Πολυτεχνείο Κρήτης
Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Ανάπτυξη αλγορίθμου για την επίλυση του προβλήματος p-μέσων (p-median) και p-κέντρων (p-center)

Παπαστεφάνου Ευάγγελος

Διπλωματική Εργασία

Χανιά 2010

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ιωάννη Μαρινάκη για την καθοδήγηση του και τις συμβουλές του κατά την υλοποίηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής κ. Γρηγορούδη και κ. Ματσατσίνη για την ενασχόληση τους με το κείμενο της διπλωματικής.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, την Κατερίνα, τον Παναγιώτη και όλους τους φίλους μου για την υποστήριξη και την αγάπη που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Οργάνωση της εργασίας **5**

Περίληψη **6**

Κεφάλαιο 1. Εφοδιαστική αλυσίδα **7**

1.1 Εισαγωγή στην εφοδιαστική αλυσίδα (logistics) 7

1.2 Σημασία των εφοδιαστικών αλυσίδων (logistics) 7

1.3 Εφοδιαστικές αλυσίδες στην πράξη 8

1.4 Εφοδιαστικές αλυσίδες 9

1.5 Πως λειτουργούν τα συστήματα εφοδιαστικής αλυσίδας (logistics) 10

1.6 Οι αποφάσεις 13

Κεφάλαιο2. Θεωρία χωροθέτησης **15**

2.1 Εφοδιαστικές αλυσίδες με εστίαση στη χωροθέτηση (location) 15

2.2 Προβλήματα επικάλυψης 16

2.3 Το πρόβλημα των p-κέντρων (p-center problem) 17

2.4 Το πρόβλημα των p-μέσων (p-median problem) 18

2.5 Το capacitated p-median πρόβλημα 20

2.6 Άλλα μοντέλα επίλυσης του προβλήματος p-μέσων (p-median) 22

Κεφάλαιο 3. Το προς επίλυση πρόβλημα **31**

3.1 Περιγραφή του προβλήματος. 31

3.2 Επίλυση του προβλήματος με εφαρμογή του αλγορίθμου 32

Κεφάλαιο 4. Αποτελέσματα-πίνακες-διαγράμματα **35**

Κεφάλαιο 5. Συμπεράσματα **57**

Κεφάλαιο 6. Βιβλιογραφία **55**

Οργάνωση της εργασίας

Η δομή της εργασίας παρουσιάζεται παρακάτω:

Στο κεφάλαιο 1 γίνεται μια εισαγωγή στα συστήματα εφοδιαστικής αλυσίδας (logistics) καθώς και αναφορά σε διάφορα θέματα που αφορούν αυτά.

Στο κεφάλαιο 2 που ακολουθεί γίνεται εκτενής αναφορά στα προβλήματα εφοδιαστικής αλυσίδας (logistics) με εστίαση στη χωροθέτηση (location), παρουσιάζονται διάφορα είδη προβλημάτων, όπως και τα προβλήματα p-μέσων (p-median) και p-κέντρων (p-center), η μοντελοποίηση τους, ενώ παρατίθενται και κάποιοι αλγόριθμοι επίλυσης τους.

Στην συνέχεια στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται το προς επίλυση πρόβλημα p-μέσων (p-median), η μοντελοποίηση του καθώς και τα βήματα του αλγορίθμου.

Τα αποτελέσματα του αλγορίθμου μας παρατίθενται αναλυτικά στο κεφάλαιο 4 σε σύγκριση με τα δεδομένα αποτελέσματα του προβλήματος ενώ παρουσιάζονται και αναλυτικά μέσω πινάκων και διαγραμμάτων.

Τέλος στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και οι παρατηρήσεις σχετικά με τον αλγόριθμο που υλοποιήθηκε και την περαιτέρω εργασία.

Περίληψη

Οι εφοδιαστικές αλυσίδες (logistics) αποτελούν κλειδί για την σύγχρονη οικονομία. Είναι από τα διασημότερα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης και αποτελούν μία από τις σημαντικότερες δραστηριότητες στις σύγχρονες κοινωνίες. Από τα εργοστάσια χάλυβα της Πενσυλβάνια ως το λιμάνι της Σιγκαπούρης, από τις μπανανιές της Νικαράγουα ως την ταχυδρομική τους παράδοση σε κάθε γωνιά της γης, σχεδόν κάθε οργάνωση αντιμετωπίζει το πρόβλημα του να προμηθευτεί τα κατάλληλα υλικά, στο σωστό μέρος, την κατάλληλη στιγμή. Χρόνο με τον χρόνο όλο και περισσότερο οι ανταγωνιστικές αγορές καθιστούν επιτακτική ανάγκη τη διαχείριση των συστημάτων εφοδιαστικής αλυσίδας όλο και πιο αποτελεσματικά.

Εστιάζοντας στη χωροθέτηση (location) θα λέγαμε ότι αναφέρεται στην μοντελοποίηση, διαμόρφωση και λύση μιας κατηγορίας από προβλήματα που μπορεί καλύτερα να περιγραφεί ως χωροθέτηση εγκαταστάσεων σε ένα δεδομένο χώρο. Οι εκφράσεις χωροθέτηση, εγκατάσταση και τοποθέτηση χρησιμοποιούνται ως συνώνυμα και πρέπει να διευκρινιστεί ότι το μέγεθος των εγκαταστάσεων είναι πολύ μικρό σε σχέση με τον χώρο στον οποίο τοποθετούνται. Σκοπός είναι η επιλογή συγκεκριμένων εγκαταστάσεων και η τοποθέτηση τους σε σημείο τέτοιο ώστε να παρέχουν κατάλληλες υπηρεσίες ελαχιστοποιώντας πάντα ένα κόστος που επηρεάζει το εκάστοτε πρόβλημα. Υπάρχουν πάντα περιορισμοί που διαφοροποιούν το ένα πρόβλημα από το άλλο και έχουν να κάνουν με τον αριθμό των εγκαταστάσεων, λεπτομέρειες που αφορούν στη ζήτηση, χρονικά περιθώρια, αποστάσεις μεταξύ των εγκαταστάσεων, βάρη κλπ.

Για την επίλυση των προβλημάτων χρησιμοποιούνται διάφορες ευρετικές μέθοδοι οι οποίες αποτελούν αξιόπιστη και αποδοτική προσέγγιση επίλυσης των προβλημάτων, δεδομένου ότι είναι σε θέση να παρέχουν, κατά προσέγγιση, υψηλής ποιότητας λύσεις σε έναν λογικό χρόνο.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εύρεση αλγορίθμου που να επιλύει το πρόβλημα p-μέσων, p-κέντρων (p-median, p-center) και η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν με τις βέλτιστες από τα δεδομένα του προβλήματος λύσεις.

Κεφάλαιο 1

Εφοδιαστική αλυσίδα

1.1 Εισαγωγή στην εφοδιαστική αλυσίδα (logistics)

Οι εφοδιαστικές αλυσίδες ασχολούνται με το σχεδιασμό και τον έλεγχο των ροών των υλικών και των συναφών πληροφοριών, τόσο στο δημόσιο όσο και στον ιδιωτικό τομέα. Σε γενικές γραμμές, σκοπός τους είναι να πάρουν τα σωστά υλικά για το σωστό μέρος τη σωστή στιγμή, βελτιστοποιώντας μία δεδομένη μέτρηση απόδοσης (π.χ., ελαχιστοποιώντας το συνολικό κόστος λειτουργίας) και ικανοποιώντας ένα δεδομένο σύνολο περιορισμών. Σε στρατιωτικά πλαίσια, οι εφοδιαστικές αλυσίδες ασχολούνται με την προμήθεια των στρατευμάτων με τρόφιμα, όπλα, πυρομαχικά και ανταλλακτικά, καθώς και τη μεταφορά των στρατευμάτων τους. Στις πολιτικές οργανώσεις, ασχολούνται με ζητήματα που έχουν να κάνουν με τις επιχειρήσεις που παράγουν και διανέμουν τα φυσικά αγαθά. Το κύριο θέμα είναι να αποφασιστεί πώς και πότε οι πρώτες ύλες, τα ημικατεργασμένα και τελικά προϊόντα θα πρέπει να αποκτηθούν, να παραγγελθούν, να μεταφερθούν και να αποθηκευθούν. Τα προβλήματα εφοδιαστικής αλυσίδας μπορούν επίσης να προκύψουν σε επιχειρήσεις και δημόσιους οργανισμούς παροχής υπηρεσιών. Για παράδειγμα η περίπτωση της αποκομιδής απορριμμάτων, η παράδοση μέσω ταχυδρομείου και οι υπηρεσίες μετά την πώληση.
(βλ. Βιβλιογραφία [6] σελ.1)

1.2 Σημασία των εφοδιαστικών αλυσίδων (logistics)

Οι εφοδιαστικές αλυσίδες (logistics) αποτελούν μια από τις σημαντικότερες δραστηριότητες στις σύγχρονες κοινωνίες. Μερικά στοιχεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υποστηρίξουν τον ισχυρισμό αυτό: Έχει υπολογιστεί ότι το συνολικό κόστος για την εφοδιαστική αλυσίδα, που πραγματοποιήθηκε από τις οργανώσεις των ΗΠΑ το 1997, ήταν 862 δισεκατομμύρια δολάρια, ποσό που αντιστοιχεί στο 11% περίπου του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (ΑΕΠ) των ΗΠΑ. Το κόστος αυτό είναι υψηλότερο από τις ετήσιες δαπάνες της κυβέρνησης των ΗΠΑ για κοινωνική ασφάλιση, υπηρεσίες υγείας και άμυνα. Τα στοιχεία αυτά είναι παρόμοια με εκείνα που παρατηρήθηκαν στις χώρες που συμμετέχουν στην Συμφωνία Ελεύθερων Συναλλαγών Βόρειας Αμερικής (NAFTA) και στις χώρες τις Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ). Επιπλέον, το κόστος για την εφοδιαστική αλυσίδα, αντιπροσωπεύει ένα σημαντικό μέρος των πωλήσεων μιας επιχείρησης, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.1 για τις επιχειρήσεις της ΕΕ το 1993.

Logistics costs (as a percentage of GDP) in EU countries
(T, transportation; W, warehousing; I, inventory; A, administration).

Sector	T	W	I	A	Total
Food/beverage	3.7	2.2	2.8	1.7	10.4
Electronics	2.0	2.0	3.8	2.5	10.3
Chemical	3.8	2.3	2.6	1.5	10.2
Automotive	2.7	2.3	2.7	1.2	8.9
Pharmaceutical	2.2	2.0	2.5	2.1	8.8
Newspapers	4.7	3.0	3.6	2.1	13.4

Πίνακας 1.1(βλ. Βιβλιογραφία [6] σελ.1)

*Οι υπηρεσίες που έχουν να κάνουν με την μεταφορά των υλικών μεταξύ των εγκαταστάσεων, χρησιμοποιούν οχήματα και εξοπλισμό όπως φορτηγά, ελκυστήρες, ρυμουλκούμενα, πληρώματα, παλέτες, κιβώτια, αυτοκίνητα και τα τρένα. (βλ. Βιβλιογραφία [6] σελ.1)

1.3 Εφοδιαστικές αλυσίδες στην πράξη

Πώς αντιμετωπίζονται τα προβλήματα εφοδιαστικής αλυσίδας στην πράξη; Δηλαδή, πώς αυτά τα δύσκολα προβλήματα θα επιλυθούν στον πραγματικό κόσμο; Οι επιχειρήσεις χρησιμοποιούν διάφορες προσεγγίσεις.
Πρώτα απ 'όλα, όπως και σε άλλες πτυχές της ζωής, οι άνθρωποι τείνουν να επαναλαμβάνουν ό,τι έχει συμβεί και δούλεψε σωστά και στο παρελθόν. Δηλαδή, αν την περυσινή χρονιά το επίπεδο ασφαλείας των αποθεμάτων ήταν αρκετό για να αποφύγουν τις καθυστερημένες ζητήσεις, το ίδιο επίπεδο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και αυτό το έτος. Σε περίπτωση που οι διαδρομές παράδοσης της περσινής χρονιάς ήταν επιτυχείς, δηλαδή όλοι οι λιανοπωλητές παραλαμβάνουν τις παραγγελίες στην ώρα τους, τότε γιατί να τις αλλάξουμε; Δεύτερον, υπάρχουν οι λεγόμενοι "πρόχειροι κανόνες", οι οποίοι χρησιμοποιούνται ευρέως και, τουλάχιστον επιφανειακά, μπορεί να είναι αρκετά αποτελεσματικοί. Για παράδειγμα, πολλοί διευθυντές σε τμήματα logistics συχνά χρησιμοποιούν τον λεγόμενο κανόνα "20/80"που λέει ότι περίπου το 20% των προϊόντων αντιστοιχεί στο 80% περίπου του συνολικού κόστους και ως εκ τούτου, αρκεί να επικεντρωθεί η προσοχή σε αυτά τα κρίσιμα προϊόντα.

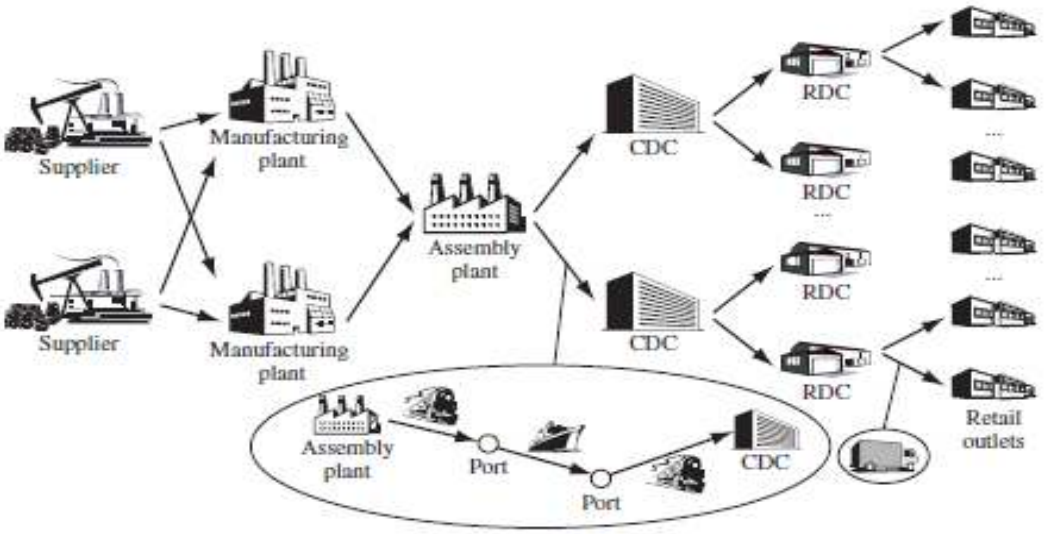
Το «Logistics network design», είναι ένας τομέας όπου χρησιμοποιούνται "πρόχειροι κανόνες". Ένας τέτοιος κανόνας θα μπορούσε να υποδηλώνει ότι εάν μια εταιρεία εξυπηρετεί όλες τις ΗΠΑ και χρειάζεται μόνο μία αποθήκη, τότε αυτή η αποθήκη θα πρέπει να πιθανόν να βρίσκεται στην περιοχή του Σικάγο. Εάν χρειάζεται δύο, τότε η μία θα μπορούσε να τοποθετηθεί στο Λος Άντζελες και η άλλη στην Ατλάντα. Τέλος, ορισμένες εταιρείες προσπαθούν να εκμεταλλευτούν την πείρα και την διαίσθηση των εμπειρογνωμόνων και των συμβούλων σε θέματα εφοδιαστικής αλυσίδας με το σκεπτικό ότι λειτούργησε καλά για έναν ανταγωνιστή θα πρέπει να λειτουργεί καλά και για τον εαυτό τους.

Φυσικά, ενώ όλες αυτές οι προσεγγίσεις φαίνονται σωστές και αρκετά συχνά έχουν ως αποτέλεσμα στρατηγικές εφοδιαστικής αλυσίδας που έχουν νόημα, δεν είναι σαφές το πόσο χαμένοι βγαίνουμε με το να μην επικεντρωνόμαστε στην καλύτερη (ή πολύ κοντά στην καλύτερη) στρατηγική για τη συγκεκριμένη περίπτωση. Πράγματι, πρόσφατα, με την εισχώρηση των φθηνών υπολογιστικών συστημάτων, έχει καταστεί όλο και πιο προσιτό για πολλές επιχειρήσεις και όχι μόνο μεγάλες, να αποκτήσουν και να χρησιμοποιήσουν εξελιγμένα συστήματα σχεδιασμού (Advance Planning Systems (APS))για τη βελτιστοποίηση των στρατηγικών τους. Σε αυτά τα συστήματα, καταχωρούνται δεδομένα, επανεξετάζονται και επικυρώνονται, εκτελούνται διάφοροι αλγόριθμοι και η προτεινόμενη λύση παρουσιάζεται με ένα κατανοητό προς το χρήστη τρόπο. Παίρνοντας τα δεδομένα σωστά, το σύστημα επιλύει το συγκεκριμένο πρόβλημα και τα APS μπορούν να μειώσουν σημαντικά το κόστος όλου του συστήματος. Επίσης, όταν επιτυγχάνουμε μια ικανοποιητική λύση, τυπικά έχουμε φτάσει σε αυτή μετά από μια επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία ο χρήστης αξιολόγησε διάφορα σενάρια και εκτίμησε τις επιπτώσεις τους στο κόστος και τα επίπεδα εξυπηρέτησης. Παρ' όλο που αυτό δεν μπορεί ακριβώς να θεωρηθεί τέλεια λύση, συνήθως χρησιμεύει ως ένα σημαντικό εργαλείο για τον χρήστη του συστήματος. Τα συστήματα αυτά έχουν ως πυρήνα τους μοντέλα και αλγόριθμους. Σε ορισμένες περιπτώσεις, το σύστημα μπορεί απλά να είναι μια ηλεκτρονική εκδοχή των πρόχειρων κανόνων ανωτέρω. Σε όλο και περισσότερες περιπτώσεις, ωστόσο, τα εν λόγω συστήματα χρησιμοποιούν τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί σε ερευνητικές εργασίες, στην επιστήμη του management και έρευνες της επιστήμης της πληροφορικής.

Ορισμένα από τα προβλήματα που αναφέρονται παραπάνω αποτελούν δύσκολα στοχαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης που απαιτούν έννοιες όπως η κυρτότητα, και τις επεκτάσεις τους για την ανάλυσή τους. Άλλα προβλήματα έχουν στον πυρήνα τους εξαιρετικά δύσκολα προβλήματα συνδυαστικής στην κατηγορία που ονομάζεται NP-Hard. Αυτό σημαίνει ότι είναι πολύ απίθανο να μπορεί κανείς να κατασκευάσει έναν αλγόριθμο που θα μπορεί πάντα να βρίσκει τη βέλτιστη λύση, ή την καλύτερη δυνατή απόφαση. Έτσι λοιπόν σε πολλές περιπτώσεις δεν θεωρείται εφικτός στόχος ένας αλγόριθμος που παρέχει με συνέπεια τις βέλτιστη λύση, και ως εκ τούτου χρησιμοποιούνται ευρετικές, ή προσεγγιστικές μέθοδοι. (βλ. Βιβλιογραφία [5]σελ.7-8)

1.4 Εφοδιαστικές αλυσίδες

Μια εφοδιαστική αλυσίδα είναι ένα πολύπλοκο σύστημα (logistics) όπου οι πρώτες ύλες μετατρέπονται σε τελικά προϊόντα και στη συνέχεια διανέμονται στους τελικούς χρήστες (καταναλωτές ή εταιρείες). Περιλαμβάνει τους προμηθευτές, τα κέντρα κατασκευής, αποθήκες, κέντρα διανομής (DCs) και την λιανική πώληση. Το σχήμα1.1 παρουσιάζει μια τυπική αλυσίδα εφοδιασμού κατά την οποία η παραγωγή και τα συστήματα διανομής αποτελούνται από δύο φάσεις το κάθε ένα. Στο σύστημα παραγωγής, τα εξαρτήματα και ημικατεργασμένα μέρη παράγονται σε δύο κέντρα παραγωγής, ενώ τα έτοιμα προϊόντα συναρμολογούνται σε διαφορετική μονάδα. Το σύστημα διανομής αποτελείται από δύο



Σχήμα1.1 Μία εφοδιαστική αλυσίδα. (βλ. Βιβλιογραφία [6] σελ.4)

κεντρικά κέντρα διανομής (CDCs) που εφοδιάζονται απευθείας από το κέντρο συναρμολόγησης, τα οποία με τη σειρά τους τροφοδοτούν δύο περιφερειακά κέντρα διανομής (RDCs) το κάθε ένα. Φυσικά, ανάλογα με το προϊόν και τα χαρακτηριστικά της ζήτησης μπορεί να είναι πιο κατάλληλος ο σχεδιασμός μιας εφοδιαστικής αλυσίδας που δεν αποτελείται από ξεχωριστά κέντρα παραγωγής και συναρμολόγησης (ή ακόμη χωρίς φάση συναρμολόγησης), χωρίς περιφερειακά κέντρα διανομής (RDCs) ή με διαφορετικά είδη εγκαταστάσεων. Κάθε μια από τις συνδέσεις μεταφοράς στο σχήμα 1.1 θα μπορούσε να είναι μια απλή γραμμή μεταφοράς (π.χ. μια γραμμή φορτηγών) ή μια πιο σύνθετη μεταφορική διαδικασία που συνεπάγεται πρόσθετες υπηρεσίες (π.χ. λιμενικών τερματικών σταθμών) και εταιρείες (φορτηγά-μεταφορές). Ομοίως, κάθε μονάδα στο σχήμα 1.1 αποτελείται από διάφορες συσκευές και υποσυστήματα. Για παράδειγμα, τα εργοστάσια παραγωγής περιλαμβάνουν μηχανήματα, προσκρουστήρες, κυλιόμενους διαδρόμους ή άλλα είδη εξοπλισμού, ενώ τα κέντρα διανομής (DC) περιλαμβάνουν ράφια, κλαρκ ή αυτόματα συστήματα αποθήκευσης και ανόρθωσης.

Οι εφοδιαστικές αλυσίδες συνήθως δεν συνδέονται με τον λεπτομερή σχεδιασμό ροής των υλικών μέσα σε μονάδες παραγωγής και συναρμολόγησης. Για την ακρίβεια, θέματα όπως ο συνολικός προγραμματισμός της παραγωγής και των μηχανών είναι πέρα από το πεδίο εφαρμογής των εφοδιαστικών αλυσίδων.
(βλ. Βιβλιογραφία [6]σελ.3-5)

1.5 Πως λειτουργούν τα συστήματα εφοδιαστικής αλυσίδας (logistics)

Τα συστήματα εφοδιαστικής αλυσίδας αποτελούνται από τρεις κύριες δραστηριότητες: επεξεργασία παραγγελιών, απογραφή-διαχείριση εμπορευμάτων και μεταφορά εμπορευμάτων.

1.Επεξεργασία παραγγελιών.

Η επεξεργασία των παραγγελιών είναι απολύτως σχετική με την ροή των πληροφοριών στο σύστημα εφοδιαστικής αλυσίδας και περιλαμβάνει μια σειρά ενεργειών. Οι πελάτες ενδέχεται να χρειαστεί να παραγείλουν τα προϊόντα συμπληρώνοντας μια φόρμα παραγγελίας. Αυτές οι παραγγελίες πρέπει να διαβιβάζονται και να ελέγχονται. Στη συνέχεια ελέγχεται η διαθεσιμότητα των ζητούμενων ειδών και επαληθεύεται η πιστοληπτική ικανότητα του πελάτη. Στην συνέχεια λαμβάνονται τα υλικά από τις αποθήκες (ή παράγονται), συσκευάζονται και παραδίδονται μαζί με τα έγγραφα αποστολής (shipping documentation). Τέλος, οι πελάτες θα πρέπει να ενημερώνεται συνεχώς σχετικά με την κατάσταση των παραγγελιών τους.

Παραδοσιακά, η επεξεργασία παραγγελιών ήταν μια πολύ χρονοβόρα δραστηριότητα (έως 70% του συνολικού χρόνου). Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια έχει ωφεληθεί πολύ από την πρόοδο της τεχνολογίας των πληροφοριών. Ο έλεγχος μέσω Bar code επιτρέπει στους λιανοπωλητές να εντοπίζουν άμεσα τα απαιτούμενα προϊόντα και να ενημερώνονται για το επίπεδο των αποθεμάτων.Οι Φορητοί υπολογιστές και μόντεμ επιτρέπουν στους πωλητές να ελέγχουν απευθείας το κατά πόσο κάποιο προϊόν είναι διαθέσιμο σε απόθεμα και να προχωρούν στις παραγγελίες ακαριαία. Επιτρέπεται επίσης στις εταιρείες να εισάγουν παραγγελίες για βιομηχανικά προϊόντα απευθείας στον υπολογιστή του πωλητή χωρίς καμία γραφειοκρατία.

