ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗ-ΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Υπολογιστική Διερεύνηση Μαθηματικού Υποδείγματος Βελτιστοποίησης με Εφαρμογή στην Βελτιστοποίηση Κόστους - Οφέλους Αγροτικής Παραγωγής

Βασίλης Κεφάλας

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Γιώργος Σταυρακάκης, Καθηγητής Π.Κ. (Επιβλέπων)

Μιχάλης Ζερβάκης, Καθηγητής Π.Κ. (Μέλος)

Στέλιος Ροζάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Κ. (Μέλος)

Χανιά, Φεβρουάριος 2020

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των προϋποθέσεων για τη λήψη του πτυχίου από το Πολυτεχνείο Κρήτης, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών.

Θα ήθελα αρχικά να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Γιώργο Σταυρακάκη καθώς και στον κ. Στέλιο Ροζάκη για την υπομονή που έδειξαν και την βοήθεια τους.

Περισσότερο από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω όμως την οικογένεια μου για τις θυσίες που έκαναν γιατί χωρίς αυτές η απόκτηση ενός πτυχίου θα ήταν δύσκολη και τέλος τους στενούς μου φίλους για όλες τις στιγμές που μοιραστήκαμε κατά την διάρκεια των σπουδών μας.

Περίληψη

Οι αγροοικονομολόγοι-αναλυτές κατασκευάζουν αγροοικονομικά μαθηματικά υποδείγματα (μοντέλα) προσπαθώντας να αναπαραστήσουν όσο καλύτερα μπορούν την οικονομική πραγματικότητα των παραγωγών ώστε να μελετήσουν τις επιλογές τους και να τους συμβουλέψουν. Στην πιο απλή μορφή τα υποδείγματα αυτά έχουν στόχο να βρουν τον καλύτερο τρόπο που πρέπει ένας αγρότης να κατανείμει τους πόρους του ώστε να βελτιστοποιήσει μία συνάρτηση χρησιμότητας του. Απώτερος σκοπός του αναλυτή που κατασκευάζει ένα τέτοιο υπόδειγμα είναι να μπορεί να αναπαράγει τις πραγματικές αποφάσεις που έχει πάρει ένας αγρότης σε επίπεδο αγρού ώστε το υπόδειγμα να θεωρείται αξιόπιστο. Αν ένα υπόδειγμα ρυθμίζεται και θεωρείτε δηλαδή αξιόπιστο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή σεναρίων αγροτικής πολιτικής και να εξετάσουμε τις αντιδράσεις των παραγωγών σε αυτές τις αλλαγές.

Ο Θετικός Μαθηματικός Προγραμματισμός είναι μία μέθοδος που χρησιμοποιούμε για να βαθμονομήσουμε υποδείγματα γεωργικών δραστηριοτήτων παραγωγής. Ο ΘΜΠ χρησιμοποιεί παρατηρήσεις για μέσα κόστη και κέρδη από δεδομένα σε εθνικό επίπεδο για να βαθμονομήσει μία μη γραμμική συνάρτηση κόστους. Στην παρούσα διπλωματική ξεφεύγουμε από τα στενά πλαίσια του κλασικού γραμμικού υποδείγματος του ΘΜΠ και ενσωματώνουμε στο υπόδειγμα τον κίνδυνο μέσω της «θεωρίας *αναμενόμενης απόδοσης-διακύμανσης*» (*mean-variance analysis* – $E - V$) που στηρίζεται στην θεωρία χαρτοφυλακίου (portfolio theory). Το κριτήριο $E - V$ που χρησιμοποιούμε υποθέτει πως η επιλογή καλλιεργειών εκ μέρους του παραγωγού εξαρτάται από την απόδοση (αναμενόμενο κέρδος) εναλλακτικών παραγωγικών σχεδίων αλλά και από τη διακύμανση αυτής, η οποία ερμηνεύεται ως ένα μέτρο του κινδύνου που αντιμετωπίζει ο παραγωγός. Πρόκειται για πολύπλοκη εφαρμογή της μεθόδου του ΘΜΠ που έχει εξειδικευθεί μαθηματικά σε επιστημονικές δημοσιεύσεις. Συγκεκριμένα με την διαδικασία του ΘΜΠ επιτυγχάνεται η αναπαραγωγή των παρατηρήσιμων τιμών του έτους βάσης, η ανάκτηση του πραγματικού πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης και του πραγματικού διανύσματος κόστους αξιοποιώντας το κριτήριο της μέγιστης εντροπίας. Το αντικείμενο της παρούσας πτυχιακής αφορά στη διερεύνηση του υπολογιστικού μέρους του υποδείγματος της μέγιστης εντροπίας, την διατύπωση συνολικά του υποδείγματος σε εναλλακτικό λογισμικό (MATLAB), την επίλυση για ικανό αριθμό γεωργικών επιχειρήσεων και έλεγχο για την αποτελεσματικότητα της βαθμονόμησης σε κάθε μια από αυτές. Έχει παραδοθεί η μαθηματική εξειδίκευση του υποδείγματος, η κωδικοποίηση του στο λογισμικό και η πλήρης ανάλυση των αποτελεσμάτων περιλαμβανομένης και της προσέγγισης των τιμών των μεταβλητών στην άριστη λύση στις αρχικές παρατηρήσεις. Έτσι το υπόδειγμα είναι επιχειρησιακά διαμορφωμένο για ανάλυση πολιτικής και λήψης αποφάσεων από την επιχείρηση.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Το οικονομικό πρόβλημα που μελετά η παρούσα διπλωματική συνοψίζεται στην έκφραση «ικανοποίηση των αναγκών με τους υπάρχοντες πόρους και μέσα». Δεδομένου ότι οι ανάγκες στις σύγχρονες κοινωνίες είναι πρακτικά απεριόριστες ενώ τα μέσα απεικονίζουν την κατάσταση των παραγωγικών πόρων και της τεχνολογίας και είναι περιορισμένα, εύκολα καταλαβαίνουμε γιατί ονομάζεται πρόβλημα. Για έναν μηχανικό η παραπάνω φράση στα εισαγωγικά και κατά συνέπεια το οικονομικό πρόβλημα μπορεί αυθόρμητα να μεταφραστεί σε πρόβλημα βελτιστοποίησης όπου ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί ή ελαχιστοποιηθεί ανάλογα με την περίπτωση η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (ή των αντικειμενικών συναρτήσεων) υπό περιορισμούς, με βασικούς αυτούς που αντιπροσωπεύουν την σπανιότητα των πόρων. Αυτό ισχύει για όλες τις οικονομικές δραστηριότητες, αλλά στο πλαίσιο αυτής της εργασίας θα επικεντρωθούμε στον αγροτικό τομέα.

Τα αγροοικονομικά μαθηματικά υποδείγματα (μοντέλα) στην πιο απλή τους μορφή, έχουν αντικειμενική συνάρτηση που στόχο έχει είτε τη μεγιστοποίηση του κέρδους των παραγωγών, είτε την ελαχιστοποίηση του κόστους. Οι περιορισμοί σε αυτά τα υποδείγματα αφορούν την διαθεσιμότητα σε πόρους της παραγωγής όπως γη, κεφάλαιο, μηχανολογικός εξοπλισμός ή εργάτες. Ο βασικός δηλαδή στόχος του υποδείγματος είναι να λύσει το πρωταρχικό πρόβλημα του αγρότη, που είναι να βρει τον τρόπο που πρέπει να κατανεμηθούν οι πόροι του ώστε να βελτιστοποιήσει μία συνάρτηση κέρδους/κόστους.

Συνήθως αυτά τα υποδείγματα έχουν στόχο να συμβουλέψουν τον παραγωγό να πάρει την βέλτιστη απόφαση και λέγονται μοντέλα συμπεριφοράς γιατί υποδεικνύουν το “δέον γενέσθαι” δηλαδή αυτό που πρέπει να γίνει για να επιτευχθεί ο στόχος (στην προκειμένη περίπτωση να μεγιστοποιηθεί το κέρδος). Στην πορεία τα υποδείγματα γεωργικής εκμετάλλευσης χρησιμοποιήθηκαν για εκτίμηση επιπτώσεων κάποιων μέτρων αγροτικής πολιτικής, αυτό είναι δυνατό αν συγκριθούν οι άριστες λύσεις για διαφορετικά σύνολα παραμέτρων, για παράδειγμα διαφορετικό ύψος επιδότησης με όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του υποδείγματος να μένουν ίδια. Με την εξέλιξη του λογισμικού και την ανάπτυξη των υπολογιστικών δυνατοτήτων οι αναλυτές μπορούν πλέον και σε προσωπικό υπολογιστή να “τρέξουν” μεγάλο αριθμό υποδειγμάτων που το καθένα από αυτά αντιστοιχεί σε μια μεμονωμένη φάρμα σε σύντομο χρόνο, σχεδόν αμελητέο αν τα υποδείγματα είναι γραμμικά. Έτσι μπορεί να γίνει ταυτόχρονη εκτίμηση επιπτώσεων μεταβολών στις τιμές ή σε μέτρα πολιτικής π.χ. επιδοτήσεις σε δεκάδες ή εκατοντάδες επιχειρήσεις (φάρμες ή μονάδες απόφασης για το μοντέλο) που μπορεί να αντιπροσωπεύουν και μια ολόκληρη γεωγραφική περιοχή. Η αγροτική πολιτική είναι πολύ σημαντική για την Ευρώπη, γιατί είναι ιστορικά ίσως η μόνη Κοινή πολιτική και δεσμευτική για τα κράτη-μέλη. Επομένως κάθε χώρα προσπαθεί να επηρεάσει και κάθε φορά που αλλάζει κάτι είναι αποτέλεσμα επίπονων διαπραγματεύσεων. Για αυτό το λόγο από τη δεκαετία του 90 και ύστερα πολλοί αναλυτές χρησιμοποιούν μοντέλα για να υπολογίσουν τις επιπτώσεις του ενός ή του άλλου μέτρου. Αυτά τα μοντέλα δεν είναι πλέον συμπεριφορικά δηλαδή υποστήριξης στην επιχείρηση για αναζήτηση του επικερδέστερου σχεδίου παραγωγής αλλά "θετικά" όπως ονομάζονται από τους οικονομολόγους ή οντολογικά, δηλαδή προσπαθούν να απεικονίσουν ή να προσεγγίσουν την πραγματικότητα και όχι να υποδείξουν αυτό που θα ήταν καλύτερο ή θα έπρεπε να γίνει (το δέον γενέσθαι).

Απώτερος σκοπός του αναλυτή που κατασκευάζει ένα τέτοιο υπόδειγμα (μοντέλο) είναι να μπορεί να αναπαράγει τις πραγματικές αποφάσεις που έχει πάρει ένας αγρότης για το πως θα κατανεμηθούν οι πόροι του στην γεωργική εκμετάλλευση (φάρμα) του. Ένα υπόδειγμα που ρυθμίζεται, δηλαδή καταφέρνει να αναπαράγει τις παρατηρήσιμες τιμές (εκτάσεις καλλιεργειών, παραγωγές) που έχουμε σε επίπεδο φάρμας για μία χρονιά (έτος βάσης) είναι αποδεκτό και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο ανάλυσης αγροτικής πολιτικής ή άσκησης σεναρίων.

Η κατασκευή αγροοικονομικών μαθηματικών υποδειγμάτων με δυνατότητα να «ρυθμιστούν» (ή βαθμονομηθούν), αναπαράγοντας τις παρατηρήσιμες τιμές που έχουμε για ένα έτος βάσης, είναι δύσκολο εγχείρημα ακόμα και για υποδείγματα καλά δομημένα και παραμέτρους θεωρητικά σωστές. Η διαδικασία της βαθμονόμησης περιλαμβάνει την χρήση μίας υποθετικής αντικειμενικής συνάρτησης και πραγματικών δεδομένων εισόδου από μία χρονιά βάσης τα οποία θα επιτυγχάνουν την εξαγωγή συγκεκριμένων παραμέτρων που θα οδηγούν το μοντέλο στην παραγωγή αποτελεσμάτων (τιμές των μεταβλητών στην άριστη λύση) που να προσεγγίζουν το δυνατόν περισσότερο τις παρατηρήσεις του έτους βάσης. Με αυτό εννοούμε ότι οι κατάλληλα επιλεγμένες παράμετροι βαθμονόμησης οδηγούν την υποθετική αντικειμενική συνάρτηση στο να δίνει άριστη λύση πανομοιότυπη με τις τιμές του έτους βάσης, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία υιοθετούμε τις αρχές του Θετικού Μαθηματικού Προγραμματισμού για την ρύθμιση του υποδείγματος. Ο Θ.Μ.Π., που είναι τα τελευταία χρόνια η πιο διαδεδομένη μέθοδος σε αυτό το πεδίο, υποθέτει ότι οι παρατηρήσεις που έχουμε για τις δραστηριότητες από το έτος βάσης είναι οι βέλτιστες και θεωρεί ότι το πρόβλημα της ρύθμισης-βαθμονόμησης προκύπτει από απαρατήρητη (άρρητη-έμμεση) πληροφορία (Howitt, 1995b) που επηρεάζει την οικονομική συμπεριφορά του αγρότη, είναι γνωστή μόνο σε αυτόν και μεταφράζεται σε προβλήματα μέτρησης των παραμέτρων, λανθασμένης εξειδίκευσης του υποδείγματος ή/και σε επιπλέον οριακά κόστη. Στην πρώτη φάση του ΘΜΠ εισάγονται οι περιορισμοί ρύθμισης που δεν επιτρέπουν στις μεταβλητές απόφασης να πάρουν τιμές μεγαλύτερες ή μικρότερες από τις παρατηρήσιμες τιμές του έτους βάσης. Η εφαρμογή αυτών των περιορισμών στοχεύει στην εύρεση του διανύσματος λ, των αντίστοιχων δυϊκών τιμών το οποίο περιέχει όλη την πληροφορία για τα τεκμαρτά κόστη ευκαιρίας των συντελεστών παραγωγής. Στην δεύτερη φάση αυτή η έμμεση-απαρατήρητη πληροφορία ενσωματώνεται στο μοντέλο με εισαγωγή ή επανεκτίμηση κάποιων μη γραμμικών όρων στην αντικειμενική συνάρτηση, ώστε το τελικό μη γραμμικό μοντέλο να αναπαράγει τις παρατηρήσεις μας χωρίς όμως τους περιορισμούς ρύθμισης.

Πρόσφατα οι Πετσάκος και Ροζάκης (2015) (Petsakos A., Rozakis S., 2015) πρότειναν σε ένα πλαίσιο ΘΜΠ μια εναλλακτική μέθοδο ρύθμισης για ένα αγροοικονομικό μαθηματικό υπόδειγμα που λαμβάνει με σαφή τρόπο υπόψη τον οικονομικό κίνδυνο. Σύμφωνα με αυτούς η στάση του αγρότη απέναντι στον κίνδυνο αποτελεί πιθανή αιτία αποτυχίας ρύθμισης του υποδείγματος για το λόγο αυτό ενσωματώνουνε στο υπόδειγμα τους τον κίνδυνο μέσω της «θεωρίας *αναμενόμενης απόδοσης-διακύμανσης*» (*mean-variance analysis* – $E-V$) που στηρίζεται στην θεωρία χαρτοφυλακίου (portfolio theory). Το κριτήριο $E-V$ που χρησιμοποιούν υποθέτει πως η επιλογή καλλιεργειών εκ μέρους του παραγωγού εξαρτάται από την απόδοση (αναμενόμενο κέρδος) εναλλακτικών παραγωγικών σχεδίων αλλά και από τη διακύμανση αυτής, η οποία ερμηνεύεται ως ένα μέτρο του κινδύνου που αντιμετωπίζει ο παραγωγός. Η λανθασμένη κατανομή του πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης και η ύπαρξη έμμεσων οριακών κοστών είναι ο λόγος που το υπόδειγμα αδυνατεί να «ρυθμιστεί» και προτείνουν την ανάκτηση του πραγματικού πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης και του διανύσματος κόστους με την διαδικασία του ΘΜΠ αξιοποιώντας το κριτήριο της μέγιστης εντροπίας.

Η προσέγγιση αυτή είναι μία πρωτότυπη προσπάθεια που φαίνεται ότι δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η υλοποίηση όμως του υποδείγματος πραγματοποιήθηκε με το λογισμικό GAMS και σε αρκετές περιπτώσεις έχει κάποια υπολογιστικά προβλήματα καθώς για να προσδιοριστούν οι παράμετροι του τελικού υποδείγματος με δεδομένο το μικρό αριθμό βαθμών ελευθερίας (μικρός αριθμός παρατηρήσεων σε σχέση με τις μεταβλητές που έχουμε να εκτιμήσουμε) χρησιμοποιείται ελαχιστοποίηση της μέγιστης εντροπίας ενός συστήματος. Συγκεκριμένα σε κάποιες περιπτώσεις παρατηρείται αδυναμία εύρεσης λύσεων στο πεδίο των πραγματικών αριθμών. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να αναλυθεί η διαδικασία επίλυσης και να αναπτυχθεί ο αλγόριθμος ώστε να αντιμετωπιστούν τα υπολογιστικά προβλήματα και να εξασφαλίσουμε ότι σε κάθε περίπτωση θα βρίσκεται τουλάχιστον ένας συνδυασμός παραμέτρων που θα επιλύουν το πρόβλημα. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε εναλλακτικό λογισμικό, στην προκειμένη περίπτωση το MATLAB.

Στο υπόδειγμα της εργασίας μας λοιπόν χρησιμοποιούμε δεδομένα από 48 φάρμες που για την κάθε μία ο αγρότης έχει να επιλέξει στην πραγματικότητα έως 4 εναλλακτικές καλλιέργειες. Η αρχική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μη γραμμική και συγκεκριμένα δευτέρου βαθμού η οποία περιλαμβάνει τον πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης V, ο οποίος προκύπτει από μέσους όρους σε εθνικό επίπεδο με βάση τους οποίους υπολογίζεται το προσδοκώμενο ακαθάριστο κέρδος και η διασπορά του. Για λόγους απλοποίησης χρησιμοποιείται μόνο ένας τεχνολογικός περιορισμός για την διαθέσιμη γη. Για την ρύθμιση του υποδείγματος ακολουθείται μία προσέγγιση του ΘΜΠ και μέσω αυτού πετυχαίνουμε την ακριβή ρύθμιση του υποδείγματος.

