Ε Λ Λ Η Ν Ι Κ Η Δ Η Μ Ο Κ Ρ Α Τ Ι Α
ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2015-17

ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ
Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ & ΑΝΑΛΥΣΗ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

(ΠΔ 97 /2015/ΦΕΚ 163Α'/20.08.2014)

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΠΥΡΩΝ (COMBINED MISSILE ALLOCATION STRATEGIES)

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Υπό:

ΧΡΗΣΤΟΥ ΤΣΙΩΡΑ

Α.Μ.: 2014018019

ΙΟΥΝΙΟΣ 2020

Η Μεταπτυχιακή Διατριβή του Τσιώρα Χρήστου εγκρίνεται:

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Καθηγητής Δάρας Νικόλαος (Επιβλέπων) ,…………………………………..

Καθηγητής Παπαδάκης Νικόλαος ,…………………………………..

Καθηγητής Τσαφαράκης Στέλιος ,…………………………………..

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σ 'αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που όλο το χρονικό διάστημα υπήρξε ένα ιδιαίτερο στήριγμα για εμένα προκειμένου να ολοκληρώσω τις σπουδές μου πάνω στη Σχεδίαση και Επεξεργασία συστημάτων. Επίσης θα ήθελα να εκφράσω ένα βαθύτατο ευχαριστώ στον καθηγητή μου κύριο Νικόλαο Δάρα για την κατανόηση και την υποστήριξη, που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια του συγκεκριμένου κύκλου σπουδών.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύσσονται κάποιες μελέτες σχετικά με το πρόβλημα κατανομής στόχων και πυραύλων. Αρχικά γίνεται μία μικρή αναφορά πάνω στον ορισμό του βασικού προβλήματος, που απασχολεί την κατανομή στόχων και πυραύλων. Η παρούσα διπλωματική εργασία απαρτίζεται από τρία κεφάλαια, τα οποία εξετάζουν το πρόβλημα κατανομής στόχων και πυραύλων από διαφορετικές οπτικές γωνίες.

Αρχικά στο πρώτο κεφάλαιο αναλύονται τα βασικά στοιχεία, που απαρτίζουν το συγκεκριμένο πρόβλημα. Τέτοια στοιχεία είναι τα χαρακτηριστικά, που διαθέτει τόσο ο επιτιθέμενος όσο και ο αμυνόμενος. Επίσης αναλύονται τα χαρακτηριστικά, που διαθέτουν οι στόχοι και αυτά τα χαρακτηριστικά παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη διαδικασία κατανομής πυραύλων. Έπειτα γίνεται μία αναφορά σχετικά με το σενάριο της μάχης, που εξετάζει το πρόβλημα κατανομής στόχου και το συγκεκριμένο σενάριο βασίζεται πάνω στην αρχή της αμοιβαίας ανίχνευσης. Τα δύο τελευταία στοιχεία, που αναλύονται στο πρώτο κεφάλαιο είναι οι πληροφορίες, που μπορεί να κατέχουν οι δύο αντίπαλες δυνάμεις και τα μέτρα αποτελεσματικότητας, που ορίζονται πριν την έναρξη της μάχης προκειμένου να αξιολογηθεί το αποτέλεσμα της κατανομής, που έχει γίνει.

Το δεύτερο κεφάλαιο ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής στόχων – πυραύλων και αναλύει διάφορες καταστάσεις. Μερικές από τις καταστάσεις, που εξετάζει είναι όταν ο επιτιθέμενος διαθέτει την τελευταία κίνηση, όταν ο αμυνόμενος έχει την τελευταία κίνηση, όταν ο επιτιθέμενος επιτίθεται εναντίον του συστήματος άμυνας του εχθρού, όταν και οι δύο πλευρές (επιτιθέμενος - αμυνόμενος) χρησιμοποιούν στρατηγικές αξιολόγησης των ζημιών τους. Επιπροσθέτως στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται στρατηγικές, οι οποίες είναι προσανατολισμένες στον επιτιθέμενο και στρατηγικές όπου ο αμυνόμενος και ο επιτιθέμενος εξετάζονται κάτω από ειδικές καταστάσεις. Τέλος το συγκεκριμένο κεφάλαιο εξετάζει τις στρατηγικές άμυνας, που χρησιμοποιούνται εναντίον ενός στόχου – σημείο.

Στο τελευταίο κεφάλαιο εξετάζονται άλλου είδους στρατηγικές κατανομής στόχων και πυραύλων. Μία απ’ αυτές είναι οι στρατηγικές, οι οποίες περιλαμβάνουν ομοιώματα και εξετάζονται από το πρίσμα και των δύο πλευρών. Επίσης εξετάζονται οι στρατηγικές, οι οποίες περιλαμβάνουν στόχους ευκαιρίας και μάλιστα με τρόπο είτε τυχαίο είτε διαδοχικό. Επίσης εξετάζονται οι στρατηγικές με συγκεκριμένες παραδοχές στόχου, όπως η μείωση της αξίας του στόχου καθώς περνάει ο χρόνος ή οι στόχοι που συμπληρώνουν άλλους στόχους.

ABSTRACT

In the present thesis some studies are developed on the target allocation problem. Initially, a brief reference is made to the definition of the main problem, which concerns the allocation of targets and missiles. This thesis consists of three chapters, which examine the target allocation problem from different perspectives.

First, the first chapter analyzes the key elements that make up this problem. Such elements are the characteristics that both the attacker and the defender have. The characteristics of the targets are also analyzed and these characteristics play a very important role in the missile allocation process. Then there is a reference on the battle scenario, which examines the problem of target distribution, and this scenario is based on the principle of mutual detection. The last two elements, which are analyzed in the first chapter, are the information that the two opposing forces may have and the measures of effectiveness, which are defined before the start of the battle in order to evaluate the result of the allocation that has been made.

The second chapter deals with the problem of distribution of targets - missiles and analyzes various situations. Some of the situations considered to be when the attacker has the last move, when the defender has the last move, when the attacker attacks the enemy's defense system, when both sides (attacker - defender) use damage assessment strategies. In addition, this chapter examines strategies aimed at the attacker and strategies where the defender and the attacker are examined under special situations. Finally, this chapter examines the defense strategies used against a point target.

The last chapter examines other types of target – missile allocation strategies. One of them is the strategies, which include dummies and are examined from the perspective of both sides. Strategies are also considered, which include opportunity targets, either randomly or sequentially. Strategies with specific target assumptions are also considered, such as reducing the value of the target as time passes or targets complement other targets.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΥΡΑΥΛΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΧΩΝ

Ο ορισμός του προβλήματος μπορεί ν' αποδοθεί πολύ απλά με μία πρόταση. Η πρόταση είναι η εξής. Δοσμένης μία στρατιωτικής δύναμης και ένα σύνολο στόχων, ποια είναι η ιδανική κατανομή των οπλικών συστημάτων της δύναμης για τους συγκεκριμένους στόχους. Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί ν' αναλυθεί υπό το πρίσμα δύο οπτικών γωνιών:

- Από την οπτική του επιτιθέμενου και
- Από την οπτική του αμυνόμενου.

Όσον αφορά την οπτική του επιτιθέμενου αυτή αφορά στην κατανομή, που πρέπει να γίνει στα όπλα του, προκειμένου να επιτεθούν στους ανατιθέμενους στόχους και πιθανώς στα συστήματα άμυνας του εχθρού.

Όσον αφορά την οπτική του αμυνόμενου, αυτή αφορά στην κατανομή που πρέπει να γίνει στους αμυντικούς πυραύλους, προκειμένου να προστατέψουν ένα στόχο – σημείο ή μία ομάδα στόχων, που θέλει να προσβάλει ο εχθρός.

Υπάρχουν πάρα πολλά στοιχεία, που απαρτίζουν την κατανομή στόχων. Αυτά μπορούν ν' αναλυθούν στα εξής:

- Δύναμη του επιτιθέμενου,
- Δύναμη του αμυνόμενου,
- Το σενάριο της μάχης,
- Η πολυπλοκότητα και η σύνθεση του εχθρού,
- Οι πληροφορίες, που κατέχουν και οι δύο αντιμαχόμενες πλευρές και τέλος,
- Τα κριτήρια, πάνω στα οποία βασίστηκε η αποτελεσματικότητα της στρατηγικής κατανομής στόχων

Η συγκεκριμενοποίηση των παραμέτρων των έξι στοιχείων καθορίζουν αρχικά την πολυπλοκότητα, τη φύση και το πεδίο εφαρμογής του συγκεκριμένου προβλήματος κατανομής. Η λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ο καθορισμός μίας στρατηγικής κατανομής στόχων, που βελτιστοποιεί τους στόχους, που θέτει η δύναμη που επιδιώκει τη στρατηγική κατανομής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{\text{Ο}}$: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΤΟΧΩΝ

1.1 Ο επιτιθέμενος

Το πρώτο στοιχείο, που εξετάζουμε στο πρόβλημα των στρατηγικών κατανομής στόχων είναι ο επιτιθέμενος. Ο επιτιθέμενος στην προκειμένη περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι μία δύναμη, η οποία έχει στην κατοχής της τακτικούς πυραύλους, οι οποίοι μπορούν να πλήξουν μία αμυνόμενη δύναμη από μεγάλη απόσταση. Στην πλειονότητα της σχετικής βιβλιογραφίας μπορούμε να πούμε ότι αυτή η δύναμη αυτή χαρακτηρίζεται από τρία κύρια χαρακτηριστικά, τα οποία είναι τα παρακάτω:

- Η στρατηγική της επίθεσης,
- Οι τύποι των οπλικών συστημάτων, που έχει στην κατοχής της και τέλος,
- Οι δυνατότητες των συγκεκριμένων οπλικών συστημάτων.

Ξεκινώντας από την στρατηγική της επίθεσης αυτή μπορεί να εξεταστεί υπό το πρίσμα τριών συνιστωσών. Η πρώτη συνιστώσα ασχολείται με το εάν η επίθεση γίνεται ταυτόχρονα και με τη χρησιμοποίηση όλων των διατιθέμενων οπλικών συστημάτων ή είναι μία επίθεση, η οποία πραγματοποιείται σε στάδια, τα οποία στάδια μπορεί να εκτελούνται χρονικά σε ίσες μοιρασμένες φάσεις ή πραγματοποιούνται σε φάσεις, οι οποίες δεν είναι ίσα κατανεμημένες. Η διαδοχική κυματική επίθεση συνήθως συνοδεύεται από εκτιμήσεις της επίθεσης. Ο επιτιθέμενος μπορεί να παρατηρήσει τα σημεία πρόσκρουσης των όπλων του και να προσαρμόσει τα σημεία στόχου των επακόλουθων όπλων ανάλογα, ώστε να αντισταθμιστεί και να επιδιώξει σφάλματα ή αποτελέσματα διασποράς. Μπορεί επίσης να εκτελέσει μια εκτίμηση ζημιών στο τέλος κάθε κύματος, και στα όπλα του μόνο σε επιζήσαντες στόχους. Η προηγούμενη εκτίμηση ονομάζεται στρατηγική" shoot-adjust-shoot ", ενώ η δεύτερη ονομάζεται"shoot-look-shoot "στρατηγική.

Η δεύτερη συνιστώσα εξετάζει περισσότερο εάν ο επιτιθέμενος εκτελεί πυρά εναντίον όλων των στόχων του αμυνόμενου ή απλά εκτελεί πυρά εναντίον ενός υποσυνόλου μίας ομάδας στόχων. Όπως είναι φυσικό όλοι οι στόχοι δεν έχουν την ίδια αξία και επομένως συνδέονται και με μία πιθανότητα καταστροφής, η οποία εξαρτάται πολλές φορές από τα χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου στόχου. Τέτοια χαρακτηριστικά μπορεί να είναι η θέση του, η σκληρότητά του, ο τύπος και οι άμυνες, που διαθέτει για την αυτοπροστασία του. Εάν ο στόχος του επιτιθέμενου είναι να μεγιστοποιήσει τις απώλειες του αμυνόμενου με το λιγότερο δυνατό κόστος, που αυτό είναι η χρησιμοποίηση των λιγότερων δυνατών οπλικών του συστημάτων, θα πρέπει να σκεφτεί πολύ σοβαρά να προσβάλει εκείνο το υποσύνολο των στόχων, που επιφέρουν στον αμυνόμενο υψηλά ποσοστά απωλειών και να επιλέξει εκείνους τους στόχους, που έχουν τις καλύτερες πιθανότητες καταστροφής.

Μία ακόμη ανησυχία για τον επιτιθέμενο είναι η κατανομή των οπλικών του συστημάτων σε στόχους και συστήματα άμυνας, τα οποία περιέχουν εγκαταστάσεις διοίκησης και επικοινωνίας ή περιοχές εκτόξευσης πυραύλων. Ο επιτιθέμενος μπορεί να επιλέξει να εκτελέσει μέρος από τα πυρά του στα αμυντικά συστήματα του αμυνόμενου σε μία προσπάθεια να τα καταστρέψει και μ’ αυτό τον τρόπο ν’ αυξήσει την πιθανότητα τα όπλα του να διεισδύσουν στην άμυνα του και μ’ αυτό τον τρόπο να επιτύχουν τους στόχους τους. Η βέλτιστη κατανομή όπλων σε στόχους αξίας και σε στόχους αμυντικού συστήματος υπό διαφορετικές παραδοχές και συνθήκες περιλαμβάνει μία κατηγορία του προβλήματος κατανομής πυραύλων. Ένας επιτιθέμενος, ο οποίος επιθυμεί να προκαλέσει μεγιστοποίηση της καταστροφής του στόχου χρησιμοποιώντας το ελάχιστο οικονομικό κόστος, μία πιθανή στρατηγική επίθεσης, που θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει είναι ένα μίγμα αληθινών πυραύλων και φθηνών ομοιωμάτων ή ν’ αντικαταστήσει καλύτερα (σε όρους απόδοσης) αλλά πιο ακριβούς πυραύλους με αριθμητικά καλύτερη δύναμη φθηνότερων πυραύλων σχετικά χαμηλών επιδόσεων. Χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη στρατηγική ο επιτιθέμενος ελπίζει να μπορέσει να εφαρμόσει δύο αποτελέσματα, τα οποία θα του επιτρέψουν να υποβαθμίσει την ικανότητα και την αποτελεσματικότητα των αμυντικών συστημάτων του αμυνόμενου ν’ αντιμετωπίσει την επίθεσή του. Αυτά τα’ αποτελέσματα είναι τα παρακάτω :

- Το αποτέλεσμα κορεσμού και
- Το αποτέλεσμα της εξάντλησης.

Όσον αφορά το αποτέλεσμα του κορεσμού αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής. Ο κορεσμός σε μία αμυντική δύναμη φτάνει όταν ο αριθμός των επιτιθέμενων όπλων, που φτάνει σ’ αυτή ταυτόχρονα μέσα στη ζώνη ευθύνης της είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό, που είναι ικανή να εμπλέξει. Όπως είναι φυσικό η συγκεκριμένη δύναμη θα πρέπει να επιλέξει με ποια οπλικά συστήματα θα ασχοληθεί, προκειμένου να έχει τις λιγότερες δυνατές απώλειες. Αυτό βέβαια δίνει ένα πλεονέκτημα στον επιτιθέμενο να εμπλέξει στόχους, χωρίς να έχει κάποια αντίσταση απέναντί του (διαρροή). Έχοντας μια αριθμητικά μεγαλύτερη δύναμη των όπλων, ο επιτιθέμενος ελπίζει να προκαλέσει αυτή την κατάσταση κατά την επίθεσή του στους στόχους.

Έπειτα έχουμε το αποτέλεσμα της εξάντλησης. Το αποτέλεσμα της εξάντλησης εκφράζεται με την εκτόξευση μεγαλύτερου αριθμού όπλων εναντίον ενός σταθερού αποθέματος αμυντικών πυραύλων. Μ' αυτόν τον τρόπο ο επιτιθέμενος δελεάζει τον αμυνόμενο να χρησιμοποιήσει όλους τους πυραύλους, που έχει στη διάθεση του. Ο επιτιθέμενος επιδιώκει το συγκεκριμένο αποτέλεσμα διότι μ' αυτόν τον τρόπο ο αμυνόμενος προκειμένου να υπερασπιστεί τα οπλικά του συστήματα θα εξαντλήσει το απόθεμα του σε πυραύλους, ενώ ο επιτιθέμενος θα έχει εκτοξεύσει πυρά με τέτοιο τρόπο ώστε να μην χρειαστεί να εξαντλήσει το απόθεμά του. Σε αυτό το σημείο, οι στόχοι γίνονται ανεξέλεγκτοι και θα είναι πιο ευάλωτοι.

Συνεχίζοντας με το δεύτερο χαρακτηριστικό, το οποίο προσδιορίζει μία δύναμη, που είναι οι τύποι των οπλικών συστημάτων, που έχει στη διάθεσή της μία δύναμη, μπορούμε να πούμε ότι μία δύναμη μπορεί να έχει στην κατοχή ένα και μόνο ένα συγκεκριμένο τύπο ενός οπλικού συστήματος ή να απαρτίζεται από μία σειρά διαφορετικών οπλικών συστημάτων. Ένας μόνος συγκεκριμένος τύπος όπλου σημαίνει ότι κάθε μεμονωμένο βλήμα έχει τα ίδια φυσικά χαρακτηριστικά και χαρακτηριστικά απόδοσης όπως μέγεθος, βάρος, εμβέλεια, ακρίβεια, υπογραφή ραντάρ, ωφέλιμο φορτίο και απόδοση, αξιοπιστία και διαθεσιμότητα και θα αντιμετωπίζονται ως ταυτόσημες οντότητες στην ανάλυση. Επιπροσθέτως η επιτιθέμενη δύναμη μπορεί να αποτελείται από ένα συνδυασμό διαφορετικών τύπων οπλικών συστημάτων, τα οποία διαθέτουν διαφορετικό ωφέλιμο φορτίο, διαφορετική ακρίβεια πάνω στο στόχο, διαφορετική απόδοση κλπ. Επίσης μπορεί ν' αποτελείται από ένα μείγμα πραγματικών βλημάτων ή ομοιωμάτων, τα οποία είναι πύραυλοι dummy και χρησιμοποιούνται προκειμένου να εξαπατήσουν την άμυνα του αντιπάλου και ν' εκμεταλλευτούν τα οφέλη, που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της εξάντλησης και του κορεσμού. Αυτά τα ομοιώματα είναι απλώς ένα παράδειγμα ενός μέσου διείσδυσης για τα πραγματικά όπλα που στοχεύουν τους στόχους. Αυτά τα συγκεκριμένα μέσα διείσδυσης διευκολύνουν τη διείσδυση των κύριων οπλικών συστημάτων μέσα από τα αμυντικά συστήματα του αμυνόμενου να επιτύχουν τους επιδιωκόμενους στόχους. Άλλα μέσα διείσδυσης περιλαμβάνουν όπλα που στοχοποιούν τα συστήματα άμυνας, τα chaffs και τα ηλεκτρονικά αντίμετρα.

Τελειώνοντας το τρίτο χαρακτηριστικό, που προσδιορίζει μία δύναμη είναι οι δυνατότητες, που έχουν τα οπλικά συστήματα, που έχει στη διάθεσή της η δύναμη. Η ικανότητα του επιτιθέμενου όπλου να καταστρέφει έναν στόχο στον οποίο απευθύνεται εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά απόδοσής του. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω :

- Η μέγιστη εμβέλεια του όπλου,
- Η διαθεσιμότητα του όπλου να εκτελέσει αποστολή εκτόξευσης πυρών σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο,
- Η ακρίβεια σκόπευσης του όπλου,
- Η απόδοση του όπλου – η ικανότητα καταστροφής της πολεμικής κεφαλής του όπλου,
- Το ωφέλιμο φορτίο του όπλου, που μπορεί να παραδοθεί – ο αριθμός των πολεμικών κεφαλών, που μπορεί να κουβαλήσει η πλατφόρμα παράδοσης,
- Η βιωσιμότητα του όπλου, η οποία μπορεί να επηρεαστεί από διάφορους παράγοντες όπως η ταχύτητα, το προφίλ πτήσης και η υπογραφή ραντάρ και τέλος,
- Η αξιοπιστία του όπλου. Αυτή αξιολογείται με βάση εάν το όπλο μπορεί να φτάσει το στόχο χωρίς να χρειαστεί να υποβαθμίσει την ακρίβεια ή το ωφέλιμό του φορτίο.

Σε πολλές αναλυτικές μελέτες, αυτοί οι μεμονωμένοι παράγοντες συσσωματώνονται μαζί σε παραμέτρους που αντικατοπτρίζουν τα συνδυασμένα αποτελέσματά τους, π.χ. η αξιοπιστία και η ακρίβεια ενός όπλου μπορεί να εκφραστεί ως μία μοναδική ποσότητα που ονομάζεται ευκολία στην επίτευξη του στόχου στον οποίο απευθύνεται, ενώ το ωφέλιμο φορτίο και η απόδοση του όπλου μπορούν να συνδυαστούν μαζί με τη σκληρότητα του στόχου σε μία μόνο παράμετρο που ονομάζεται ακτίνα αποτελεσματικότητας του όπλου. Οι «περίπλοκες» ποσότητες μπορούν να απλοποιήσουν σημαντικά τις επόμενες φυσικές αναλύσεις, αλλά πρέπει να χρησιμοποιηθούν με προσοχή για δύο λόγους:

- Ο πρώτος λόγος είναι ο τρόπος με τον οποίο οι φυσικώς άνισοι συνθετικοί παράγοντες συνδυάζονται σε μία μόνο ποσότητα μπορεί επίσης να υπόκεινται σε συζήτηση ως προς το σχετικό βάρος τους και
- Ο δεύτερος λόγος ότι δεν είναι φυσικές ποσότητες που είναι άμεσα μετρήσιμες και για να αποκτήσουν αριθμητικές τιμές γι 'αυτές σε συγκεκριμένες περιπτώσεις μπορεί να συνεπάγονται κουραστικό πειραματισμό και συλλογή δεδομένων.

1.2 Ο αμυνόμενος

Η αμυνόμενη δύναμη είναι συνήθως μία δύναμη, η οποία διαθέτει πυραυλικά συστήματα εδάφους – αέρος σε γενικές γραμμές και μπορεί να καθοριστεί με δύο βασικά χαρακτηριστικά. Αυτά είναι τα εξής:

- Η στρατηγική άμυνας, που ακολουθεί η δύναμη και
- Οι δυνατότητες και οι τύποι των πυραύλων, που έχει στην κατοχή της η δύναμη.

Η κατάλληλη (ή βέλτιστη) αμυντική στρατηγική εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το τι γνωρίζει ο αμυνόμενος για τα σχέδια, τις δυνατότητες και τους πόρους του επιτιθέμενου. Δεδομένης της έκτασης των πληροφοριών σχετικά με τον επιτιθέμενο και των πόρων που διαθέτει, η αμυντική στρατηγική μπορεί να διχοτομηθεί με διάφορους τρόπους.

Η πρώτη διχοτόμος αφορά την κατανομή μεταξύ τοπικών (τερματικών) και πυραύλων περιοχών. Κάθε στόχος μπορεί να υποστηριχθεί από ένα μείγμα τοπικών βλημάτων που του έχουν διατεθεί πριν από την επίθεση, και πυραύλους περιοχής που μπορούν να καλύψουν οποιοδήποτε στόχο μέσα σε κάποιο καθεστώς προστασίας. Η αμυντική στρατηγική στην προκειμένη περίπτωση αφορά τους σχετικούς αριθμούς κάθε τύπου που θα διατεθούν στον στόχο και την πολιτική εκτόξευσης.

Στη συνέχεια έχουμε τη δεύτερη διχοτόμο, που είναι η στρατηγική της κατανομής εναντίον της στρατηγικής τη μη προ-κατανομής. Στην πρώτη περίπτωση, καθορίζεται ένας συγκεκριμένος αριθμός πυραύλων για την υπεράσπιση κάθε στόχου, ανάλογα με την αξία του. Οι άμυνες προ-κατανομής απαιτούν η άμυνα να παρακολουθεί επακριβώς τον αριθμό των όπλων του επιτιθέμενου, που έχουν στραφεί σε κάθε στόχο για να αποφασίσει αν θα διαθέσει ή όχι ένα βλήμα εναντίον του επόμενου όπλου που προσεγγίζει τον στόχο. Όταν αυτό δεν είναι δυνατό, μπορεί να είναι δυνατή μια στρατηγική μη προ-κατανομής (ή στρατηγική ομάδας προτίμησης), όπου η ομάδα - στόχος χωρίζεται σε διαφορετικά υποσύνολα και ένα τμήμα του αμυντικού αποθέματος κατανέμεται σε καθένα από τα υποσύνολα στόχους.

Τελειώνοντας έχουμε την τρίτη διχοτόμο, η οποία ασχολείται με το κατά πόσον η αμυντική στρατηγική είναι προσανατολισμένη στο στόχο ή είναι προσανατολισμένη στον επιτιθέμενο. Στην πρώτη περίπτωση ο αμυνόμενος επιλέγει πυραύλους με τους οποίους θα προσβάλει συγκεκριμένους στόχους. Σε ορισμένες περιπτώσεις, ο αμυνόμενος λέει ότι δεν είναι σε θέση να καθορίσει ποιος στόχος κατευθύνεται εναντίον του όπλου εγκαίρως για να πραγματοποιήσει μια ανίχνευση αν είναι επιθυμητό (αξιολόγηση επίθεσης). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο αμυνόμενος πρέπει να εφαρμόσει μία στρατηγική, η οποία είναι προσανατολισμένη στον επιτιθέμενο, αντί του οποίου οι πύραυλοι ανατίθενται σε κάθε εισερχόμενο στόχο.

1.3 Τα χαρακτηριστικά των στόχων

Κάθε στόχος μπορεί να διαθέτει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Η αξία, που αποδίδεται στον συγκεκριμένο στόχο,
- Ο τύπος του στόχου και τέλος,
- Οι άμυνες, που σχετίζονται με το στόχο.

Ξεκινώντας με το πρώτο χαρακτηριστικό μπορεί να ειπωθεί ότι η αξία ενός στόχου στο πρόβλημα κατανομής πυραύλων – στόχων είναι ένα πολύ σημαντικό στοιχείο και αυτό συμβαίνει διότι ο συνήθης σκοπός ή το μέτρο αποτελεσματικότητας που χρησιμοποιούνται στην σύγκριση εναλλακτικών στρατηγικών κατανομής είναι η αναμενόμενη τιμή της αξίας του στόχου, που καταστράφηκε. Στις περισσότερες περιπτώσεις, θεωρείται ότι η αξία ή η στρατιωτική αξία που συνδέεται με έναν στόχο είναι η ίδια όπως αντιλαμβάνεται από την επίθεση ως προς την άμυνα, αν και στην πραγματικότητα πιθανώς δεν είναι. Και πάλι στις περισσότερες αναλύσεις, χρησιμοποιείται μία και μοναδική παράμετρος για τον προσδιορισμό της τιμής του στόχου, π.χ. ο πληθυσμός μίας πόλης που αποτελεί στόχο, αν και στην πραγματικότητα, πολλοί παράγοντες μπορεί να έχουν σημαντική στρατηγική αξία, π.χ. η βιομηχανική δυναμικότητα και οι στρατιωτικές εγκαταστάσεις.

Η τιμή ενός στόχου μπορεί να είναι σταθερή με το χρόνο, π.χ. ένα εργοστάσιο παραγωγής πυρομαχικών, ή μπορεί να ποικίλει ανάλογα με το χρόνο, π.χ. μια αεροπορική βάση από την οποία απογειώνονται αεροσκάφη ή μια πόλη της οποίας ο πληθυσμός εκκενώνεται γρήγορα. Οι κλίμακες αξίας θεωρούνται συνήθως γραμμικές, υπονοώντας, για παράδειγμα, ότι μια πόλη με δύο εκατομμύρια άτομα είναι διπλάσιας αξίας από μια πόλη με ένα εκατομμύριο ανθρώπους, ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι ισοδύναμα, μια υπόθεση που είναι γενικά ακατάλληλη. Ένας στόχος μπορεί να έχει μια έμμεση τιμή υπό την έννοια ότι δεν αποδίδεται καμία τιμή για την καταστροφή του, αλλά αν εξαλειφθεί, γίνεται ευκολότερη η συσσώρευση άμεσων τιμών από άλλους στόχους. Οι στόχοι έμμεσης εκτίμησης ονομάζονται μερικές φορές δευτερεύοντες στόχοι, ενώ οι στόχοι άμεσης αποτίμησης ονομάζονται πρωτεύοντες ή στόχοι αξίας. Παραδείγματα δευτερευόντων στόχων είναι σιλό πυραύλων, ραντάρ αεροπορικής άμυνας και κέντρα διοίκησης και ελέγχου.

