την εκχώρηση προτεραιοτήτων στα διαφορετικά καθήκοντα:
Οι παραλαβές στην αποθήκη έχουν προτεραιότητα 1, σε πελάτες της σειράς και σε pickups.
Οι πελάτες των παραδόσεων έχουν προτεραιότητα 2. Οι παραδόσεις στην αποθήκη έχουν προτεραιότητά 3.

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα

Στους Πίνακες1,2 και 3 έχουμε τα αποτελέσματα που έδωσαν οι αλγόριθμοι του παραδείγματος που εξετάζουμε και περιέχουν τα εξής δεδομένα :

- N: Ο συνολικός αριθμός κορυφών
- n: οι κορυφές των linehaul πελατών
- m: οι κορυφές των backhaul πελατών
- K: Τα διαθέσιμα οχήματα
- KL: Τα ελάχιστα οχήματα που απαιτούνται για την εξυπηρέτηση των linehaul κορυφών
- KB: Τα ελάχιστα οχήματα που απαιτούνται για την εξυπηρέτηση των backhaul κορυφών
- Τις λύσεις που έδωσαν οι αλγόριθμοι

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	N	*n*	m	K	KL	KB	DB	SF	LHBH	TV
A1	25	20	5	8	7	2	230730	269045	230568	229884
A2	25	20	5	5	4	1	185228	215461	181279	180117
A3	25	20	5	4	3	1	169216	182533	169975	163403
A4	25	20	5	3	3	1	164707	197512	158437	155795
B1	30	20	10	7	7	4	254098	276862	239782	239077
B2	30	20	10	5	4	3	211496	246142	198493	198045
B3	30	20	10	3	3	2	172297	205907	169372	169368
C1	40	20	20	7	6	6	265453	315624	256120	250557
C2	40	20	20	5	4	4	215020	251349	221848	215019
C3	40	20	20	5	3	3	203988	-	203771	199344
C4	40	20	20	4	3	3	205974	227899	199811	195365
D1	38	30	8	12	10	3	336599	357301	324502	322707
D2	38	30	8	11	10	3	336724	-	321206	316711
D3	38	30	8	7	6	2	242393	265143	239801	239482
D4	38	30	8	5	5	2	208622	225442	208120	205834
E1	45	30	15	7	6	3	244488	295874	244377	238880
E2	45	30	15	4	4	2	218499	280469	223667	212802
E3	45	30	15	4	3	2	216209	269571	214609	206658
F1	60	30	30	6	5	6	291960	-	277191	263175
F2	60	30	30	7	5	6	290129	339160	269141	266643
F3	60	30	30	5	4	4	258232	301401	245265	241487
F4	60	30	30	4	3	3	245044	295298	241610	234377
G1	57	45	12	10	9	3	312118	373917	316029	307274
G2	57	45	12	6	6	2	246278	296362	247663	245441
G3	57	45	12	5	5	2	237831	276105	231203	231202
G4	57	45	12	6	5	2	240516	300734	239277	232646
G5	57	45	12	5	4	1	233525	285013	227550	223068
G6	57	45	12	4	3	1	218063	259292	217704	213457
H1	68	45	23	6	6	3	283050	334948	279490	271185
H2	68	45	23	5	5	3	271534	324654	263175	253366
H3	68	45	23	4	4	2	263563	307935	256304	247536
H4	68	45	23	5	4	2	270150	295409	262282	252370
H5	68	45	23	4	3	2	257665	277267	258087	246121
H6	68	45	23	5	3	2	265303	295409	261051	249136
I1	90	45	45	10	8	9	363481	442718	360687	358625
I2	90	45	45	7	6	7	319997	394715	320728	313917