Σε πρώτη φάση κατασκευάζουμε το μοντέλο ορίζοντας την αντικειμενική συνάρτηση και τον περιορισμό της διαθέσιμης γης ενώ προσθέτουμε και τους περιορισμούς ρύθμισης οι οποίοι θα οδηγήσουν το μοντέλο να αναπαράγει τις παρατηρήσεις. Με τον αλγόριθμο επίλυσης fmincon λύνουμε το πρόβλημα και παίρνουμε τις δυϊκές τιμές λ για να υπολογίσουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης. Όπως είπαμε ο πίνακας V που κατασκευάζεται από τον αναλυτή και εισάγεται ως εξωγενής παράμετρος στο υπόδειγμα μπορεί να διαφέρει λιγότερο ή περισσότερο από τον πραγματικό πίνακα της εκμετάλλευσης S, ενώ το ίδιο ισχύει και για τα παρατηρούμενα οριακά κόστη. Το επόμενο βήμα (όπως στα κλασικά υποδείγματα ΘΜΠ) είναι η εκτίμηση μιας εναλλακτικής, μη γραμμικής (τετραγωνικής) συνάρτησης κόστους η οποία θα περιλαμβάνει τον πραγματικό πίνακα συνδιακύμανσης S και θα ενσωματώνει κάθε άγνωστο, μη παρατηρούμενο κόστος, το οποίο εκφράζεται από το δυϊκό διάνυσμα λ. Ο υπολογισμός τους γίνεται μέσω της εντροπίας εξισώνοντας τις συνθήκες πρώτης τάξης των 2 προβλημάτων. Τέλος το τελικό πρόβλημα λύνεται ξανά χωρίς τους περιορισμούς ρύθμισης ώστε να δούμε αν θα αναπαράγει τις παρατηρήσεις μας ώστε να αξιολογήσουμε την αξιοπιστία του.

Στο Κεφάλαιο 2 της διπλωματικής παρουσιάζουμε την έννοια των μαθηματικών υποδειγμάτων, πως αυτά εφαρμόζονται στην γεωργία και τις αρχές του γραμμικού προγραμματισμού. Στο Κεφάλαιο 3 αναλύεται η μέθοδος του Θετικού Μαθηματικού Προγραμματισμού και παρουσιάζονται τα στάδια της εφαρμογής του αλγορίθμου, ενώ ακολουθεί μια παρουσίαση της θεωρίας προσδοκώμενης χρησιμότητας και η σύνδεση της με υποδείγματα ΜΠ για την προτυποποίηση του οικονομικού κινδύνου. Στο Κεφάλαιο 4 αναλύεται μια εναλλακτική προσέγγιση του ΘΜΠ των Πετσάκο και Ροζάκη οι οποίοι ενσωματώνουν στο υπόδειγμα τους το κριτήριο του κινδύνου για να πετύχουν την ρύθμιση του υποδείγματος ενώ αναλύονται και τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης. Τέλος στο Κεφάλαιο 5 πραγματοποιείται μία σύνοψη της μεθοδολογίας και παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας.

2 Μαθηματικά υποδείγματα βελτιστοποίησης. Γραμμικό και Μη Γραμμικό υπόδειγμα

Η απλούστερη και ευρύτερα χρησιμοποιούμενη μορφή υποδειγμάτων Μαθηματικού Προγραμματισμού είναι τα Γραμμικά, στα οποία η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί αποτελούν γραμμικό συνδυασμό άγνωστων πραγματικών μεταβλητών που ονομάζονται «μεταβλητές απόφασης». Η γενική δομή των γραμμικών υποδειγμάτων μπορεί να περιγραφεί σαν ένα σύστημα από εξισώσεις που περιλαμβάνει μία γραμμική αντικειμενική συνάρτηση, την τιμή της οποίας θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε και έναν ή περισσότερους γραμμικούς περιορισμούς. Υποδείγματα ΜΠ που χρησιμοποιούν μη γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις ξεφεύγουν από τις κλασικές μεθόδους επίλυσης (π.χ. simplex) και ονομάζονται υποδείγματα μη γραμμικού προγραμματισμού (ΜΓΠ), ενώ βασίζονται σε ειδικούς αλγορίθμους για την εύρεση άριστης λύσης. Οι δύο επιστημονικές περιοχές που κυρίως χρησιμοποιείται παρόμοια μεθοδολογία είναι η διοίκηση επιχειρήσεων και η βιομηχανική μηχανική (Industrial engineering). Στο πεδίο της οικονομίας και διοίκησης τα μαθηματικά υποδείγματα επιχειρούν να προσδιορίσουν την άριστη κατανομή οικονομικών πόρων μεταξύ ανταγωνιστικών εναλλακτικών στο πλαίσιο ενός συστήματος. Παραδείγματα από την σκοπιά του μηχανικού που έχουν προτυποποιηθεί με Μ.Π είναι το πρόβλημα του ρομποτικού χεριού που ζητάμε την ελαχιστοποίηση του χρόνου που θέλει ένα ρομποτικό χέρι να πάει από ένα σημείο σε ένα άλλο, το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή, το πρόβλημα της κατανομής ν ηλεκτρονίων σε μια σφαίρα σε κατάσταση ισορροπίας και πολλά ακόμα.

2.1 Η γενική ιδέα του μαθηματικού υποδείγματος

Πολλές εφαρμογές των επιστημών χρησιμοποιούν μοντέλα. Ο όρος μοντέλο συνήθως χρησιμοποιείται για μία δομή η οποία έχει φτιαχτεί με σκοπό την παρουσίαση των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων και των λειτουργιών κάποιου αντικειμένου/προβλήματος. Μερικές φορές κάποια μοντέλα είναι πολύ συμπαγή και δεσμευτικά όπως ένα μοντέλο αεροσκάφους. Πιο συχνά όμως στην επιχειρησιακή έρευνα μας αφορούν τα αφηρημένα μοντέλα τα οποία θα είναι μαθηματικά με την έννοια ότι αλγεβρικοί συμβολισμοί θα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις εσωτερικές σχέσεις του αντικειμένου/προβλήματος που μοντελοποιούμε.

Το βασικό γνώρισμα λοιπόν ενός μαθηματικού μοντέλου στην επιχειρησιακή έρευνα είναι ότι περιέχει ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων όπως εξισώσεις, ανισώσεις και λογικές εξαρτήσεις που ανταποκρίνονται σε απτές σχέσεις του πραγματικού κόσμου όπως τεχνολογικές σχέσεις, περιορισμούς αγοράς ακόμα και φυσικούς νόμους. Υπάρχουν αρκετά κίνητρα στο να κατασκευάζουμε τέτοια μοντέλα όπως:

1. Η ίδια η διαδικασία του να διατυπώσουμε σταδιακά ένα πρόβλημα σε μορφή υποδείγματος (μοντέλου) συνήθως αποκαλύπτει σχέσεις που αρχικά δεν είναι προφανείς. Έτσι επιτυγχάνεται ακόμα καλύτερη κατανόηση του μοντέλου.
2. Το να αναλύουμε επίσης συνήθως μαθηματικά ένα μοντέλο μας δίνει την δυνατότητα να δούμε και να προτείνουμε ενέργειες που αλλιώς δεν θα μπορούσαμε να διακρίνουμε.
3. Με ένα μοντέλο τέλος είναι δυνατός ο πειραματισμός σε αντικείμενα και μοντέλα που πολλές φορές δεν είναι ούτε εφικτό ούτε επιθυμητό να πειραματιστούμε. Για παράδειγμα το να πειραματιστούμε με αντισυμβατικά οικονομικά μέτρα σε μία χώρα είναι παράλογο αν υπάρχει μεγάλη πιθανότητα καταστροφικής αποτυχίας ωστόσο αυτό θα ήταν αποδεκτό σε ένα μαθηματικό μοντέλο. Αντίστοιχα η διερεύνηση της υιοθέτησης νέας τεχνολογίας σε μια μικρή αγροτική επιχείρηση, είναι στρατηγική απόφαση που χρειάζεται αρκετά χρόνια για να αποσβεστεί, επομένως είναι σκόπιμο να εκτιμηθεί στο χαρτί πριν εφαρμοστεί στην πράξη γιατί μπορεί να αποφέρει αμελητέο ή και αρνητικό οικονομικό αποτέλεσμα

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι ένα μοντέλο στην πραγματικότητα καθορίζεται από τις σχέσεις που συμπεριλαμβάνει. Αυτές οι σχέσεις είναι σε μεγάλο βαθμό εξαρτώμενες από τα δεδομένα του μοντέλου. Ένα μοντέλο μπορεί δηλαδή να χρησιμοποιηθεί σε διαφορετικές περιστάσεις και με διαφορετικά δεδομένα όπως π.χ. κόστη, τεχνολογικοί συντελεστές και διαθεσιμότητα πόρων και να παραμείνει ουσιαστικά το ίδιο μοντέλο. Αυτή η επισήμανση δεν είναι βέβαια πάντα σωστή. Σαρωτικές αλλαγές στα δεδομένα μπορεί και να σημαίνουν αλλαγές και στις σχέσεις που το χαρακτηρίζουν οπότε και στο ίδιο το μοντέλο. (Williams, 2013)

2.2 Μαθηματικά υποδείγματα αριστοποίησης με εφαρμογές στη γεωργία

«Μεμονωμένα οι αγρότες πρέπει συνεχώς να λαμβάνουν αποφάσεις για το τι αγαθά να παράγουν και με ποια μέθοδο, σε ποια περίοδο του χρόνου και σε τι ποσότητες. Οι αποφάσεις που παίρνονται υπόκεινται στους κυρίαρχους φυσικούς και οικονομικούς περιορισμούς και συνήθως με την παρουσία και του σημαντικού παράγοντα της αβεβαιότητας-ρίσκου. Η αβεβαιότητα μπορεί να υπάρχει στις προβλέψεις για την απόδοση της σοδειάς, στα κόστη και στις τιμές, για κάθε διαφορετική αγροτική δραστηριότητα, στις απαιτήσεις των δραστηριοτήτων για πόρους και στις διαθέσιμες προμήθειες των πόρων.

Παραδοσιακά οι αγρότες βασίζονταν στην εμπειρία, στην διαίσθηση και σε συγκρίσεις δεδομένων με τους γειτονικούς αγρότες για να πάρουν τις αποφάσεις τους. Επίσημες τεχνικές κατάρτισης προϋπολογισμού και σχετικής οικονομικής ανάλυσης έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς σε θέματα αγροτικού μάνατζεμεντ και αυτές μπορούν να είναι χρήσιμες για αποφάσεις σε διαφορετικές περιστάσεις. Μόλις πρόσφατα και με τις τελευταίες εξελίξεις στους υπολογιστές και στα λογισμικά μαθηματικού προγραμματισμού ο σχεδιασμός αναπτύχθηκε ικανοποιητικά για εφαρμογή σε επίπεδο γεωργικής επιχείρησης σε πιο πολύπλοκες περιπτώσεις.

Ο σχεδιασμός αυτός μπορεί να υποστηρίξει τους αγρότες στο να υιοθετήσουν αποδοτικά σενάρια σε ένα νέο οικονομικό και τεχνολογικό περιβάλλον. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα αυτής της κανονιστικής-δεοντολογικής χρήσης του γραμμικού προγραμματισμού στην βιβλιογραφία. Απροσδόκητα ωστόσο τα μοντέλα βελτιστοποίησης που διατυπώνουν επαρκώς τους στόχους και τους περιορισμούς των αγροτών μπορούν συχνά να προβλέψουν με μεγάλη ακρίβεια τι θα κάνουν οι αγρότες. Αυτό είναι ιδιαιτέρως αληθές σε πιο προβλέψιμες καταστάσεις όπου οι αγρότες έχουν χρόνο να προσαρμοστούν στο οικονομικό και τεχνολογικό περιβάλλον. Αυτή ακριβώς η πιθανότητα πρόβλεψης των αγροτικών μοντέλων τα κάνει χρήσιμα για συμπεράσματα σε επίπεδο κλάδου με σκοπό την ανάλυση πολιτικής. Αυτό το αντικείμενο δηλαδή η ανάλυση πολιτικής είναι ιδιαίτερα αναπτυγμένο στην Ευρώπη γιατί η αγροτική πολιτική είναι μια από τις ελάχιστες κοινές ευρωπαϊκές πολιτικές και τα διάφορα κράτη μέλη έχουν ανάγκη τη συμβουλή των ειδικών για ενδεχόμενα μέτρα πολιτικής όταν βρίσκονται σε φάση διαπραγμάτευσης δηλαδή πριν αυτά εφαρμοστούν από τους τεχνοκράτες των Βρυξελλών.

Στην πιο απλή του μορφή ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μία μέθοδος για να προσδιορίσουμε την μεγιστοποίηση του κέρδους για έναν πιθανό συνδυασμό αγροτικών εγχειρημάτων που είναι εφικτά και ικανοποιούν ένα σύνολο από σταθερούς περιορισμούς. Οι πρώιμες εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού στον αγροτικό σχεδιασμό υπέθεταν ότι ο αγρότης συμπεριφέρεται με γνώμονα την μεγιστοποίηση του κέρδους με ορίζοντα μια καλλιεργητική περίοδο, και ένα πολύ συγκεκριμένο περιβάλλον (καμία αβεβαιότητα για τις σοδειές, τις τιμές κ.α.). Όπως θα δούμε υπάρχουν πολλές επακόλουθες εξελίξεις που επιτρέπουν την κατασκευή πιο ευέλικτων και ρεαλιστικών μοντέλων αλλά θα τις αφήσουμε για επόμενα κεφάλαια. Αυτό το κεφάλαιο έχει σκοπό μία εμβάθυνση στην δομή και τις λύσεις ενός ετήσιου ντετερμινιστικού μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού.

2.3 Ένα απλό μοντέλο

Για μία δεδομένη κατάσταση το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού απαιτεί τον προσδιορισμό:

1. Των εναλλακτικών αγροτικών δραστηριοτήτων, της μονάδας μετρησής τους, τις απαιτήσεις τους σε πόρους και οποιουδήποτε άλλου περιορισμού στην παραγωγή
2. Των περιορισμών των πάγιων συντελεστών παραγωγής (πόροι, μηχανικός εξοπλισμός, ιδιόκτητη γη) της φάρμας
3. Τις προβλέψεις για τα αναμενόμενα έσοδα αφού αφαιρεθούν οι μεταβλητές δαπάνες, δηλαδή το ακαθάριστο κέρδος.

Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα μαθηματικά παρουσιάζουμε την ακόλουθη μαθηματική σημειογραφία:

$\boldsymbol{X_j}$ = το μέγεθος/επίπεδο της j-οστής αγροτικής δραστηριότητας (καλλιέργειας), π.χ. η έκταση καλαμποκιού. Αν n είναι ο αριθμός των πιθανών δραστηριοτήτων τότε j=1...n.

$\boldsymbol{c_j}$ = το προβλεπόμενο ακαθάριστο κέρδος ανά μονάδα της j-οστής δραστηριότητας (π.χ. ευρώ ανα στρέμμα).

$\boldsymbol{a_{ij}}$ = η ποσότητα του i-οστού πόρου (π.χ. στρέμματα γης, μέρες εργασίας) που απαιτείται για να παράγουμε μία μονάδα της j-οστής δραστηριότητας. Αν m είναι ο αριθμός των πόρων τότε i=1...m.

$\boldsymbol{b_i}$ =η διαθέσιμη ποσότητα του i-οστού πόρου (π.χ. στρέμματα γης, μέρες εργασίας).

Με αυτήν την σημειογραφία το γραμμικό πρόβλημα μπορεί να γραφτεί ως:

$$Maximize\ \ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j * X_j \qquad (2.1)$$

Τέτοιο ώστε:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} * X_j \leq b_i\ , \qquad \text{i = 1 έως m} \qquad (2.2)$$

Και:

$$X_j \geq 0\ , \qquad \text{j = 1 έως n} \qquad (2.3)$$

Σε απλά λόγια το πρόβλημα είναι να βρούμε εκείνο το σχέδιο παραγωγής (σύνολο καλλιεργειών) που προσδιορίζεται ως ένα σύνολο που περιέχει το μέγεθος των δραστηριοτήτων (X_j, j=1…n) όπου αποδίδει το μεγαλύτερο δυνατό μικτό περιθώριο κέρδους (total gross margin) Z, και το οποίο δεν παραβιάζει κανέναν από τους περιορισμούς των πόρων (2.2) και δεν περιέχει καμία αρνητική τιμή για το ύψος των δραστηριοτήτων (2.3). Αυτό το πρόβλημα είναι γνωστό ώς το πρωτεύων γραμμικό πρόβλημα.

Το πρόβλημα που ορίζεται από τις εξισώσεις (2.1) έως (2.3) παρουσιάζεται και στον Πίνακα 2.1, όπου φαίνονται όλοι οι συντελεστές της αλγεβρικής μορφής του μοντέλου. Από σύμβαση αυτός ο τρόπος παρουσίασης ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού λέγεται μήτρα τεχνικών συντελεστών. Διάφορες συμβάσεις παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1. Πρώτον η εξίσωση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε λέγεται αντικειμενική συνάρτηση. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η αντικειμενική συνάρτηση είναι το μικτό περιθώριο κέρδους (εξίσωση 2.1), αλλά και άλλες αντικειμενικές συναρτήσεις είναι πιθανές. Δεύτερον οι περιορισμοί φαίνονται στις γραμμές και οι δραστηριότητες στις στήλες. Τρίτον οι διαθέσιμοι πόροι (σταθεροί παραγωγικοί συντελεστές), δηλαδή οι συντελεστές b_i είναι οι λεγόμενοι συντελεστές δεξιού μέλους (right hand side ή RHS) του προβλήματος αφού εκεί τοποθετούμε τους σταθερούς όρους. Όλοι έχουν καθοριστεί σαν μικρότερο ή ίσο (≤) περιορισμοί ωστόσο είναι πιθανό να υπάρχουν περιορισμοί ισότητας (=) ή μεγαλύτερο ή ίσο (≥). Η απαίτηση στην εξίσωση (2.3), οι δραστηριότητες X_j να μην είναι αρνητικές παίρνεται σαν δεδομένη και δεν φαίνεται στον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1: Μήτρα τεχνικών συντελεστών

Στήλες / Γραμμές	X_1	X_2	…	X_n	RHS
Αντικειμενική συνάρτηση	c_1	c_2	…	c_n	Maximize
Περιορισμοί πόρων:					
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	…	$a_{1,n}$	$\leq b_1$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	…	$a_{2,n}$	$\leq b_2$
…	…	…	…	…	…
m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	…	$a_{m,n}$	$\leq b_n$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την ιδέα πίσω από την σημειογραφία, στον Πίνακα 2.2 παρουσιάζεται ένα απλό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για μία μικρή υποθετική φάρμα σε μία υποθετική χώρα.