Έπειτα το δεύτερο στοιχείο, που χαρακτηρίζει ένα στόχο και είναι εξίσου σημαντικό στο πρόβλημα κατανομής πυραύλων – στόχων είναι ο τύπος του στόχου. Σε πολλές μελέτες, που σχετίζονται με την κατανομή στόχων – πυραύλων γίνεται πάντα μία απλοποιημένη παραδοχή. Η συγκεκριμένη παραδοχή σχετίζεται με την αντιμετώπιση των στόχων. Έτσι πολλές φορές οι στόχοι αντιμετωπίζονται ως εμπιστευτικοί ως στόχοι – σημείο ή στόχοι περιοχής. Ένας στόχος θεωρείται στόχος - σημείο εάν η θανατηφόρος ακτίνα του επιθετικού όπλου είναι αρκετά μεγάλη σε σχέση με το μέγεθος του στόχου, έτσι ώστε ένα μόνο όπλο να μπορεί να καταστρέψει πλήρως τον στόχο. Εάν απαιτούνται περισσότερα από ένα όπλα για την κάλυψη του στόχου, θεωρείται στόχος περιοχής. Παραδείγματα στόχων περιοχής είναι μια μεγάλη αεροπορική βάση, μια πόλη ή ένα λιμάνι. Ωστόσο, ένα πεδίο με στόχους περιοχής θεωρείται ως μια συλλογή στόχων - σημείου εάν μπορεί να αναλυθεί σε μεμονωμένους στόχους - σημείο με τιμές που σχετίζονται με κάθε σημείο και όχι με το στόχο ως σύνολο. Ένας στόχος θεωρείται ότι είναι ανεξάρτητος από άλλους στόχους, εάν κανένα όπλο επίθεσης δεν μπορεί να καταστρέψει περισσότερους από έναν στόχους κάθε φορά, ενώ οι παράλληλοι στόχοι μπορούν να σκοτωθούν με ένα μόνο όπλο.

Τελειώνοντας το υποκεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το τρίτο χαρακτηριστικό, που είναι οι άμυνες, οι οποίες σχετίζονται με το συγκεκριμένο στόχο. Ένας στόχος μπορεί είτε να μην έχει καθόλου άμυνες, είτε να έχει μόνο τερματικές άμυνες, είτε να έχει άμυνες περιοχής μόνο, είτε να έχει ένα μείγμα και των δύο τύπων άμυνας. Σε μοντέλα που αντιμετωπίζουν έμμεσα την άμυνα, η αμυντική ικανότητα ενός στόχου δίνεται από την πιθανότητα διείσδυσης του στόχου (ή τις δυνατότητες για συνδυασμένη άμυνα περιοχής και τερματικού). Όταν εξετάζονται ορισμένες μεμονωμένες περιοχές άμυνας, μια περιοχή που αποτελείται από ένα υποσύνολο στόχων που υπερασπίζονται μια ενιαία αμυντική περιοχή, οι άμυνες σε έναν τομέα δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε άλλη περιοχή και οι πιθανότητες διείσδυσης σε κάθε περιοχή καθορίζονται χωριστά. Οι αμυντικές περιοχές ενδέχεται να επικαλύπτονται σε κάποιο βαθμό, έτσι ώστε ορισμένοι στόχοι να περιλαμβάνονται σε περισσότερες από μία αμυντικές περιοχές.

1.4 Το σενάριο της μάχης

Ένα κύριο μέρος των μελετών σχετικά με το πρόβλημα κατανομής στόχων - πυραύλων έχει αφιερωθεί σε στρατηγικές ανταλλαγές όπλων μεταξύ δύο υπερδυνάμεων. Δεδομένου ότι ο στρατηγικός πυρηνικός πόλεμος παραμένει εκτός του πεδίου της στρατιωτικής εμπειρίας, προτείνονται και αναλύονται πρότυπα για να παρέχονται στους υπεύθυνους λήψης αποφάσεων πληροφορίες σχετικά με τις πιθανές συνέπειες των αποφάσεων πολιτικής για την ανάπτυξη και την απασχόληση στρατηγικών πυρηνικών όπλων. Το σενάριο που συνήθως λαμβάνεται υπόψη βασίζεται στην αρχή της αμοιβαίας ανίχνευσης, δηλαδή στην απειλή μαζικών πυρηνικών αντιποίνων για την αποτροπή της επιθετικότητας. Για να το πετύχει αυτό, κάθε πλευρά διατηρεί μια μαζική και ασφαλή στρατηγική δύναμη που αναμένεται να διατηρήσει την ικανότητά της να επιφέρει καταστροφικά αντίποινα παρά την πρώτη επίθεση του εχθρού, που αποσκοπεί στη μείωση της δύναμης αντιποίνων (ασφαλής πολιτική καταστροφής).

Οι περισσότερες μελέτες υποθέτουν μια πυρηνική ανταλλαγή δύο επιθέσεων στην οποία κάθε πλευρά διαθέτει δύο είδη πλεονεκτημάτων:

- Πλεονεκτήματα αξίας, τα οποία αποτελούνται από βιομηχανικές, οικονομικές και κυβερνητικές εγκαταστάσεις και πληθυσμούς που συμβάλλουν στην οικονομική βιωσιμότητα της κοινωνίας. Οι επιτιθέμενοι σε αυτούς τους στόχους, έχουν ως στόχο να καταστρέψουν τον άλλο ως κοινωνικό και οικονομικό φορέα και
- Πλεονεκτήματα, που αποτελούνται από τύπους στρατηγικών όπλων με τους οποίους κάθε πλευρά μπορεί να προσβάλει την άλλη. Τέτοια στρατηγικά όπλα είναι τα πυρηνικά βομβαρδιστικά μεγάλης εμβέλειας, τα χερσαία Intercontinental Ballistic Missile (ICBM) αλλά και τα Submarine Launched Ballistic Missile (SLBM) που βρίσκονται σε υποβρύχια.

Ο πρώτος επιτιθέμενος μπορεί να διαθέσει τα στρατηγικά του όπλα ενάντια στο στρατηγικό οπλοστάσιο των αντιπάλων του σε μια αντι-επιχειρησιακή επίθεση, προκειμένου να μειώσει την αναμενόμενη βλάβη από αντίποινα πυρά στον εαυτό του ή μπορεί να στοχεύσει τους στόχους αξίας του αντιπάλου του, επιτυγχάνοντας έτσι το στόχο της βλάβης της οικονομικής του βιωσιμότητας, ή θα μπορούσε να συνδυάσει τις επιλογές αντιστάθμισης και αντιστάθμισης για να αποκτήσει μια βέλτιστη στρατηγική στόχευσης βασισμένη σε κάποια αντικειμενική λειτουργία. Επειδή θεωρείται ότι υπάρχει ανταλλαγή δύο επιθέσεων, δεν θα υπάρξουν περαιτέρω αντίποινα μετά τα αντίποινα της άλλης πλευράς. Επομένως ο πρώτος επιτιθέμενος διαθέτει όλα τα όπλα του σε μια πρώτη επίθεση και ο αντίπαλός του αντιδρά με όλα τα όπλα του μόνο ενάντια σε στόχους αξίας. Αυτό το βασικό σενάριο μπορεί να εμπλουτιστεί εξετάζοντας τις εφεδρικές δυνάμεις ή περισσότερες από δύο διαδοχικές επιθέσεις. Η επιλεκτική στόχευση απειλών και η προοδευτική στόχευση αντιπαράθεσης μπορεί επίσης να θεωρηθούν εναλλακτικά σενάρια της πραγματικής κατάστασης.

1.5 Τα μέτρα αποτελεσματικότητας της στρατηγικής κατανομής

Το κριτήριο της αποτελεσματικότητας που χρησιμοποιείται για τη σύγκριση των εναλλακτικών στρατηγικών ή για την εξεύρεση μιας «βέλτιστης» στρατηγικής σε μια δεδομένη κατάσταση καθορίζεται από τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων που αντιμετωπίζει το πρόβλημα. Η επιλογή ενός κατάλληλου μέτρου αποτελεσματικότητας καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τις φυσικές παραμέτρους του προβλήματος, όπως τα σχετικά μεγέθη αποθεμάτων, η φύση των στόχων, ο βαθμός γνώσης σχετικά με τα όπλα του αντιπάλου και η στρατηγική κατανομής, καθώς και οι πολιτικοί στόχοι και οι υποκειμενικές αντιλήψεις. Μια τέτοια επιλογή μπορεί να εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη διαίσθηση και επομένως να είναι κάπως αυθαίρετη. Σε πολλές μελέτες, ένα συγκεκριμένο μέτρο αποτελεσματικότητας επιλέγεται για τη μαθηματική του ικανότητα και όχι για την εγγύτητά του σε πραγματικούς πολιτικούς στόχους. Τα πιο συνηθισμένα μέτρα αποτελεσματικότητας, που χρησιμοποιούνται στο πρόβλημα κατανομής είναι τα παρακάτω:

- Η πιθανότητα να μην καταστραφεί κανένας στόχος αξίας - αυτό το μέτρο αποτελεσματικότητας είναι κατάλληλο εάν ο αριθμός των αμυντικών πυραύλων που είναι διαθέσιμοι σε ένα στόχο είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των επιθετικών όπλων που κατευθύνονται προς τον στόχο και η φύση του στόχου είναι τέτοια ώστε ακόμη και μία σχετικά μικρή ζημία που προκλήθηκε θα ήταν τόσο καταστροφική όσο μία μεγάλη ζημία,
- Η αναμενόμενη τιμή στόχου καταστράφηκε – αυτό το μέτρο αποτελεσματικότητας είναι κατάλληλο αν ο στόχος είναι ένας στόχος περιοχής ή μια σύνθεση πολλών σημειακών στόχων και οι δύο πλευρές γνωρίζουν το μέγεθος του αποθέματος του αντιπάλου,
- Η αναμενόμενη αξία του στόχου που εξάγεται για κάθε επιθετικό όπλο - αυτό το μέτρο αποτελεσματικότητας είναι κατάλληλο αν η άμυνα σχεδιάσει μια στρατηγική τέτοια ώστε το αναμενόμενο κλάσμα των καταστραμμένων στόχων να είναι ανάλογο του μεγέθους της επίθεσης. Αυτές είναι επίσης γνωστές ως αναπτύξεις 'Prim Read'.
- Το αναμενόμενο κόστος επίτευξης καταστροφής του στόχου, αυτό το μέτρο αποτελεσματικότητας χρησιμοποιείται σε μια κατάσταση όπου η επίθεση περιορίζεται σε διάφορα κύματα επίθεσης, αλλά μπορεί να συνεχίσει τις επιθέσεις έως

ότου καταστραφεί ο στόχος. Αυτή η στρατηγική επίθεσης χρησιμοποιείται στην περίπτωση που η επιχειρησιακή αξία ή η αξία του στόχου είναι πολύ υψηλή και ο αριθμός των όπλων που μπορεί να δαπανήσει ο εισβολέας για την καταστροφή του είναι ουσιαστικά απεριόριστος,

- Ο αναμενόμενος αριθμός επιθετικών όπλων που δεν παρεμποδίζονται από την άμυνα του αντιπάλου - χρησιμοποιείται αυτό το μέτρο αποτελεσματικότητας επειδή η αναμενόμενη αξία στόχου που καταστρέφεται σχετίζεται άμεσα με τον αριθμό των διεισδυτικών όπλων,
- Ο αναμενόμενος αριθμός όπλων που δαπανήθηκαν μέχρι την πρώτη διείσδυση - αυτό το μέτρο αποτελεσματικότητας είναι κατάλληλο αν ο επιτιθέμενος πυροδοτήσει ένα όπλο κάθε φορά ενάντια στον στόχο και η άμυνα δεν έχει πληροφορίες σχετικά με το μέγεθος του αποθέματος του επιτιθέμενου. Σε αυτή την περίπτωση, δεν είναι δυνατό για την άμυνα να σχεδιάσει μια στρατηγική η οποία ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κλάσμα των στόχων που καταστράφηκαν ή για να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να μην καταστραφεί κανένας στόχος αξίας.
- Ο αναμενόμενος αριθμός στόχων αξίας που θα επιζήσει μετά από ένα ορισμένο ποσοστό όλων των προσβολών ενός δεδομένου μεγέθους- σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιείται αυτό το μέτρο αποτελεσματικότητας. Είναι πιο δύσκολο να ασχοληθεί αναλυτικά, ωστόσο είναι εύκολο να αξιολογηθεί με τη χρήση των μεθόδων Monte Carlo και τέλος,
- Η πιθανότητα καταστροφής στόχου - αυτό το μέτρο αποτελεσματικότητας είναι κατάλληλο αν ο στόχος αποτελείται από ένα μόνο σημείο.

Η επιλογή ενός κατάλληλου μέτρου αποτελεσματικότητας είναι σημαντική στο πρόβλημα κατανομής πυραύλων επειδή η βέλτιστη στρατηγική κατανομής στις περισσότερες περιπτώσεις εξαρτάται αποκλειστικά από την επιλογή αυτή. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις, διαφορετικά κριτήρια αποτελεσματικότητας οδηγούν στην ίδια στρατηγική κατανομής ή οδηγούν σε παρόμοια αποτελέσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} : ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΤΟΧΩΝ - ΠΥΡΑΥΛΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι να δώσει μια γενική εικόνα της κατάστασης της έρευνας για το πρόβλημα κατανομής πυραύλων μέχρι το 1972, ώστε τα αποτελέσματα των μεταγενέστερων αναλύσεων που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια να εκτιμηθούν καλύτερα και η ανάπτυξη ορισμένων βασικών ιδεών και εφαρμογών εντοπίζονται πιο εύκολα. Τα βασικά αποτελέσματα οργανώνονται με τον ακόλουθο τρόπο:

- Η επίθεση και η άμυνα σε ειδικές καταστάσεις,
- Η επίθεση και η άμυνα για ένα σύνολο από όμοιους στόχους – σημείο,
- Η επίθεση και η άμυνα για ένα σύνολο μη όμοιων στόχων με διαφορετικές αξίες και τέλος,
- Οι στρατηγικές άμυνας για ένα μονό στόχο σημείου.

2.2 Η επίθεση και η άμυνα σε ειδικές καταστάσεις

Το συγκεκριμένο υποκεφάλαιο θα ασχοληθεί με το πρόβλημα της κατανομής των όπλων του επιτιθέμενου και των αμυντικών βλημάτων του αμυνόμενου σε τρεις ειδικές καταστάσεις:

- Επιθέσεις στο αμυντικό σύστημα,
- Η άμυνα χρησιμοποιώντας τοπικούς και περιφερειακούς πυραύλους και τέλος,

- Η άμυνα με περιορισμένο προϋπολογισμό χρησιμοποιώντας τοπικούς και περιφερειακούς πυραύλους.

Αυτά αντιπροσωπεύουν πιο ρεαλιστικά σενάρια από τα επόμενα εξιδανικευμένα περιστατικά επιθέσεων και αμυντικών στρατηγικών, που πρόκειται ν' αναλυθούν στα επόμενα κεφάλαια. Επομένως, τα μαθηματικά μοντέλα είναι πιο δύσκολο να επιλυθούν αναλυτικά και είναι απαραίτητο σε ορισμένες περιπτώσεις να στραφούν σε επαναληπτικές διαδικασίες αναζήτησης ή προσομοιώσεις Monte Carlo σε έναν υπολογιστή προκειμένου να βρεθούν οι στρατηγικές κατανομής όπλων.

2.2.1 Επιθέσεις στο σύστημα άμυνας

Μία εναλλακτική εφικτή στρατηγική για την επίθεση θα ήταν η διάθεση ορισμένων από τα όπλα του επιτιθέμενου για να επιτεθεί στο ίδιο το αμυντικό σύστημα με την προϋπόθεση ότι οι απροστάτευτοι στόχοι θα ήταν πιο ευάλωτοι από τους στόχους, που προστατεύονται από κάποιου είδους άμυνα. Ο επιτιθέμενος κανονικά θα επιτεθεί σε μια κρίσιμη συνιστώσα του αμυντικού συστήματος, έτσι ώστε όταν καταστρέφεται ολόκληρο το αμυντικό σύστημα μ' αυτόν τον τρόπο να καθίσταται ανενεργό ή η λειτουργία του να υποβαθμίζεται σοβαρά. Παραδείγματα τέτοιων κρίσιμων στοιχείων είναι τα ραντάρ, τα κέντρα διοίκησης και ελέγχου ή οι σύνδεσμοι τακτικής επικοινωνίας. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν R πανομοιότυπα στοιχεία. Για παράδειγμα υπάρχουν R ραντάρ, τα οποία πρέπει να καταστραφούν όλα πριν ολόκληρο το αμυντικό σύστημα θεωρηθεί ότι έχει καταστραφεί. Θεωρείται επίσης ότι υπάρχουν στόχοι T όμοιου σημείου, η άμυνα μπορεί να πραγματοποιήσει αξιολόγηση επίθεσης, και οι δύο πλευρές γνωρίζουν το μέγεθος του αποθέματος του άλλου. Το μέτρο της αποτελεσματικότητας είναι το αναμενόμενο κλάσμα των αποθηκευμένων στόχων και γενικά μπορεί να αποδοθεί με τον παρακάτω τύπο:

$$E(f) = pE_u(f) + (1-p)E_d(f)$$

όπου p είναι Pr (όλα τα ραντάρ, που έχουν καταστραφεί) και $E_u(f)$ και $E_d(f)$ είναι τα αναμενόμενα κλάσματα των στόχων που εξοικονομούνται αν είναι απροστάτευτοι και προστατευμένοι, αντίστοιχα. Εάν η επίθεση έχει την τελευταία κίνηση και αν τα βλήματα είναι απολύτως αξιόπιστα, αλλά τα ραντάρ είναι εντελώς ευάλωτα σε επίθεση, δηλαδή το Pr (ένα ανενεργό ραντάρ καταστρέφεται από ένα όπλο) είναι 1, τότε η βέλτιστη αμυντική στρατηγική θα ήταν να διαιρέσει το απόθεμα πυραύλων σε δύο ίσα μέρη, και να κατανεμηθεί το κάθε μέρος ομοιόμορφα με τα ραντάρ και τους στόχους, αντίστοιχα, αν η επίθεση κατανέμει ομοιόμορφα τα όπλα της μεταξύ των υπερασπισμένων στόχων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν η επίθεση δεν είναι ομοιόμορφη, μια καλύτερη αμυντική στρατηγική θα ήταν η μετατόπιση ορισμένων πυραύλων από ραντάρ σε στόχους, καθώς μόνο ένα ραντάρ είναι απαραίτητο για να λειτουργήσει το αμυντικό σύστημα.

Εάν η άμυνα έχει την τελευταία κίνηση και έχει ένα κεντρικό απόθεμα από το οποίο οι πύραυλοι σχεδιάζονται είτε για να υπερασπιστούν ένα ραντάρ είτε ένα στόχο αξίας, θα υπερασπιστεί ένα τυχαία επιλεγμένο ραντάρ κατά της επίθεσης, όσο οι πύραυλοι παραμένουν στο απόθεμα και στη συνέχεια χρησιμοποιεί στρατηγική προσανατολισμένη στο επιτιθέμενο για την εκχώρηση βλημάτων σε εισερχόμενα όπλα ξεκινώντας από τους πιο επιθετικούς στόχους. Ο επιτιθέμενος θα επιτεθεί σε όλα τα ραντάρ με τον ίδιο αριθμό όπλων προκειμένου να μειωθεί ή να εξαντληθεί το αμυντικό απόθεμα. Πάνω από ένα συγκεκριμένο αριθμό, τα ραντάρ δεν θα είναι πλέον ένα μαλακό σημείο στην άμυνα, και μια καλύτερη στρατηγική επίθεσης θα μπορούσε να είναι να επιτεθεί στους στόχους απευθείας παρά να επιτεθεί στα ραντάρ. Στο μοντέλο άμυνας last- move, ο αμυνόμενος πρέπει να λαμβάνει αποφάσεις κατανομής κατά τη διάρκεια της επίθεσης, με βάση τις ενημερωμένες πληροφορίες. Στην εναλλακτική στρατηγική άμυνας ανάλογη με τη στρατηγική του Matheson που θα μπορούσε να επινοηθεί, δεν εξαρτάται από την ικανότητα να λαμβάνονται επιτόπιες αποφάσεις. Ωστόσο, η στρατηγική αυτή είναι κατώτερη της στρατηγικής άμυνας last-move.

Στην περίπτωση όπου η άμυνα περιορίζεται σε μία άμυνα ένα προς ένα και για τα ραντάρ και για τους στόχους, και η άμυνα αναστέλλει κάθε επιτιθέμενο, όσο ακόμα υπάρχουν διαθέσιμοι πύραυλοι, το πρόβλημα του προσδιορισμού του ελάχιστου απαιτούμενου αριθμού ραντάρ, ώστε η επίθεση να μπορεί να προσβάλει στόχους μόνο μπορεί να επιλυθεί. Σε μια επίθεση μόνο για το στόχο, το αναμενόμενο κλάσμα των στόχων που σώζονται δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$E_t(f) = [q_0 + \rho\,(1 - q_0)]^{\frac{A}{T}}$$

Και σε μία μικτή επίθεση ραντάρ – στόχων, το αναμενόμενο κλάσμα των σωσμένων δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$E_m(f) = kq_0^{A-Rar/T} + (1-k)[q_0 + \rho(1-q_0)]^{A-Rar/T}$$

Όπου το k = Pr (όλα τα ραντάρ καταστράφηκαν) = $[1 - (q_{or} + \varrho\,(1 - q_{or}))^{ar}]^{R}$, όπου ar είναι ο αριθμός που κατανεμήθηκε στα ραντάρ, κα q_{or} είναι το Pr (ένα απροστάτευτο ραντάρ επιβίωσε της επίθεσης από ένα όπλο). Η ελάχιστη απαραίτητη τιμή για το R είναι το μικρότερο R για κάθε $E_m(f)>E_t(f)$ για όλα τα a_r στο ανοικτό (0,A/R).

Σε ένα μοντέλο με επιθετική αξιολόγηση ζημιών θεωρείται ότι ο επιτιθέμενος γνωρίζει το μέγεθος του αμυντικού αποθέματος αλλά όχι το αντίστροφο, η επίθεση είναι διαδοχική με i όπλα σε μία χρονική στιγμή να έχουν κατανεμηθεί είτε σε ραντάρ είτε σε στόχο και ο επιτιθέμενος μπορεί να πραγματοποιήσει αξιολόγηση ζημιών μεταξύ των εκτοξεύσεων. Το μέτρο αποτελεσματικότητας που χρησιμοποιείται είναι ο αναμενόμενος αριθμός όπλων που απαιτείται για να σκοτωθούν οι στόχοι T. Ο δυναμικός προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιτευχθεί η βέλτιστη κατανομή της άμυνας σε κάθε εισερχόμενο όπλο και η κατανομή της επίθεσης σε κάθε στόχο ή ραντάρ σε κάθε διαδοχικό κύμα. Εάν ο αναμενόμενος αριθμός των όπλων που απαιτούνται για να καταστρέψουν i στόχους δοσμένων j ραντάρ και k πυραύλους και η επόμενη επίθεση είναι σ' ένα στόχο και συμβολίζεται με f_t (i,k,j), και ο ανάλογος αναμενόμενος αριθμός των όπλων, δοσμένο ότι η επόμενη επίθεση είναι εναντίον ραντάρ και συμβολίζεται με f_r (i,k,j), τότε οι επαναλαμβανόμενες εξισώσεις είναι οι εξής:

$$f_t(i,k,j) = \max[1 + f(i,j,k-m)(1-\rho(1-p)^m) + f(i-1,j,k-m)p(1-\rho)^m],$$

$$f_t(i,k,j) = \max[1 + f(i,j,k-m)(1-p_r(1-\rho)^m) + f(i,j,k-m)p_r(1-\rho)^m]$$

$$f(i,k,j) = \min[f_t(i,k,j), f_r(i,j,k)], \qquad \acute{o}\pi o \upsilon\ P_r = 1 - g_{ar}$$

Αν ληφθεί υπόψη μια στρατηγική επίθεσης που περιλαμβάνει επιθέσεις σε πυραυλικά σιλό, το πρόβλημα γίνεται πιο περίπλοκο. Για να αξιολογηθεί η συγκεκριμένη κατάσταση πρέπει να γίνουν οι παρακάτω παραδοχές. Ο επιτιθέμενος μπορεί να επιτεθεί στα σιλό των πυραύλων, τα ραντάρ και στους στόχους αξίας σε κύματα ενός όπλου, το οποίο κατευθύνεται σε καθένα από τα σιλό των πυραύλων r, ή σε κάθε από τα ραντάρ R, ή σε κάθε από τους στόχους T, και συνεχίζει με τις επιθέσεις μέχρις ότου I ή λιγότεροι στόχοι επιβιώσουν, και η τιμή του I είναι γνωστή στον αμυνόμενο. Όλες οι συμπλοκές είναι ένα προς ένα δεδομένου ότι ρ = p = 1, και δεν υπάρχει αξιολόγηση ζημιών από τον επιτιθέμενο, παρόλο που ο επιτιθέμενος έχει την τελευταία κίνηση. Το μέτρο αποτελεσματικότητας, που χρησιμοποιείται είναι ο αναμενόμενος αριθμός των όπλων που απαιτούνται προκειμένου να καταστραφούν I ή περισσότεροι στόχοι.

Η στρατηγική άμυνας, που ακολουθείται από τον αμυνόμενο είναι η παρακάτω. Εάν ο επιτιθέμενος επιτεθεί στα ραντάρ, ένας πύραυλος κατανέμεται προκειμένου να υπερασπιστεί ένα ραντάρ, το οποίο δεν γνωρίζει ποιο είναι ο επιτιθέμενος. Εάν ο επιτιθέμενος επιτεθεί σε στόχους, ένας √πύραυλος κατανέμεται προκειμένου να υπερασπιστεί ένα υποσύνολο από I στόχους, το οποίο δεν γνωρίζει ποιο είναι ο επιτιθέμενος. Και τέλος εάν ο επιτιθέμενος αποφασίζει να προσβάλει τα σιλό των πυραύλων τότε, ο αμυνόμενος κατανέμει το μισό από το αχρησιμοποίητο ή μη κατεστραμμένο πυραυλικό του απόθεμα προκειμένου να υπερασπιστεί τα σιλό των άλλων μισών του πυραυλικού του αποθέματος. Εάν R και T/I είναι και οι δύο ακέραιες δυνάμεις των 2, ο αριθμός των όπλων που απαιτούνται για να εξασφαλίσουν ότι I ή περισσότεροι στόχοι έχουν καταστραφεί δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$A = T - IR + D\,(1 + \log_2 R)\;\gamma\iota\alpha\; R \leq \frac{T}{I}$$

$$= D\left[1 + \log_1\left(\frac{T}{I}\right)\right]\gamma\iota\alpha\; R > \frac{T}{I}$$

Η στρατηγική του επιτιθέμενου είναι η ακόλουθη. Εάν R<= T/I, η επίθεση στα πυραυλικά σιλό θα είναι $\log_2 R$ κυμάτων των D όπλων το καθένα, έπειτα η επίθεση στα ραντάρ θα είναι των (D/R - 1) κυμάτων για R όπλα το καθένα και τέλος η επίθεση σε (T-I) στόχους θα είναι ενός μόνο κύματος των T όπλων. Εάν R > T/I, η επίθεση στα πυραυλικά σιλό θα είναι $\log_2(T/I)$ κυμάτων από D όπλα το καθένα, έπειτα η επιθέσεις εναντίον στόχων θα είναι σε D/T κύματα των T όπλων το καθένα.