I3	90	45	45	5	4	5	310593	339974	309687	301186
I4	90	45	45	6	4	5	308931	365146	303161	297709
I5	90	45	45	7	4	5	304663	370397	305101	304603
J1	94	75	19	10	10	3	345564	-	352516	343659
J2	94	75	19	8	8	2	323218	362398	314518	318984
J3	94	75	19	6	5	2	289661	338654	292146	285483
J4	94	75	19	7	7	2	307312	342746	302642	302422
K1	113	75	38	10	10	5	420049	449316	409826	407939
K2	113	75	38	8	8	4	394884	433663	371820	372906
K3	113	75	38	9	8	4	393419	455587	386436	380632
K4	113	75	38	7	7	3	372612	419529	358260	361775
L1	150	75	75	10	9	9	459852	588725	445573	454130
L2	150	75	75	8	8	8	464804	531033	417751	431840
L3	150	75	75	9	8	8	433942	-	421970	423930
L4	150	75	75	7	6	6	423603	497026	404255	402219
L5	150	75	75	8	6	6	434378	-	404329	406470
M1	125	100	25	11	10	3	435742	496587	412911	411204
M2	125	100	25	10	10	3	423778	-	414234	417882
M3	125	100	25	9	9	3	395087	449393	392500	386249
M4	125	100	25	7	7	2	380159	423075	367979	362117
N1	150	100	50	11	10	5	458216	601419	435273	428328
N2	150	100	50	10	10	5	454998	-	439329	430688
N3	150	100	50	9	9	4	428724	497150	404407	414785
N4	150	100	50	10	9	4	436461	495167	413734	416321
N5	150	100	50	7	7	3	420739	448301	392625	389349
N6	150	100	50	8	7	3	408153	444603	389367	388976

Πίνακας 1.

.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	N	*n*	m	K	KL	KB	Open-tree	K-tree	k-tree_r	CLOVES
A1	25	20	5	8	7	2	230548	229886	229886	229885,65
A2	25	20	5	5	4	1	180119	180119	180119	180119,21
A3	25	20	5	4	3	1	163405	163405	163405	163405,38
A4	25	20	5	3	3	1	155796	155796	155796	155796,41
B1	30	20	10	7	7	4	239080	239080	239080	239080,15
B2	30	20	10	5	4	3	198048	198048	198048	198047,77
B3	30	20	10	3	3	2	169372	169372	169372	169372,29
C1	40	20	20	7	6	6	250557	250557	250557	251502,5
C2	40	20	20	5	4	4	215020	215020	215020	215020,23
C3	40	20	20	5	3	3	200195	199346	199346	199345,96
C4	40	20	20	4	3	3	195366	195366	195366	195366,63
D1	38	30	8	12	10	3	322530	322530	322530	322530,13
D2	38	30	8	11	10	3	317851	316709	316709	316708,86
D3	38	30	8	7	6	2	239479	239479	239479	239478,63
D4	38	30	8	5	5	2	205832	205832	205832	205881,56
E1	45	30	15	7	6	3	238880	238880	238880	238879,58
E2	45	30	15	4	4	2	212263	212263	212263	212263,11
E3	45	30	15	4	3	2	208837	206659	206659	206659,17
F1	60	30	30	6	5	6	264565	263173	263173	264299,6
F2	60	30	30	7	5	6	266921	265213	265493	265653,47
F3	60	30	30	5	4	4	254736	241120	241120	241120,77
F4	60	30	30	4	3	3	234341	233861	233861	233861,85
G1	57	45	12	10	9	3	306308	306306	306306	306305,4
G2	57	45	12	6	6	2	251334	245441	245441	245440,99
G3	57	45	12	5	5	2	231203	231203	229507	229507,48
G4	57	45	12	6	5	2	235410	232521	232521	235251,47
G5	57	45	12	5	4	1	228833	221730	221730	221730,35
G6	57	45	12	4	3	1	213644	213457	213457	213457,45
H1	68	45	23	6	6	3	271300	268933	268933	268933,06
H2	68	45	23	5	5	3	253365	253365	253365	253365,5
H3	68	45	23	4	4	2	250824	247449	247449	247449,04
H4	68	45	23	5	4	2	264133	250221	250221	250220,77
H5	68	45	23	4	3	2	246121	246121	246121	246121,31