Πίνακας 2.2 Υποθετικό μοντέλο φάρμας γραμμικού προγραμματισμού

Στήλες / Γραμμές	Καλαμπόκι (ha)	Φασόλι (ha)	Σόργο (ha)	Φιστίκι (ha)	RHS
Αντικειμενική συνάρτηση (euro)	1372	1219	1523	4874	Maximize
Έκταση(ha)	1	1	1	1	≤5
Εργασία(μήνες)	1.42	1.87	1.92	2.64	≤16.5
Μουλάρια(μήνες)	1.45	1.27	1.16	1.45	≤10
Περιορισμοί αγοράς(τόνοι)	-	-	-	0.983	≤0.5

Κάθε χρονιά μπορούν να φυτευτούν 4 σπαρτά (καλαμπόκι, φασόλια, σόργο, φιστίκι) το καθένα από τα οποία έχει καθορισμένες τις ανά εκτάριο απαιτήσεις σε εργασία και μουλάρια. Για παράδειγμα η παραγωγή ενός εκταρίου καλαμποκιού απαιτεί 1,42 μήνες εργασίας και 1,45 μήνες χρήσης των μουλαριών. Στο σύνολο έχουμε έως 16,5 μήνες εργασίας ενδεχομένως διαθέσιμους και η εργασία παρέχεται κατά την διάρκεια της χρονιάς από τα μέλη της οικογένειας της υποθετικής αυτής φάρμας. Η οικογένεια διαθέτει επίσης ένα μουλάρι το οποίο μπορεί να προσφέρει τις υπηρεσίες στην φάρμα για 10 από τους 12 μήνες ενός έτους.

Τα ακαθάριστα κέρδη στην αντικειμενική συνάρτηση είναι παρόμοια για κάθε μονάδα (εκτάριο) καλαμποκιού, φασολιών και σόργου ωστόσο το φιστίκι είναι πολύ πιο κερδοφόρο με ακαθάριστο κέρδος 4.874 euro ανά εκτάριο. Δυστυχώς όμως ο αγρότης αντιμετωπίζει περιορισμούς στην αγορά του φιστικιού η οποία δεν του επιτρέπει να πουλάει πάνω από 0,5 τόνους φιστίκι τον χρόνο. Αυτός ο περιορισμός φαίνεται στην τελευταία σειρά του Πίνακα 2.2 όπου βλέπουμε ότι ένα εκτάριο αποδίδει 0,983 τόνους φιστίκι δηλαδή 0,983 τόνοι/εκτάριο. Εμείς μπορούμε να πουλήσουμε όμως 0,5 τόνους φιστίκι δηλαδή μπορούμε να καλλιεργήσουμε μέχρι 0,5/0,983 = 0,509 εκτάρια φιστίκι.

Αν στην υποθετική μας φάρμα θεωρήσουμε X_1=καλαμπόκι, X_2= φασόλια, X_3=σόργο και X_4=φιστίκι τότε η αλγεβρική αναπαράσταση του μοντέλου είναι η εξής:

$$\text{Max}imize\ \ Z = 1372 * X_1 + 1219 * X_2 + 1523 * X_3 + 4874 * X_4$$

Με περιορισμούς:

$$1.0 * X_1 + 1.0 * X_2 + 1.0 * X_3 + 1.0 * X_4 \leq 5.0$$

$$1.41 * X_1 + 1.87 * X_2 + 1.92 * X_3 + 2.64 * X_4 \leq 16.5$$

$$1.45 * X_1 + 1.27 * X_2 + 1.16 * X_3 + 1.45 * X_4 \leq 10.0$$

$$0.983 * X_4 \leq 0.5$$

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \geq 0$$

2.4 Υποθέσεις στον γραμμικό προγραμματισμό

Μία σειρά από υποθέσεις για την φύση της παραγωγικής διαδικασίας, τους πόρους και τις δραστηριότητες υπονοούνται στο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που παρουσιάστηκε στις εξισώσεις (2.1) έως (2.3).

1. Βελτιστοποίηση. Υποθέτουμε ότι μια κατάλληλη αντικειμενική συνάρτηση είτε μεγιστοποιείται είτε ελαχιστοποιείται. Στο παράδειγμά μας το μικτό περιθώριο κέρδους μεγιστοποιείται.
2. Ύπαρξη σταθερών όρων στο δεξί μέλος των περιορισμών. Τουλάχιστον ένας περιορισμός έχει μη μηδενικό συντελεστή στην δεξιά πλευρά.
3. Περατότητα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πεπερασμένος αριθμός δραστηριοτήτων και περιορισμών που λαμβάνουμε υπόψιν μας για την εξεύρεση της λύσης.
4. Ντετερμινισμός-Βεβαιότητα. Υποθέτουμε ότι όλοι οι συντελεστές $\boldsymbol{c_j}$, $\boldsymbol{a_{ij}}$, $\boldsymbol{b_i}$ στο μοντέλο είναι γνωστές εκ των προτέρων σταθερές.

5. Συνέχεια-Διαιρετότητα. Υποθέτουμε ότι οι πόροι μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τη διαθεσιμότητα να εκφράζεται σε συνεχείς μεταβλητές και οι δραστηριότητες να λαμβάνουν κλασματικές τιμές. Για παράδειγμα, στην άριστη λύση η έκταση του σιταριού να είναι 5,32 στρέμματα.
6. Ομοιογένεια. Υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες του ίδιου πόρου ή της ίδιας δραστηριότητας είναι όμοιες.
7. Προσεταιριστικότητα. Οι δραστηριότητες υποθέτουμε ότι είναι προσθετικές με την έννοια ότι όταν δύο ή παραπάνω χρησιμοποιούνται το τελικό αποτέλεσμα της παραγωγής είναι το άθροισμα των επιμέρους παραγωγών.
8. Αναλογικότητα. Το μικτό περιθώριο κέρδους και οι απαιτήσεις σε πόρους ανά δραστηριότητα θεωρούνται ως σταθερές ανεξάρτητα από το μέγεθος της δραστηριότητας που χρησιμοποιείται. Το σταθερό μικτό περιθώριο κέρδους ανά μονάδα δραστηριότητας σημαίνει μία ελαστική καμπύλη ζήτησης για το προϊόν και τελείως ελαστική προσφορά των μεταβλητών εισροών (δηλαδή επειδή μια φάρμα είναι πολύ μικρή για να επηρεάσει τους μισθούς των εργατών, ο συντελεστής αμοιβής χειρωνακτικής εργασίας είναι σταθερός για οποιαδήποτε ποσότητα ζητηθεί, άρα η καμπύλη προσφοράς εργασίας είναι τελείως ελαστική). Σταθερές απαιτήσεις σε πόρους ανά μονάδα δραστηριότητας είναι ισοδύναμες με μία συνάρτηση παραγωγής Leontief.

Οι υποθέσεις της προσεταιριστικότητας και της αναλογικότητας μαζί ορίζουν ουσιαστικά την γραμμικότητα των δραστηριοτήτων και επίσης ορίζουν γραμμικές καμπύλες ίσου κόστους μεταξύ δραστηριοτήτων. Ίσως το πιο σημαντικό όμως είναι ότι οδηγούν σε ένα συνολικό σχεδιασμό συσχετίζοντας μία τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και τους σταθερούς περιορισμούς $\boldsymbol{b_i}$ όπου έχουν σταθερές οικονομίες κλίμακας. Μπορούμε να γράψουμε αυτή την σχέση σαν $Z = f(b)$, και σταθερές οικονομίες κλίμακας σημαίνει ότι αν όλοι οι διαθέσιμοι πόροι $\boldsymbol{b_i}$ αυξηθούν, από ένα συντελεστή k τότε και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται κατά k. Συγκεκριμένα $f(kb) = kf(b) = kZ$.

Αφού $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j * X_j$

και οι συντελεστές $\boldsymbol{c_j}$ είναι σταθεροί συνεπάγεται ότι:

$$kZ = \sum_{j=1}^{n} c_j * (k\,X_j)$$

Για παράδειγμα αν οι προμήθειες σε όλους τους πόρους διπλασιαστούν τότε θα διπλασιαστούν και τα μεγέθη των δραστηριοτήτων στην βέλτιστη λύση όπως και η τιμή της Z στην βέλτιστη λύση. Επειδή τα υποδείγματα ΓΠ περιλαμβάνουν μόνο γραμμικές σχέσεις αυτό συνεπάγεται σταθερές οικονομίες κλίμακας.

2.5 Δυϊκότητα

Το πρωτεύων πρόβλημα όπως ορίστηκε παραπάνω στις εξισώσεις (2.1) – (2.3) μπορεί να βοηθήσει έναν αγρότη έτσι ώστε να αποφασίσει ποιες καλλιέργειες να επιλέξει και πόσο θα πρέπει να παραγάγει εάν επιθυμεί να μεγιστοποιήσει το μικτό περιθώριο κέρδους (ή το ακαθάριστο κέρδος). Επιπλέον αυξήσεις στο μικτό περιθώριο κέρδους είναι δυνατές μόνον εάν ο αγρότης μπορεί να αποκτήσει επιπρόσθετες μονάδες των προκαθορισμένων πόρων. Αυτό γεννά μια πολύ σημαντική ερώτηση: μέχρι πόσο πρέπει να είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο αγρότης έτσι ώστε να νοικιάσει/αγοράσει μια επιπλέον μονάδα κάποιου πόρου. Προφανώς και θα επιθυμεί να αποφύγει να πληρώσει τόσα πολλά αν στη συνέχεια θα χάσει τα χρήματα. Από την άλλη όμως εάν υποτίμησε τους πόρους του, πιθανώς να οδηγηθεί να αποκτήσει λιγότερους πόρους από όσους θα μπορούσε να χρησιμοποιεί επικερδώς. Εάν οι επιπρόσθετες μονάδες των προκαθορισμένων πόρων χρησιμοποιούνται και έχουμε αύξηση κέρδους, τότε πρέπει να υπάρχει μία μοναδική αξία που μπορεί να αντιστοιχιστεί σε κάθε ξεχωριστό πόρο. Από την οικονομική θεωρία είναι γνωστό ότι αυτή η τιμή ορίζεται ως οριακή αξία προϊόντος. Στη βιβλιογραφία του γραμμικού προγραμματισμού αυτές οι τιμές ονομάζονται σκιώδεις ή δυϊκές τιμές.

Είναι δυνατόν ένα γραμμικό μοντέλο προγραμματισμού να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση των βέλτιστων σκιωδών τιμών των προκαθορισμένων πόρων. Αν υποθέσουμε, ότι το λ_i είναι η σκιώδης τιμή του i-οστού σταθερού συντελεστή (πόρου) τότε ένα σχετικό πρόβλημα με τις εξισώσεις (2.1) - (2.3) μπορεί να οριστεί ως:

$$\text{Minimize} \quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i * \lambda_i \qquad (2.4)$$

Τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} * \lambda_i \geq c_j , \qquad \text{j = 1 έως n} \qquad (2.5)$$

Και

$$\lambda_i \geq 0 , \qquad \text{i = 1 έως m} \qquad (2.6)$$

Με άλλα λόγια, επιζητούμε να αναθέσουμε τις σκιώδεις τιμές στους πόρους b_i, που θα παράγουν τη μικρότερη δυνατή τιμή W για τη συνολική διαθέσιμη ποσότητα των υφιστάμενων πόρων. Αυτή η ελαχιστοποίηση αποφεύγει το πρόβλημα της υπερεκτίμησης των πόρων. Προκειμένου να μην ανατεθεί πολύ χαμηλή τιμή ενοικίασης στους πόρους, η εξίσωση (2.5) απαιτεί η συνολική αξία των πόρων που χρησιμοποιούνται από μία μονάδα κάθε δραστηριότητας X_j, j=1 έως n, να μην είναι μικρότερη από το ακαθάριστο χρηματικό ποσό c_j που κερδήθηκε από αυτή τη δραστηριότητα. Οι ανισότητες στην εξίσωση (2.6) επιβάλλουν την αυτονόητη προϋπόθεση ότι οι σκιώδεις τιμές δεν δύναται να λάβουν αρνητικές τιμές.

Το μοντέλο που ορίζουν οι εξισώσεις (2.4) έως (2.6) είναι στενά συνδεδεμένο με το πρωτεύων πρόβλημα των εξισώσεων (2.1) έως (2.3). Για την ακρίβεια ονομάζεται το δυϊκό πρόβλημα του μοντέλου των (2.1) έως (2.3).

Ο Πίνακας 2.3 απεικονίζει το δυϊκό πρόβλημα για την υποθετική φάρμα του Πίνακα 2.2. Σημείωση πως οι συντελεστές του Πίνακα 2.3 είναι οι αντίστροφοι αυτών του Πίνακα 2.2, δηλαδή οι γραμμές και οι στήλες του Πίνακα 2.2 μετατρέπονται σε στήλες και γραμμές του Πίνακα

2.3, αντίστοιχα. Επομένως υπάρχει μια συμμετρική σχέση ανάμεσα στα δύο προβλήματα. Επίσης, και οι δύο Πίνακες περιέχουν ακριβώς τα ίδια δεδομένα (παραμέτρους). Αυτές οι συσχετίσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού προβλήματος, δεν γίνονται απλά τυχαία, και στην πραγματικότητα υπάρχει μια αυστηρή σύνδεση μεταξύ των δύο προβλημάτων, γεγονός που είναι πολύ σημαντικό για τη θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού.

Το πρωτεύων πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού πάντα ικανοποιεί το θεώρημα του *Euler*, το οποίο λέει ότι η τιμή του αποτελέσματος πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα όλων των τιμών εισόδου, όταν οι τιμές εισόδου εκτιμώνται στο πραγματικό κέρδος. Αν οι σταθεροί πόροι εκτιμηθούν στην οριακή τιμή προϊόντος, η συνολική αξία/τιμή ενοικίασης που έχει δοθεί στις τιμές εισροών της φάρμας, $W = \sum_i b_i \lambda_i$ πρέπει να ισούται με τη συνολική αξία/τιμή προϊόντος $Z = \sum c_j X_j$. Για τις βέλτιστες λύσεις του ζεύγους των πρωταρχικών και δυϊκών προβλημάτων, πρέπει $Z^* = W^*$, όπου ο αστερίσκος υποδηλώνει τις βέλτιστες τιμές. Διαφορετικά διατυπωμένο η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος προβλήματος (2.1) είναι πάντα ίση με την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος (2.4).

Οι σκιώδεις τιμές λ_i, μερικές φορές αποκαλούνται και πολλαπλασιαστές *Lagrange*. Οι πολλαπλασιαστές *Lagrange* αρχικά εισήχθησαν προκειμένου να διευκολύνουν τη λύση ενός προβλήματος μεγιστοποίησης υπό περιορισμούς. Για παράδειγμα αν το πρόβλημα είναι:

$$\text{Max}imize\ Z = c_1 * X_1 + c_2 * X_2 + c_3 * X_3$$

Δεδομένου τα:

$$a_{11} * X_1 + a_{12} * X_2 + a_{13} * X_3 = b_1$$

$$a_{21} * X_1 + a_{22} * X_2 + a_{23} * X_3 = b_2$$

τότε ο *Joseph-Louis Lagrange* έδειξε πως η βέλτιστη λύση του είναι ίδια με τη λύση του παρακάτω προβλήματος όπου οι περιορισμοί και η αντικειμενική συνάρτηση έχουν ενσωματωθεί στην ίδια σχέση:

$$\begin{aligned}\text{Max } \mathcal{L} = \{\, c_1 * X_1 + c_2 * X_2 + c_3 * X_3 + \gamma_1(b_1 - a_{11} * X_1 - a_{12} * X_2 - a_{13} * X_3) \\ +\gamma_2(b_2 - a_{21} * X_1 - a_{22} * X_2 - a_{23} * X_3)\,\}\end{aligned}$$

Προς τιμήν του, η $\mathcal{L}$ ονομάστηκε εξίσωση *Lagrange* και οι μεταβλητές γ_i, αποκαλέστηκαν πολλαπλασιαστές *Lagrange*. Η αριθμητική λύση στο αναδιατυπωμένο πρόβλημα του *Lagrange* σίγουρα μπορεί να βρεθεί με μεθόδους διαφορικού λογισμού, δηλαδή παίρνοντας τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $\mathcal{L}$ και θέτοντάς τες ίσες με μηδέν.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_1} = c_1 - a_{11} * \gamma_1 - a_{21} * \gamma_2 = 0 \qquad (2.7\alpha)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2} = c_2 - a_{12} * \gamma_1 - a_{22} * \gamma_2 = 0 \qquad (2.7\beta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_3} = c_3 - a_{13} * \gamma_1 - a_{23} * \gamma_2 = 0 \qquad (2.7\gamma)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_1} = b_1 - a_{11} * X_1 - a_{12} * X_2 - a_{13} * X_3 = 0 \qquad (2.7\delta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_2} = b_2 - a_{21} * X_1 - a_{22} * X_2 - a_{23} * X_3 = 0 \qquad (2.7\varepsilon)$$

Η λύση των πέντε μεταβλητών $X_1,\ X_2,\ X_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ δίνεται από την ταυτόχρονη επίλυση των πέντε γραμμικών εξισώσεων.

Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί πως οι πέντε εξισώσεις μπορούν να αναλυθούν σε δύο υποσύνολα. Στο πρώτο υποσύνολο μία συνάρτηση είναι περιττή και το σύνολο είναι υπερπροσδιορισμένο. Το δεύτερο υποσύνολο υποπροσδιορίζεται με αποτέλεσμα να μην υπάρχει μια μοναδική λύση. Γενικά, το τελικό αποτέλεσμα, θα προκύψει με τη μέθοδο *Lagrange* αν ο αριθμός των περιορισμών είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών.

Οι εξισώσεις (2.7α) έως (2.7γ) είναι ισοδύναμες με τους δυϊκούς περιορισμούς της εξίσωσης (2.5), όταν οι τελευταίοι ισχύουν σαν ισότητα. Παρομοίως, οι εξισώσεις (2-7δ) και (2.7ε) είναι ισοδύναμες με τους πρωτεύοντες περιορισμούς της εξίσωσης (2.2), όταν το αριστερό μέλος ισούται με το δεξί και γίνονται ισότητα. Διαισθητικά, αυτές οι εξισώσεις υποδεικνύουν-προτείνουν ότι στη βέλτιστη λύση τα γ_i των εξισώσεων (2.7α) και (2.7γ) είναι οι δυϊκές τιμές ή σκιώδεις τιμές, κάτι που στην πραγματικότητα είναι και γεγονός.