2.2.2 Άμυνα, που χρησιμοποιεί τοπικούς και πυραύλους περιοχής

Στην προηγούμενη παράγραφο, υποτίθεται ότι υπάρχει μόνο ένας τύπος αμυντικού πυραύλου. Μια πιο ρεαλιστική κατάσταση θα ήταν να επιτραπούν δύο τύποι πυραύλων: ένας τοπικός πύραυλος μικρής εμβέλειας που υπερασπίζεται έναν ενιαίο στόχο (υπεράσπιση τερματικού σταθμού) και έναν πύραυλο μεγαλύτερης εμβέλειας που μπορεί να υπερασπιστεί ενάντια σε όπλα που κατευθύνονται σε μια ομάδα στόχων σε μια εκτεταμένη περιοχή (πύραυλοι περιοχής). Υπάρχουν διάφορες δυνατότητες για άμυνα χρησιμοποιώντας τόσο τοπικούς πυραύλους όσο και πυραύλους περιοχής. Το απλούστερο μοντέλο περιλαμβάνει την υπεράσπιση ενός συνόλου στόχων διαφορετικών τιμών χρησιμοποιώντας πυραύλους περιοχής D_A που μπορούν να καλύψουν οποιοδήποτε στόχο στο σύνολο και για τον οποίο η άμυνα έχει την τελευταία κίνηση και D τοπικούς πυραύλους οι οποίοι κατανέμονται σε μεμονωμένους στόχους πριν από την επίθεση. Θεωρείται ότι και οι δύο πλευρές γνωρίζουν το μέγεθος του αποθέματος του άλλου, και τα δύο όπλα και οι πύραυλοι είναι απολύτως αξιόπιστοι. Ο επιτιθέμενος θεωρείται ότι επιτίθεται σε ένα υποσύνολο των στόχων, καθένα με αριθμό όπλων ανάλογο με την αξία του, ενώ η άμυνα εκχωρεί τοπικούς πυραύλους σε αριθμούς και ανάλογο προς την αξία του στόχου. Οι πύραυλοι περιοχής έχουν εκχωρηθεί σε στόχους που καταστρέφουν αρκετά από εκείνα τα όπλα που κατευθύνονται σε κάθε στόχο για να αφήσουν το υπόλοιπο να καταστραφεί από τους τοπικούς πυραύλους, που υπερασπίζονται αυτόν τον στόχο. Το βέλτιστο κλάσμα της συνολικής τιμής στόχου που πρέπει να επιτεθεί δίνεται από A^*_L/D_L εάν $A^*_L<D_L$ όπου $A^*_L = A - (D_A A)^{1/2}$, αλλιώς ο επιτιθέμενος επιτίθεται σ' ολόκληρο το σύνολο των στόχων. Εάν η τοπική άμυνα καλύπτει μόνο ένα κλάσμα h της αξίας του στόχου αντί για το σύνολο των στόχων, τότε $A^*_L = A - D_A\,[A + D_L(1/h - 1)]^{1/2}$.

Αν αντί της αξιοπιστίας του πυραύλου ισούται με 1, θεωρείται ότι οι τοπικοί πύραυλοι ή βλήματα περιοχής απαιτούνται για να σκοτώσουν ένα όπλο, $A^*_L = A - (D_A A/S)^{1/2}$, και το βέλτιστο κλάσμα της συνολικής αξίας στόχων είναι t A^*_L/D. Εάν η άμυνα χρησιμοποιεί στρατηγική προ - κατανομής για πυραύλους περιοχής και υποτίθεται ότι οι στόχοι έχουν ίδιες τιμές, τα βλήματα και τα όπλα έχουν απόλυτη αξιοπιστία και οι δύο πλευρές γνωρίζουν το μέγεθος του αποθέματος του άλλου, το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως συνεχές παιχνίδι Blotto επιτρέποντας τη διαρκή διακύμανση της κατανομής της επίθεσης και της άμυνας. Οι τοπικοί πύραυλοι κατανέμονται ομοιόμορφα στους στόχους. Η κατανομή των πυραύλων περιοχής και των όπλων εξαρτάται, ωστόσο, από το αν η επίθεση ή η άμυνα είναι κυρίαρχη.

Εάν $d_a\,(a - d_1/2) \leq (a - d_1)^2$, όπου d_a και d_1 είναι ο αριθμός των τοπικών πυραύλων και πυραύλων περιοχής που είναι διαθέσιμοι για κάθε στόχο, και ο επιτιθέμενος είναι κυρίαρχος και επιτίθεται εναντίον ενός τυπικού στόχου με a_i όπλα όπου a είναι a_i τυχαία μεταβλητή, η οποία τραβήχτηκε από ομοιόμορφη κατανομή $U(d_1, 2a - d_1)$. Εάν, παρόλα αυτά, $d_a\,(a - 0.5\,d_1) \geq (a - d_l)^2$, η άμυνα γίνεται κυρίαρχη, και σ' αυτή την περίπτωση, ο επιτιθέμενος θα έπρεπε να επιτεθεί σ' ένα στόχο με πιθανότητα προσβολής $2a\,/\,[da + 2d_l +(d_a^2 + 2d_ad_l)^{1/2}]$ χρησιμοποιώντας a_i όπλα, όπου a_i είναι μία τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφης κατανομής $U(d_l,\ d_1 + d_a + \sqrt{}da^2{+}d_ad_l)$. Η άμυνα προστατεύει ένα στόχο με πιθανότητα $(1/d_l)\sqrt{}d_a^2{+}2d_ad_l - (d_a/d_l)$ χρησιμοποιώντας d_i πυραύλους περιοχής, όπου d_i είναι μία τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφης κατανομής $U\,(0,\ d_a + \sqrt{}d_a^2 + d_ad_l)$.

Μια περαιτέρω χαλάρωση των παραδοχών θα ήταν να επιτραπούν αρκετές περιοχές μη αμυδρής περιοχής άμυνας, καθεμία από τις οποίες περιέχουν αρκετούς στόχους με διαφορετικές τιμές v_i οι οποίοι επίσης προστατεύονται από τοπικά αμυντικά συστήματα. Έχουν υποτεθεί δεσμεύσεις πυραύλων ένα προς ένα, μαζί με πιθανότητα προσβολής όπλων ίση με 1. Μια κατά προσέγγιση λύση σε αυτό το ένθετο πρόβλημα κατανομής μπορεί να βρεθεί εάν το αποθετήριο του επιτιθέμενου θεωρείται ότι έχει άπειρο μέγεθος και τα όπλα που διατίθενται για να ελαχιστοποιηθεί το κόστος σε ό, τι αφορά τα όπλα που καταστράφηκαν ανά αξία στόχου, καταστράφηκαν. Η στρατηγική άμυνας είναι να κατανείμει τους πυραύλους περιοχής μεταξύ των περιοχών έτσι ώστε το ελάχιστο κόστος της επίθεσης για κάθε στόχο αξίας που καταστρέφεται να είναι το λογικό για κάθε τομέα. Οι τοπικοί πύραυλοι κατανέμονται μεταξύ στόχων εντός μιας περιοχής, έτσι ώστε το ελάχιστο κόστος ανά μονάδα αξίας που θα προσβληθεί να είναι το ίδιο για κάθε στόχο στην περιοχή, αγνοώντας τη συμβολή των πυραύλων περιοχής.

2.2.3 Η άμυνα με περιορισμένο προϋπολογισμό χρησιμοποιώντας τοπικούς και περιφερειακούς πυραύλους

Τα μοντέλα που εξετάζονται εδώ διαφέρουν από τα προηγούμενα μοντέλα στο ότι η άμυνα λαμβάνει ένα σταθερό προϋπολογισμό για να το χωρίσει μεταξύ τοπικών και πυραύλων περιοχής. Η βελτιστοποίηση συνεπάγεται συνεπώς αυτή τη διαίρεση καθώς και την κατανομή των δύο τύπων βλημάτων στην υπεράσπιση των στόχων. Ας υποθέσουμε ότι η αμυντική δύναμη μπορεί ν' αγοράσει d πυραύλους περιοχής ανά στόχο και ο λόγος του κόστους ενός πυραύλου περιοχής προς αυτό ενός τοπικού πυραύλου είναι k, και οι δύο αυτές τιμές είναι γνωστές στον επιτιθέμενο. Και οι δύο πλευρές γνωρίζουν το μέγεθος του αποθέματος του άλλου και χρησιμοποιείται άμυνα ένα προς ένα. Επιπλέον, θεωρείται ότι τα όπλα και οι πύραυλοι είναι απολύτως αξιόπιστα. Δεδομένου ότι η άμυνα μπορεί να χρησιμοποιήσει μια στρατηγική προσανατολισμένη στον επιτιθέμενο και να αποθηκεύσει όλους τους στόχους με πυραύλους περιοχής εάν $d \geq a$, οι αναλύσεις που ακολουθούν υποθέτουν $d < a$ και εξετάζουν τρεις περιπτώσεις που βασίζονται σε συγκεκριμένες παραδοχές για την άμυνα της περιοχής:

- Η στρατηγική άμυνας last-move για πυραύλους περιοχής,
- Η στρατηγική άμυνας περιοχής για πυραύλους περιοχής με τυχαία άφιξη όπλων – επιθέσεων, και τέλος,
- Η στρατηγική άμυνας περιοχής για πυραύλους περιοχής με ελεγχόμενη άφιξη όπλων – επιθέσεων.

Στην πρώτη περίπτωση της άμυνας last – move για πυραύλους περιοχής, ο αμυνόμενος έχει $d - j$ πυραύλους περιοχής ανά στόχο και jk τοπικούς πυραύλους ανά στόχο, όπου j = 0,1,…,d. Εάν ο επιτιθέμενος επιτεθεί σε ένα κλάσμα i / (jk) των στόχων με ajk / i όπλα ανά τεμάχιο, τότε jk αυτών των όπλων θα καταστραφούν από τοπικούς πυραύλους σε κάθε επιτιθέμενο στόχο, αφήνοντας (a-i) jk / i όπλα στα οποία έχουν ανατεθεί οι πύραυλοί περιοχής. Ο επιτιθέμενος μπορεί να επιλέξει i μετά την παρατήρηση της επιλογής της άμυνας του j. Οι βέλτιστες στρατηγικές εντοπίζονται με τον διαφορικό λογισμό να είναι όπως ακολουθεί: εάν $1 \leq a/d \leq k$, $j = d(1-d/a)$, δηλαδή να διανείμουν d^2/a πυραύλους περιοχής ανά στόχο και $i = a(1 - d/a)$, δηλαδή ένα κλάσμα a/(dk) των στόχων τους επιτίθενται.

Στην περίπτωση τυχαίων αφίξεων όπλων, καθώς κάθε όπλο φτάνει, η άμυνα εκχωρεί ένα βλήμα περιοχής χωρίς να γνωρίζει ποιος στόχος επιτίθεται, μέχρι να εξαντληθεί το απόθεμα πυραύλων της περιοχής, έπειτα χρησιμοποιούνται οι τοπικοί πύραυλοι. Οι αφίξεις όπλων είναι τυχαίες σε σχέση με τους στόχους με τους οποίους στρέφονται τα όπλα. Αν ληφθούν υπόψη οι ανεξάρτητες δεσμεύσεις όπλων από τοπικούς πυραύλους σε διαφορετικούς στόχους, η πιθανότητα ότι ένα όπλο παρεμποδίζεται από ένα βλήμα περιοχής είναι (d-j) / a. Εάν υπάρχουν a+i όπλα, όπου i = 0,1,2…., που κατανέμονται σ' ένα στόχο, η πιθανότητα ότι ακριβώς ένα απ' αυτά θα παρεμποδιστεί από πυραύλους περιοχής δίνεται από την προσέγγιση.

$$P_m = \binom{a+i}{m}\left(\frac{d-j}{a}\right)^m \left(1 - \frac{d-j}{a}\right)^{a+i-m}$$

Δεν υπάρχει απλή αναλυτική λύση σε αυτό το πρόβλημα. Ωστόσο, η στρατηγική επίθεσης μπορεί να προσεγγιστεί με dk-a + 1 αν d και k είναι μικρά και d << a. Εάν a > 3d / 2, η αμυντική στρατηγική j προσεγγίζεται από d-1.

Το μοντέλο με τις ελεγχόμενες αφίξεις όπλων είναι παρόμοιο με αυτό που αναλύθηκε προηγουμένως, εκτός από το ότι στην περίπτωση αυτή, ο επιτιθέμενος μπορεί να ελέγξει τη σειρά άφιξης των όπλων του σε στόχους. Ο επιτιθέμενος εξαντλεί το απόθεμα πυραύλων περιοχής με όπλα (d-j) T, κατόπιν επιτίθεται σε όσο το δυνατόν περισσότερους στόχους με όπλα (jk + 1) ανά στόχο. Το κλάσμα των στόχων που πρέπει να προσβληθούν καθορίζεται από i = max [0, a (jk + 1) / (a-d+j) – a]. Η βέλτιστη αμυντική στρατηγική είναι μία από τις δύο ακρότητες: όλους τους τοπικούς ή όλους τους πυραύλους περιοχής, ανάλογα με το αν το 1 / k είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το a-d.

2.3 Η επίθεση και η άμυνα για ένα σύνολο από όμοιους στόχους - σημείο

Η συγκεκριμένη παράγραφος εξετάζει τις στρατηγικές επίθεσης και άμυνας για μια ομάδα ανεξάρτητων πανομοιότυπων στόχων σημείου με ίδιες τιμές κάτω από διαφορετικούς βαθμούς γνώσης που έχει κάθε πλευρά για το μέγεθος του αποθέματος του άλλου και για τις κατανομές σε μεμονωμένους στόχους. Οι στρατηγικές επίθεσης και άμυνας θεωρούνται οργανωμένες κατά τον ακόλουθο τρόπο:

- Στρατηγικές προ – κατανομής, οι οποίες περιλαμβάνουν:
    - Επίθεση last – move,
    - Άμυνα last -move και,
    - Καμία πλευρά δεν γνωρίζει την κατανομή της άλλης πλευράς.
- Στρατηγικές μη προ – κατανομής, οι οποίες περιλαμβάνουν:
    - Μεταβαλλόμενο μέγεθος επιτιθέμενου και
    - Σταθερό μέγεθος επιτιθέμενου.
- Στρατηγικές αξιολόγησης ζημιών, οι οποίες περιλαμβάνουν:
    - Αξιολόγηση ζημιών για τον αμυνόμενο και,
    - Αξιολόγηση ζημιών για τον επιτιθέμενο.
- Στρατηγικές προσανατολισμένες στον επιτιθέμενο, οι οποίες περιλαμβάνουν:
    - Καμία πλευρά δεν γνωρίζει την κατανομή της άλλης πλευράς και,
    - Ο επιτιθέμενος γνωρίζει την κατανομή του αμυνόμενου.

2.3.1 Στρατηγικές προ – κατανομής

Οι στρατηγικές κατανομής όπλων και πυραύλων σε επιμέρους στόχους και όχι σε υποσύνολα στόχων ονομάζονται στρατηγικές προ - κατανομής και βασίζονται στην υπόθεση ότι είναι δυνατή η αξιολόγηση επίθεσης από τον αμυνόμενο. Δύο πλεονεκτήματα των στρατηγικών προ - κατανομής είναι ότι αντιπροσωπεύουν αποτελεσματικά αξιόπιστες ακριβείς λύσεις αρκετά ρεαλιστικών προβλημάτων και ότι είναι επώδυνες για την άμυνα απ' ό,τι άλλες στρατηγικές, αν ο επιτιθέμενος ξεπεράσει τον αμυνόμενο και η αξιοπιστία των πυραύλων δεν είναι πολύ υψηλή. Γενικά υποθέτουμε ότι οι εμπλοκές των πυραύλων είναι μία προς μία, και ότι καμία πλευρά δεν

$$E(f) = \sum_{i=1}^{T} Pi$$

γνωρίζει το μέγεθος του αποθέματος και η πιθανότητα καταστροφής όπλου είναι p και η αξιοπιστία του πυραύλου είναι ρ. Το μέτρο αποτελεσματικότητας είναι Ε (το κλάσμα των στόχων που σώθηκαν), και μπορεί να δοθεί από τον παρακάτω τύπο:
όπου Pi είναι Pr (είναι ο i-οστος στόχος, που επιβιώνει), και T είναι ο συνολικός αριθμός των στόχων.

2.3.1.1 Η επίθεση last – move

Η επίθεση last – move κατάσταση αντιπροσωπεύει ένα κατώτατο όριο για το Ε (το κλάσμα των στόχων, που σώθηκαν), δεδομένου ότι υποδηλώνει ότι ο επιτιθέμενος μπορεί να δει ολόκληρη την αμυντική κατανομή των πυραύλων σε μεμονωμένους στόχους πριν κάνει τη δική του κατανομή. Σε αυτή την περίπτωση, η καλύτερη δυνατή αμυντική στρατηγική είναι να κατανείμει ισάριθμους πυραύλους σε κάθε στόχο. Η βέλτιστη στρατηγική επίθεσης εναντίον αυτής του αμυνόμενου μπορεί να προκύψει ως εξής. Αφήνεται ο επιτιθέμενος να επιτεθεί σ' ένα κλάσμα από τους στόχους $y_k = a/k$ με k να είναι τα όπλα ανά στόχο και $k \geq a$. Εάν p(k) είναι η πιθανότητα ότι ο στόχος θα καταστραφεί ένα του επιτεθούν k όπλα και τον προστατεύουν d πύραυλοι, τότε Ε (το κλάσμα των στόχων, που σώθηκαν) είναι $E(f) = 1\ y_k P(k)$. Υποθέτοντας ότι το P(k) είναι μία συνάρτηση για την οποία μία μοναδική τιμή του k, δηλώνεται ότι k* μεγιστοποιεί την P(k)/k, που είναι η μέση απόδοση ανά όπλο σ' ένα επιτιθέμενο στόχο, η κατανομή του επιτιθέμενου όπου μεγιστοποιεί την P(k)/k επίσης ελαχιστοποιεί την E(f) εάν $k^* >$ a. Επομένως:

$$E(f) = 1 - \frac{[aP(k^*)]}{k^*}\ εάν\ 0 < a\ \leq k^*\ και$$

$$E(f) = 1 - P(a)\ εάν\ k^* \leq\ a$$

Για την άμυνα ένα προς ένα, που υποτίθεται $P(k) = q_1^{\min(d,k)} q_0^{\max(0.\ K-d)}$.

2.3.1.2 Η άμυνα last -move

Η κατάσταση άμυνας last - move αντιπροσωπεύει ένα ανώτατο όριο για το αναμενόμενο κλάσμα των στόχων που σώθηκαν, δεδομένου ότι η άμυνα μπορεί να δει ολόκληρη την κατανομή των όπλων σε στόχους, προτού κάνει τη δική της κατανομή πυραύλων. Η καλύτερη δυνατή στρατηγική για τον επιτιθέμενο στην περίπτωση αυτή είναι να διαθέσει ίσο αριθμό όπλων σε κάθε ένα στόχο. Για τον αμυνόμενο, εάν $d \geq a$, η στρατηγική μεγιστοποίησης της άμυνας είναι να επιτεθεί σε κάθε όπλο με ένα μόνο βλήμα (δεδομένου ότι οι δεσμεύσεις θεωρούνται ότι είναι μόνο ένα προς ένα). Εάν $d < a$, η βέλτιστη στρατηγική άμυνας είναι η ανάθεση ενός πυραύλου σ' ένα κλάσμα d/a των στόχων, και η ανάθεση κανενός πυραύλου στους υπόλοιπους. Η αντίστοιχη τιμή του E(f) είναι:

$$E(f) = \frac{(a-d)q_0^a}{a} + \frac{dq_1^a}{a}$$

2.3.1.3 Καμία πλευρά δεν γνωρίζει την κατανομή της άλλης πλευράς

Στην κατάσταση, που καμία πλευρά δεν γνωρίζει την κατανομή της άλλης, το πρόβλημα μπορεί να διαμορφωθεί από την άποψη του two-person-zero-sum παιχνίδι με την εξόφληση να είναι το μέρος των στόχων που σώζονται. Η γενίκευση του θεμελιώδους θεωρήματος των παιχνιδιών δηλώνει ότι υπάρχουν βέλτιστα pdfs των επιθετικών και των αμυντικών στρατηγικών, και το παιχνίδι έχει μία τιμή V δοσμένη από $\max_{\underline{x}} \min_{\underline{y}} E(f)$, όπου $\underline{x}$ και $\underline{y}$ αντιπροσωπεύουν τα διαφορετικά επίπεδα άμυνας και επίθεσης αντίστοιχα. Η λύση στο πρόβλημα κατανομής συνίσταται στην εύρεση αυτών των φορέων $\underline{x} = (x_0,x_1,x_2,\ldots\ldots)$ και $\underline{y} = (y_0,y_1,y_2,\ldots)$, έτσι ώστε ένα κλάσμα x_0 των στόχων να επιλεγούν τυχαία για καθόλου άμυνα, εάν κλάσμα από x_1 να επιλεγεί για άμυνα από προσβολή ενός πυραύλου και λοιπά, και με τον ίδιο τρόπο λειτουργεί και ο φορέας $\underline{y}$. Έπειτα E (το κλάσμα των στόχων που σώθηκαν) δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$V = \sum_{i,j} x_i y_j \, q_1^{\min(i,j)} q_0^{\max(0,j-i)}$$

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως περιορισμένο παιχνίδι το οποίο συνήθως λύνεται με γραμμικό προγραμματισμό. Ωστόσο, ο Matheson (Αναφορά 6) βρήκε λύση στο πρόβλημα της προ - κατανομής χωρίς να χρησιμοποιήσει ρητά τον γραμμικό προγραμματισμό. Τα αποτελέσματα του έργου του Matheson είναι μάλλον δύσκολα να περιγραφτούν συνοπτικά γι' αυτό το λόγο ο αναγνώστης καλείται ν' ανατρέξει στο πρωτότυπο έγγραφο για λεπτομέρειες. Το πρόβλημα μπορεί ν' απλοποιηθεί θέτοντας $p = \varrho = 1$, το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι χρησιμοποιούνται τέλεια όπλα και πύραυλοι. Σ' αυτή την περίπτωση, οι βέλτιστες στρατηγικές επίθεσης και άμυνας μπορούν να δοθούν από την άποψη του a και του d για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις:

- Ο αμυνόμενος κυριαρχεί δηλαδή $[2d+1] \geq [2a]$. Σ' αυτήν την περίπτωση η στρατηγική της άμυνας είναι:

$x_i = 2\,([2d + 1] - d) \,/\, [2d +2][2d+1]$ για κάθε $i = 0,1,\ldots,[2d]$,

και $x_{[2d+1]} = (2d-[2d]) \,/\, [2d+2]$,

Και η στρατηγική της επίθεσης είναι

$y_i = 2a \,/\, [2d+1][2d+2]$ για κάθε $i = 1,2,\ldots,[2d+1]$, και

$y_0 = 1 – 2a \,/\, [2d+2]$.

- Ο επιτιθέμενος είναι ο κυρίαρχος, δηλαδή $[2d+1] < [a]$. Σ' αυτήν την περίπτωση, η στρατηγική του αμυνόμενου είναι:

$x_i = 2d \,/\, [2a][2a-1]$ για $i=1,2,\ldots[2a-1]$,

$x_0 = 1 – 2d/[2a]$

Και η στρατηγική του επιτιθέμενου είναι:

$y_i = 2\,([2a] - a) \,/\, [2a][2a - 1]$ για $I = 1,\ldots,[2a-1]$,

$y_{[2a]} = (2a – [2a]) \,/\, [2a]$.

Για να πάρουμε ακέραιες κατανομές οι οποίες δεν είναι δυνατές χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες αναλύσεις, μπορεί να οριστεί ένα παιχνίδι ακέραιας στρατηγικής με το παιχνίδι Matheson, όπου η μικτή στρατηγική που χρησιμοποιείται είναι μια συνάρτηση κατανομής πιθανοτήτων $(p_1, p_2, .., p_N)$ που έχει αναλάβει N διαφορετικές καθαρές στρατηγικές (τις πραγματικές κατανομές ενός ακέραιου αριθμού πυραύλων ή όπλων σε κάθε έναν από τους στόχους T). Αυτό το παιχνίδι ακεραίων κατανομών είναι αδύνατο να λυθεί σε κλειστή μορφή εκτός από πολύ μικρό αριθμό όπλων, πυραύλων και στόχων, επειδή ο αριθμός των καθαρών στρατηγικών γίνεται πολύ μεγάλος γρήγορα. Για $q_0 = 0$ και $q_1 = 1$ όμως, η αξία του παιχνιδιού Matheson είναι ίδια με αυτή του παιχνιδιού ακέραιας στρατηγικής. Εάν D (ή A) και T δεν είναι πολύ μεγάλα, είναι αδύνατο να βρεθούν βέλτιστες στρατηγικές χρησιμοποιώντας γραμμικό προγραμματισμό, ο όποιος μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να λυθούν διάφορες γενικεύσεις στο παιχνίδι του Matheson όπως:

- ανώτατα όρια για τον αριθμό των πυραύλων ή των όπλων που μπορούν να διατεθούν για έναν στόχο,
- τα δόγματα κατανομής, εκτός από το ένα προς ένα,
- διάφορους τύπους πυραύλων ή όπλων,
- ανεξάρτητες αμυντικές περιοχές, και τέλος
- γενικευμένες shoot – look – shoot στρατηγικές.

Η διακύμανση του συνολικού αριθμού των στόχων που σώζονται εάν και οι δύο πλευρές χρησιμοποιούν καθαρές στρατηγικές μπορεί να δοθεί από το N ανώτατο όριο $\mathrm{Var}(Z) \leq T^2V(1\text{-}V) / (T\text{-}1)$, το οποίο δείχνει ότι η διακύμανση εξαρτάται μόνο από το E (μέρος των στόχων που σώθηκαν) και όχι από τις κατανομές πυραύλων και όπλων. Μπορούμε επίσης να υποστηρίξουμε ότι αν και η επίθεση και η άμυνα χρησιμοποιούν καθαρές στρατηγικές, τότε $T \rightarrow \infty$, η κατανομή του αριθμού των στόχων που έχουν διασωθεί συγκλίνει σε μια κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση μικρότερη από 1. Αυτή η περιοριστική κανονική κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμηθούν οι πιθανότητες ότι ο αριθμός επιζώντων στόχων είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από μία καθορισμένη τιμή.

Ένα άλλο μοντέλο προ – κατανομής για την επίθεση και την άμυνα είναι όταν καμία πλευρά δεν γνωρίζει την κατανομή της άλλης, το οποίο είναι συχνά γνωστό ως παιχνίδι Blotto, όπου η άμυνα έχει έναν ενιαίο πραγματικό στόχο που αναμιγνύεται με εικονικούς (T-1) στόχους και ο επιτιθέμενος δεν γνωρίζει ποιος είναι αληθινός στόχος και κατανέμει όπλα μεταξύ αυτών των στόχων. Το παιχνίδι Blotto μπορεί να διατυπωθεί είτε ως διακριτικό παιχνίδι είτε ως συνεχές παιχνίδι. Όταν $\rho = p = 1$ και $a \geq d$ (ο επιτιθέμενος είναι κυρίαρχος), η βέλτιστη στρατηγική επίθεσης είναι η επίθεση σ' ένα τυπικό στόχο με a_i όπλα, όπου a_i είναι μία τυχαία μεταβλητή, η οποία προέκυψε από μία ομοιόμορφη κατανομή U (0,2a), ενώ η βέλτιστη αμυντική στρατηγική είναι η υπεράσπιση ενός τυπικού στόχου με πιθανότητα d/a, χρησιμοποιώντας πυραύλους, όπου d_i κατανέμεται ανάλογα με την ίδια ομοιόμορφη κατανομή.

Εάν a ≤ d (ο αμυνόμενος είναι ο κυρίαρχος), η βέλτιστη στρατηγική επίθεσης είναι η επίθεση εναντίον ενός τυπικού στόχου με πιθανότητα a/d χρησιμοποιώντας a_i όπλα, όπου a_i είναι μία τυχαία μεταβλητή, η οποία αντλήθηκε από μία ομοιόμορφη κατανομή U (0,2d). και η ανταποκρινόμενη βέλτιστη στρατηγική άμυνας είναι η υπεράσπιση ενός τυπικού στόχου με d_i πυραύλους, όπου d_i αντλήθηκε από την ίδια κατανομή πιθανοτήτων.

Η γενική μορφή των βέλτιστων στρατηγικών επίθεσης και άμυνας για ένα συνεχές παιχνίδι Blotto με ένα προς ένα δεσμεύσεις προέκυψε υποθέτοντας ότι η πιθανότητα ότι ένας στόχος εξυπηρετεί όταν επιτίθεται από όπλα y και υπερασπίζεται από x πυραύλους είναι της μορφής:

$$P(x,y) = s, 0 \leq y \leq x$$
$$= s(x)t(y-x), x \leq y$$

όπου s(x) και t(y) είναι κυρτές συναρτήσεις με συνεχή παράγωγα και s(0) = t(0) = 1. Εάν f(y)dy και g(x)dx είναι τα κλάσματα των στόχων που επιτίθενται από y όπλα και υπερασπίζονται από x πυραύλους αντίστοιχα, η βέλτιστη αμυντική στρατηγική δίνεται g (x) και ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\int_0^\infty g(x)P(x,y)dx = m - h(y) \text{ στο διάστημα } U < y < V \text{ και}$$

$$\int_0^\infty g(x)P(x,y)dx > m - h(y) \text{ εξωτερικά από το παραπάνω διάστημα}$$

Οι ποσότητες n, h, U, V καθορίζονται έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το n-ha. Η αντίστοιχη στρατηγική επίθεσης δίνεται από το f (y) που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\int_0^\infty f(y)P(x,y)dy = n + kx \text{ στο διάστημα } U < x < V \text{ και}$$

$$\int_0^\infty f(y)P(x,y)dy < n + kx \text{ στο εξωτερικό του παραπάνω διαστήματος}$$

Και πάλι, οι ποσότητες n, k, U, V καθορίζονται έτσι ώστε το n + kd να ελαχιστοποιείται.