H6	68	45	23	5	3	2	249618	249135	249135	249135,32
I1	90	45	45	10	8	9	351179	350437	350435	351905,01
I2	90	45	45	7	6	7	309944	309944	309944	311649,29
I3	90	45	45	5	4	5	306523	294507	294507	294507,38
I4	90	45	45	6	4	5	299144	295988	295988	296903,67
I5	90	45	45	7	4	5	306554	301731	301236	302529,34
J1	94	75	19	10	10	3	337588	335007	335007	336975,93
J2	94	75	19	8	8	2	321764	311028	310793	311077
J3	94	75	19	6	5	2	300776	282095	279306	281458,02
J4	94	75	19	7	7	2	303227	298188	296860	296773,38
K1	113	75	38	10	10	5	402273	394988	394974	397769,29
K2	113	75	38	8	8	4	368506	365065	363829	365217,96
K3	113	75	38	9	8	4	369733	366734	366246	367767,39
K4	113	75	38	7	7	3	351418	351940	351345	350899,52
L1	150	75	75	10	9	9	428277	425865	426401	426659,89
L2	150	75	75	8	8	8	405931	403910	402152	402245,17
L3	150	75	75	9	8	8	403981	403807	404391	406873,02
L4	150	75	75	7	6	6	407127	388510	384999	385133,49
L5	150	75	75	8	6	6	399644	393899	389044	388211,73
M1	125	100	25	11	10	3	405649	400429	400384	401255,14
M2	125	100	25	10	10	3	405678	399625	398924	399239,75
M3	125	100	25	9	9	3	381708	378464	377433	378716,96
M4	125	100	25	7	7	2	354378	349980	349091	349471,24
N1	150	100	50	11	10	5	411370	408724	409531	409588,92
N2	150	100	50	10	10	5	413768	410909	408287	409280,16
N3	150	100	50	9	9	4	401369	399701	394338	398275,45
N4	150	100	50	10	9	4	410424	398824	399029	397810,09
N5	150	100	50	7	7	3	382050	374985	376522	376431,84
N6	150	100	50	8	7	3	383535	382751	374774	383264,53

Πίνακας 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	N	*n*	m	K	KL	KB	Standard	6R—no learning	6R—normal learning
A1	25	20	5	8	7	2	229885,65	229885,65	229885,65
A2	25	20	5	5	4	1	180119,21	180119,21	180119,21
A3	25	20	5	4	3	1	163405,38	163405,38	163405,38
A4	25	20	5	3	3	1	155796,41	155796,41	155796,41
B1	30	20	10	7	7	4	239080,16	239080,16	239080,16
B2	30	20	10	5	4	3	198047,77	198047,77	198047,77
B3	30	20	10	3	3	2	169372,29	169372,29	169372,29
C1	40	20	20	7	6	6	250846,82	250560,15	250556,77
C2	40	20	20	5	4	4	215020,23	215020,23	215020,23
C3	40	20	20	5	3	3	199345,96	199345,96	199345,96
C4	40	20	20	4	3	3	195366,63	195366,63	195366,63
D1	38	30	8	12	10	3	322530,13	322530,13	322530,13
D2	38	30	8	11	10	3	316708,86	316708,86	316708,86
D3	38	30	8	7	6	2	239478,63	239478,63	239478,63
D4	38	30	8	5	5	2	205831,94	205831,94	205831,94
E1	45	30	15	7	6	3	238879,58	238879,58	238879,58
E2	45	30	15	4	4	2	212463,34	212263,11	212458,75
E3	45	30	15	4	3	2	206710,33	206697,72	206761,96
F1	60	30	30	6	5	6	268346,03	268430,58	268306,24
F2	60	30	30	7	5	6	265214,16	265214,16	265214,16
F3	60	30	30	5	4	4	241969,77	241969,77	241969,77
F4	60	30	30	4	3	3	235175,2	235528,13	235449,66
G1	57	45	12	10	9	3	306388,11	306322,98	306354,9
G2	57	45	12	6	6	2	245529,35	245440,99	245440,99
G3	57	45	12	5	5	2	229507,48	230737,17	230583,46
G4	57	45	12	6	5	2	232913,81	233006,36	233263,98
G5	57	45	12	5	4	1	221826,32	222435,96	222442,67
G6	57	45	12	4	3	1	213541,7	214090,55	213457,45
H1	68	45	23	6	6	3	269342,45	269467,78	269317,64
H2	68	45	23	5	5	3	253423,34	253462,09	254194,18
H3	68	45	23	4	4	2	247532,87	247508,59	247449,04
H4	68	45	23	5	4	2	250317,37	250269,07	250269,07
H5	68	45	23	4	3	2	246532,25	246767,73	246217,9