Έπειτα από ενάμιση αιώνα, οι *Harold Kuhn* και *Albert W. Tucker* γενίκευσαν τη μέθοδο *Lagrange* έτσι ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί και σε προβλήματα με άνισους περιορισμούς. Χωρίς πολλές μαθηματικές εξηγήσεις και λεπτομέρειες, τα κύρια αποτελέσματά τους μπορούν να διατυπωθούν συνοπτικά ως εξής. Ανέπτυξαν συνθήκες που μπορούν να χαρακτηρίσουν την λύση στο πρωτεύων πρόβλημα (2.1) έως (2.3) ως ακολούθως.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial X_j} = c_j - \textstyle\sum_i a_{ij}\gamma_\iota \leq 0 \qquad (2.8)$$

και

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \gamma_\iota} = b_i - \textstyle\sum_j a_{ij}X_j \geq 0 \qquad (2.9)$$

Όπου $\mathcal{L}_P$ είναι η συνάρτηση *Lagrange του* πρωτεύοντος προβλήματος:

$$\mathcal{L}_P = \sum_j c_j X_j + \sum_i \gamma_\iota \left(b_i - \sum_j a_{ij}X_j \right)$$

Ομοίως η συνάρτηση *Lagrange του* δυϊκού προβλήματος (2.4) έως (2.6) είναι:

$$\mathcal{L}_D = \sum_i b_i \lambda_i + \sum_j \mu_j \left(c_j - \sum_i a_{ij}\lambda_i \right)$$

Όπου μ_j, j=1 έως n είναι οι νέοι πολλαπλασιαστές *Lagrange* και οι σχετικές συνθήκες *Kuhn-Tucker* για το δυϊκό πρόβλημα είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \mu_j} = c_j - \sum_i a_{ij}\lambda_\iota \leq 0 \qquad (2.10)$$

και

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \lambda_\iota} = b_i - \sum_j a_{ij}\mu_j \geq 0 \qquad (2.11)$$

Είναι ξεκάθαρο ότι οι εξισώσεις (2.8) και (2.10) συνδέονται στενά, όπως και οι (2.9) και (2.11). Στην πραγματικότητα, αν γ_i=λ_i, για κάθε i και μ_j=X_j, για κάθε j, τότε οι συνθήκες Kuhn-Tucker θα είναι ίδιες και για τα δυο προβλήματα. Δεδομένου ότι οι βέλτιστες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης και του πρωτεύοντος και του δυϊκού προβλήματος είναι ίδιες, το γεγονός ότι οι αντίστοιχες συνθήκες *Kuhn-Tucker* παρουσιάζονται ίδιες είναι αναμενόμενο. Επίσης το πρώτο ζεύγος-σύνολο (set) των συνθηκών *Kuhn-Tucker* για το πρωτεύων (2.8) στην πραγματικότητα είναι το σύνολο περιορισμών του δυϊκού και αντιστρόφως.

Επομένως προκύπτει ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα: αν έπειτα από την επίλυση ενός πρωτεύοντος προβλήματος οι πολλαπλασιαστές Lagrange (γ_i) μπορούν να εξαχθούν από τη λύση τότε αυτές θα είναι οι οριακές ή σκιώδεις τιμές (λ_i) των σταθερών και προκαθορισμένων πόρων της φάρμας. Αυτή η πληροφορία δηλαδή θα είναι διαθέσιμη χωρίς να χρειαστεί να επιλυθεί το δυϊκό πρόβλημα ξεχωριστά.

Παρομοίως, αν λυθεί το δυϊκό πρόβλημα, τότε οι πολλαπλασιαστές *Lagrange* (το μ_j) θα είναι οι βέλτιστες τιμές των επιπέδων δραστηριότητας (το X_j) του πρωτεύοντος προβλήματος. Και πάλι είναι αρκετή η επίλυση ενός μόνο προβλήματος για την εύρεση των λύσεων τόσο του πρωτεύοντος όσο και του δυϊκού προβλήματος.

Εκτός από τη περιγραφή των σχέσεων πρωτεύοντος–δυϊκού προβλήματος, συχνά οι συνθήκες *Kuhn-Tucker* αποτελούν σημαντικό ενδιαφέρον και από μόνες τους, γιατί αποτελούν την κατασκευή ενός ζεύγους-συνόλου (set) ταυτόχρονων εξισώσεων που χαρακτηρίζουν τη βέλτιστη λύση. Στην ολοκληρωμένη τους μορφή δημιουργούνται ως εξισώσεις και όχι ως ανισώσεις, είναι μη-γραμμικές και είναι πολύ περισσότερες από ότι οι περιορισμοί του πρωτεύοντος προβλήματος, άρα κανονικά δεν επιχειρείται η χρήση αυτών των συνθηκών για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Εάν ωστόσο, χρειασθεί να μελετηθούν αναλυτικά οι ιδιότητες ενός μέρους ή όλου του μοντέλου, οι συνθήκες των *Kuhn-Tucker* μπορούν να φανούν χρήσιμες.» (Peter B. R. Hazell , R. D. Norton, 1987)

3 Ρύθμιση υποδειγμάτων βελτιστοποίησης και Θετικός Μαθηματικός Προγραμματισμός

Πριν χρησιμοποιήσουμε ένα υπόδειγμα ΜΠ σαν εργαλείο για να πάρουμε αποφάσεις επιχειρηματικού ή πολιτικού χαρακτήρα ελέγχουμε πρώτα την αξιοπιστία του (έλεγχος αξιοπιστίας - validation). Η πιο συνηθισμένη μέθοδος είναι ο «έλεγχος της παραγωγής» (production test) όπου τα αποτελέσματα μας (άριστες τιμές μεταβλητών) συγκρίνονται με τις παρατηρήσεις (αρχικές τιμές μεταβλητών) κατά το έτος βάσης. Ένα υπόδειγμα που αδυνατεί να αναπαράγει σε ικανοποιητικό βαθμό τις παρατηρήσεις του έτους βάσης δε θεωρείται αξιόπιστο ως εργαλείο ανάλυσης πολιτικής. Όταν ο έλεγχος αξιοπιστίας αποτυγχάνει επιβάλλεται η «ρύθμιση» ή «βαθμονόμηση» (calibration) του υποδείγματος. Σαν ρύθμιση εννοούμε την «τροποποίηση» του υποδείγματος έτσι ώστε τα αποτελέσματα του μετά τη βελτιστοποίηση να ταυτίζονται με τις παρατηρήσεις μας ή τουλάχιστον να τις προσεγγίζουν ικανοποιητικά. Ένας τρόπος ρύθμισης είναι η χρήση μη γραμμικών αντικειμενικών συναρτήσεων, οι οποίες αφορούν είτε σε ενδογενή προσδιορισμό των τιμών ορισμένων ή όλων των παραγόμενων προϊόντων π.χ. (Bruce McCarl, Thomas Spreen, 1980), είτε στην εξειδίκευση της συμπεριφοράς των παραγωγών απέναντι στον κίνδυνο λόγω αβεβαιότητας τιμών και αποδόσεων π.χ. (Hardacker J. B., Huirne J. R., Anderson J. R. & Lien G., 2004). Τα παραπάνω συνεπάγονται τροποποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης με τους περιορισμούς να παραμένουν αμετάβλητοι.

Ο Μ.Π. είναι χρήσιμο εργαλείο για αποφάσεις σε επίπεδο αγρού και όταν έχουμε διαθέσιμα δεδομένα, αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις δεν προσεγγίζει καν τις ετήσιες παρατηρήσεις. Ο Howitt (Howitt, 1995b) προτείνει με τον Θετικό Μαθηματικό Προγραμματισμό ότι αν ένα γραμμικό μοντέλο δεν προσεγγίζει τις παρατηρήσεις (με δεδομένους όλους τους γραμμικούς περιορισμούς που είναι λογικό να συμπεριληφθούν και τεκμηριώνονται εμπειρικά) τότε για να επιτύχουμε επαλήθευση ίσως είναι αναγκαίο να εισάγουμε μη γραμμικότητα της αντικειμενικής συνάρτησης σε μία τουλάχιστον από τις δραστηριότητες (μεταβλητές). Ο Θ.Μ.Π. «σταθμίζει» (ρυθμίζει) τα γραμμικά μοντέλα σχεδόν ή ακριβώς στις παρατηρήσεις μας για τις δραστηριότητες σε όρους απόδοσης της παραγωγής, χρήσης πόρων, τιμών αντικειμενικής συνάρτησης και δυϊκών τιμών.

3.1 Ανάλυση της μεθόδου ΘΜΠ

Στην αρχική του δημοσίευση, ο Howitt (1995b) αποδεικνύει πως μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ακριβή ρύθμιση του υποδείγματος είναι η μη γραμμικότητα της αντικειμενικής συνάρτησης:

«Αν ο αριθμός των παρατηρούμενων μη μηδενικών μεταβλητών απόφασης ξεπερνά τον αριθμό των δεσμευτικών περιορισμών, τότε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη μεγιστοποίηση

του κέρδους στα παρατηρούμενα επίπεδα είναι η μη γραμμικότητα της αντικειμενικής συνάρτησης για κάποιες από τις μεταβλητές απόφασης» (Howitt, 1995b, p. 339).

Ως γνώστης της διαδικασίας γεωργικής παραγωγής, ο συγγραφέας παρατήρησε ότι επικερδείς θεωρητικά καλλιέργειες δεν καλύπτουν το σύνολο της καλλιεργήσιμης έκτασης στη φάρμα. Μετά από αναζήτηση διαπίστωσε ότι συνήθως ο λόγος ήταν ότι οι δαπάνες καλλιέργειας και οι αποδόσεις δεν είναι ανεξάρτητες αλλά στην πραγματικότητα αυξάνουν με την αύξηση της έκτασης. Στην αρχή ένα φυτό καλλιεργείται στο τεμάχιο με το καταλληλότερο έδαφος, αν θέλουμε να επεκτείνουμε την καλλιέργεια πρέπει να καλλιεργήσουμε σε λιγότερο κατάλληλο έδαφος για το συγκεκριμένο φυτό κλπ. Επομένως το κόστος ή η απόδοση δεν είναι μια απλή σταθερά παράμετρος αλλά ενδογενής μεταβλητή με την έννοια ότι η τιμή της είναι συνάρτηση της έκτασης, άρα υπάρχει μη γραμμικότητα. Οι αναλυτές συνήθως αναζητούν την μη γραμμικότητα στη συνάρτηση μεταβλητού κόστους με τον μετασχηματισμό της απλής γραμμικής σχέσης σε μια αντίστοιχη μη γραμμική, που εξειδικεύεται μέσω μιας διαδικασίας τριών βημάτων που θα αναλυθούν παρακάτω.

Η πρώτη φάση του ΘΜΠ στοχεύει στον υπολογισμό ενός διανύσματος δυϊκών τιμών το οποίο στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της νέας μη γραμμικής συνάρτησης μεταβλητού κόστους. Η μαθηματική διατύπωση της πρώτης φάσης του ΘΜΠ διαφέρει από την αντίστοιχη του απλού προβλήματος ως προς έναν επιπλέον περιορισμό «ρύθμισης» που δεν επιτρέπει στις μεταβλητές απόφασης να πάρουν τιμές μεγαλύτερες από εκείνες που παρατηρούνται κατά το έτος βάσης. Η χρήση του περιορισμού επιτρέπει έτσι την εύρεση των αντίστοιχων δυϊκών τιμών οι οποίες αντιπροσωπεύουν ένα είδος «μη παρατηρούμενης» πληροφορίας που είναι διαθέσιμη μόνο στον παραγωγό και παίζει σημαντικό ρόλο στην επιλογή του κατάλληλου σχεδίου παραγωγής, ενώ παράλληλα αποτελεί τη βάση της διαδικασίας μετασχηματισμού της αρχικής γραμμικής συνάρτησης μεταβλητού κόστους σε μη γραμμική.

Έτσι, το αρχικό πρόβλημα με τον επιπλέον περιορισμό ρύθμισης στην πρώτη φάση του ΘΜΠ διατυπώνεται ως:

$$\max_{x \geq \mathbf{0}} \; \boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x}$$

Υπό περιορισμούς: $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ $\quad [\boldsymbol{\theta}]$ $\quad$ ***(3.1)***

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^{*}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}) \qquad [\boldsymbol{\lambda}] \qquad \textbf{(3.2)}$$

Όπου $\mathbf{Z}$ το ακαθάριστο κέρδος της εκμετάλλευσης του παραγωγού, $\boldsymbol{r}$ το διάνυσμα $(\mathrm{I} \times 1)$ της ακαθάριστης προσόδου κάθε δραστηριότητας, $\boldsymbol{c}$ το διάνυσμα $(\mathrm{I} \times 1)$ του μεταβλητού κόστους κάθε δραστηριότητας, $\mathbf{x}$ το διάνυσμα $(\mathrm{I} \times 1)$ του επίπεδου παραγωγής κάθε δραστηριότητας (π.χ. έκταση), $\mathbf{A}$ ο πίνακας $(\mathrm{M} \times \mathrm{I})$ των τεχνολογικών συντελεστών, $\boldsymbol{b}$ το διάνυσμα $(\mathrm{M} \times \mathrm{I})$ της διαθέσιμης ποσότητας των συντελεστών παραγωγής ενώ οι δυϊκές τιμές που σχετίζονται με τον περιορισμό των συντελεστών παραγωγής (3.1) δίνεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}$ μεγέθους$(\mathrm{M} \times$ θους$(\mathrm{M} \times \mathrm{I})$. Στην ανισότητα (3.2), το διάνυσμα $\mathbf{x}^{*}$ $(I \times 1)$ παριστάνει το παρατηρούμενο επίπεδο παραγωγής κάθε i δραστηριότητας $(i \in I)$, ενώ το ε είναι ένας πολύ μικρός αριθμός (π.χ.

0.000001) που προστίθεται για να αποφευχθεί ο εκφυλισμός (degeneracy) του προβλήματος λόγω της γραμμικής εξάρτησης που υπό άλλες συνθήκες θα προέκυπτε μεταξύ του περιορισμού (3.2) και του περιορισμού για τη συνολική έκταση που συνήθως περιλαμβάνεται στην ανισότητα (3.1) (στην πιο απλή του μορφή, ο πίνακας $\mathbf{A}$ περιλαμβάνει μόνο τον περιορισμό για τη συνολική έκταση της εκμετάλλευσης: $\sum_i x_i \leq b_i$). Το διάνυσμα $\boldsymbol{\lambda}$, διαστάσεως $I \times 1$, αντιπροσωπεύει τις σκιώδεις τιμές για κάθε δραστηριότητα i που προκύπτουν από την εισαγωγή του περιορισμού (3.2). Οι Paris και Howitt (Quirino Paris, Richard E. Howitt, 1998) χρησιμοποιούν μια τετραγωνική συνάρτηση μεταβλητού κόστους και ερμηνεύουν το $\boldsymbol{\lambda}$ ως ένα διάνυσμα «διαφορικού» οριακού κόστους, το οποίο αθροιζόμενο με το $\mathbf{c}$ αποκαλύπτει το πραγματικό οριακό κόστος κάθε δραστηριότητας. Αυτό σημαίνει πως ο κάθε παραγωγός λαμβάνει αποφάσεις στηριζόμενος όχι στο «λογιστικό» κόστος παραγωγής αλλά στο αντίστοιχο οικονομικό, που περιλαμβάνει – εκτός από τις πραγματοποιούμενες δαπάνες – και το κόστος ευκαιρίας κάθε δραστηριότητας, το οποίο είναι γνωστό μόνο στον ίδιο τον παραγωγό και όχι στον αναλυτή. Γενικά μπορεί να λεχθεί πως το δυϊκό διάνυσμα $\boldsymbol{\lambda}$ ενσωματώνει οποιοδήποτε είδος μη παρατηρούμενης πληροφορίας, όπως προβλήματα εξειδίκευσης του αρχικού γραμμικού υποδείγματος, προσδοκίες σχετικά με τις τιμές των παραμέτρων και συμπεριφορά του παραγωγού απέναντι στον οικονομικό κίνδυνο.

Το διάνυσμα δραστηριοτήτων $\mathbf{x}$ μπορεί να επιμεριστεί στα διανύσματα $\mathbf{x}_N$ και $\mathbf{x}_B$ που παριστάνουν τις «επικερδείς» και τις «οριακές» (λιγότερο ή μη επικερδείς) δραστηριότητες, με διαστάσεις $N \times 1$ και $(I - N) \times 1$ αντίστοιχα. Η διάκριση αυτή σχετίζεται με το είδος των δεσμευτικών περιορισμών για κάθε δραστηριότητα. Ειδικότερα, οι προτιμώμενες (επικερδείς) δραστηριότητες που περιέχονται στο διάνυσμα $\mathbf{x}_N$ δεσμεύονται από τους περιορισμούς ρύθμισης (**Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**), ενώ για τις οριακές δραστηριότητες, δεσμευτικοί είναι οι περιορισμοί που αφορούν τη διαθεσιμότητα των συντελεστών παραγωγής (ανισότητα **Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**). Ανάλογα μπορούν να επιμεριστούν και οι υπόλοιποι παράμετροι τόσο του αρχικού γραμμικού προβλήματος. Ο επιμερισμός αυτός φανερώνει πως οι δυϊκές τιμές των περιορισμών ρύθμισης είναι θετικές για τις προτιμώμενες (επικερδείς) δραστηριότητες ($\boldsymbol{\lambda}_N > 0$) και μηδέν για τις οριακές ($\boldsymbol{\lambda}_B = 0$).