2.Αποθήκευση-διαχείριση εμπορευμάτων

Η αποθήκευση-διαχείριση είναι ένα βασικό θέμα στον προγραμματισμό των επιχειρήσεων και συστημάτων εφοδιαστικής αλυσίδας. Η αποθήκευση έχει να κάνει με αποθέματα των αγαθών που περιμένουν να κατασκευαστούν-συναρμολογηθούν, να μεταφερθούν ή να πωληθούν.
Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα είναι :

- εξαρτήματα και ημικατεργασμένα προϊόντα (διαδικασία παραγωγής), που περιμένουν να κατασκευαστούν ή να συναρμολογηθούν.
- εμπορεύματα (πρώτες ύλες, συστατικά, τελικά προϊόντα), που μεταφέρονται μέσω της αλυσίδας εφοδιασμού
- αποθεματοποίηση τελικών προϊόντων σε κέντρα διανομής (DC), πριν από την πώληση
- τελικά προϊόντα που αποθηκεύονται από τελικούς χρήστες (καταναλωτές ή βιομηχανικούς χρήστες) για την κάλυψη μελλοντικών αναγκών.

Υπάρχουν αρκετοί λόγοι για τους οποίους ένας τεχνικός της εφοδιαστικής αλυσίδας μπορεί να επιθυμεί να έχει αποθέματα σε ορισμένες εγκαταστάσεις της εφοδιαστικής αλυσίδας, όπως:

Βελτίωση του επιπέδου παροχής υπηρεσιών. Έχοντας ένα απόθεμα των τελικών προϊόντων σε αποθήκες κοντά στους πελάτες επιτυγχάνεται παράδοση παραγγελιών σε μικρότερες προθεσμίες.

Μείωση του συνολικού κόστους της εφοδιαστικής αλυσίδας. Οι μεταφορές των εμπορευμάτων χαρακτηρίζονται από τα υψηλά πάγια έξοδα. Αποτέλεσμα αυτού είναι να αποφεύγεται συχνά η παράδοση
μικρών παραγγελιών σε μεγάλες αποστάσεις καθώς μια εταιρεία μπορεί να θεωρεί πιο βολικό να ικανοποιήσει τη ζήτηση των πελατών μέσω τοπικών αποθηκών.

Αντιμετώπιση της τυχαιότητας της ζήτησης των πελατών και του χρόνου παράδοσης. Οι αποθήκευση των τελικών προϊόντων (αποθέματα ασφαλείας) βοηθάει στην ικανοποίηση της ζήτησης των πελατών, ακόμη και αν εμφανιστούν απρόβλεπτα κατά την ζήτηση ή παράδοση, λόγω των καθυστερήσεων που παρατηρούνται (που οφείλονται, για παράδειγμα, σε δυσμενείς καιρικές ή κυκλοφοριακές συνθήκες).

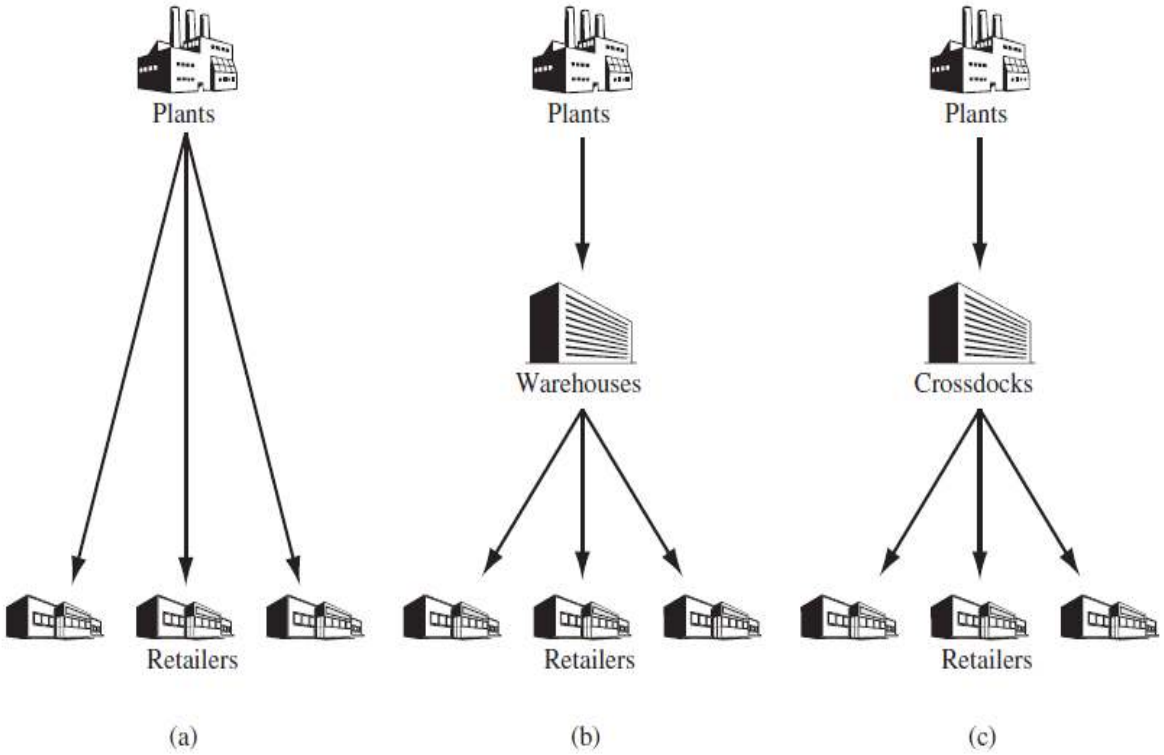
Τα εποχιακά είδη διατίθενται όλο το χρόνο. Εποχιακά προϊόντα μπορούν να αποθηκεύονται σε αποθήκες στο χρόνο παραγωγής και να πωλούνται τους επόμενους μήνες.

Πιθανότητες κέρδους λόγω την μεταβολής των τιμών. Εμπορεύματα των οποίων η τιμή ποικίλλει σημαντικά κατά τη διάρκεια ενός έτους, μπορεί να αγοραστούν όταν οι τιμές είναι χαμηλές, να αποθηκευτούν και τελικά να πωληθούν όταν οι τιμές ανεβαίνουν.

Αντιμετώπιση πιθανής αναποτελεσματικότητας κατά τη διαχείριση του συστήματος εφοδιαστικής αλυσίδας. Τα αποθέματα μπορούν να χρησιμοποιούνται για να ξεπεραστούν αδυναμίες στη διαχείριση του συστήματος εφοδιαστικής αλυσίδας (π.χ. Η εταιρεία διανομής μπορεί να αποθηκεύει υλικό, διότι δεν είναι σε θέση να συντονίσει της προσφορά και τη ζήτηση).

Κρατώντας κάποιο απόθεμα, μπορεί, ωστόσο, να κοστίσει για πολλούς λόγους. Πρώτον, μια εταιρεία που κρατά τα αποθέματα υφίσταται ζημιά λόγω του κόστους από μια επένδυση που σκόπευε να της αποφέρει κέρδος και θα έπρεπε να έχει σκεφτεί νωρίτερα αν τα χρήματα έπρεπε να επενδυθούν καλύτερα. Δεύτερον, οι δαπάνες αποθήκευσης προκύπτουν ξεχωριστά, εάν η αποθήκη είναι ιδιόκτητη, μισθωμένη ή δημόσια.

Ο στόχος λοιπόν της διαχείρισης των αποθεμάτων είναι να καθορίσει τα επίπεδα αποθεμάτων προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος λειτουργίας και ταυτόχρονα να ικανοποιεί τις απαιτήσεις για την εξυπηρέτηση των πελατών. Στην πράξη, μια καλή πολιτική αποθήκευσης-διαχείρισης πρέπει να λαμβάνει υπόψη πέντε ζητήματα: (1) τη σχετική σπουδαιότητα των πελατών (2) την οικονομική σημασία των διαφόρων προϊόντων (3) τις πολιτικές μεταφορών (4) την ευελιξία στην παραγωγική διαδικασία (5) τις πολιτικές των ανταγωνιστών



Σχήμα 1.2(βλ. Βιβλιογραφία [6] σελ.7)

Στρατηγικές αποθήκευσης και μεταφορών. Η αποθήκευση και οι πολιτικές μεταφοράς είναι αλληλένδετες έννοιες. Κατά την διανομή ενός προϊόντος, τρεις είναι οι κύριες στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν: (a) Άμεση Μεταφορά, (b) Αποθήκευση, (c) CrossDocking.

Αν χρησιμοποιηθεί μια στρατηγική *Άμεσης Μεταφοράς*, τα εμπορεύματα αποστέλλονται απευθείας από τον κατασκευαστή στον τελικό χρήστη (στους λιανεμπόρους στην περίπτωση των αγαθών λιανικής πώλησης) (βλ. Σχήμα 1.2 (a). Οι Απευθείας αποστολές εξαλείφουν τα έξοδα εκμετάλλευσης ενός διανομέα και μειώνουν το χρόνο. Αντίθετα, αν το μέγεθος μιας συνηθισμένης μεταφοράς αγαθών σε πελάτες είναι μικρό και οι πελάτες είναι διάσπαρτοι σε μια ευρεία γεωγραφική περιοχή, μπορεί να απαιτηθεί μεγάλος στόλος, μικρών φορτηγών . Ως εκ τούτου, η άμεση αποστολή συνηθίζεται όταν η ζήτηση των πελατών προϋποθέτει να έχουμε πλήρως φορτωμένα φορτηγά ή όταν ευπαθή προϊόντα πρέπει να παραδοθούν έγκαιρα.

Η *Αποθήκευση* είναι μια παραδοσιακή προσέγγιση βάσει της οποίας τα εμπορεύματα λαμβάνονται από αποθήκες και αποθηκεύονται σε δεξαμενές, ράφια ή στα ράφια των καταστημάτων (βλ. Σχήμα 1.2b). Όταν φτάνει μία παραγγελία, συγκεντρώνονται τα αντικείμενα, συσκευάζονται και αποστέλλονται στον πελάτη. Η φάση της αποθήκευσης αποτελείται από τέσσερις σημαντικές λειτουργίες: την παραλαβή των εισερχόμενων εμπορευμάτων, την αποθήκευση, την προετοιμασία της παραγγελίας και την αποστολή-μεταφορά.
Από αυτές τις τέσσερις λειτουργίες, η αποθήκευση και η προετοιμασία παραγγελιών είναι οι πιο δαπανηρές, λόγω του κόστους αποθεματοποίησης και του κόστους εργασίας, αντίστοιχα.

Το Crossdocking (που αναφέρεται επίσης ως just-in-time διανομή) είναι μία σχετικά νέα τεχνική των εφοδιαστικών αλυσίδων που έχει εφαρμοστεί με επιτυχία από πολλές αλυσίδες καταστημάτων (βλ. Σχήμα1.2). Η crossdock είναι μια εγκατάσταση μεταφόρτωσης στην οποία εισερχόμενες αποστολές (ενδεχομένως προέρχονται από διάφορους κατασκευαστές) ταξινομούνται, ομαδοποιούνται με άλλα προϊόντα και μεταφέρονται άμεσα στα ρυμουλκούμενα χωρίς ενδιάμεση αποθήκευση ή προετοιμασία παραγγελιών. Ως αποτέλεσμα, από τον συνολικό χρόνο μεταφοράς, χρειάζονται μόνο λίγες ώρες στις εγκαταστάσεις. Σε crossdocking προ διανομής (predistribution crossdocking), τα εμπορεύματα ταξινομούνται σε ένα κατάστημα λιανικής πώλησης πριν η αποστολή αφήσει τον πωλητή. Σε crossdocking μετά διανομής (post-crossdocking) , διατίθενται ήδη crossdock εμπορεύματα στα καταστήματα λιανικής πώλησης. Για να λειτουργήσει σωστά, το crossdocking απαιτεί υψηλή ζήτηση και χαμηλή διακύμανση της ζήτησης (αλλιώς είναι δύσκολο να εναρμονιστούν η προσφορά και η ζήτηση), καθώς επίσης και ευκολία στην διαχείριση των προϊόντων. Επιπλέον, ένα κατάλληλο σύστημα παροχής πληροφοριών είναι απαραίτητο να μπορεί να συντονίσει την εισερχόμενη και εξερχόμενη ροή.

3.Μεταφορά εμπορευμάτων

Οι μεταφορές εμπορευμάτων διαδραματίζουν βασικό ρόλο στις σύγχρονες οικονομίες, καθώς επιτρέπουν στην παραγωγή και στην κατανάλωση να πραγματοποιούνται μεταξύ χώρων που είναι αρκετές εκατοντάδες ή χιλιάδες χιλιόμετρα μακριά ο ένας από τον άλλον. Ως αποτέλεσμα, οι αγορές αποκτούν μεγαλύτερο εύρος, τονώνεται ο άμεσος ανταγωνισμός μεταξύ των κατασκευαστών από διάφορες χώρες και ενθαρρύνονται οι επιχειρήσεις ώστε να εκμεταλλευτούν οικονομίες κλίμακας. Επιπλέον, οι εταιρείες στις ανεπτυγμένες χώρες μπορούν να επωφεληθούν των χαμηλότερων μισθών παραγωγής στις αναπτυσσόμενες χώρες. Τέλος, ευπαθή προϊόντα μπορούν να διατίθενται στην παγκόσμια αγορά. Οι μεταφορές εμπορευμάτων αντιπροσωπεύουν συχνά ακόμη και τα δύο τρίτα του συνολικού κόστους της εφοδιαστικής αλυσίδας και έχουν σημαντική επίδραση στο επίπεδο της εξυπηρέτησης των πελατών. Ως εκ τούτου, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι ο σχεδιασμός των μεταφορών διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στο σύστημα εφοδιαστικής αλυσίδας. Ένας κατασκευαστής, ή ο διανομέας μπορεί να επιλέξει μεταξύ τριών εναλλακτικών λύσεων για τη μεταφορά των υλικών. *Πρώτον*, η επιχείρηση μπορεί να λειτουργεί με ένα ιδιωτικό ή μισθωμένο στόλο οχημάτων (Ιδιωτικές μεταφορές). *Δεύτερον*, ο μεταφορέας μπορεί να είναι υπεύθυνος για τη μεταφορά των υλικών στις άμεσες μεταφορές πράγμα που ρυθμίζεται με σύμβαση (σύμβαση μεταφοράς). *Τρίτον*, η εταιρεία μπορεί να καταφύγει σε έναν μεταφορέα που χρησιμοποιεί κοινούς πόρους (οχήματα, πληρώματα, τερματικά) ώστε να εκπληρώσει τις ανάγκες μεταφορών διαφόρων πελατών(κοινή μεταφορά). (βλ. Βιβλιογραφία [6]σελ.6-8)

1.6 Οι αποφάσεις

Κατά το σχεδιασμό και τη λειτουργία ενός συστήματος εφοδιαστικής αλυσίδας, πρέπει να αντιμετωπιστούν κάποια θεμελιώδη θέματα. Για παράδειγμα, θα πρέπει να ανοίξουν νέες εγκαταστάσεις (κέντρα παραγωγής και συναρμολόγησης, CDCs, RDCs, κλπ.); Ποιες είναι οι καλύτερες ρυθμίσεις, τα μεγέθη και οι τοποθεσίες; Θα πρέπει κάποια υπάρχουσα εγκατάσταση να πωληθεί, να εκτοπιστεί ή να μικρύνει το μέγεθος της; Που πρέπει να λαμβάνονται και να αποθηκεύονται τα υλικά; Πού πρέπει να γίνεται η κατασκευή και συναρμολόγηση; Πού θα πρέπει τα έτοιμα προϊόντα να αποθηκεύονται; Πρέπει οι αποθήκες να είναι ιδιόκτητες ή μισθωμένες; Πού θα πρέπει να αποθηκεύονται τα ανταλλακτικά; Πως θα πρέπει να προγραμματιστεί η παραγωγή; Πώς πρέπει να λειτουργούν οι αποθήκες (πρέπει τα εμπορεύματα να αποθηκεύονται σε ράφια ή πρέπει να στοιβάζονται; Θα πρέπει τα εμπορεύματα να κουβαληθούν από μια ομάδα εργατών ή από αυτόματες συσκευές;); Πότε και πώς θα πρέπει κάθε αποθήκη να επανεφοδιάζεται; Τι τρόπος μεταφοράς θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τη μεταφορά των προϊόντων; Θα πρέπει τα οχήματα να ανήκουν στην εταιρεία ή να είναι μισθωμένα; Ποιο είναι το κατάλληλο μέγεθος στόλου; Πώς πρέπει να είναι προγραμματισμένη μια αποστολή; Πώς θα πρέπει να δρομολογούνται τα οχήματα; Θα πρέπει κάποια μεταφορά να πραγματοποιείται με κοινή μεταφορά;

Οι αποφάσεις εφοδιαστικής αλυσίδας παραδοσιακά χαρακτηρίζονται ως στρατηγικές αποφάσεις, αποφάσεις τακτικής και αποφάσεις σε επιχειρησιακό επίπεδο, σύμφωνα με τον ορίζοντα του σχεδιασμού.

- *Στρατηγικές αποφάσεις*. Οι στρατηγικές αποφάσεις έχουν μακροχρόνιες επιπτώσεις (συνήθως σε πολλά χρόνια). Εδώ περιλαμβάνονται, ο σχεδιασμός των συστημάτων εφοδιαστικής αλυσίδας και η απόκτηση των δαπανηρών πόρων (θέση εγκατάστασης, μέγεθος της παραγωγικής ικανότητας, οι αποθήκες, το μέγεθος του στόλου). Επειδή τα δεδομένα συχνά είναι ελλιπή και ανακριβή, οι στρατηγικές αποφάσεις βασίζονται σε προβλέψεις που στηρίζονται στη λήψη συγκεντρωτικών στοιχείων (για παράδειγμα, με την ομαδοποίηση των προϊόντων σε *οικογένειες προϊόντων* και των πελατών σε *πελατειακές ζώνες*).

- *Αποφάσεις τακτικής*. Οι αποφάσεις τακτικής λαμβάνονται σε μεσοπρόθεσμη βάση (π.χ. μηνιαίως ή ανά τρίμηνο) και περιλαμβάνουν την παραγωγή και τον προγραμματισμό της διανομής, καθώς και την κατανομή των πόρων(κατανομή αποθήκευσης, στρατηγικές επιλογής παραγγελιών, επιλογή τρόπου μεταφοράς, στρατηγικής εξυγίανσης). Οι αποφάσεις τακτικής, συχνά χρησιμοποιούν προβλέψεις, βασισμένες σε ανάλυση δεδομένων.

- *Λειτουργικές Αποφάσεις*. Οι λειτουργικές αποφάσεις λαμβάνονται σε καθημερινή βάση ή σε πραγματικό χρόνο και έχουν μικρό πεδίο εφαρμογής. Περιλαμβάνουν την επιλογή της παραγγελίας που θα φύγει από κάποια αποθήκη, καθώς και την μεταφορά και την αποστολή του οχήματος. Οι λειτουργικές αποφάσεις συνήθως βασίζονται σε πολύ λεπτομερή δεδομένα. (βλ. Βιβλιογραφία [5]σελ.18)

Κεφάλαιο 2

Θεωρία χωροθέτησης

2.1 Εφοδιαστικές αλυσίδες με εστίαση στη χωροθέτηση (LOCATION)

Μία από τις πιο σημαντικές πτυχές των εφοδιαστικών αλυσίδων είναι η επιλογή του που θα τοποθετηθούν οι νέες εγκαταστάσεις, όπως οι λιανοπωλητές, οι αποθήκες ή τα εργοστάσια. Αυτές οι στρατηγικές αποφάσεις διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο για το αν τα υλικά θα εισρεύσουν αποτελεσματικά στο σύστημα της διανομής.

Το πρόβλημα της εύρεσης βέλτιστης θέσης για την τοποθέτηση μιας εγκατάστασης εξαρτάται συχνά από τις αποστάσεις μεταξύ των υπόλοιπων εγκαταστάσεων και τις θέσεις αυτών που η ίδια εξυπηρετεί. Οι εν λόγω αποστάσεις, μπορεί να αναφέρονται στο κόστος μεταφοράς. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί στο πρόβλημα της χωροθέτησης μιας αποθήκης μεταξύ των σημείων που βρίσκονται οι πελάτες. Στο πλαίσιο ενός δήμου, οι αποστάσεις θα μπορούσαν να συνδεθούν προς όφελος των κατοίκων. Για παράδειγμα, η χρησιμότητα ενός σταθμού πυρκαγιάς προς τις εγκαταστάσεις που προστατεύει αυξάνεται με την εγγύτητα του σταθμού. Αντιθέτως, κάποιες άλλες εγκαταστάσεις, όπως οι χωματερές ή οι σταθμοί πυρηνικής ενέργειας που είναι δυσάρεστες ή επικίνδυνες, κάθε άλλο παρά προς όφελος των κατοίκων είναι όταν μειώνεται η απόσταση τους από αυτούς.

Όταν μιλάμε για επίλυση ενός προβλήματος εφοδιαστικής αλυσίδας, στην πράξη, πρέπει να ληφθούν υπόψη τα ακόλουθα:

- Ορισμός του προβλήματος
- Προσδιορισμός των περιορισμών
- Επιλογή της κατάλληλης αντικειμενικής συνάρτησης (s)
- Η συλλογή δεδομένων
- Η ανάλυση των δεδομένων (εξόρυξη δεδομένων)
- Βελτιστοποίηση (πραγματική ανάλυση)
- Οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων
- Συζήτηση εάν το πρόβλημα έχει λυθεί ή αν οι φάσεις, πρέπει να εξεταστούν και πάλι.

Συνήθως οι ερευνητές της θεωρίας χωροθέτησης επικεντρώνουν την προσοχή τους στην πραγματική ανάλυση (φάση βελτιστοποίησης) ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Η ιδέα του να τοποθετηθεί μία εγκατάσταση σε μια θέση η οποία είναι κατά μέσο όρο καλή για κάθε πελάτη, οδήγησε στην αντικειμενική συνάρτηση μέσων (που ονομάζεται επίσης αντικειμενική-Weber ή Fermat-Weber).

Η εύρεση μιας τοποθεσίας η οποία είναι και για τον πιο απομακρυσμένο πελάτη όσο το δυνατόν καλύτερη, έφερε την ιδέα της αντικειμενικής συνάρτησης κέντρων. Η ιδέα ότι οι δύο απόψεις είναι πάρα πολύ ακραίες, οδήγησε στην προσέγγιση των κέντρων-μέσων (center-median). Επιπλέον, οι ερευνητές χωρίζονται μεταξύ συνεχών, δικτυακών και διακριτών προβλημάτων χωροθέτησης. Ως εκ τούτου, το κύριο πεδίο των ερευνητών μπορεί να χαρακτηριστεί επιλέγοντας ένα πρόβλημα από τον πίνακα 2.1 με την επιλογή μιας γραμμής και μιας στήλης, ίσως προσθέτοντας και κάποιους επιπλέον περιορισμούς σε αυτά, και στη συνέχεια προχωρούν στις διαδικασίες εξεύρεσης ορθής λύσης.

objective function	decision space		
	continuous	network	discrete
median			
center			
cent-dian			
...			