H6	68	45	23	5	3	2	249294,67	249231,92	249206,96
I1	90	45	45	10	8	9	350958,02	350852,85	350897,94
I2	90	45	45	7	6	7	312489,95	311016,93	310434,77
I3	90	45	45	5	4	5	295236,14	294858,13	294821,76
I4	90	45	45	6	4	5	296820,65	296159,12	296401,46
I5	90	45	45	7	4	5	302707,04	301909,59	301980,98
J1	94	75	19	10	10	3	336680,78	336522,31	336789,92
J2	94	75	19	8	8	2	312206,97	312458,56	311763,08
J3	94	75	19	6	5	2	281807,92	279423,74	279729,03
J4	94	75	19	7	7	2	298412,68	297781,22	297344,74
K1	113	75	38	10	10	5	397774,56	395993,78	397076,46
K2	113	75	38	8	8	4	365791,18	362998,61	363253,47
K3	113	75	38	9	8	4	367806,64	366218,02	366388,14
K4	113	75	38	7	7	3	351441,74	349266,17	349241,78
L1	150	75	75	10	9	9	428037,41	427658,8	427641,03
L2	150	75	75	8	8	8	402073,43	401587,25	401492,36
L3	150	75	75	9	8	8	404784,84	403029,19	402860,67
L4	150	75	75	7	6	6	387660,68	385207,32	385073,14
L5	150	75	75	8	6	6	390091,24	388677,62	389778,12
M1	125	100	25	11	10	3	402962,88	401540,39	401666,48
M2	125	100	25	10	10	3	400924,09	401724,68	401347,29
M3	125	100	25	9	9	3	379362,69	378502,3	378031,96
M4	125	100	25	7	7	2	349984,33	348663,06	348905,97
N1	150	100	50	11	10	5	414655,53	414044,03	414915,65
N2	150	100	50	10	10	5	413434,54	413124,59	415985,72
N3	150	100	50	9	9	4	402418,8	399363,23	400984,4
N4	150	100	50	10	9	4	401362,13	402131,56	400553,31
N5	150	100	50	7	7	3	380168,38	377447,83	378201,49
N6	150	100	50	8	7	3	381099,86	376612,61	376966,15

Πίνακας 3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	N	DB	SF	LHBH	TV
A1	25	0,37	17,04	0,30	0,00
A2	25	2,84	19,62	0,65	0,00
A3	25	3,56	11,71	4,02	0,00
A4	25	5,72	26,78	1,70	0,00
B1	30	6,28	15,80	0,29	0,00
B2	30	-11,54	2,96	-16,98	-17,16
B3	30	1,73	21,57	0,00	0,00
C1	40	5,95	25,97	2,22	0,00
C2	40	0,00	16,90	3,18	0,00
C3	40	2,33	-	2,22	0,00
C4	40	5,43	16,65	2,28	0,00
D1	38	4,36	10,78	0,61	0,05
D2	38	6,32	-	1,42	0,00
D3	38	1,22	10,72	0,13	0,00
D4	38	1,36	9,53	1,11	0,00
E1	45	2,35	23,86	2,30	0,00
E2	45	2,94	32,13	5,37	0,25
E3	45	4,62	30,44	3,85	0,00
F1	60	10,94	-	5,33	0,00
F2	60	9,39	27,88	1,48	0,54
F3	60	7,10	25,00	1,72	0,15
F4	60	4,78	26,27	3,31	0,22
G1	57	1,90	22,07	3,17	0,32
G2	57	0,34	20,75	0,91	0,00
G3	57	3,63	20,30	0,74	0,74
G4	57	3,44	29,34	2,91	0,05
G5	57	5,32	28,54	2,62	0,60
G6	57	2,16	21,47	1,99	0,00
H1	68	5,25	24,55	3,93	0,84
H2	68	7,17	28,14	3,87	0,00
H3	68	6,51	24,44	3,58	0,04
H4	68	7,96	18,06	4,82	0,86
H5	68	4,69	12,65	4,86	0,00
H6	68	6,49	18,57	4,78	0,00
I1	90	3,72	26,33	2,93	2,34
I2	90	3,24	27,35	3,48	1,28
I3	90	5,46	15,44	5,15	2,27
I4	90	4,37	23,37	2,42	0,58
I5	90	1,14	22,96	1,28	1,12
J1	94	3,15	-	5,23	2,58
J2	94	4,00	16,60	1,20	2,64
J3	94	3,71	21,25	4,60	2,21
J4	94	3,55	15,49	1,98	1,90
K1	113	6,35	13,76	3,76	3,28
K2	113	8,78	19,47	2,43	2,73
K3	113	7,43	24,40	5,52	3,94