Η δεύτερη φάση του ΘΜΠ συνίσταται στην εκτίμηση μιας μη γραμμικής συνάρτησης μεταβλητού κόστους που θα αντικαταστήσει την αντίστοιχη γραμμική στο αρχικό πρόβλημα ΓΠ της πρώτης φάσης. Η πιο συνηθισμένη μορφή μη γραμμικής συνάρτησης μεταβλητού κόστους που συναντάται στη βιβλιογραφία είναι η τετραγωνική, η οποία ορίζεται ως:

$$C(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}$$

Όπου $\mathbf{v}$ είναι ένα $I \times 1$ διάνυσμα που αναπαριστά το γραμμικό όρο της συνάρτησης και $\mathbf{Q}$ ένας συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος $I \times I$ πίνακας, ο οποίος είναι είτε διαγώνιος είτε πλήρως ορισμένος με μη μηδενικά στοιχεία παντού. Το διάνυσμα του οριακού μεταβλητού κόστους, $\mathbf{MC}$, προκύπτει με παραγώγιση της συνάρτησης C ως προς $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{MC} = \boldsymbol{\nu} + \mathbf{Qx} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Από την εξίσωση (**Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**) είναι φανερό επίσης πως ο πίνακας $\mathbf{Q}$ αποτελεί τη δεύτερη παράγωγο της C ως προς $\mathbf{x}$. Σύμφωνα με τους Paris και Howitt (Quirino Paris, Richard E. Howitt, 1998), το διάνυσμα $\mathbf{MC}$, υπολογιζόμενο στο σημείο $\mathbf{x}^*$, αποτελεί το πραγματικό οριακό «οικονομικό» κόστος για τον παραγωγό κατά το έτος βάσης και πρέπει να ισούται με το άθροισμα του «λογιστικού» κόστους $\mathbf{c}$ και του τεκμαρτού (δηλαδή εκτιμημένο από την πρώτη φάση επίλυσης) κόστους ευκαιρίας $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\nu} + \mathbf{Qx}^* = \mathbf{c} + \boldsymbol{\lambda} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Η εκτίμηση των αγνώστων στοιχείων του διανύσματος $\boldsymbol{\nu}$ και του πίνακα $\mathbf{Q}$ βασίζεται στην εξίσωση (**Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**), η οποία αποτελεί ένα υποπροσδιορισμένο σύστημα I εξισώσεων και $2I$ ή $I + I(I+1)/2$ αγνώστων μεταβλητών, ανάλογα με τη μορφή του πίνακα $\mathbf{Q}$. Έτσι, στην περίπτωση του διαγώνιου πίνακα η εξίσωση (**Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**) μπορεί να γραφτεί αναλυτικά ως:

$$\begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_I^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_I \end{bmatrix}$$

Ή αλγεβρικά: $\nu_i + q_i x_i^* = c_i + \lambda_i$

Και στην περίπτωση του πλήρως ορισμένου πίνακα $\mathbf{Q}$:

$$\begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1I} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{I1} & \cdots & \cdots & q_{II} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_I^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_I \end{bmatrix}$$

Ή αλγεβρικά: $\nu_i + \sum_{j=1}^{I} \left(q_{ij} x_i^* \right) = c_i + \lambda_i$

Η μεθοδολογία εκτίμησης της (**Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**) παρουσιάζεται στην ενότητα (4.3). Σε κάθε περίπτωση, στην τρίτη φάση του ΘΜΠ η εκτιμημένη τετραγωνική συνάρτηση μεταβλητού κόστους C αντικαθιστά την αρχική γραμμική συνάρτηση με αποτέλεσμα το τελικό μη γραμμικό υπόδειγμα να αναπαράγει ακριβώς τις παρατηρήσεις του έτους βάσης. Το τελικό πρόβλημα βελτιστοποίησης δεν περιλαμβάνει τους περιορισμούς ρύθμισης που εμφανίζονται στη πρώτη φάση του ΘΜΠ και διατυπώνεται ως:

$$\max_{\mathbf{x} \geq 0} \; Z = \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Qx} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Υπό περιορισμούς $\qquad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \qquad [\boldsymbol{\theta}]$

Να σημειωθεί πως αν και τα υποδείγματα ΘΜΠ με τετραγωνική συνάρτηση μεταβλητού κόστους κυριαρχούν στη βιβλιογραφία εντούτοις δεν υπάρχει περιορισμός ούτε ως προς το μετασχηματιζόμενο μέρος της αντικειμενικής συνάρτησης, ούτε ως προς την επιλεχθείσα μη γραμμική μορφή.

3.2 Οικονομικά υποδείγματα αβεβαιότητας και κινδύνου

Η γραμμική αντικειμενική συνάρτηση στα υποδείγματα Γ.Π. που είδαμε μέχρι τώρα αντιπροσωπεύει μία ουδέτερη στάση απέναντι στον κίνδυνο και αυτό αποτελεί πιθανή αιτία αποτυχίας ρύθμισης του υποδείγματος. Οι δυο κυριότερες μέθοδοι με τις οποίες μπορεί να ενσωματωθεί ο κίνδυνος και η αβεβαιότητα σε ένα οικονομικό υπόδειγμα είναι είτε *η θεωρία της προσδοκώμενης χρησιμότητας* ($E-U$), είτε *η «ανάλυση αναμενόμενης απόδοσης–διακύμανσης»* (*mean-variance analysis* – $E-V$). Ο ΓΠ εξελίχθηκε αρχικά σαν μεθοδολογία βελτιστοποίησης μιας μόνο γραμμικής συνάρτησης αγνώστων μεταβλητών, δηλαδή ενός μοναδικού κριτηρίου απόφασης (μονοκριτήριος προγραμματισμός). Πολλοί ερευνητές ωστόσο αμφισβητούν την ορθότητα της μονοκριτήριας υπόθεσης ως αντιπροσωπευτικής του τρόπου λήψης αποφάσεων, αφού τόσο η επιλογή δραστηριοτήτων σε επίπεδο εκμετάλλευσης όσο και η εφαρμογή ενός μίγματος πολιτικής σε περιφερειακό ή ανώτερο επίπεδο αποτελεί συνήθως συμβιβασμό μεταξύ διαφορετικών στόχων πολλοί, από τους οποίους είναι συχνά αντικρουόμενοι. Το κριτήριο $E-V$ που χρησιμοποιούμε υποθέτει πως η επιλογή καλλιεργειών ενός παραγωγού εξαρτάται από την απόδοση (αναμενόμενο κέρδος) εναλλακτικών παραγωγικών σχεδίων και από τη διακύμανση τους, η οποία ερμηνεύεται ως ένα μέτρο του κινδύνου που αντιμετωπίζει ο παραγωγός.

3.3 Το κριτήριο E-V στην ανάλυση οικονομικού κινδύνου

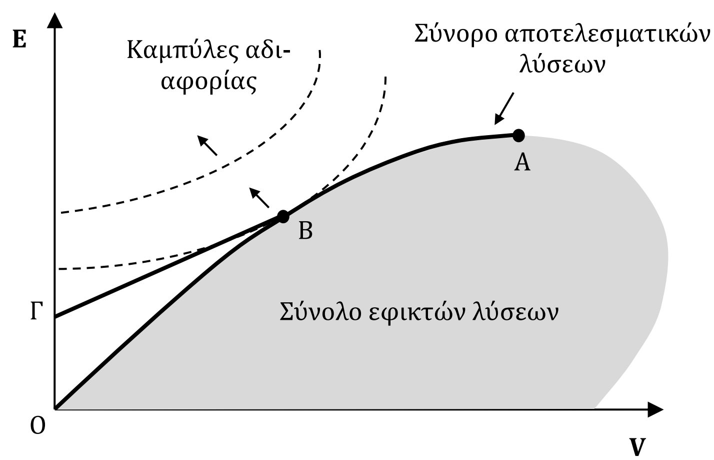
Όπως αναφέραμε παραπάνω μια συνηθισμένη μέθοδος οικονομικής ανάλυσης υπό συνθήκες αβεβαιότητας και κινδύνου είναι η «*ανάλυση αναμενόμενης απόδοσης – διακύμανσης*» (*mean-variance analysis* – $E-V$) που στηρίζεται στη *θεωρία χαρτοφυλακίου (portfolio theory)* του Markowitz (Markowitz, 1952) και έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα σε χρηματοοικονομικές αναλύσεις. Το κριτήριο $E-V$ υποθέτει πως η επιλογή χαρτοφυλακίου (μίγμα διαφορετικών καλλιεργειών σε μια φάρμα) ενός παραγωγού εξαρτάται από την απόδοση (αναμενόμενο κέρδος) εναλλακτικών παραγωγικών σχεδίων και από τη διακύμανση τους, η οποία ερμηνεύεται ως ένα μέτρο του κινδύνου που αντιμετωπίζει ο παραγωγός. Συγκεκριμένα, η επιλογή χαρτοφυλακίου αφορά σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που επιδιώκει την εύρεση του σχεδίου παραγωγής με την ελάχιστη διακύμανση (Var) για δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης E και διατυπώνεται ως:

$$\min_{\mathbf{x}\geq 0} Var = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} \qquad \textbf{(3.6)}$$

Υπό περιορισμούς: $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ και $\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = E$

Όπου $\mathbf{V}$ ο συμμετρικός $\mathrm{I} \times \mathrm{I}$ πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης των αναμενόμενων κερδών κάθε δραστηριότητας, $\mathbf{g}$ και $\mathbf{x}$ τα διανύσματα $(I \times I)$ των μέσων κερδών και του επιπέδου παραγωγής κάθε δραστηριότητας αντίστοιχα, ενώ το E συμβολίζει το αναμενόμενο επίπεδο απόδοσης (συνολικού κέρδους) που πρέπει να επιτυγχάνει το χαρτοφυλάκιο (σχέδιο παραγωγής) που θα επιλεγεί. Με παραμετρική επίλυση του παραπάνω προβλήματος ως προς E, είναι δυνατή η αναγνώριση των αποτελεσματικότερων (βέλτιστων) κατά Pareto χαρτοφυλακίων σε όρους απόδοσης/κινδύνου τα οποία μπορούν να παρασταθούν σχηματικά σε ένα γράφημα *«αναμενόμενη απόδοση – διακύμανση» ($E - V$)* σχηματίζοντας την κοίλη καμπύλη ΑΟ (Σχήμα 3.1).

Εικόνα 3.1 : **Το σύνορο των αποτελεσματικών λύσεων και το άριστο σχέδιο παραγωγής**



Η θέση και το σχήμα της καμπύλης *ΑΟ* προσδιορίζεται από τα δεδομένα με βάση τα οποία υπολογίστηκαν οι αναμενόμενες αποδόσεις και από τις τιμές των διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των αποδόσεων αυτών. Η βέλτιστη θέση που θα επιλέξει ο κάθε παραγωγός πάνω στην καμπύλη αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων (σημείο Β στην Εικόνα 3.1) εξαρτάται από τη συνάρτηση χρησιμότητας του (καμπύλες αδιαφορίας), έτσι ακόμα και αν δύο παραγωγοί έχουν ταυτόσημες προσδοκίες και δυνατότητες (δηλαδή την ίδια καμπύλη E-V), διαφοροποίηση της στάσης ως προς τον κίνδυνο (υποκειμενικός παράγων) θα τους οδηγήσει σε διαφορετικές επιλογές.

Παράγωγος του κριτηρίου $E - V$ είναι η *«ανάλυση αναμενόμενης απόδοσης – τυπικής απόκλισης»* (*mean-standard deviation analysis – $E - \sigma$*), η οποία προτάθηκε επίσης από τον Markowitz (Markowitz, 1952) ως εναλλακτική της $E - V$ και εφαρμόστηκε πρώτη φορά από τον Tobin (Tobin, 1958) στα πλαίσια της εργασίας του για τη μελέτη της ρευστότητας ως επενδυτική επιλογή που περιορίζει τον οικονομικό κίνδυνο. Το κριτήριο $E - \sigma$ χρησιμοποιεί την τυπική απόκλιση, σ, ως μέτρο του κινδύνου που αντιμετωπίζει ο παραγωγός και αναμενόμενα παράγει το ίδιο σύνορο αποτελεσματικών λύσεων με τη μέθοδο $E-V$, αφού η τυπική απόκλιση δεν είναι παρά η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης που χρησιμοποιεί το τελευταίο. Αργότερα ο Baumol (Baumol, 1963) παρουσίασε μια παραλλαγή του κριτηρίου Ε-σ το οποίο ονόμασε *«αναμενόμενο κέρδος – όριο εμπιστοσύνης» (expected gain-confidence limit – $E-L$)* και στηρίζεται στη μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $L=E-\varphi_L\sigma$, υπό τους συνήθεις περιορισμούς $\mathbf{Ax}\leq\mathbf{b}$. Το φ_L είναι μια παράμετρος αποστροφής κινδύνου, που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των τυπικών αποκλίσεων γύρω από τον μέσο της κατανομής, ενώ η εξίσωση $L=E-\varphi_L\sigma$ ερμηνεύεται ως το μονόπλευρο $a\%$ τμήμα της κατανομής που αντιστοιχεί σε τιμή κέρδους που επιτυγχάνεται με πιθανότητα $(1-a)\%$.

Ο Freund (Freund, 1956) παρουσίασε ένα διαφορετικό γραμμικό υπόδειγμα $E-V$, το οποίο βασίζεται στη μεγιστοποίηση της $E-U$ ενός παραγωγού, υπό τους συνήθεις γραμμικούς περιορισμούς της μορφής $\mathbf{Ax}\leq\mathbf{b}$ και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας. Η προσέγγιση του βασίζεται στην υπόθεση πως τα ακαθάριστα κέρδη κάθε καλλιέργειας, g_i (με $i\in I$), ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο $\bar{g}_i$ και διακύμανση σ_i^2 και επιπλέον πως οι προτιμήσεις του παραγωγού μπορούν να αναπαρασταθούν από μια αρνητική εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας της μορφής:

$$u(W)=-e^{-\varphi W} \qquad \textbf{(3.7)}$$

Όπου φ ένας σταθερός συντελεστής απόλυτης αποστροφής κινδύνου. Το συνολικό ακαθάριστο κέρδος (ή συνολικός τελικός πλούτος), W, κατανέμεται επίσης κανονικά με μέσο $\mu=\bar{\mathbf{g}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ και διακύμανση $\sigma^2=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}$. Η προσδοκώμενη χρησιμότητα του παραγωγού μπορεί συνεπώς να υπολογιστεί ως:

$$\mathrm{E}[u(W)]=\int_{-\infty}^{+\infty}-e^{-\varphi W}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(W-\mu)^2/\sigma^2}\,dW$$

Η επίλυση του παραπάνω ολοκληρώματος οδηγεί τελικά στην ακόλουθη συνάρτηση προσδοκώμενης χρησιμότητας:

$$\mathrm{E}[u]=-e^{-\varphi\left(\mu-0.5\varphi\sigma^2\right)} \qquad \textbf{(3.8)}$$

Αποδεικνύεται πως η μεγιστοποίηση της εξίσωσης (3.8) ισοδυναμεί με τη μεγιστοποίηση της μη στοχαστικής συνάρτησης $T=\mu-0.5\varphi\sigma^2$ υπό τους συνήθεις γραμμικούς περιορισμούς. Έτσι, το τελικό πρόβλημα διατυπώνεται ως:

$$\max_{\mathbf{x}\geq 0}\ T=\bar{\mathbf{g}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}-\tfrac{1}{2}\varphi\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} \qquad \textbf{(3.9)}$$

Υπό περιορισμούς: $\mathbf{Ax}\leq\mathbf{b} \qquad [\boldsymbol{\theta}]$

Υποδείγματα $E - V$ και $E - \sigma$ που είτε ακολουθούν τη μέθοδο του Markowitz για την παραγωγή του συνόρου αποτελεσματικών λύσεων, είτε χρησιμοποιούν αντικειμενικές συναρτήσεις όπως του Freund και του Baumol έχουν χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα σε ερευνητικές εργασίες στο αντικείμενο της γεωργικής οικονομικής και ειδικότερα στη διαχείριση γεωργικών εκμεταλλεύσεων. Ο λόγος είναι αφενός η ευκολία στη μαθηματική διατύπωση τους και αφετέρου η δυνατότητα συνεκτίμησης του κινδύνου και της αβεβαιότητας που προέρχεται από περισσότερες από μια τυχαίες μεταβλητές, καθώς τόσο το $\bar{\mathbf{g}}$ όσο και ο πίνακας $\mathbf{V}$ μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από την εμπειρική κατανομή (ή χρονολογική σειρά) τιμών και αποδόσεων καλλιεργειών. Τυπικές εφαρμογές αφορούν στον προσδιορισμό του άριστου παραγωγικού σχεδίου, όπως για παράδειγμα την κατανομή της καλλιεργήσιμης γης σε αροτραίες καλλιέργειες. Πιο πρόσφατα, και στα πλαίσια της τελευταίας αναθεώρησης της ΚΑΠ, γραμμικά υποδείγματα $E - V$ χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη της αντίδρασης των παραγωγών στον τομέα των σιτηρών στην Αγγλία και την Ιρλανδία και στην καλλιέργεια του βαμβακιού στη Θεσσαλία (Petsakos A., Rozakis S., Tsiboukas K., 2009).

4 Υπόδειγμα που συνδυάζει μεγιστοποίηση κέρδους και ελαχιστοποίηση διασποράς του κέρδους: ρύθμιση μέσω ΘΜΠ

Πρόσφατα οι Πετσάκος και Ροζάκης (Petsakos A., Rozakis S., 2015) πρότειναν μια εξειδίκευση του ΜΠ όπου η αρχική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μη γραμμική και συγκεκριμένα δευτέρου βαθμού καθώς εξειδικεύει μια λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας του αγρότη. Αυτή τη συνάρτηση την «ρύθμισαν» με χρήση ΘΜΠ. Ενσωματώνουν δηλαδή στο υπόδειγμα και το κριτήριο του κινδύνου για να πετύχουν ρύθμιση. Δεν έχουν δημοσιευτεί μέχρι σήμερα πολλές εργασίες που να πραγματεύεται τη ρύθμιση ενός υποδείγματος ΜΠ και η οποία να λαμβάνει υπόψη με σαφή τρόπο τους παραπάνω παράγοντες του κινδύνου σε ένα πλαίσιο ΘΜΠ. Είναι μια πρωτότυπη προσέγγιση που φαίνεται ότι δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Έχει όμως κάποια υπολογιστικά προβλήματα καθώς για να προσδιοριστούν οι παράμετροι του τελικού υποδείγματος με δεδομένη την έλλειψη χρονοσειρών στοιχείων χρησιμοποιείται ελαχιστοποίηση της μέγιστης εντροπίας ενός συστήματος. Συγκεκριμένα σε κάποιες περιπτώσεις παρατηρείται αδυναμία εύρεσης λύσεων στο πεδίο των πραγματικών αριθμών.

4.1 Αρχικό μοντέλο – 1^η φάση ΘΜΠ

Ο Θετικός Μαθηματικός Προγραμματισμός (ΘΜΠ) είναι μια μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τον Howitt (Howitt, 1995b), προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα υπερεξειδίκευσης των κλασικών υποδειγμάτων ΓΠ και να επιτευχθεί η άριστη ρύθμιση τους. Να σημειωθεί πως αν και πρώτος ο Howitt παρουσίασε επίσημα τη συγκεκριμένη μέθοδο το 1995, οι αρχές και οι τεχνικές στις οποίες βασίζεται είχαν χρησιμοποιηθεί και παλιότερα σε υποδείγματα προγραμματισμού που είχαν ως στόχο την ανάλυση επιπτώσεων από αλλαγές στην αγροτική πολιτική, είτε σε περιφερειακό, είτε σε εθνικό επίπεδο.