Πίνακας 2.1(βλ. Βιβλιογραφία [9] σελ.4)

Η σύγχρονη θεωρία χωροθέτησης είναι σήμερα άνω των 90 ετών και η εστίαση των ερευνητών είναι προσανατολισμένη στα προβλήματα. Σε αυτή την κατεύθυνση έχει επιτευχθεί τεράστια πρόοδος σε σχέση με τις πρώτες αναλυτικές προσεγγίσεις. Σήμερα εφαρμόζονται εξελιγμένα εργαλεία από την επιστήμη υπολογιστών, υπολογιστική γεωμετρία και συνδυαστική βελτιστοποίηση. (βλ. Βιβλιογραφία [9]σελ.3,4)

2.2 Προβλήματα Επικάλυψης (Covering Problems)

Σε πολλά προβλήματα χωροθέτησης, η εξυπηρέτηση των πελατών (από τις εγκαταστάσεις που έχουν εκχωρηθεί) εξαρτάται από την απόσταση ανάμεσα στους πελάτες και τις εγκαταστάσεις στις οποίες οι πελάτες έχουν εκχωρηθεί. Έτσι, οδηγούμαστε στην έννοια της επικάλυψης. Με κάθε κόμβο ζήτησης i υπάρχει ένα υποσύνολο N_i από τους υποψήφιους κόμβους εγκατάστασης που μπορούν να εξυπηρετήσουν ή να καλύψουν τη ζήτηση στον κόμβο ζήτησης. Αυτό το σύνολο μπορεί να καθοριστεί και σαν μια δυαδική μεταβλητή α_{ij} που παίρνει την τιμή 1 αν η εγκατάσταση στο υποψήφιο μέρος j μπορεί να καλύψει τη ζήτηση στον υποψήφιο κόμβο i και 0 αλλιώς. Πολλές φορές λέγεται ότι η ζήτηση μπορεί να καλυφθεί αν η απόσταση του κοντινότερου μονοπατιού ανάμεσα στον κόμβο ζήτησης και στην εγκατάσταση είναι μικρότερη ή ίση από την απόσταση κάλυψης. Μια απλή απόσταση κάλυψης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλους τους κόμβους ζήτησης. Εναλλακτικά η απόσταση κάλυψης μπορεί να εξαρτάται είτε από τον κάθε κόμβο ξεχωριστά είτε από την κάθε εγκατάσταση ξεχωριστά.

Το πρόβλημα επικάλυψης είναι να βρεθεί ένα ελάχιστο σύνολο από εγκαταστάσεις , από ένα πεπερασμένο σύνολο από υποψήφιες εγκαταστάσεις, έτσι ώστε κάθε κόμβος ζήτησης να καλύπτεται από μία εγκατάσταση. Στα προβλήματα επικάλυψης, η απόσταση κάλυψης ανάμεσα σε ένα σημείο ζήτησης και την κοντινότερη εγκατάσταση καθορίζεται εξωτερικά. Στο πρόβλημα επικάλυψης συνόλου, γίνεται μια προσπάθεια να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των τοποθεσιών που χρειάζεται να κατασκευασθούν για να καλυφθεί η ζήτηση σε όλους τους κόμβους. Έχει βρεθεί ότι αν καθορίζεται εξωτερικά η απόσταση κάλυψης, τότε ο αριθμός των εγκαταστάσεων που πρέπει να κατασκευαστούν για να εξυπηρετήσουν όλους τους κόμβους είναι πραγματικά πολύ μεγάλος. Επίσης το πρόβλημα επικάλυψης συνόλου δεν λαμβάνει υπόψη του το γεγονός ότι η ζήτηση στους κόμβους διαφέρει. Για να ξεπεραστούν αυτά τα προβλήματα μοντελοποιήθηκε το πρόβλημα μέγιστης επικάλυψης συνόλου. Το πρόβλημα των p-κέντρων είναι μια διαφορετική προσέγγιση για να αποφευχθούν τα προβλήματα που δημιουργούνται από το πρόβλημα επικάλυψης συνόλου. (βλ. Βιβλιογραφία [11] σελ.75)

2.3 Το πρόβλημα των p-κέντρων (p-center problem)

Στο πρόβλημα αυτό ο στόχος είναι πάλι να καλυφθούν όλα τα σημεία ζήτησης. Τώρα όμως αντί να χρησιμοποιείται μια εξωτερικώς καθορισμένη απόσταση κάλυψης και να ζητείται από το μοντέλο να ελαχιστοποιήσει τον αριθμό των εγκαταστάσεων που πρέπει να κατασκευαστούν για να καλύψουν όλα τα σημεία ζήτησης, ζητείται να ελαχιστοποιηθεί η απόσταση κάλυψης έτσι ώστε κάθε κόμβος ζήτησης να καλύπτεται από τη εσωτερικά καθορισμένη απόσταση από μία από τις εγκαταστάσεις. Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα των p-κέντρων, αφού είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης της μέγιστης απόστασης ανάμεσα σε ένα σημείο ζήτησης και την κοντινότερη εγκατάσταση στη ζήτηση. Πρέπει να γίνει διάκριση ανάμεσα στα προβλήματα στα οποία οι εγκαταστάσεις μπορούν να χωροθετηθούν οπουδήποτε μέσα στο δίκτυο όποτε τα προβλήματα ονομάζονται προβλήματα πλήρων κέντρων(absolute center problems) και σε προβλήματα που οι εγκαταστάσεις μπορούν να κατασκευαστούν μόνο στους κόμβους του δικτύου που πρέπει να δημιουργηθούν για να καλύψουν όλη τη ζήτηση είναι πιθανό να υπερβαίνει τον αριθμό των εγκαταστάσεων που υπάρχει η δυνατότητα να κατασκευαστούν. Επιπλέον το πρόβλημα επικάλυψης συνόλου χειρίζεται όλα τα σημεία ζήτησης ταυτόσημα. Δηλαδή είναι το ίδιο σημαντικό για το πρόβλημα επικάλυψης συνόλου να μπορεί να καλύψει ένα πελάτη που να έχει ζήτηση 20 μονάδων και ένα πελάτη που να έχει ζήτηση 100000 μονάδων από ένα προϊόν.
Αυτές οι δύο προϋποθέσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι πρέπει να καθορίζεται ο αριθμός των εγκαταστάσεων που πρέπει να κατασκευαστούν για να μεγιστοποιείται ο αριθμός των σημείων ζήτησης που πρέπει να καλυφθούν. Αυτό ακριβώς είναι το πρόβλημα της μέγιστης επικάλυψης συνόλου. Αν θεωρήσουμε ότι η q_i είναι η ζήτηση στον κόμβο i και p ο αριθμός των εγκαταστάσεων που θα κατασκευασθούν, το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος είναι το ακόλουθο:

$$\min \omega \tag{1}$$

$$\sum_j x_{ij} = 1, \qquad \forall i \tag{2}$$

$$\sum_j y_j = p_{\max}, \tag{3}$$

$$\sum c_{ij} x_{ij} \le \omega, \quad \forall i \tag{4}$$

$$x_{ij} \le y_j, \qquad \forall i, j \tag{5}$$

$$x_{ij} \ge 0, \tag{6}$$

όπου

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{εάν η εγκατάσταση είναι τοποθετημενη στο } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{7}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιεί την μέγιστη απόσταση ω ανάμεσα σε ένα κόμβο ζήτησης και στην κοντινότερη εγκατάσταση στον κόμβο. Ο περιορισμός (2) καθορίζει ότι όλη η ζήτηση στον κόμβο i μπορεί να ανατεθεί σε κάποια εγκατάσταση στον κόμβο j και αυτό ισχύει για όλους τους κόμβους. Ο περιορισμός (3) δείχνει ότι πρέπει να χωροθετηθούν p εγκαταστάσεις. Ο περιορισμός (4) καθορίζει ότι η μέγιστη απόσταση ανάμεσα σε ένα κόμβο ζήτησης και την κοντινότερη εγκατάσταση στον συγκεκριμένο κόμβο, (ω), πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την απόσταση ανάμεσα σε κάθε κόμβο ζήτησης i και στην εγκατάσταση j στην οποία θα ανατεθεί. Ο περιορισμός (5) καθορίζει ότι κάποιος πελάτης i δεν μπορεί να ανατεθεί σε ένα κόμβο j εκτός και αν υπάρχει μια εγκατάσταση στον κόμβο j.(βλ. Βιβλιογραφία [11]σελ.78-79)

2.4 Το πρόβλημα των p-μέσων (p-median problem).

Ως αυτό το σημείο υποθέταμε ότι ο αν ένας πελάτης βρίσκεται μέσα στην απόσταση κάλυψης από μια εγκατάσταση θα εξυπηρετηθεί αλλιώς δεν εξυπηρετείται. Σε πολλές όμως περιπτώσεις, τα κέρδη που αντιστοιχούν σε ένα ζευγάρι κόμβου ζήτησης και εγκατάστασης μειώνονται(αυξάνονται) βαθμιαία με την απόσταση ανάμεσα στον κόμβο ζήτησης και την κοντινότερη εγκατάσταση. Ο στόχος των προβλημάτων p-μέσων είναι να βρεθεί η τοποθεσία των p εγκαταστάσεων στο δίκτυο έτσι ώστε το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιείται. Δοθέντος ενός συνόλου S από m πιθανές τοποθεσίες για να δημιουργηθούν Pmax εγκαταστάσεις και ένα σύνολο U από τοποθεσίες για n πελάτες, το πρόβλημα p-μέσων είναι να τοποθετηθούν ταυτόχρονα Pmax εγκαταστάσεις έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς από τους πελάτες στις εγκαταστάσεις όπου ο κάθε πελάτης εξυπηρετείται από την κοντινότερη εγκατάσταση.

Η μορφοποίηση του προβλήματος είναι η ακόλουθη:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in U} q_j c_{ij} x_{ij} \tag{8}$$

υπό

$$\sum_j x_{ij} = 1, \qquad \forall i \tag{9}$$

$$\sum_j y_j = p_{\max}, \tag{10}$$

$$x_{ij} \le y_j, \qquad \forall i, j \tag{11}$$

όπου

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν ο κόμβος ζήτησης } i \text{ εξυπηρετείται από την εγκατάσταση } j, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{12}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{εάν η εγκατάσταση τοποθετηθεί στο } j, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{13}$$

Cij είναι η απόσταση ανάμεσα στους κόμβους και qi είναι η ζήτηση στον κόμβο i. Η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιεί την συνολική ζήτηση ανάμεσα σε κάθε κόμβο ζήτησης και την κοντινότερη εγκατάσταση. Ο περιορισμός (9) απαιτεί κάθε κόμβος ζήτησης I αν ανατεθεί σε μία μόνο εγκατάσταση j. Ο περιορισμός(10) καθορίζει ότι ακριβώς Pmax εγκαταστάσεις θα χωροθετηθούν. (βλ. Βιβλιογραφία [11] σελ.80-81)

Παρακάτω μπορούμε να δούμε τον χάρτη μιας πόλης και τα σημεία στα οποία υπάρχουν οι i εγκαταστάσεις-πελάτες.

Εδώ για παράδειγμα το πρόβλημα έχει i=1...n με n=100 εγκαταστάσεις-πελάτες. Από αυτές τις n εγκαταστάσεις πρέπει να επιλεχθούν p εγκαταστάσεις για να εξυπηρετούν τις υπόλοιπες.

Λύνοντας το πρόβλημα p-μέσων και με P=10 βλέπουμε παρακάτω σχηματικά τις 10 προτεινόμενες εγκαταστάσεις-medians που πρότεινε ο αλγόριθμος.

2.5 Capacitaded πρόβλημα p-μέσων (p-median)

Το Capacitated πρόβλημα p-μέσων (p-median) (CPMP), επιδιώκει να λύσει το πρόβλημα της βέλτιστης χωροθέτησης, p εγκαταστάσεων, λαμβάνοντας υπόψη τις αποστάσεις και τις χωρητικότητες της κάθε εγκατάστασης για την υπηρεσία που θα παρέχεται από κάθε p μέσο.

Εδώ μπορούμε να δούμε δύο τρόπους με τους οποίους μπορεί να λυθεί το CPMP. Ο πρώτος είναι ο ακόλουθος :

$$(P) \quad u(P) = \min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij}, \tag{14}$$

υπό

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \qquad i \in N \tag{15}$$

$$\sum_{j \in N} x_{jj} = p, \tag{16}$$

$$\sum q_{ij} x_{ij} \le Q x_{jj}, \quad j \in N, \tag{17}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in N, \; j \in N, \tag{18}$$

όπου: N = (1... n) είναι ο αριθμός των πελατών-εγκαταστάσεων, καθώς και πιθανών μέσων (medians), όπου p ο αριθμός των μέσων που πρέπει να τοποθετηθούν, qi είναι η ζήτηση του κάθε φορέα-πελάτη και Q η συνολική χωρητικότητα του κάθε πιθανού μέσου.

[dij]n×n είναι ο πίνακας που περιέχει τις αποστάσεις όλων των εγκαταστάσεων μεταξύ τους.
[xij]n×n είναι ο πίνακας της κατανομής των εγκαταστάσεων, με xij=1 εάν η εγκατάσταση i έχει κατανεμηθεί στο μέσο j και xij=0, αλλιώς. xjj=1 εάν η εγκατάσταση j είναι επιλεγμένη ως μέσο και xjj=0, αλλιώς.
Οι περιορισμοί (15) και (16) επιβάλλουν ότι κάθε πελάτης είναι τοποθετημένος σε έναν μόνο μέσο-median. Ο περιορισμός (17) επιβάλλει ότι η συνολική μέση χωρητικότητα πρέπει να είναι σεβαστή, και ο (18) προβλέπει ότι όλοι οι όροι θα είναι ακέραιοι.

Το πρόβλημα μπορεί επίσης να μοντελοποιηθεί με αυτόν τον τρόπο:

$$(SPP) \quad \mathrm{u(SPP)}=\min \sum_{k=1}^{m} c_k x_k$$

$$\upsilon\pi\acute{o}$$

$$\sum_{k=1}^{m} A_k x_k = 1 \qquad (19)$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_k = p,$$

$$x_k \in \{0,1\}, \qquad (20)$$

όπου S= {S_1,S_2...S_m}, είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του N. Ο πίνακας A=[a_{ik}]nxm, είναι ένας πίνακας με

$$a_{ik} = \left\{ \begin{matrix} 1, & \alpha\nu\ i \in S_k, \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{matrix} \right\}$$

και ικανοποιεί την

$$\sum_{i \in N} q_i a_{ik} \le Q$$

και

$$c_k = \min_{i \in S_k^1} \left(\sum_{j \in S_k^1} d_{ij} \right)$$

έχοντας υπόψη ότι

$$S_k^1 = \{ i \in S_k \mid a_{ik} = 1 \}$$

Για κάθε υποομάδα S_k^1, η κάθε εγκατάσταση αποφασίζει αν θα υπολογιστεί το Ck κόστος , και έτσι οι στήλες του SPP εμμέσως εξετάζουν τον περιορισμό (17). Οι περιορισμοί (15) και (16) μετασχηματίζονται, αντίστοιχα, σε (19) και (20).Αν S είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του N, τότε η διατύπωση αυτή του προβλήματος μπορεί να δώσει τη βέλτιστη λύση για την CPMP. Ωστόσο, ο αριθμός των υποσυνόλων μπορεί να είναι τεράστιος, και αντί για ολόκληρο μπορεί να θεωρηθεί ένα μερικό σύνολο. (βλ. Βιβλιογραφία [5] σελ.204-208)

2.6 Άλλα μοντέλα επίλυσης του προβλήματος των p-μέσων

Το BEAMR μοντέλο επίλυσης του προβλήματος p-μέσων (p-median)

Αυτή η νέα μέθοδος επίλυσης προβλημάτων p-μέσων ονομάζεται Both Exact/Approximate Model Representation (BEAMR). Η BEAMR μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά συντομότερη διατύπωση για μια εφαρμογή του p-median προβλήματος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση είτε με ακριβή λύση είτε με οριοθετημένη κοντά στην βέλτιστη λύση. Το αποτέλεσμα της προσέγγισης αυτής θα είναι να αυξηθεί ουσιαστικά το μέγεθος των προβλημάτων p-μέσων που είναι επιλύσιμα.

Ας θυμηθούμε την κλασική μοντελοποίηση (ReVelle και Swain) ενός προβλήματος p-μέσων.

Τα i, j χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν κόμβους από 1,2,...n.
Το d_{ij} είναι η συντομότερη διαδρομή από το i στο j.
Το α_i είναι η ζήτηση του i.

$$x_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{εάν ο κόμβος ζήτησης } i \text{ εξυπηρετείται από την εγκατάσταση } j, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{array} \right\}$$

$$x_{jj} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{εάν η εγκατάσταση τοποθετηθεί στο } j \text{ και ζήτηση του μπορεί να ανατεθεί στο } j, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{array} \right\}$$

$$\min \; Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i d_{ij} x_{ij}, \qquad (21)$$

υπό

$$\sum_j x_{ij} = 1, \quad \forall i \in 1 \ldots n \qquad (22)$$

$$\sum_j y_{jj} = p \max \qquad (23)$$

$$x_{ij} \leq y_{jj} \quad \forall i, j \in 1 \ldots n \quad i \neq j \qquad (24)$$

$$x_{ij} = 0,1 \quad \forall i, j \in 1 \ldots n \qquad (25)$$

Ας δούμε το μοντέλο BEAMR.

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι κάθε ανταγωνιστική λύση (δηλαδή ακριβής η κοντά στην βέλτιστη λύση) σε ένα δεδομένο πρόβλημα p-μέσων περιέχει ένα κόμβο ζήτησης g που έχει ανατεθεί σε μια εγκατάσταση που δεν είναι πιο μακριά από την hi πλησιέστερη εγκατάσταση του. Αν το γνωρίζαμε αυτό για συγκεκριμένους κόμβους, θα μπορούσαμε να τροποποιήσουμε το μοντέλο πριν από την επίλυσή του, σύμφωνα με την οποία οι μεταβλητές που συνδέονται με την εκχώρηση του κόμβου g θα εξαλείφονται αν αυτές περιλαμβάνουν μια ανάθεση πέραν της hi πλησιέστερης εγκατάστασης από το g. Τώρα, δεν ξέρουμε σε γενικές γραμμές, τίποτα με βεβαιότητα. Αλλά μπορούμε να εξετάσουμε τη δυνατότητα αυτή, θεωρώντας το ακόλουθο μοντέλο κατασκευής:

$$\min\ Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in H_i}^{n} a_i d_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} a_i d_{is_i} f_i, \qquad (26)$$

υπό

$$\sum_{j \in H_i} x_{ij} + f_i = 1, \quad \forall i \in 1 \ldots n \qquad (27)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jj} = p \max \qquad (28)$$

$$x_{ij} \le y_{jj} \quad \forall i \in 1 \ldots n, j \in H_i \quad i \ne j \qquad (29)$$

$$x_{ij} = 0,1 \quad \forall i \in 1 \ldots n, j \in H_i \qquad (30)$$

Οι πρόσθετες πληροφορίες ορίζονται κατωτέρω:
Hi το σύνολο των hi πλησιέστερων τοποθεσιών hi με ζήτηση i,
si ο δείκτης της hi + 1 πλησιέστερης τοποθεσίας με ζήτηση i,

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{εάν η } i \text{ πρέπει να ανατεθεί σε εγκατάσταση πιο μακρινή από την } h_i \text{ κοντινότερη,} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Βασικά, κάθε μεταβλητή εκχώρησης που αναφέρεται σε μια εγκατάσταση πέρα από την hi πλησιέστερη εγκατάσταση για συγκεκριμένη ζήτηση i, εξαλείφεται και μαζί της και ο σχετικός περιορισμός (29).Στη θέση της μπαίνει μια μεταβλητή, fi, που αντιπροσωπεύει την περίπτωση που κόμβος ζήτησης i δεν εξυπηρετείται από μια εγκατάσταση που είναι στο πλαίσιο του συνόλου των hi πλησιέστερων εγκαταστάσεων στο i. Η απόσταση της αυτή είναι ίση με την απόσταση του κόμβου ζήτησης i με την hi + 1 πλησιέστερη εγκατάσταση. Αυτό που επιτρέπει αυτό το μοντέλο είναι η εκχώρηση κάποιου κόμβου ακόμα και αν είναι εκτός του συνόλου των πλησιέστερων εγκαταστάσεων hi από τον κόμβο i χωρίς περιορισμούς. Τίποτα δεν περιορίζει μια τέτοια εκχώρηση (π.χ. fi= 1), εκτός από μια πιο κοντινή εγκατάσταση από αυτήν(δηλ. xij = 1 όπου j<hi). Η βασική ιδέα είναι ότι η τοποθέτηση γίνεται είτε σε έναν από τους πλησιέστερους hi είτε με το κόστος να ανατεθεί στο hi + 1 , ανεξάρτητα από το κατά πόσο το hi + 1 προορίζεται για εγκατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι το κόστος της ανάθεσης για τις hi πλησιέστερες εγκαταστάσεις είναι ακριβές ή υπολογίζεται χρησιμοποιώντας ένα κάτω φράγμα για οποιαδήποτε εκχώρηση πέρα από την hi πλησιέστερη μονάδα. Ουσιαστικά, η βέλτιστη λύση για το

παραπάνω μοντέλο θα αποφέρει ένα έγκυρο κάτω φράγμα για κάθε εφικτή (ή βέλτιστη) λύση του p-median προβλήματος, ανεξάρτητα από τις τιμές hi.

Το παραπάνω μοντέλο δεν προσκομίσει απλώς ισχύοντα όρια για κάθε βέλτιστη λύση για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, αλλά θα μπορούσε να είναι η βέλτιστη λύση επίσης. Για να θωρηθεί το BEAMR ένα πολύτιμο μοντέλο είναι απαραίτητο να έχουμε μια λειτουργική μεθοδολογία για την εκτίμηση καλών τιμών hi, αρκετά μικρών για να κρατήσει το αποτέλεσμα του μοντέλου μικρό αλλά και πολλών σε αριθμό ώστε η λύση αυτή είναι ακριβής λύση p-μέσων. (βλ. Βιβλιογραφία [4])

Αλγόριθμος:

Διαδικασία Α:

Βήμα 1:
DefineG=μέγιστο αποδεκτό περιθώριο σύγκλισης
Define Δ=το μέγεθος προσαύξησης για την τροποποίηση των hi τιμών
Ξεκινήστε με μία πρώτη εκτίμηση των hi τιμών για κάθε ζήτηση i
Βήμα 2:
λύσε το BEAMR χρησιμοποιώντας λογισμικό LP/BB όπου οι hi όπως έχουν προσωρινά οριστεί δίνουν λύση στην αντικειμενική Z.
Define Γ={i | fi> 0} για αυτή τη λύση BEAMR
Βήμα 3α:
if Γ≠∅ τότε η αντικειμενική Z αποτελεί ένα έγκυρο κάτω φράγμα μιας βέλτιστης λύσης p-median.
Define di= η απόσταση του i από την κοντινότερη ανοιχτή εγκατάσταση στην τρέχουσα BEAMR λύση και υπολόγισε την πραγματική weighted distance για αυτήν την λύση,

$$WD = \hat{Z} + \sum_{i \in \Gamma} a_i (\overline{d}_i - d_{is_i}).$$

If WD-Z/Z>G τότε η λύση δεν συγκλίνει σε μία αποδεκτή και τότε πήγαινε στο βήμα 4; αλλιώς σταμάτα αφού η λύση είναι μέσα σε ένα μέγιστο πεδίο και θεωρείται αποδεκτή για την βέλτιστη λύση του p-median.
Βήμα 3β:
If Γ=∅ τότε σταμάτα, η τρέχουσα λύση είναι μία βέλτιστη p-median λύση.
Βήμα 4:
Αύξησε το hi κατά Δ για κάθε i∈Γ και γύρνα στο βήμα 2.

Διαδικασία Β:

Βήμα 1:
Define Δ= το μέγεθος προσαύξησης για την τροποποίηση των hi τιμών
Ξεκινήστε με μία πρώτη εκτίμηση των hi τιμών για κάθε ζήτηση i
λύσε το BEAMR χρησιμοποιώντας κάποια ευρετική μέθοδο όπου hi είναι οι τιμές που έχουν προσωρινά οριστεί. Κατά τη επίλυση της ευρετικής μεθόδου , οι αναθέσεις των i σε θέσεις μακρινότερες από την hi μακρινότερη, έχουν μία καθορισμένη weighted distance, ai*disi.
Για τη λύση που προκύπτει
Define Γ={i | fi> 0} .Γ είναι μία ομάδα από ζητήσεις i όπου κάθε ζήτηση i εξυπηρετείται από εγκατάσταση μακρινότερη από τις hi κοντινότερες εγκαταστάσεις.
Βήμα 3α:
Αν Γ≠∅ τότε αύξησε το hi κατά Δ για κάθε i∈Γ και γύρνα στο βήμα 2.
Βήμα 3β:
If Γ=∅ τότε προχώρα στην διαδικασία Α έχοντας τιμές hi υπολογισμένες μέσω κάποιας ευρετικής μεθόδου.

Το πρόβλημα p-median με θετικά και αρνητικά βάρη και ένας αλγόριθμος επίλυσής του.