K4	113	6,69	20,13	2,58	3,59
L1	150	7,98	38,24	4,63	6,64
L2	150	15,77	32,26	4,05	7,56
L3	150	7,72	-	4,74	5,23
L4	150	10,03	29,10	5,00	4,47
L5	150	11,89	-	4,15	4,70
M1	125	8,83	24,03	3,13	2,70
M2	125	6,23	-	3,84	4,75
M3	125	4,68	19,07	3,99	2,34
M4	125	9,03	21,34	5,54	3,86
N1	150	12,11	47,15	6,50	4,80
N2	150	11,44	-	7,60	5,49
N3	150	8,72	26,07	2,55	5,19
N4	150	9,72	24,47	4,00	4,65
N5	150	12,20	19,55	4,70	3,83
N6	150	8,91	18,63	3,89	3,79

Πίνακας 4.

Στον πίνακα 4 παρουσιάζεται η απόσταση από τη βέλτιστη λύση για τους αλγορίθμους DB,SF, LHBH, TV.

Συμπεραίνεται, ότι ο αλγόριθμος TV έχει καλύτερη απόδοση από τους άλλους αλγορίθμους διατηρώντας την καλύτερη λύση σε 53 από τις 62 δοκιμές – προβλήματα εντός αποδεκτών χρόνων υπολογιστικής.

Η μεγαλύτερη αποδοτικότητα του αλγορίθμου TV μπορεί επίσης να παρουσιαστεί σημειώνοντας ότι σε όλες τις περιπτώσεις η μέση εκατοστιαία αναλογία των λύσεων που προκύπτουν από αυτόν τον αλγόριθμο, είναι 103,7%, ενώ οι λύσεις που λαμβάνονται από τα DB, SF και LHBH έχουν μέση ποσοστιαία αναλογία ίση με 107,9%, 124,5% και 105,1% αντίστοιχα.

Επιπλέον, μόνο για 30 περιπτώσεις είναι γνωστή η μέση ποσοστιαία αναλογία του αλγορίθμου TV 100,1%, ενώ αυτές των αλγορίθμων SF, DB και LHBH είναι 104,5%, 120,9% και 102,5%, αντίστοιχα.

Σε όλες τις περιπτώσεις ο μέσος χρόνος υπολογισμών που απαιτείται από τον αλγόριθμο TV είναι 193,9 δευτερόλεπτα, ενώ οι DB, SF και LHBH απαιτούν κατά μέσο όρο 37,5, 16,6 και 64,4 δευτερόλεπτα αντίστοιχα.

Επομένως, στον αλγόριθμο TV το μέσο χάσμα μεταξύ του ευρετικού και της βέλτιστης λύσης σε σχέση με το LHBH μειώθηκε στο 27,5%, με τον μέσο χρόνο να αυξάνεται τρεις φορές. Τέλος, έτρεξε ο αλγόριθμος TV επιβάλλοντας για κάθε περίπτωση ένα χρονικό όριο ίσο με τον αντίστοιχο του αλγορίθμου LHBH, επιτυγχάνοντας την καλύτερη λύση σε 46 από τις 62 περιπτώσεις και μια συνολική μέση ποσοστιαία αναλογία με 104,4%.Τα παραδείγματα που παρουσιάζονται είναι 62. Έκ των οποίων στην πλειοψηφία των αλγορίθμων ο TV είναι ο πιο αποτελεσματικός σε σχέση με τους άλλους τρεις. Γενικότερα, επιβεβαιώνεται ότι ο αλγόριθμος TV είναι ο καλύτερος μεταξύ τους, καθότι προκύπτει πάντα η καλύτερη λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	Open-tree	K-tree	k-tree_r
A1	0,29	0,00	0,00
A2	0,00	0,00	0,00
A3	0,00	0,00	0,00
A4	0,00	0,00	0,00
B1	0,00	0,00	0,00
B2	-17,16	-17,16	-17,16
B3	0,00	0,00	0,00
C1	0,00	0,00	0,00
C2	0,00	0,00	0,00
C3	0,43	0,00	0,00
C4	0,00	0,00	0,00
D1	0,00	0,00	0,00
D2	0,36	0,00	0,00
D3	0,00	0,00	0,00
D4	0,00	0,00	0,00
E1	0,00	0,00	0,00
E2	0,00	0,00	0,00
E3	1,05	0,00	0,00
F1	0,53	0,00	0,00
F2	0,64	0,00	0,11
F3	5,65	0,00	0,00
F4	0,21	0,00	0,00
G1	0,00	0,00	0,00
G2	2,40	0,00	0,00
G3	0,74	0,74	0,00
G4	1,24	0,00	0,00
G5	3,20	0,00	0,00
G6	0,09	0,00	0,00
H1	0,88	0,00	0,00
H2	0,00	0,00	0,00
H3	1,36	0,00	0,00
H4	5,56	0,00	0,00
H5	0,00	0,00	0,00
H6	0,19	0,00	0,00
I1	0,21	0,00	0,00
I2	0,00	0,00	0,00
I3	4,08	0,00	0,00
I4	1,07	0,00	0,00
I5	1,77	0,16	0,00
J1	0,77	0,00	0,00
J2	3,53	0,08	0,00