Όπως είπαμε και στην ενότητα (3.1) η μαθηματική διατύπωση της πρώτης φάσης του ΘΜΠ διαφέρει από την αντίστοιχη του αρχικού προβλήματος ως προς έναν επιπλέον περιορισμό «ρύθμισης» που δεν επιτρέπει στις μεταβλητές απόφασης να πάρουν τιμές μεγαλύτερες από εκείνες που παρατηρούνται κατά το έτος βάσης ώστε να το εξαναγκάσουμε να αναπαράξει τις παρατηρήσεις μας X_0 που έχουμε σε επίπεδο φάρμας. Προσθέτουμε δηλαδή στο αρχικό μας πρόβλημα τους περιορισμούς (4.4) και (4.5) οι οποίοι μπορεί να φαίνονται παράλογοι αφού καταδεικνύουν τα μεγέθη των $X(i)$ ωστόσο τους χρειαζόμαστε γιατί είναι το πρώτο βήμα του Θετικού Μαθηματικού Προγραμματισμού. Ο περιορισμός κάνει εφικτή την εύρεση των αντίστοιχων δυϊκών τιμών οι οποίες αντιπροσωπεύουν ένα είδος «μη παρατηρούμενης» πληροφορίας που είναι διαθέσιμη μόνο στον παραγωγό και συνιστά σημαντικό παράγοντα στην επιλογή του κατάλληλου σχεδίου παραγωγής, ενώ παράλληλα αποτελεί τη βάση της διαδικασίας μετασχηματισμού της αρχικής συνάρτησης.

Η κεντρική ιδέα του ΘΜΠ είναι πως το παρατηρούμενο σχέδιο παραγωγής κατά το έτος βάσης είναι το άριστο και στοχεύει στο να μεταμορφώσουμε την αντικειμενική συνάρτηση σε μία μη γραμμική ώστε το μοντέλο να αναπαράγει χωρίς τους περιορισμούς ρύθμισης τις παρατηρήσεις μας. Το αρχικό μας μαθηματικό πρόβλημα το οποίο θέλουμε να τροποποιήσουμε ώστε να αναπαράγει τις παρατηρήσεις που έχουμε σε επίπεδο αγρού μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Έστω μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση χρησιμότητας του αγρότη:

$$\max_{x\geq 0} \boldsymbol{EU1} = \boldsymbol{W_0} + (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} * \frac{\boldsymbol{x^T V x}}{\boldsymbol{W_0}+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{x}} \qquad (4.1)$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \qquad (4.3)$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (4.4)$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (4.5)$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \qquad (4.6)$$

Όπου $\boldsymbol{EU1}$ η αναμενόμενη χρησιμότητα του αγρότη για το υπόδειγμα μας την οποία θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε, $\boldsymbol{W_0}$ σταθερά στρεμματικά έσοδα – επιδότηση ανά στρέμμα που δεν συνδέεται με την παραγωγή, $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}$ τα διανύσματα $(\mathrm{I} \times 1)$ της ακαθάριστης προσόδου και του μεταβλητού κόστους κάθε δραστηριότητας υπολογισμένα απο εθνικά δεδομένα, $\boldsymbol{V}$ η μήτρα διακύμανσης – συνδιακύμανσης του κέρδους με βάση χρονολογικές σειρές σε εθνικό ή περιφερειακό επίπεδο από ετήσιες στατιστικές, $\boldsymbol{x}$ το διάνυσμα (I×1) του επίπεδου παραγωγής της κάθε δραστηριότητας με I=1..7, $\boldsymbol{x}^*$ το διάνυσμα της παρατηρούμενης διαθέσιμης ποσότητας των συντελεστών παραγωγής, εδώ στρέμματα γης και $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι ένας πολύ μικρός αριθμός π.χ. 0.000001 που προστίθεται για να αποφευχθεί ο εκφυλισμός (degeneration) του προβλήματος.

Το διάνυσμα X μπορεί να είναι θεωρητικά μέχρι 7 μεταβλητών αφού έχουμε εθνικά δεδομένα για 7 καλλιέργειες (βαμβάκι, καλαμπόκι, σκληρό σιτάρι, καπνός, πιπεριά, τομάτα και αλφάλφα), αλλά στην πραγματικότητα από τις 48 φάρμες μας καμία δεν έχει πάνω απο 4 καλλιέργειες. Το μοντέλο αναπαράγει φυσικά τις παρατηρήσεις που έχουμε και αφού θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις μας είναι οι άριστες τότε οι αναγκαίες συνθήκες 1ης τάξης για την άριστη λύση στο $\boldsymbol{x}^*$ είναι:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{c}) - \frac{\boldsymbol{V\,x^*}}{\boldsymbol{W_0}+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{x^*}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} * \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{c})\left(\boldsymbol{x^{*\,T} V\,x^*}\right)}{(\boldsymbol{W_0}+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{x^*})^2} - \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{A^T\theta} = \mathbf{0} \qquad (4.7)$$

4.2 2η φάση ΘΜΠ

Το επόμενο βήμα στα κλασικά υποδείγματα ΘΜΠ είναι η εκτίμηση μιας εναλλακτικής, μη γραμμικής (τετραγωνικής) συνάρτησης κόστους η οποία θα ενσωματώνει κάθε άγνωστο, μη παρατηρούμενο κόστος, το οποίο εκφράζεται από το δυϊκό διάνυσμα $Lambda$. Σε αριθμητικούς όρους, η μη γραμμικότητα είναι αναγκαία για την παρουσία του διανύσματος X στις συνθήκες πρώτης τάξης, έτσι ώστε αυτές να ικανοποιούνται ακριβώς στο σημείο X^*.

Όπως είπαμε στην Ενότητα 3.1 η δεύτερη φάση του ΘΜΠ συνίσταται στον μετασχηματισμό της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης σε μία μη γραμμική ώστε το μοντέλο μας να αναπαράγει τις παρατηρήσεις μας χωρίς άλλους επιπλέον περιορισμούς. Η μη γραμμικότητα συνήθως αναζητείται στο κόστος και ενσωματώνεται στο μοντέλο αντικαθιστώντας την γραμμική συνάρτηση κόστους με την τετραγωνική

$$C(x) = \nu^T * \chi + \frac{1}{2} * \chi^T * Q * x$$

Το τελικό πρόβλημα βελτιστοποίησης που δεν περιλαμβάνει τους περιορισμούς ρύθμισης που εισαγάγαμε στην πρώτη φάση του ΘΜΠ διατυπώνεται ως εξής:

Maximize

$$\max_{x \geq 0} \boldsymbol{EU2} = \boldsymbol{W_0} + \boldsymbol{r^T x} - \boldsymbol{\nu^T x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x^T Q x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} * \frac{\boldsymbol{x^T S x}}{\boldsymbol{W_0} + \boldsymbol{r^T x} - \boldsymbol{\nu^T x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x^T Q x}}$$

Υπό τους περιορισμούς: $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$

Το ενδιάμεσο λοιπόν στάδιο στη διαδικασία ρύθμισης περιλαμβάνει την εκτίμηση του «πραγματικού» πίνακα συνδιακύμανσης των εκμεταλλεύσεων $\boldsymbol{S}$ και του «πραγματικού» διανύσματος μη παρατηρούμενου κόστους $\boldsymbol{Q}$ του τελικού μοντέλου μας ώστε και σε αυτήν την περίπτωση οι συνθήκες 1ης τάξης του μοντέλου να ικανοποιούνται ακριβώς στις παρατηρήσεις μας:

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{Q x^*} - \frac{\boldsymbol{S x^*}}{\boldsymbol{W_0} + \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{Q x^*}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x^*}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} * \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{Q x^*})(\boldsymbol{x^{*\,T} S x^*})}{(\boldsymbol{W_0} + \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{Q x^*}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x^*})^2} - \boldsymbol{A^T \theta} = \mathbf{0}$$

Εφόσον το αρχικό μας μοντέλο με τους περιορισμούς «ρύθμισης» αναπαράγει τις παρατηρήσεις μας και το τελικό μας τετραγωνικό μοντέλο θέλουμε να αναπαράγει και αυτό μπορούμε να συνδυάσουμε τις εξισώσεις για τις συνθήκες 1ης τάξης των δύο μοντέλων και συγκεκριμένα να τις εξισώσουμε.

$$\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{Q x^*} + \frac{\boldsymbol{S x^*}}{\boldsymbol{W_0} + \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{Q x^*}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x^*}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} * \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{Q x^*})(\boldsymbol{x^{*\,T} S x^*})}{(\boldsymbol{W_0} + \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{Q x^*}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x^*})^2} =$$

$$= \boldsymbol{c} + \frac{\boldsymbol{V x^*}}{\boldsymbol{W_0} + (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x^*}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} * \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{x^{*\,T} V x^*})}{(\boldsymbol{W_0} + (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x^*})^2} - \boldsymbol{\lambda} \qquad (4.8)$$

4.3 Βελτιστοποίηση εντροπίας και Μαθηματικός Προγραμματισμός

Ο όρος εντροπία προέκυψε στην βιβλιογραφία της θερμοδυναμικής περίπου στο 1865 στην Γερμανία από τον Rudolf Clausius για να αναπαραστήσει το μέτρο της ποσότητας της ενέργειας σε ένα θερμοδυναμικό σύστημα σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας του συστήματος και της θερμότητας που εισέρχεται στο σύστημα. Η εντροπία ανήκε στο πεδίο της φυσικής μέχρι το

1948 όταν ο Claude Shannon προσπαθώντας να αναπτύξει την θεωρία της πληροφορίας στα εργαστήρια της Bell χρησιμοποίησε τον όρο για να αναπαραστήσει ένα μέτρο της πληροφορίας μετά από πρόταση του John Von Neumann. O Shannon ήθελε μία λέξη να περιγράψει το μέτρο της αβεβαιότητας και αναζήτησε την βοήθεια του Von Neumann. H αιτιολόγηση του Von Neumann στον Shannon ήταν:

«Κανείς πραγματικά δεν καταλαβαίνει την εντροπία (με την φυσική της έννοια), επομένως αν ξέρεις τι εννοείς με αυτήν και την χρησιμοποιείς όταν βρίσκεσαι σε διαφωνία θα κερδίζεις κάθε φορά»

Η ιδέα του Shannon για την εντροπία έχει χρησιμοποιηθεί φυσικά σε όλο το εύρος των επιστημών.

Η ιδέα της εντροπίας είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της αβεβαιότητας που υπάρχει σε μία κατανομή πιθανοτήτων, και ουσιαστικά η εντροπία μπορεί να οριστεί σαν το μέτρο της πιθανοτικής αβεβαιότητας. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι η κατανομή πιθανότητας για το αποτέλεσμα μίας ρίψης νομίσματος είναι (0.0001 , 0.9999) με 0.0001 να είναι η πιθανότητα να έχεις γράμματα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει πολύ μεγαλύτερη βεβαιότητα από ότι αβεβαιότητα για το αποτέλεσμα του πειράματος και κάποιος μπορεί να είναι σχεδόν σίγουρος ότι το αποτέλεσμα θα είναι κορώνα. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι η κατανομή πιθανοτήτων που διέπει το ίδιο πείραμα είναι (0.5 , 0.5) καταλαβαίνουμε ότι υπάρχει πολύ λιγότερη βεβαιότητα και πολύ περισσότερη αβεβαιότητα σε σχέση με την προηγούμενη κατανομή. Γενικεύοντας την παρατήρηση στην περίπτωση των n πιθανών αποτελεσμάτων, συμπεραίνουμε ότι η ομοιόμορφη κατανομή έχει την μεγαλύτερη αβεβαιότητα σε σχέση με όλες τις άλλες κατανομές πιθανότητας. Έτσι αν κάποιος έπρεπε να διαλέξει μία κατανομή πιθανότητας για ένα πείραμα τύχης χωρίς προγενέστερη γνώση για την κατανομή, θα ήταν λογικό να διαλέξει την ομοιόμορφη κατανομή και όχι κάποια άλλη γιατί αυτή η κατανομή μεγιστοποιεί την αβεβαιότητα του αποτελέσματος. Αυτό το αξίωμα λέγεται Αρχή του Laplace (Laplace’s principle of insufficient reasoning). Επιπλέον είναι δυνατόν να δικαιολογήσουμε αυτό το αξίωμα χωρίς να καταφύγουμε σε ενδελεχή-σχολαστικό ορισμό της αβεβαιότητας. Ωστόσο, αυτό το αξίωμα είναι ανεπαρκή-ακατάληλλο όταν κάποιος έχει προγενέστερη γνώση για την κατανομή. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι κάποιος ξέρει κάποιες συγκεκριμένες στιγμές της κατανομής (π.χ. expected value). Σε αυτήν την περίπτωση ένας μαθηματικός ορισμός της αβεβαιότητας είναι κρίσιμος και το μέτρο του Shannon για την αβεβαιότητα ή η εντροπία έχει απαραίτητο ρόλο.

Για να ορίσει την εντροπία ο Shannon πρότεινε κάποια αξιώματα που πίστευε ότι οποιοδήποτε μέτρο για την αβεβαιότητα πρέπει να τα ικανοποιεί και συμπέρανε μία μοναδική συνάρτηση που τα ικανοποιεί όλα. Αποδείχθηκε ότι αυτή η συνάρτηση έχει πολλές ακόμα επιθυμητές ιδιότητες.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε στην εντροπία πεπερασμένων διαστάσεων δηλαδή στην εντροπία του Shannon για διακριτή κατανομή πιθανότητας με πεπερασμένο αριθμό πιθανών αποτελεσμάτων.

Ας υποθέσουμε ότι $p \equiv (p_1, p_2, p_3, \dots , p_n)^T$ είναι η κατανομή πιθανοτήτων που σχετίζεται με τα n πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος που αντιστοιχούν στα $x \equiv (x_1, x_2, x_3, \dots , x_n)^T$ ενδεχόμενα. Αν συμβολίσουμε την εντροπία του με $S_n(p)$ ανάμεσα σε αυτά τα καθοριστικά αξιώματα οι Kapur και Kesavan δήλωσαν τα ακόλουθα:

1. Το $S_n(p)$ πρέπει να εξαρτάται από όλα τα p_j με j=1,2,…,n.
2. Το $S_n(p)$ πρέπει να είναι συνεχής συνάρτηση των p_j με j=1,2,…,n.
3. Το $S_n(p)$ πρέπει να είναι αντιμεταθετικά συμμετρικό (permutationally symmetric) Με άλλα λόγια αν τα p_j είναι απλώς μεταθετικά (merely permuted) τότε το $S_n(p)$ πρέπει να παραμείνει ίδιο.
4. $S_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots , \frac{1}{n})$ πρέπει να είναι μονοτονικά αύξουσα συνάρτηση του *n*.
5. Το $S_n(p_1, p_2, p_3, \dots , p_n)$ = $S_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \dots , p_n)$ + $(p_1 + p_2)$ $S_2(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2})$

Αποδεικνύεται ότι η μοναδική οικογένεια συναρτήσεων που ικανοποιούν τα παραπάνω αξιώματα έχει την μορφή $S_n(p) = -\kappa * \sum_{j=1}^{n} p_j * lnp_j$ όπου το κ είναι μία θετική σταθερά, το ln αναπαριστά τον φυσικό λογάριθμο, και $ln0 = 0$. Ο Shannon διάλεξε το $-\sum_{j=1}^{n} p_j * lnp_j$ για την εντροπία και ανάμεσα στις πολλές επιθυμητές ιδιότητες δηλώνουμε και τις ακόλουθες:

I. Η εντροπία του Shannon είναι μη αρνητική και κοίλη στα $p_1, p_2, p_3, \dots , p_n$.

II. Η εντροπία δεν αλλάζει αν προσθέσουμε ένα ακόμα πιθανό αποτέλεσμα με πιθανότητα 0.

III. Η εντροπία μίας κατανομής που αναπαριστά ένα απολύτως βέβαιο γεγονός είναι 0, και η εντροπία οποιασδήποτε κατανομής που αναπαριστά μη βέβαια γεγονότα είναι θετική.

IV. Δοθέντος ενός αριθμού πιθανών γεγονότων η μέγιστη πιθανή εντροπία είναι αυτή της ομοιόμορφης κατανομής.

V. Η εντροπία της από κοινού κατανομής (joint distribution) δύο ανεξάρτητων κατανομών είναι το άθροισμα των δύο ξεχωριστών εντροπιών.

VI. Η εντροπία της από κοινού κατανομής δύο εξαρτημένων κατανομών δεν είναι μεγαλύτερη από το το άθροισμα των δύο ξεχωριστών εντροπιών.

4.4 Εκτίμηση της μη γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης

Πρώτοι οι Paris και Howitt (Quirino Paris, Richard E. Howitt, 1998) χρησιμοποίησαν έναν πλήρως ορισμένο πίνακα, αξιοποιώντας το κριτήριο της μέγιστης εντροπίας για την επίλυση του υποπροσδιορισμένου συστήματος που ορίζεται από την εξίσωση (3.4). Για το λόγο αυτό κατασκευάστηκε ένα υπόδειγμα μεγιστοποίησης της εντροπίας των αγνώστων κατανομών πιθανότητας που αντιστοιχούν σε καθένα από τα στοιχεία των S και Q σύμφωνα με όσα είπαμε στην Ενότητα 3.1.

Κατά τη χρήση της μεθόδου της μέγιστης εντροπίας είτε ως οικονομετρικό κριτήριο εκτίμησης παραμέτρων, είτε ως εργαλείο για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων, το διάνυσμα των πιθανοτήτων πολλαπλασιάζεται με ένα διάνυσμα υποστηρικτικών τιμών το οποίο επιλέγεται από τον αναλυτή με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι εφικτή η επίλυση του συστήματος.