Έστω ότι μας δίνεται ένα γράφημα G = (V, E). Στο κλασικό πρόβλημα p-μέσων θέλουμε να βρούμε ένα σύνολο X που να περιέχει p σημεία στο G τέτοια ώστε το άθροισμα των αποστάσεων από το X προς όλες τις κορυφές του V είναι το ελάχιστο δυνατό. Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου κάθε κορυφή έχει είτε θετικό είτε αρνητικό βάρος. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε δύο διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις: το ελάχιστο άθροισμα των βαρυτικών αποστάσεων του X από όλες τις κορυφές και το άθροισμα των ελάχιστων βαρυτικών αποστάσεων. Συνήθως σε κάθε σημείο ζήτησης vi αποδίδεται ένα wi βάρος, οπότε το πρόβλημα ζητά το ελάχιστο άθροισμα βαρυτικών αποστάσεων, δηλαδή:

$$\min f(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i d(X, v_i),$$

όπου X είναι το σύνολο των εγκαταστάσεων και το d (X, vi) ορίζεται ως η μικρότερη απόσταση του vi από την εγκατάσταση x ∈ X. (βλ. Βιβλιογραφία [2])

Τα προβλήματα p-μέσων με θετικά/αρνητικά βάρη λύνονται με δύο διαφορετικά μοντέλα:

Άθροισμα ελάχιστων βαρυτικών αποστάσεων *(minimum weighted distances):*

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \min_{1 \le j \le p} (w_i d(v_i, x_j)) \qquad \text{(P1)}$$

Ελάχιστο άθροισμα βαρυτικών αποστάσεων (*weighted minimun distances):*

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \min_{1 \le j \le p} d(v_i, x_j) \qquad \text{(P2)}$$

Ο προτεινόμενος γενετικός αλγόριθμος.

Εδώ παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο για το πρόβλημα p-μέσων με θετικά και αρνητικά βάρη. Αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί στα δύο μοντέλα, (P 1) και (P2).

Γενετικοί αλγόριθμοι (GA) είναι ευρετικές μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Ξεκινάνε βρίσκοντας μια εφικτή λύση και επιδιώκουν τη βελτίωσή της. Οι γενετικοί αλγόριθμοι εφευρέθηκαν από τον John Holland στα 196Ο, αλλά έχουν γίνει δημοφιλείς πιο πρόσφατα.
Στου γενετικούς αλγορίθμους κάθε χρωμόσωμα αντιστοιχεί σε μια λύση για το πρόβλημα. Το μέτρο της ποιότητας μιας λύσης καλείται fitness. Μια γενετική φορέας που ονομάζεται crossover χρησιμοποιείται για την παραγωγή νέων χρωμοσωμάτων από ένα ζεύγος επιλεγμένων χρωμοσωμάτων. Οι μεταλλάξεις χρησιμοποιούνται για την προώθηση της γενετικής ποικιλομορφίας.

Encoding: Σε αυτήν την περίπτωση κάθε χρωμόσωμα έχει ακριβώς p γονίδια όπου κάθε γονίδιο αντιστοιχεί στον δείκτη μιας εγκατάστασης. Για παράδειγμα, το (7, 5, 2, 10, 14) είναι ένα χρωμόσωμα αντιστοιχεί σε μια εφικτή λύση για ένα πρόβλημα με 5 μέσους όπου τα σημεία 2, 5, 7,10 και 14 έχουν επιλεγεί ως τοποθεσίες των εγκαταστάσεων.

Αξιολόγηση του fitness: Το fitness του χρωμοσώματος δίνεται από την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της αντίστοιχης λύσης του συγκεκριμένου προβλήματος p-μέσων. Για τον υπολογισμό της τιμής αυτής των μοντέλων (P1) και (P2), πρέπει να σημειωθεί ότι όταν ορισμένα σημεία έχουν αρνητικά βάρη, ο τρόπος

ανάθεσης στις εγκαταστάσεις των σημείων ζήτησης διαφέρει. Στο μοντέλο (P 1) οι κορυφές με μη αρνητικά βάρη, ανατίθενται στην πλησιέστερη εγκατάσταση και οι κορυφές με τα αρνητικά βάρη ανατίθενται στην πλέον απομακρυσμένη εγκατάσταση. Στο μοντέλο (P2) οι κορυφές ανατίθενται στην πλησιέστερη εγκατάσταση είτε έχουν θετικά είτε αρνητικά βάρη.

Φάση επιλογής: Για να δημιουργήσουμε νέα μέλη, επιλέγουμε τους γονείς τυχαία από τον πληθυσμό. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες μέθοδοι, όπως η επιλογή των μελών με το καλύτερο fitness ως γονείς. Ωστόσο, σύμφωνα με υπολογιστικά πειράματα αυτή η μέθοδος δεν απέδωσε καλύτερα αποτελέσματα

Παραγωγή νέων μελών: Σε έναν Γ.Α. τα χρωμοσώματα δύο γονέων συγχωνεύονται για να δημιουργήσουν νέα μέλη. Συνήθως με τη χρήση ενός crossover τα χρωμοσώματα των γονέων χωρίζεται σε δύο τμήμα και στη συνέχεια συνδυάζονται για να δημιουργήσουν δύο νέα μέλη. Αντί αυτής της παραδοσιακής λειτουργίας crossover χρησιμοποιούμε μια άλλη ευρετική μέθοδο για να δημιουργήσουμε ένα νέο μέλος. Επιλέγουμε τα γονίδια που είναι παρόντα και στους δύο γονείς, ως μέρος των γονιδίων του νέου μέλους. Τότε τα εναπομείναντα γονίδια στα χρωμοσώματα των γονέων, προστίθεται ένα ένα στα γονίδια του νέου μέλους έως ότου ο αριθμός των γονιδίων να γίνει p. Για να αυξάνεται ο αριθμός των γονιδίων κατά ένα κάθε φορά προσθέτουμε το γονίδιο το οποίο επιφέρει την μικρότερη αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτή η μέθοδος παραγωγής μελών αυξάνει την πολυπλοκότητα του χρόνου, αλλά βελτιώνει την ποιότητα των παραγόμενων λύσεων.

Μετάλλαξη: Η μετάλλαξη βοηθά το GA να ξεφύγει από το τοπικό βέλτιστο. Για να εκτελέσουμε μια μετάλλαξη, μετά από τη δημιουργία ενός νέου μέλους, θα αντικαταστήσουμε ένα γονίδιο σε αυτό το νέο μέλος με ένα γονίδιο το οποίο δεν ανήκει στο νέο μέλος, έτσι ώστε να έχουμε βελτίωση στο fitness. Αυτό είναι ένα βήμα εναλλαγής της ευρετικής μεθόδου. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου δεν μπορεί να βρεθεί καλύτερη λύση. Για να εκτελεστεί αυτή η λειτουργία για τα μοντέλα (P 1) και (P2) θα χρησιμοποιεί ένα βήμα γρήγορης εναλλαγής της ευρετικής μεθόδου η οποία είναι προσαρμοσμένη στον αλγόριθμο για το πρόβλημα p-μέσων με θετικά / αρνητικά βάρη.

*Αντικατάσταση:*Μετά από τη δημιουργία ενός νέου μέλους, πρέπει να προσαρμόσουμε αυτό το μέλος στον πληθυσμό. Αν το νέο μέλος δεν είναι πανομοιότυπο με κάποιο υπάρχον μέλος και το fitness του είναι καλύτερο από ό, τι του χειρότερου του πληθυσμού, τότε το χειρότερο μέλος αντικαθίσταται από το νέο.

Κατάσταση τερματισμού: Ο κανόνας τερματισμού αναφέρεται στον αριθμό των διαδοχικών προσεγγίσεων, στο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων μετά την τελευταία βελτίωση, ή ένα μέγιστο χρόνο (CPU). Ο αλγόριθμος μας τερματίζεται όταν γίνουν n + p επαναλήψεις μετά την τελευταία βελτίωση και η καλύτερη λύση δεν έχει αλλάξει.

Αλγόριθμος GA p-median:

Αρχικά:
Δημιουργήστε ένα αρχικό πληθυσμό P με μέγεθος n+p
Βρείτε το καλύτερο μέλος και την τιμή του fitness του, fbest και το χειρότερο μέλος και την τιμή του fitness του, fworst στο P .
J είναι το σύνολο όλων των γονιδίων.
Counter επαναλήψεων: r: = 0, rbest: ¼=0.

Βήμα επανάληψης:
While r-rbest≤ n+p do:
1.r=r+1
2.Εδώ επέλεξε δύο τυχαία μέλη x,y από τα p και τα αντίστοιχα γονίδια τους Jx, Jy.
3.Γέννησε ένα νέο μέλος z:
a)Set Jz=Jx∩Jy και υπολόγισε την τιμή fitness του Jz
b)βρες το γονίδιο j ∈(Jx∪Jz) που αν το προσθέσουμε στο Jz θα έχουμε την μεγαλύτερη βελτίωση στο fitness του Jz.
c) If |Jz| ≤p πήγαινε στο βήμα 3b
4.Επέλεξε γονίδια από τα Jz και J \Jz τα οποία αν τα ανταλλάξουμε έχουμε ως αποτέλεσμα την καλύτερη βελτίωση του fitness του Jz.
5. Αντάλλαξε τα δύο επιλεγμένα γονίδια και υπολόγισε την τιμή του fitness του Jz.
6.Αν αυτό το μέλος που παρήχθη δεν είναι μέσα στον πληθυσμό και fcur < fworst τότε:
a) αντικατέστησε το χειρότερο μέλος με το παραγόμενο μέλος
b) ανανέωσε το χειρότερο μέλος του πληθυσμού και την τιμή του fitness του fcur
c)αλλιώς αν fcur < fbest, τότε fbest = fcur και rbest = r.

Το πρόβλημα pk-μέσων (pk-median)

Τα Uncapacitated Dynamic Location Models (UDLM του) έχουν ως στόχο να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα της ικανοποίησης των αναγκών των πελατών δυναμικά στο χρόνο από εγκαταστάσεις uncpacitated, με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους για ένα ορισμένο χρονικό ορίζοντα σχεδιασμού. Αυτό το κόστος διαφέρει από το ένα μοντέλο στο άλλο, αλλά γενικά η συνάρτηση κόστους περιλαμβάνει ένα συνδυασμό εγκαταστάσεων, μετεγκατάστασης, συντήρησης και κόστους μεταφοράς.

Στο πρόβλημα pk-μέσων οι πελάτες θα πρέπει να παρέχονται από Pk εγκαταστάσεις σε k περίοδο, όπου k=1,2...K, με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους εγκατάστασης / μετεγκατάστασης και του κόστους μεταφοράς. Η αντίστοιχη αντικειμενική συνάρτηση περιλαμβάνει την εγκατάσταση, τη μετεγκατάσταση και το κόστος μεταφοράς, και σε ποιές από τις περιόδους πρέπει να υπάρχει ένας μεταβλητός αλλά προκαθορισμένος αριθμός εγκαταστάσεων στην λύση (Pk εγκαταστάσεις στην περίοδο k).

Μαθηματική διατύπωση του DLP-Pk.
Στο DLP-Pk οι πελάτες πρέπει να εφοδιάζονται από Pk σε περίοδο k, k=1...,K.

$$\min Z = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c_{ijk}x_{ijk} + \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} f_{jk}y_{jk}, \qquad (31)$$

υπό

$$\sum_{j\in J} x_{ijk} = 1, \quad i\in I,\ k\in K \qquad (32)$$

$$\sum_{j\in J} x_{ijk} = p_k \ \ k\in K \qquad (33)$$

$$x_{ijk} \le y_{jjk} \qquad i\in I, j\in J, k\in K \qquad i\ne j \qquad (34)$$

$$y_{jk} - x_{jjk} + x_{jj(k-1)} \ge 0, j\in J, k\in K \qquad (35)$$

$$x_{ij}, y_{jk} = 0,1 \quad i\in I, j\in J, k\in K \qquad (36)$$

Όπου
J = { j | j=1,...,M}, σύνολο των πιθανών τοποθεσιών για εγκαταστάσεις
I = { i | i=1,...,N}, σύνολο πελατών
K={ k | k=1,...,K}, σύνολο περιόδων
f_{jk}= κόστος τοποθέτησης της εγκατάστασης j σε περίοδο k
c_{ijk}= κόστος μεταφορών για τον εφοδιασμό του πελάτη i από την εγκατάσταση j σε περίοδο k
Pk = σύνολο των εγκαταστάσεων που λειτουργούν σε περίοδο k

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{εάν ο πελάτης } i \text{ εφοδιάζεται από μία εγκατάσταση } j \text{ σε περίοδο } k, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$y_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{εάν η εγκατάσταση } j \in J \text{ ανοίγει μέσα στην περίοδο } k, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στο μοντέλο αυτό, η ζήτηση της κάθε περιόδου k πρέπει να είναι ικανοποιείται απόλυτα, εντός της προθεσμίας (περιορισμός (32)). Ο περιορισμός (33) περιορίζει τον αριθμό των εγκαταστάσεων που λειτουργούν σε μια περίοδο έως και Pk. Ο περιορισμός (34) εξασφαλίζει ότι σε μια περίοδο k ένας πελάτης μπορεί να εφοδιαστεί από μόνο μία εγκατάσταση συμπεριλαμβανομένη στην εν λόγω περίοδο. Ο περιορισμός (35) καθιερώθηκε για να επιτραπεί η «γραμμικοποίηση» της αντικειμενικής συνάρτησης της αρχικής σύνθεσης των DLP-Pk. Οι εγκαταστάσεις που έχουν εγκατασταθεί στην περίοδο 1 έχουν, ως κόστος εγκατάστασης, το ίδιο με το στατικό μοντέλο. Για k = 2. . . . . K, το κόστος μετεγκατάστασης, υπολογίζεται όταν ανοίγει μια εγκατάσταση. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το $x_{jjk} = 1$ σημαίνει ότι μια εγκατάσταση σε j λειτουργεί σε μια περίοδο k (ανεξάρτητα του αν είχε ανοίξει στην εν λόγω περίοδο), ενώ $y_{jk} = 1$ σημαίνει ότι μια νέα εγκατάσταση ανοίγει στο σημείο j στην περίοδο k.

Ένας ευρετικός αλγόριθμος για το DLP-Pk. Στον αλγόριθμο που αναφέρεται παρακάτω πρέπει να εξασφαλιστούν τα κατώτατα φράγματα χρησιμοποιώντας τις DLP λ1 και DLPλ2. Για ευκολία, η περιγραφή του αλγορίθμου βασίζεται στο DLPλ1. Ο αλγόριθμος αλληλεπιδρά μεταξύ δύο φάσεων, μέχρι να φτάσουμε σε σημείο που να επιτευχθεί κάποιος κανόνας διακοπής σε οποιαδήποτε από τις 2 φάσεις.

Η πρώτη φάση αποτελείται από τον κλασικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης, η οποίος μεγιστοποιεί τη DLPλ1 ή DLPλ2. Στη δεύτερη φάση αποκτούμε πρωταρχικές εφικτές λύσεις για DLP-Pk. Σε αυτή τη φάση έχουμε ένα νέο άνω φράγμα το οποία περνάει πάλι στην πρώτη φάση.

Η δεύτερη φάση αποτελείται στην πραγματικότητα από 2 διαδικασίες, μια απλή και μία πιο εξεζητημένη. Η πιο εξεζητημένη διαδικασία ενεργοποιείται κάθε φορά που δεν είναι δυνατόν να βελτιωθεί το άνω όριο μετά από ένα προκαθορισμένο αριθμό προσπαθειών. (βλ. Βιβλιογραφία [1])

Βήματα του αλγορίθμου:

Φάση Ι
Το upflag είναι ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός των συνεχόμενων αποτυχιών στην προσπάθεια να βελτιωθεί το κατώτερο όριο. Flag είναι ο μετρητής που δείχνει ποιος είναι ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός των συνεχόμενων αποτυχιών στην προσπάθεια να βελτιωθεί το προηγούμενο όριο και flagi ο μετρητής που επιλέγει να ενεργοποιηθεί η πρωταρχική εφικτή διαδικασία.

Αρχικοποίηση:
Z^U= + ∞, Z^L= - ∞, l=0
Sik^0, Tik^0, Uijk^0 είναι οι αρχικοί πολλαπλασιαστές lagrange
Flag=0, upflag=20, flagi=0

Βήμα 1:
l=l+1
Solve DLPλ1;
Obtain Zλ1^U(κατώτατο όριο)

Βήμα 2:
Σύγκρινε:
If Zλ1^L>Z^L τότε

Z^L = Zλ1^L; flag=0; Go to φάση II(1);
Αλλιώς flag = flag+1

Βήμα 3:
If flag ≥ upflag τότε
flagi= flagi+1;flag=0;
If flagi>2 go to φάση II(2);
αλλιώς go to φάση II(1);
αλλιώς, συνέχισε.

Βήμα 4:
Κανόνας διακοπής. Go to βήμα 1 ή Τέλος
Φάση II: Let Xijk^1* be το βέλτιστο Xijk σύμφωνα με το DLPλ1, ∀i∈I, j∈J, k∈K
Φάση II(1):feasible primar procedure 1:FEASI1

Βήμα 5:
Άνοιγμα νέων εγκαταστάσεων:
Let Yj1=Xjj1^1* ∀j∈J
Yjk=Xjjk^1* - Xjj(k-1)^1* ∀j∈J, k∈K, k≠1
Εφοδιασμός πελατών:
Let Eik={j \| Xijk^1* =1} ;
Set Xijk=1 αν το j αντιστοιχεί στο min {Cijk \| j∈Eik};
Και Xijk=0, αλλιώς;
Z^f είναι το νέο ανώτατο όριο σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς

Βήμα 6:
Update Z^U
If Z^f<Z^U τότε Z^U=Z^f
Αλλιώς συνέχισε, go to βήμα 3

ΦΑΣΗ ΙΙ
Let J(pk)={j \| Xjjk^1* =1}; όταν προσπαθεί να αντικαταστήσει τις εγκαταστάσεις του συνόλου J(pk), let Zj^f είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και περιλαμβάνει ένα νέο j στο J(pk).

Αρχικοποίηση:
k=1;bip=0;
Βήμα 5α:
∀j∈J(pk) και για ∀j+ ∈ [J-J(pk)] υπολόγισε Zj+^f (ανώτατο όριο του DLP-pk)
με το j+ ∈ [J-J(pk)] να αντικαθιστά το j∈J(pk) σε περίοδο k.
If Zj+^f < Z^U τότε Z^U=Zj+^f
J(pk)=J(pk) ∪{ j+}-{j};
Make bip=1
Go to βήμα 6α

Βήμα 6α:
If bip=1 τότε bip=0 και go to βήμα 4
Αλλιώς make k=k+1;
If k<K go to βήμα 4
Αλλιώς go to βήμα 5α

Κεφάλαιο 3

Το προς επίλυση πρόβλημα

3.1 Περιγραφή του προβλήματος που θα επιλυθεί

Τα προβλήματα χωροθέτησης (location) και συγκεκριμένα τα προβλήματα p-μέσων, p-κέντρων όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενο κεφάλαιο είναι από τα πιο γνωστά προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Με απλά λόγια στόχος είναι ο καθορισμός ενός συνόλου εγκαταστάσεων θεωρώντας κάποιο ελάχιστο κόστος, οι οποίες θα μπορούν να ικανοποιήσουν τις ανάγκες των γεωγραφικά διασκορπισμένων πελατών χωρίς να παραβιάζουν τους περιορισμούς.

Στο πρόβλημα που θα επιλύσουμε, διαθέτουμε 20 παραδείγματα, και για κάθε παράδειγμα έχουμε ως δεδομένα:

- τον αριθμό των πελατών (n) όπου n=50 για τα παραδείγματα 1 έως 10 και n=100 για τα παραδείγματα 11 έως 20

- τον αριθμό των εγκαταστάσεων (p) που πρέπει να δημιουργηθούν κατά την επίλυση του προβλήματος p-μέσων όπου p=5 για τα παραδείγματα 1 έως 10 και p=10 για τα παραδείγματα 11 έως 20

- την συνολική χωρητικότητα (Q) της κάθε εγκατάστασης δηλαδή την συνολική ζήτηση που μπορεί να εξυπηρετήσει η κάθε εγκατάσταση (Q=120)

- Επίσης για κάθε πελάτη n (n=1...n), μας δίνεται η θέση του στον χώρο μέσω συντεταγμένων x και y καθώς και η ζήτηση του συγκεκριμένου πελάτη.

Οι περιορισμοί που προκύπτουν για το συγκεκριμένο πρόβλημα σχετίζονται καταρχάς με την χωρητικότητα της κάθε μιας από τις p ομάδες πελατών που θα εξυπηρετούνται από τις p εγκαταστάσεις. Κάθε τέτοια ομάδα λοιπόν δεν θα πρέπει να ξεπερνά μία συγκεκριμένη τιμή Q_{max}. Ο επόμενος περιορισμός έχει να κάνει με το ότι κάθε πελάτης θα πρέπει να εξυπηρετείται από μόνο μια εγκατάσταση. Επίσης πρέπει όλοι οι πελάτες να εξυπηρετηθούν. Εδώ πρέπει να υπενθυμίσουμε είναι λογικό η τιμή της ζήτησης του κάθε πελάτη ποικίλει.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα βήματα επίλυσης του προβλήματος, η αντικειμενική συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε και οι περιορισμοί που πρέπει να τηρούνται προκειμένου η λύση που θα προκύψει να είναι αποδεκτή.

3.2 Επίλυση του προβλήματος με εφαρμογή του αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος αναπτύχθηκε στην matlab και λειτουργεί μέσω της ακόλουθης διαδικασίας:

Βήματα επίλυσης:

Βήμα 1:*Για την επίλυση του προβλήματος αρχικά φτιάχνουμε έναν πίνακα όπου έγινε υπολογισμός της ευκλείδειας απόστασης όλων των εγκαταστάσεων μεταξύ τους.*

$$dS = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Βήμα 2:*Στην συνέχεια επιλέγουμε τυχαία p πελάτες από τους n συνολικά. Με την εντολή randerr έχουμε την ευχέρεια να επιλέγουμε κάθε φορά διαφορετική ομάδα p εγκαταστάσεων μέχρι να βρούμε την επιθυμητή αποδεκτή λύση. Για κάθε μία από αυτές τις p υποψήφιες εγκαταστάσεις έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο βήμα η απόσταση της από όλες τις υπόλοιπες εγκαταστάσεις-πελάτες.*

Βήμα 3:*Παίρνοντας λοιπόν κάθε μία από τις υπόλοιπες εγκαταστάσεις-πελάτες βρίσκουμε ποια από τις p εγκαταστάσεις είναι κοντινότερη σε αυτήν. Έτσι λοιπόν βρίσκουμε για κάθε πελάτη την κοντινότερη του εγκατάσταση. Επειδή όμως υπάρχει όμως η πιθανότητα να μην εξυπηρετηθεί από την κοντινότερη εγκατάσταση κάθε πελάτης βρίσκουμε για κάθε πελάτη και τις υπόλοιπες εγκαταστάσεις που θα μπορούσαν να τον εξυπηρετήσουν στοιχίζοντας τις από την κοντινότερη έως την πιο μακρινή. Αυτό το βήμα είναι πολύ σημαντικό λόγω της ύπαρξης του περιορισμού Q_{max} που μας αποτρέπει να αναθέσουμε έναν πελάτη σε μία εγκατάσταση εάν η εγκατάσταση αυτή έχει ξεπεράσει το όριο ζήτησης Q_{max} που μπορεί να εξυπηρετήσει. Έτσι λοιπόν ο πελάτης αυτός θα ανατεθεί όταν χρειαστεί στην αμέσως επόμενη κοντινότερη του εγκατάσταση.*

Βήμα 4:*Σε αυτό το βήμα θέλουμε να κάνουμε το αντίθετο. Να βρούμε για κάθε κέντρο παίρνοντας τα κέντρα ένα ένα, τους κοντινότερους πελάτες. Το πρόβλημα εδώ όμως είναι ότι αν για ένα κέντρο ένας πελάτης είναι στους κοντινότερους του, αυτό δεν σημαίνει ότι δεν θα μπορούσε να είναι κοντινότερος για ένα άλλο κέντρο. Φτιάχνουμε λοιπόν έτσι έναν πίνακα ο οποίος μας ενημερώνει για τους κοντινότερους πελάτες σε κάθε εγκατάσταση που δεν έχουν κάποια άλλη εγκατάσταση κοντινότερη.*

Βήμα 5:*Μόλις γίνει αυτό ανατρέχουμε στις ζητήσεις που έχουμε ως δεδομένο για κάθε πελάτη. Ξεκινάμε διατρέχοντας τον προηγούμενο πίνακα p*n παίρνοντας με την σειρά για κάθε εγκατάσταση το πρώτο του στοιχείο και το αντιγράφουμε στον τελικό πίνακα p*n. Αυτό το κάνουμε με την σειρά για όλα τα στοιχεία. Έχουμε όμως έναν περιορισμό ζήτησης. Κάθε φορά λοιπόν για κάθε στοιχείο που πρόκειται να αντιγραφεί εξετάζουμε αν με την εισαγωγή του στον νέο πίνακα και αθροίζοντας την ζήτηση του με το υπάρχον άθροισμα (αρχικά είναι μηδέν) θα ξεπεραστεί το όριο $Q_{max.}$ Αν όχι τότε ο πελάτης τοποθετείται κανονικά στην θέση αυτή. Αλλιώς τοποθετείται στον αμέσως κοντινότερο πελάτη, στην πρώτη ελεύθερη θέση και ούτω καθ' εξής. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι όλοι οι πελάτες να ανατεθούν σε κάποια εγκατάσταση.*

Βήμα 6:*Στο σημείο αυτό και αφού είναι έτοιμος ο τελικός μας πίνακας μπορούμε να προχωρήσουμε στους υπολογισμούς. Βρίσκουμε λοιπόν το επιμέρους άθροισμα ζητήσεων για κάθε εγκατάσταση. Ξέρουμε ποιες είναι οι p εγκαταστάσεις. Υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής. Ο αλγόριθμος τρέχει για καθορισμένο από εμάς περιορισμό και κρατάει την τιμή της αντικειμενικής μέχρι να βρει καλύτερη και στο τέλος κρατάει τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν στην min τιμή της αντικειμενικής*

Μοντελοποίηση του προβλήματος:

Δοθέντος ενός συνόλου από m πιθανές τοποθεσίες για να δημιουργηθούν Pmax εγκαταστάσεις και ένα σύνολο από τοποθεσίες για n πελάτες, το πρόβλημα των p-μέσων είναι να τοποθετηθούν ταυτόχρονα Pmax εγκαταστάσεις έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς από τους πελάτες στις εγκαταστάσεις όπου ο κάθε πελάτης εξυπηρετείται από την κοντινότερη εγκατάσταση.

$$\min \quad \sum_{i \in V} \sum_{j \in U} c_{ij} x_{ij} \tag{37}$$

υπό

$$\sum_{j} x_{ij} = 1, \quad \forall i \tag{38}$$

$$\sum_{j} y_j = p\max \tag{39}$$

$$\sum_{i \in V} q_i x_{ij} \leq Q\max \tag{40}$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i, j \tag{41}$$

όπου

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν ο κόμβος ζήτησης } i \text{ εξυπηρετείται από την εγκατάσταση } j, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{42}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{εάν η εγκατάσταση τοποθετηθεί στο } j, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{43}$$

Cij είναι η απόσταση ανάμεσα στους κόμβους και qi είναι η ζήτηση στον κόμβο i. Η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιεί την συνολική ζήτηση ανάμεσα σε κάθε κόμβο ζήτησης και την κοντινότερη εγκατάσταση. Ο περιορισμός(39) απαιτεί κάθε κόμβος ζήτησης i αν ανατεθεί σε μία μόνο εγκατάσταση j. Ο περιορισμός(40) καθορίζει ότι ακριβώς Pmax εγκαταστάσεις θα χωροθετηθούν. Ο περιορισμός (41) καθορίζει ότι το άθροισμα των ζητήσεων που έχουν ανατεθεί σε κάθε εγκατάσταση ξεχωριστά δεν πρέπει να ξεπερνάει το όριο Q.