2.3.2 Στρατηγικές μη προ – κατανομής

Όταν ο επιτιθέμενος δεν είναι σε θέση να διεξάγει μία αξιολόγηση επιθέσεως για κάθε στόχο, τότε θα πρέπει να υιοθετηθεί από τον αμυνόμενο μία προνομιακή στρατηγική ομάδας αντί μίας προ – κατανομής στρατηγική. Σε αυτή την περίπτωση, η άμυνα διαθέτει όλους τους πυραύλους για να υπερασπιστεί μόνο μια υποομάδα των στόχων. Σε αυτήν την υπο - ενότητα, οι προνομιακές στρατηγικές ομάδας εξετάζονται σε δύο περιπτώσεις:

- Διαφορετικό μέγεθος επίθεσης και,
- Σταθερό μέγεθος επίθεσης

Όταν το μέγεθος της επίθεσης ποικίλλει, μια πιθανή αμυντική στρατηγική είναι να υπερασπιστεί ένα τυχαίο υποσύνολο d / k των στόχων με ολόκληρο το απόθεμα, όπου το k είναι μια ακέραια τιμή. Όταν κάποιος στόχος εντός του υποσυνόλου επιτεθεί, ένας πύραυλος του έχει κατανεμηθεί. Υποθέτουμε ότι ο επιτιθέμενος γνωρίζει την αξία του κλάσματος d / k, αλλά όχι το πραγματικό υπερασπισμένο υποσύνολο και προσβάλλει τους στόχους σε κύματα ενός όπλου έναντι κάθε στόχου με ένα σύνολο κυμάτων i, όπου i είναι μια τυχαία μεταβλητή από μία κατανομή πιθανότητας με μέση τιμή a. Σε αυτή την κατάσταση, η βέλτιστη στρατηγική επίθεσης είναι μια στρατηγική που περιέχει ένα χαμηλότερο και ανώτερο επίπεδο επίθεσης που δηλώνεται με i και (a + j) αντίστοιχα. Αν το k = a, το αμυντικό απόθεμα θα είναι ίσο με το αναμενόμενο μέγεθος επίθεσης στο υποσύνολο που υποστηρίζεται. Καθώς το d -> a, η καλύτερη άμυνα θα ήταν η εμπλοκή κάθε όπλου, εγκαταλείποντας την προνομιακή στρατηγική ομάδας. Εάν η τιμή του k δεν είναι γνωστή στον επιτιθέμενο, θα μπορούσε να προσαρμόσει την επίθεσή του έτσι ώστε το E (το μέρος των στόχων που σώθηκαν) να είναι το ίδιο ανεξάρτητο από την τιμή του k που επιλέγεται, $d \leq k \leq t$, επιλέγοντας τη στρατηγική του Matheson που αντιστοιχεί σε d = h, t = m. Όταν το μέγεθος της επίθεσης είναι σταθερό, μπορούν να ληφθούν υπόψη δύο ακραίες περιπτώσεις:

- τα όπλα φτάνουν τυχαία και,
- τα όπλα φτάνουν σε μια σειρά που ελέγχεται από τον επιτιθέμενο.

Κάθε πλευρά γνωρίζει το απόθεμα του άλλου, αλλά όχι τη συγκεκριμένη κατανομή όπλων σε στόχους ή ποιο υποσύνολο στόχων έχει επιλεγεί για άμυνα.

Υποτίθεται ότι το p = ρ =1. Όταν ελέγχεται η σειρά άφιξης του όπλου, η απόφαση χρήσης μιας προνομιακής ομάδας ή μιας προ-κατανομής εξαρτάται από το τι πιστεύει η άμυνα για το ότι ο επιτιθέμενος γνωρίζει τα σχέδιά της. Εάν οι αφίξεις των όπλων είναι τυχαίες, είναι πιθανό να είναι επικερδές να μετακινηθεί η άμυνα από μια στρατηγική προ - κατανομής σε μια προνομιακή στρατηγική ομάδας.

2.3.3 Ανάμεικτες στρατηγικές προ – κατανομής και μη προ – κατανομής

Ένα μίγμα από στρατηγικές προ-κατανομής και μη προ-κατανομής μπορούν να επιλεγούν από την άμυνα όπως παρακάτω. Το σύνολο στόχων διαιρείται τυχαία σε διαφορετικές ομάδες διαφόρων μεγεθών και ένα τμήμα του συνολικού αποθέματος των πυραύλων κατανέμεται σε κάθε ομάδα για άμυνα. Φαίνεται αρκετά δύσκολο να καθοριστεί η βέλτιστη επίθεση και οι αμυντικές στρατηγικές ως συνάρτηση των A, D, και T εάν D <A και T <A. Για την υπεράσπιση της άμυνας, ο προσδιορισμός μιας βέλτιστης στρατηγικής επίθεσης ισοδυναμεί με την επίλυση ενός συνόλου μη γραμμικών εξισώσεων και γίνεται υπολογιστικά τεράστιο καθώς η πολυπλοκότητα του προβλήματος αυξάνεται. Εάν καμία πλευρά δεν γνωρίζει τη στρατηγική του άλλου πριν επιλέξει την κατανομή του, το πρόβλημα γίνεται ένα παιχνίδι-θεωρητικό. Ο αναμενόμενος αριθμός στόχων που θα σωθούν θα βρεθεί μεταξύ των τιμών της επίθεσης last - move και της άμυνας last - move και οι δύο πλευρές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν μείγματα στρατηγικών. Γενικά, αυτά τα θεωρητικά προβλήματα παιχνιών είναι ακόμα πιο δύσκολα να επιλυθούν. Μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει ένα γραμμικό πρόγραμμα για να καθορίσει προσεγγιστικές βέλτιστες αμυντικές στρατηγικές μη προ - κατανομής όταν και τα δύο p είναι μικρότερα του 1.

Εντούτοις, δεδομένου ότι το αναμενόμενο κλάσμα των στόχων που σώθηκαν δεν είναι γραμμικό στις επιθετικές κατανομές y_i, όπου y_i είναι το κλάσμα των στόχων που επιτίθενται από τα όπλα, μια ακριβής λύση γραμμικού προγραμματισμού στο πρόβλημα κατανομής πρέπει να λαμβάνει υπόψη όσους γραμμικούς περιορισμούς υπάρχουν σαν να είναι καθαρές στρατηγικές (δεδομένου ότι η στρατηγική μικτών επιθέσεων είναι ένας γραμμικός συνδυασμός στρατηγικών καθαρής επίθεσης), ο οποίος είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός.

2.3.4 Στρατηγικές αξιολόγησης ζημιών

Η αξιολόγηση των ζημιών από τον αμυνόμενο του δίνει τη δυνατότητα να αυξήσει το αναμενόμενο κλάσμα των στόχων που σώνονται, αξιολογώντας τις ζημιές στο στόχο κατά τη διάρκεια της εμπλοκής και στη συνέχεια να υπερασπιστεί μόνο τους μη καταστραμμένους στόχους. Από την άλλη πλευρά, ο επιτιθέμενος μπορεί επίσης να βλάψει την αξιολόγηση του επιτιθέμενου σε κύματα και να λάβει πληροφορίες σχετικά με την αποτελεσματικότητα προηγούμενων κυμάτων πριν αποφασίσει τους στόχους για το επόμενο κύμα. Τα πιθανά οφέλη από τη χρήση στρατηγικών αξιολόγησης ζημιών αναλύονται στις παρακάτω δύο υπό - ενότητες.

2.3.4.1 Αξιολόγηση Ζημιών από τον Αμυνόμενο

Μπορεί να αναπτυχθεί ένα γενικό μοντέλο αξιολόγησης άμυνας last - move, υποθέτοντας ότι οι παράμετροι A,D, T,p είναι γνωστές και στις δύο πλευρές και ότι η άμυνα γνωρίζει ότι ο επιτιθέμενος θα επιτεθεί σε κύματα ενός όπλου ανά στόχο σε κάθε κύμα. Για την απλούστευση της ανάλυσης, υποτίθεται ότι ο αριθμός των επιδιωκόμενων στόχων μετά από κάθε κύμα δίνεται καθοριστικά από την αναμενόμενη αξία του. Στη συνέχεια p <1, η βέλτιστη άμυνα έχει την ακόλουθη μορφή, με το κύμα a να φτάνει πρώτο, και το κύμα 1 να φτάνει τελευταίο:

- κύμα a μέσω n + 1: να μην υπερασπιστεί στόχους,
- κύμα n: να υπερασπιστεί ένα κλάσμα από τους επιζώντες στόχους, και
- κύμα n-1 έως 1: να υπερασπιστεί όλους τους επιζώντες στόχους.

Όταν το p = 1 (τέλεια όπλα), αυτή η στρατηγική πρέπει να τροποποιηθεί έτσι ώστε ένα τμήμα των στόχων να υπερασπιστεί ξεκινώντας από το κύμα a. Η τιμή n είναι ίση με τη μικρότερη τιμή του i για την οποία Q1 ≥ d όπου:

$$Qi = \frac{1-[g0+(1-g0)g1]^{i}}{(1-g0)(1-g1)}\; g1^{a-1}, i = a, a-1, \ldots, 1$$

Ο αναμενόμενος αριθμός των πυραύλων που θα διανεμηθούν σε στόχους στο i-οστό κύμα d_i^*, μπορεί να δοθεί από ένα σύνολο επαναλαμβανόμενων εξισώσεων, και E (f) δίνεται από

$$E(f) = \left[\frac{d_i^*}{T}\right][q_0(1-q_0)q_1]$$

Η μέγιστη τιμή του D που απαιτείται αν οι στόχοι που υποστηρίζονται σε όλα τα κύματα είναι:

$$Dmax = T\,\frac{1-[g0+(1-g0)gi]^a}{(1-g0)(1-g1)}$$

Οι συγκρίσεις του αναμενόμενου κλάσματος των στόχων που εξοικονομούνται στην περίπτωση της στρατηγικής προ κατανομής και της στρατηγικής εκτίμησης ζημιών δείχνουν ότι δεν πραγματοποιείται μεγάλη βελτίωση από την εκτίμηση των ζημιών. Έτσι, αυτές οι στρατηγικές κερδίζουν ελάχιστα για την άμυνα στην περίπτωση της άμυνας last - move.

2.3.4.2 Αξιολόγηση Ζημιών από τον Επιτιθέμενο

Οι στρατηγικές αξιολόγησης ζημιών του επιτιθέμενου έχουν ληφθεί υπόψη στις περιπτώσεις όπου τόσο οι πύραυλοι όσο και τα όπλα είναι τέλεια, αλλά μόνο οι αμυντικοί πύραυλοι είναι τέλειοι και μόνο τα επιθετικά όπλα είναι τέλεια. Στην περίπτωση τέλεια αξιόπιστων πυραύλων και όπλων, η άμυνα μπορεί να μεγιστοποιήσει το E (κλάσμα των στόχων που σώζονται) σε μια επίθεση κύματος k, παρατηρώντας τον αριθμό a_i όπλων ανά επιζήσαντα στόχο που κατανέμονται από τον επιτιθέμενο στο i-οστό κύμα επίθεσης και στη συνέχεια επιλέγοντας d_i, ο αντίστοιχος αριθμός των βλημάτων, που κατανέμονται ανά επιζήσαντα στόχο στο i-οστό κύμα έτσι ώστε σε a_i / d_i = a / d. Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$E(f) = \left(\frac{d}{a}\right)^k$$

Μια καλύτερη στρατηγική για την άμυνα θα ήταν να επιλεγούν d = dT / k βλήματα που θα χρησιμοποιηθούν σε κάθε κύμα. Το τμήμα των στόχων που αποθηκεύτηκαν με τη χρήση αυτής της στρατηγικής είναι μεγαλύτερο από το E (f) με την ισότητα που συμβαίνει όταν τα όπλα aT / k κατανέμονται σε κάθε κύμα. Στην περίπτωση που η πιθανότητα θανάτωσης όπλων είναι μικρότερη από 1, το πρόβλημα γίνεται πιο περίπλοκο. Για την απλούστευση της ανάλυσης, θεωρείται ότι ο επιτιθέμενος δεν ξαναεπιτίθεται σ' έναν στόχο εάν ένα όπλο που αποδίδεται σε αυτόν τον στόχο δεν παρεμποδίστηκε από την υπεράσπιση, παρόλο που ο στόχος μπορεί να επιβιώσει. Έτσι έχουμε:

$$E(f) = 1 - \sum_{i=1}^{k} fi\,[1 - (\frac{di}{ai})][1 - (1 - p)^{\frac{ai}{fi}}]$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ fi = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{di}{ai}$$

Οι βέλτιστες στρατηγικές που ικανοποιούν το $\max_a \min_d$ E (f) εμφανίζονται ανεφάρμοστες σε κλειστή μορφή. Ωστόσο, ένα ανώτερο όριο μπορεί εύκολα να επιτευχθεί εάν υποτεθεί ένας άπειρος αριθμός κυμάτων. Αφήνουμε την επίθεση του 1ου κύματος να είναι a_1 = a-d όπλα ανά στόχο. Σε επόμενα κύματα, εάν η άμυνα κατανέμει d_i πυραύλους ανά στόχο στο i-οστό κύμα, ο επιτιθέμενος κατανέμει $a_{i+1} = d_i$, όπλα ανά στόχο στο κύμα (i + 1). Το αναμενόμενο κλάσμα των σκοτωμένων στόχων είναι $1- (1-p)^{a-d}$.

Ένα κάπως διαφορετικό πρόβλημα αξιολόγησης ζημιών μπορεί να θεωρηθεί ότι υποθέτει ότι η άμυνα δεν γνωρίζει το μέγεθος του αποθέματος όπλων Α. Ο επιτιθέμενος υποτίθεται ότι διαθέτει ένα όπλο κάθε φορά σε έναν στόχο και συνεχίζει να πυροβολεί σε ακανόνιστους στόχους έως ότου καταστραφούν όλοι οι στόχοι Τ. Σε αυτή την περίπτωση, ένα κατάλληλο μέτρο αποτελεσματικότητας για την υπεράσπιση θα ήταν να μεγιστοποιηθεί το Ε (αριθμός των όπλων που απαιτούνται για την καταστροφή των στόχων Τ). Η βέλτιστη κατανομή πυραύλων μπορεί στη συνέχεια να βρεθεί με δυναμικό προγραμματισμό χρησιμοποιώντας την επανάληψη:

$$f(i,j) = \max_{0<m\leq j} [1 + f(i, j - m)(1 - p(1 - \rho)^m) + f(i - 1, j - m)p(1 - \rho)^m]$$

όπου f (i, j) = E (ο αριθμός των όπλων που απαιτούνται για να καταστρέψουν τους στόχους i δεδομένου ότι j πύραυλοι είναι διαθέσιμοι).

2.3.5 Στρατηγικές άμυνας προσανατολισμένες στον επιτιθέμενο

Η προηγούμενη ενότητα εξέτασε το κέρδος αποτελεσματικότητας εάν η άμυνα μπορούσε να αξιολογήσει τη ζημιά στους στόχους της. Αντίθετα, μπορεί να προκύψει μια κατάσταση όπου η άμυνα δεν είναι σε θέση να προβλέψει σε ποιον στόχο στοχεύει ένα όπλο πριν από τη διάθεση ενός πυραύλου για να εμπλέξει το συγκεκριμένο στόχο. Το καλύτερο που μπορεί να κάνει η άμυνα σε μια τέτοια κατάσταση θα ήταν να χρησιμοποιήσει μια στρατηγική προσανατολισμένη στους επιτιθέμενους και να εκχωρήσει τυχαία πυραύλους στα όπλα με βάση ένα προς ένα, και γνωρίζοντας αυτήν τη στρατηγική, η επίθεση θα επιτεθεί σε κάθε στόχο με όπλα A.

Εάν $d \geq a$, κάθε όπλο θα διαθέτει 1 πύραυλο. Εάν $d < a$, ο αριθμός των όπλων που πραγματικά παρεμποδίζονται θα είναι μια τυχαία μεταβλητή από μια διωνυμική κατανομή με την παράμετρο d / a.

Δύο διαφορετικές περιπτώσεις μπορούν να εξεταστούν για την άμυνα προσανατολισμένη στον επιτιθέμενο: όταν καμία πλευρά δεν γνωρίζει την κατανομή της άλλης και όταν ο επιτιθέμενος γνωρίζει την κατανομή του αμυνόμενου. Και στις δύο περιπτώσεις, θεωρείται ότι και οι δύο πλευρές γνωρίζουν την τιμή των A, D, T, ρ και p.

Όταν και οι δύο πλευρές πρέπει να κάνουν τις κατανομές τους αγνοώντας την κατανομή της άλλης, οι βέλτιστες στρατηγικές και για τις δύο είναι η κατανομή πυραύλων και όπλων τυχαία και όσο το δυνατόν πιο ομοιόμορφα. Σε περίπτωση που ο επιτιθέμενος έχει την τελευταία κίνηση, η βέλτιστη αμυντική στρατηγική είναι να διαθέσει πυραύλους όσο το δυνατόν πιο ομοιόμορφα στους στόχους. Εάν το D / A είναι ακέραιος και η άμυνα χρησιμοποιεί τη βέλτιστη στρατηγική του, η βέλτιστη στρατηγική επίθεσης θα ήταν να αντιστοιχίσει [A / T] όπλα σε T - (A -I [A / T]) στόχους και [A / T] + 1 όπλα σε AT [A / T] στόχους.

2.4 Η επίθεση και η άμυνα για ένα σύνολο μη όμοιων στόχων με διαφορετικές αξίες

Σε αυτήν την ενότητα, εξετάζονται στρατηγικές επίθεσης και άμυνας για μια ομάδα στόχων με άνισες τιμές Vi. Η τιμή ενός στόχου μπορεί να σχετίζεται με κάποια φυσική παράμετρο του στόχου, όπως ο ανθρώπινος πληθυσμός για έναν στόχο πόλης. Υποτίθεται ότι οι τιμές των στόχων και τα μεγέθη των αποθεμάτων είναι γνωστά τόσο στον επιτιθέμενο όσο και στον αμυνόμενο. Ένα κατάλληλο μέτρο αποτελεσματικότητας σε αυτή την περίπτωση θα ήταν η αναμενόμενη τιμή των στόχων, που σώθηκαν, E (V). Δεδομένου ότι οι στόχοι έχουν διαφορετικές τιμές, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι θα είχαν διαφορετικές ευπάθειες. Ως εκ τούτου, η τιμή του p, η πιθανότητα θανάτωσης όπλου, δεν θα είναι σταθερή, αλλά θα ποικίλλει ανάλογα με τον στόχο με τον οποίο συνδέεται. Σε γενικές γραμμές, οι προσεγγίσεις που έχουν αναπτυχθεί για την εξεύρεση βέλτιστων στρατηγικών επίθεσης και άμυνας, ενώ οι στόχοι των άνισών τιμών οδηγούν σε προσεγγιστικές λύσεις και όχι σε ακριβείς. Οι ακόλουθες καταστάσεις έχουν αναλυθεί από τους ερευνητές:

- προβλήματα μονόπλευρης κατανομής,
- στρατηγικές offense – last – move,
- στρατηγικές, όταν καμία πλευρά δεν γνωρίζει την κατανομή της άλλης,
- στρατηγικές όταν το μέγεθος του αποθέματος του επιτιθέμενου είναι άγνωστο και τέλος,
- στρατηγικές άμυνας προσανατολισμένες στον επιτιθέμενο.

2.4.1 Προβλήματα μονόπλευρης κατανομής

Ένα μονόπλευρο πρόβλημα κατανομής υπάρχει όταν έχει προσδιοριστεί η στρατηγική κατανομής της μιας πλευράς και είναι γνωστό στην άλλη πλευρά που στη συνέχεια σχεδιάζει τη βέλτιστη κατανομή του για να αντιμετωπίσει αυτήν τη συγκεκριμένη εχθρική στρατηγική. Δύο είναι οι διαθέσιμες μαθηματικές τεχνικές για αυτόν τον τύπο προβλήματος και είναι ο δυναμικός προγραμματισμός και οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Για να χρησιμοποιήσετε αυτές τις μεθόδους για την εύρεση της μέγιστης τιμής του E (V) και της βέλτιστης κατανομής άμυνας για μια συγκεκριμένη κατανομή επίθεσης, το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\max \sum_{i=1}^{k} E(i, di)\ υπό \sum_{i=1}^{T} cidi \ \leq c$$

όπου το E (i, d_i) είναι μια γενική συνάρτηση που υποδηλώνει την αναμενόμενη τιμή που σώζεται στον i-οστό στόχο, εάν di πύραυλοι διατίθενται σε καθένα από τα κόστη ci και C είναι ο συνολικός διαθέσιμος αμυντικός προϋπολογισμός για πυραύλους. Η δυναμική προσέγγιση προγραμματισμού επιλύει διαδοχικά προβλήματα μεγιστοποίησης χρησιμοποιώντας μια εξίσωση αναδρομής, ενώ η μέθοδος πολλαπλασιαστή Lagrange βρίσκει το μη περιορισμένο μέγιστο της συνάρτησης Lagrangian είτε με άμεση διαφοροποίηση του Lagrangian είτε με μεθόδους άμεσης αναζήτησης.

2.4.2 Στρατηγικές offense – last - move

Έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι για τον προσδιορισμό στρατηγικών επίθεσης και άμυνας όταν ο επιτιθέμενος έχει την τελευταία κίνηση. Οι προσεγγίσεις σε αυτό το πρόβλημα μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία χρησιμοποιεί μια αυθαίρετη συνάρτηση αποπληρωμής E (i, a_i, d_i), ενώ η άλλη κατηγορία αναλαμβάνει συγκεκριμένες λειτουργίες αποπληρωμής. Γενικά, οι εξειδικευμένες λειτουργίες πληρωμής απλοποιούν σημαντικά την ανάλυση.

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση πολλαπλασιαστή Lagrange, μπορούν να επιτευχθούν κατά προσέγγιση άνω και κάτω όρια για το E * (V), εάν χρησιμοποιούνται βέλτιστες στρατηγικές και από τις δύο πλευρές, εισάγοντας τη συνάρτηση Lagrangian:

$$L(\lambda, w) = \max_{d} \min_{a} \{ \sum_{i=1}^{T} E(i, ai, di) - \lambda \sum_{i=1}^{T} di + w \sum_{i=1}^{T} ai \}$$

Ένα κατώτερο όριο στο E * (V) δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$E(i, ai *, di *) - \lambda 0 d0 * \ + w0 \sum_{i} ai *$$

όπου (λ_0, w_0, a_i^*, d_i^*) είναι η μέγιστη λύση για τη Lagrangian. Ένα ανώτερο όριο στο E * (V) μπορεί να επιτευχθεί με την εξεύρεση μέγιστων λύσεων στη Lagrangian για άλλες τιμές λ και w. π.χ. λ_1, w_1, με τις αντίστοιχες τιμές a_i ', d_i', A 'και D'. Έπειτα εάν E (I, a_i',

d_i') $-\lambda_1$ (A-A') + w_1 (D-D') $\leq \Sigma_i$ E(i, a_i*,d_i*) ένα εύρος λ, $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1'$ μπορεί να εξαλειφθεί, όπου λ_1' στην παραπάνω εξίσωση αλλάζει την ανισότητα. Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαδικασία απομάκρυνσης διαδοχικά για διαφορετικές λύσεις Lagrangian, μόνο μια μικρή περιοχή κοντά στο λ_0 δεν θα εξαλειφθεί, π.χ. $\lambda_L \leq \lambda_0 \leq \lambda_H$. Ένα ανώτερο όριο για το E * (V) είναι τότε η μέγιστη τιμή του L (λ, w) στην περιοχή $\lambda_L \leq \lambda \leq \lambda_H$, w = w_0. Εάν η διαφορά μεταξύ αυτών των ορίων είναι μικρή, είναι εφικτή η χρήση των στρατηγικών Lagrangian a_i* και d_i*.

Μια άλλη προσέγγιση στο ίδιο πρόβλημα είναι η χρήση της σχέσης δυναμικού προγραμματισμού και έτσι έχουμε:

$$ci(A,D) = \max_{0<a\leq A}\min_{0<d\leq D}\{E(i,ai,di) + ci-1(A-ai,D-di)\}$$

ξεκινώντας με το i = 1 και την επίλυση επαναληπτικά για ai *, di * i = 1, ..., T. Το τελικό C_T (A, D) ωστόσο θα είναι μόνο ένα ανώτερο όριο για το E * (V) και η κατανομή που θα βρεθεί δεν θα είναι βέλτιστη. Ένα κατώτερο όριο μπορεί να βρεθεί υιοθετώντας την κατανομή όπλων a_i* και χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό για τον προσδιορισμό των αντίστοιχων αμυντικών κατανομών. Εξετάζονται τρεις σαφείς λειτουργίες αποπληρωμής με αυξανόμενους βαθμούς απλότητας. Σε μια εξιδανικευμένη άμυνα στην οποία κάθε όπλο αναχαιτίζεται από d/a πυραύλους, η συνάρτηση αποπληρωμής E(i) μπορεί να δοθεί από τον παρακάτω τύπο:

$$E(i) = Vi(1 - gai\exp(-\frac{tidi}{ai}))$$

όπου t_i = -ln (1 – ϱ_i) . Η αναμενόμενη τιμή των στόχων που σώζονται με βέλτιστες στρατηγικές είναι τότε:

$$E*(V) = \max_{d}\min_{a}\sum_{i=1}^{T}E(i)$$

Το πρόβλημα της εύρεσης των βέλτιστων στρατηγικών a_i* και d_i* είναι ένα πολύ δύσκολο αναλυτικό πρόβλημα. Μια προσέγγιση των βέλτιστων στρατηγικών μπορεί να προκύψει στην περίπτωση που το συνολικό μέγεθος της επίθεσης είναι πολύ μεγάλο σε σύγκριση με το απόθεμα άμυνας και τον αριθμό των στόχων. Έτσι έχουμε τα εξής:

$$a_i^* = [\ln c - \ln(-v_i \ln u_i)]/\ln u_i$$

$$όπου\ u_i = 1 - q_{oi} \exp\left(-\frac{t_i D}{A}\right)$$

$$lnc = \left\{A + \sum_{i=1}^{T} \frac{\ln(-v_i lnu_i)}{lnu_i}\right\} / \sum_{i=1}^{T} 1/lnu_i$$

$$d_{i^*} = \frac{Da_{i^*}}{A}\ και\ E^*(V) = \sum_{i=1}^{T} V_i\, u_i^{a^o}$$

Μια έγκυρη λύση επιτυγχάνεται όταν εξαλειφθούν τυχόν αρνητικά a_i* (στόχοι που έμειναν απροστάτευτοι), η λύση κλειστής μορφής που προέκυψε για τους υπόλοιπους στόχους και το θετικό ai * ικανοποιεί την παρακάτω αβεβαιότητα:

$$a_i^* lnu_i + u_i^{-a_i^o} < 1 + t_i d_i (1 - u_i)/u_i$$

Εάν οι πύραυλοι θεωρούνται αξιόπιστοι, δηλαδή ρ = 1, η συνάρτηση αποπληρωμής δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$E(i) = v_i\,(1-p)^{\max(0, a_i - d_i)}$$

$$και\ E^*(V) = \max_{d_i} \min_{a_i} (E(i) - \lambda d_i + w a_i)$$

Οι τιμές βελτιστοποίησης των d_i και a_i μπορούν να βρεθούν για οποιοδήποτε λ και w σε τρεις περιπτώσεις:

$$\lambda < w\text{: } έπειτα\ d_i^* = \frac{v_i - t_i}{w}\ για\ w < v_i x_i\ και$$

$$a_i^* = 0 \text{ ή } \frac{v_i}{w} - \frac{1}{x}\ at\ will,$$

$$όπου\ x = -\ln(1-p)\ και\ t_i = \{\frac{w}{x_i}\{1 - \ln(\frac{w}{v_i x})\}\}$$

$$\lambda = w : έπειτα\ d_i^* = οποιαδήποτε\ αξία\ στο\ διάστημα\ \left\{0, \left(v_i - \frac{t_i}{w}\right)\right\}\ για$$

$$w < v_i x,$$

$$a_i^* = 0 \text{ ή } \frac{v_i}{w} - \frac{1}{x}\ εάν\ d_i^* = \frac{v_i - t_i}{w}\ και$$

$$a_i^* = d_i^* - \frac{\ln\left(\frac{w}{v_i x}\right)}{x}\ εάν\ d_i^* < \frac{v_i - t_i}{w}$$

$$\lambda > w : \acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\tau\alpha\; d_i^* = 0\; \kappa\alpha\iota\; a_i^* = \max\{0, -\ln\frac{\frac{w}{v_i x}}{x}\}$$

$$\lambda\; \kappa\alpha\iota\; w\; \varepsilon\pi\iota\lambda\acute{\varepsilon}\chi\theta\eta\kappa\alpha\nu\; \alpha\pi\acute{o}\; \delta o\kappa\acute{\iota}\mu\eta\; \kappa\alpha\iota\; \sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\; \acute{\varepsilon}\tau\sigma\iota\; \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon \sum_{i=1}^{Y} a_i^* = A, \kappa\alpha\iota \sum_{i=1}^{T} d_i^* = D. \Sigma\tau\iota\varsigma\; \delta\acute{\upsilon}o\; \pi\rho\acute{\omega}\tau\varepsilon\varsigma\; \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma, d_i^* = a_i^* = 0\; \varepsilon\acute{\alpha}\nu\; w \geq v_i x.$$

Στην περίπτωση όπου p = ρ = 1 (τέλεια βλήματα και όπλα),

$$E(i) = v_i\; \varepsilon\acute{\alpha}\nu\; a_i \leq d_i, \kappa\alpha\iota\; 0\; \varepsilon\acute{\alpha}\nu\; a_i > d_i$$

Μία λύση αυτού του προβλήματος προϋποθέτει ότι το μέγεθος του αποθέματος όπλου κανονικοποιείται σε 1 και ένα μέγεθος αποθέματος πυραύλων σε H = D / A. Χρησιμοποιώντας τεχνικές από τη θεωρία των γραμμικών εξισώσεων και τη θεωρία αριθμών, μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχουν ορισμένες κανονικές στρατηγικές άμυνας που αντιστοιχούν σε αποθέματα άμυνας H, ..., Hk έτσι ώστε η άμυνα να μπορεί να επιτύχει το ίδιο E*(V) χρησιμοποιώντας μόνο πυραύλους H_i, όπου $H_i \leq H \leq H_{i+1}$. δηλ. κάποιος αναφέρει το πλήρες σύνολο στρατηγικών επίθεσης και άμυνας για 1 ≤ D / A ≤T και οι βέλτιστες στρατηγικές επίθεσης / άμυνας είναι αυτές που μεγιστοποιούν / ελαχιστοποιούν την αναμενόμενη τιμή που καταστρέφεται. Αυτή η μέθοδος είναι ωστόσο εφικτή μόνο για μικρούς αριθμούς στόχων, καθώς οι συνδυαστικές δυνατότητες αυξάνονται γρήγορα με την αύξηση του αριθμού των στόχων.