J3	7,69	1,00	0,00
J4	2,17	0,48	0,03
K1	1,85	0,00	0,00
K2	1,52	0,57	0,23
K3	0,96	0,14	0,01
K4	0,62	0,77	0,60
L1	0,57	0,00	0,13
L2	1,11	0,60	0,16
L3	0,28	0,23	0,38
L4	5,75	0,91	0,00
L5	2,94	1,46	0,21
M1	1,31	0,01	0,00
M2	1,69	0,18	0,00
M3	1,13	0,27	0,00
M4	1,63	0,38	0,12
N1	0,65	0,00	0,20
N2	1,34	0,64	0,00
N3	1,78	1,36	0,00
N4	3,17	0,25	0,31
N5	1,88	0,00	0,41
N6	2,34	2,13	0,00

Πίνακας 5.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προκύπτουν και παρουσιάζονται στον πίνακα 5 συμπεραίνεται ότι και οι τρεις εκδοχές του OPEN TREE, του K – TREE και του K – TREE_r δίνουν τις καλύτερες δυνατές λύσεις. Πάραυτα παρουσιάζονται με ελάχιστες διαφορές σε ότι αφορά τις αποστάσεις με τον αλγόριθμο K - TREE_r να είναι ελάχιστα καλύτερος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	cloves	Standard	6R—no learning	6R—normal learning
A1	0,00	0,00	0,00	0,00
A2	0,00	0,00	0,00	0,00
A3	0,00	0,00	0,00	0,00
A4	0,00	0,00	0,00	0,00
B1	0,00	0,00	0,00	0,00
B2	-17,16	-17,16	-17,16	-17,16
B3	0,00	0,00	0,00	0,00
C1	0,38	0,12	0,00	0,00
C2	0,00	0,00	0,00	0,00
C3	0,00	0,00	0,00	0,00
C4	0,00	0,00	0,00	0,00
D1	0,00	0,00	0,00	0,00
D2	0,00	0,00	0,00	0,00
D3	0,00	0,00	0,00	0,00
D4	0,02	0,00	0,00	0,00
E1	0,00	0,00	0,00	0,00

E2	0,00	0,09	0,00	0,09
E3	0,00	0,03	0,02	0,05
F1	0,43	1,97	2,00	1,95
F2	0,17	0,00	0,00	0,00
F3	0,00	0,35	0,35	0,35
F4	0,00	0,56	0,71	0,68
G1	0,00	0,03	0,01	0,02
G2	0,00	0,04	0,00	0,00
G3	0,00	0,00	0,54	0,47
G4	1,17	0,17	0,21	0,32
G5	0,00	0,04	0,32	0,32
G6	0,00	0,04	0,30	0,00
H1	0,00	0,15	0,20	0,14
H2	0,00	0,02	0,04	0,33
H3	0,00	0,03	0,02	0,00
H4	0,00	0,04	0,02	0,02
H5	0,00	0,17	0,26	0,04
H6	0,00	0,06	0,04	0,03
I1	0,42	0,15	0,12	0,13
I2	0,55	0,82	0,35	0,16
I3	0,00	0,25	0,12	0,11
I4	0,31	0,28	0,06	0,14
I5	0,43	0,49	0,22	0,25
J1	0,59	0,50	0,45	0,53
J2	0,09	0,45	0,54	0,31
J3	0,77	0,90	0,04	0,15
J4	0,00	0,55	0,34	0,19
K1	0,71	0,71	0,26	0,53
K2	0,61	0,77	0,00	0,07
K3	0,42	0,43	0,00	0,05
K4	0,47	0,63	0,01	0,00
L1	0,19	0,51	0,42	0,42
L2	0,19	0,14	0,02	0,00
L3	1,00	0,48	0,04	0,00
L4	0,03	0,69	0,05	0,02
L5	0,00	0,48	0,12	0,40
M1	0,22	0,64	0,29	0,32
M2	0,08	0,50	0,70	0,61
M3	0,34	0,51	0,28	0,16
M4	0,23	0,38	0	0,07
N1	0,21	1,45	1,30	1,51
N2	0,24	1,26	1,18	1,89
N3	1,00	2,05	1,27	1,69
N4	0,00	0,89	1,09	0,69
N5	0,39	1,38	0,66	0,86
N6	2,27	1,69	0,49	0,58