Ο αλγόριθμος κρατάει ως λύση την τιμή που θα βρει από τον υπολογισμό του κόστους, μέχρι να βρει μια άλλη μικρότερη από αυτή. Ο αλγόριθμος θα τρέξει για έναν συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων τον οποίο καθορίζουμε εμείς.

Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα

Παρουσίαση των αποτελεσμάτων μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου:

Το αρχείο δεδομένων που θα χρησιμοποιήσουμε παρουσιάζεται παρακάτω και παρέχει πληροφορίες μόνο για τη βέλτιστη τιμή (βλ. στήλη: βέλτιστη τιμή). Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου μας σε σύγκριση με τις βέλτιστες λύσεις για κάθε παράδειγμα καθώς επίσης και η ποσοστιαία διαφορά τους καθώς και οι p εγκαταστάσεις για το κάθε παράδειγμα. Διαθέτουμε 20 παραδείγματα, και για κάθε παράδειγμα έχουμε έναν αριθμό πελατών (n). Όπως προαναφέρθηκε n=50 για τα παραδείγματα 1 έως 10 και n=100 για τα παραδείγματα 11 έως 20. Ο αριθμός των εγκαταστάσεων (p) που πρέπει να δημιουργηθούν κατά την επίλυση του προβλήματος p-μέσων είναι p=5 για τα παραδείγματα 1 έως 10 και p=10 για τα παραδείγματα 11 έως 20.

παράδειγμα	βέλτιστη τιμή	αποτελέσματα αλγορίθμου μας	ποσοστιαία διαφορά %	p εγκαταστάσεις
1	713	743	4,2	4,10,12,21,48
2	740	740	0	16,22,26,33,47
3	751	752	0,01	15,20,25,39,48
4	651	658	0,1	5,9,13,23,33
5	664	678	2,1	13,24,36,40,44
6	778	797	2,4	17,22,24,45,46
7	787	789	0,02	13,20,24,32,36
8	820	857	4,5	2,13,26,30,32
9	715	724	1,2	5,12,22,23,43
10	829	841	1,4	4,6,8,16,20
11	1006	1101	9,4	8,17,41,49,53,57,73,75,85,96
12	966	1026	6,2	1,5,40,45,55,60,61,76,81,86
13	1026	1108	7,9	7,8,14,59,62,75,76,79,83,99
14	982	1071	9	2,6,23,37,43,44,50,56,72,99
15	1091	1176	7,8	5,12,17,20,29,32,41,57,81,88
16	954	1030	7,9	5,12,17,20,29,32,41,57,81,88
17	1034	1072	3,6	6,31,38,40,63,64,68,74,86,94
18	1043	1148	10	15,19,22,25,38,43,50,56,70,88
19	1031	1129	9,5	6,24,31,45,55,60,64,66,77,89
20	1005	1114	10,8	4,13,35,47,52,57,60,62,71,77

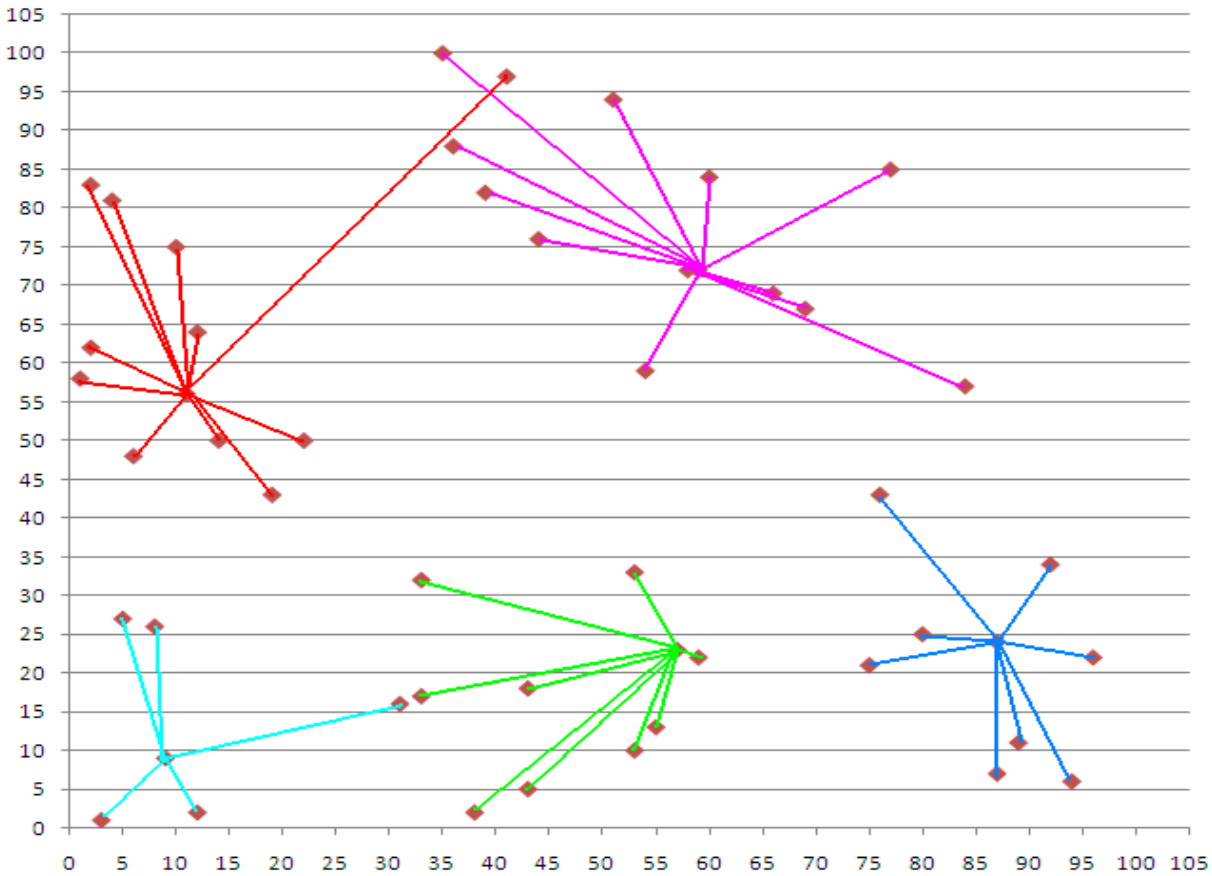
Πίνακας 4.1- Αποτελέσματα αλγορίθμου

Στην συνέχεια μπορούμε να δούμε για κάθε ένα από τα παραδείγματα ποιες είναι οι p εγκαταστάσεις που επιλέχθηκαν κατά τη λύση του αλγορίθμου και για κάθε μία από αυτές ποιο ήταν το άθροισμα των ζητήσεων των πελατών που εξυπηρετεί. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε εγκατάσταση έπρεπε να υπακούει στον περιορισμό που έχει να κάνει με το ανώτατο όριο ζήτησης Qmax που μπορεί να εξυπηρετεί. Εκτός αυτών παρατίθενται και οι πελάτες που η κάθε εγκατάσταση εξυπηρετεί.

example 1

p-medians	4	10	12	21	48
χωρητικότητα	103	114	109	107	57
πελάτες	4	10	12	21	48
	37	17	2	18	26
	24	38	35	44	34
	27	30	43	36	33
	28	45	40	1	16
	19	49	9	50	22
	31	13	20	39	
	5	7	8	15	
	29	11	6	32	
	47	23		41	
		3		14	
		25		42	
		46			

πίνακας 4.2

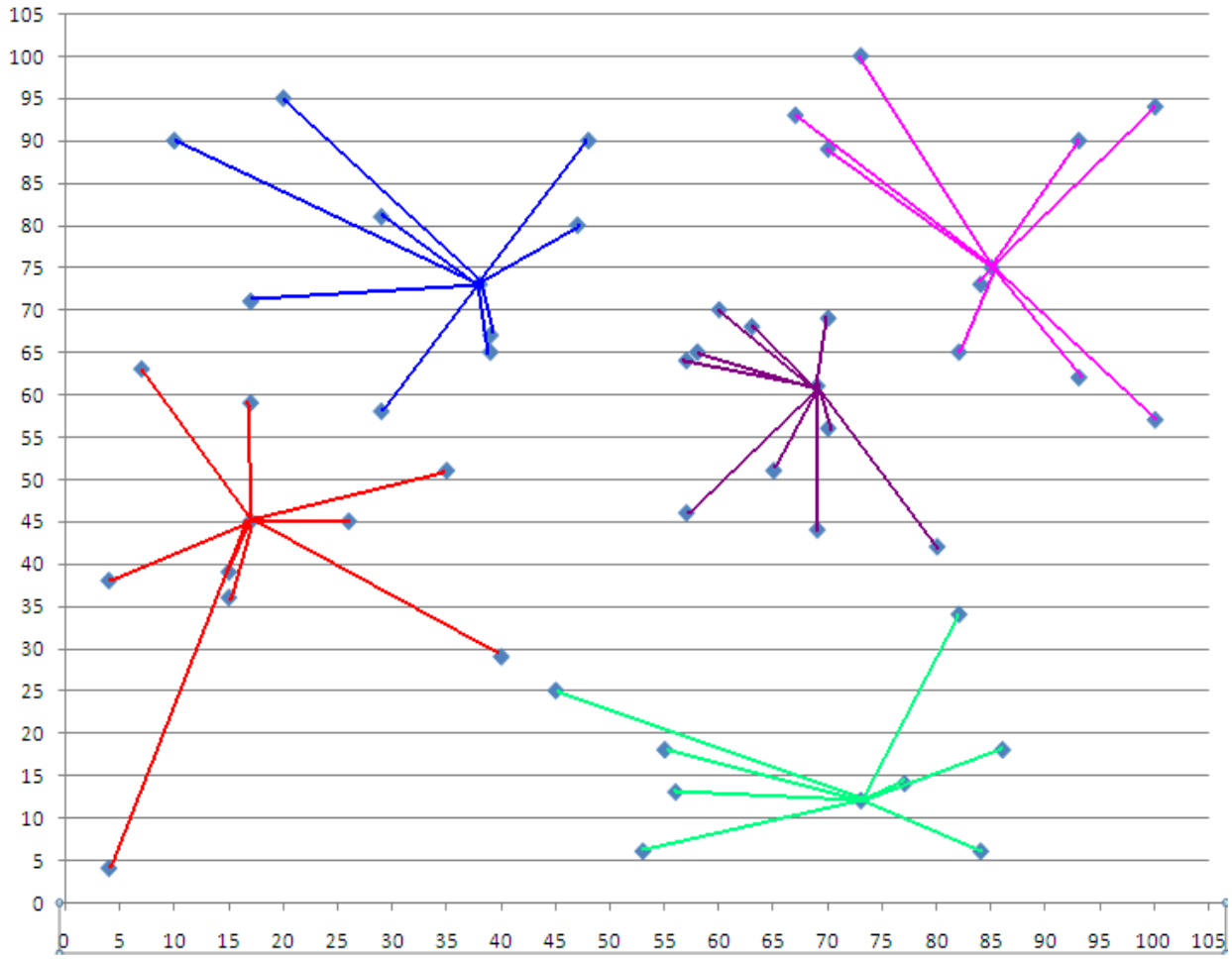


Σχήμα 4.1-example 1-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί

example 2

p-medians	16	22	26	33	47
χωρητικότητα	71	109	108	99	115
πελάτες	6	2	1	3	8
	10	4	7	19	13
	16	5	9	25	20
	18	11	15	29	21
	24	12	17	33	23
	27	14	26	34	28
	30	22	39	36	35
	37	31	43	41	38
	40	32	48	44	45
	42		49	46	47
					50

πίνακας 4.3

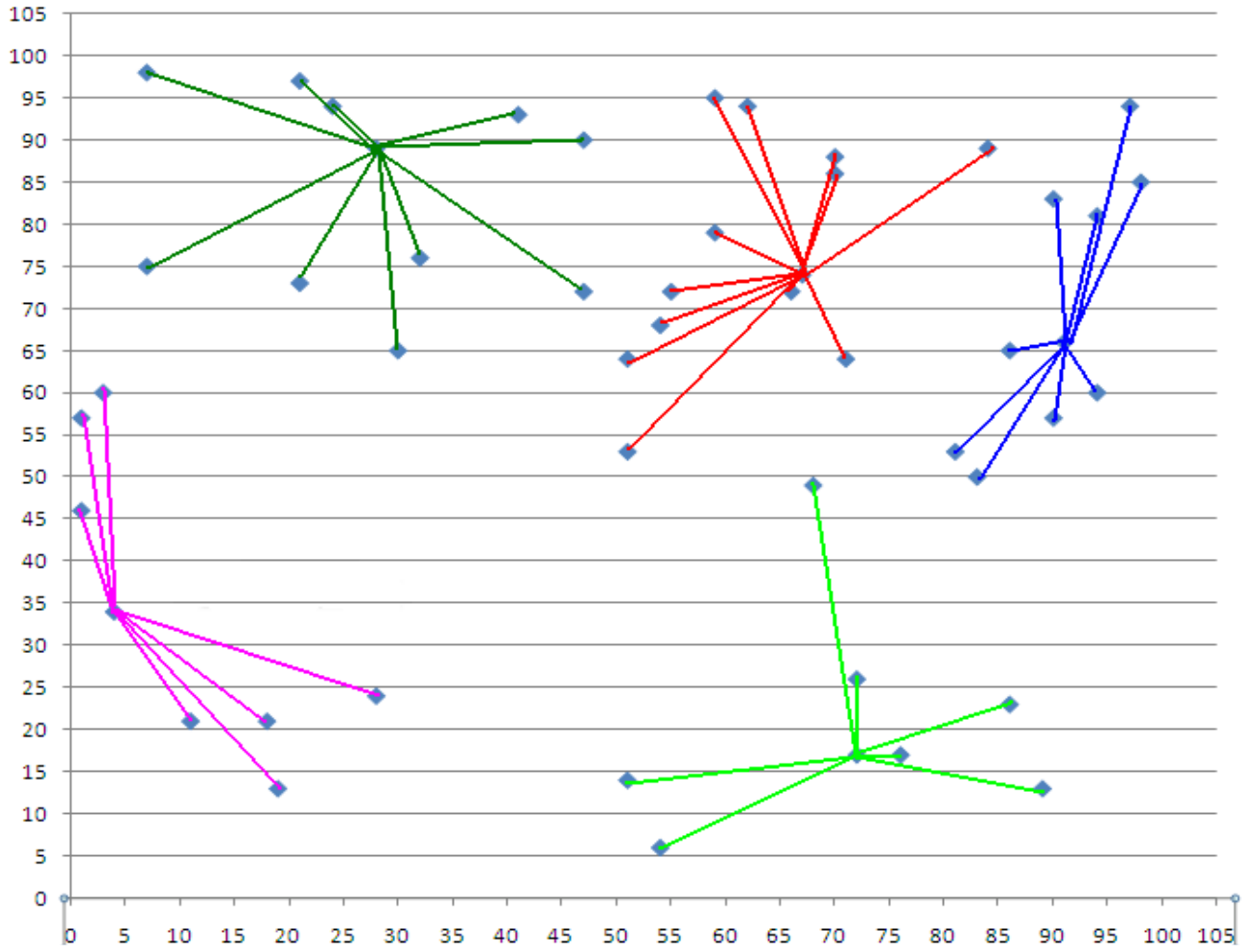


Σχήμα 4.2-example 2-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example 3

p-medians	15	20	25	39	48
χωρητικότητα	74	107	116	120	95
πελάτες	15	20	25	39	48
	49	36	38	12	7
	24	11	26	46	50
	28	23	37	17	27
	5	45	42	10	30
	9	3	32	41	35
	1	21	44	13	16
	43	34	2	47	6
		14		31	22
		18		4	40
				8	33
				29	
				19	

πίνακας 4.4

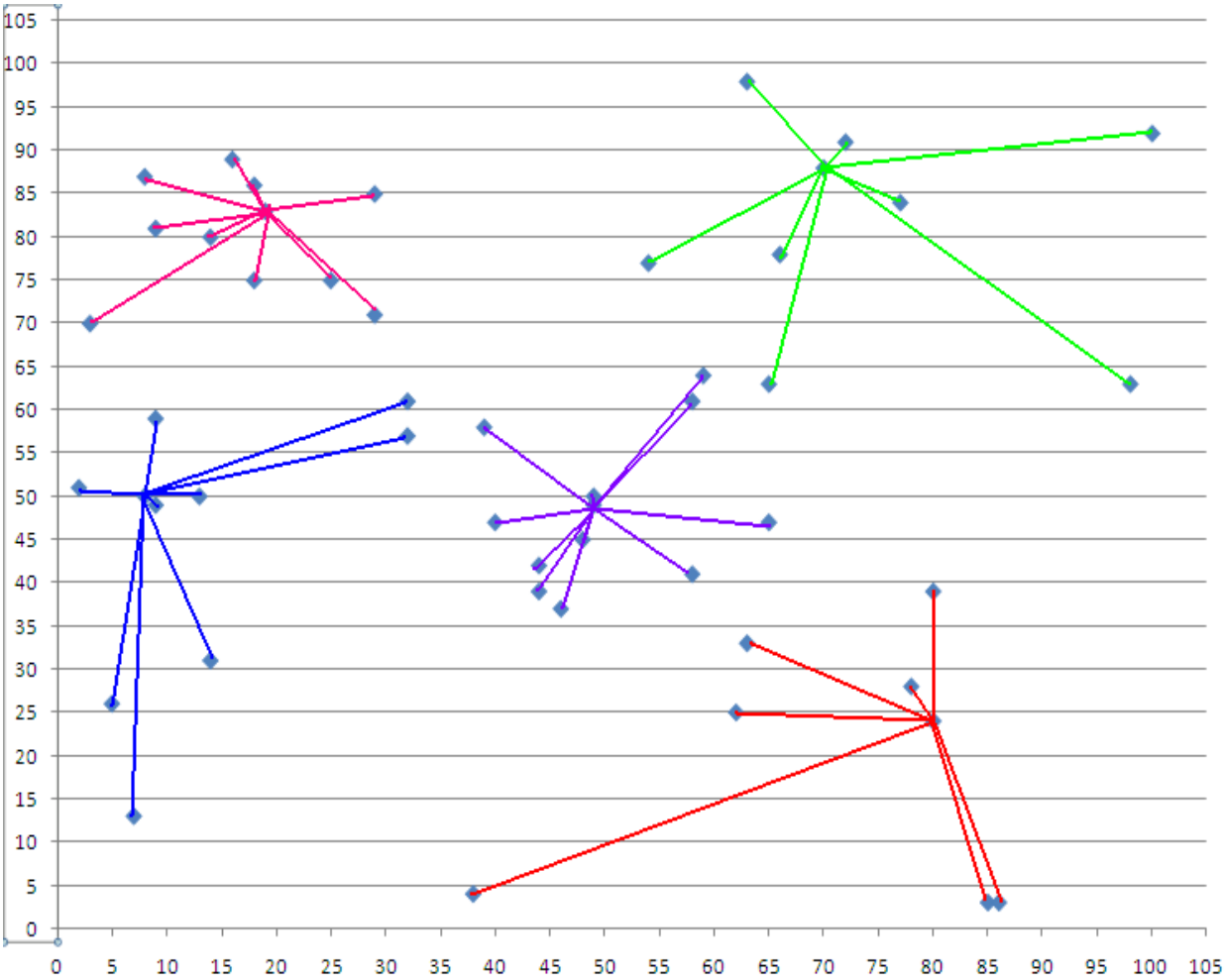


Σχήμα 4.3-example 3-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example 4

p-medians	5	9	13	23	33
χωρητικότητα	106	105	98	90	118
πελάτες	5	9	13	23	33
	48	44	43	50	30
	34	46	8	17	29
	3	39	14	26	11
	15	4	1	22	19
	38	7	12	10	16
	36	35	2	18	27
	6	40	49	25	45
	47	32	42		41
		28	21		31
		37			20
					24