2.4.3 Στρατηγικές, όταν καμία πλευρά δεν γνωρίζει την κατανομή της άλλης πλευράς

Η θεωρητική κατάσταση του παιχνιδιού όπου κάθε πλευρά γνωρίζει το μέγεθος των αποθεμάτων της άλλης αλλά όχι την κατανομή της σε στόχους είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα από την πλευρά των μαθηματικών. Προκειμένου να επιτευχθούν οι βέλτιστες στρατηγικές, είναι απαραίτητο να κάνουμε έναν αριθμό απλοποιημένων παραδοχών για να κάνουμε το πρόβλημα πιο κατανοητό. Εάν υποτεθεί ότι $A \geq D$ και $p = \varrho = 1$ με τη συνάρτηση αποπληρωμής να είναι η αναμενόμενη τιμή των στόχων που έχουν καταστραφεί, η βέλτιστη στρατηγική επίθεσης είναι να επιτεθεί ο μοναδικός στόχος a με ολόκληρο το απόθεμα k και η άμυνα να κατανέμει τους πυραύλους της μεταξύ των πιο πολύτιμων στόχων, αφήνοντας τους λιγότερο πολύτιμους στόχους απροστάτευτους. Εάν υπάρχουν μόνο δύο στόχοι με τις τιμές V_1 και V_2, οι βέλτιστες στρατηγικές άμυνας και επίθεσης μπορούν να επιτευχθούν σε 5 περιπτώσεις:

- $D = A-1$ (καμία πλευρά δεν κυριαρχεί): η μοναδική βέλτιστη στρατηγική επίθεσης είναι να διαθέσει όλα τα όπλα στον πιο πολύτιμο στόχο, ενώ όλες οι αμυντικές στρατηγικές είναι ισοδύναμες. Η τιμή του παιχνιδιού V είναι max (V_1, V_2),
- $D \geq 2A$ (ο αμυνόμενος κυριαρχεί): οποιαδήποτε αμυντική στρατηγική είναι η βέλτιστη εφ 'όσον τουλάχιστον A πύραυλοι κατανέμονται σε κάθε στόχο, ενώ όλες οι στρατηγικές επίθεσης είναι ισοδύναμες με $V = 0$,
- $2D + 2 < A$ (ο επιτιθέμενος είναι κυρίαρχος): οποιαδήποτε στρατηγική επίθεσης είναι βέλτιστη εφόσον τουλάχιστον όπλα $D + 1$ κατανέμονται σε κάθε στόχο. Η αμυντική στρατηγική δεν έχει καμία επίδραση και $V = V_1 + V_2$.

Στις υπόλοιπες δύο περιπτώσεις όπου $2A-1 \geq D > A$ (ο αμυνόμενος είναι κυρίαρχος) και $D + 2 \leq A \leq 2D + 1$ (ο επιτιθέμενος είναι κυρίαρχος), οι βέλτιστες στρατηγικές μπορούν να γράψουν ως κυρτός γραμμικός συνδυασμός ακραίων στρατηγικών της γενικής μορφής:

- Κατανομή i πυραύλων (ή όπλων) στον στόχο της τιμής V_1, και τους υπόλοιπους πυραύλους (ή όπλα) στον άλλο στόχο της τιμής V_2 με πιθανότητα x_i, όπου $\Sigma x_i = 1$. Όταν η άμυνα είναι κυρίαρχη, κάθε βέλτιστη εξωτερική στρατηγική άμυνας αντιστοιχεί σε μια ακολουθία $M = (m1, ..., mk)$ ακεραίων έτσι ώστε $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq .... \leq m_k \leq R$ όπου k είναι ο μικρότερος ακέραιος $\geq (A + 1) / (D-A + 1)$, και $R = k$ (D-A

+ 1) -A, και εκχωρεί i (D-A + 1) -mi βλήματα στον στόχο με τιμή V_1, (και τους υπόλοιπους πυραύλους στον στόχο με τιμή V_2) με πιθανότητα:

$$\frac{V_1^{i-1} - V_2^{k-i}}{V_2^{k-1} + V_1 V_2^{k-2} + \cdots + V_1^{k-2} V_2 + V_1^{k-1}}, i = 1, \dots, k$$

Παρομοίως κάθε στρατηγική βέλτιστης παράπλευρης επίθεσης αντιστοιχεί σε μια ακολουθία (n_1, n_2, ...) ακεραίων έτσι ώστε (D-A + 1)> + n1≥ ...≥ R και εκχωρεί i (D-A + 1)-n_i όπλα στο στόχο της τιμής V_1 (και το υπόλοιπο στο στόχο της τιμής V_2) με πιθανότητα:

$$\frac{V_1^{k-1} - V_2^{i-i}}{V_2^{k-1} + V_1 V_2^{k-2} + \cdots + V_1^{k-2} V_2 + V_1^{k-1}}, i = 1, \dots, k$$

Όταν ο επιτιθέμενος είναι κυρίαρχος, οι εξωτερικές βέλτιστες στρατηγικές άμυνας της λαμβάνονται αντικαθιστώντας το Dmean = A-2 και το Amean = D στην ακραία στρατηγική βέλτιστης επίθεσης που δίνεται παραπάνω και οι εξωτερικές στρατηγικές βέλτιστης επίθεσης λαμβάνονται αντικαθιστώντας το Dmean και το Amean στον τύπο της εξωτερικής βέλτιστης στρατηγικής άμυνας.

2.4.4 Στρατηγικές, όταν το μέγεθος του πολεμικού αποθέματος του επιτιθέμενου είναι άγνωστο

Εάν η άμυνα δεν έχει γνώση του μεγέθους αποθεμάτων του επιτιθέμενου, είναι λογικό να σχεδιαστεί μια στρατηγική έτσι ώστε η αναμενόμενη αξία των στόχων που έχουν καταστραφεί να είναι σχεδόν ανάλογη με το μέγεθος της επίθεσης (στιβαρή στρατηγική). Εάν ο επιτιθέμενος έχει την τελευταία κίνηση, ο στόχος της άμυνας θα ήταν να ελαχιστοποιηθεί η μέγιστη (σε όλες τις πιθανές στρατηγικές επίθεσης) αναμενόμενη τιμή που καταστράφηκε ανά όπλο που δαπανήθηκε στον i-οστό στόχο, δηλαδή min Si = $\max_{a_i}$ [(v_i-E (i, a_i, d_i)) / a_i]. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας μια βέλτιστη στρατηγική άμυνας (d_i* ..., d_Γ*) έτσι ώστε S_i = k σε όλους τους υπερασπισμένους στόχους και $S_i \leq$ k σε όλους τους απροσδιόριστους στόχους, όπου το k βρίσκεται από δοκιμή και σφάλμα που ικανοποιεί Σd_i* = D.

Όταν καμία πλευρά δεν γνωρίζει την κατανομή της άλλης, μια σχεδόν βέλτιστη στρατηγική άμυνας μπορεί να κατασκευαστεί εάν η αξιοπιστία του πυραύλου θεωρείται ότι είναι 1 και ένα αδιάκοπο όπλο καταστρέφει ακριβώς μία μονάδα της τιμής στόχου. Εάν το v_i είναι ακέραιος και $\Sigma v_i = D$, τότε οι πύραυλοι 0, 1, ..., $2v_i$ αντιστοιχίζονται στην άμυνα ενός στόχου της τιμής v_i, καθένας με πιθανότητα $1 / (2v_i +1)$. Εάν το μέγεθος του αποθέματος είναι $D = \Sigma v_i$, η αντίστοιχη κατανομή άμυνας θα κλιμακωθεί έως 0, 1, 2, ..., $2kv_i$ πυραύλους που έχουν εκχωρηθεί με πιθανότητες $1 / (2kv_i + 1)$.

2.4.5 Στρατηγικές άμυνας προσανατολισμένες στον επιτιθέμενο

Οι στρατηγικές άμυνας που προσανατολίζονται στους επιτιθέμενους χρησιμοποιούνται όταν η άμυνα αγνοεί ποιοι στόχοι επιτίθενται στα εισερχόμενα όπλα. Εάν η επίθεση έχει την τελευταία κίνηση, η ομοιόμορφη στρατηγική προσανατολισμένη προς τους επιτιθέμενους που περιγράφηκε νωρίτερα για πανομοιότυπους στόχους είναι επίσης βέλτιστη στην περίπτωση ανισότιμων στόχων.

Εάν και οι δύο πλευρές αγνοούν την κατανομή της άλλης, η βέλτιστη άμυνα είναι μια ομοιόμορφη στρατηγική προσανατολισμένη σε τυχαίους επιτιθέμενους που μοιάζει με την περίπτωση όπου οι στόχοι είναι ίδιοι, δηλαδή κατανέμονται [D / A] τυχαία βλήματα σε εισερχόμενα A-D + A [D / A] όπλα και [D / A] +1 βλήματα στα υπόλοιπα. Η βέλτιστη στρατηγική επίθεσης μπορεί να προσεγγιστεί ως εξής: κατανέμονται όπλα στους στόχους T_0 μεγαλύτερης αξίας, όπου το T_0, είναι η μέγιστη τιμή του i που ικανοποιεί την ανισότητα

$$v_i \geq \left(\prod_{j=1}^{i} v_j\right)^{\frac{1}{i-1}} Q^{\frac{A-1}{i-1}}, 1 \leq i \leq T$$

$$\kappa\alpha\iota\ Q = 1 - p\,(1 - p_0)$$

$$\mu\varepsilon\ p_0 = \left(1 + \frac{D}{A} + \left[\frac{D}{A}\right]\right)\left(1 - (1-\rho)^{\frac{D}{A}}\right) + \left(\frac{D}{A} - \left[\frac{D}{A}\right]\right)\left(1 - (1-\rho)^{\left[\frac{D}{A}\right]+1}\right)$$

Ο αριθμός των όπλων που έχουν εκχωρηθεί στο v_j, $1 \leq j \leq T$ είναι $a_j = (\log c - \log v_j) / \log Q$, όπου:

$$c = \left(\prod_{i=1}^{T_0} v_i\right)^{\frac{1}{T_0}} Q^{\frac{A}{T_0}}$$

2.5 Οι στρατηγικές άμυνας για ένα μόνο στόχο – σημείο

Σε αυτήν την ενότητα, εξετάζεται η άμυνα ενός στόχου ενός σημείου ή ενός στόχου ενιαίας περιοχής με ομοιόμορφη τιμή έναντι μίας μόνο ομοβροντίας όπλων ή διαδοχικών κυμάτων όπλων. Το μέτρο αποτελεσματικότητας στην περίπτωση ενός μόνο στόχου είναι Pr (ο στόχος που επιβιώνει), και στην περίπτωση ενός στόχου περιοχής είναι E (αριθμός από διεισδυτές).

Το τυπικό πρόβλημα άμυνας υποθέτει ότι η λειτουργία ζημιάς είναι μια λειτουργία «cookie-cutter» στην περίπτωση ενός στόχου - σημείου, δηλαδή ένα όπλο καταστρέφει τον στόχο εάν και μόνο εάν προσγειωθεί σε απόσταση B του στόχου, με το R να είναι η θανατηφόρο ακτίνα κύκλου. Θεωρείται επίσης ότι μεμονωμένοι πύραυλοι και όπλα λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

Εάν η άμυνα γνωρίζει τη θανατηφόρα ακτίνα και επίσης ότι ένα όπλο από μία σειρά βολών των όπλων A θα προσγειωθεί σε απόσταση R πριν πραγματοποιήσει την κατανομή του, η βέλτιστη στρατηγική άμυνας είναι η διάσωση των D πυραύλων του όσο το δυνατόν πιο ομοιόμορφα έναντι κάθε ενός από τα όπλα a, και η πιθανότητα καταστροφής στόχου είναι:

$$P_a = 1[1-(1-\rho)^k]^{a-r}[1-(1-\rho)^{k+1}]^r$$

όπου k = [D / A] και r είναι το υπόλοιπο όταν το D διαιρείται με a, δηλ. D = ka + r. Το P μπορεί να προσεγγιστεί επιτρέποντας μη ακέραιες κατανομές πυραύλων σε κάθε όπλο:

$$P \approx 1 - [1-(1-\rho)^{\frac{m}{n}}]^{a}$$

Η προσέγγιση θα είναι, σε όλες τις περιπτώσεις, το πολύ τόσο μεγάλη όσο η πραγματική τιμή. Η απόλυτη πιθανότητα καταστροφής στόχου είναι:

$$\sum_{a=0}^{A} \binom{A}{a} p^{a}(1-p)^{A-a} P_a$$

όπου p = Pr (ένα όπλο προσγειώνεται σε απόσταση R του στόχου). Μπορούν να εξεταστούν διάφορες τροποποιήσεις σε αυτό το τυπικό αμυντικό πρόβλημα. Έτσι έχουμε τα παρακάτω:

- η άμυνα δεν γνωρίζει τη θανατηφόρα ακτίνα R σε μια επίθεση ομοβροντίας πυρών,
- η άμυνα δεν γνωρίζει το μέγεθος της επίθεσης A σε μια διαδοχική επίθεση,
- η άμυνα δεν γνωρίζει τη θανατηφόρα ακτίνα R σε μια διαδοχική επίθεση,
- η άμυνα γνωρίζει ότι η διαδοχική επίθεση περιέχει ένα όπλο αναμεμιγμένο με ομοιώματα, και τέλος
- η άμυνα μπορεί να κάνει εκτίμηση ζημιών σε επιθετικά όπλα.

2.5.1 Η άμυνα δεν γνωρίζει τη θανατηφόρα ακτίνα R σε μία επίθεση ομοβροντίας πυρών

Υποτίθεται ότι η άμυνα γνωρίζει το μέγεθος της επίθεσης a και τα σημεία κρούσης κάθε ενός από αυτά τα όπλα a πριν από την κατανομή των πυραύλων του.

Ωστόσο, η θανατηφόρα ακτίνα R των όπλων δεν είναι γνωστή. Σε κατάλληλο μέτρο αποτελεσματικότητας, η χρήση είναι η μεγιστοποίηση του E (απόσταση του στόχου έως το σημείο πρόσκρουσης του πλησιέστερου διεισδυτή) = E. H πιθανότητα να διεισδύσει το πλησιέστερο i-οστό όπλο είναι η παρακάτω:

$$A_i = (1-\rho)^{m_i}$$

όπου m_i ο αριθμός των πυραύλων, που έχουν κατανεμηθεί στον i – οστό όπλο. Έπειτα:

$$E = r_1 A_1 + r_2 A_2 (1 - A_1) + \dots + r_j A_j \prod_{i=1}^{j-1} (1 - A_i) + r_{j+1} \prod_{i=1}^{j} (1 - A_i)$$

εάν τα κοντινότερα όπλα j έχουν πυραύλους. Για να βρούμε τις βέλτιστες κατανομές m*, ο δυναμικός προγραμματισμός θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη μεγιστοποίηση του E έτσι ώστε :

$$\prod_{i=1}^{j} A_i = (1-\rho)^m$$

όπου $m = \sum_{i=1}^{j} m_i$

Μια κατά προσέγγιση λύση μπορεί να ληφθεί επιτρέποντας στα άγνωστα να είναι συνεχή και διαφοροποιώντας το E σε σχέση με το mi. Σε αυτήν την περίπτωση λαμβάνεται ένα σύνολο αναδρομικών εξισώσεων:

$$P_k = P_{k+1}(1 - A_{k-1}),$$

$$Q_k = Q_{k+1}(1 - A_{k+1}^*) + r_{k+1} - r_k,$$

$$A_k^* = \frac{P_k}{Q_k} \text{ για } k = j-2, j-3, \dots, 1$$

$$\text{όπου } P_1 = r_{j+1} - r_j, Q_1 = r_{j+1} - r_{j-1}, A_1^* = \frac{P_1}{Q_1}$$

Αυτή η επανάληψη επιτρέπει σε κάποιον να πάρει διαδοχικά A_{j-1}^*, A_{j-2}^*, … , A_1^*. Έπειτα

$$m_i^* = \log A_i^* / \log(1-\rho)$$

2.5.2 Η άμυνα δεν γνωρίζει το μέγεθος της επίθεσης A σε μία διαδοχική επίθεση

Υποτίθεται εδώ ότι τα όπλα φτάνουν ένα - ένα κάθε φορά και η άμυνα γνωρίζει τη θανατηφόρα ακτίνα του όπλου, αλλά όχι τον τόπο της επίθεσης. Ο στόχος της άμυνας είναι η μεγιστοποίηση του E (αριθμός όπλων στον 1ο διεισδυτή). Αυτό το πρόβλημα είναι πολύ καθαρά πανομοιότυπο με αυτό της προηγούμενης ενότητας, και μπορεί εξίσου να εξευρεθεί μια κατά προσέγγιση λύση μέσω ενός συνόλου αναδρομικών τύπων. Μια πολύ βέλτιστη αμυντική στρατηγική μπορεί να δηλωθεί απλά ως εξής:

Για ένα απόθεμα πυραύλων D, κατανείμετε περίπου D / h από αυτά στα πρώτα h όπλα και κανένα στο (h + 1) - οστό όπλο.

Οι αριθμητικοί υπολογισμοί δείχνουν ότι η επιλογή του h για αυτήν την σχεδόν βέλτιστη αμυντική στρατηγική είναι περίπου το 90% του πρώτου μη ενεργοποιημένου όπλου με τη βέλτιστη κατανομή. Η απώλεια στον αναμενόμενο αριθμό για τον 1ο διεισδυτή είναι μόνο περίπου 6% σε σύγκριση με το συνεχές βέλτιστο. Μια ακριβής διαδικασία που παρέχει ακέραιες κατανομές μπορεί να προκύψει άμεσα αν υποτεθεί ότι το D δεν είναι πολύ μεγάλο ή ότι δεν μπορούν να αντιστοιχιστούν περισσότεροι από 2 πύραυλοι σε κάθε όπλο. Συγκρίνοντας το μέτρο αποτελεσματικότητας εάν ένας πύραυλος έχει αντιστοιχιστεί σε καθένα από τα πρώτα (m + 1) όπλα με το μέτρο αποτελεσματικότητας εάν 2 πύραυλοι έχουν κατανεμηθεί στο πρώτο όπλο και ένας πύραυλος σε καθένα από τα επόμενα (m -1) όπλα, η ακόλουθη στρατηγική κατανομή άμυνας προέρχεται. Ορίζεται:

$$m_0 = \left[-\log \frac{1-\rho-p+p\rho}{\log q_1} \right] + 2$$

όπου p = πιθανότητα καταστροφής όπλου, και το

$$q_1 = 1 - p(1-\rho)$$

Στη συνέχεια, εάν $D \leq m_0$, ανάθεσε 1 πύραυλο το καθένα στα πρώτα όπλα D και αν $D > m_0$, ανάθεσε 2 βλήματα το καθένα στα πρώτα $(D - m_0 + 1) / 2$ όπλα και 1 βλήμα το καθένα στα επόμενα $(D + m_0 - 1) / 2$ όπλα. Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία, θα μπορούσαμε επίσης να αντλήσουμε μια διαδικασία για την απόκτηση της βέλτιστης στρατηγικής κατανομής της άμυνας, δεδομένου ότι σε κάθε όπλο δεν μπορούν να αποδοθούν περισσότεροι από 3 πύραυλοι. Ωστόσο, δεν έχει δοθεί λύση που να επιτρέπει την αποστολή περισσότερων από 3 πυραύλων σε ένα όπλο. Στη συνέχεια, είναι απαραίτητο να καταφύγουμε σε δυναμικό προγραμματισμό για την εξεύρεση λύσης.

Μια εναλλακτική στρατηγική άμυνας μπορεί να επιτευχθεί εάν, αντί να μεγιστοποιήσει το E (όγκος όπλων στον 1ο διεισδυτή), η άμυνα επιλέγει να κάνει το Pr (καταστροφή στόχου) ανάλογο με το μέγεθος της επίθεσης έως το σημείο εξάντλησης των πυραύλων. Σε αυτήν την περίπτωση, η οριακή αύξηση της πιθανότητας καταστροφής στόχου που επιτυγχάνεται με την εκχώρηση 1 ακόμη όπλου στον στόχο είναι σταθερή. Αυτό το δόγμα της «μείωσης σταθερής αξίας» αποδίδει την ακόλουθη στρατηγική κατανομής σχεδόν βέλτιστης κατανομής:

$$m_i = -\log[(1 - i + n)p] / \log(1 - \rho), \qquad i = 1, \dots, n$$

όπου $\mathbf{m_i}$ είναι ο αριθμός των πυραύλων που αποδίδονται στο i - οστό όπλο, και **n** είναι ο αριθμός των όπλων που απαιτούνται για την εξάντληση του αποθέματος πυραύλων. Εάν η άμυνα γνωρίζει την πιθανότητα κατανομής του μεγέθους της επίθεσης και ο στόχος της είναι να ελαχιστοποιήσει το E = E (αριθμός διεισδυτών), τότε :

$$E = \sum_{i=1}^{n} p_i \, (1 - \rho)^{m_i}$$

όπου p_i = Pr (ο επιτιθέμενος θα επιτεθεί με i ή περισσότερα όπλα μέσα στη θανατηφόρα ακτίνα). Το p_i μπορεί να θεωρηθεί είτε διώνυμο είτε γεωμετρικό. Η μείωση του E που προκύπτει από την προσθήκη του πυραύλου j - οστού στο i - οστό όπλο είναι

$$R(i,j) = p_i[(1-\rho)^{j-1} - (1-\rho)^j]$$

Για να επιτευχθεί η βέλτιστη κατανομή, οι πύραυλοι εκχωρούνται ένας κάθε φορά σε αυτό το όπλο που δίνει τη μεγαλύτερη τιμή του R (i, j).

2.5.3 Η άμυνα δεν γνωρίζει τη θανατηφόρα ακτίνα R σε μία διαδοχική επίθεση

Υποτίθεται εδώ ότι η επίθεση συμβαίνει σε κύματα ενός όπλου κάθε φορά. Η άμυνα δεν γνωρίζει τη θανατηφόρα ακτίνα των όπλων, αλλά ξέρει το μέγεθος της επίθεσης και μπορεί να προβλέψει το σημείο της πρόσκρουσης κάθε όπλου σε σχέση με τον στόχο. Μπορούν να εξεταστούν δύο απλουστευτικές ακραίες περιπτώσεις, ανάλογα με το αν η άμυνα δεν έχει καμία γνώση ή πλήρη γνώση της κατανομής σημείων πρόσκρουσης. Είναι δυνατά δύο μέτρα αποτελεσματικότητας:

- MOE 1: μεγιστοποίηση του Pr (το όπλο του επιτιθέμενου που προσγειώνεται πλησιέστερα στον στόχο του έχει εκχωρηθεί πύραυλος), ή
- MOE 2: μεγιστοποίηση του E (συνολική βαθμολογία όπλων που καταστράφηκαν), όπου η βαθμολογία ενός όπλου είναι η πιθανότητα ότι ένα τυχαίο όπλο θα προσγειωθεί πιο μακριά από τον στόχο από ό, τι στην πραγματικότητα έκανε.

Σε περίπτωση που η κατανομή σημείων κρούσης είναι άγνωστη και χρησιμοποιείται το MOE 1, η βέλτιστη στρατηγική άμυνας έχει ως εξής: παρατηρήστε τη μικρότερη απόσταση απώλειας σε ένα κλάσμα στο, $a_i = 1, \ldots, D$ της επίθεσης και αντιστοιχίστε έναν πύραυλο στο 1ο όπλο που εμφανίζεται με μια μικρότερη απόσταση απώλειας.

Αυτή η παρατήρηση γίνεται D φορές, όπου D είναι ο συνολικός αριθμός των διαθέσιμων πυραύλων. Τα βέλτιστα κλάσματα a_i έχουν υπολογιστεί και καταγράφονται σε πίνακα. Στην εναλλακτική σχεδόν βέλτιστη στρατηγική για μεγάλα μεγέθη επίθεσης που είναι απλούστερο να υπολογιστεί έχει ως εξής: παρατηρήστε τη μικρότερη απόσταση απώλειας σε ένα κλάσμα

$$a = \exp\{-(D!)^{\frac{1}{D}}\}$$

της επίθεσης και αντιστοιχίστε πυραύλους στα όπλα του πρώτου m των πυραύλων των οποίων οι αποστάσεις είναι μικρότερες.