Όταν έχουμε διαθέσιμες τιμές από εθνικά δεδομένα για τις μέσες τιμές και τις μέσες αποδόσεις των καλλιεργειών μας για μία χρονική περίοδο T ετών, οι αντίστοιχες «πραγματικές» τιμές σε μία φάρμα για μία οποιαδήποτε χρονιά πρέπει να είναι ίσες με τις στατιστικές τιμές από τα εθνικά δεδομένα πολλαπλασιασμένες με έναν όρο ποσοστιαίου σφάλματος. Έτσι αν συμβολίσουμε την μέση τιμή που έχουμε από τα εθνικά δεδομένα για μία καλλιέργεια i την χρονιά t με $\bar{p}_i^t$ τότε η «πραγματική» τιμή της μέσης τιμής της καλλιέργειας για την φάρμα την ίδια χρονιά θα είναι $p_i^t = \bar{p}_i^t * ep_i^t$ όπου ep_i^t είναι το αντίστοιχο ποσοστιαίο σφάλμα. Το ίδιο ισχύει και για την μέση απόδοση μίας καλλιέργειας, όπου αν $\bar{y}_i^t$ είναι η τιμή της μέσης απόδοσης από τα εθνικά δεδομένα για μία καλλιέργεια i την χρονιά t, τότε η «πραγματική» τιμή της μέσης απόδοσης θα είναι $y_i^t = \bar{y}_i^t * ey_i^t$ όπου ey_i^t το ποσοστιαίο σφάλμα. Έτσι εφόσον τα ακαθάριστα έσοδα μίας καλλιέργειας είναι το γινόμενο της απόδοσης της καλλιέργειας επί την τιμή τότε μπορούμε να πούμε ότι τα πραγματικά ακαθάριστα έσοδα για μία καλλιέργεια i την χρονιά t υπολογίζονται ως $r_i^t = y_i^t * p_i^t$ και το αντίστοιχο μέσο ακαθάριστο έσοδο για την χρονική περίοδο T ως $\bar{r}_i = \frac{1}{T} * \sum_{t=1}^{T} r_i^t$. Σε αντίθεση με τα p_i^t και y_i^t και κατα συνέπεια και του r_i^t και S η επιλογή κατάλληλων υποστηρικτικών τιμών για το διάνυσμα xQ είναι τελείως υποκειμενικό θέμα και εξαρτάται απο τον αναλυτή. Παρόλα αυτά αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε έναν απλό κανόνα που ορίζει το $xQ \leq r - c$ τέτοιο ώστε $r - c - q > 0$. Δηλαδή $xQ_i = (r_i - c_i) * exQ_i$ με $0 \leq exQ_i < 1$

Στα πλαίσια ενός υποδείγματος μέγιστης εντροπίας, κάθε όρος σφάλματος ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται, εκφράζεται ως η προσδοκώμενη τιμή μίας άγνωστης διακριτής κατανομής πιθανοτήτων (δηλαδή ενός διανύσματος) $\boldsymbol{\pi p_i^t} = [\boldsymbol{\pi p_{i_1}^t}, \boldsymbol{\pi p_{i_2}^t}, \dots, \boldsymbol{\pi p_{i_K}^t}]$ και $\boldsymbol{\pi y_i^t} = [\boldsymbol{\pi y_{i_1}^t}, \boldsymbol{\pi y_{i_2}^t}, \dots, \boldsymbol{\pi y_{i_K}^t}]$ που αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα υποστηρικτικών τιμών $\boldsymbol{zp_i} = [\, \boldsymbol{zp_{i_1}}, \boldsymbol{zp_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{zp_{i_k}}]$ και $\boldsymbol{zy_i} = [\boldsymbol{zy_{i_1}}, \boldsymbol{zy_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{zy_{i_k}}]$, για τιμές και αποδόσεις αντίστοιχα. Παρομοίως η διακριτή κατανομή πιθανότητας κάθε στοιχείου xQ_i του διανύσματος xQ εκφράζεται ως $\boldsymbol{\pi xQ_i} = [\boldsymbol{\pi xQ_{i_1}},\ \boldsymbol{\pi xQ_{i_2}},\ \ \boldsymbol{\pi xQ_{i_I}}]$ ενώ οι υποστηρικτικές τιμές του ως $\boldsymbol{zxQ_i} = [\boldsymbol{zxQ_{i_1}},\ \boldsymbol{zxQ_{i_2}},\ \ \boldsymbol{zxQ_{i_K}}]$. Υποθέτοντας πως ο αρχικός πίνακας $Vmat$ είναι γνωστός (δηλαδή ότι μπορεί να υπολογιστεί από εθνικούς ή περιφερειακούς μέσους όρους τιμών και αποδόσεων), το υπόδειγμα της μέγιστης εντροπίας μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$H(\pi p_{i\,K}^t, \pi y_{i\,K}^t, \pi xQ_{i_K}) = -\sum_{i,t,K} \pi p_{i\,K}^t * \ln(\pi p_{i\,K}^t) - \sum_{i,t,K} \pi y_{i\,K}^t * \ln(\pi y_{i\,K}^t) - \sum_{i,K} \pi xQ_{i_K} * \ln(\pi xQ_{i_K})$$

Υπό περιορισμούς: $p_i^t = ep_i^t * \bar{p}_i^t$ $y_i^t = ey_i^t * \bar{y}_i^t$ $xQ_i = (r_i - c_i) * exQ_i$

$$ep_i^t = \sum_{\kappa=1}^{K} zp_{ik} * \pi p_{i\,\kappa}^t \qquad \sum_{\kappa=1}^{K} \pi p_{i\,K}^t = 1 \qquad \pi p_{i\,K}^t \geq 0$$

$$ey_i^t = \sum_{\kappa=1}^{K} zy_{ik} * \pi y_{i\,\kappa}^t \qquad \sum_{\kappa=1}^{K} \pi y_{i\,K}^t = 1 \qquad \pi y_{i\,K}^t \geq 0$$

$$exQ_i = \sum_{\kappa=1}^{K} zxQ_{i_K} * \pi xQ_{i_K} \qquad \sum_{\kappa=1}^{K} \pi xQ_{i_K} = 1 \qquad \pi xQ_{i_K} \geq 0$$

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} * \sum_{t=1}^{T} y_i^t * p_i^t \qquad S_{ij} = \frac{1}{T} * \sum_{t=1}^{T} (p_j^t y_j^t - \bar{r}_j)(p_i^t y_i^t - \bar{r}_i)$$

$$\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{Qx^*} + \frac{\boldsymbol{Sx^*}}{\boldsymbol{W_0} + \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{Qx^*}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x^*}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} * \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{Qx^*})(\boldsymbol{x^{*\,T}Sx^*})}{(\boldsymbol{W_0} + \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{Qx^*}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x^*})^{\boldsymbol{2}}} =$$

$$= \boldsymbol{c} + \frac{\boldsymbol{V\,x^*}}{\boldsymbol{W_0} + (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x^*}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} * \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{x^{*\,T}V\,x^*})}{(\boldsymbol{W_0} + (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x^*})^{\boldsymbol{2}}} - \boldsymbol{\lambda} \qquad (\boldsymbol{4}, \boldsymbol{8})$$

Να σημειωθεί πως αν και δεν υπάρχει κάποιος κανόνας που να ορίζει τον ιδανικό αριθμό υποστηρικτικών τιμών, η διακύμανση του εκτιμητή της μέγιστης εντροπίας είναι αρνητικά συσχετισμένη με τον αριθμό των υποστηρικτικών τιμών. Έχει διαπυστωθεί πως η επιλογή ενός διανύσματος με περισσότερα από 4 στοιχεία δεν βελτιώνει σημαντικά τη διακύμανση του εκτιμητή. Η τελική επιλογή εξαρτάται συνεπώς από τον αναλυτή και τα παραδείγματα στη βιβλιογραφία κυμαίνονται από $K = 2$ έως $K = 5$.

Η παρούσα εργασία θα εξετάσει το συγκεκριμένο υπόδειγμα και θα αναλύσει τη διαδικασία επίλυσης με χρήση των αλγορίθμων που καλούνται από το λογισμικό GAMS. Κύριος στόχος είναι να αντιμετωπίσει τα υπολογιστικά προβλήματα και να εξασφαλίσει ότι σε κάθε περίπτωση θα βρίσκεται ένας τουλάχιστον συνδυασμός παραμέτρων που θα επιλύει το υπόδειγμα. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσει εναλλακτικό λογισμικό, στην προκειμένη περίπτωση το MATLAB.

4.5 Αποτελέσματα - Ελεγχος Αξιοπιστίας

Με τη διαδικασία ρύθμισης που περιγράφτηκε στην ενότητα παραπάνω, ο έλεγχος αξιοπιστίας του υποδείγματος που έγινε με τον «έλεγχο της παραγωγής» ήταν επιτυχημένος και το υπόδειγμα του οικονομικού κινδύνου το υπόδειγμα οικονομικού κινδύνου αναπαρήγαγε τις παρατηρήσεις (εκτάσεις) του έτους βάσης. Για τη μαθηματική αποτύπωση των αποτελεσμάτων του «ελέγχου της παραγωγής» χρησιμοποιήθηκε δείκτης Μέσης Ποσοστιαίας Απόκλισης (Percentage Average Deviation - PAD) που ορίζεται αλγεβρικά ως:

$$PAD = \frac{100}{I} * \sum_{i=1}^{i=I} \left| \frac{x_i - x_i^*}{x_i^*} \right|$$

Όπου το x_i συμβολίζει το αποτέλεσμα του υποδείγματος (εκτάσεις) για την i καλλιέργεια και το x_i^* τις παρατηρούμενες εκτάσεις της i καλλιέργειας κατά το έτος βάσης.

Πίνακας 4.1 Έλεγχος αξιοπιστίας του τελικού υποδείγματος για φάρμες με 3 ή 4 καλλιέργειες

Φάρμα	**Βαμβάκι** (Παρ -Αποτ)*	**Σκληρό σιτάρι** (Παρ -Αποτ)	**Καλαμπόκι** (Παρ -Αποτ)	**Καπνός** (Παρ -Αποτ)	**Αλφάλφα** (Παρ -Αποτ)	**Ντομάτα** (Παρ -Αποτ)	**Πιπεριά** (Παρ -Αποτ)	**PAD** (%)
1	7 - 6.98	2.5 - 2.36		3.2 - 3.19		1.6 - 1.60		1.35%
2	12 - 11.98	10 - 9.92		12 - 11.99	11 - 10.99			0.24%
3	41 - 40.96	6 - 5.89				23 - 22.99		0.58%
4	4.5 - 4.45	3 - 2.96		3 - 2.99				0.77%
6	3.4 - 3.37	1.1 - 1.08	1 - 0.99					0.69%
8	14 - 14.59	6 - 4.74		5 - 5.34		8 - 8.3		8.96%
21	40 - 39.99	4 - 3.97	1.5 -1.49		5 - 4.99			0.16%
24	4.4 - 4.34		1 - 0.99			1.3 - 1.29		0.48%
33	30 - 32.31	5 - 3.41	5 - 4.39	2.4 - 2.27				14.17%
44	12 - 11.99	10 - 9.85		5 - 5.00				0.5%

*Παρ = Παρατηρήσεις σε στρέμματα, Αποτ = Αποτελέσματα σε στρέμματα

Υπάρχει ένας εμπειρικός κανόνας σύμφωνα με τον οποίο, ένα υπόδειγμα με δείκτη PAD μικρότερο του 5% θεωρείται «εξαιρετικό», μικρότερο του 10% «καλό» και μεγαλύτερο του 15% ως «μη αποδεκτό» και χρήζει διόρθωσης.

4.6 Σύγκριση αποτελεσμάτων για διαφορετικές εξειδικεύσεις του υποδείγματος της αγροτικής εκμετάλλευσης

Το αρχικό γραμμικό πρόβλημα μεγιστοποίησης του ακαθάριστου κέρδους υπό περιορισμούς των διαθέσιμων συντελεστών παραγωγής για τον προσδιορισμό των μεταβλητών (έκταση εναλλακτικών καλλιεργειών) διατυπώνεται ως εξής:

Υπόδειγμα (1)

$$Z = W_0 + (\bar{r} - c)^T * x$$

$$Z = 39499 + \left(\begin{bmatrix} 11513 \\ 11622 \\ 6423 \\ 11026 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3750 \\ 10040 \\ 2660 \\ 3250 \end{bmatrix} \right)^T * x \qquad (1)$$

Υπό περιορισμούς

$$A * x \leq b \qquad [\theta]$$

Όπου W_0 είναι το «σταθερό» μέρος του εισοδήματος του γεωργού που αναφέρεται στις ανά εκτάριο ή στρέμμα επιδοτήσεις, αποδεσμευμένες από την παραγωγή, $\bar{r} = \bar{p} * \bar{y}$ είναι το μέσο ακαθάριστο έσοδο ανά εκτάριο, $\bar{p}$ είναι η μέση τιμή και $\bar{y}$ η μέση απόδοση ανά τόνο και c είναι τα μέσα μεταβλητά έξοδα ανά εκτάριο ενώ η μεταβλητή x το επίπεδο της δραστηριότητας (καλλιέργειες σε εκτάρια-ha). Όπως ήταν αναμενόμενο το γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με ένα περιορισμό δίνει μια μεταβλητή με θετική τιμή στην άριστη λύση (Πίνακας 4.3, Υπόδειγμα (1)). Για να προσεγγίσουμε την επιλογή του γεωργού εισάγουμε τον κίνδυνο υποθέτοντας ότι μεγιστοποιεί λογαριθμική συνάρτηση επομένως η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται μη γραμμική. Συγκεκριμένα μεγιστοποιείται το βέβαιο ισοδύναμο της λογαριθμικής συνάρτησης όπου V η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των ακαθάριστων κερδών που είναι ίδια και για τις 2 φάρμες καθώς έχει υπολογιστεί από στοιχεία τιμών και αποδόσεων που έχουν συλλεχθεί σε επίπεδο περιοχής και το υπόδειγμα διατυπώνεται ως εξής:

Υπόδειγμα (2)

$$CE = W_0 + (\bar{r} - c)' * x - \frac{1}{2} * \frac{x'Vx}{W_0 + (\bar{r} - c)' * x} \qquad (2)$$

$$CE = 39499 + \left(\begin{bmatrix} 11513 \\ 11622 \\ 6423 \\ 11026 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3750 \\ 10040 \\ 2660 \\ 3250 \end{bmatrix}\right)^T * x - \frac{1}{2} \frac{x' \begin{bmatrix} 272868 & 300046 & 81787 & 131915 \\ 300046 & 352726 & 80531 & 118993 \\ 81787 & 80531 & 54063 & 90006 \\ 131915 & 118993 & 90006 & 282147 \end{bmatrix} x}{39499 + \left(\begin{bmatrix} 11513 \\ 11622 \\ 6423 \\ 11026 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3750 \\ 10040 \\ 2660 \\ 3250 \end{bmatrix}\right)^T * x}$$

Υπό περιορισμούς

$$A * x \leq b \qquad [\theta]$$

Η άριστη λύση τώρα πιθανόν να περιλαμβάνει 2 ή περισσότερες καλλιέργειες στην εκμετάλλευση (περίπτωση εκμετάλλευσης f1) γιατί η μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να εφάπτεται σε πλευρά του εφικτού πολυγώνου (Πίνακας 4.3, Υπόδειγμα (2)). Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι λόγω της επιλογής της λογαριθμικής εξειδίκευσης της χρησιμότητας το σταθερό μέρος του εισοδήματος (στρεμματική επιδότηση) που στο γραμμικό υπόδειγμα είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής X, δηλαδή το W_0 τώρα επηρεάζει τη λύση (βρίσκεται στον παρονομαστή του δεύτερου όρου στη (2). Κατά συνέπεια τα αποτελέσματα στην άριστη λύση μπορεί να είναι διαφορετικά. Πράγματι για μείωση της επιδότησης κατά 30% ($W_0 * 0.7$) έχουμε αύξηση της έκτασης της καλλιέργειας αραβοσίτου στην πρώτη εκμετάλλευση (Πίνακας 4.4, Υπόδειγμα (2)).

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την προσέγγιση μας διατηρώντας τη μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση που προκύπτει από την λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας υποθέτοντας ότι το υπόδειγμα μπορεί να ρυθμιστεί για να δίνει ακριβώς τις παρατηρήσεις, αν εκτιμηθούν κατάλληλα και αντικατασταθούν στην αρχική αντικειμενική συνάρτηση (2), κάποιες παράμετροι της στοχαστικής κατανομής του πλούτου δηλαδή στην περίπτωση μας της μήτρας διακύμανσης – συνδιακύμανσης V και ενδεχομένως ένα μέρος του προσδοκώμενου ακαθάριστου κέρδους. Αναζητούμε δηλαδή να 'διορθώσουμε' την πληροφόρηση που είχαμε αποτυπώσει στο προηγούμενο υπόδειγμα σε ότι αφορά τις τιμές και τις αποδόσεις για την κάθε καλλιέργεια στην περίοδο αναφοράς και να κατασκευάσουμε την 'διορθωμένη' μήτρα S (διακύμανσης–συνδιακύμανσης) και να προσδιορίσουμε ένα άνυσμα q με τεκμαρτά κόστη, που θα 'διορθώσει' το προσδοκώμενο ακαθάριστο κέρδος σύμφωνα με τη θεωρία του Θετικού Μαθηματικού Προγραμματισμού.

Αυτό γίνεται σε δύο στάδια, στο πρώτο μεγιστοποιούμε το βέβαιο ισοδύναμο υπό περιορισμούς του υποδείγματος (2), με την προσθήκη όμως τεχνητών περιορισμών σε αριθμό όσες και οι καλλιέργειες, οι οποίοι ονομάζονται περιορισμοί ρύθμισης και αναγκάζουν το υπόδειγμα να δώσει στην άριστη λύση τις παρατηρήσεις και κατασκευάζουμε έτσι το υπόδειγμα (3). Οι δυϊκές όμως τιμές που προκύπτουν από αυτό το υπόδειγμα μπορούν να τροφοδοτήσουν ένα μαθηματικό μη γραμμικό υπόδειγμα ελαχιστοποίησης της εντροπίας για να εκμαιεύσουμε τις παραμέτρους που μπορούν να ρυθμίσουν το αρχικό υπόδειγμα (2).

Έτσι, το αρχικό πρόβλημα με τον επιπλέον περιορισμό ρύθμισης στην πρώτη φάση του ΘΜΠ διατυπώνεται ως

Υπόδειγμα (3)

$$CE = W_0 + (\bar{r} - c)' * x - \frac{1}{2} * \frac{x'Vx}{W_0 + (\bar{r} - c)' * x}$$

Υπο περιορισμούς

$A * x \leq b$ $\qquad [\theta]$

$x \leq x^*(1 + \varepsilon)$ $\qquad [\lambda]$

Η άριστη λύση συμπίπτει εξ ορισμού με το παρατηρηθέν σχέδιο παραγωγής (Πίνακας 4.3, Υπόδειγμα (3)). Οι συνθήκες πρώτης τάξης του υποδείγματος (3) χρησιμοποιούνται σε υπόδειγμα μέγιστης εντροπίας για να εκτιμηθεί η τελική αντικειμενική συνάρτηση που θα μπορεί να προσεγγίσει τις παρατηρήσεις μόνο με τον περιορισμό των συντελεστών παραγωγής χωρίς τους πρόσθετους περιορισμούς. Έτσι προκύπτει το ρυθμισμένο υπόδειγμα ως εξής:

Υπόδειγμα (4)

$$CE = W_0 + (\hat{r} - c - q)^T * x - \frac{1}{2} \frac{x'Sx}{W_0 + (\hat{r} - c - q)' * x}$$

όπου $\hat{r}$ είναι το 'αληθινό' εισόδημα, το q είναι το άνυσμα του τεκμαρτού μεταβλητού κόστους και ο πίνακας S είναι η επανεκτιμημένη μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης ξεχωριστή για κάθε εκμετάλλευση (Πίνακας 4.7 για την f1). Η άριστη λύση του υποδείγματος (4) δίνει πράγματι τιμές ίδιες ή προσεγγιστικά πολύ κοντά στις παρατηρήσεις (Πίνακας 4.3, Υπόδειγμα (4)).