πίνακας 4.5

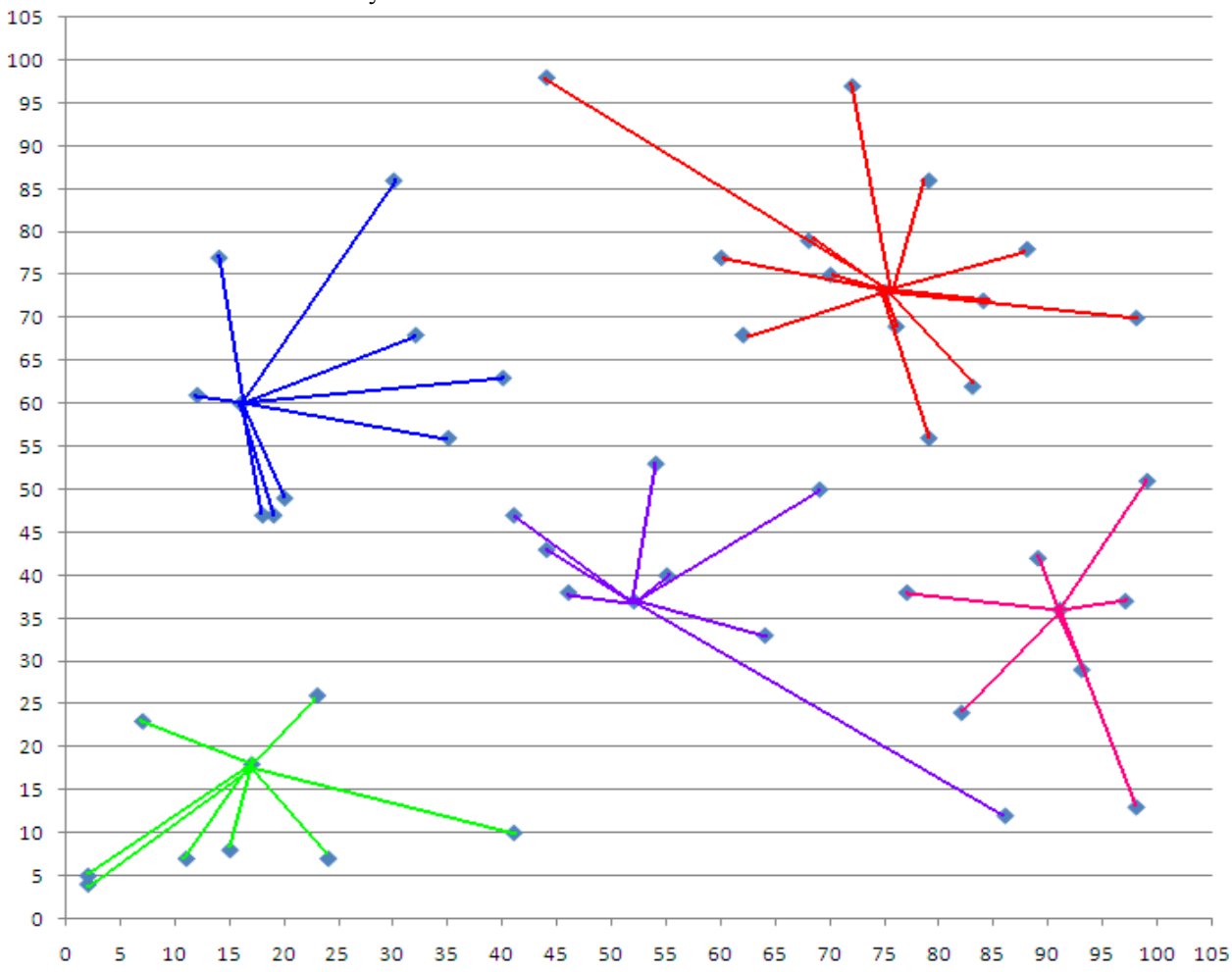


Σχήμα 4.4-example 4-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example 5

p-medians	13	24	36	40	44
χωρητικότητα	85	106	113	120	117
πελάτες	13	24	36	40	44
	48	22	37	32	29
	4	34	49	50	33
	6	19	17	38	14
	16	23	7	43	21
	5	18	35	3	10
	25	31	42	27	8
	15	1	9	28	39
	11	46		41	20
	30			47	
				45	
				2	
				26	
				12	

πίνακας 4.6

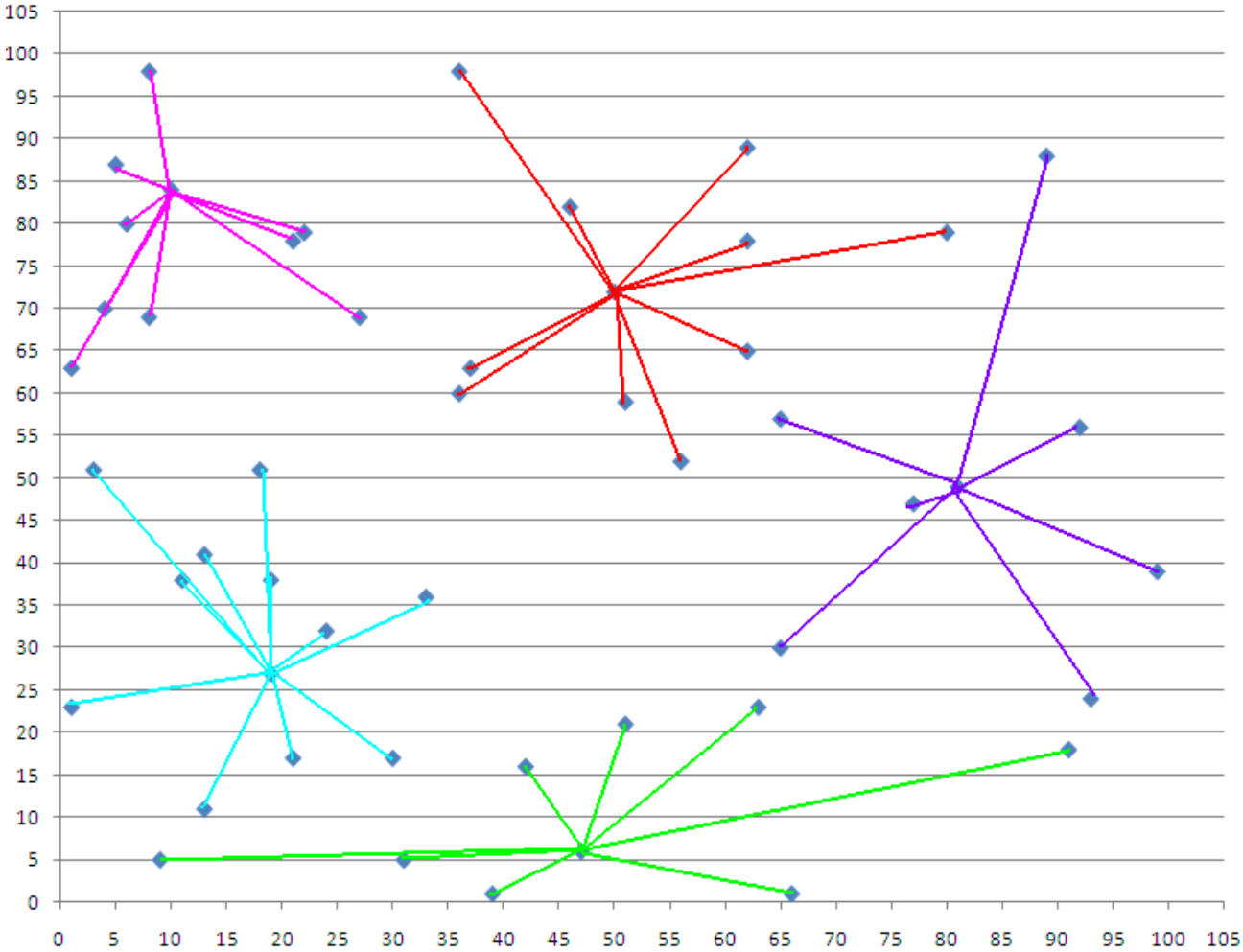


Σχήμα 4.5-example 5-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example 6

p-medians	17	22	24	45	46
χωρητικότητα	115	98	108	118	111
πελάτες	17	22	24	45	46
	8	4	7	31	38
	21	20	34	11	10
	25	37	9	42	32
	30	14	23	27	48
	26	36	44	49	35
	29	41	12	28	15
	16	39	19	6	5
	50	33	43	1	
	2		47	18	
	13			3	
				40	

πίνακας 4.7

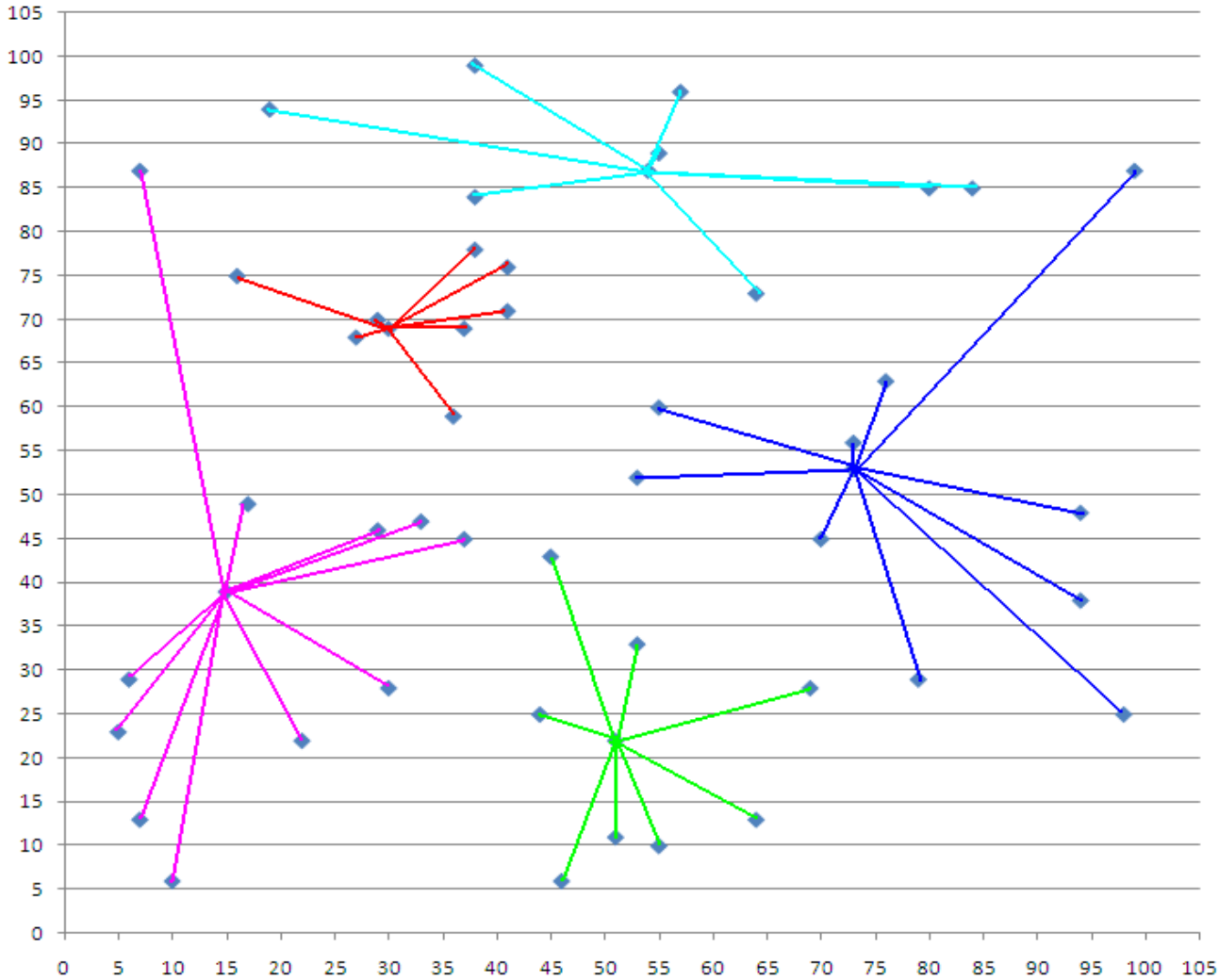


Σχήμα 4.6-example 6-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example 7

p-medians	13	20	24	32	36
χωρητικότητα	102	118	115	102	114
πελάτες	13	20	24	32	36
	3	18	49	6	14
	28	4	48	26	1
	40	47	15	19	10
	50	31	23	7	11
	46	37	9	41	17
	30	42	43	8	34
	27	35	29	2	38
	5	25	16	45	22
			44		33
			12		21
					39

πίνακας 4.8

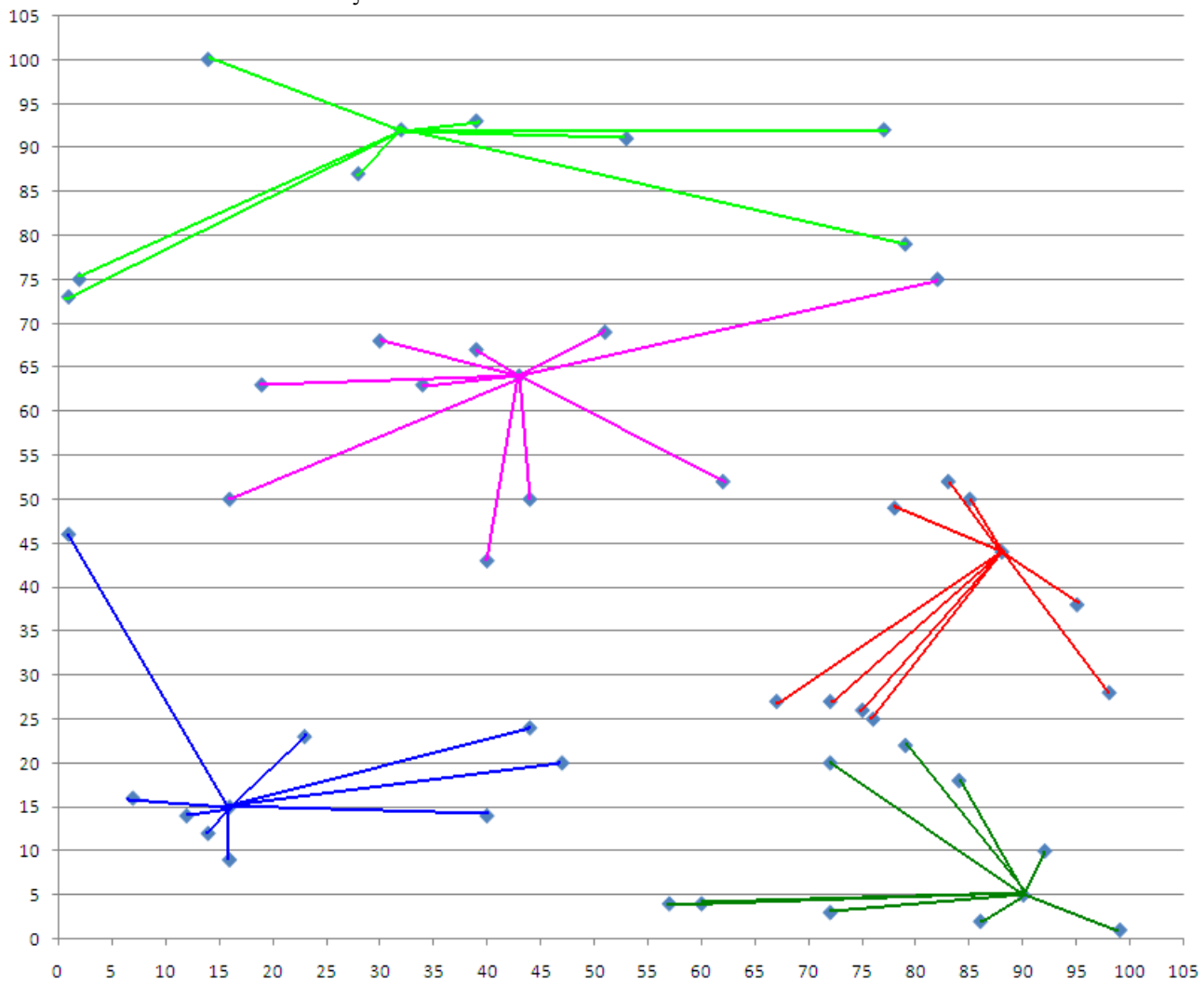


Σχήμα 4.7-example 7-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example 8

p-medians	2	13	26	30	32
χωρητικότητα	112	114	88	118	120
πελάτες	2	13	26	30	32
	48	33	17	14	3
	28	5	50	44	15
	21	47	8	22	18
	9	29	41	20	16
	10	45	38	27	34
	49	36	12	24	11
	43	40	7	23	6
	46	19	25	31	37
	1	35		42	39
					4

πίνακας 4.9

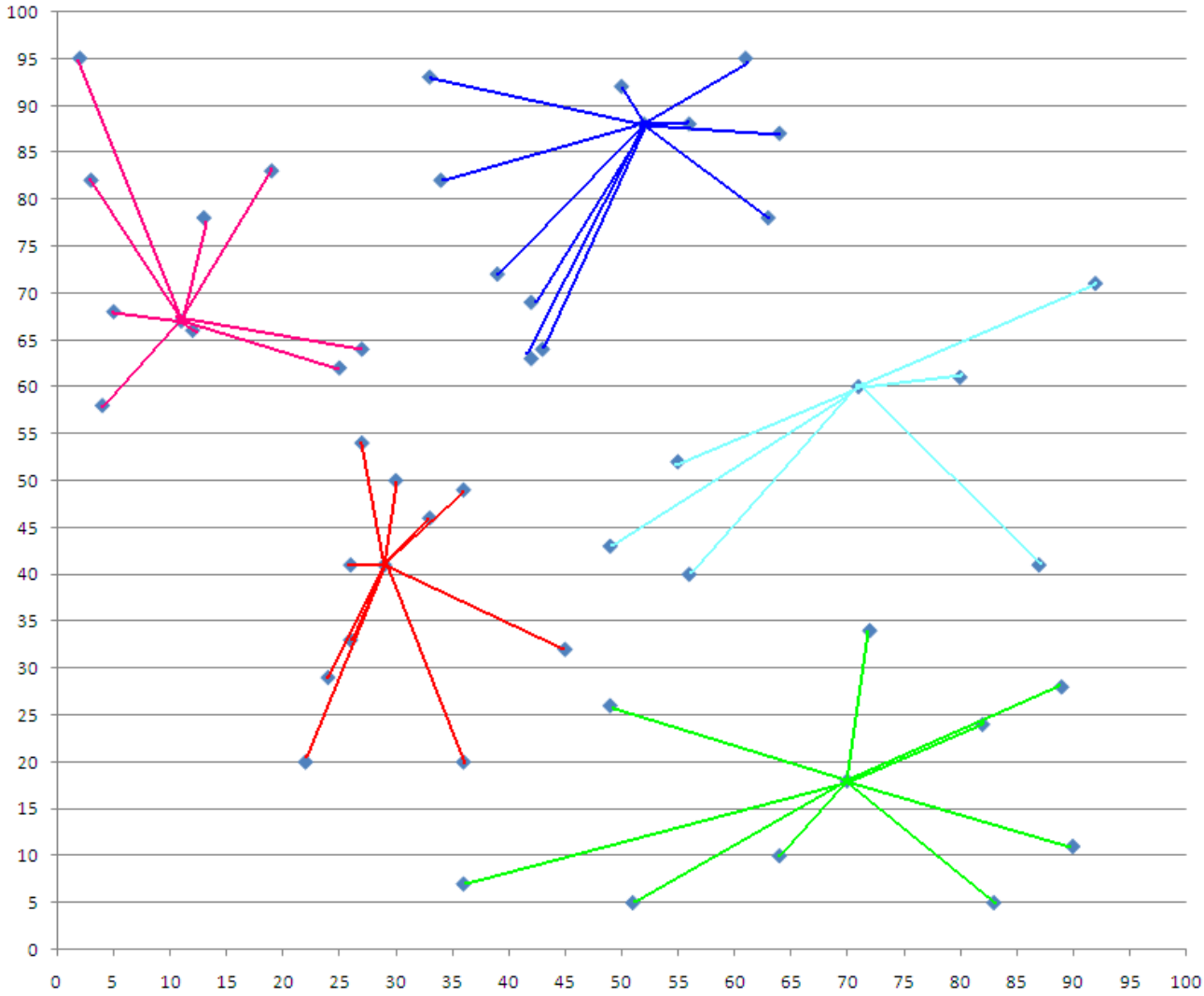


Σχήμα 4.8-example 8-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example 9

p-medians	5	12	22	23	43
χωρητικότητα	109	120	104	106	120
πελάτες	5	12	22	23	43
	39	13	47	11	37
	7	46	20	17	45
	42	1	15	32	6
	8	14	16	25	19
	3	24	2	40	9
	10	44	21	34	41
	28	49	27	33	
	36	30	35	4	
	50	29	48	18	
		31		38	
				26	

πίνακας 4.10

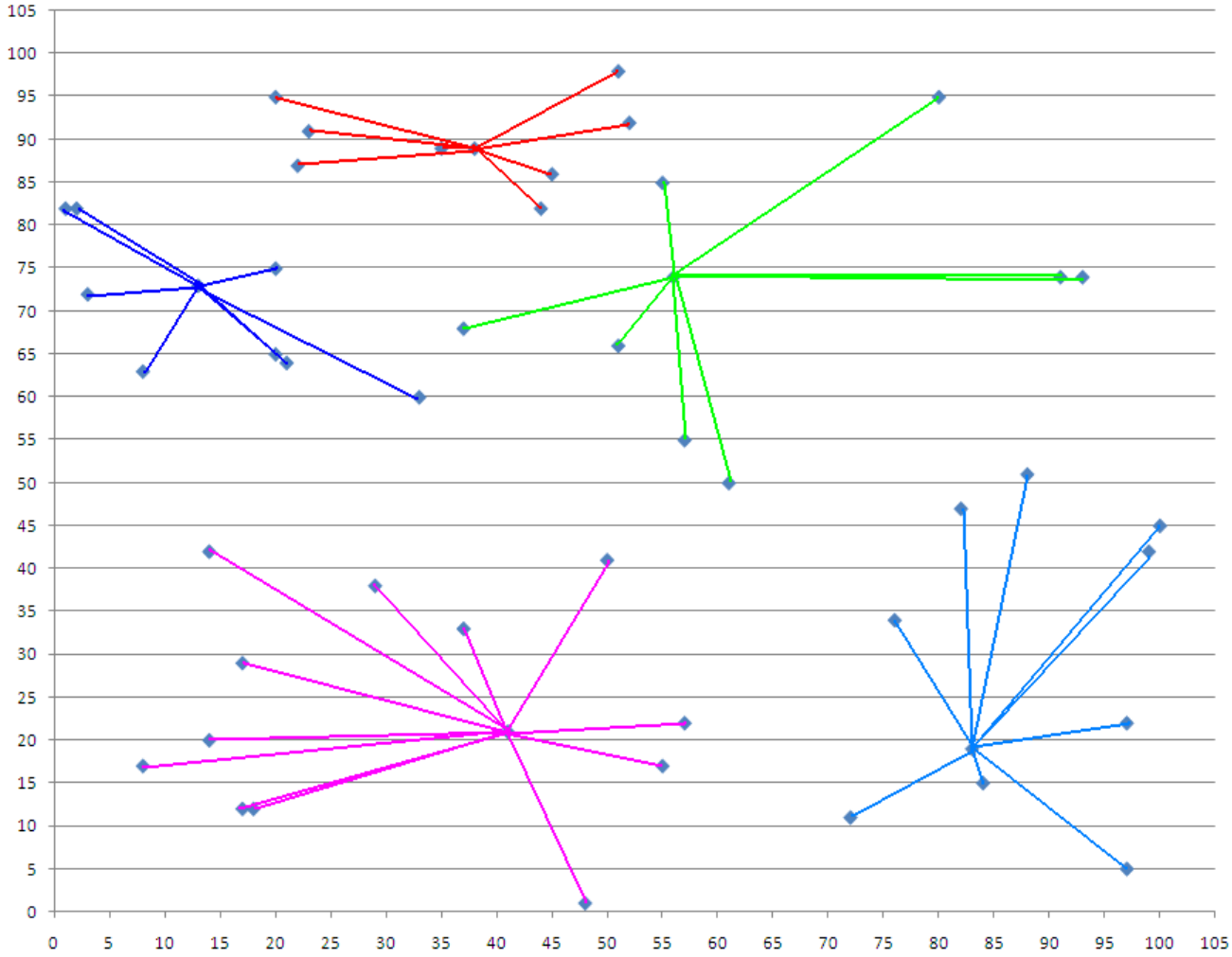


Σχήμα 4.9-example 9-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example 10

p-medians	4	6	8	16	20
χωρητικότητα	111	118	120	116	109
πελάτες	4	6	8	16	20
	37	48	7	3	30
	10	29	12	26	50
	47	44	34	27	42
	19	9	45	31	25
	28	14	18	33	21
	43	1	38	17	35
	39	23	40	49	15
	11	2	13	46	22
	41			36	
	24				
	32				
	5				