Εάν είναι γνωστή η κατανομή σημείων κρούσης, μπορεί να δοθεί μια σχεδόν βέλτιστη στρατηγική άμυνας για μεγάλα μεγέθη επίθεσης A ως εξής: παρατηρήστε την απόσταση r του i - οστού όπλου και αντιστοιχίστε έναν πύραυλο εάν $r_i \leq r*$,

όπου

$$r^* = \frac{k}{A} = \int_{-\infty}^{r'} p(r)dr$$

Οι βέλτιστες τιμές του k για διαφορετικές τιμές D έχουν προσδιοριστεί. Σε περίπτωση που είναι γνωστή η κατανομή σημείων κρούσης και χρησιμοποιείται το MOE 2, η βέλτιστη στρατηγική άμυνας έχει την ακόλουθη μορφή:

Ας υποθέσουμε ότι απομένουν t <= D πύραυλοι και k <= A όπλα εμφανίζονται ακόμη στην επίθεση. Όταν το πρώτο από τα k όπλα εμφανίζεται σε απόσταση r, εκχωρήστε έναν πύραυλο εάν r <= r (k, t), όπου r (k, t) ορίζεται σιωπηρά από:

$$U(k,t) = \int_{-\infty}^{r(k,t)} p(r)\, dr$$

Εάν το E (k, t) είναι η μέση τιμή των πιθανοτήτων t ότι ένα τυχαίο όπλο υπερβαίνει τις παρατηρούμενες αποστάσεις απώλειας των όπλων που καταστρέφονται από τους τελικούς πυραύλους t, το E (συνολική βαθμολογία των όπλων t) δίνεται από την επαναληπτική εξίσωση:

$$tE(k,t) = [1 + U(k,t)]\big[0.5\big(1 + U(k,t)\big)\big] + (t-1)E(k-1,t-1) + U(k,t)tE(k-1,t)$$

Αυτό αποδίδει:

$$U^*(k,t) + (t-1)E^*(k-1,t-1) = tE^*(k-1,t)$$

και οι βέλτιστες τιμές E * (k, t) και U * (k, t) μπορούν να βρεθούν αναδρομικά χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες

$$U^*(k,k) = 0, E^*(k,k) = 0.5, \mu\varepsilon\ 1 \leq k \leq n$$

2.5.4 Η άμυνα δεν γνωρίζει ότι η διαδοχική επίθεση περιέχει ένα όπλο αναμεμιγμένο με ομοιώματα

Οι υποθέσεις που έγιναν είναι ότι η άμυνα γνωρίζει ότι η διαδοχική επίθεση του μεγέθους A περιέχει ένα όπλο αναμεμιγμένο με (A-1) ομοιώματα, και την αξιοπιστία πυραύλων $\varrho < 1$ ενώ η πιθανότητα καταστροφή του όπλου είναι $p = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, ένα κατάλληλο MOE για την άμυνα θα ήταν να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα ότι ένα όπλο δεν παρεμποδίστηκε. Το όπλο χαρακτηρίζεται από μία μόνο παρατήρηση (πραγματικός αριθμός) που προέρχεται από μια κατανομή πιθανότητας με pdf f_w (x), και το δόλωμα χαρακτηρίζεται επίσης από μια παρατήρηση που προέρχεται από ένα pdf f_d (x), και τα δύο είναι γνωστά στην άμυνα. Η βέλτιστη στρατηγική μπορεί να καθοριστεί ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι απομένουν $t <= D$ βλήματα, και $k <= A$ επιτιθέμενα αντικείμενα που δεν έχουν ακόμη εμφανιστεί. Όταν εμφανιστεί το πρώτο από τα αντικείμενα, σημειώστε την τιμή c της παρατήρησής του και κατανείμετε πυραύλους i σε αυτό εάν $c_i \leq c \leq c_{i+1}$.

Οι βέλτιστες τιμές των c_i, $i = 1, \ldots, t + 1$ μπορούν να προκύψουν από την αναλυτική έκφραση του Pr (το όπλο διεισδύει) = p, που είναι μια περίπλοκη συνάρτηση των τιμών c_i. Οι τιμές πινάκων που σχετίζονται με τις βέλτιστες τιμές c_i είναι διαθέσιμες για τα $f_w(z)$ και $f_d(x)$ ως κανονικές κατανομές με διακύμανση μονάδας.

Έχει διατυπωθεί ένα γενικότερο μοντέλο με περισσότερα από ένα όπλα μεταξύ των επιτιθέμενων αντικειμένων A. Οι βέλτιστες στρατηγικές για δύο διαφορετικά κριτήρια αποτελεσματικότητας, δηλαδή ελαχιστοποίηση του Pr (ένα ή περισσότερα όπλα διεισδύουν) και ελαχιστοποίηση του E (αριθμός διεισδύσεων όπλων) έχουν προσδιοριστεί, για το $f_w(z)$ που είναι συνάρτηση κανονικής πυκνότητας με μέση μονάδα και διακύμανση και $f_d(x)$ που είναι συνάρτηση κανονικής πυκνότητας με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση μονάδας.

2.5.5 Η άμυνα μπορεί να κάνει εκτίμηση ζημιών σε επιθετικά όπλα

Όταν η άμυνα είναι σε θέση να πραγματοποιήσει εκτίμηση ζημιών στα επιτιθέμενα όπλα, μπορεί να χρησιμοποιήσει μια k - επιπέδου shoot – look στρατηγική, σύμφωνα με την οποία οι πύραυλοι m_1 κατανέμονται σε A όπλα στο πρώτο στάδιο, και στη συνέχεια οι πύραυλοι m_2 κατανέμονται στο A-n_1, όπλα που επιβιώνουν στο δεύτερο στάδιο αφού παρατηρήσουν ποια n_1 όπλα έχουν καταστραφεί στο πρώτο στάδιο, και ούτω καθεξής, και τελικά D- $(m_1 + m_2 + ... + m_{k-1})$ πύραυλοι διατίθενται στα A- $(n_1 + n_2 + ... + n_{k-1})$ σωζόμενα όπλα. Το μέτρο αποτελεσματικότητας που χρησιμοποιείται σε αυτήν την περίπτωση είναι η μεγιστοποίηση του Pr (τα όπλα, που δεν σώζονται).

Ένας αλγόριθμος για τον προσδιορισμό της βέλτιστης στρατηγικής shoot – look -shoot για οποιονδήποτε αριθμό σταδίων μπορεί να επινοηθεί χρησιμοποιώντας ένα σύνολο αναδρομικών εξισώσεων, όπου η βέλτιστη στρατηγική k - επιπέδου καθορίζεται από τις (k-1), (k-2),. .., 1ου σταδίου στρατηγικές.

Για μια στρατηγική shoot – look - shoot 2 σταδίου με A = 2, η βέλτιστη κατανομή είναι βλήματα D / 2 στο 1ο στάδιο και D / 2 πύραυλοι στο 2ο στάδιο. Και στις δύο περιπτώσεις, οι πύραυλοι αποδίδονται ομοιόμορφα σε όλα τα όπλα. Όταν A = 3 ή περισσότερα, τα αποτελέσματα της ανάλυσης είναι δύσκολο να ληφθούν και πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένας υπολογιστής για να αποκτήσει την κατανομή βελτιστοποίησης για κάθε A και D.

Για μια στρατηγική shoot – look - shoot D - επιπέδου, ο πύραυλος εκχωρείται σε κάθε στάδιο και σε αυτήν την περίπτωση, το Pr (δεν υπάρχουν όπλα επιβιώνουν) είναι :

$$p = \sum_{i=A}^{D} \binom{D}{i} (1-\rho)^{D-i} \rho^{i}$$

Για υψηλές τιμές ρ, η παροχή ενός ενιαίου «look» σε μια στρατηγική shoot – look - shoot 2ου σταδίου είναι αρκετά χρήσιμη όσον αφορά το κέρδος στο Pr (κανένα όπλο δεν επιβιώνει) σε σχέση με μια στρατηγική 1 σταδίου (χωρίς αξιολόγηση ζημιών), αλλά παρέχοντας περισσότερο από ένα look το κέρδος είναι πολύ λιγότερο, εκτός εάν η αξιοπιστία του βλήματος είναι χαμηλή.

Ιδιαίτερη σημασία για τις k – επιπέδου shoot – look- shoot στρατηγικές είναι όταν εκχωρείται ένας πύραυλος σε κάθε όπλο και ο χρόνος είναι περιορισμένος. Αυτό δημιουργεί αυτό που είναι γνωστό ως περιορισμένης δύναμης πυρός shoot – look – shoot άμυνα. Εάν το T είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ της πρώτης πιθανής εκχώρησης ενός πυραύλου σε ένα όπλο και της καταστροφής του στόχου από αυτό το όπλο, και τ είναι ο χρόνος που απαιτείται για έναν πύραυλο να επιτεθεί στο όπλο και να αξιολογήσει το αποτέλεσμα, τότε μία k – σταδίου shoot - look - shoot στρατηγική μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναντίον κάθε όπλου, όπου k = [T / τ]. Υποτίθεται ότι ο επιτιθέμενος επιτίθεται με όπλα A που φτάνουν σε διαστήματα ίσου μήκους sτ. Τέσσερις περιπτώσεις μπορούν να εξεταστούν ανάλογα με την τιμή του s.

Όταν s ≥ k, οι διαδοχικές δεσμεύσεις όπλων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και η πιθανότητα ότι ένα όπλο θα καταστρέψει τον στόχο είναι :

$$p = 1 - [1 - (1 - \rho)^k]^A$$

Όταν το s <k, οι διαδοχικές δεσμεύσεις όπλων δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και μπορεί να συμβούν καθυστερήσεις στις δεσμεύσεις διαδοχικών όπλων. Η αξιολόγηση του p συνεπώς εμπλέκεται πολύ περισσότερο και καθίσταται απαραίτητη η χρήση ενός υπολογιστή για την αξιολόγηση του p.

Όταν s = 1, το χρονικό διάστημα μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων όπλων είναι ίσο με το χρόνο που απαιτείται για τη δέσμευση ενός όπλου με έναν πύραυλο και το P μπορεί να δοθεί από τη σωρευτική αρνητική διωνυμική κατανομή :

$$p = \sum_{i=0}^{A-1} \binom{k}{i} (1 - \rho)^{k-i} \rho^i$$

Στις προηγούμενες αναλύσεις, θεωρήθηκε ότι οι χρόνοι άφιξης των όπλων απέχουν εξίσου. Σε μια προσπάθεια να είμαστε πιο ρεαλιστικοί, μερικές φορές θεωρείται ότι οι ώρες άφιξης αποτελούνται από στατιστικά στοιχεία παραγγελιών που λαμβάνονται από μια κανονική ή μια εκθετική κατανομή. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ενδέχεται να μην είναι δυνατή η δέσμευση ορισμένων όπλων κατά τη στιγμή της άφιξής τους, επειδή η άμυνα εξακολουθεί να καταλαμβάνεται με παλαιότερα όπλα, εάν ο χρόνος άφιξης ενός όπλου είναι μικρότερος από τον χρόνο T που απαιτείται για να εμπλέξει ένας πύραυλος ένα όπλο. Η πιθανότητα καθυστέρησης των όπλων μπορεί να δοθεί, στην περίπτωση όπου Α = 2, ρ = 1, και η κατανομή του χρόνου άφιξης είναι μια Κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση, όπως :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{-(t-T)^2}{4\sigma^2}\right\} dt$$

Για τιμές του Α μεγαλύτερες από 2, είναι απαραίτητο να καταφύγετε στην προσομοίωση Monte Carlo για να λάβετε τις τιμές των μέγιστων χρόνων καθυστέρησης. Εάν οι χρόνοι άφιξης του όπλου θεωρούνται εκθετικοί με την παράμετρο a, η πιθανότητα μη καθυστέρησης μπορεί να δοθεί σε κλειστή μορφή ως:

$$a^{A-1}(A-1)!\exp\{-aTA(A-1)/2\}$$

Ένα γενικότερο αποτέλεσμα προϋποθέτει ότι το T δεν είναι σταθερό, αλλά μια τυχαία μεταβλητή από μια κατανομή Gamma με τις παραμέτρους n, λ. Σε αυτήν την περίπτωση, η πιθανότητα μη καθυστέρησης είναι:

$$\prod_{i=1}^{A-1}(1-ia/\lambda)^{-n}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^{\text{Ο}}$: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΥΡΑΥΛΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε μια επισκόπηση των μελετών που έγιναν για το πρόβλημα κατανομής πυραύλων που αναφέρονται στη μονογραφία Eckler και Burr. Αυτό το κεφάλαιο παρέχει μια έρευνα για τις έρευνες σε αυτόν τον τομέα που πραγματοποιήθηκαν μετά τη δημοσίευση της μονογραφίας, με υλικό που προήλθε από δημοσιεύσεις που δημοσιεύθηκαν σε επιστημονικά περιοδικά και μεταπτυχιακές διατριβές.

Παρατηρείται γενικά ότι οι μεταγενέστερες έρευνες για το πρόβλημα κατανομής πυραύλων τείνουν να μοντελοποιούν πιο ρεαλιστικά και επομένως πιο περίπλοκα σενάρια της μάχης, τα οποία είναι αρκετά απλά μοντέλα με μια σειρά απλοποιητικών υποθέσεων που γίνονται να λύσουν το πρόβλημα. Ως αποτέλεσμα, οι μαθηματικές διατυπώσεις του προβλήματος δεν είναι γενικά αποδεκτές σε λύση σε κλειστή μορφή και διάφορες τεχνικές λύσεων όπως αλγόριθμοι έμμεσης απαρίθμησης, τεχνικές δυναμικού προγραμματισμού, γραμμικοί και μη γραμμικοί αλγόριθμοι προγραμματισμού και άλλες περιορισμένες διαδικασίες βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για να ληφθούν αριθμητικά αποτελέσματα.

Αυτή η έρευνα της πρόσφατης βιβλιογραφίας σχετικά με το πρόβλημα κατανομής πυραύλων δεν είναι καθόλου ολοκληρωμένη. Ωστόσο, η βιβλιογραφία που αναθεωρήθηκε αποκάλυψε μια σειρά από ενδιαφέρουσες αναλυτικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα κατανομής πυραύλων σε συγκεκριμένες, και μερικές φορές νέες, καταστάσεις. Τα έγγραφα που ερευνήθηκαν ανέλυαν το πρόβλημα κατανομής πυραύλων από διάφορες διαφορετικές προοπτικές και χρησιμοποίησαν διάφορες αναλυτικές τεχνικές. Μπορούν ωστόσο να ομαδοποιηθούν χαλαρά για σκοπούς έκθεσης εδώ σύμφωνα με το συγκεκριμένο σενάριο που το μοντέλο επιδιώκει να εκπροσωπήσει ή με τους στόχους που ο αμυντικός ή ο επιτιθέμενος επιδιώκει να επιτύχει, ως εξής:

- στρατηγικές που περιλαμβάνουν συγκεκριμένους τύπους αμυντικών κατανομών,
- στρατηγικές που περιλαμβάνουν επιθέσεις στο αμυντικό σύστημα,
- στρατηγικές που περιλαμβάνουν στόχους ευκαιρίας και τέλος,
- στρατηγικές που περιλαμβάνουν ομοιώματα

3.2 Στρατηγικές, που περιλαμβάνουν συγκεκριμένους τύπους αμυντικών κατανομών

Σε αυτήν την ενότητα, αναλύονται καταστάσεις που περιλαμβάνουν μοντέλα συγκεκριμένων αμυντικών συστημάτων. Το πρώτο αφορά το πρόβλημα των αλληλεπικαλυπτόμενων αμυντικών περιοχών και τη βέλτιστη κατανομή αμυντικών πυραύλων για την προστασία στόχων εντός αυτών των περιοχών. Στο Κεφάλαιο 2, εξετάστηκε επίσης η υπεράσπιση των στόχων με τοπικούς και περιφερειακούς πυραύλους, αλλά μόνο στην περίπτωση που οι περιοχές άμυνας της περιοχής δεν αλληλεπικαλύπτονται.

Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα που εξετάζεται εδώ αφορά τη βέλτιστη στρατηγική άμυνας και επίθεσης όταν η άμυνα έχει την επιλογή να διαθέσει αμυντικούς πόρους για την υποστήριξη «αριθμητικά ευάλωτων» αμυντικών συστημάτων που είναι εύκολο να εντοπιστούν αλλά είναι δύσκολο να καταστραφούν ή «ποσοστιαία ευάλωτων» συστημάτων που είναι σχετικά δύσκολο να εντοπιστούν, αλλά μόλις βρεθούν μπορούν εύκολα να καταστραφούν.

Το τελευταίο μοντέλο προϋποθέτει ότι η άμυνα αποτελείται από πολλά «στρώματα» αμυντικών συστημάτων και ότι ο επιτιθέμενος πρέπει να επιβιώσει όλα αυτά τα στρώματα για να φτάσει στον στόχο.

3.2.1 Επικαλυπτόμενες περιοχές άμυνας

Ο Swinson [Αναφορά 24] θεωρεί ότι το πρόβλημα της αλληλεπικάλυψης περιοχών άμυνας περιέχουν έναν αριθμό στόχων σημείων διαφορετικών τιμών και ανέπτυξε μια διαδικασία που εφαρμόζει δυναμικούς αλγόριθμους προγραμματισμού σε ένα γενικό πλαίσιο διαδοχικών προσεγγίσεων που επιτρέπουν τη βελτιστοποίηση των κατανομών πυραύλων περιοχής για στόχους «τομείς» διαδοχικά εντός του περιορισμού του μεγέθους των αποθεμάτων πυραύλων.

Στο μοντέλο, πολλά συστήματα άμυνας περιοχής κατανέμονται σε μια περιοχή που περιέχει σημειακούς στόχους διαφορετικών τιμών. Κάθε άμυνα περιοχής καλύπτει μια συγκεκριμένη περιοχή εντός της οποίας βρίσκεται ένα υποσύνολο των στόχων. Αυτές οι περιοχές μπορεί να τέμνονται, και όταν το κάνουν, η ένωση αυτών των περιοχών λέγεται ότι αποσυντίθεται από αυτές τις διασταυρώσεις σε μη επικαλυπτόμενες περιοχές που ονομάζονται «τομείς». Οι στόχοι στους τομείς υπερασπίζονται είτε την άμυνα μιας περιοχής είτε πολλές αμυντικές περιοχές. Συνδέεται με μια δεδομένη επίθεση ενός όπλου εναντίον του στόχου t η οποία είναι μια συνάρτηση $r_t(d_t)$ που υποδηλώνει την αναμενόμενη τιμή που σώθηκε στον στόχο εάν έχουν διατεθεί d πύραυλοι για να παρεμποδίσουν τα επιτιθέμενα όπλα. Η συνάρτηση μπορεί να δοθεί από τον παρακάτω τύπο:

$$r_t(d_t) = v_t(1 - pq^{ct})(1 - pq^{ct+1})^{at-ft},$$

όπου v_t, είναι η τιμή του στόχου t, p είναι η πιθανότητα θανάτωσης όπλων, q είναι η πιθανότητα ότι το όπλο επιβιώνει από μια εμπλοκή από έναν πύραυλο, και τα c_t και f_t δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$c_t = \left\lfloor \frac{d_t}{a_t} \right\rfloor, f_t = a_t(c_t + 1) - d_t.$$

Ο στόχος της άμυνας είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη συνολική τιμή στόχου που έχει αποθηκευτεί σε όλους τους στόχους. Εάν χρησιμοποιηθεί μια βέλτιστη πολιτική κατανομής πυραύλων εντός του τομέα για την κατανομή ενός συνόλου D_j πυραύλων για την υπεράσπιση των στόχων T στον τομέα j, τότε η συνολική αναμενόμενη τιμή που εξοικονομείται για τον τομέα j δίνεται από:

$$f_j(D_j) = \max \sum_{t=1}^{T} r_t(dt), \;\; όπου \sum_{t=1}^{T} dt = D_j$$

Αυτό μπορεί να γραφτεί στην τυπική λειτουργική εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού ως εξής:

$$f_{j,T}(D_j) = \max_{0 \le d_T \le D_j} r_T(d_T) + f_{j,T-1}(D_j - d_T)$$

η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναδρομικά για την εύρεση βέλτιστων κατανομών πυραύλων σε κάθε τομέα, δεδομένης της συνολικής κατανομής τομέων πυραύλων D_j. Προκειμένου να βρεθεί ένα σύνολο βέλτιστων κατανομών πυραύλων σε κάθε τομέα, η αναμενόμενη συνολική τιμή που εξοικονομήθηκε σε όλους τους τομείς είναι

$$F(x) = \sum_{j=1}^{A} f_j(\sum_{i \le ij} x_{ij})$$

πρέπει να μεγιστοποιηθεί υπόκειται σε $\sum_{j \leq Ji} x_{ij} = b_i$ i = 1, ... m, όπου n είναι ο συνολικός αριθμός τομέων, x_{ij} είναι ο αριθμός των πυραύλων που κατανέμονται από την περιοχή άμυνας i έως το τμήμα j, το Ij είναι το σύνολο δεικτών των αμυντικών περιοχής που καλύπτουν τον τομέα j. Το Ji είναι το σύνολο των δεικτών των τομέων που βρίσκονται στην περιοχή της αμυντικής περιοχής i, bi είναι το μέγεθος του αποθέματος πυραύλων στην περιοχή άμυνας i, και m είναι ο συνολικός αριθμός αμυντικών περιοχών. Η διαδοχική διαδικασία βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκε εκτελείται ως εξής. Το απόθεμα πυραύλων κάθε αμυντικής περιοχής κατανέμεται πρώτα τυχαία μεταξύ των τομέων που καλύπτει. Η αναμενόμενη συνολική τιμή που έχει αποθηκευτεί ως αποτέλεσμα αυτής της αρχικής κατανομής x' είναι

$$F(x^{'}) = \sum_{j=1}^{n} f_j\Big(\sum_{i\varepsilon Ij} x_{ij}^{'}\Big)$$

Οι κατανομές όλων των αμυντικών περιοχών εκτός από μια συγκεκριμένη περιοχή άμυνας k διατηρούνται σταθερές και οι κατανομές x_{kj}, j Ε J_k της περιοχής άμυνας k μπορούν να προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας την τυπική τεχνική δυναμικού προγραμματισμού για τη μεγιστοποίηση της απόδοσης.

$$F(x) = \sum_{j \leq I} f_j\Big(x_{kj} + \sum_{\substack{i \leq J \\ i \leq k}} x_{ij}'\Big) + \sum_{j \leq J} f_j\left(\sum_{i \leq ij} x_{ij}'\right), \text{υπό την προϋπόθεση} \sum_{j \leq J} x_{kj} = b_k$$

Ξεκινώντας με τον πίνακα των κατανομών πυραύλων x^k που προκύπτουν από τη βελτιστοποίηση των κατανομών για την περιοχή άμυνας k, η επόμενη περιοχή άμυνας βελτιστοποιείται με τον ίδιο τρόπο με τις άλλες κατανομές αμυντικής περιοχής που διατηρούνται σταθερές. Αυτή η διαδικασία διαδοχικής βελτιστοποίησης επαναλαμβάνεται για όλη την περιοχή άμυνας κυκλικά έως ότου περάσει ένας ολόκληρος κύκλος εντός του οποίου καμία αλλαγή τομέα δεν αλλάζει από εκείνη του προηγούμενου κύκλου, υποδεικνύοντας έτσι ότι έχει βρεθεί μια τοπική μέγιστη λύση στο πρόβλημα. Ένα σύνολο τοπικών μέγιστων λύσεων μπορεί να δημιουργηθεί είτε μεταβάλλοντας την αρχική τυχαία κατανομή x^0 είτε μεταβάλλοντας τη σειρά βελτιστοποίησης της άμυνας της περιοχής.

Οι Furman και Greenberg [Αναφορά 28] ανέλυσαν επίσης το πρόβλημα του επιτιθέμενου να παραχωρήσει ένα σταθερό απόθεμα όπλων διαφορετικών τύπων έναντι στόχων διαφορετικών τιμών που προστατεύονται από μια σειρά αλληλεπικαλυπτόμενων αμυντικών περιοχών. Υποτίθεται ότι μόνο ένας τύπος όπλου μπορεί να κατανεμηθεί σε έναν συγκεκριμένο στόχο ή άμυνα περιοχής και ότι ένας στόχος πρέπει πρώτα να καταστεί ανυπεράσπιστος, δηλαδή οι αμυντικές περιοχές που προστατεύουν τον στόχο πρέπει πρώτα να εξαντληθούν πριν να επιτεθεί ένας στόχος. Οι αποφάσεις που πρέπει να λάβει ο επιτιθέμενος που συνιστούν τη στρατηγική κατανομής του μπορούν να αναπαρασταθούν από τις ακόλουθες μεταβλητές απόφασης: η στρατηγική εξάντλησης E, όπου k E E σημαίνει υπεράσπιση περιοχής k που πρέπει να εξαντληθεί. η δυαδική μεταβλητή b_{kj} που δείχνει ποιος τύπος όπλου j χρησιμοποιείται για την εξάντληση της περιοχής άμυνας k η δυαδική μεταβλητή t_{ij} που δείχνει ποιος τύπος όπλου j εκχωρείται στον στόχο i και a_{ij} δίνοντας τον αριθμό των όπλων τύπου j που κατανέμονται στον στόχο i. Η συνολική αποπληρωμή στον εισβολέα μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}(a_{ij})t_{ij}$$

όπου το T είναι ο αριθμός των στόχων, το N είναι ο αριθμός των τύπων όπλων και το $D_{ij}(a_{ij})$ είναι η συλλογή των λειτουργιών βλάβης που αντιπροσωπεύουν την αναμενόμενη ζημιά στον στόχο i όταν αφιερώνονται σε αυτό a όπλα τύπου j. Το $D_{ij}(a_{ij})$ μπορεί, για παράδειγμα, να είναι συγκεκριμένα μια λειτουργία βλάβης του νόμου τετραγωνικής ρίζας

$$D_{ij}(a_{ij}) = v_i(1 - (1 + c_{ij}\sqrt{a_{ij}})\exp(-c_{ij}\sqrt{a_{ij}}))$$

Ή μία συνάρτηση του νόμου δύναμης:

$$D_{ij}(a_{ij}) = v_i[1 - (1 - c_{ij})^{a_{ij}}]$$

όπου v_i, είναι η τιμή του στόχου i και c_{ij} είναι η σταθερά ζημιάς, μια τιμή μεταξύ 0 και 1, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της πολεμικής κεφαλής και ορισμένα μέτρα αβεβαιότητας.

Η πλήρης μαθηματική διαμόρφωση προγραμματισμού για το πρόβλημα κατανομής όπλων επίθεσης είναι η εξής:

max f(a)

υπό E c (1,2,…,D), όπου το D είναι ο συνολικός αριθμός των περιοχών άμυνας

$$\sum_{i=1}^{T} a_{ij} \leq w_j$$

j = 1,….,N, όπου w_j είναι ο αριθμός των διαθέσιμων όπλων τύπου j

$$\sum_{j=1}^{N} t_{ij} \leq 1, i = 1, \dots, T_i$$

$$\sum_{j=1}^{N} k_{kj} = 1, k\varepsilon\ E$$

aij = 0 εάν j E J_i^E όπου J_i^E είναι το σύνολο ευρετηρίου των τύπων όπλων στους οποίους εκτίθεται ο στόχος i κατά τη χρήση της στρατηγικής εξάντλησης E. Και $\sum_{i=1}^{T} t_{ij} a_{ij} + \sum_{k\varepsilon E} b_{kj} x_{kj} \leq w_j$, j = 1, ..., N, όπου x_{kj} είναι το αριθμός όπλων τύπου j που απαιτούνται για την εξάτμιση της περιοχής άμυνας k.

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να χωριστεί και να γραφτεί ως: $\max_E\{\max_{s,t,b} f(x)\}$ με την επιφύλαξη των παραπάνω περιορισμών, όπου το E επιλέγεται σε όλες τις στρατηγικές εξάντλησης. Η Lagrangian σε σχέση με τον τελευταίο περιορισμό σχετικά με τους διαθέσιμους πόρους όπλων μπορεί στη συνέχεια να διατυπωθεί και η γενικευμένη μέθοδος πολλαπλασιαστή Lagrange, που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προκύπτοντος προβλήματος:

$$\min_{\lambda} \max_{E} \{\max_{g,t,b} f(a) - \sum_{i,j} \lambda_j a_{ij} t_{ij} - \sum_{j<k\varepsilon E} \lambda_j b_{kj} x_{kj} + \lambda w\}$$

όπου ο πολλαπλασιαστής λ_j αντιπροσωπεύει την τιμή μιας μονάδας τύπου όπλου j.

Για δεδομένα $\underline{\lambda}$ και E, οι βέλτιστες τιμές $\underline{b}$*, $\underline{a}$* και $\underline{t}$* μπορούν να βρεθούν με απλή απαρίθμηση και όταν η κάλυψη κάθε περιοχής άμυνας είναι η ίδια για κάθε τύπο όπλου, μπορεί να βρεθεί η βέλτιστη στρατηγική εξάντλησης E* (για μια δεδομένη τιμή φορέα $\underline{\lambda}$) με την εύρεση της ελάχιστης περικοπής ενός χωρητικού δικτύου με κορυφές που εκπροσωπούν στόχους και αμυντικές περιοχές και τόξα που αντιπροσωπεύουν τις προστατευτικές περιοχές.