Το πλεονέκτημα του μη γραμμικού υποδείγματος E-V σε σύγκριση με τα συνηθισμένα γραμμικά υποδείγματα που υποθέτουν σταθερό συντελεστή συμπεριφοράς σε συνθήκες κινδύνου, είναι ότι συλλαμβάνει τις επιπτώσεις των μεταβολών στο σταθερό μέρος του εισοδήματος, κάτι που είναι πιο ρεαλιστικό και μπορεί να χρησιμεύσει για ανάλυση πολιτικής ή επενδυτικών αποφάσεων.

Πίνακας 4.2 Παρατηρήσεις

Φάρμα	Καλλιέργεια	Έκταση	Εργασία	Μεταβλητά έξοδα	Μέση απόδοση	Μέση τιμή
f1	Αραβόσιτος	150	6.34	375	7380	0.156
f1	Αραβόσιτος ενσίρωμα	60	11.98	1004	7450	0.156
f1	Κριθάρι	60	5.67	266	3670	0.175
f1	Χειμερινό σιτάρι	60	4.91	325	5960	0.185
f2	Αραβόσιτος	60	6.34	375	7120	0.165
f2	Αραβόσιτος ενσίρωμα	80	11.98	1004	6890	0.156
f2	Κριθάρι	80	5.67	266	3560	0.176
f2	Χειμερινό σιτάρι	80	4.91	325	6120	0.181

Πίνακας 4.3 Αποτελέσματα σχεδίου παραγωγής

Φάρμα	Υπόδειγμα	Αραβόσιτος	Αραβόσιτος ενσίρωμα	Κριθάρι	Χειμερινό σιτάρι	PAD (%)
f1	**Παρατήρηση**	15	6	6	6	
f1	Υπόδειγμα (1)				33	
f1	Υπόδειγμα (2)	3.58			29.41	
f1	Υπόδειγμα (3)	15	6	6	6	
f1	Υπόδειγμα (4)	15.56	5.21	5.98	6.22	5.22%
f2	**Παρατήρηση**	6	8	8	8	
f2	Υπόδειγμα (1)	30				
f2	Υπόδειγμα (2)	30				
f2	Υπόδειγμα (3)	6	8	8	8	
f2	Υπόδειγμα (4)	6.34	6.85	8.33	8.46	7.48%

Πίνακας 4.4 Αποτελέσματα σχεδίου παραγωγής για μείωση της αποδεσμευμένης ενίσχυσης κατά 30%

Φάρμα	Υπόδειγμα	Αραβόσιτος	Αραβόσιτος ενσίρωμα	Κριθάρι	Χειμερινό σιτάρι
f1	(1)				33
f1	(2)	4,12			28,87
f1	(3)	15	6	6	6
f1	(4)	15.30	5.43	6.03	6.25
f2	(1)	30			
f2	(2)	30			
f2	(3)	6	8	8	8
f2	(4)	6.057	7.752	8.069	8.122

Λαμβάνοντας υπόψη τις παρατηρήσεις τιμών και αποδόσεων για 12 χρόνια προκύπτει ότι το ακαθάριστο κέρδος έχει μεγάλη διακύμανση και ότι οι συσχετίσεις μεταξύ των καλλιεργειών περιλαμβάνουν ισχυρές αλλά και αδύνατες έως μηδενικές τιμές.

Πίνακας 4.5 Συντελεστές συσχέτισης ακαθάριστου κέρδους επίπεδο περιφέρειας

correlation	Αραβόσιτος	Αραβόσιτος ενσίρωμα	Κριθάρι	Χειμερινό σιτάρι
Αραβόσιτος	1.000	0.974	0.389	0.000
Αραβόσιτος ενσίρωμα	0.974	1.000	0.409	0.038
Κριθάρι	0.389	0.409	1.000	0.602
Χειμερινό σιτάρι	0.000	0.038	0.602	1.000

Παρομοίως από τις παρατηρήσεις προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης που χρησιμοποιείται στην αντικειμενική συνάρτηση.

Πίνακας 4.6 Διακύμανση – συνδιακύμανση ακαθάριστου κέρδους επίπεδο περιφέρειας

V	Αραβόσιτος	Αραβόσιτος ενσίρωμα	Κριθάρι	Χειμερινό σιτάρι
Αραβόσιτος	272867.7	300045.9	81787.12	131914.8
Αραβόσιτος ενσίρωμα	300045.9	352726.2	80531.16	118993.2
Κριθάρι	81787.12	80531.16	54062.67	90005.67
Χειμερινό σιτάρι	131914.8	118993.2	90005.67	282146.6

Στην άριστη λύση του υποδείγματος της εντροπίας παίρνουμε την παρακάτω μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης που αντικαθιστά την αρχική στο υπόδειγμα 3 το οποίο αφού λυθεί δίνει τις ίδιες ή πολύ κοντινές τιμές στις μεταβλητές.

Πίνακας 4.7 Πίνακας S διακύμανσης – συνδιακύμανσης ακαθάριστου κέρδους. Εκτίμηση για κάθε εκμετάλλευση της f1

S	Αραβόσιτος	Αραβόσιτος ενσίρωμα	Κριθάρι	Χειμερινό σιτάρι
Αραβόσιτος	1385413	1498721	697545.3	1304831
Αραβόσιτος ενσίρωμα	1498721	1646925	725423.8	1350984
Κριθάρι	697545.3	725423.8	397138.4	732314
Χειμερινό σιτάρι	1304831	1350984	732314	1433969

5 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική συνδυάζονται σύγχρονες μέθοδοι ΜΠ και ένα οικονομικό υπόδειγμα και παρουσιάζεται μια προσέγγιση (οικονομικής) ανάλυσης σε επίπεδο γεωργικής εκμετάλλευσης. Ειδικότερα, εξειδικεύεται μια εναλλακτική εκδοχή της μεθόδου ΘΜΠ η οποία λαμβάνει υπόψη τον οικονομικό κίνδυνο που αντιμετωπίζουν οι παραγωγοί και ταυτόχρονα επιτυγχάνει την ακριβή αναπαραγωγή των παρατηρήσεων του έτους βάσης (ρύθμιση του υποδείγματος), ιδιότητα που κρίνεται αναγκαία για την αποδοχή ενός υποδείγματος ως εργαλείο υποστήριξης αποφάσεων αγροτικής πολιτικής. Το υπόδειγμα στηρίζεται στην «*ανάλυση αναμενόμενης απόδοσης – διακύμανσης*» (*mean-variance analysis* – $E - V$), που προϋποθέτει να υπολογιστεί η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης, προκειμένου να εκτιμηθεί το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής και οι εκτάσεις των εναλλακτικών καλλιεργειών.

Η μέθοδος ρύθμισης που χρησιμοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 4 έχει σημαντικές διαφορές σε σύγκριση με τα κλασικά υποδείγματα ΘΜΠ. Αρχικά, στο υπόδειγμα που φτιάχνουμε ο στόχος δεν είναι η μετατροπή της αρχικής γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης σε μη γραμμική όπως γίνεται στα συμβατικά υποδείγματα ΘΜΠ, αλλά η επανεκτίμηση των παραμέτρων εκείνων που θα επιτρέπουν την αναπαραγωγή των παρατηρήσεων του έτους βάσης και οι οποίες υποθέτουμε ότι βρίσκονται «κρυμμένες» μέσα στην αντικειμενική συνάρτηση. Αυτό φανερώνει πως η μέθοδος του ΘΜΠ μπορεί να ξεφύγει από τα στενά πλαίσια της συνάρτησης κόστους και πως μπορεί να επιτύχει τη ρύθμιση ενός υποδείγματος ΜΠ λαμβάνοντας υπόψη τη συμπεριφορά του παραγωγού έναντι του οικονομικού κινδύνου.

Ένα επιπλέον σημαντικό πλεονέκτημα της προτεινόμενης μεθόδου, το οποίο προκύπτει από τη χρήση της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας, είναι πως το τελικό υπόδειγμα οικονομικού κινδύνου μπορεί να λάβει υπόψη μια ενδεχόμενη μεταβολή του σταθερού μέρους του πλούτου, $W_{ini} = pay * land$ (σταθερά έσοδα – επιδότηση) το οποίο θεωρείται πως σε βραχυπρόθεσμο διάστημα, αντιπροσωπεύει στη σημερινή συγκυρία την ενιαία αποδεσμευμένη ενίσχυση που λαμβάνουν οι παραγωγοί στα πλαίσια της αναθεωρημένης ΚΑΠ. Αυτό είναι εφικτό λόγω της μη γραμμικής σχέσης του W_{ini} με τη μεταβλητή απόφασης χ στον κλασματικό όρο της αντικειμενικής συνάρτησης. Η δυνατότητα αυτή είναι πολύ σημαντική, αφού το υπόδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκ των προτέρων ανάλυση των επιπτώσεων πολιτικής επιδοτήσεων. Αυτές οι επιδοτήσεις ενισχύουν το εισόδημα των αγροτών χωρίς να συνδέονται με την μία ή την άλλη καλλιέργεια, αλλά παρόλα αυτά αναμένεται να επηρεάσουν τις καλλιεργητικές αποφάσεις των παραγωγών.

Παρά τα παραπάνω πλεονεκτήματα, το υπόδειγμα διατηρεί ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των κλασικών υποδειγμάτων ΘΜΠ το οποίο αποτελεί την κύρια αιτία για την κριτική που δέχεται η συγκεκριμένη μέθοδος ρύθμισης. Συγκεκριμένα, η εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων στηρίζεται σε ένα υποπροσδιορισμένο σύστημα εξισώσεων (οι άγνωστοι είναι περισσότεροι από τις εξισώσεις), κάτι που σημαίνει πως αυτό μπορεί να έχει άπειρες λύσεις. Η χρήση του κριτηρίου της μέγιστης εντροπίας αμβλύνει το πρόβλημα, ωστόσο προσθέτει σημαντικό ποσό μεροληψίας στην τελική λύση γιατί οι υποστηρικτικές τιμές που επιλέγονται από τον αναλυτή είναι συνήθως αυθαίρετες.

Η προτεινόμενη μέθοδος ρύθμισης καταφέρνει να περιορίσει το πρόβλημα της μεροληψίας – χωρίς ωστόσο να το εξαφανίζει – αφού οι υποστηρικτικές τιμές ορίζονται σε σχέση με υπάρχουσες παραμέτρους της εκμετάλλευσης και άρα εντός ρεαλιστικών και μη αυθαίρετων ορίων με πραγματική οικονομική ή αγρονομική σημασία, μειώνοντας έτσι τη μεροληψία κατά τη φάση της εκτίμησης. Για παράδειγμα, τα άγνωστα στοιχεία του «πραγματικού» πίνακα συνδιακύμανσης της εκμετάλλευσης (τιμές και αποδόσεις καλλιεργειών) μπορούν να προκύψουν από υπάρχουσες χρονοσειρές δεδομένων. Ιδιαίτερα όμως για τις αποδόσεις, η χρήση του δυναμικού παραγωγής ως υποστηρικτικό σημείο για την εκτίμηση των «πραγματικών» αποδόσεων κάθε εκμετάλλευσης ενισχύει τη διεπιστημονική προσέγγιση αφού εισάγει τεχνικά ή «γεωπονικά» στοιχεία στο οικονομικό υπόδειγμα.

Το τελικό οικονομικό υπόδειγμα εμφανίζει υπολογιστικές δυσκολίες στην επίλυση του, αφενός λόγω του μεγάλου αριθμού μη γραμμικών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών του και αφετέρου εξαιτίας της ασυμπτωτικής μορφής της λογιστικής συνάρτησης απόδοσης κάτι που συνεπάγεται αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ. Όλα τα παραπάνω οδήγησαν σε κάποιες περιπτώσεις να εμφανίζονται προβλήματα και αδυναμία επίλυσης του υποδείγματος με το λογισμικό GAMS. Η αντιμετώπιση των υπολογιστικών αυτών προβλημάτων ήταν και το κυρίως αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής με στόχο να εξασφαλίσουμε ότι σε κάθε περίπτωση θα βρίσκεται τουλάχιστον ένας συνδυασμός παραμέτρων που θα επιλύουν το πρόβλημα για κάθε φάρμα.

Αρχικά λοιπόν αλλάξαμε το λογισμικό υλοποίησης του μοντέλου και το κατασκευάσαμε από την αρχή στο λογισμικό MATLAB. Με αυτό είχαμε την δυνατότητα να δώσουμε σε όλες τις μεταβλητές του προβλήματος άνω και κάτω όριο τιμών μέσα στο οποίο ο αλγόριθμος της MATLAB αναζητούσε την λύση ελαχιστοποιώντας έτσι κατά πολύ τον χρόνο επίλυσης της βελτιστοποίησης. Ο αριθμός των επαναλήψεων σε μία βελτιστοποίηση εξαρτάται από τα κριτήρια τερματισμού της μεθόδου που χρησιμοποιείται. Τα κριτήρια αυτά διαθέτουν ανοχές που μπορούν να τροποποιηθούν όπως το Step Tolerance το ConstraintTolerance και το Function Tolerance. Η ανοχή Step Tolerance είναι ένα κατώτατο όριο στο μέγεθος του βήματος x δηλαδή στο $|(x_i - x_{i+1})|$. Όταν ο αλγόριθμος επιχειρήσει βήμα μικρότερο της τιμής Step Tolerance η επαναληπτική διαδικασία σταματά. Η ανοχή ConstraintTolerance είναι ένας αριθμός που αντιπροσωπεύει το σχετικό μέγιστο ποσό σε σχέση με το οποίο οι περιορισμοί μπορούν να παραβιαστούν αλλά να εξακολουθούν να επιτρέπουν μία επιτυχή σύγκλιση. Τέλος η ανοχή Function Tolerance είναι ένα κατώτατο όριο διαφοράς της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης σε ένα βήμα. Εάν δηλαδή η διαφορά $|f(x_i) - f(x_{i+1})|$ είναι μικρότερη της τιμής Function Tolerance η επαναληπτική διαδικασία πάλι σταματά.

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήσαμε τρεις διαφορετικούς αλγόριθμους του solver fmincon ο οποίος ενδείκνυται για μη γραμμικά προβλήματα. Συγκεκριμένα αρχικά επιλύσαμε το πρόβλημα με τον interior-point ο οποίος είναι κατάλληλος τόσο για μεγάλα αραιά προβλήματα όσο και για μικρά και πυκνά (large sparse problems - dense problems). Στην συνέχεια λύσαμε το πρόβλημα με τον αλγόριθμο sqp όπου παρατηρήσαμε ότι οι λύσεις ήταν πολύ κοντά με του interior-point. Τέλος λύσαμε ξανά το πρόβλημα με τον sqp χρησιμοποιώντας όμως αυτή την φορά σαν αρχικές τιμές για τις μεταβλητές από όπου θα αρχίσει ο solver να ψάχνει λύση τις λύσεις που μας έδωσε ο interior-point, μία τεχνική που χρησιμοποιείται συχνά στα προβλήματα βελτιστοποίησης.

Με τις παραπάνω τεχνικές καταφέραμε να φτιάξουμε ένα υπόδειγμα καλά δομημένο το οποίο κατάφερε να ρυθμιστεί δηλαδή να αναπαράγει τις παρατηρήσεις που είχαμε για το έτος βάσης για κάθε μία από τις 48 μονάδες απόφασης (φάρμες) του αρχικού υποδείγματος αλλά και πρόσθετες που εξετάσαμε για επαλήθευση. Μία εναλλακτική πρόταση για μελλοντική επέκταση της εργασίας είναι η χρήση γενετικών αλγορίθμων για την βελτιστοποίηση.

6 Βιβλιογραφία

Baumol, W. J. (1963). An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio. *Management Science, 10*(1), 174-182.

Bruce McCarl, Thomas Spreen. (1980). Price Endogenous Mathematical Programming As a Tool for Sector Analysis. *American Journal of Agricultural Economics, 62*(1), 87-102.

Freund, R. J. (1956). The Introduction of Risk into a Programming Model. *Econometrica, 24*(3), 253-263.

Hardacker J. B., Huirne J. R., Anderson J. R. & Lien G. (2004). *Copying with Risk in Agriculture.*

Howitt, R. E. (1995a, May). A calibration method for agricultural economic production models. *Journal of Agricultural Economics, 46*(2), 147-159.

Howitt, R. E. (1995b, May). Positive Mathematical Programming. *American Journal of Agricultural Economics, 77*(2), 329–342.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance, 7*(1), 77-91.

Peter B. R. Hazell , R. D. Norton. (1987). Mathematical Programming for Economic Analysis in Agriculture. *American Journal of Agricultural Economics*.

Petsakos A., Rozakis S. (2015). Calibration of agricultural risk programming models. *European Journal of Operational Research, 242*(2), 536-546.

Petsakos A., Rozakis S., Tsiboukas K. (2009). Risk optimal farm plans in the context of decoupled subsidy payments: the case of cotton production in Thessaly. *Journal of, 13*(7), 467-483.

Quirino Paris, Richard E. Howitt. (1998, February). An Analysis of Ill-Posed Production Problems Using Maximum Entropy. *American Journal of Agricultural Economics, 80*(1), 124–138.

Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies, 25*(2), 65-86.

Williams, P. H. (2013). *Model Building in Mathematical Programming (5th edition).*

Πετσάκος, Α. (2012). Μία βιο-οικονομική Προσέγγιση στην Κατασκευή Υποδειγμάτων Προγραμματισμού Δραστηριοτήτων των γεωργικών Εκμεταλλεύσεων. Εφαρμογή Ανάλυσης Πολιτικής στον Τομέα των αροτραίων καλλιεργειών - A bio-economic approach to building farm activity programming models.