πίνακας 4.11

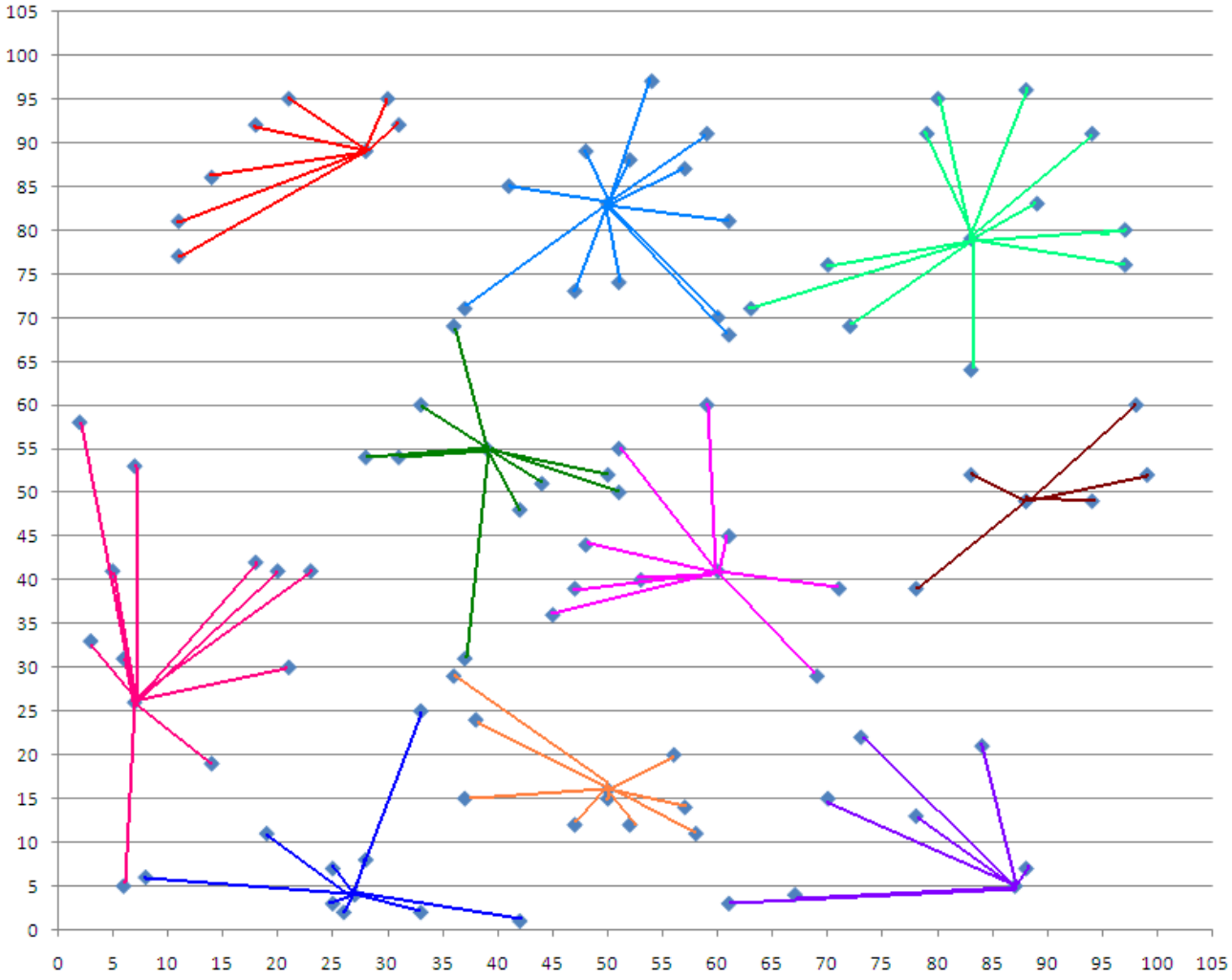


Σχήμα 4.10-example 10-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example11

p-medians	8	17	41	49	53	57	73	75	85	96
χωρητικότητα	63	87	106	120	107	115	82	118	104	115
πελάτες	8	17	41	49	53	57	63	75	85	96
	81	13	93	65	80	52	73	79	3	9
	59	100	11	74	99	24	68	91	48	82
	89	12	66	90	46	94	71	78	70	22
	7	51	30	27	4	76	44	5	45	72
	31	54	18	29	40	87	10	56	47	26
	6	39	61	97	62	77	15	50	60	88
	21	37	69	86	58	84		98	28	34
			1	36	19	42		16	43	23
			55	14	33	2		92	35	32
			20		38			64		
			95		25			67		
								83		

πίνακας 4.12

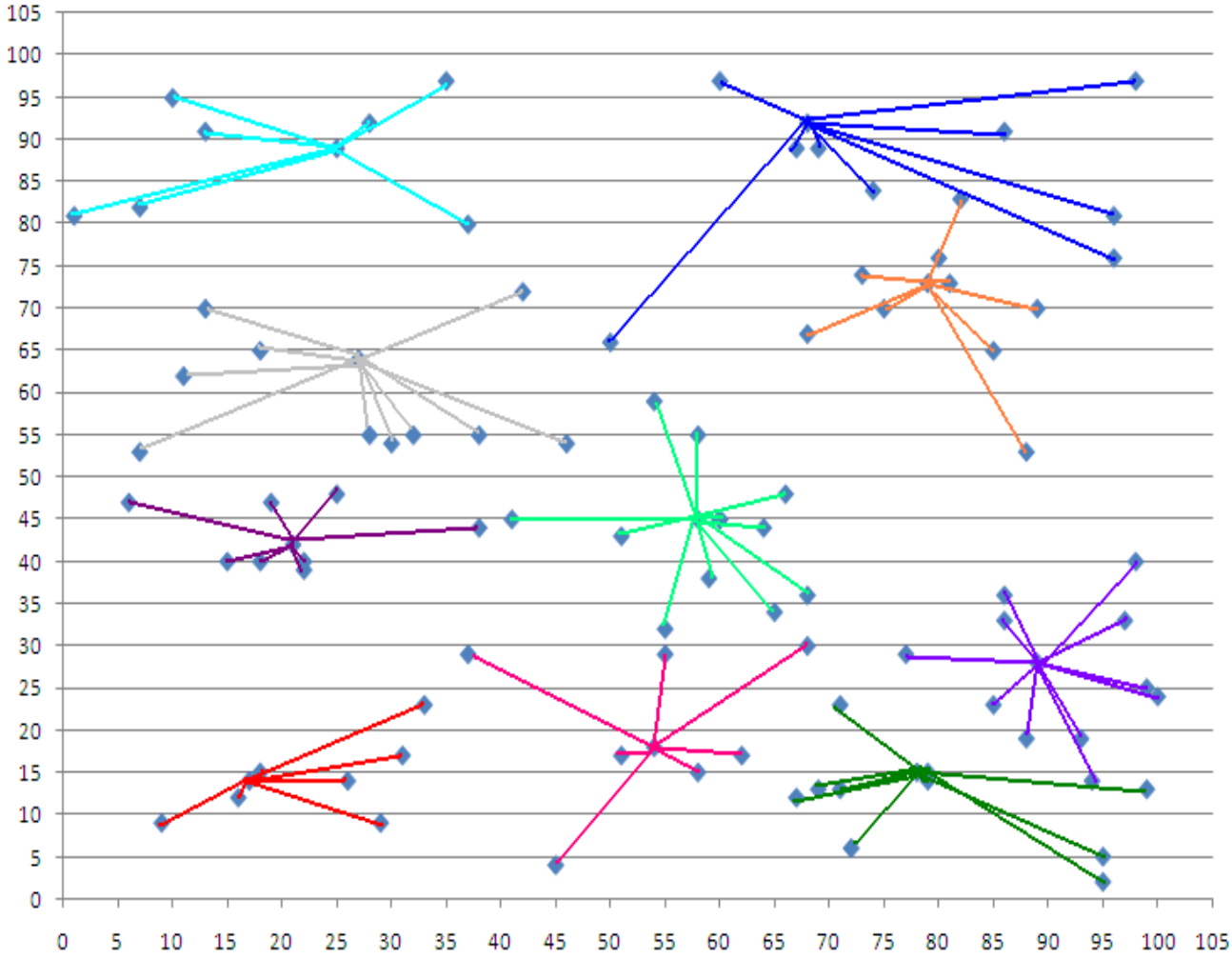


Σχήμα 4.11-example 11-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example12

p-medians	1	5	40	45	55	60	61	76	81	86
χωρητικότητα	74	119	107	86	111	79	118	98	105	120
πελάτες	1	5	40	45	55	60	61	76	81	86
	35	92	66	15	32	14	2	23	93	9
	33	96	95	74	99	28	88	29	48	31
	13	12	20	67	47	53	46	89	82	17
	51	70	71	8	68	34	64	85	50	65
	11	80	87	90	24	42	77	19	73	10
	36	78	98	21	30	84	100	38	49	44
	69	22	57	56	83	27	58	75	97	4
		16	37		79		7	72	26	41
		43	39		52		59	25		62
		91					6	18		3
		63					54			
		94								

πίνακας 4.13

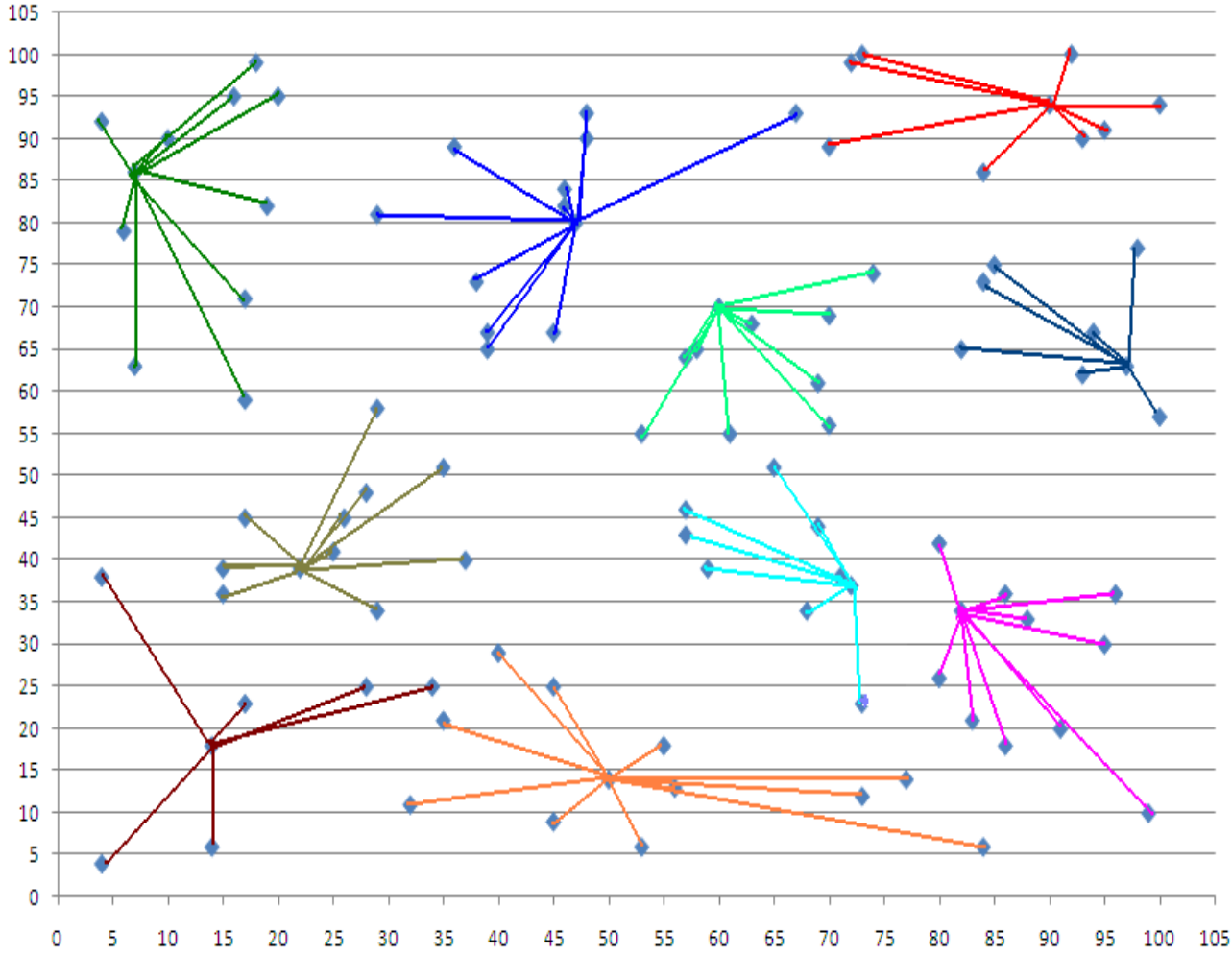


Σχήμα 4.12-example 12-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί

example13

p-medians	7	8	14	59	62	75	76	79	83	99
χωρητικότητα	119	86	120	119	88	105	65	115	116	100
πελάτες	7	8	14	59	62	75	76	79	83	99
	51	38	81	2	74	30	37	97	92	17
	57	23	58	32	100	84	82	86	19	69
	39	35	13	71	56	98	42	45	33	70
	26	50	94	4	46	40	68	53	36	85
	77	47	63	5	34	90	6	20	44	88
	89	66	64	60	95	18	16	96	67	15
	87	54	73	3		91	24	21	65	61
	48	78	93	55		27	52	72	80	1
	9	28	12	22				31	25	29
	43							11	49	41
	10									

πίνακας 4.14

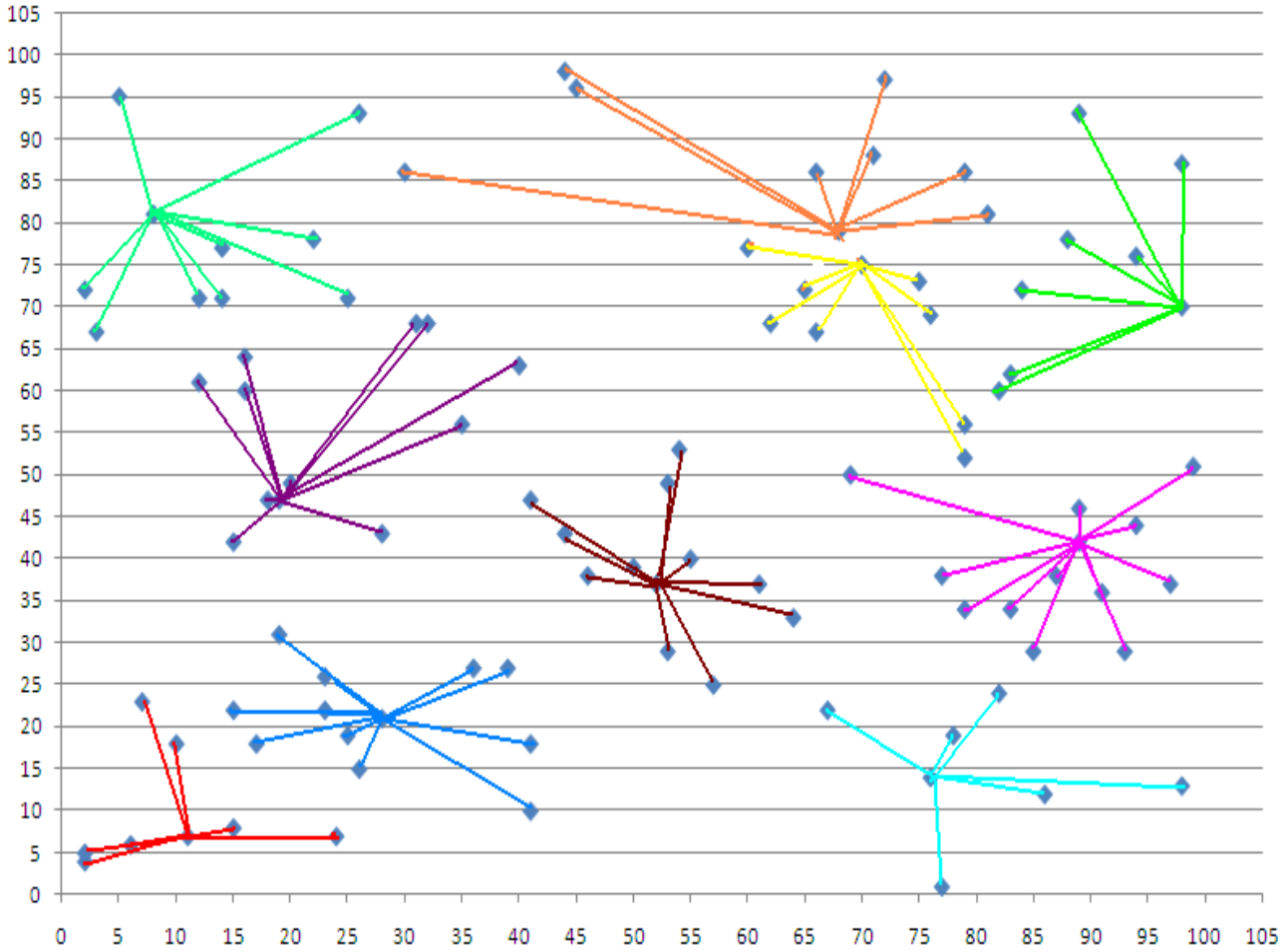


Σχήμα 4.13-example 13-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example14

p-medians	2	6	23	37	43	44	50	56	72	99
χωρητικότητα	102	119	97	113	98	102	115	77	118	115
πελάτες	2	6	23	37	43	44	50	56	72	99
	70	16	22	61	77	95	40	76	5	67
	3	4	90	85	47	29	52	20	84	79
	38	57	1	69	93	33	32	35	92	78
	28	58	31	36	41	66	75	51	71	34
	54	13	65	49	26	94	27	53	83	97
	81	48	18	74	73	14	82	9	88	24
	59	64	19	7	12	21	98		89	63
		15		86	30	60	45		80	87
		25		17		62			55	91
		68		42		10				96
		11		100		8				46
				39						

πίνακας 4.15

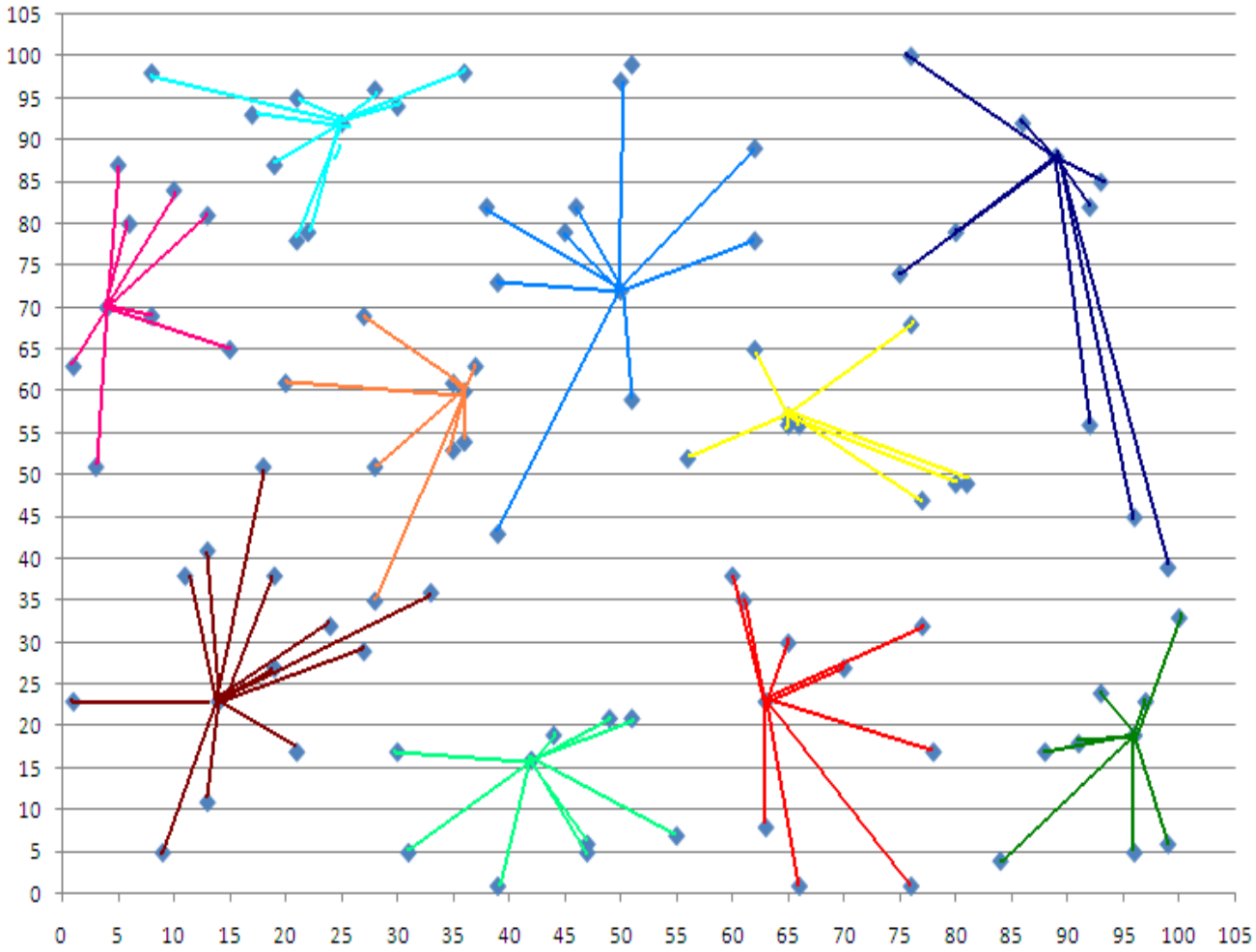


Σχήμα 4.14-example 14-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example15

p-medians	5	12	17	20	29	32	41	57	81	88
χωρητικότητα	100	113	89	119	108	107	105	119	82	108
πελάτες	5	12	17	20	29	32	41	57	81	88
	91	19	95	90	86	63	35	45	54	80
	98	47	8	64	26	85	62	11	69	15
	56	7	72	37	53	30	67	1	78	39
	13	96	21	22	65	16	58	18	92	100
	68	99	25	49	43	38	79	31	84	60
	52	24	76	71	59	94	77	55	2	61
	10	34	50	4	82	46	83	27	23	70
	48	40	74	14	75	97	36	42	9	93
	51		73	89			87	3	44	
								28	66	
								6		
								33		

πίνακας 4.16

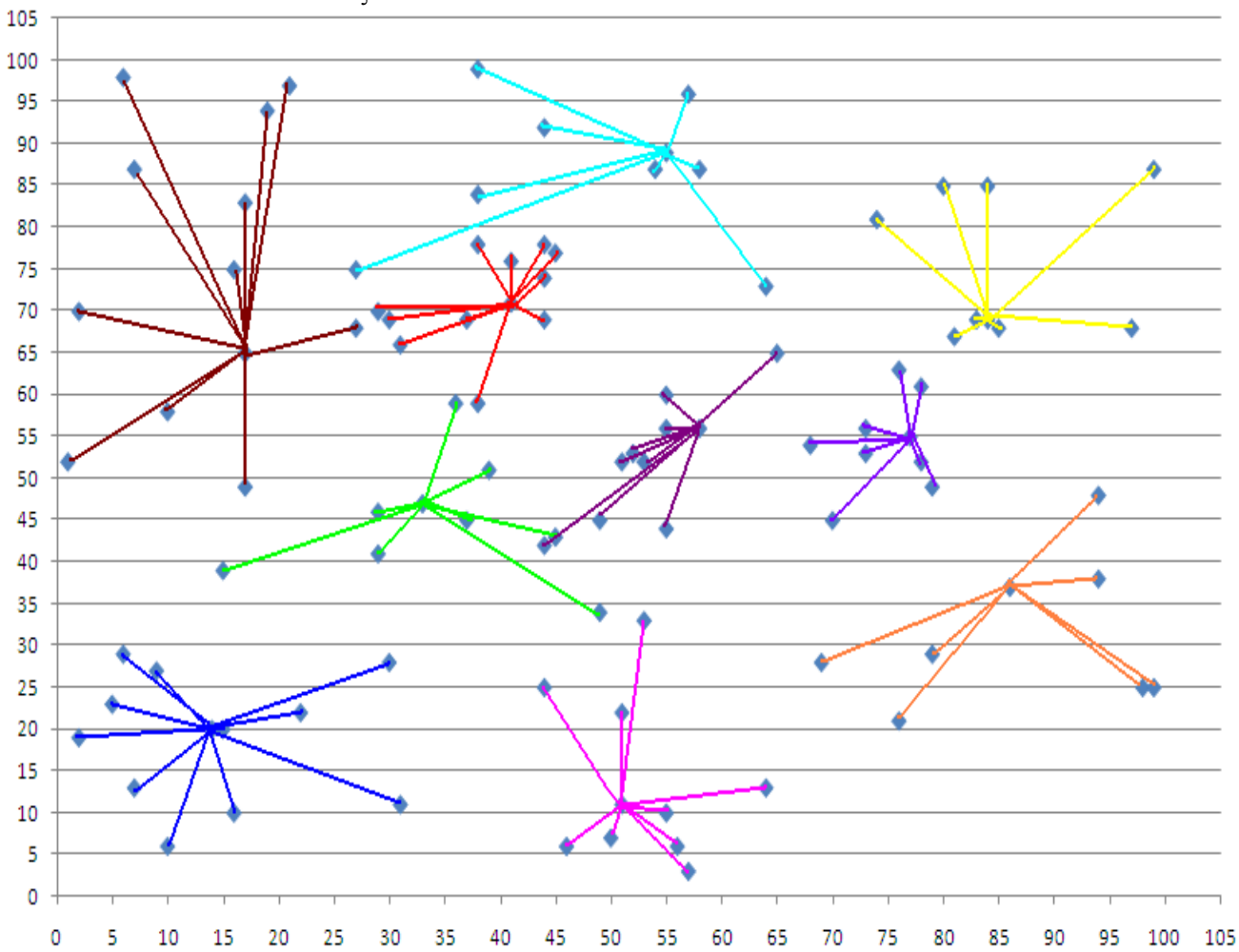


Σχήμα 4.15-example 15-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example16

p-medians	6	31	38	40	63	64	68	74	86	94
χωρητικότητα	106	120	120	87	100	107	109	85	120	106
πελάτες	6	31	38	40	63	64	68	74	86	94
	32	89	10	50	16	71	62	88	53	51
	58	47	22	66	29	75	11	24	4	23
	26	60	87	30	43	73	84	49	25	9
	100	35	90	65	44	61	17	77	99	57
	7	42	5	76	54	93	33	78	85	67
	41	80	37	13	91	2	95	15	96	83
	19	98	36	46	27	8	1	55	21	82
	79	20	69	3		12	81	48	14	92
		72		28			39		45	97
		18					34		59	
		52					56		70	