Σε μια προηγούμενη εργασία των Miercourt και Soland [Αναφορά 3], ένα επιθετικό μοντέλο βελτιστοποίησης αναλύεται με δεδομένα συγκεκριμένα επίπεδα άμυνας. Σε μια μεταγενέστερη εργασία του Soland [Αναφορά 26], η βελτιστοποίηση των αμυντικών εκχωρήσεων θεωρείται, δεδομένης μιας κατάστασης offense-last-move και της βέλτιστης κατανομής επίθεσης. Το σενάριο απαιτεί ένα συνδυασμό αλληλεπικαλυπτόμενων αμυντικών περιοχών, καθώς και τερματικών άμυνας με απόλυτα αξιόπιστους πυραύλους, και ένα ανώτερο όριο για τα αμυντικά μεγέθη αποθεμάτων λόγω περιορισμού του προϋπολογισμού B. O επιτιθέμενος θεωρείται ότι διαθέτει απόθεμα μεγέθους A ενός τύπος όπλου που απαιτεί ένα επίπεδο ζημίας σε έναν ανεπιθύμητο στόχο (αφού εξαντληθεί η άμυνα της περιοχής και των τερματικών του) σύμφωνα με τη διακριτή κοίλη και μη φθίνουσα λειτουργία φθοράς f_j (a_j), όπου a_j είναι ο αριθμός των όπλων που στρέφονται εναντίον του στόχου j. Το πρόβλημα κατανομής της άμυνας συνίσταται στην εύρεση του βέλτιστου αριθμού πυραύλων d_i^p για κατανομή στην περιοχή άμυνας περιοχής i, i = 1, ... m, και του βέλτιστου αριθμού πυραύλων άμυνας σημείου d_j^P για εκχώρηση στον στόχο j, j = 1.. .., T ώστε να ελαχιστοποιηθεί η μέγιστη ζημιά που μπορεί να προκαλέσει ο επιτιθέμενος. Εάν ο αριθμός των όπλων που απαιτούνται για την εξάντληση της περιοχής άμυνας i και του σημείου άμυνας του στόχου j δίδεται από τα e_i^A και e_j^P αντίστοιχα, τότε μπορεί να οριστεί μια συνάρτηση ζημίας q_i έτσι ώστε g_j $(a_j, d_j^p) = 0$ εάν $a_j < e_j^P$, και q_j $(a_j, d_j^P) = f_j$ $(a_j - e_j^P)$ διαφορετικά. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης από κοινού μπορεί στη συνέχεια να διατυπωθεί ως εξής:

$$\min_{d^\wedge d'}(\max_{a,\delta}\sum_{j=1}^{T} g_j(a_j, d_j^p))$$

$$\upsilon\pi\acute{o}\ 0 \le d^A \le D^A$$

$$0 \le d^p \le D^p$$

$$C(d^A, d^p) \le B$$

$$\sum_{j=1}^{T} a_j + \sum_{i=1}^{m} \delta_i e_i^A \le A$$

$$\kappa\alpha\iota \sum_{j=1}^{T} d_i a_j \le A\delta_i, \iota = 1, \dots, m$$

όπου δ_i είναι μια μεταβλητή δείκτη έτσι ώστε $\delta_i = 1$ εάν πρέπει να εξαντληθεί η υπεράσπιση της περιοχής i και $\delta_i = 0$ διαφορετικά. $\underline{D}^A$ και $\underline{D}^\varrho$ είναι τα ανώτατα όρια στον αριθμό των πυραύλων άμυνας περιοχής και σημείων που θα διατεθούν, το C ($\underline{d}^A$, $\underline{d}^\varrho$) είναι η συνάρτηση συνολικού κόστους που σχετίζεται με την κατανομή άμυνας $\underline{d}^A$ και $\underline{d}^\varrho$ και το d_{ij} είναι μια άλλη μεταβλητή δείκτη που ισούται με 1 εάν η άμυνα της περιοχής i καλύπτει τον στόχο j, και ισούται με 0 διαφορετικά. Ο τελευταίος περιορισμός διασφαλίζει ότι δεν επιτίθεται κανένας στόχος, εκτός εάν πρέπει να εξαντληθούν όλες οι αμυντικές περιοχές που την καλύπτουν.

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αναδιατυπωθεί σε απλούστερη μορφή ορίζοντας μια συνάρτηση $\emptyset_A$ ($\underline{d}^A$, $\underline{d}^\varrho$) έτσι ώστε έχουμε:

$$\emptyset A = \max_{a,\delta}\sum_{j=1}^{T} g_j(a_j, d_j^p)$$

$$\upsilon\pi\acute{o} \sum_{j=1}^{T} a_j + \sum_{i=1}^{M} \delta_i e_i^A \le A$$

$$\kappa\alpha\iota \sum_{j=1}^{T} d_{ij} \le A\delta_i, \iota = 1, \dots, m$$

$\emptyset_A$ μπορεί να υπολογιστεί για δεδομένες τιμές των $\underline{d}^A$ και $\underline{d}^\varrho$ με έναν αλγόριθμο κλάδου και δέσμευσης. Το πρόβλημα του αμυνόμενου μπορεί έτσι να διατυπωθεί ως εξής:

$$υπό\ \min \emptyset A(d^A, d^P)$$

$$C(d^A, d^P) \leq B$$

$$0 \leq d^A \leq D^A\ και$$

$$0 \leq d^P \leq D^P$$

Ως τελικό βήμα στη διαδικασία απλούστευσης, τα ανώτατα όρια στις αμυντικές κατανομές σημειώνονται με

$$D_i^A = 2^{P_i} - 1, και\ D_j^\rho = 2^\mu - 1$$

όπου το p_i και το q_j είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Αυτό δεν συνεπάγεται απώλεια γενικότητας επειδή το C ($\underline{d}^A$, $\underline{d}^\varrho$) για το $d_i^A > D_i^A$ για παράδειγμα μπορεί να οριστεί ως ίσο με το άπειρο. Οι νέες μεταβλητές δείκτη 0-1 y_{ik}, i = 1, ..., m, k = 1, ..., p_i και z_{jl}, j = 1, ..., T l = 1,…,q_j ορίζονται ως εξής:

$$d_i^A = (2^{P_i} - 1) - \sum_{k=1}^{P_i} 2^{P_i - k} Y_{ik}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$d_j^P = (2^{P_i} - 1) - \sum_{i=1}^{P_i} 2^{P_i - l} z_{jl}, \qquad j = 1, \ldots, T$$

3.2.2 Άμυνα με επίπεδα

Ο Nunn [Αναφορά 25] ανέλυσε το πρόβλημα κατανομής πυραύλων στην κατάσταση όπου η άμυνα είναι στρωμένη και οι επιτιθέμενοι προσπαθούν να διεισδύσουν στα διάφορα επίπεδα αμυντικών συστημάτων. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου σεναρίου μπορεί να είναι ένα σύστημα άμυνας ICBM ή ένα σύστημα αεροπορικής άμυνας υψηλού ποσοστού πυρκαγιάς που υιοθετεί μια στρατηγική shoot-look-shoot κατά των επιτιθέμενων αεροσκαφών. Ο στόχος της άμυνας είναι να ελαχιστοποιήσει τον αναμενόμενο αριθμό διεισδυτών.

Η ανάλυση χρησιμοποιεί ένα σκεύασμα αλυσίδας Markov. Δεν δίδεται ρητή αναπαράσταση των επιπέδων αμυντικής δύναμης. Αντίθετα, θεωρείται ότι ο αριθμός των εισβολέων που διεισδύουν (δηλαδή που επιβιώνουν) το i - οστό στρώμα διχονομικά διασπάται με τις παραμέτρους n_l, g_l, όπου n_l είναι ο αριθμός των εισβολέων που πλησιάζουν το l - οστό στρώμα, και q_l είναι η πιθανότητα ότι ένας εισβολέας επιβιώνει από το l - οστό στρώμα άμυνας. Η διέλευση μέσω του l - οστού στρώματος θεωρείται ως μετάβαση σε μια αλυσίδα Markov, με τον σχετικό πίνακα μετάβασης A του οποίου τα στοιχεία δίνονται ως εξής:

$$\alpha_{ij} = \binom{i}{j} q_1^j (1-q_1)^{i-j}$$

Το A_l είναι διαγώνιο με AS = SD όπου το S είναι μια κατώτερη τριγωνική μήτρα της οποίας τα μη μηδενικά στοιχεία είναι εκείνα του τριγώνου Pascal, και το D είναι ένας φορέας της μορφής diag $(1, q, q^2, ..., q^n)$. Κατά συνέπεια, εάν η κατανομή του αρχικού αριθμού των επιτιθέμενων είναι T (ένα διάνυσμα σειρών του οποίου τα στοιχεία συνθέτουν τη διακριτή λειτουργία μάζας του αρχικού αριθμού των εισβολέων), τότε η κατανομή των επιζώντων μετά από διείσδυση σε στρώματα άμυνας L δίνεται από το

$$T \prod_{i=1}^{L} A_l$$

Το προϊόν $\prod_{i=1}^{L} A_l$ είναι απλώς ένας άλλος παρόμοιος πίνακας με την παράμετρο $\prod_{i=1}^{L} q_i$. Στην περίπτωση που η αρχική κατανομή T είναι διωνυμική, αυτή η κατανομή διατηρείται σε όλα τα επίπεδα άμυνας. Επιπλέον, η τελική κατανομή των επιτιθέμενων είναι ανεξάρτητη από τη σειρά των αμυντικών στρωμάτων, καθώς οι μεταβατικοί πίνακες μετακινούνται.

3.2.3 Ποσοστιαίες και αριθμητικά ευάλωτες άμυνες

Οι Shere και Cohen [Αναφορά 27] ανέλυσαν το πρόβλημα της κατανομής πόρων επίθεσης και άμυνας που περιλαμβάνει κόστος ανάπτυξης όπλων από θεωρητική άποψη παιχνιδιού.

Δύο κατηγορίες συστημάτων άμυνας εξετάζονται στο μοντέλο:

- Ποσοστιαία ευάλωτα (PV) συστήματα, π.χ. Υποβρύχια Polaris, ένα σταθερό ποσοστό των οποίων δέχεται επίθεση για μια σταθερή προσπάθεια αναζήτησης από τον εισβολέα. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία τυχαίας αναζήτησης, το κλάσμα των όπλων που επιβιώνουν στο i - οστό PV σύστημα μπορεί να δοθεί από το exp $[-a_i\,(y_i - r_i)]$ και η τιμή μετά από μια επίθεση είναι

$$f_i\,(x_i, y_i) = \;v_i\,(x_i - q_i)\exp\{-a_i(y_i - r_i)\}$$

όπου το v_i αντιπροσωπεύει την αξία του συστήματος (από την άποψη της καταστροφικής ικανότητας), x_i και y_i είναι το συνολικό ποσό των κεφαλαίων που διατίθενται από την άμυνα στην εγκατάσταση και από τον επιτιθέμενο στην καταστροφή του i - οστού PV συστήματος, q_i και r_i είναι το απαιτούμενο κόστος ανάπτυξης που σχετίζεται με τους προαναφερθέντες σκοπούς και το a_i αντιπροσωπεύει την ευπάθεια του i - οστού συστήματος.

Αριθμητικά ευάλωτα συστήματα (NV), που αποτελούνται από ουσιαστικά στατικά οπλικά συστήματα όπως το σύστημα Minuteman ICBM. Η προσπάθεια του εισβολέα κατανέμεται σε όλα τα όπλα του συστήματος. Σε αυτήν την περίπτωση, η υπολειμματική τιμή του j – οστού συστήματος NV είναι:

$$f_j'\,(x_j', y_j') = \;v_j'\,(x_j' - q_j')\exp\{-a_j'(y_j' - r_j')/(x_j' - q_j')\}$$

Το μοντέλο αναλαμβάνει μια κατάσταση offense – last -move με στόχευση αντίθετης δύναμης. Ο στόχος του επιτιθέμενου είναι να ελαχιστοποιήσει την ικανότητα αντιποίνων της άμυνας. Προστατευτικά, η άμυνα κατανέμει τους οικονομικούς πόρους του με τρόπο που μεγιστοποιεί αυτό το ελάχιστο. Το πρόβλημα μπορεί έτσι να διατυπωθεί ως:

$$\max_x \min_y \{\sum_i f_i(x_i, y_i) + \sum_j f_j'(x_j', y_j')\}$$

$$\textit{υπό τις πορϋποθέσεις} \sum_i x_i + \sum_j x_j' = X \ (\textit{συνολικές πηγές της άμυνας})$$

$$\sum_i y_i + \sum_j y_j' = Y \ (\textit{συνολικές πηγές της επίθεσης})$$

Οι συγγραφείς ανέπτυξαν έναν επαναληπτικό αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος κατανομής για ένα συνδυασμό ποσοστιαίων ευάλωτων συστημάτων μόνο επεκτείνοντας τη θεωρία max-min και υποθέτοντας ότι εάν ο επιτιθέμενος θεωρήσει ότι επιτίθεται στο i - οστό PV σύστημα, θα κατανείμει πόρους y_i που υπερβαίνουν το q_i, το «κόστος εισδοχής» αυτού του συστήματος η υπεράσπιση, εάν αποφασίσει να δημιουργήσει το PV σύστημα, θα κατανείμει ομοίως τα κεφάλαια x_i που υπερβαίνουν το κόστος ανάπτυξης του συστήματος, έτσι ώστε να μπορεί να προμηθεύσει τουλάχιστον ένα όπλο. Εάν η επιλογή του A είναι μοναδική για κάποια βέλτιστη κατανομή x = x*, τότε η βέλτιστη κατανομή x* και y* είναι επίσης μια λύση στο παιχνίδι

$$\max_\beta \min_a \{\sum_A v_i(x_i - q_i) \exp\left(a_i(y_i - r_i)\right) + \sum_{B-A} v_i(x_i - q_i)\}$$

$$\textit{υπό τις προϋποθέσεις} \sum_B x_i = X, \qquad \sum_A y_i = Y, \ \ x_i \geq q_i, i \in E, y_i \geq r_i, i \in A$$

$$\textit{όπου}\ A = (i : \ y_i^* > r_i), B = (i : \ x_i > q_i),$$

$$\beta = (x : \ x_i = 0 \ \textit{για} \ i \ \in B), a = (y : \ y_i = 0 \ \textit{για} \ i \ \in A)$$

και yi * και xi * είναι οι βέλτιστες κατανομές επίθεσης και άμυνας αντίστοιχα.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι A = B εάν το A θεωρείται μοναδικό. Ως εκ τούτου, η άμυνα δεν πρέπει να επενδύει σε ένα νέο PV σύστημα, εκτός εάν έχει επαρκή αξία για τον επιτιθέμενο να πληρώσει την ποινή για τουλάχιστον έναν περιορισμένο μετρητή σε αυτό το νέο σύστημα.

Αναπτύχθηκε επίσης μια μέθοδος λύσης για το πρόβλημα κατανομής στην περίπτωση ενός γενικού συνδυασμού συστημάτων άμυνας PV και NV. Αποδείχθηκε ότι πρέπει να αναπτυχθεί το πολύ ένα σύστημα NV, και έτσι το πρόβλημα μειώνεται στο προηγούμενο πρόβλημα σχετικά με ένα συνδυασμό μόνο PV συστημάτων με το ποσό της επένδυσης σε το πολύ ένα σύστημα NV μία παράμετρο που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του υπόλοιπου ποσού πόρων διαθέσιμο για κατανομή μεταξύ των PV συστημάτων.

3.3 Στρατηγικές, που περιλαμβάνουν επιθέσεις στο σύστημα άμυνας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, το πρόβλημα των επιθέσεων στο ίδιο το αμυντικό σύστημα αναλύθηκε ουσιαστικά από την άποψη του αμυνόμενου υπό διάφορες παραδοχές. Αντίθετα, ο Sverdlov [Αναφορά 17] εξετάζει το πρόβλημα από την άποψη του επιτιθέμενου, ο οποίος επιδιώκει να διαθέσει τα όπλα του σε μια διαδοχική επίθεση κυμάτων μεταξύ αμυντικών συστημάτων και ενός μοναδικού στόχου αξίας έτσι ώστε να επιτευχθούν διάφοροι στόχοι, π.χ. μεγιστοποιώντας την πιθανότητα χτυπήματος του στόχου ή μεγιστοποιώντας τον αναμενόμενο αριθμό διεισδυτών. Στην επίλυση των βέλτιστων στρατηγικών σε διαφορετικά σύνολα υποθέσεων, χρησιμοποιούνται διάφορες εφαρμογές στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού και θεωρίας παιχνιδιών. Σε γενικές γραμμές, η διαδοχική βέλτιστη επίθεση στην άμυνα ξεκινά με επιθέσεις στο αμυντικό σύστημα (εάν το απόθεμα επίθεσης είναι αρκετά μεγάλο) έως ότου το απόθεμα όπλου μειωθεί σε M *, τότε ο επιτιθέμενος αλλάζει για να επιτεθεί στον στόχο αξίας που θεωρείται να υποστεί ζημιά 0-1 και συνεχίζεται μέχρι να εξαντληθεί το απόθεμα όπλων. Δεν είναι εφικτό για την επίθεση να επιστρέψει στην επίθεση στο αμυντικό σύστημα, επομένως μόνο μία εναλλαγή στο M * είναι η βέλτιστη και δεν είναι δυνατή η αλλαγή από επίθεση σε έναν στόχο στο αμυντικό σύστημα σε μια βέλτιστη πολιτική.

Σε περίπτωση που το αμυντικό σύστημα περιλαμβάνει έναν στόχο (ένα στόχο άμυνας) και το μέτρο αποτελεσματικότητας, που χρησιμοποιείται είναι η πιθανότητα να χτυπήσει τον στόχο αξίας, η βέλτιστη πολιτική μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό και παρέχεται από:

$$M^* = 1 + [\frac{\ln(1 - \frac{P_p}{P_s})}{\ln(\frac{1 - P_p}{1 - P_p q})}]$$

P_p και P_s είναι οι πιθανότητες ότι ένα ανεμπόδιστο όπλο καταστρέφει τον στόχο αξίας και τον αμυντικό στόχο αντίστοιχα, και g είναι η πιθανότητα ένα όπλο να επιβιώσει από μια αναχαίτιση από το αμυντικό σύστημα. Εάν το μέτρο αποτελεσματικότητας είναι ο αναμενόμενος αριθμός διεισδυτών, η βέλτιστη πολιτική είναι η παρακάτω:

$$M^*(N_s) = 1 + [\frac{\ln(1 - \frac{P_p}{P_s})}{\ln(\frac{1 - P_p q(N_s - 1)}{1 - P_p q(N_s)})}]$$

P_p και P_s είναι οι πιθανότητες ότι ένα ανεμπόδιστο όπλο καταστρέφει τον στόχο αξίας και τον αμυντικό στόχο αντίστοιχα, και q είναι η πιθανότητα ένα όπλο να επιβιώσει από μια αναχαίτιση από το αμυντικό σύστημα. Εάν το MOE είναι ο αναμενόμενος αριθμός διεισδυτών, η βέλτιστη πολιτική είναι:

$$M^* = 1 + [1/P_s(1 - q)]$$

Όταν το πρόβλημα γενικεύεται να περιλαμβάνει αμυντικά συστήματα (και ως εκ τούτου N_s αμυντικούς στόχους), και γίνεται η υπόθεση ότι δεν υπάρχουν παράπλευρες απώλειες μεταξύ των στόχων και η λειτουργία των αμυντικών στόχων είναι ανεξάρτητη, η βέλτιστη στρατηγική επίθεσης, χρησιμοποιώντας τη μέγιστη πιθανότητα κριτηρίου επιτυχίας, είναι ως εξής:

$$M^*(N_s) = 1 + [\frac{\ln(1 - \frac{P_p}{P_s})}{\ln(\frac{1 - P_p q(N_s - 1)}{1 - P_p q(N_s)})}]$$

M * (n) δεν αυξάνεται εάν ο λόγος πιθανότητας απώλειας f (n), ορίζεται ως εξής:

$$f(n) = \frac{[1 - P_p g(n)]}{1 - P_p q(n-1)}$$

αυξάνεται μονότονα. Οι περισσότερες συναρτήσεις επιβίωσης όπλων q δεν έχουν ιδιότητα αναλογίας πιθανότητας απώλειας μονοτονίας και το M*(N) αυξάνεται αυστηρά μονοτονικά, δηλαδή M*(n + 1) > M*(n). Σε αυτήν την περίπτωση, ένας αλγόριθμος που βασίστηκε στη μεγιστοποίηση της αποδοτικότητας του κριτηρίου επιτυχίας δημιουργήθηκε για την επίλυση του M * (Ns).

Εάν το μέτρο αποτελεσματικότητας είναι να μεγιστοποιήσει τον αναμενόμενο αριθμό διεισδυτών, η βέλτιστη πολιτική είναι η παρακάτω:

$$M^*(n+1) = 1 + [\frac{1}{P_s\{g(n) - g(n+1)\}}]$$

Εάν το g (n) είναι αυστηρά κοίλο, το M * δεν αυξάνεται. Μια ειδική κατάσταση προκύπτει όταν η άμυνα θεωρείται ότι έχει την ικανότητα να στραφεί σε έναν προσεκτικό τρόπο λειτουργίας, στον οποίο το αμυντικό σύστημα καθίσταται πολύ λιγότερο ευάλωτο στην επίθεση, αλλά ταυτόχρονα είναι επίσης πολύ λιγότερο αποτελεσματικό στην αναχαίτιση των επιτιθέμενων όπλων. Η άμυνα θεωρείται ότι αποτελείται από ένα μόνο σύστημα, και διαθέτει περιορισμένη ικανότητα να διακρίνει εάν ένα εισερχόμενο όπλο στοχεύει σε έναν στόχο ή στο ίδιο το αμυντικό σύστημα. Η άμυνα έχει επομένως τέσσερις επιλογές δράσης που αναφέρονται ως εξής:

- P1S1: χρησιμοποιεί τον συνηθισμένο τρόπο λειτουργίας (Λειτουργία 1) ανεξάρτητα από την ταξινόμηση ενός εισερχόμενου όπλου.
- P2S2: χρησιμοποιεί τον προσεκτικό τρόπο λειτουργίας (Λειτουργία 2) ανεξάρτητα από την ταξινόμηση του όπλου.
- P1S2: χρησιμοποιεί τη Λειτουργία 1 εάν το όπλο διακριθεί ότι στοχεύει σε έναν στόχο αξίας («αντι - πρωτογενές» όπλο) και τη Λειτουργία 2 εάν διακρίνεται ότι στοχεύει στο αμυντικό σύστημα (« αντι - δευτερεύον» όπλο) ·

- P2S1: χρησιμοποιεί τη λειτουργία 1 εάν το όπλο έχει ταξινομηθεί ως αντι - δευτερεύον και τη λειτουργία 2 εάν ταξινομείται ως αντι – πρωτεύον.

Σε κάθε περίπτωση, οι πιθανότητες ότι ένα όπλο που στοχεύει σε έναν στόχο και στο αμυντικό σύστημα ταξινομείται σωστά από την άμυνα είναι α_ϱ και α_s αντίστοιχα, και οι πιθανότητες επιβίωσης του όπλου όταν η άμυνα χρησιμοποιεί την κανονική λειτουργία και την ασφαλή λειτουργία είναι q_1 και q_2, αντίστοιχα. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ένα διαδοχικό παιχνίδι. Εφόσον ένας παίκτης (ο επιτιθέμενος) έχει στη διάθεσή του μόνο δύο αγνές δράσεις, υπάρχουν βέλτιστες τυχαιοποιημένες αμυντικές στρατηγικές που συνδυάζουν το πολύ δύο από τις τέσσερις εναλλακτικές λύσεις που αναφέρονται παραπάνω.

Εάν $\alpha_\varrho \neq 1\text{-}\alpha_s$ δεν υπάρχει βέλτιστη στρατηγική άμυνας στην οποία οι P1S1 και P2S2 είναι οι μόνες «ενεργές» ενέργειες. Εάν $\alpha_\varrho > 1\text{-}\alpha_s$, το P1S1 είναι ενεργό σε όλες τις βέλτιστες μικτές στρατηγικές και αντίστροφα, εάν $\alpha_\varrho < 1\text{-}\alpha_s$, το P2S1 θα υπάρχει σε όλες τις βέλτιστες μικτές στρατηγικές.

Η πρώτη τιμή του M στην οποία και οι δύο παίκτες καταφεύγουν σε τυχαιοποιημένες στρατηγικές αντί για καθαρές στρατηγικές (ο επιτιθέμενος επιτίθεται εναντίον στόχων αξίας, η άμυνα χρησιμοποιεί στρατηγική P1S1) είναι το M * του μονόπλευρου μοντέλου δυναμικού προγραμματισμού που αναφέρεται παραπάνω. Η γενική δομή των βέλτιστων στρατηγικών άμυνας και επίθεσης έχει ως εξής:

- ο αριθμός των όπλων $M \leq M^*$: Η βέλτιστη αμυντική στρατηγική χρησιμοποιεί καθαρά τον κανονικό τρόπο λειτουργίας και η βέλτιστη επίθεση επιτίθεται μόνο σε στόχους.
- $M^* < M \leq M^{**}$: Η βέλτιστη άμυνα τυχαιοποιεί έναντι των P1S1 και P1S2 και η βέλτιστη επίθεση τυχαιοποιεί την επίθεση επί του στόχου αξίας και της επίθεσης στο αμυντικό σύστημα.
- $M > M^{**}$: Η άμυνα τυχαιοποιεί πάνω από το P2S2 και η επίθεση τυχαιοποιείται λόγω επίθεσης σε στόχους αξίας και αμυντικά συστήματα.

Η τιμή του M ** μπορεί να υπολογιστεί με το ακόλουθο σύνολο εξισώσεων:

$M^{**} = \min [\, M: M \geq M^*, q_M > (a'b''-a''b') / ((a''-a')-(b''-b'))]$,

όπου $b' = (q-q_1) / \alpha_s q_1 P_s$,

$a' = (q-q_1)(1-q_1)$,

$b'' = (q_2-q) / [q_1 P_s (1-a_s)]$,

$a'' = [q_2 - q - (1-a_s) q_1 q_2 P_s] / [q_1 P_s (1 - a_s)]$,

$q_M = M - V_M'$ και $q = \alpha_\varrho q_1 - (1-\alpha_\varrho) q_2$.

3.4 Στρατηγικές, που περιλαμβάνουν στόχους ευκαιρίας

Μια μοναδική παραλλαγή του προβλήματος κατανομής πυραύλων αφορά τους λεγόμενους «στόχους ευκαιρίας», οι οποίοι μπορεί να είναι στόχοι αξίας ή εισερχόμενα όπλα. Αυτοί οι στόχοι ευκαιρίας φθάνουν διαδοχικά μέσα σε μια δεδομένη χρονική περίοδο, ο καθένας με τυχαία τιμή. Στην περίπτωση στόχων αξίας, το πρόβλημα αφορά την κατανομή αμυντικών πυραύλων για την προστασία αυτών των στόχων και όπλων για την καταστροφή αυτών των στόχων. Σε περίπτωση που οι στόχοι της ευκαιρίας είναι τα εισερχόμενα όπλα, το πρόβλημα συνίσταται στη διάθεση αμυντικών πυραύλων για την ανάσχεσή τους. Αυτή η κατηγορία προβλημάτων μπορεί να επιλυθεί με τον τυπικό προγραμματισμό.

3.4.1 Τυχαία αφικνούμενα όπλα

Ο Kisi [Αναφορά 10] εξέτασε το πρόβλημα της κατανομής πυραύλων εναντίον των επιτιθέμενων όπλων (στρατηγική άμυνας προσανατολισμένη στην επίθεση) που φτάνουν τυχαία σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Υποτίθεται ότι η άμυνα έχει ένα σταθερό απόθεμα d πυραύλων με αξιοπιστία $\varrho < 1$, και υιοθετεί μια στρατηγική shoot-look-shoot για κάθε εισερχόμενο όπλο. Η στρατηγική κατανομής άμυνας συνίσταται στο να αποφασίσει αν θα χρησιμοποιήσει ένα εισερχόμενο όπλο ή όχι, και πόσους πυραύλους να πυροβολήσουν, δεδομένου ενός περιορισμένου αριθμού πυραύλων και του χρόνου αποστολής που απομένει. Θεωρείται ότι η στρατηγική shoot – look - shoot είναι στιγμιαία, δηλαδή δεν χάνεται χρόνος μεταξύ των πυροδοτήσεων μέσα σε μία ομοβροντία. Κάθε ένα από τα εισερχόμενα όπλα έχει μια τυχαία τιμή η οποία κατανέμεται σύμφωνα με μια ομοιόμορφη κατανομή (0,1). Ο στόχος της άμυνας είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη συνολική αξία που καταστράφηκε κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης συνολικής διάρκειας αποστολής.