Πίνακας 6.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του πίνακα 6 προκύπτει ότι ο αλγόριθμος **Cloves** και ο **6R-NORMAL LEARNING** παρουσιάζουν τις καλύτερες δυνατές λύσεις με τη μικρότερη απόσταση ώστε να ολοκληρωθεί μία διαδρομή παραλαβής και παράδοσης προϊόντων και υπηρεσιών.

Συμπεράσματα

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με backhauls είναι ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα, το οποίο μας απασχολεί και στις μέρες μας, το οποίο επηρεάζει το κόστος και την παραγωγικότητα στα βιομηχανικά συστήματα διανομής. Όπως πολλά άλλα προβλήματα δρομολόγησης, το VRPB είναι ένα σύνθετο πρόβλημα και απαιτούνται ευρετικοί αλγόριθμοι για να ληφθούν λύσεις σε εύλογο χρονικό διάστημα για ρεαλιστικά μεγέθη προβλημάτων. Τα καλύτερα αποτελέσματα σε αυτήν την εργασία τα έδωσε ένας αλγόριθμος αναζήτησης Tabu για το VRPB που εκτελεί καλύτερα από οποιονδήποτε άλλο γνωστό αλγόριθμο. Η καλύτερη απόδοση επιτυγχάνεται με την έκδοση που αποκτά την αρχική λύσεις από ψευδο-κατώτατα όρια, που είναι ένα καινοτόμο χαρακτηριστικό που χρησιμοποιείται για πρώτη φορά για τα προβλήματα VRPB. Αυτή η αποδοτική συμπεριφορά οφείλεται στις πληροφορίες που περιέχονται στα ψευδο-κατώτατα όρια και στην ποικιλομορφία που δημιουργείται από τη χρήση πολλών αρχικών λύσεων. Παρατηρούμε επομένως ότι ο ο αλγόριθμος K-Tree_r δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα σε ποσοστό 32%.