πίνακας 4.17

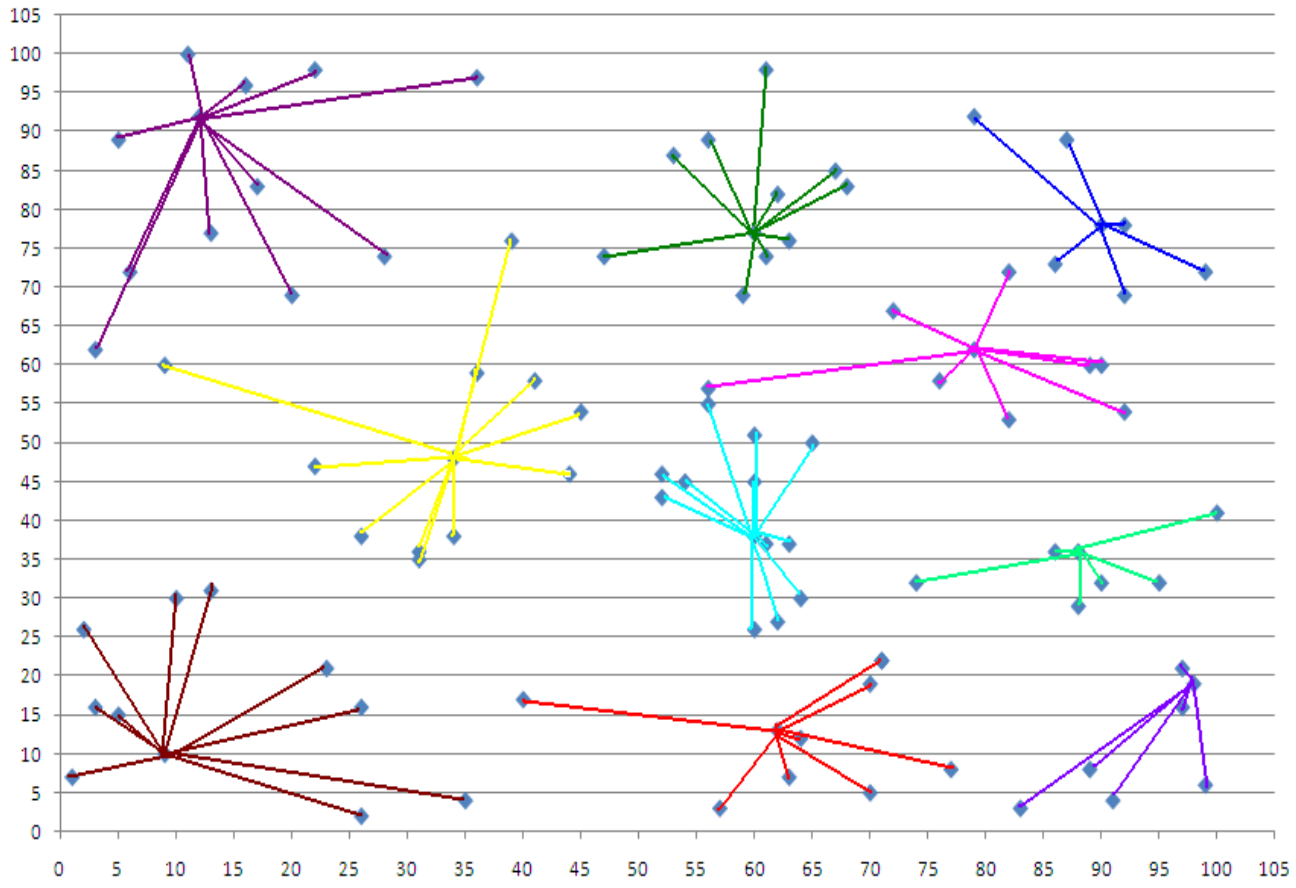


Σχήμα 4.16-example 16-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example17

p-medians	15	19	22	25	38	43	50	56	70	88
χωρητικότητα	114	115	110	96	88	119	119	103	115	94
πελάτες	15	19	22	25	38	43	50	56	70	88
	37	7	32	78	9	51	73	11	72	86
	5	33	41	80	1	83	10	42	68	18
	2	46	48	39	100	54	57	91	71	76
	58	30	75	23	13	81	47	52	35	21
	61	8	74	59	79	4	77	62	53	60
	3	26	97	28	34	14	6	66	55	49
	94	36	20			84	12	82	92	
	90	99	65			44	17	85	98	
		67	27			69	45	95	63	
		87	64			96		29	40	
			16			31		89	93	
									24	

πίνακας 4.18

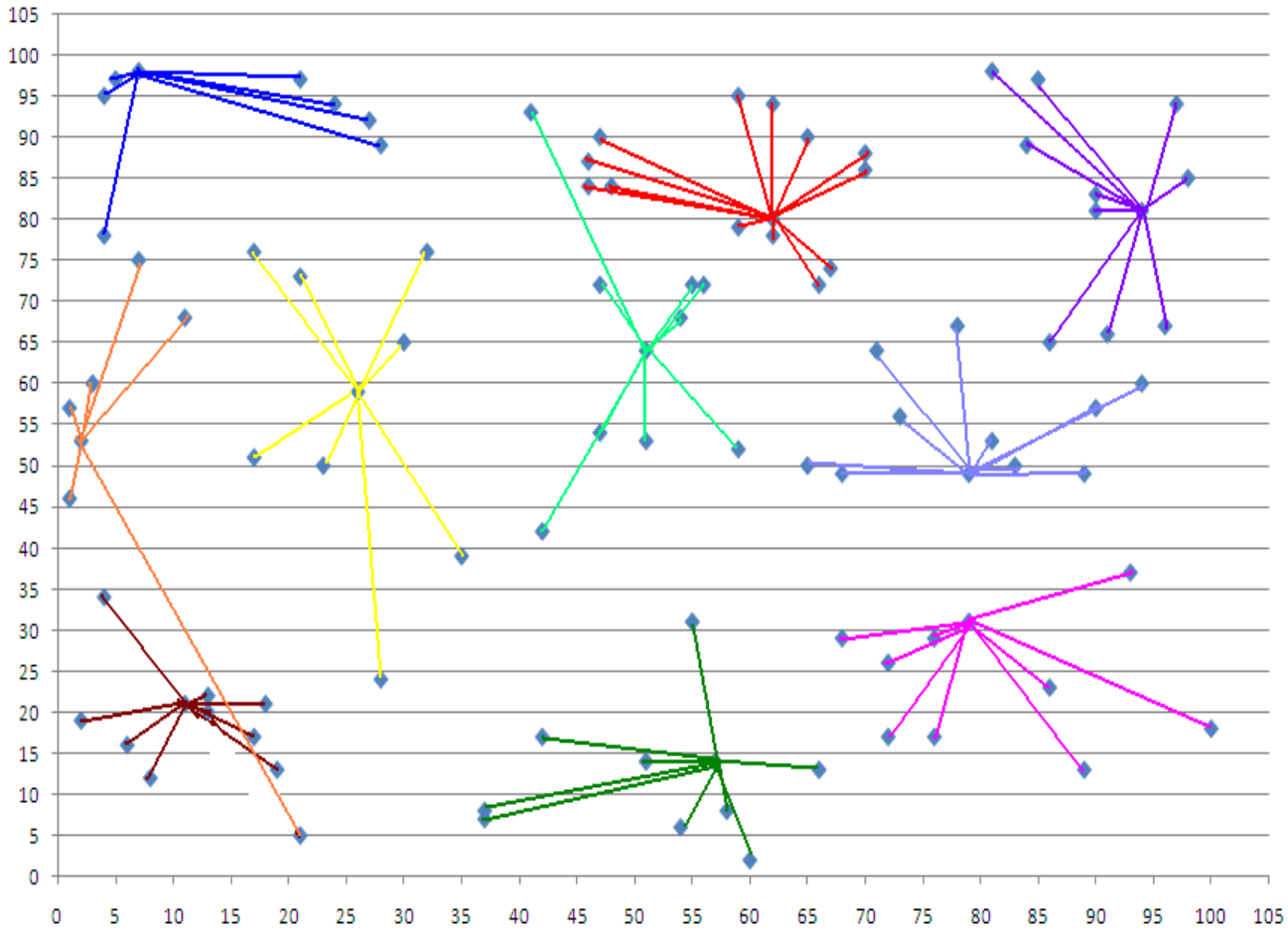


Σχήμα 4.17-example 17-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example18

p-medians	6	24	31	45	55	60	64	66	77	89
χωρητικότητα	89	110	118	100	117	119	93	114	102	109
πελάτες	6	24	31	45	55	60	64	66	77	89
	72	78	47	34	52	59	5	32	22	3
	51	96	33	84	26	46	1	82	53	21
	50	28	41	14	37	39	49	44	58	98
	7	61	68	29	87	12	80	69	35	75
	73	100	81	18	38	10	40	54	27	2
	79	65	19	76	25	62	86	70	95	23
	48	97	83	20	67	13		99	88	57
		9	74	36	42	4		56	43	17
		15	30	71	94	91		85		11
				63		8				92
						93				
						90				
						16				

πίνακας 4.19

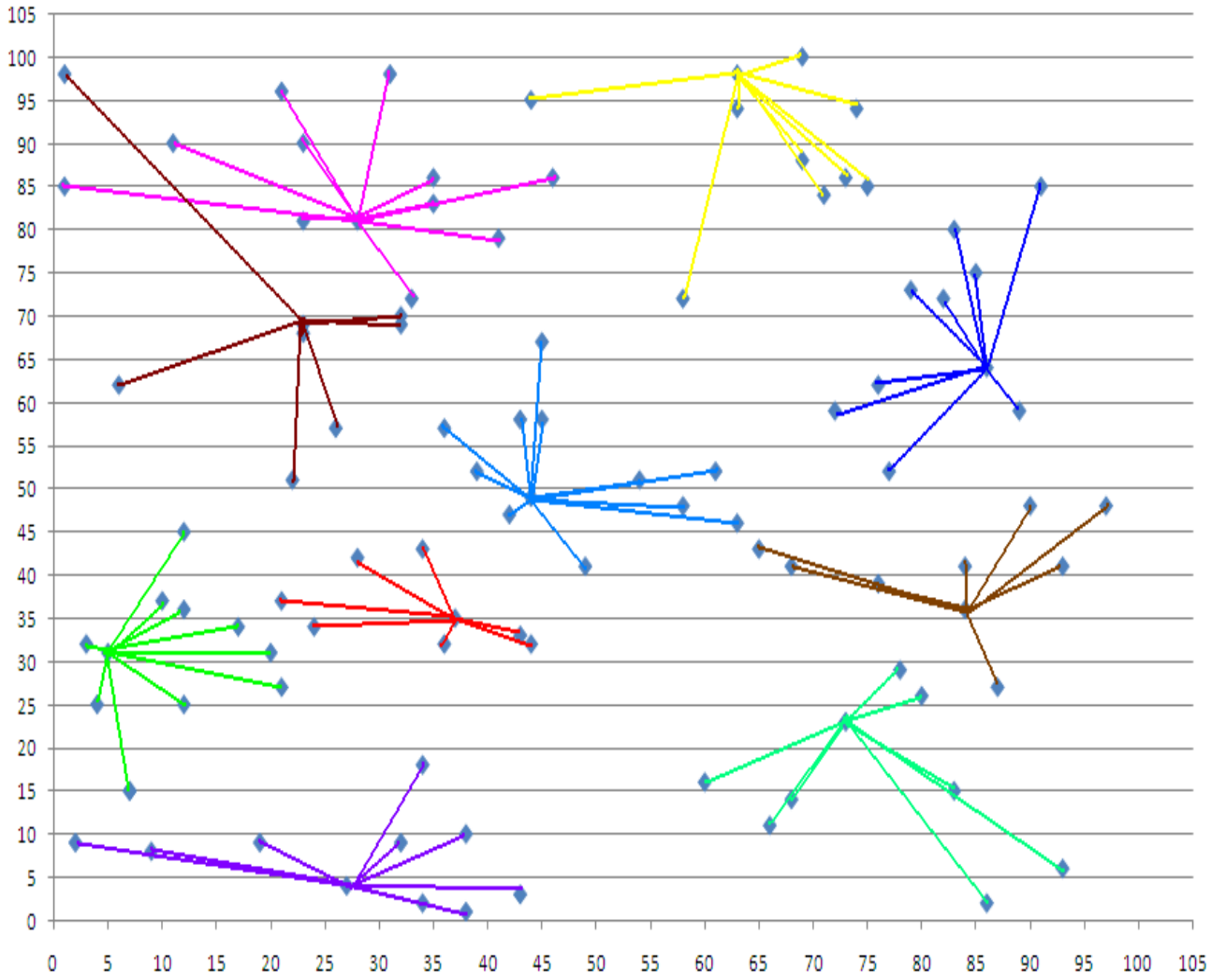


Σχήμα 4.18-example 18-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example19

p-medians	2	8	42	45	50	54	60	69	84	85
χωρητικότητα	118	105	115	100	109	116	97	108	97	120
πελάτες	2	8	42	45	50	54	60	69	84	85
	75	15	82	72	18	30	68	95	62	52
	38	90	26	48	44	65	92	39	66	83
	46	19	49	21	61	10	77	57	31	17
	41	13	9	78	7	32	100	47	89	34
	59	81	70	3	11	86	87	37	40	98
	6	20	74	4	56	97	53	58	14	96
	63	91	27	76	5	22	43	33	80	55
	51		24	23	35	79	29		1	12
	28		99		25	67			64	16
			94		71	93				
			36		88	73				

πίνακας 4.20

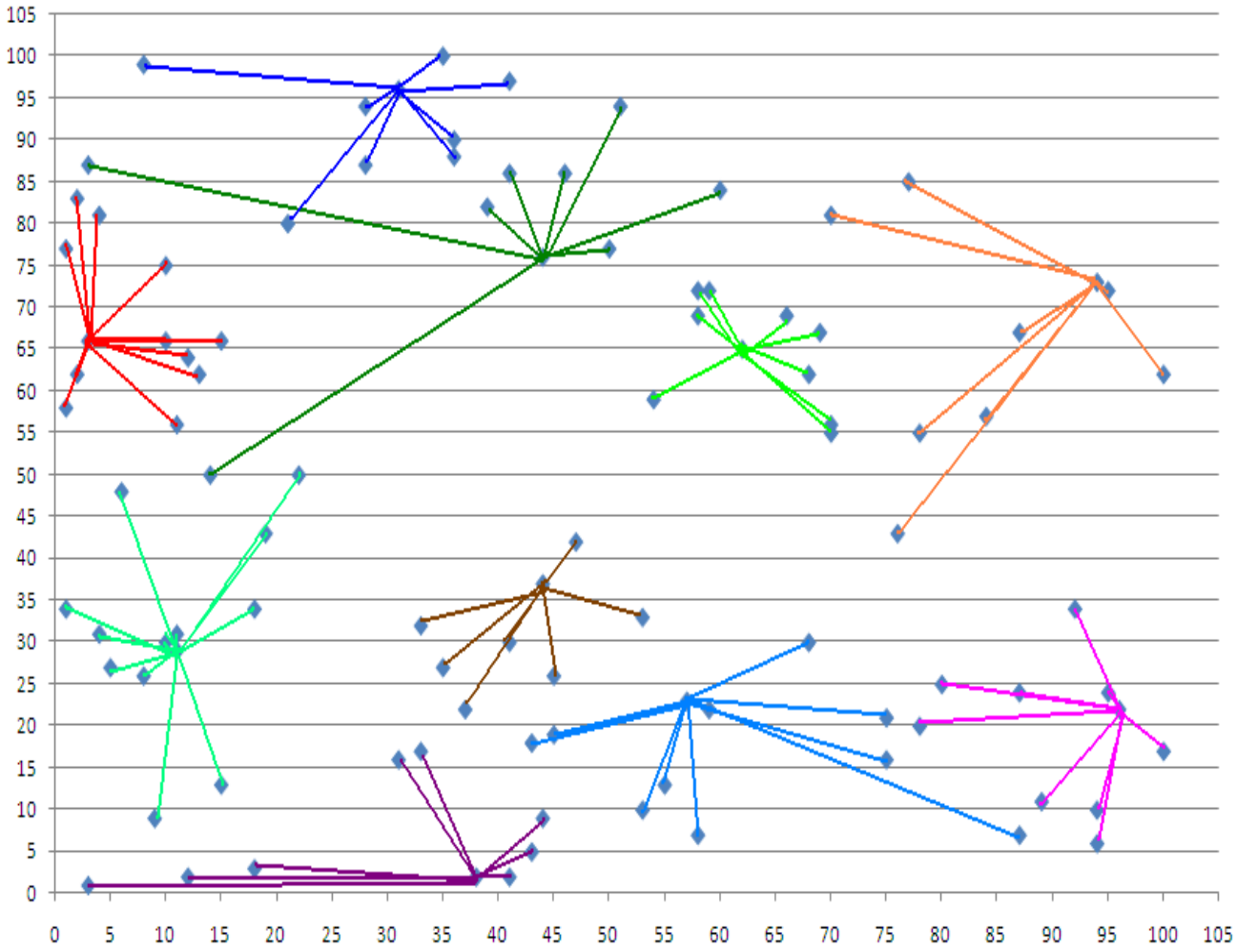


Σχήμα 4.19-example 19-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

example20

p-medians	4	13	35	47	52	57	60	62	71	77
χωρητικότητα	13	16	29	31	36	38	60	68	74	97
πελάτες	4	13	35	47	52	57	60	62	71	77
	37	93	92	72	1	90	81	38	83	69
	24	11	58	31	82	64	95	67	46	87
	96	56	12	75	50	33	68	85	97	27
	28	86	43	5	44	16	25	10	3	84
	54	45	53	22	91	98	7	30	70	29
	19	23	9	78	32	100	65	17	42	55
	76	18	2	26	80	74	89	49	63	73
	40	79	8	34	21	15	6	59	88	
	61		94		51	66		99		
	20				41	48				
					14	39				

πίνακας 4.21



Σχήμα 4.20-example 20-θέση του κάθε πελάτη στο χώρο και η εγκατάσταση που τον εξυπηρετεί.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε είναι ικανοποιητικά και για παράδειγμα για τα αρχεία ex2, ex3, ex4, ex7, η λύση η οποία βρέθηκε προσεγγίζει πολύ καλά την βέλτιστη από τα δεδομένα λύση. Συγκεκριμένα στο ex2 επιτύχαμε ακριβώς την βέλτιστη λύση. Οι μεγαλύτερες αποκλίσεις από την βέλτιστη λύση προέκυψαν για τα αρχεία ex11, ex19, ex20.Κατά μέσο όρο η απόκλιση του αλγορίθμου μας από τις βέλτιστες λύσεις κυμάνθηκε στο 4,9 %.Πιο συγκεκριμένα για τα ex1...10 η απόκλιση ήταν της τάξης του 1,593 % ενώ για τα ex11... 20 ήταν 8,21%.

Ένας βασικός λόγος για τον οποίο ο αλγόριθμος παρουσιάζει τις συγκεκριμένες αποκλίσεις αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο επιλέγονται οι p εγκαταστάσεις κάθε φορά που τρέχει ο αλγόριθμος,. Πιο συγκεκριμένα οι συνδυασμοί p (για παράδειγμα 5 και 10 στο δικό μας πρόβλημα) εγκαταστάσεων ανάμεσα σε n συνολικά (50 και 100 αντίστοιχα στο πρόβλημα μας) είναι ένας πάρα πολύ μεγάλος αριθμός.

Εν γένει το μειονέκτημα του αλγορίθμου επιλογής κέντρων που αναπτύχθηκε είναι το γεγονός ότι δεν εγγυάται ότι θα ελέγξει όλες τις πιθανές λύσεις σε εύλογο χρονικό διάστημα. Οπότε σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και η τύχη για το ποια θα είναι τα αποτελέσματα μας. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αν δώσουμε μεγάλο χρονικό περιθώριο είναι πολύ πιθανό να επιτύχουμε την βέλτιστη η κάποια πολύ κοντινή σε αυτή λύση. Σύμφωνα με τα παραπάνω εξηγείται κ η μεγαλύτερη απόκλιση που εμφάνισαν τα ex11...20 αφού αναφέρονται σε μεγαλύτερο πληθυσμό.

Γενικά, για τα προβλήματα χωροθέτησης (location) έχουν αναπτυχθεί αποδοτικές διαδικασίες επίλυσης για διαφορετικά προβλήματα του τομέα. Επειδή όμως ακριβώς υπάρχει διαφοροποίηση μεταξύ των προβλημάτων λόγω περιορισμών κτλ. Θεωρείται πολύ δύσκολο έως ακατόρθωτο να αναπτυχθούν αλγόριθμοι που να επιλύουν κάθε είδους πρόβλημα χωροθέτησης.

Μελλοντικά θα μπορούσαν να αναπτυχθούν μέσω συνδυασμού προβλημάτων από τον τομέα και άλλες μεθοδολογίες οι οποίες είναι αποδοτικότερες στην επίλυση προβλημάτων διαφορετικής φύσης που να καλύπτουν ένα ευρύτερο φάσμα των προβλημάτων χωροθέτησης.

Βιβλιογραφία

[1] Luiz A.N. Lorena, L.F. Senne , A column generation approach to capacitated p-median problems, Elsevier 2003

[2] Jafar Fathali, Department of Mathematics, Shahrood University of Technology, University Blvd., Shahrood, Iran, A genetic algorithm for the p-median problem with pos/neg weights, Elsevier 2006

[3] Roberto Dieguez Galvao, Coppe/federal university of Rio de Janeiro, Brazil, Ernesto del R. Santibanez-Gonzalez, ODEPLAN Bureau of national planning of Chile and Coppe/federal university of Rio de Janeiro, Brazil, A lagrangean heuristic for the pk-median dynamic location problem, European journal of operational research 1990

[4] Richard L. Church Department of Geography and The National Center for Geographic Information and Analysis, University of California at Santa Barbara, BEAMR: An exact and approximate model for the *p*-median problem, Elsevier 2006

[5] David Simchi-Levi Xin Chen Julien Bramel, The Logic of Logistics, Theory, Algorithms, and Applications for Logistics and Supply Chain Management, Springer 1997

[6] Gianpaolo Ghiani Department of Innovation Engineering, University of Lecce, Italy , Gilbert Laporte Canada Research Chair in Distribution Management, HEC Montreal, Canada
Roberto Musmanno Department of Electronics, Informatics and Systems, University of Calabria, Italy
Introduction to Logistics Systems Planning and Control, Wiley 2004

[7] C.S. ReVelle, H.A. Eiselt Department of Geography and Environmental Engineering, The Johns Hopkins University, Location analysis: A synthesis and survey, Elsevier 2004

[8] P.M. Dearing, department of mathematical science, Clemson university
Location problems, operations research letters 1985

[9] Stefan Nickel Justo Puerto, A unified approach- Location theory ,Springer 2005

[10] J. Fathali , A genetic algorithm for the p-median problem with pos/neg weights, Elsevier 2006

[11] Ιωάννης Μαρινάκης Αθανάσιος Μυγδαλάς, ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ, Εκδόσεις Σοφία, 2008