Ο αριθμός των όπλων που αναμένεται να φτάσουν κατά τη διάρκεια της αποστολής t είναι λt, και ο αναμενόμενος αριθμός των όπλων που καταστρέφονται είναι ρd. Εδώ, μόνο ένα κλάσμα ρd / (λt) όπλων μπορεί να καταστραφεί, και η άμυνα θα πρέπει να επιλέγει μόνο στόχους με υψηλές τιμές μεγαλύτερες ή ίσες με μια κρίσιμη τιμή c. Το βέλτιστο κατώτατο όριο c εξαρτάται τόσο από τον χρόνο t που απομένει όσο και από τον αριθμό των πυραύλων d που απομένουν, και διαισθητικά θα πρέπει να αυξάνεται καθώς ο χρόνος t αυξάνεται και να μειώνεται καθώς αυξάνεται το d. Μια συνάρτηση βέλτιστης τιμής f (t, d) ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή που καταστρέφεται όταν απομένουν οι πύραυλοι t και d και η βέλτιστη πολιτική κατανομής χρησιμοποιείται από την άμυνα καθ 'όλη τη διάρκεια του t. Στη συνέχεια, η βέλτιστη τιμή του c δίνεται από

$$c^*(t,d) = \frac{1}{\rho}\{f(t,d) - f(t,d-1)\}$$

και σε ένα εισερχόμενο όπλο εκχωρείται ένας πύραυλος αρκεί η τιμή του v ≥ c*. Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής μπορεί να προκύψει ακριβώς και παρέχεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\{f(t,d) - (1-\rho)f(t,d-1)\} = \frac{1}{2\rho}\{f(t,d) - f(t,d-1) - \rho\}^2$$

για d = 1,2,…. με αρχικές συνθήκες f(t,0) = 0 και f(0,d) = 0. Μια κατά προσέγγιση λύση μπορεί να δοθεί με τη μορφή:

$$f(t,d) = \rho\left\{d - \frac{f_d}{\lambda(t-t_0)}\right\},$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ f_d = f_{d-1} + 1 + \sqrt{2\rho f_{d-1} + 1},\ \kappa\alpha\iota\ f_0 = 0, t_0 = 2/\lambda$$

Η διαφορά μεταξύ της ακριβούς βέλτιστης και κατά προσέγγιση λύσης c*(t, d) είναι αμελητέα για το μεγάλο t, αλλά αυξάνεται καθώς το t γίνεται μικρό. Ωστόσο, η διαφορά μεταξύ των τιμών του f (t, d) στις δύο περιπτώσεις είναι αμελητέα ακόμη και για μικρές τιμές του t.

Ο Mastran και Thomas [Αναφορά 12] ανέλυσαν το ίδιο πρόβλημα επίθεσης στόχων ευκαιριών, ωστόσο με διαφορετικό σύνολο υποθέσεων. Συγκεκριμένα, θεωρείται ότι ο αμυνόμενος μπορεί να επιτεθεί μόνο σε ένα εισερχόμενο όπλο καθ 'όλη τη διάρκεια της αποστολής και ότι όλοι οι πύραυλοι θα δαπανηθούν στην αναχαίτιση. Θεωρείται μια γενική πιθανότητα κατανομής των χρόνων μεσολαβών όπλων αντί των εκθετικών χρόνων μεσολαβών που είχαν υποτεθεί νωρίτερα. Η πιθανότητα D_i, ότι υπάρχει ένα εισερχόμενο όπλο στο επόμενο χρονικό διάστημα δεδομένου ότι η τελευταία άφιξη που πραγματοποιήθηκε πριν από i-1 χρονικά διαστήματα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$D_i = \frac{T_i}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} T_j}\ \gamma\iota\alpha\ i \geq 2\ \kappa\alpha\iota\ D_1 = T_1$$

όπου T_i είναι η πιθανότητα ότι τα διαστήματα i διαχωρίζουν τις διαδοχικές αφίξεις. Η τιμή του εισερχόμενου όπλου v προέρχεται από μια συνάρτηση γενικής πυκνότητας πιθανότητας g(v), αντί για μια ομοιόμορφη κατανομή (0,1). Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής $f_n(i)$ ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή που καταστρέφεται όταν παραμένουν n χρονικά διαστήματα και έχουν παρέλθει χρονικά διαστήματα από την τελευταία άφιξη του όπλου και χρησιμοποιείται η βέλτιστη πολιτική. Η τιμή K_n όριο κατωφλίου, η οποία ποικίλλει με την πάροδο του χρόνου μπορεί να οριστεί με τον ίδιο τρόπο, έτσι ώστε η άμυνα να επιτεθεί στο εισερχόμενο όπλο όταν παραμένουν n περιόδους, εάν και μόνο εάν η τιμή v είναι μεγαλύτερη από την K_n. Δεδομένου ότι υπάρχει ένα εισερχόμενο όπλο, η αναμενόμενη τιμή που καταστρέφεται για την περίπτωση όταν g(v) είναι συνεχής δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_{n-1}(1) = \int_{v \le K_A} g(v)dv + \int_{v \ge K_A} vg(v)dv$$

Η συνάρτηση $f_n(i)$ μεγιστοποιείται μόνο όταν επιτίθεται σε ένα όπλο που έχει υψηλότερη τιμή από ότι θα επιτευχθεί περιμένοντας άλλο χρονικό διάστημα και λαμβάνοντας $f_{n-1}(1)$. Εξ' ου και $K_n = f_{n-1}(1)$. Έτσι, η αναδρομική σχέση μπορεί να γραφτεί ως

$$f_n(i) = D_i\left[\int_{v > f_{n-1}(1)} f_{n-1}(1)g(v)dv + \int_{v < f_{n-1}(1)} vg(v)dv\right] + (1 - D_i)\{f_{n-1}(i+1)\}$$

$$\mu\varepsilon\ f_1(i) = D_i \int_{v>0} vg(v)dv\ \kappa\alpha\iota\ f_0(i) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν τη δυναμική διαμόρφωση προγραμματισμού, η τιμή του $f_n(i)$ μπορεί να ληφθεί για οποιοδήποτε n και i.

3.4.2 Διαδοχικά αφικνούμενοι στόχοι

Ο Sakaguchi [Αναφορά 8] δημιούργησε ένα γενικευμένο παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος δύο ατόμων με τις ακόλουθες παραδοχές: ο επιτιθέμενος έχει όπλα A και ο αμυντικός έχει πυραύλους D. Ένα σύνολο T στόχων φθάνουν διαδοχικά, καθένας με τιμή v_j, j = 1, ..., T, από μια πιθανότητα κατανομής F (v). Η πολιτική κατανομής συνίσταται σε μια απόφαση για το αν θα επιτεθούν (για την επίθεση) ή να υπερασπιστούν (για την άμυνα) κάθε στόχο καθώς φτάνει με ένα μόνο όπλο ή πύραυλο και βασίζεται στην αξία του στόχου που φθάνει, τον αριθμό των όπλων (ή βλήματα για τον αμυντικό) που παραμένουν στο απόθεμα, και ο χρόνος αποστολής που απομένει. Η απόδοση για έναν στόχο αξίας v μπορεί να δοθεί από p (1-ρ) v εάν ο αμυνόμενος αποφασίσει να υπερασπιστεί τον στόχο, ή pv εάν ο αμυνόμενος αποφασίσει να μην υπερασπιστεί αυτόν τον στόχο. Οι βέλτιστες στρατηγικές μπορούν να χαρακτηριστούν από ένα σύστημα επαναλαμβανόμενων εξισώσεων διαφορών χρησιμοποιώντας μια δυναμική διαμόρφωση προγραμματισμού.

Εάν η άμυνα και η επίθεση έχουν d πυραύλους και α όπλα αντίστοιχα στα αποθέματά τους, και δεν υπάρχουν ακόμη στόχοι, η αξία του παιχνιδιού δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$V_t(a,d) = \int_0^\infty Value \{ \begin{matrix} p(1-\rho)v + V_{t-1}(a-1,d-1) & pv + V_{t-1}(a-1,d) \\ V_{t-1}(a,d-1) & V_{t-1}(a,d) \end{matrix} \} dF(v)$$

με αρχική συνθήκη V. (0,0) = 0 και οριακές συνθήκες

$$V_t(0,d) = 0, V_t(a,0) = p\sum_{i=1}^{k} g_{t,i},\ \ 0 \le k \le t,$$

$$V_t(t,d) = tp\mu - p\rho \sum_{i=1}^{l} g_{t,i}, 0 \le 1 \le t, \kappa\alpha\iota$$

$$V_t(\alpha,t) = p(1-\rho)\sum_{i=1}^{k} g_{t,i}, 0 \le k \le t$$

όπου $g_{t,i}$ i = 1, ..., t είναι μια τριγωνική συστοιχία θετικών αριθμών που ορίζεται από τις σχέσεις υποτροπής

$$g_{t,1} = S_p(g_{t-1,1})\ \gamma\iota\alpha\, t \ge 2, g_{1,1} = \mu, \kappa\alpha\iota$$

$$g_{t,i} = S_p(g_{t-1}, i) - \sum_{j=1}^{i-1}(g_{t,j} - g_{t-1,j})\ \gamma\iota\alpha\ 2 \le i \le t-1$$

$$g_{t,t} = t\mu - \sum_{j=1}^{t-1} g_{t,j}$$

Η συνάρτηση $S_F(z)$ δίνεται από $z+T_F(z)$, όπου $T_F(z)$ είναι η συνάρτηση μέσης έλλειψης που ορίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$T_p(z) = \int_1^\infty \{1 - F(x)\}dx$$

και μ στην παραπάνω εξίσωση είναι η αναμενόμενη αξία στόχου, δεδομένου ότι

$$\mu = I_F(0) = \int_0^{\infty} x dF(x)$$

Η βέλτιστη στρατηγική για την άμυνα και την επίθεση είναι αυτή του διανύσματος παιχνιδιού στη δεξιά πλευρά των εξισώσεων για V_t (a, d), εάν ένας στόχος της τιμής v φτάσει στην κατάσταση (t, a, d). Η ρητή λύση του παιχνιδιού δεν είναι εύκολα επιλύσιμη ακόμη και για το απλούστερο είδος διανομής αξίας στόχου. Ωστόσο, εάν γίνει η παραδοχή απλοποίησης ότι η αξία του στόχου είναι ντετερμινιστική με τιμή 1, η τιμή του παιχνιδιού V_t (a, d) = pa (1 - ρd / t). Η βέλτιστη στρατηγική άμυνας είναι η υπεράσπιση του στόχου με πιθανότητα d/t, και παρόμοια, η βέλτιστη στρατηγική επίθεσης είναι να επιτεθεί ο στόχος με πιθανότητα a/t. Μια παρόμοια λύση συνεχούς χρόνου μπορεί να προκύψει εάν οι στόχοι υποτίθεται ότι φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, δηλαδή ο αριθμός των στόχων και οι ώρες άφιξής τους θεωρείται τυχαίος. Σε αυτήν την περίπτωση, η αξία του παιχνιδιού δίνεται από ένα σύστημα αναδρομικών διαφορικών εξισώσεων που χαρακτηρίζει τις βέλτιστες στρατηγικές της επίθεσης και της άμυνας.

3.5 Στρατηγικές, που περιλαμβάνουν ομοιώματα

Το πρόβλημα της κατανομής αμυντικών πυραύλων σε ένα μείγμα επιτιθέμενων όπλων και ομοιωμάτων εξετάστηκε στην περίπτωση που υπάρχει περιορισμένη ικανότητα της άμυνας να διακρίνει μεταξύ των πραγματικών όπλων και των ομοιωμάτων, εκφραζόμενη από την γνώση του για τις κατανομές πιθανότητας $f_w(x)$ και $f_d(x)$ κάποιου αυθαίρετου φυσικού χαρακτηριστικού.

3.5.1 Στρατηγική του επιτιθέμενου

Ενώ ο Layno [Αναφορά 20] ανέλυσε το πρόβλημα από την άποψη της άμυνας, ο Sverdlov [Αναφορά 17] θεώρησε το πρόβλημα της ανάπτυξης όπλων και ομοιωμάτων σε μια επίθεση σε στόχους χρησιμοποιώντας τα δύο αποτελέσματα που αναφέρονται στο 2ο Κεφάλαιο, δηλαδή το φαινόμενο της άμυνας και του κορεσμού. Και στις δύο περιπτώσεις, θεωρείται ότι ο αμυνόμενος δεν διαθέτει καμία ικανότητα διάκρισης όπλου – ομοιώματος και ότι οι εμπλοκές είναι ένας-προς-έναν. Το μέτρο αποτελεσματικότητας που χρησιμοποιείται είναι το αναμενόμενο κόστος της θανάτωσης του στόχου αξίας και η στρατηγική επίθεσης συνίσταται στο να αποφασιστεί εάν θα πυροβολήσει ένα όπλο ή ένα ομοίωμα σε κάθε στάδιο του παιχνιδιού, ενώ η αμυντική στρατηγική συνίσταται είτε στην παρεμπόδιση του εισερχόμενου αντικειμένου με έναν πύραυλο είτε όχι. Υποτίθεται ότι υπάρχουν τέλειες πληροφορίες και στις δύο πλευρές σχετικά με την κατάσταση της διαδικασίας.

Όταν χρησιμοποιείται το φαινόμενο εξάντλησης, ο επιτιθέμενος ξεκινά επίθεση με κύματα μέχρι να καταστραφεί ο μοναδικός στόχος. Υποτίθεται ότι υπάρχουν N πύραυλοι. Εάν η αξία του παιχνιδιού είναι V_N, το κόστος καταστροφής $V_N$mean, που μετράτε με βάση το κόστος καταστροφής που πραγματοποιείται εάν ο εισβολέας χρησιμοποιεί μόνο πραγματικά όπλα, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\overline{V_N} = \frac{V_N}{C_r/pg}$$

όπου το c_A είναι το κόστος ενός πραγματικού όπλου, το p είναι η πιθανότητα ότι το όπλο καταστρέφει τον στόχο, δεδομένου ότι επέζησε της παρεμπόδισης από την άμυνα, και q είναι η πιθανότητα ότι το όπλο επιβιώνει της παρεμπόδισης. Το $V_N$mean μπορεί να γραφτεί ως αναδρομική μορφή ως:

$$0.5\left(B + \overline{V_{N-1}} + \sqrt{B + \overline{V_{N-1}} - 4c\bar{V}_{N-1}}\right), \overline{V_0} = q$$

με B = q - qr_c (1-ϱ), c = q-qr_c (1-pq), $r_c = c_D/c_R$, με το c_D να είναι το κόστος ενός ομοιώματος.

Η επίλυση του προβλήματος μπορεί να δηλωθεί ως εξής: εάν N <N *, όπου N * = min (N: $V_N$mean > 1-rc), η βέλτιστη στρατηγική επίθεσης είναι τυχαιοποιημένη, που χαρακτηρίζεται από την πιθανότητα ότι ο εισβολέας εκτοξεύει ένα πραγματικό όπλο,

$$P_r^* = \frac{(\overline{V_N} - \overline{V_{N-1}})}{p\,(\overline{V_N} - q\overline{V_{N-1}})}$$

Η αντίστοιχη βέλτιστη αμυντική στρατηγική είναι επίσης τυχαιοποιημένη και χαρακτηρίζεται από την πιθανότητα ότι η άμυνα εκτοξεύει πυρά στον εισερχόμενο αντικείμενο,

$$P_d^* = \frac{\overline{V_N} + qr_c - q}{\overline{V_N} - q\overline{V_{N-1}}}$$

Ωστόσο, για το N> N *, οι βέλτιστες στρατηγικές είναι καθαρές: ο επιτιθέμενος χρησιμοποιεί πάντα όπλα και ο αμυνόμενος πάντα εξαπολύει πυρά εναντίον αυτών. Όταν το φαινόμενο κορεσμού χρησιμοποιείται για να ξεπεραστεί η άμυνα, η στρατηγική επίθεσης συνίσταται στην εύρεση του βέλτιστου αριθμού ομοιωμάτων που θα συνοδεύουν τα πραγματικά όπλα σε κάθε κύμα επίθεσης. Λαμβάνονται υπόψη δύο περιπτώσεις, πρώτον όταν ο επιτιθέμενος μπορεί να εκτοξεύσει μόνο ένα όπλο αναμεμειγμένο με ομοιώματα σε κάθε κύμα, και δεύτερον όταν ο αριθμός των όπλων δεν περιορίζεται σε ένα. Στην πρώτη περίπτωση, το αναμενόμενο κόστος της καταστροφής, όταν m ομοιώματά συνοδεύουν ένα μονό όπλο δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$c(m_D) = \frac{m_D c_D + c_R}{\frac{p\left(1-(1-q)\right)}{(m_D+1)^{Ns}}}$$

όπου N_s είναι ο αριθμός των συστημάτων άμυνας που προστατεύουν τον στόχο, και το καθένα θεωρείται ότι ενεργεί ανεξάρτητα από τα άλλα. Για να ελαχιστοποιηθεί το αναμενόμενο κόστος, αυτή η έκφραση διαφοροποιείται σε σχέση με το m_d για να αποκτήσετε την ακόλουθη βέλτιστη στρατηγική επίθεσης:

- εάν $q > N_s / (N_s + r_c)$, η βέλτιστη τιμή $m_D^* = 0$, δηλ. δεν χρειάζεται να υπάρχουν δόγματα,
- αν $q \leq N_s / (N_s + r_c)$, το m_D^* είναι $[m_D']$ ή $[m_D'] + 1$, ανάλογα με το αν το c ($[m_D']$) είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το c ($[m_D'] +1$), όπου το m_D 'είναι η θετική ρίζα της τετραγωνικής εξίσωσης:

$$c_D m_D^2 + c_D[q + 1 - N_s(1 - q)]m_D + c_D q - c_R N_s(1 - q) = 0$$

Στην άλλη περίπτωση, όπου δεν επιβάλλεται περιορισμός στον αριθμό των πραγματικών όπλων m_R ανά κύμα, αλλά αν υποτεθεί ότι υπάρχει μόνο ένα αμυντικό σύστημα, δηλαδή $N_s = 1$, το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος καταστροφής όταν ο εισβολέας είναι υποχρεωμένος να εκτοξεύσει ένα σύνολο από m αντικείμενα κάθε φορά είναι:

$$c^*(m) = c_D m + \min_{1 \leq m_r \leq m} \{(c_A - c_D)m_R + (1-p)^{m_r - 1}(1 - p + m_R p(1-q)/m)c^*(m)\}$$

Πρέπει να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές διαδικασίες για την επίλυση αυτής της εξίσωσης.

3.5.2 Στρατηγική του αμυνόμενου

Θεωρούσε επίσης την κατανομή της άμυνας εναντίον ενός μείγματος όπλων και ομοιωμάτων, όταν η άμυνα θεωρείται ότι διαθέτει περιορισμένη ικανότητα διάκρισης μεταξύ ενός όπλου και ενός ομοιώματος, με την ικανότητα αυτή να δικαιολογείται από τις πιθανότητες εσφαλμένου δόλου για ένα όπλο p_1 και κατά λάθος ενός όπλου για ένα ομοίωμα p_z. Η άμυνα θεωρείται ότι γνωρίζει τον συνολικό αριθμό αντικειμένων απειλής, τον αριθμό των διαθέσιμων αμυντικών πυραύλων και τις πιθανότητες θανάτωσής τους, και τις τιμές των p_1 και p_2. Ο στόχος της άμυνας είναι να ελαχιστοποιήσει τον αναμενόμενο συνολικό αριθμό πραγματικών όπλων που διεισδύουν στην άμυνα, βρίσκοντας μια βέλτιστη κατανομή πυραύλων εναντίον ενός εισερχόμενου αντικειμένου που έχει διαγνωστεί ως όπλο και ένα αντικείμενο που έχει διαγνωστεί ως ομοίωμα. Σε περίπτωση που η άμυνα δεν έχει ικανότητα διάκρισης, ο αναμενόμενος αριθμός όπλων διείσδυσης μπορεί να δοθεί από:

$$L_0 = A_r(1-\rho)^i(1-f\rho)$$

όπου Ar είναι ο συνολικός αριθμός επιτιθέμενων όπλων, i είναι το ακέραιο μέρος του d, ο μέσος αριθμός πυραύλων που κατανέμονται ανά αντικείμενο επίθεσης, και f είναι το κλασματικό μέρος του d, δηλ. d = i + f. Εάν χρησιμοποιείται η προσέγγιση 1-fρ ≈ (1 - ρ) ^{f}, τότε:

$$L_0 = A_r(1-\rho)^{i+f} = A_r(1-\rho)^d$$

Σε περίπτωση που η άμυνα διαθέτει περιορισμένη ικανότητα διάκρισης, ο μέσος αριθμός αντικειμένων επίθεσης που έχουν διαγνωστεί ως όπλα είναι A_r'= A_r-p_2 A_r + p_1A_d, όπου το A_d είναι ο συνολικός αριθμός των εισερχόμενων ομοιωμάτων. Ομοίως, ο αριθμός των αντικειμένων που έχουν διαγνωστεί ως ομοίωμα μπορεί να δοθεί από το A_d'= A_d - p_1A_d + p_2A_r. Ο αναμενόμενος αριθμός διεισδυτικών όπλων στην υπόθεση περιορισμένης διάκρισης μπορεί να δοθεί από τον παρακάτω τύπο:

$$L = A_r[(1-p_2)(1-\rho)^{dr} + p_2(1-\rho)^{dd}]$$

όπου d_r και d_d είναι οι αριθμοί των πυραύλων που κατανέμονται σε κάθε εισερχόμενο αντικείμενο που έχει διαγνωστεί ως όπλο και ομοίωμα αντίστοιχα.

Το πρόβλημα της εύρεσης των τιμών των d_r και d_d για ελαχιστοποίηση του L μειώνεται σε ένα μη γραμμικό πρόγραμμα με τον παρακάτω γραμμικό περιορισμό:

$$\min A_r[(1-p_2)(1-\rho)^{dr} + p_2(1-\rho)^{dd}]$$

$$υπακούωντας\ σε\ A_r' d_r + A_d' d_d = D$$

όπου D είναι ο συνολικός αριθμός πυραύλων. Η βέλτιστη λύση που προσφέρει η Layno είναι:

$$u_d^* = \frac{b-B}{m'+1} \; εάν \frac{b-B}{m'+1} > 0, και\ 0\ αντίστροφα\ και$$

$$d_r^* = \frac{b-m'B}{m'+1} \; εάν\ d_r^* > 0, και\ b\ αντίστροφα$$

$$όπου\ b = \frac{D}{A_r'}, B = \log\frac{\left[\frac{p_2}{m'(1-p_2)}\right]}{\log(1-\rho)}\ και\ m' = A_d'/A_r'$$

Η λύση, ωστόσο, δεν είναι σωστή δεδομένου ότι το B μπορεί να γίνει ένας μεγάλος αρνητικός αριθμός εάν το p_2 είναι κοντά στο 1, οπότε d_d*> 0 και το d_r* θα μπορούσε να είναι αρνητικό εάν -m'B> b. Για παράδειγμα, αν A_r '= 1, A_d'=2, p_2=0,95, ρ=0,6 και D=4 τότε d_d*= 2,15 και d_r * = -0,31 χρησιμοποιώντας τις παραπάνω δύο εξισώσεις. Η σωστή λύση είναι η εξής αφήνοντας το **1-ρ = e^{-α}**, η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται:

$$\min A_r[(1-p_2)e^{-ad} + p_2 e^{-add}]$$

και χρησιμοποιώντας την τεχνική πολλαπλασιαστή Lagrange, οι βέλτιστες λύσεις βρίσκονται:

$$d_p^* = \left(\frac{1}{a}\right)\ln\left\{\frac{a(1-p_2)}{\lambda A_r'}\right\}, d_d^* = (1/a)\ln\{p_2 a/(\lambda A_d')\}$$

$$όπου\ \lambda\ είναι\ ο\ πολλαπλασιαστής\ Langrange.$$

$$Εάν \frac{a(1-p_2)}{\lambda A_p'} > 1\ και \frac{ap_2}{\lambda A_d'} > 1, όπου$$

$$\lambda = \exp\{(A_r' \ln\left(\frac{a(1-p_2)}{A_r'}\right) + A_d' \ln\left(\frac{ap_2}{A_d'}\right) - aD)/(A_r' + A_d')\}$$

$$έπειτα\ d_r^* = \left(\frac{1}{a}\right)\ln\left(\frac{a(1-p_2)}{\lambda A_r'}\right), d_d^* = (1/a)\ln[p_2 a/(\lambda A_d')]$$

$$Αλλιώς, υποθέτουμε \frac{1-p_2}{A_r'} > \frac{p_2}{A_d'}, έπειτα\ d_r^* = \frac{D}{A_r'}, και$$

$$d_d^* = 0, και\ εάν \frac{1-p_2}{A_r'} < \frac{p_2}{A_d'}, έπειτα\ d_r^* = 0, και\ d_d^* = D/A_d'$$

Βιβλιογραφία

1. Bracken J. and McGill, J.T. "A Convex programming model for optimizing SLBM attack of Bomber Bases", Operations Research, vol. 21, 1973.
2. Bracken J and McGill, J.T., "Optimization of Strategic defenses to provide specified post-attack production capacities" Naval research logistics quarterly, vol. 21, 1974.
3. Miercourt, F.A. and Soland, R.M., "Optimal allocation of missiles against area and point defenses" Operations research, vol. 19, 1971.
4. Institute for defense analyses, A national-level analytic model for penetration of various combined air defense deployments by cruise missiles or bombers, by W.J. Shultis, 1978.
5. Grotte, J.H., "A targeting model that minimizes collateral damage" Naval research logistics quarterly, vol. 25, 1976.
6. Analytical services corporation, report AR 67-1, preferential strategies with imperfect weapons, by J.D. Matheson, 1967.

7. Croucher, J.S., “Application of the fundamental theorem of games to an example concerning antiballistic missile defense”, Naval research logistics quarterly, vol. 22, 1975.
8. Sakaguchi, M. “A sequential allocation game for targets with varying values” Journal of the operations research society of Japan, vol. 20, 1977.
9. Eckler, A.R. and Burr, S.A., Mathematical models of target coverage and missile allocation, Military operations research society, 1972.
10. Kisi, T. “Suboptimal decision rules for attacking targets of opportunity” Naval research logistics quarterly, vol. 23, 1976.
11. Croucher, J.S. “A target selection model” Opsearch, vol. 12, 1976.
12. Mastran, D.V. and Thomas, C.J. “Decision rules for attacking targets of opportunity” Naval research logistics quarterly, vol. 20, 1973.
13. Kupperman, R.H. and Smith, H.A. “The role of population defense in mutual deterence”, SIAM Review, vol. 19, 1977.
14. Matlin, S. “A review of the literature on the missile allocation problem” Operations research, vol. 18, 1970.
15. Grotte, J.H. “An optimizing nuclear exchange model for the analysis of nuclear war and deterence”, Operations research, vol. 30, 1982.
16. Raaland, C.M. and Winger, B.P. “Defense of cities by anti-ballistic missiles” SIAM Review, vol. 19, 1977.
17. Sverdlov, E.B., Optimal allocation of tactical missiles between valued targets and defense targets, Ph.D. Thesis, Naval Postgraduate school, Monterey, California, 1981.
18. Institute for defense analyses, Integer prim-read solutions to a class of target defense problems, by S.A, Burr, J.E. Falk & A.F. Rarr, 1983.
19. Chow Kay Cheong “Survey of investigations into the missile allocation problem”,1985, Naval Postgraduate School.
20. Layno, S.B. “A model of the ABM – vs – RV engagement with imperfect RV discrimination” Operations research, vol. 19, 1971.
21. Shubik, M. and Weber, R.J. “System defense games : Colonel Blotto, command and control” Naval research logistics quarterly, vol. 28, 1981.
22. Lawler, E.I. and Bell, M.D. “A method for solving discrete optimization problems” Operations research, vol. 14, 1966.
23. Bracken, J. Falk, J.E. and Miercourt, F.A. “A strategic weapons exchange allocation model” Operations research, vol. 25, 1977.

24. Swinson, G.E., Randolph, P.H., Dunn, B.J. and Walker, M.E. "A model for allocating interceptors from overlapping batteries : A method of dynamic programming" Operations research, vol. 19, 1971.

25. Nunn, W.R. "Analysis of a layered defense model" Operations research, vol. 30,1982.

26. Soland, R.M. "Optimal defensive missile allocation : a discrete min-max problem" Operations research, vol. 21,1973.

27. Shere, K.D. and Cohen, E.A. "A defense allocation problem with development costs" Naval research logistics quarterly, vol. 19, 1973.

28. Furman, C.G. and Greenberg, H.J. "Optimal weapon allocation with overlapping area defenses" Operations research, vol. 21,1973.