Ξένη βιβλιογραφία

1. **Fisher, M.L., Jaikumar,R., and Wassenhove,L.N.V.***A multiplier Adjustment Method for the Generalized Assignment Problem, Managment Science,32(9),1095-1103.* 1986.
2. **Christofides, N.***Vehicle Routing.The travelling Sales- man Problem.* 1985.
3. **Bodin, L.D., Gplden, B.L, Assad,A.A and Ball, M.O.***Routing and Scheduling of Vehicles and Crews, Computers and Operations Research, 10, 63-211.* 1983.
4. **Marc Goetschalckx and Charlotte Jacobs – Blecha.** 1989.
5. **Halse, K.***Modeling and Solving Complex Vehicle Routing, PhD thesis, Institute of Mathematical Statisticsand Operations Research (IMSOR), Technical University of Denmark.* 1992.
6. **G. Nagy, S. Salhi.***Heuristic algorithms for single and multiple depot vehicle routing problems with pickups and deliveries,European Journal of Operational Research, in pres.*
7. **S. Salhi, G. Nagy.***A cluster insertion heuristic for single and multiple depot vehicle routing problems with backhauling, Journal of the Operational Research Society 50 1034–1042.* 1991.
8. **A. Wade, S. Salhi.***An ant system algorithm for the vehicle routing problem with backhauls, in: MIC'2001—4th Metaheuristic International Conference.*
9. **J. Crispim, J. Brandao.***Reactive tabu search and variable neighbourhood descent applied to the vehicle routing problem with backhauls, in: MIC'2001 4th Metaheuristic International Conference, Porto, Portugal,.* July 16–20 2001.
10. **S. Gelinas, M. Desrochers, J. Desrosiers, M.M. Solomon.***A new branching strategy for time constrained routing problems with application to backhauling, Annals of Operations Research 61 , 91–109.* 1995.
11. **C. Duhamel, J.-Y. Potvin, J.-M. Rousseau.***A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with back-hauls and time windows, Transportation Science 31 , 49–59.* 1997.
12. **T. Hasama, H. Kokubugata, H. Kawashima,.***A heuristic approach based on the string model to solve vehicle routing problem with backhauls, in: Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Transport Systems (ITS) Seoul.* 1998.
13. **M. Reimann, K. Doerner, R.F. Hartl.***Insertion based ants for vehicle routing problems with backhauls and time windows, LNCS 2463 , 135–148.* 2002.
14. **S.R. Thangiah, J.-Y. Potvin, T. Sun,.***Heuristic approaches to vehicle routing with backhauls and time windows, Computers & Operations Research 23 1043–1057.* 1996.
15. **Y. Zhong, M.H. Cole,.***A simple approach to linehaul- backhaul problems: A guided local search approach for the vehicle routing problem, Transportation Research Part E,in press.*
16. **Clarke, G., and Wright, J.***Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points, Operations Research,12, 568-581.* 1964.
17. **Gillet, B.E., Miller, L.R.***A Heuristic Algorithm for the Vehicle Dispatch Problem, Operations Research, 22, 240-349.* 1974.
18. **Fisher, M.L.***The Langrangean Relaxation Methood for Solving Integer Programming Problems .* 1981.
19. **Mole, R.H., Jameson, S.R.***A Sequential Route-Building Algorithm Employing a Generalized Savings Criterion. Operational Research Quarterly,27, 503-511.* 1976.
20. **Papadimitriou, C.H., and Steiglitz, K.***Combinatorial Optimization - Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, N.J.* 1982.
21. **Waters, C.D.J.***A solution Procedure for the Vehicle Scheduling Problem Baqsed on Iteractive Route Improvement Journal of Operational Research Society, 38,833-839.* 1987.
22. **willard, J.A.G.***Vehicle Using r-Optimal Tabu Search. Master Thesis, The Management School, Imperial Colege, London.* 1989.
23. **Osman, I.H.***Metastrategy Simulated Annealing and Tabu Search Algorithms for Combinatorial Optimization Problems. Annas of Operational Research,41,421-451.* 1993.

24. **Gendreau, M., Laporte, G., and Potvin, J.Y.***Vehicle Routing: Modern Heuristics, Local Search in Combinatorial, Optimization, Aarts, E.H.L, and Lenstra, J.K., (Editors), John Wiley and Sons, Chichester,311-336.* 1997.
25. **Lin, S.***Computer Solutions of the Traveling Salesman Problem. Bell Systems Technical Journal,44,2245-2269.* 1965.
26. **Rego, C.***Node-Ejection Chains for the Vehicle Routing Problem: Sequential and Parallel Algorithms, Parallel Computing,27(3),201-222.* 2001.
27. **Rochat, Y., and Taillard, E.D.***Probabilistic Diversification and intensification in Local Search for Vehicle Routing. Journal of Heuristics, 1,147-167.* 1995.
28. **Paolo Toth, Daniele Vigo.***A heuristic algorithm for the symmetric and asymmetric vehicle routing problems with backhauls.*
29. **Brandao, Jose.***A new tabu search algorithm for the vehicle routing problem with backhauls.*
30. **K. Ganesh, T.T. Narendran.***CLOVES: A cluster-and-search heuristic to solve.*
31. **Stefan Ropke *, David Pisinger.***A unified heuristic for a large class of Vehicle, DIKU—Department of Computer Science, University of Copenhagen, Universitetsparken 1, DK-2100 Copenhagen Ø, Denmark.*
32. **Shaw, P.***Using constraint programming and local search methods to solve vehicle routing problems, in: Proceedings CP-98 (Fourth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming).* 1998.
33. **S. Ropke, D. Pisinger.***An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows, Technical Report 04/13, DIKU, University of Copenhagen.* 2004.
34. **Vigo, Paolo Toth Daniel.***The Vehicle Routing Problem.* Bologna, Italy : Universita degli Syudi di Bologna Italy, 2002.
35. **Cooper, M.C., Lambert, D.M., & Pagh, J.** 1997.

Ελληνική Βιβλιογραφία

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΜΑΡΙΝΑΚΗΣ/ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΥΓΔΑΛΑΣ