

ΑΠΟΤΥΠΩΣΗ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΩΝ
ΔΕΙΚΤΩΝ ΜΕΣΩ ΕΝΟΣ ΜΕΘΕΥΡΕΤΙΚΟΥ
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΣ
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ραφαήλ – Διογένης Πανταζής

Πολυτεχνείο Κρήτης

Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Χανιά, Οκτώβριος 2010

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέποντες καθηγητές

Μιχάλης Δούμπος, Επίκουρος Καθηγητής

Ιωάννης Μαρινάκης, Λέκτορας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	7
1. Εισαγωγή	9
2. Μοντελοποίηση	12
3. Βασικές έννοιες.....	15
3.1. Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι.....	15
3.2. Βελτιστοποίηση Πολλαπλών Στόχων	17
4. Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Σμήνους Σωματιδίων σε Προβλήματα Βελτιστοποίησης Πολλαπλών Στόχων – (MOPSO).....	18
4.1. PSO – Γενικά Στοιχεία.....	18
4.2. MOPSO – Γενικά Στοιχεία	22
4.3. Παρουσίαση του αλγορίθμου.....	24
5. Εφαρμογές & Αποτελέσματα	31
5.1. min Σφάλμα Αποτύπωσης – max Μέση Απόδοση	31
5.1.1. Γενικός Δείκτης X.A.A.	32
5.1.2. Frankfurt Xetra Dax	40
5.1.3. Υπερέχοντες συνδυασμοί για τους δύο δείκτες	43
5.2. min Σφάλμα Αποτύπωσης – max Μέση Απόδοση – min VaR.....	46
5.2.1. Γενικός Δείκτης X.A.A.	47
5.2.2. Frankfurt Xetra Dax	51
5.3. min Σφάλμα Αποτύπωσης – max Μέση Απόδοση – min VaR – min Πλήθος Μετοχών Χαρτοφυλακίου.....	53
6. Αξιολόγηση του Αλγορίθμου – Ανάπτυξη Επενδυτικών Σεναρίων.....	55
7. Συμπεράσματα	63
Βιβλιογραφία	65

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η αποτύπωση δείκτη αποτελεί μία ευρέως διαδεδομένη πρακτική παθητικής διαχείρισης κεφαλαίων. Συνίσταται στη σύνθεση και διαχείριση χαρτοφυλακίων χρεογράφων κατά τρόπο, ώστε να ακολουθούν με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια την πορεία ενός χρηματιστηριακού δείκτη. Στην παρούσα εργασία η αποτύπωση δείκτη συνδυάζεται με άλλα ζητούμενα διαμορφώνοντας προβλήματα βελτιστοποίησης πολλαπλών στόχων (πολυκριτήριας βελτιστοποίησης). Ο αλγόριθμος, που χρησιμοποιείται για την επίλυσή τους, είναι μία παραλλαγή του αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (Particle Swarm Optimization – PSO), ο οποίος ανήκει στην κατηγορία μεθευρετικών αλγορίθμων νοημοσύνης σμήνους. Η παραλλαγή έγκειται σε κατάλληλες τροποποιήσεις του αλγορίθμου, ώστε να ανταποκρίνεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης πολλαπλών στόχων (Multi-objective Particle Swarm Optimization – MOPSO). Τα προβλήματα, που επιλύονται, είναι τα εξής: **1.** Ελαχιστοποίηση σφάλματος αποτύπωσης – Μεγιστοποίηση μέσης απόδοσης, **2.** Ελαχιστοποίηση σφάλματος αποτύπωσης – Μεγιστοποίηση μέσης απόδοσης – Ελαχιστοποίηση αξίας σε κίνδυνο, **3.** Ελαχιστοποίηση σφάλματος αποτύπωσης – Μεγιστοποίηση μέσης απόδοσης – Ελαχιστοποίηση αξίας σε κίνδυνο – Ελαχιστοποίηση πλήθους μετοχών χαρτοφυλακίου. Οι εφαρμογές αφορούν μετοχές του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών και περιλαμβάνουν την αποτύπωση του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών και του Xetra Dax του Χρηματιστηρίου Αξιών της Φρανκφούρτης. Ακολουθεί διερεύνηση του κατά πόσον ο αλγόριθμος είναι αποδοτικός και άρα εφαρμόσιμος. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω εξέτασης της ωφέλειας ενός επενδυτή σε ορισμένη περίοδο αν προχωρήσει στην επένδυση κεφαλαίου σύμφωνα με τις εξαχθείσες από τον αλγόριθμο λύσεις.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Παθητική διαχείριση κεφαλαίων, Αποτύπωση χρηματιστηριακών δεικτών, Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου, Βελτιστοποίηση πολλαπλών στόχων, Μεθευρετικοί αλγόριθμοι, Αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σύνθεση και διαχείριση χαρτοφυλακίων αποτελεί πρόκληση και ζητούμενο για κάθε διαχειριστή κεφαλαίων (fund manager) και πεδίο συστηματικής έρευνας για περισσότερα από 50 χρόνια. Εν γένει, το πρόβλημα έγκειται στη διαμόρφωση ενός χαρτοφυλακίου χρεογράφων (μετοχές, ομολόγα, έντοκα γραμμάτια κ.λπ.) κατά τρόπο που να μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα του επενδυτή. Συνήθης στόχος είναι η αύξηση του επενδεδυμένου κεφαλαίου μεσο-μακροπρόθεσμα. Εφόσον διαμορφωθεί το χαρτοφυλάκιο, απαιτείται συνεχής παρακολούθηση κι αναδιάρθρωσή του στην πορεία του χρόνου, διότι οι αγορές χρεογράφων είναι δυναμικά μεταβαλλόμενες. Οι χρησιμοποιούμενες επενδυτικές μέθοδοι υπάγονται σε δύο ευρείες κατηγορίες που διαμορφώνουν ένα δίπολο (Beasley J.E. et al. [2003]):

Η ενεργητική διαχείριση (active management) εδράζεται στην παραδοχή ότι απαιτείται ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα για να αντιδράσουν οι χρηματοοικονομικές αγορές σε νέες πληροφορίες και να προσαρμοστούν ανάλογα οι τιμές των χρεογράφων. Κατά συνέπεια, υφίστανται προσωρινές ανισορροπίες, δηλαδή εσφαλμένως αποτιμημένα χρεόγραφα. Οι διαχειριστές προσπαθούν να ξεπεράσουν τις αποδόσεις της αγοράς εκμεταλλευόμενοι αυτές τις ανισορροπίες (αγορά υποτιμημένων – πώληση υπερτιμημένων χρεογράφων). Στην κατεύθυνση αυτή αναπτύσσουν διάφορες επενδυτικές στρατηγικές και επιχειρούν την πρόβλεψη των μελλοντικών τάσεων της αγοράς. Πολλές επιχειρήσεις επενδύσεων (investment companies) προσλαμβάνουν επαγγελματίες (professional investment managers) για την ενεργητική διαχείριση των αμοιβαίων κεφαλαίων τους, αποβλέποντας σε υψηλότερες αποδόσεις από αυτές που θα έδινε η εναρμόνιση με κάποιον δείκτη.

Η παθητική διαχείριση (passive management) στηρίζεται στην υπόθεση της αποτελεσματικής λειτουργίας της αγοράς (Efficient Market Hypothesis – EMH). Οι πληροφορίες, που μπορούν να επηρεάσουν την πορεία των τιμών, θεωρείται ότι αφομοιώνονται άμεσα. Έτσι, καθίσταται αδύνατο να «νικηθεί η αγορά» και ο μόνος τρόπος για την επίτευξη υψηλότερων αποδόσεων είναι η ανάληψη μεγαλύτερου κινδύνου. Οι διαχειριστές αποβλέπουν στην αντιγραφή της αγοράς μέσω της αποτύπωσης ενός δείκτη της και οι επενδύσεις τους έχουν μακροπρόθεσμο χαρακτήρα.

Ιστορικά έχει αποδειχθεί ότι η υπερνίκηση της αγοράς, που είναι η βασική επιδίωξη της ενεργητικής διαχείρισης, αποτελεί μία εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση ανεξάρτητα από τις ικανότητες και την εμπειρία του εκάστοτε διαχειριστή. Ακόμη και στην περίπτωση που καταστεί εφικτή, έχει πολύ περιορισμένη διάρκεια. Η παθητική διαχείριση και ειδικότερα η στρατηγική της δημιουργίας και διαχείρισης κεφαλαίων δεικτών (Index Funds)* ενδεχομένως να μην φαίνεται τόσο ελκυστική σε βραχυπρόθεσμο επίπεδο. Εντούτοις, έχει αναδειχθεί ως μια από τις καλύτερες για

* Συνήθως πρόκειται για Αμοιβαία Κεφάλαια (Mutual Funds) ή Χρηματιστηριακά Διαπραγματεύσιμα Αμοιβαία Κεφάλαια (Exchange – Traded Funds – ETFs)

τους μακροπρόθεσμους επενδυτές, υπερέχοντας της συντριπτικής πλειοψηφίας των στρατηγικών ενεργητικής διαχείρισης σε όρους απόδοσης της επένδυσης. Επιπροσθέτως, η παθητική διαχείριση συνεπάγεται έκθεση των επενδυτών αποκλειστικά στον κίνδυνο της αγοράς, εν αντιθέσει με την ενεργητική διαχείριση που εκθέτει τους επενδυτές και στον κίνδυνο της εταιρείας. Δύο ακόμη λόγοι, που έχουν καταστήσει την παθητική διαχείριση ευρέως διαδεδομένη, είναι τα χαμηλά κόστη συναλλαγών και η απλούστερη, συγκριτικά με την ενεργητική διαχείριση, διαδικασία λήψης αποφάσεων.

Όπως προαναφέρθηκε, η αποτύπωση δείκτη (index tracking) αποτελεί μια δημοφιλή μέθοδο παθητικής διαχείρισης χαρτοφυλακίου. Συνίσταται στη σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου, τέτοιου ώστε η πορεία του να προσομοιάζει στο μέγιστο δυνατό βαθμό στην πορεία ενός χρηματιστηριακού δείκτη. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί είτε μέσω πλήρους αποτύπωσης (full replication) είτε μέσω μερικής αποτύπωσης (partial replication). Σύμφωνα με την πρώτη προσέγγιση επενδύεται σε κάθε μία από τις μετοχές των επιχειρήσεων, που συγκροτούν τον δείκτη, ποσοστό ανάλογο του μεριδίου τους στην αγορά. Εξασφαλίζεται έτσι ότι το προκύπτον χαρτοφυλάκιο ακολουθεί επακριβώς την απόδοση του δείκτη. Ωστόσο, επιφέρει υψηλά αρχικά κόστη συναλλαγών και υπάρχει δυσκολία αναπροσαρμογής (rebalancing) σε ενδεχόμενες αλλαγές στη σύνθεση του δείκτη. Βάσει της δεύτερης προσέγγισης η επένδυση αφορά ένα υποσύνολο των μετοχών των επιχειρήσεων, που συγκροτούν το δείκτη. Τα έξοδα συναλλαγών είναι χαμηλότερα και η περιοδική αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου πιο εύκολη, όμως αναπόφευκτα η μέθοδος ενέχει ένα σφάλμα αποτύπωσης (tracking error), καθώς η αντιστοίχιση δεν είναι απόλυτα ακριβής.

Τονίζεται πως δεν είναι απαραίτητο οι μετοχές υπό εξέταση να περιλαμβάνονται στο δείκτη προς αποτύπωση. Η δυνατότητα αυτή είναι σημαντική για τον επενδυτή, καθώς διευρύνει τις επιλογές του. Μπορεί να χρησιμοποιήσει τις μετοχές οποιονδήποτε αγορών για τη σύνθεση χαρτοφυλακίου, το οποίο θα ακολουθεί την πορεία δείκτη οποιασδήποτε αγοράς, λαμβάνοντας υπόψη το αντίστοιχο σφάλμα αποτύπωσης.

Οι διαχειριστές, που ακολουθούν τη στρατηγική της αποτύπωσης δείκτη, καλούνται να πραγματοποιήσουν τη βέλτιστη επιλογή ενός συνόλου μετοχών από ένα μεγάλο πλήθος μετοχών, το οποίο θα μπορεί να αποτυπώσει την πορεία δεδομένου δείκτη ικανοποιητικά. Οι δύο κρίσιμες παράμετροι, που χρήζουν προσδιορισμού, είναι οι μετοχές, που θα συμπεριληφθούν στο χαρτοφυλάκιο, και τα ποσοστά συμμετοχής τους. Για τη μοντελοποίηση και επίλυση του προβλήματος έχει προταθεί πληθώρα μεθοδολογικών προσεγγίσεων. Σε πολλές εξ αυτών κρίνεται προτιμητέα η χρήση εξελικτικών αλγορίθμων, επειδή αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά η αυξημένη πολυπλοκότητα του προβλήματος. Ως παραδείγματα εφαρμογής εξελικτικών αλγορίθμων αναφέρονται ενδεικτικά οι εργασίες των J. Shapcott [1992], D. Eddelbütter [1996], J.E. Beasley et al. [2003], U. Derichs και N. Nickel [2004], C. Dose και S. Cincotti [2005]. Μερικά παραδείγματα επιλογής εναλλακτικών διαδικασιών βελτιστοποίησης και στατιστικών τεχνικών αποτελούν οι εργασίες των Y. Tabata και E. Takeda [1995], G.A. Larsen και B.G. Resnick [1998], R. Dembo και D. Rosen [1999], G. Bamberg και N. Wagner [2000].

Στη δεδομένη εργασία ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (PSO) έχει προσαρμοστεί κατάλληλα, ώστε να ανταποκρίνεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης πολλαπλών στόχων (Multi-objective Particle Swarm Optimization – MOPSO). Οι εφαρμογές αφορούν δεδομένα του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών. Επιχειρείται η επίλυση των εξής προβλημάτων:

1. Ελαχιστοποίηση σφάλματος αποτύπωσης – Μεγιστοποίηση μέσης απόδοσης
(min Tracking Error – max Average Return)
2. Ελαχιστοποίηση σφάλματος αποτύπωσης – Μεγιστοποίηση μέσης απόδοσης – Ελαχιστοποίηση αξίας σε κίνδυνο
(min Tracking Error – max Average Return – min Value at Risk)
3. Ελαχιστοποίηση σφάλματος αποτύπωσης – Μεγιστοποίηση μέσης απόδοσης – Ελαχιστοποίηση αξίας σε κίνδυνο – Ελαχιστοποίηση πλήθους μετοχών χαρτοφυλακίου
(min Tracking Error – max Average Return – min Value at Risk – min Portfolio Shares).

Δηλαδή, το πρόβλημα αποτύπωσης χρηματιστηριακών δεικτών εμπλουτίζεται με άλλες κατευθύνσεις. Στην πληρέστερη εκδοχή ο επενδυτής επιχειρεί να αναπαράξει τη συμπεριφορά του δείκτη, ενώ παράλληλα μεγιστοποιεί την απόδοσή του και περιορίζει τόσο την Αξία σε Κίνδυνο όσο και το πλήθος των μετοχών του χαρτοφυλακίου. Η ταυτόχρονη βελτιστοποίηση των αντικειμενικών συναρτήσεων καταλήγει σε ένα σύνολο κατά Pareto βέλτιστων λύσεων.

Στον αλγόριθμο έχουν συμπεριληφθεί τρεις μεθοδολογικές προσεγγίσεις για την αναπροσαρμογή της θέσης των σωματιδίων, οι οποίες επηρεάζουν σημαντικά την ταχύτητα σύγκλισης και την ποιότητα των λύσεων. Μέσω της επίλυσης του προβλήματος 1 με αποτύπωση του Γενικού Δείκτη καταδεικνύεται ποια εκ των τριών υπερέχει και οι άλλες δύο παραβλέπονται. Έτσι, για την επίλυση όλων των υπολοίπων προβλημάτων χρησιμοποιείται η καλύτερη από τις μεθοδολογικές προσεγγίσεις. Κάθε πρόβλημα επιλύεται δύο φορές. Μία για την αποτύπωση του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών και μία για την αποτύπωση του Xetra Dax του Χρηματιστηρίου Αξιών της Φρανκφούρτης.

Ο αλγόριθμος έχει υλοποιηθεί σε Microsoft Visual C++ 6.0 και οι εφαρμογές έχουν πραγματοποιηθεί σε υπολογιστή Dell Inspiron 580 με επεξεργαστή Intel(R) Core(TM) i3 CPU 530 @ 2.93GHz, εγκατεστημένη μνήμη (RAM) 4.00 GB και λειτουργικό σύστημα 64-bit. Καθώς τα προβλήματα 1 και 2 είναι δύο και τριών διαστάσεων αντίστοιχα, έχει γίνει γραφική απεικόνιση ορισμένων εκ των λύσεων στο Matlab R2007b.

Η εργασία δομείται ως εξής: Στην ενότητα 2 παρουσιάζεται η μοντελοποίηση κάθε προβλήματος. Στην ενότητα 3 παρατίθενται μερικές βασικές έννοιες σχετικά με τους μεθευρετικούς αλγορίθμους και τα προβλήματα πολυκριτήριας βελτιστοποίησης, ενώ η ενότητα 4 καλύπτει τη δομή και τη λειτουργία του αλγορίθμου. Στην ενότητα 5

παρουσιάζονται οι εφαρμογές και αναλύονται τα αποτελέσματα. Στην ενότητα 6 αξιολογείται η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου. Δηλαδή, πραγματοποιείται η υπόθεση της επένδυσης κεφαλαίου για συγκεκριμένη περίοδο βάσει των λύσεων του αλγορίθμου και υπολογίζεται η ωφέλεια του επενδυτή. Τέλος, στην ενότητα 7 αναπτύσσονται τα συναγόμενα συμπεράσματα.

2. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Τα προβλήματα 1, 2 και 3 μοντελοποιούνται ως μη γραμμικά προβλήματα. Η μη γραμμικότητα οφείλεται στο σφάλμα αποτύπωσης (tracking error – TE). Οι υπόλοιπες αντικειμενικές συναρτήσεις είναι γραμμικές. Τα δεδομένα αποτελούν οι τιμές N μετοχών, καθώς και οι τιμές των δεικτών προς αποτύπωση σε ένα χρονικό διάστημα $1, 2, \dots, T$. Το προκύπτον χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει K μετοχές, όπου $K \subset N$. Ανταποκρίνεται στους τεθέντες στόχους στην περίοδο $[1, T]$ και αναμένεται να κάνει το ίδιο όσο το δυνατόν καλύτερα σε μία περίοδο $[T, T + \Delta t]$, όπου Δt είναι ο χρονικός ορίζοντας της επένδυσης.

Στην πλέον διαδεδομένη θεώρηση η έννοια της απόδοσης (return) ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή της αξίας της επένδυσης κατά τη διάρκεια ενός δεδομένου χρονικού διαστήματος. Αν η αξία κτήσης ενός χρεογράφου i τη χρονική στιγμή t είναι $S_{i,t}$ και η αξία του σε μία προηγούμενη χρονική στιγμή $t - 1$ είναι $S_{i,t-1}$, τότε η απόδοση της επένδυσης στο χρεόγραφο είναι:

$$r_{i,t} = \frac{S_{i,t} - S_{i,t-1}}{S_{i,t-1}}$$

Η αναμενόμενη (μέση) αριθμητική απόδοση ενός χρεογράφου i ορίζεται ως εξής:

$$E(r_{i,t}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t}$$

Η μέση αριθμητική απόδοση παρέχει μια εκτίμηση για την απόδοση στην αμέσως επόμενη χρονική περίοδο. Η χρήση της για πολλαπλές χρονικές περιόδους προϋποθέτει σταθερό επενδεδυμένο κεφάλαιο.

Έστω w_i το ποσοστό του κεφαλαίου που έχει τοποθετηθεί στο χρεόγραφο i και $\mathbf{w}_i^T = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ το διάνυσμα με τα ποσοστά συμμετοχής των n χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο. Η απόδοση χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από τα n χρεόγραφα τη χρονική περίοδο t υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$r_{Pt} = \sum_{i=1}^n w_i r_{i,t}$$

Η μέση απόδοση χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από τα n χρεόγραφα την περίοδο $[1, T]$ προκύπτει ως εξής:

$$\bar{r}_{Pt} = E(r_{Pt}) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_{i,t})$$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος αποτύπωσης εντοπίζονται διάφορες προσεγγίσεις στη βιβλιογραφία. Οι R.C. Grinold και R.N. Kahn [1999] ορίζουν το σφάλμα αποτύπωσης ως την τυπική απόκλιση των διαφορών των αποδόσεων μεταξύ του χαρτοφυλακίου και του δείκτη:

$$TE_1 = stdev(r_{Pt} - r_{It}) = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T ((r_{Pt} - r_{It}) - (\bar{r}_{Pt} - \bar{r}_{It}))^2}$$

Εναλλακτικά, το σφάλμα αποτύπωσης κατά τον R. Roll [1992] μπορεί να υπολογιστεί, χρησιμοποιώντας την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου και του δείκτη:

$$TE_2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |r_{Pt} - r_{It}|$$

Μια τρίτη προσέγγιση είναι αυτή των N. Meade και G.R. Salkin [1990], όπου για τον υπολογισμό του σφάλματος αποτύπωσης χρησιμοποιείται το τετράγωνο της διαφοράς των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου και του δείκτη:

$$TE_3 = \sqrt{\sum_{t=1}^T \frac{(r_{Pt} - r_{It})^2}{T}}$$

Στην παρούσα εργασία το σφάλμα αποτύπωσης (TE) ορίζεται ως η δειγματική διασπορά των διαφορών των αποδόσεων μεταξύ του χαρτοφυλακίου και του δείκτη:

$$TE = Var(r_{Pt} - r_{It}) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T ((r_{Pt} - r_{It}) - (\bar{r}_{Pt} - \bar{r}_{It}))^2$$

- r_{Pt} ➔ Απόδοση του χαρτοφυλακίου τη χρονική περίοδο t ($t = 1, 2, \dots, T$)
- r_{It} ➔ Απόδοση του δείκτη τη χρονική περίοδο t ($t = 1, 2, \dots, T$)
- $\bar{r}_{Pt}$ ➔ Μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου την περίοδο $[1, T]$
- $\bar{r}_{It}$ ➔ Μέση απόδοση του δείκτη την περίοδο $[1, T]$

Η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk – VaR) αποτελεί τη μέγιστη αναμενόμενη ζημία, που μπορεί να υποστεί ένας επενδυτής, σε δεδομένο χρονικό διάστημα και σε ένα καθορισμένο βαθμό βεβαιότητας (βαθμός εμπιστοσύνης). Η πλέον απλή από τις εναλλακτικές διαδικασίες υπολογισμού είναι η ιστορική προσομοίωση (historical simulation). Οι αποδόσεις r_{pt} για κάθε χρονική περίοδο $t = 1, 2, \dots, T$ κάθε χαρτοφυλακίου κατατάσσονται από τη χαμηλότερη προς τη υψηλότερη. Για επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \alpha$ η VaR μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την απόδοση r^* , για την οποία το πλήθος n των περιπτώσεων με $r < r^*$ είναι $n = \alpha T$ (εάν το n δεν είναι ακέραιος αριθμός πραγματοποιείται γραμμική παρεμβολή). Η απόλυτη VaR είναι ίση με $-r^*S_0$, όπου S_0 είναι η αξία της επένδυσης.

Κατά συνέπεια, η συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση προκύπτει: $-r^*$

Το πλήθος μετοχών n του εκάστοτε χαρτοφυλακίου μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει μιας δυαδικής μεταβλητής $z_i \in \{0,1\}$, $\forall i = 1, 2, \dots, N$. Αν $z_i = 1$, τότε η μετοχή i περιλαμβάνεται στο χαρτοφυλάκιο, ενώ ισχύει το αντίθετο σε περίπτωση που $z_i = 0$. Η σχέση υπολογισμού είναι η ακόλουθη:

$$n = \sum_{i=1}^N z_i$$

Ακολουθεί η μοντελοποίηση των προβλημάτων. Οι περιορισμοί επεξηγούνται στη συνέχεια :

minimize	TE	(1, 2, 3)*
maximize	$E(r_{pt})$	(1, 2, 3)
minimize	$-r^*$	(2, 3)
minimize	n	(3)

υ.π.

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$z_i mp \leq w_i \leq z_i \quad , \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

$$2 \leq n \leq K$$

$$w_i \geq 0, z_i \in \{0, 1\} \quad , \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

$$K \leq N$$

* Τα 1, 2, 3 δηλώνουν τα προβλήματα, στα οποία εμφανίζεται η αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση / μεγιστοποίηση.

Ως w_i συμβολίζεται το ποσοστό συμμετοχής της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο, το οποίο παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$. Το mp (minimum percentage) είναι το ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής κάθε μετοχής στο χαρτοφυλάκιο. Η μεταβλητή K αντιπροσωπεύει το μέγιστο πλήθος μετοχών, που συνθέτουν κάθε χαρτοφυλάκιο. Εν γένει, μπορεί να λάβει τιμές στο διάστημα $[1, N]$. Στην προκειμένη περίπτωση, ωστόσο, έχει επιλεγεί να μη διαμορφώνονται χαρτοφυλάκια μιας μετοχής, άρα $K \in [2, N]$. Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου ζητείται από το χρήστη να ορίσει τις παραμέτρους mp και K . Για τις εφαρμογές της παρούσας εργασίας ορίζονται $mp = 1\%$ και $K = 20$.

Ο πρώτος περιορισμός διασφαλίζει ότι τα ποσοστά συμμετοχής του συνόλου των μετοχών αθροίζουν στο 1. Ο επόμενος περιορισμός εγγυάται ότι κάθε ποσοστό συμμετοχής κυμαίνεται σε ορισμένο εύρος τιμών: Αν η μετοχή i περιλαμβάνεται στο χαρτοφυλάκιο ($z_i = 1$) το w_i παίρνει τιμές, που κυμαίνονται από mp έως 1. Αντίθετα, αν η μετοχή δεν περιλαμβάνεται στο χαρτοφυλάκιο ($z_i = 0$) το w_i ισούται με 0. Τέλος, σύμφωνα με τον τρίτο περιορισμό το πλήθος των μετοχών ενός χαρτοφυλακίου ισούται κατ' ελάχιστο με 2 και κατά μέγιστο με K .

Όπως φαίνεται στη μοντελοποίηση, σε όλα τα προβλήματα υφίσταται περιορισμός, αναφορικά με το πλήθος μετοχών κάθε χαρτοφυλακίου. Στο πρόβλημα 3 το πλήθος μετοχών εκτός του περιορισμού, στον οποίο υπόκειται, αποτελεί αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση.

3. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

3.1. Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι

Προβλήματα πολυκριτήριας βελτιστοποίησης παρουσιάζονται στην πλειοψηφία των επιστημονικών πεδίων και η επίλυσή τους έχει επί μακρόν αποτελέσει πρόκληση για τους ερευνητές. Στην Επιχειρησιακή Έρευνα (OR) και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους έχει αναπτυχθεί μια ποικιλία μεθοδολογιών για την αντιμετώπισή τους. Εντούτοις, η πολυπλοκότητα, που παρουσιάζουν (ιδιαίτερα μεγάλος χώρος λύσεων, θόρυβος, πολλαπλοί στόχοι προς βελτιστοποίηση κ.α.), δυσχεραίνει ή καθιστά ανέφικτη την επίλυσή τους μέσω παραδοσιακών μεθοδολογιών. Τα ακόλουθα παραδείγματα καταδεικνύουν τις εξαιρετικά μεγάλες διαστάσεις του χώρου λύσεων σε προβλήματα σύνθεσης χαρτοφυλακίου, όπως τα 1, 2 και 3 της ενότητας 1.

Έστω ότι ένας επενδυτής καλείται να επιλέξει (α) από ένα σύνολο 100 μετοχών για να συνθέσει χαρτοφυλάκιο με 2 έως 25 μετοχές και (β) από ένα σύνολο 500 μετοχών για να συνθέσει χαρτοφυλάκιο με 2 έως 200 μετοχές. Οι δυνατοί συνδυασμοί μετοχών είναι:

$$(α) \quad \sum_{i=2}^{25} \left(\frac{100!}{i! \times (100-i)!} \right) \cong 3.57242E + 23$$

$$(\beta) \quad \sum_{i=2}^{200} \left(\frac{500!}{i! \times (500 - i)!} \right) \cong 1.4632E + 145$$

Επιπλέον των μετοχών, που θα συμπεριληφθούν, αναζητείται το ποσοστό συμμετοχής κάθε μιας εξ αυτών, αυξάνοντας περαιτέρω τις πιθανές λύσεις.

Μία εναλλακτική προσέγγιση αποτελούν οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι (Metaheuristic Algorithms), οι οποίοι έχουν αναπτυχθεί τις τρεις τελευταίες δεκαετίες. Εν γένει, ένας μεθευρετικός αλγόριθμος ορίζεται ως μία υπολογιστική μέθοδος, που βελτιστοποιεί ένα πρόβλημα μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας, η οποία αποσκοπεί στη βελτίωση μιας λύσης ή ενός πληθυσμού λύσεων σύμφωνα με κάποιο μέτρο ποιότητας. Η επαναληπτική διαδικασία προκύπτει από το συνδυασμό μεθόδων τοπικής αναζήτησης και υψηλότερου επιπέδου στρατηγικών και κατά κανόνα καταφέρνει να ξεφεύγει από τοπικά ελάχιστα.

Η εφαρμογή μεθευρετικών αλγορίθμων απαιτεί λίγες ή και καθόλου παραδοχές αναφορικά με το πρόβλημα προς βελτιστοποίηση. Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό είναι η ικανότητα των μεθευρετικών αλγορίθμων να πραγματοποιούν αναζήτηση σε χώρους υποψηφίων λύσεων εξαιρετικά μεγάλων διαστάσεων. Ακόμη, αξίζει να αναφερθεί ότι χρησιμοποιούνται σε προβλήματα όχι μόνο διακριτού χώρου αναζήτησης αλλά και συνεχούς. Ωστόσο, η εύρεση βέλτιστης λύσης δεν είναι εγγυημένη και στις περισσότερες περιπτώσεις γίνεται αποδεκτή μία ικανοποιητική, υποβέλτιστη λύση. Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι είναι εμπνευσμένοι από διαδικασίες, που απαντώνται στη φύση. Παρατίθενται ορισμένα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα:

- Προσομοιωμένη Ανόπτηση (Simulated Annealing),
S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt and M.P. Vecchi [1982]
- Αλγόριθμος Διασκορπισμένης Αναζήτησης (Scatter Search),
F.W. Glover [1977]
- Αλγόριθμος Περιορισμένης Αναζήτησης (Tabu Search),
F.W. Glover [1986]
- Νευρωνικά Δίκτυα (Neural Networks)
- Γενετικοί Αλγόριθμοι (Genetic Algorithms)
J.H. Holland [1975]
- Αλγόριθμος της Διαφορικής Εξέλιξης (Differential Evolution),
R. Storn and K. Price [1997]
- Διαδικασία Άπληστης Τυχαιοποιημένης Προσαρμοστικής Αναζήτησης
(Greedy Randomized Adaptive Search Procedure),
T.A. Feo and M.G.C. Resende [1989]
- Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Αποικίας Μυρμηγκιών (Ant Colony Optimization)
M. Dorigo [1992]

- Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Ζευγαρώματος Μελισσών (Honey Bees Mating Optimization)
- Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Σμήνους Σωματιδίων (Particle Swarm Optimization)
J. Kennedy and R.C. Eberhart [1995]

Οι τρεις τελευταίες περιπτώσεις είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα αλγορίθμων Νοημοσύνης Σμήνους (Swarm Intelligence).

3.2. Βελτιστοποίηση Πολλαπλών Στόχων

Στα προβλήματα βελτιστοποίησης πολλαπλών στόχων οι αντικειμενικές συναρτήσεις προς βελτιστοποίηση είναι συνήθως αντικρουόμενες μεταξύ τους, γεγονός που συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει μία βέλτιστη λύση. Αντίθετα, εντοπίζεται ένα σύνολο λύσεων, στο οποίο έχουν συνδυαστεί όσο το δυνατόν καλύτερα οι διαφορετικοί στόχοι.

Ζητείται η επίλυση προβλημάτων του τύπου (Reyes-Sierra M. and Coello Coello C.A. [2006]):

$$\text{minimize} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})]$$

υ.π.

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, q$$

όπου το $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ αποτελεί το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης, τα $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ είναι οι αντικειμενικές συναρτήσεις και τέλος, τα $g_j, h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, p$, $k = 1, 2, \dots, q$ είναι οι περιορισμοί.

Μερικοί ορισμοί είναι αναγκαίοι για να περιγραφεί η έννοια της βελτιστοποίησης και το προκύπτον σύνολο λύσεων. Οι ορισμοί γίνονται θεωρώντας ελαχιστοποίηση όλων των αντικειμενικών συναρτήσεων (Engelbrecht A.P. [2007]).

Ορισμός 1: Έστωσαν διανύσματα μεταβλητών απόφασης $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$, όπου $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Το $\mathbf{x}$ κυριαρχεί του $\mathbf{y}$ (σημειώνεται ως $\mathbf{x} < \mathbf{y}$), αν και μόνον αν:

1. το $\mathbf{x}$ δεν είναι χειρότερο του $\mathbf{y}$ στο σύνολο των αντικειμενικών συναρτήσεων, δηλαδή $f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{y})$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$
2. το $\mathbf{x}$ είναι αυστηρά καλύτερο του $\mathbf{y}$ σε τουλάχιστον μία αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή $\exists i = 1, 2, \dots, m$: $f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{y})$

Ομοίως ένα διάνυσμα αντικειμενικών συναρτήσεων $f(x)$ κυριαρχεί ενός διανύσματος αντικειμενικών συναρτήσεων $f(y)$ (σημειώνεται ως $f(x) < f(y)$), αν και μόνον αν το $f(x)$ δεν είναι χειρότερο του $f(y)$ στο σύνολο των αντικειμενικών συναρτήσεων και το $f(x)$ είναι αυστηρά καλύτερο του $f(y)$ σε τουλάχιστον μία αντικειμενική συνάρτηση.

Δηλαδή, μία λύση x είναι καλύτερη μίας λύσης y εφόσον $x < y$, το οποίο συμβαίνει όταν $f(x) < f(y)$.

Ορισμός 2: Ένα διάνυσμα μεταβλητών απόφασης $x \in F$ (όπου F η εφικτή περιοχή) είναι κατά Pareto βέλτιστο (Pareto – optimal) και συμβολίζεται ως x^* αν δεν υπάρχει διάνυσμα μεταβλητών απόφασης $x' \neq x \in F$ από το οποίο να κυριαρχείται. Δηλαδή, $\nexists: f(x') < f(x)$. Αντίστοιχα, ένα διάνυσμα μεταβλητών απόφασης $f(x)$ είναι κατά Pareto βέλτιστο αν το x είναι κατά Pareto βέλτιστο και συμβολίζεται $f(x^*)$.

Ορισμός 3: Το σύνολο των κατά Pareto βέλτιστων διανυσμάτων μεταβλητών x^* απόφασης συνθέτουν το κατά Pareto βέλτιστο σύνολο (Pareto – optimal Set), το οποίο συμβολίζεται ως P^* :

$$P^* = \{x \in F \mid \nexists x' \in F : x' < x\}$$

Ορισμός 4: Δοθέντων των $f(x)$ και του κατά Pareto βέλτιστου συνόλου P^* μπορεί να οριστεί το κατά Pareto βέλτιστο μέτωπο (Pareto – optimal front). Αποτελείται από τα διανύσματα αντικειμενικών συναρτήσεων, τα οποία αντιστοιχούν σε διανύσματα μεταβλητών απόφασης του συνόλου P^* , δηλαδή τα $f(x^*)$:

$$PF^* = \{f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)] \mid x \in P^*\}$$

Την έννοια της κατά Pareto βελτιστότητας εισήγαγε πρώτος ο Francis Ysidro Edgeworth. Η έννοια ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του μαθηματικού Vilfredo Pareto, ο οποίος τη γενίκευσε.

4. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΜΗΝΟΥΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΣΤΟΧΩΝ – (MOPSO)

4.1. PSO – Γενικά Στοιχεία

Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων* (PSO) είναι ένας αλγόριθμος ολικής βελτιστοποίησης, που προτάθηκε από τους J. Kennedy και R.C.

* Οι έννοιες του σμήνους και των σωματιδίων είναι ανάλογες με τις έννοιες του πληθυσμού και των ατόμων, που χρησιμοποιούνται στους εξελικτικούς αλγόριθμους.

Eberhart το 1995. Στόχος τους ήταν να προσομοιώσουν την κοινωνική συμπεριφορά κάποιων οργανισμών, όπως την πτήση σε μορφή σμήνους των πουλιών και την ομαδική κίνηση των ψαριών. Ο αλγόριθμος έχει αποδειχθεί αποτελεσματικός σε μεγάλο εύρος εφαρμογών, οδηγώντας σε πολύ καλά αποτελέσματα με χαμηλό υπολογιστικό κόστος και η υλοποίηση του είναι αρκετά απλή. Είναι δημοφιλής ιδιαίτερα σε προβλήματα με συνεχείς μεταβλητές απόφασης.

Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τη φυσική κίνηση των σωματιδίων του σμήνους και διαθέτει έναν ευέλικτο και καλά ισορροπημένο μηχανισμό, που προσαρμόζεται στις ολικές και τοπικές ικανότητες εξερεύνησής τους. Αρχικά, δημιουργείται ένα σμήνος N σωματιδίων. Κάθε σωματίδιο i έχει συγκεκριμένη θέση $\mathbf{s}_i$ στο χώρο λύσεων και κινείται με συγκεκριμένη ταχύτητα $\mathbf{v}_i$, όπου $i = 1, 2, \dots, N$. Τα διανύσματα $\mathbf{s}_i$ και $\mathbf{v}_i$ κάθε σωματιδίου i είναι n -διαστάσεων. Οι συνιστώσες της θέσης ενός σωματιδίου i συμβολίζονται με s_{ij} και της ταχύτητας του με v_{ij} , όπου $j = 1, 2, \dots, n$. Η θέση κάθε σωματιδίου αποτελεί μια πιθανή λύση του προβλήματος. Η απόδοσή της λύσης εκτιμάται από μία προκαθορισμένη συνάρτηση ποιότητας (fitness function). Τα σωματίδια πραγματοποιούν «πτήσεις» στον n -διάστατο χώρο αναζήτησης. Η θέση $\mathbf{s}_i$ κάθε σωματιδίου αναπροσαρμόζεται συναρτήσει της δικής του εμπειρίας και αυτής των γειτονικών σωματιδίων.

Έστω $\mathbf{s}_i(t)$ η θέση του σωματιδίου i στο χώρο λύσεων τη χρονική στιγμή t . Η θέση την επόμενη χρονική στιγμή προκύπτει αθροίζοντας στην τρέχουσα θέση $\mathbf{s}_i(t)$ μία ταχύτητα $\mathbf{v}_i(t+1)$:

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \mathbf{s}_i(t) + \mathbf{v}_i(t+1) \quad (4.1.1)$$

ή

$$s_{ij}(t+1) = s_{ij}(t) + v_{ij}(t+1)$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας εμπεριέχει τόσο την εμπειρία του σωματιδίου όσο και τις πληροφορίες από την αλληλεπίδραση με γειτονικά σωματίδια:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i(t+1) = & \mathbf{v}_i(t) + c_1 \text{rand}_1 (\mathbf{s}_{best_i} - \mathbf{s}_i(t)) \\ & + c_2 \text{rand}_2 (\mathbf{s}_{leader} - \mathbf{s}_i(t)) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Στη σχέση (4.1.2) τα c_1 και c_2 αποτελούν συντελεστές εκμάθησης. Ο συντελεστής c_1 αντιπροσωπεύει την τάση, που έχει το σωματίδιο i να κινηθεί σύμφωνα με τη δική του εμπειρία, ενώ ο συντελεστής c_2 αντιπροσωπεύει την τάση, που έχει το σωματίδιο i να κινηθεί σύμφωνα με την εμπειρία των γειτονικών σωματιδίων. Τα rand_1 και rand_2 είναι μεταβλητές, που παίρνουν τυχαίες τιμές στο διάστημα $[0, 1]$. Ο όρος $\mathbf{s}_{best_i}$ είναι η βέλτιστη θέση, που είχε το σωματίδιο i κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων, δηλαδή αντικατοπτρίζει την εμπειρία του. Ως $leader$ ορίζεται το σωματίδιο, που χρησιμοποιείται για να οδηγήσει ένα άλλο σωματίδιο σε καλύτερες περιοχές του χώρου αναζήτησης ($\mathbf{s}_{leader}$ είναι η θέση του). Η φύση του διανύσματος της ταχύτητας και ο τρόπος υπολογισμού της θέσης έχουν ως άμεσο

επακόλουθο την ανακάλυψη βέλτιστων περιοχών σε έναν υψηλών διαστάσεων χώρο αναζήτησης.

Η χρήση βάρους αδράνειας (inertia weight) w στον υπολογισμό της ταχύτητας προτάθηκε από τους R.C. Eberhart και Y. Shi το 1998 για να ελεγχθεί πιο αποτελεσματικά η σύγκλιση του αλγορίθμου. Το βάρος αδράνειας ελέγχει την επιρροή των προηγούμενων ταχυτήτων ενός σωματιδίου στην τρέχουσα ταχύτητα. Η σχέση υπολογισμού των ταχυτήτων αναπροσαρμόζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i(t+1) = & w\mathbf{v}_i(t) + c_1 \text{rand}_1 (\mathbf{s}_{best_i} - \mathbf{s}_i(t)) \\ & + c_2 \text{rand}_2 (\mathbf{s}_{leader} - \mathbf{s}_i(t)) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Το βάρος αδράνειας επηρεάζει τις δυνατότητες εξερεύνησης του σμήνους σωματιδίων. Οι μεγάλες τιμές διευκολύνουν την ευρεία, μεγάλης κλίμακας εξερεύνηση, ενώ οι μικρές προωθούν την τοπική, μικρής κλίμακας εξερεύνηση.

Με στόχο την καλύτερη δυνατή εξερεύνηση, το βάρος w είναι μειούμενο γραμμικά και ενημερώνεται, σύμφωνα με τη σχέση:

$$w = w_{max} - \frac{w_{max} - w_{min}}{iterations} t \quad (4.1.4)$$

όπου, w_{max} είναι η μέγιστη και w_{min} η ελάχιστη τιμή, που το βάρος αδράνειας μπορεί να πάρει, $iterations$ ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων και t η τρέχουσα επανάληψη.

Μια άλλη προσέγγιση για τον υπολογισμό της ταχύτητας ακολούθησαν οι M. Clerc και J. Kennedy το 2002. Με στόχο την αποφυγή έκρηξης (δηλαδή της απομάκρυνσης από το ολικό βέλτιστο) και την εξασφάλιση σύγκλισης εισήγαγαν στη σχέση (4.1.2) έναν παράγοντα περιορισμού (constriction factor) χ . Η σχέση (4.1.2) με την προσθήκη του παράγοντα χ διαμορφώνεται ως εξής:

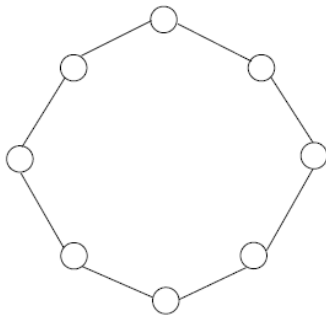
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i(t+1) = & \chi (\mathbf{v}_i(t) + c_1 \text{rand}_1 (\mathbf{s}_{best_i} - \mathbf{s}_i(t)) \\ & + c_2 \text{rand}_2 (\mathbf{s}_{leader} - \mathbf{s}_i(t))) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

όπου,

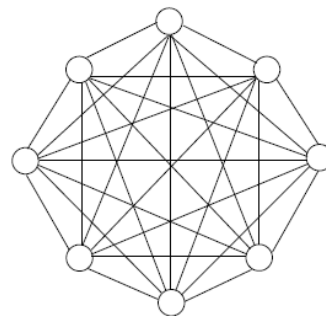
$$\chi = \frac{2}{|2 - c - \sqrt{c^2 - 4c}|} \quad , \quad c = c_1 + c_2 > 4 \quad (4.1.6)$$

Η τοπολογία της γειτονιάς καθορίζει το σύνολο των σωματιδίων, που συνδέονται και αλληλεπιδρούν με ένα δεδομένο σωματίδιο. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις αποτελούν οι τοπολογίες αστέρα, δέντρου και δακτυλίου και η πλήρως συνδεδεμένη τοπολογία. Σύμφωνα με το μέγεθος της γειτονιάς των σωματιδίων διακρίνονται δύο βασικές κατηγορίες PSO. Πρόκειται για τους *local best* (*lbest*) και *global best* (*gbest*) PSO. Στους *local best* PSO το εκάστοτε σωματίδιο συνδέεται και αλληλεπιδρά με τους k άμεσους γείτονές του, όπου $k < N$. Οπότε στις σχέσεις (4.1.2),

(4.1.3) και (4.1.5) $s_{leader} = s_{lbest}$, όπου $lbest$ το σωματίδιο με τη βέλτιστη θέση (βέλτιστο σωματίδιο), μεταξύ των k γειτονικών σωματιδίων (π.χ. αν $k = 2$ πρόκειται για τοπολογία δακτυλίου). Στους *global best* PSO υπάρχει πλήρως συνδεδεμένη τοπολογία, δηλαδή κάθε σωματίδιο του σμήνους συνδέεται με όλα τα υπόλοιπα σωματίδια του σμήνους. Επομένως, στις σχέσεις (4.1.2), (4.1.3) και (4.1.5) είναι $s_{leader} = s_{gbest}$, όπου $gbest$ το βέλτιστο σωματίδιο μεταξύ όλων των σωματιδίων.



Σχήμα 1: Τοπολογία Δακτυλίου



Σχήμα 2: Πλήρως συνδεδεμένη τοπολογία

ΕΝΑΡΞΗ

- Επιλογή του αριθμού των σωματιδίων του σμήνους
- Αρχικοποίηση της θέσης και της ταχύτητας κάθε σωματιδίου
- Υπολογισμός της αρχικής απόδοσης κάθε σωματιδίου
- Εύρεση του βέλτιστου σωματιδίου ολόκληρου του σμήνους
- Αρχικοποίηση βέλτιστης λύσης (s_{best_i}) κάθε σωματιδίου με την αρχική λύση

ΚΥΡΙΑ ΦΑΣΗ

Ενώ δεν έχει φτάσει ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων

Για κάθε σωματίδιο

- Υπολογισμός της ταχύτητας
- Υπολογισμός της νέας θέσης
- Υπολογισμός της νέας απόδοσης
- Ενημέρωση της βέλτιστης λύσης

Τέλος Για

Ενημέρωση του βέλτιστου σωματιδίου ολόκληρου του σμήνους

Τέλος Ενώ

Επιστροφή του αποτελέσματος (βέλτιστης λύσης)

ΤΕΛΟΣ

Ψευδοκώδικας ενός PSO (gbest)

4.2. MOPSO – Γενικά Στοιχεία

Οι εξισώσεις, που αναπτύχθηκαν στην ενότητα 4.1 για τον υπολογισμό της θέσης και της ταχύτητας των σωματιδίων (σχέσεις 4.1.1 – 4.1.6) ισχύουν και σε προβλήματα βελτιστοποίησης πολλαπλών στόχων. Ωστόσο, η αντιμετώπιση περισσότερων αντικειμενικών συναρτήσεων παρουσιάζει ορισμένες διαφορές σε σχέση με την περίπτωση μιας αντικειμενικής συνάρτησης.

Κατά την επίλυση προβλήματος μιας αντικειμενικής συνάρτησης, όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα, ο *leader*, που χρησιμοποιεί κάθε σωματίδιο για να τροποποιήσει τη θέση του, καθορίζεται πλήρως από την τοπολογία της γειτονιάς. Στην περίπτωση των προβλημάτων βελτιστοποίησης πολλαπλών στόχων κάθε σωματίδιο ενδέχεται να έχει ένα σύνολο από *leaders* από τους οποίους μόνον ένας μπορεί να επιλεγεί για την αναπροσαρμογή της θέσης του. Το σύνολο αυτό, το οποίο συγκροτούν οι μη κυριαρχούμενες (ορισμός 2, ενότητα 3.2) λύσεις του σμήνους, αποθηκεύεται σε διαφορετικό μέρος (αρχείο/δυναμικά μεταβαλλόμενη διάταξη) από το σμήνος σωματιδίων, το οποίο έστω ότι ονομάζεται εξωτερικό αρχείο (*external archive*). Σε κάθε επανάληψη το αρχείο ενημερώνεται. Οι περιεχόμενες στο αρχείο λύσεις, εκτός από *leaders* για τη μετάβαση των σωματιδίων σε νέα θέση, είναι συνήθως και το τελικό αποτέλεσμα του αλγορίθμου (P^* , PF^* , ενότητα 3.2).

Όπως παρουσιάζεται στον ψευδοκώδικα, σε έναν MOPSO αλγόριθμο αρχικά επιλέγεται ο αριθμός των σωματιδίων του σμήνους και συντελείται η αρχικοποίηση των θέσεων και των ταχυτήτων τους. Ακολουθεί ο υπολογισμός της αρχικής απόδοσης κάθε σωματιδίου. Έπειτα, εντοπίζονται οι *leaders* (μη κυριαρχούμενα σωματίδια), οι οποίοι αποθηκεύονται σε εξωτερικό αρχείο και υπολογίζεται γι' αυτούς κάποιο μέτρο ποιότητας, ώστε να επιλεγεί (συνήθως) ένας για κάθε σωματίδιο του σμήνους. Επόμενο βήμα είναι η αρχικοποίηση της βέλτιστης λύσης (s_{best_i}) κάθε σωματιδίου με την αρχική λύση.

Σε κάθε επανάληψη για κάθε σωματίδιο επιλέγεται βάσει του μέτρου ποιότητας ένας *leader* και πραγματοποιείται η μετάβαση σε νέα θέση. Η πλειοψηφία των υπαρχόντων MOPSOs περιλαμβάνει κάποιου είδους τελεστή μετάλλαξης, ο οποίος εφαρμόζεται στα σωματίδια μετά την μετάβασή τους σε νέα θέση. Στη συνέχεια, υπολογίζεται η νέα απόδοση κάθε σωματιδίου και ενημερώνεται η βέλτιστη λύση του. Μία νέα λύση αντικαθιστά την τρέχουσα s_{best_i} είτε όταν η πρώτη κυριαρχεί της δεύτερης είτε όταν είναι μη κυριαρχούμενες μεταξύ τους. Μετά ενημερώνονται όλοι οι *leaders* και υπολογίζεται το μέτρο ποιότητάς τους. Όταν εκτελεστούν όλες οι επαναλήψεις οι περιγραφείσες διαδικασίες διακόπτονται και εξάγονται τα αποτελέσματα, δηλαδή το P^* και συνεπώς και το PF^* .

Ακολουθεί ψευδοκώδικας του MOPSO αλγορίθμου. Οι διαδικασίες, που διαφοροποιούν τον MOPSO από τον PSO, υποδεικνύονται με '*':

ΕΝΑΡΞΗ

Επιλογή του αριθμού των σωματιδίων του σμήνους

Αρχικοποίηση της θέσης και της ταχύτητας κάθε σωματιδίου

Υπολογισμός της αρχικής απόδοσης κάθε σωματιδίου

*Εύρεση των μη κυριαρχούμενων λύσεων (*leaders*) και αποθήκευσή τους σε εξωτερικό αρχείο

*Υπολογισμός μέτρου ποιότητας για τους *leaders*

Αρχικοποίηση βέλτιστης λύσης (s_{best_i}) κάθε σωματιδίου με την αρχική λύση

ΚΥΡΙΑ ΦΑΣΗ

Ενώ δεν έχει φτάσει ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων

Για κάθε σωματίδιο

*Επιλογή ενός εκ των *leaders*

Υπολογισμός της ταχύτητας

Υπολογισμός της νέας θέσης

*Μετάλλαξη

Υπολογισμός της νέας απόδοσης

Ενημέρωση της βέλτιστης λύσης

Τέλος Για

*Ενημέρωση των *leaders* στο εξωτερικό αρχείο

*Υπολογισμός μέτρου ποιότητας για τους *leaders*

Τέλος Ενώ

Επιστροφή των αποτελεσμάτων (P^ , PF^*)

ΤΕΛΟΣ

Ψευδοκώδικας ενός MOPSO

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές εργασίες, που περιλαμβάνουν την ανάπτυξη αλγορίθμων MOPSO, την εφαρμογή τους σε προβλήματα ή τη σύγκρισή τους με άλλους αλγορίθμους. Ενδεικτικά, αναφέρονται οι εργασίες των J. Moore και R. Chapman [1999], C.A. Coello Coello και M.S. Lechuga [2002], K.E. Parsopoulos και M.N. Vrahatis. [2002], L.B. Zhang, C.G. Zhou, X.H. Liu, Z.Q. Ma και Y.C. Liang [2003], S. Mostaghim και Jürgen Teich [2003], X. Li [2003], C.A. Coello Coello, G.T. Pulido και M.S. Lechuga [2004], M. Mahfouf, M.-Y. Chen και D.A. Linkens [2004], J.E. Alvarez-Benitez, R.M. Everson και J.E. Fieldsend [2005], M.A. Villalobos-Arias, G.T. Pulido και Carlos A. Coello Coello [2005], S. Janson και D. Merkle [2005].

4.3. Παρουσίαση του αλγορίθμου

Οι εφαρμογές της εργασίας αφορούν τις μετοχές του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (Χ.Α.Α.), οι οποίες διαμορφώνουν τους δείκτες FTSE-20, FTSE-40, FTSE-80 καθώς και το Γενικό Δείκτη, και είναι εισηγμένες τουλάχιστον από την 1/9/2005. Πρόκειται για 125 μετοχές. Τα δεδομένα, που λήφθηκαν υπόψη, είναι οι τιμές κλεισίματος των μετοχών αυτών, του Γενικού Δείκτη του Χ.Α.Α. και του Frankfurt Xetra Dax, κατά την περίοδο 1/9/2005 – 31/8/2009. Η αξιολόγηση του αλγορίθμου και η διερεύνηση ενδεχόμενης πρακτικής εφαρμογής του έγινε στην περίοδο 1/9/2009 – 31/8/2010 μέσω της διεξαγωγής επενδυτικών σεναρίων.

Αντί του Frankfurt Xetra Dax θα μπορούσε να έχει επιλεγεί προς αποτύπωση άλλος ένας δείκτης του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών, όπως για παράδειγμα ο FTSE-20. Εντούτοις, κάτι τέτοιο δε θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η πορεία του Frankfurt Xetra Dax αντικατοπτρίζει την πορεία της πιο ισχυρής οικονομίας στην Ευρώπη, της Γερμανίας. Επομένως, τα αποτελέσματα δεν είναι παρεμφερή με του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών. Ο FTSE-20 απαρτίζεται από τις μετοχές υψηλής κεφαλαιοποίησης του Χ.Α.Α.. Συνυπολογίζοντας το γεγονός ότι η συμπεριφορά του Γενικού Δείκτη διαμορφώνεται σε σημαντικό βαθμό από τις μετοχές υψηλής κεφαλαιοποίησης, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα για τους δύο δείκτες θα ήταν παρεμφερή και η ουσιαστική διαφορά μεταξύ τους θα ήταν το μικρότερο σφάλμα αποτύπωσης για τον FTSE-20, καθώς αποτελείται από λίγες μετοχές.

Ο αλγόριθμος αναπτύχθηκε με γνώμονα τη δυνατότητα εφαρμογής του σε πραγματικά προβλήματα σύνθεσης και διαχείρισης χαρτοφυλακίου μετοχών. Στην κατεύθυνση αυτή επιχειρήθηκε η εξισορρόπηση αντικρουόμενων στόχων. Από τη μια μεριά καταβλήθηκε προσπάθεια ελαχιστοποίησης του υπολογιστικού χρόνου και του υπολογιστικού φόρτου, ενώ από την άλλη μεγιστοποίηση της ικανότητας εξερεύνησης του αλγορίθμου, ώστε να προκύπτουν επαρκείς και όσο το δυνατόν καλύτερες λύσεις.

Ο αλγόριθμος παρουσιάζεται σε τρεις διαφορετικές εκδοχές. Ο λόγος είναι ότι, αναλόγως με το πλήθος και το είδος των συναρτήσεων κάθε προβλήματος, απαιτούνται ορισμένες τροποποιήσεις. Πιο συγκεκριμένα, το πλήθος των αντικειμενικών συναρτήσεων αντιστοιχεί στο πλήθος των συνθηκών, που απαιτούνται για τον έλεγχο κυριαρχίας μεταξύ των λύσεων, όπου αυτός απαιτείται. Επιπροσθέτως, το διαφορετικό πλήθος αντικειμενικών συναρτήσεων άρα και συνθηκών συνεπάγεται διαφορετικές ανάγκες, όσον αφορά στη δέσμευση μνήμης για τις διάφορες διατάξεις. Τέλος, στα προβλήματα βελτιστοποίησης τριών και τεσσάρων συναρτήσεων απαιτείται μία επιπλέον διάταξη για την αποθήκευση της VaR και μία ακόμη μεταβλητή για την εκχώρηση της πιθανότητας a , από την οποία προσδιορίζεται το επιθυμητό επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - a$.

Μεταβλητές παράμετροι είναι το πλήθος των σωματιδίων του σμήνους, το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων, το μέγιστο πλήθος κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, ο δείκτης προς αποτύπωση, η χρησιμοποιούμενη μέθοδος για τη μετάβαση κάθε σωματιδίου σε νέα θέση και οι συντελεστές εκμάθησης c_1 και c_2 . Οι υπόλοιπες

παράμετροι διατηρούνται σταθερές σε συγκεκριμένες τιμές, οι οποίες είτε κατόπιν δοκιμών φάνηκε πως οδηγούν σε καλά αποτελέσματα είτε προτείνονται στη βιβλιογραφία ως κατάλληλες. Για κάθε συνδυασμό παραμέτρων πραγματοποιήθηκαν 10 εφαρμογές, ώστε να ληφθεί υπόψη η μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων δεδομένου του στοχαστικού χαρακτήρα του αλγορίθμου.

Στα δεδομένα εισόδου, που περιέχονται σε αρχείο τύπου .txt, συμπεριλαμβάνονται το πλήθος τιμών κλεισίματος κάθε δείκτη και μετοχής, ο αριθμός των δεικτών, ο αριθμός των μετοχών, το μέγεθος του σμήνους, το μέγιστο επιτρεπτό πλήθος μετοχών στο εκάστοτε χαρτοφυλάκιο, ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων και οι χρονοσειρές των κλεισιμάτων δεικτών και μετοχών.

Από το χρήστη εισάγονται διάφορες παράμετροι κατά την έναρξη της εκτέλεσης του προγράμματος (όσες σημειώνονται με ‘*’ επεξηγούνται παρακάτω):

1. Η μέθοδος αναπροσαρμογής της θέσης των σωματιδίων (Standard (A), Inertia Weight (B), Constriction Factor (C)).
2. Οι συντελεστές c_1 και c_2 που είναι απαραίτητοι και στις τρεις μεθόδους.
3. Ο δείκτης προς αποτύπωση (Γενικός Δείκτης (1), FTSE-20 (2), FTSE-40 (3), FTSE-80 (4), Frankfurt Xetra Dax (5), Dow Jones (6)).
4. Το ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο.
5. Η πιθανότητα a που χρειάζεται για τον προσδιορισμό του επιπέδου εμπιστοσύνης $1 - a$ στα προβλήματα τριών και τεσσάρων συναρτήσεων.
6. Το μέτρο σύγκρισης της απόλυτης τιμής της διαφοράς των Ευκλειδείων αποστάσεων των κανονικοποιημένων τιμών δύο στοιχείων του συνόλου $PF^*.*$
7. Η ακτίνα γύρω από το πέρας διανύσματος, που έχει προκύψει με κανονικοποίηση διανύσματος $f(x) \in PF^*.*$
8. Η μέγιστη επιτρεπτή διάρκεια εκτέλεσης του προγράμματος.
9. Το μέγιστο επιτρεπτό πλήθος κατά Pareto βέλτιστων λύσεων (δεσμεύεται μνήμη για την αποθήκευση των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων βάσει της τιμής αυτής).

Όλες οι αριθμητικές παράμετροι έχουν ορισμένο εύρος τιμών, στο οποίο μπορεί να κινηθεί ο χρήστης. Το εύρος τιμών κάθε αριθμητικής παραμέτρου έχει αποφασιστεί μέσω λογικών κριτηρίων και αξιολόγησης δοκιμών.

Ο αλγόριθμος αντιστοιχεί στον ψευδοκώδικα ενός MOPSO, που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, ωστόσο υπάρχουν ορισμένες διαφορές:

1. Το εξωτερικό αρχείο αντιστοιχεί σε μία δισδιάστατη διάταξη, η οποία είναι διαφορετική από αυτήν, που περιλαμβάνει τη θέση των σωματιδίων.
2. Δεν υπάρχει μέτρο ποιότητας για τους *leaders*. Η επιλογή ενός εξ αυτών διεξάγεται τυχαία σε κάθε επανάληψη για κάθε σωματίδιο.

3. Δεν υφίσταται τελεστής μετάλλαξης.
4. Στο πέρας του αλγορίθμου υπολογίζονται δύο μέτρα απόδοσης, τα M_v και M_f . Το M_v προκύπτει από το μέγιστο εύρος κάθε μιας από τις n διαστάσεις των διανυσμάτων των μεταβλητών απόφασης, $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$, ενώ το M_f από το μέγιστο εύρος κάθε μιας από τις m διαστάσεις των διανυσμάτων των αντικειμενικών συναρτήσεων, $\mathbf{p}', \mathbf{q}'$. Μέσω των M_v και M_f αποτυπώνεται η έκταση του συνόλου των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων (P^*) και του κατά Pareto βελτίστου μετώπου (PF^*), αντίστοιχα. Παρατίθενται οι σχέσεις υπολογισμού:

$$M_v(X') = \sqrt{\sum_{i=1}^n \max\{\|\mathbf{a}'_i - \mathbf{b}'_i\| ; \mathbf{a}', \mathbf{b}' \in X'\}} \quad (4.3.1)$$

$$M_f(Y') = \sqrt{\sum_{i=1}^m \max\{\|\mathbf{p}'_i - \mathbf{q}'_i\| ; \mathbf{p}', \mathbf{q}' \in Y'\}} \quad (4.3.2)$$

όπου $X' \subseteq X$ και $Y' \subseteq Y$. Το X' είναι το σύνολο των ανά δύο μη κυριαρχούμενων διανυσμάτων (κατά Pareto βέλτιστων λύσεων), ενώ το X είναι το σύνολο των διανυσμάτων, που συνθέτουν το χώρο λύσεων. Το Y' είναι το σύνολο των διανυσμάτων των αντικειμενικών συναρτήσεων, που αντιστοιχούν στο σύνολο X' , και το Y είναι το σύνολο των διανυσμάτων, που αντιστοιχούν στο X .

Στην προκειμένη περίπτωση, για τον υπολογισμό του M_v εντοπίζεται το μέγιστο από τα εύρη του ποσοστού συμμετοχής κάθε μίας από τις $n = 125$ μετοχές, που διαμορφώνουν τα χαρτοφυλάκια $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$. Για τον υπολογισμό του M_f εντοπίζεται το μέγιστο από τα εύρη τιμών κάθε μίας από τις $m = 2, 3, 4$ (αναλόγως το πρόβλημα προς επίλυση) αντικειμενικές συναρτήσεις, που συνθέτουν τα διανύσματα $\mathbf{p}', \mathbf{q}'$.

Επιπλέον, πέραν των ανωτέρω διαφορών στον αλγόριθμο ενσωματώνονται πρόσθετες λειτουργίες, που τον καθιστούν πιο αποτελεσματικό. Όταν εκτελεστεί το σύνολο των προβλεπόμενων επαναλήψεων ή όταν ο χρόνος εκτέλεσης υπερβεί τη μέγιστη επιτρεπτή διάρκεια οι κατά Pareto βέλτιστες λύσεις περιορίζονται με κριτήριο το κατά πόσον οι λύσεις είναι παρεμφερείς μεταξύ τους. Οι κατά Pareto βέλτιστες λύσεις, που είναι παρεμφερείς μεταξύ τους, είναι συνήθως εκατοντάδες ή χιλιάδες και καθιστούν δυσχερή την επιλογή για τον επενδυτή, χωρίς να προσφέρουν κάτι. Γι' αυτό και ο περιορισμός τους θεωρείται ωφέλιμος στη συγκεκριμένη προσέγγιση, παρόλο που στη βιβλιογραφία υποστηρίζεται η μεγιστοποίηση του πλήθους κατά Pareto βέλτιστων λύσεων. Ο περιορισμός αποτελεί το πρώτο στάδιο της τελικής φάσης του αλγορίθμου, που περιλαμβάνει ακόμα τον υπολογισμό των μέτρων απόδοσης και την εγγραφή των αποτελεσμάτων στο αρχείο εξόδου, και της οποίας έπεται ο τερματισμός του προγράμματος.

Η διαδικασία περιορισμού έχει συγκεκριμένα βήματα. Αρχικά, κανονικοποιούνται στη μονάδα οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων κάθε λύσης μέσω της σχέσης $f_i^{nd}(\mathbf{x}) = (f_i(\mathbf{x}) - f_{i*}) / (f_i^* - f_{i*})$, $\forall i \in 1, \dots, m, \forall \mathbf{x} \in P^*$. Το nd στον εκθέτη του $f_i^{nd}(\mathbf{x})$ υποδηλώνει ότι πρόκειται για κανονικοποιημένη τιμή (*normalized*). Ως $f_i(\mathbf{x})$ συμβολίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης f_i , η οποία αντιστοιχεί στην κατά Pareto βέλτιστη λύση $\mathbf{x}$. Ως f_i^* συμβολίζεται η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης f_i , που εντοπίζεται στο κατά Pareto βέλτιστο μέτωπο, ενώ ως f_{i*} η χειρίστη. Κατόπιν, υπολογίζεται η Ευκλείδεια απόσταση κάθε διανύσματος $\mathbf{f}^{nd}(\mathbf{x})$, που έχει προκύψει από την κανονικοποίηση διανύσματος $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in PF^*$. Ακολουθώντας, εξετάζεται ένα διάνυσμα $\mathbf{f}^{nd}(\mathbf{c})$, όπου $\mathbf{f}(\mathbf{c})$ είναι ένα διάνυσμα του συνόλου PF^* . Ο περιορισμός συντελείται σε δεδομένη ακτίνα γύρω από το πέρας του $\mathbf{f}^{nd}(\mathbf{c})$, σύμφωνα με το παρακάτω κριτήριο:

«Αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς των Ευκλειδείων αποστάσεων δύο διανυσμάτων είναι μικρότερη από συγκεκριμένο μέτρο σύγκρισης (*difference*), τότε τα διανύσματα αυτά θεωρούνται παραπλήσια και κατά συνέπεια το δεύτερο διαγράφεται.»

Δηλαδή, το πέρας του $\mathbf{f}^{nd}(\mathbf{c})$ είναι το κέντρο κύκλου, όταν οι αντικειμενικές συναρτήσεις είναι δύο (2-d), σφαίρας, όταν είναι τρεις (3-d) ή υπερσφαίρας, όταν είναι τέσσερις (4-d). Τα διανύσματα $\mathbf{f}^{nd}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}^{nd}(\mathbf{c})$, των οποίων το πέρας απέχει από το κέντρο απόσταση μικρότερη της δεδομένης ακτίνας (*radius*) και για τα οποία ικανοποιείται το παραπάνω κριτήριο, διαγράφονται. Δηλαδή, διαγράφονται τα αντίστοιχα $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{c}) \in PF^*$ και $\mathbf{x} \in P^*$. Τονίζεται πως της διαγραφής εξαιρούνται τα $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, στα οποία εντοπίζεται f_i^* ή f_{i*} για ένα ή περισσότερα $i \in 1, \dots, m$, εφόσον δεν πρόκειται για βέλτιστο ή χειρίστο πλήθος μετοχών (μόνο στο 4 - d πρόβλημα), και τα αντίστοιχα $\mathbf{x} \in P^*$. Η εξαίρεση των διανυσμάτων αυτών γίνεται για να διατηρηθούν στο τελικό σύνολο κατά Pareto βέλτιστων λύσεων και να μεγιστοποιηθεί η έκταση του κατά Pareto βελτίστου μετώπου (PF^*). Η διαδικασία περιορισμού συνεχίζεται με την εξέταση του επόμενου διανύσματος του συνόλου PF^* και περατώνεται, αφού έχουν εξεταστεί όλα τα διανύσματα του εν λόγω συνόλου.

Ακολουθούν οι εξισώσεις που μοντελοποιούν όσα αναφέρθηκαν σε σχέση με τον περιορισμό των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων:

$$\sum_{i=1}^m (f_i^{nd}(\mathbf{x}) - f_i^{nd}(\mathbf{c}))^2 \leq (\text{radius})^2 \quad (4.3.3)$$

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i^{nd}(\mathbf{c}))^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i^{nd}(\mathbf{x}))^2} \right| < \text{difference} \quad (4.3.4)$$

Αξίζει να αναφερθεί πως η χρήση μόνον της σχέσης (4.3.4) για τη σύγκριση ανά δύο των στοιχείων του PF^* δεν εγγυάται τη διατήρηση ενός ελαχίστου πλήθους λύσεων και συνεπάγεται την εμφάνιση πυκνωμάτων και αραιωμάτων στη γραφική απεικόνιση του κατά Pareto βέλτιστου μετώπου όποια τιμή κι αν εκχωρηθεί στη μεταβλητή *difference*. Η ύπαρξη και της (4.3.3) εξασφαλίζει τη διατήρηση ελαχίστου πλήθους λύσεων, ενώ κατάλληλη εκχώρηση τιμών στις μεταβλητές *radius* και *difference* επιφέρει ομαλή και ομοιόμορφη κατανομή των διανυσμάτων των αντικειμενικών συναρτήσεων στο κατά Pareto βέλτιστο μέτωπο. Στις εφαρμογές που παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα οι τιμές των *radius* και *difference* είναι τέτοιες, ούτως ώστε να διαγράφεται το σύνολο των διανυσμάτων, των οποίων το πέρας περιέχεται στον εκάστοτε κύκλο ή στην εκάστοτε σφαίρα ή υπερσφαίρα. Συνεπώς διατηρούνται μόνον τα κέντρα, τα οποία απέχουν κατ' ελάχιστο απόσταση ίση με *radius* μεταξύ τους.

Ο χρήστης εκτός της εισαγωγής παραμέτρων επιλέγει κατά την έναρξη της εκτέλεσης του προγράμματος τι θα συμβεί αν το πλήθος κατά Pareto βέλτιστων λύσεων γίνει ίσο με το μέγιστο επιτρεπτό σε κάποια επανάληψη. Οι διαθέσιμες επιλογές είναι δύο. Η μία επιλογή (ch_1) είναι η είσοδος στην τελική φάση του αλγορίθμου (περιορισμός των λύσεων σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω, υπολογισμός των μέτρων απόδοσης και εγγραφή των αποτελεσμάτων στο αρχείο εξόδου), που ακολουθείται από τον τερματισμό του προγράμματος. Η άλλη (ch_2) συνίσταται στον περιορισμό των λύσεων βάσει της ανωτέρω διαδικασίας και στη συνέχιση των επαναλήψεων. Όσες φορές σημειωθεί εκ νέου εξάντληση της μνήμης, που έχει διατεθεί για τις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις, επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία, παρέχοντας στο πρόγραμμα τη δυνατότητα περαιτέρω εξερεύνησης του χώρου λύσεων με αφετηρία ένα πιο μικρό κατά Pareto βέλτιστο σύνολο. Σε περίπτωση που η διαδικασία περιορισμού δεν επιφέρει περιορισμό των $x \in P^*$, δεν υπάρχουν κατά Pareto βέλτιστες λύσεις τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες (4.3.3) και (4.3.4). Αν συνεχιστεί η επαναληπτική διαδικασία το P^* θα παραμείνει αμετάβλητο. Αυτός είναι ο λόγος που δεν έπεται συνέχεια των επαναλήψεων. Εκτελούνται τα υπόλοιπα στάδια της τελικής φάσης του αλγορίθμου, δηλαδή ο υπολογισμός των μέτρων απόδοσης και η εγγραφή των αποτελεσμάτων στο αρχείο εξόδου, και έπειτα το πρόγραμμα τερματίζει.

Μια πιθανή τακτική αποφυγής ύπαρξης των εναλλακτικών ch_1 και ch_2 αποτελεί η εισαγωγή ενός υψηλού μέγιστου επιτρεπτού πλήθους κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, τέτοιου ώστε να καθιστά αδιάφορη την επιλογή μεταξύ εισόδου στην τελική φάση και περιορισμού των λύσεων και συνέχισης, επειδή δεν πρόκειται να εξισωθεί το τρέχον πλήθος μαζί του. Ωστόσο, οι δοκιμές καταδεικνύουν ότι η τακτική αυτή έχει επιφέρει εξαιρετικά υψηλό υπολογιστικό φόρτο, που συνεπάγεται ιδιαίτερα αυξημένη χρονική διάρκεια χωρίς να σημειώνεται κάποια αξιοσημείωτη βελτίωση του τελικού αποτελέσματος.

Η επιλογή περιορισμού και συνέχισης υπερτερεί έναντι της τακτικής εισαγωγής ενός εξαιρετικά υψηλού μέγιστου επιτρεπτού πλήθους κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, καθώς περιορίζει τον υπολογιστικό φόρτο και τη χρονική διάρκεια και

επιπλέον, στη συντριπτική πλειοψηφία των δοκιμών φαίνεται να βελτιώνει και να διευρύνει τα P^* και PF^* . Υπερτερεί και της πρώτης επιλογής, επειδή, μολονότι απαιτεί επιπλέον χρόνο, το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει εξ ορισμού τουλάχιστον το ίδιο καλό με αυτό, που δίνει η πρώτη επιλογή (στη χείριστη περίπτωση τα P^* και PF^* , όπως προκύπτουν μετά από κάθε περιορισμό των λύσεων, παραμένουν αμετάβλητα ως το τέλος του προγράμματος, διότι δεν εντοπίζονται περιθώρια βελτίωσης κατά τη διάρκεια των περαιτέρω αναζητήσεων στο χώρο λύσεων).

Για αυτούς τους λόγους η επιλογή περιορισμού και συνέχισης αναδεικνύεται ως η βέλτιστη και χρησιμοποιείται στις εφαρμογές, που συμπεριλαμβάνονται στην εργασία. Φυσικά, ο περιορισμός και η συνέχιση δεν ενεργοποιούνται σε κάθε περίπτωση. Η ενεργοποίησή τους ή μη εξαρτάται από το στοχαστικό χαρακτήρα του αλγορίθμου, τη χρησιμοποιούμενη μέθοδο αναπροσαρμογής της θέσης των σωματιδίων, το μέγεθος του σμήνους, το πλήθος των επαναλήψεων και βεβαίως, την τιμή μέγιστου επιτρεπτού πλήθους κατά Pareto βέλτιστων λύσεων.

Πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός, ότι η επιλογή μέγιστου επιτρεπτού πλήθους κατά Pareto βέλτιστων λύσεων έγινε εμπειρικά, μέσω δοκιμών. Δεν υφίσταται κάποια συγκεκριμένη μεθοδολογική προσέγγιση του ζητήματος. Οι επιλεγείσες τιμές είναι αρκούντως μεγάλες για να διεξαχθεί αναζήτηση στο χώρο λύσεων και ταυτόχρονα, αρκούντως μικρές, ώστε να μην σημειωθεί υπέρογκη αύξηση του υπολογιστικού φόρτου και χρόνου. Ενδεχομένως, να υπάρχουν πιο αποτελεσματικές, ωστόσο ο εντοπισμός τους χρήζει περαιτέρω διερεύνησης, που υπερβαίνει τα πλαίσια αυτής της εργασίας.

Στη βιβλιογραφία προτείνονται διάφορα κριτήρια για τον τερματισμό της επαναληπτικής διαδικασίας του αλγορίθμου, εκτός της εκτέλεσης του μέγιστου πλήθους επαναλήψεων. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγεται ο τερματισμός της επαναληπτικής διαδικασίας, εφόσον το σύνολο κατά Pareto βέλτιστων λύσεων έχει παραμείνει αμετάβλητο για έναν ορισμένο αριθμό επαναλήψεων. Το κριτήριο δε συμπεριλήφθηκε στον αλγόριθμο, καθώς δεν αποδείχθηκε χρήσιμο. Στο σύνολο των δοκιμών που διεξήχθησαν, ώστε να αξιολογηθεί η χρησιμότητά του, φάνηκαν τα εξής:

1. Πολλαπλασιάζει το χρόνο εκτέλεσης κάθε επανάληψης, διότι απαιτεί αρκετούς πρόσθετους υπολογισμούς και συγκρίσεις για την εφαρμογή του. Η επιβράδυνση γίνεται ιδιαίτερα αισθητή, καθώς το πλήθος των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων αυξάνεται.
2. Το πλήθος κατά Pareto βέλτιστων λύσεων δεν παραμένει αμετάβλητο για περισσότερες από μερικές επαναλήψεις. Μια πιθανή εξήγηση είναι η ύπαρξη πολλαπλών στόχων και οι εξαιρετικά μεγάλες διαστάσεις του χώρου λύσεων σε συνδυασμό με τον τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου.

Τα δεδομένα εξόδου εισάγονται σε αρχείο τύπου .txt. Στο αρχείο καταγράφονται το πλήθος τιμών κλεισίματος κάθε δείκτη και μετοχής, ο αριθμός των δεικτών, ο αριθμός των μετοχών, το μέγεθος του σμήνους, το μέγιστο επιτρεπτό

πλήθος μετοχών στο εκάστοτε χαρτοφυλάκιο και ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων. Ακόμα, σημειώνονται η μέθοδος, που χρησιμοποιήθηκε (Standard, Inertia Weight, Constriction Factor), οι τιμές των παραμέτρων c_1 και c_2 , ο δείκτης, που αποτυπώθηκε, το ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής μιας μετοχής στο εκάστοτε χαρτοφυλάκιο, το επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - a$ αν πρόκειται για τα προβλήματα τριών ή τεσσάρων διαστάσεων, οι τιμές των μεταβλητών *difference* και *radius*, η μέγιστη επιτρεπτή διάρκεια εκτέλεσης του προγράμματος και το μέγιστο επιτρεπτό πλήθος κατά Pareto βέλτιστων λύσεων. Στη συνέχεια, παρατίθενται η επιλογή του χρήστη, αναφορικά με το τι θα συμβεί αν το πλήθος κατά Pareto βέλτιστων λύσεων γίνει ίσο με το μέγιστο επιτρεπτό σε κάποια επανάληψη και το γεγονός, που οδήγησε στον τερματισμό του προγράμματος, εφόσον αυτό δεν ήταν το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων (η χρονική διάρκεια εκτέλεσης έχει υπερβεί τη μέγιστη επιτρεπτή ή το πλήθος κατά Pareto βέλτιστων λύσεων έχει γίνει ίσο με το μέγιστο επιτρεπτό). Έπεται η καταγραφή του πλήθους περιορισμών των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, που προηγούνται του τελικού περιορισμού, του πλήθους κατά Pareto βέλτιστων λύσεων πριν τον τελικό περιορισμό, της τελευταίας επανάληψης, που συντελέστηκε, του πλήθους κατά Pareto βέλτιστων λύσεων μετά τον τελικό περιορισμό και των μέτρων απόδοσης M_v και M_f . Τέλος, παρουσιάζεται η σύνθεση κάθε χαρτοφυλακίου, που διαμορφώθηκε, και οι αντίστοιχες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων. Οι μετοχές παρουσιάζονται σε αύξον ποσοστό συμμετοχής στο χαρτοφυλάκιο. Για την παρουσίαση της σύνθεσης κάθε μετοχή έχει αντιστοιχιστεί σε έναν αριθμό. Χάριν ευκολίας η αντιστοίχιση έγινε στο διάστημα 1 – 125.

Ο παρακάτω πίνακας περιλαμβάνει τις παραμέτρους, που διατηρήθηκαν σταθερές σε όλες τις εφαρμογές:

Πλήθος στοιχείων χρονοσειρών κλεισίματος	996
Μέγιστο επιτρεπτό πλήθος μετοχών σε κάθε χαρτοφυλάκιο	20
Ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής των μετοχών σε κάθε χαρτοφυλάκιο	1%
Πιθανότητα a	1%
Ακτίνα (<i>radius</i>)	0.0175
Μέτρο σύγκρισης (<i>difference</i>)	1
Μέγιστη επιτρεπτή διάρκεια εκτέλεσης	9000 sec
Επιλογή του χρήστη αν το πλήθος κατά Pareto βέλτιστων λύσεων γίνει ίσο με το μέγιστο επιτρεπτό σε κάποια επανάληψη	ch_2

Πίνακας 4.3.1: Σταθερές Παράμετροι

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ & ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Όπως έχει ήδη αναφερθεί πιο πάνω, για κάθε συνδυασμό παραμέτρων σε κάθε πρόβλημα πραγματοποιήθηκαν 10 εφαρμογές, ώστε να ληφθεί υπόψη η μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων λόγω του στοχαστικού χαρακτήρα του αλγορίθμου. Τα αρχεία εξόδου των εκάστοτε 10 εφαρμογών αριθμούνται με αύξοντα αριθμό από το 1 έως το 10.

Όσον αφορά στους συντελεστές εκμάθησης c_1 και c_2 τονίζεται ότι οι τιμές τους διαφοροποιούνται ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη μέθοδο. Η δεδομένη επιλογή τιμών προέκυψε κατόπιν δοκιμών:

Standard method (A)	➔	$c_1 = c_2 = 2.00$
Inertia weight method (B)	➔	$c_1 = c_2 = 1.00$
Constriction factor method (C)	➔	$c_1 = c_2 = 2.05$

Αξίζει να αναφερθεί πως περιορισμός των $x \in P^*$, πέραν της τελευταίας επανάληψης, συντελέστηκε μόνο για τη μέθοδο B. Στις μεθόδους A και C δε χρειάστηκε σε καμία από τις εφαρμογές. Επίσης, σημειώνεται ότι σειρά δοκιμών έδειξε πως για ένα πρόβλημα, συγκεκριμένο δείκτη και δεδομένη μέθοδο, το πλήθος $x \in P^*$ (αφού εφαρμοστεί η διαδικασία περιορισμού) δεν υπερβαίνει ένα ανώτατο όριο. Προκειμένου να εξασφαλιστεί η εύρεση όσο το δυνατόν περισσότερων λύσεων σε κάθε περίπτωση, για το μέγιστο πλήθος $x \in P^*$ επιλέχθηκε τιμή μεγαλύτερη του αντίστοιχου ανώτατου ορίου:

	2 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ		3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ		4 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ	
	Γενικός Δείκτης	Frankfurt Xetra Dax	Γενικός Δείκτης	Frankfurt Xetra Dax	Γενικός Δείκτης	Frankfurt Xetra Dax
ΑΝΩΤΑΤΟ ΟΡΙΟ	73	72	689	555	4730	2323

Πίνακας 5.1: Ανώτατα όρια για τα προβλήματα δύο, τριών και τεσσάρων διαστάσεων

Τέλος, σημειώνονται τα εξής:

- Το σφάλμα αποτύπωσης είναι πολλαπλασιασμένο με 10^4 στο σύνολο των γραφημάτων και πινάκων, που εμφανίζεται (για λόγους παρούσας).
- Η VaR, όπως παρουσιάζεται στα γραφήματα του προβλήματος τριών αντικειμενικών συναρτήσεων, είναι επί τοις εκατό (%).

5.1. min Σφάλμα Αποτύπωσης – max Μέση Απόδοση

Για την επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του σφάλματος αποτύπωσης του δείκτη και μεγιστοποίησης της μέσης απόδοσης του χαρτοφυλακίου πραγματοποιήθηκαν διάφοροι συνδυασμοί των μεταβλητών παραμέτρων, οι οποίοι

παρουσιάζονται στους πίνακες 5.1.1 και 5.1.2. Το μέγιστο πλήθος $x \in P^*$ για όλες τις εφαρμογές ορίστηκε ίσο με $10 \times$ μέγεθος σμήνους.

Γενικός Δείκτης		Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων				
		200	500	1000	5000	10000
ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΜΗΝΟΥΣ	100	–	–	–	B	B
	200	A, B, C	A, B, C	A, B, C	–	–
	500	A, B, C	A, B, C	A, B, C	–	–
	1000	A, B, C	A, B, C	A, B, C	–	–

Πίνακας 5.1.1: Γενικός Δείκτης – Συνδυασμοί

Frankfurt Xetra Dax		Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων				
		200	500	1000	5000	10000
ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΜΗΝΟΥΣ	100	–	–	–	B	B
	200	B	B	B	–	–
	500	B	B	B	–	–
	1000	B	B	B	–	–

Πίνακας 5.1.2: Frankfurt Xetra Dax – Συνδυασμοί

Ορισμένοι εκ των συνδυασμών, που δοκιμάστηκαν, αναδείχθηκαν καλύτεροι των υπολοίπων καταλήγοντας σε καλύτερα αποτελέσματα και για τους δύο δείκτες. Στην υποενότητα 5.1.3 οι υπερέχοντες συνδυασμοί παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1.3.1 και συγκρίνονται μεταξύ τους.

5.1.1. Γενικός Δείκτης X.A.A.

Για τις τρεις μεθόδους εντοπίζονται τέσσερις κοινές τάσεις:

- Αύξηση του χρόνου εκτέλεσης του προγράμματος είτε αυξηθεί το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων και το μέγεθος του σμήνους παραμείνει σταθερό είτε αυξηθεί το μέγεθος του σμήνους και το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων παραμείνει σταθερό.
- Εύρεση (κατά κανόνα) περισσότερων κατά Pareto βέλτιστων λύσεων αν αυξηθεί το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων και το μέγεθος του σμήνους παραμείνει σταθερό ή αν αυξηθεί το μέγεθος του σμήνους και το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων παραμείνει σταθερό.
- Αύξηση του μεγέθους του σμήνους για δεδομένο μέγιστο πλήθος επαναλήψεων συνεπάγεται βελτίωση των αποτελεσμάτων.
- Αύξηση του μέγιστου πλήθους επαναλήψεων για δεδομένο μέγεθος σμήνους συνεπάγεται βελτίωση των αποτελεσμάτων.

Ως βελτίωση νοείται η αύξηση του μέτρου απόδοσης M_f πρωτίστως και του μέτρου απόδοσης M_v δευτερευόντως. Η αύξηση του M_f δε συνοδεύεται υποχρεωτικά από αύξηση του M_v . Σε περίπτωση, που $M_{v1} > M_{v2}$ και $M_{f1} < M_{f2}$, το δεύτερο σύνολο λύσεων θεωρείται καλύτερο του πρώτου. Αν όμως, $M_{v1} > M_{v2}$ και $M_{f1} = M_{f2}$, το πρώτο σύνολο λύσεων θεωρείται καλύτερο του δεύτερου, διότι εξασφαλίζει ίδιες τιμές στις αντικειμενικές συναρτήσεις, αλλά παρουσιάζει μεγαλύτερη διαφοροποίηση, όσον αφορά στις μετοχές που διαμορφώνουν κάθε χαρτοφυλάκιο και στα ποσοστά συμμετοχής τους.

Οι πίνακες 5.1.1.1 και 5.1.1.2 καταδεικνύουν τις προαναφερθείσες κοινές τάσεις. Περιλαμβάνουν τους μέσους όρους και τις διακυμάνσεις του πλήθους λύσεων $x \in P^*$, των M_v και M_f και του χρόνου εκτέλεσης για ενδεικτικούς συνδυασμούς παραμέτρων. Έχει επιλεγεί μέγιστο πλήθος επαναλήψεων ίσο με 1000 για τον πίνακα 5.1.1.1 και μέγεθος σμήνους ίσο με 1000 για τον πίνακα 5.1.1.2, επειδή στις μικρές και μεσαίες τιμές (200, 500) η στοχαστική φύση του αλγορίθμου επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τα εξαγόμενα αποτελέσματα και δεν επιτρέπει πάντα να διαφανεί κατά πόσον υπάρχει κάποια τάση.

Γενικός Δείκτης				$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)
ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ 1000	A	r	200	35.4	12.973	5.249	1.021
			500	39.6	13.068	5.236	2.292
			1000	43.6	13.134	5.272	4.407
		s ²	200	8.04	0.0814	0.00592	0.00321
			500	10.9	0.15	0.00839	0.00633
			1000	23.2	0.0691	0.0028	0.0126
	B	r	200	64.2	10.249	4.889	1.919
			500	67.8	9.832	5.334	5.317
			1000	67.1	10.501	5.338	12.227
		s ²	200	18.2	0.802	0.503	0.0225
			500	4.4	0.189	4.8×10^{-5}	0.88
			1000	5.66	0.0774	2.33×10^{-5}	4.77
	C	r	200	46.1	12.659	4.110	1.249
			500	47.1	12.655	4.482	2.751
			1000	50.5	12.740	4.941	5.173
		s ²	200	9.21	0.0415	0.193	0.00243
			500	12.1	0.0958	0.411	0.0183
			1000	14.1	0.0387	0.29	0.0319

Πίνακας 5.1.1.1: Κοινές τάσεις των προσεγγίσεων A, B, C

Γενικός Δείκτης				$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)
ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΜΗΝΟΥΣ 1000	A	r	200	28.9	13.257	5.064	1.115
			500	35.3	13.155	5.285	2.359
			1000	43.6	13.134	5.272	4.407
		s ²	200	11.0	0.0137	0.109	6.28×10^{-4}
			500	15.3	0.158	7.68×10^{-4}	8.32×10^{-4}
			1000	23.2	0.0691	0.0028	0.0126
	B	r	200	63.1	10.827	5.319	4.417
			500	65.2	10.506	5.336	6.461
			1000	67.1	10.501	5.338	12.227
		s ²	200	2.99	0.147	4.08×10^{-4}	11.2
			500	3.73	0.108	2.80×10^{-5}	1.53
			1000	5.66	0.0774	2.33×10^{-5}	4.77
	C	r	200	46.7	12.796	4.086	1.347
			500	48.3	12.657	4.694	2.755
			1000	50.5	12.740	4.941	5.173
		s ²	200	7.79	0.0438	0.328	0.00353
			500	20.5	0.0466	0.291	0.00789
			1000	14.1	0.0387	0.29	0.0319

Πίνακας 5.1.1.2: Κοινές τάσεις των προσεγγίσεων A, B, C

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1.1.1

Αποτύπωση Γεν. Δείκτη του Χ.Α.Α.
Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων: 1000
Μέθοδος: A, B, C
Μέγεθος σμήνους: 200, 500, 1000

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1.1.2

Αποτύπωση Γεν. Δείκτη του Χ.Α.Α.
Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων:
200, 500, 1000
Μέθοδος: A, B, C
Μέγεθος σμήνους: 1000

Επισημαίνεται ότι πέραν του πλήθους κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, των M_v και M_f και του χρόνου εκτέλεσης χρησιμοποιούνται ως παράγοντες σύγκρισης των μεθόδων η κατανομή και η ομαλότητα των τιμών στο κατά Pareto βέλτιστο μέτωπο (PF^*). Η ποιότητα της κατανομής αξιολογείται εμπειρικά είτε εξετάζοντας το αρχείο εξόδου είτε μέσω γραφημάτων, ενώ η ομαλότητα αποκλειστικά μέσω γραφημάτων. Μια κατανομή χαρακτηρίζεται καλή, εφόσον δεν παρατηρούνται πυκνώματα κι αραιώματα. Με την έννοια της ομαλότητας υποδηλώνεται η ύπαρξη συνέχειας και σταδιακής αλλαγής της κλίσης στην καμπύλη, που σχηματίζουν οι τιμές του PF^* .

Τα συμπληρωματικά κριτήρια κρίνονται αναγκαία, διότι το M_f δεν εγγυάται καλή κατανομή ή ομαλότητα. Το M_f μπορεί να λάβει υψηλή τιμή, ακόμη κι όταν υπάρχουν μεγάλα αραιώματα μεταξύ των τιμών, επειδή υπολογίζεται μόνον από τις ακραίες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων. Επιπλέον, δεν επηρεάζεται από σημεία ασυνέχειας ή μεγάλης αλλαγής στην κλίση.

Γενικός Δείκτης				$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)
ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ 200	A	r	200	23.4	13.165	4.666	0.293
			500	26.9	13.050	4.893	0.617
		s ²	200	9.16	0.111	0.563	3.57×10^{-4}
			500	14.5	0.112	0.334	5.12×10^{-4}
	B	r	200	55.9	10.626	4.046	0.633
			500	63.4	10.466	4.955	1.730
		s ²	200	18.3	0.132	0.326	0.0148
			500	10.5	0.0764	0.24	0.253
	C	r	200	39.4	12.494	4.066	0.367
			500	43.3	12.913	4.215	0.713
		s ²	200	6.27	0.0212	0.328	7.34×10^{-4}
			500	28.5	0.895	0.398	5.12×10^{-4}

Πίνακας 5.1.1.3: Αποτελέσματα σε χαμηλές τιμές επαναλήψεων με μικρό και μεσαίο μέγεθος σμήνους

Γενικός Δείκτης				$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)
ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ 1000	A	r	500	39.6	13.068	5.236	2.292
			1000	43.6	13.134	5.272	4.407
		s ²	500	10.9	0.15	0.00839	0.00633
			1000	23.2	0.0691	0.0028	0.0126
	B	r	500	67.8	9.832	5.334	5.317
			1000	67.1	10.501	5.338	12.227
		s ²	500	4.4	0.189	4.80×10^{-5}	0.88
			1000	5.66	0.0774	2.33×10^{-5}	4.77
	C	r	500	47.1	12.655	4.482	2.751
			1000	50.5	12.740	4.941	5.173
		s ²	500	12.1	0.0958	0.411	0.0183
			1000	14.1	0.0387	0.29	0.0319

Πίνακας 5.1.1.4: Αποτελέσματα σε υψηλές τιμές επαναλήψεων με μεσαίο και υψηλό μέγεθος σμήνους

Όταν το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων κυμαίνεται σε χαμηλές τιμές και το μέγεθος σμήνους είναι μικρό (Πίνακας 5.1.1.3) το M_p λαμβάνει ικανοποιητικές τιμές και η διάρκεια εκτέλεσης περιορίζεται στο διάστημα 0.293 min – 1.73 min (οι τιμές σημειώνονται με **bold** στον πίνακα 5.1.1.3). Στις παραμέτρους αυτές η μέθοδος A έχει τις καλύτερες επιδόσεις. Ακολουθεί η C, ενώ η B έρχεται τελευταία. Το M_f κινείται σε χαμηλά επίπεδα και οι κατά Pareto βέλτιστες λύσεις είναι λίγες για όλες τις μεθόδους, αν και η B παρουσιάζει καλύτερη εικόνα από τις A και C στους παράγοντες αυτούς. Οι τιμές στο PF^* παρουσιάζουν μεγάλα αραιώματα, σημεία ασυνέχειας και μεγάλες αλλαγές κλίσης κυρίως για την A, αλλά και τη C. Ωστόσο, για τη μέθοδο B η κατανομή και η ομαλότητα είναι πολύ καλές (γράφημα 5.1.1.1). Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, τα πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα προκύπτουν μέσω της μεθόδου B.

Καθώς αυξάνονται το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων και το μέγεθος του σμήνους (Πίνακας 5.1.1.4) η μέθοδος B παρουσιάζει ακόμη καλύτερα αποτελέσματα, ενώ η βελτίωση στα αποτελέσματα των A και C είναι μικρότερης κλίμακας. Συγκεκριμένα, η μέθοδος B συνεπάγεται καλύτερη τοπική κι ευρείας κλίμακας αναζήτηση συγκριτικά με τις μεθόδους A και C. Αυτό καθίσταται εμφανές στα εξαγόμενα αποτελέσματα, όπου η B παρουσιάζει εξαιρετικά καλή κατανομή και ομαλότητα τιμών στο κατά Pareto βέλτιστο μέτωπο (γραφήματα 5.1.1.2, 5.1.1.3), οδηγεί στις περισσότερες κατά Pareto βέλτιστες λύσεις και υπερέχει στο μέτρο απόδοσης M_f έναντι των A και C. Η C υπερτερεί της A στην κατανομή και ομαλότητα τιμών στο PF^* και οδηγεί σε περισσότερα $x \in P^*$ από αυτήν, ενώ η A πετυχαίνει μεγαλύτερες τιμές του M_f σε σχέση με τη C.

Συγκρίνοντας τους πίνακες 5.1.1.3 και 5.1.1.4, διαπιστώνουμε, πως το πλήθος κατά Pareto βέλτιστων λύσεων παρουσιάζει αύξηση για κάθε μέθοδο. Βέβαια, πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η B έχει ήδη υψηλές τιμές στις λίγες επαναλήψεις και στα περιορισμένα μεγέθη σμήνους και καταγράφει ελάχιστη αύξηση. Η εύρεση επαρκούς αριθμού κατά Pareto βέλτιστων λύσεων σε συνδυασμούς χαμηλών επαναλήψεων και μικρών μεγεθών σμήνους είναι αξιοπρόσεκτη, καθώς αντικατοπτρίζει την ικανότητα καλής αναζήτησης στο χώρο λύσεων, που διαθέτει η συγκεκριμένη μέθοδος.

Όσον αφορά το μέτρο απόδοσης M_p και τη διάρκεια εκτέλεσης η A διατηρεί το ελαφρύ προβάδισμα έναντι της C, η οποία συνεχίζει να υπερτερεί της B. Βέβαια, η διάρκεια εκτέλεσης αυξάνεται για όλες τις μεθόδους και κινείται στο διάστημα 2.292 min – 12.227 min (οι τιμές σημειώνονται με **bold** στον πίνακα 5.1.1.4).

Τέλος, οι παρατηρούμενες διακυμάνσεις για το M_f μειώνονται, ενώ για τη διάρκεια εκτέλεσης αυξάνονται και στις τρεις μεθόδους. Για το μέτρο M_p δεν εντοπίζονται συγκεκριμένα μοτίβα μεταβολής. Τόσο οι αυξομειώσεις των διακυμάνσεων όσο και η απουσία συγκεκριμένων μοτίβων μεταβολής οφείλονται στη στοχαστική φύση του αλγορίθμου, στη φύση κάθε παραμέτρου και στη φύση της εκάστοτε μεθόδου αναπροσαρμογής της θέσης των σωματιδίων. Η μέθοδος B επιτυγχάνει τις πιο εντυπωσιακές μειώσεις στη διακύμανση του μέτρου απόδοσης M_f (οι τιμές σημειώνονται με **bold** στους πίνακες 5.1.1.3 και 5.1.1.4). Εντούτοις,

παρουσιάζει τις μεγαλύτερες αυξήσεις στη διακύμανση της διάρκειας εκτέλεσης. Η περιορισμένη διακύμανση στο M_f σημαίνει πως η μέθοδος B είναι αξιόπιστη και επομένως τα εξαγόμενα αποτελέσματα είναι αξιοποιήσιμα.

Οι συνθέσεις των χαρτοφυλακίων όσο μικρότερο είναι το σφάλμα αποτύπωσης τόσο διαφέρουν μεταξύ τους. Μάλιστα, δε διαφέρουν τα ποσοστά συμμετοχής ίδιων μετοχών, αλλά και οι μετοχές. Διαφορές παρατηρούνται τόσο από μέθοδο σε μέθοδο, όσο και μεταξύ των εφαρμογών κάθε μεθόδου. Αιτίες του φαινομένου αυτού είναι ο υψηλός διαστάσεων χώρος αναζήτησης και ο στοχαστικός χαρακτήρας του αλγορίθμου. Επιπλέον, συντελεί σημαντικά το γεγονός ότι αρκετά από τα χαρτοφυλάκια μικρού σφάλματος αποτύπωσης ακολουθούν την αρχή της διαφοροποίησης, δηλαδή αποτελούνται από πολλές μετοχές (>6). Οι συνδυασμοί διαφορετικών μετοχών, που μπορούν να εξασφαλίσουν μικρό σφάλμα αποτύπωσης, δηλαδή περιορισμένο κίνδυνο, είναι εξαιρετικά πολλοί.

Καθώς το σφάλμα αποτύπωσης άρα και η απόδοση αυξάνονται, το πλήθος μετοχών, που απαρτίζουν κάθε χαρτοφυλάκιο, περιορίζεται. Οι συνδυασμοί μετοχών που δύνανται να εγγυηθούν υψηλές αποδόσεις δεν είναι πάρα πολλοί. Ως εκ τούτου, οι μετοχές, που συνθέτουν τα χαρτοφυλάκια υψηλών αποδόσεων με πλήθος μετοχών ≤ 6 , είναι σε μεγάλο βαθμό κοινές, τόσο από μέθοδο σε μέθοδο όσο και μεταξύ των εφαρμογών κάθε μεθόδου. Βέβαια, διαφορές ως προς το ποσοστό συμμετοχής κάθε μετοχής αναπόφευκτα υπάρχουν.

Από τις τρεις μεθόδους τις μικρότερες διαφορές σε χαρτοφυλάκια με πλήθος μετοχών ≤ 6 παρουσιάζει η B. Για μεγάλες αποδόσεις η μέθοδος συγκλίνει σε ορισμένες μετοχές και μάλιστα σε παρεμφερή ποσοστά συμμετοχής στις διάφορες εφαρμογές. Πρόκειται για τις μετοχές, οι οποίες διαθέτουν τις μεγαλύτερες μέσες αποδόσεις στην περίοδο 1/9/2009 – 31/8/2010. Συμπληρωματικά, σημειώνεται πως η τεχνική B επιτυγχάνει την βέλτιστη προσέγγιση του χαρτοφυλακίου μέγιστης απόδοσης. Το εν λόγω χαρτοφυλάκιο διαμορφώνεται από τη μετοχή με την υψηλότερη απόδοση σε ποσοστό 99% και την αμέσως επόμενη σε όρους απόδοσης σε ποσοστό 1%. Η μέθοδος B για αρκετούς συνδυασμούς (Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων – Μέγεθος σμήνους $\rightarrow$ 500 – 1000, 1000 – 500, 1000 – 1000, 5000 – 100, 10000 – 100) προσεγγίζει το χαρτοφυλάκιο μέγιστης απόδοσης στο σύνολο των 10 εφαρμογών, καταλήγοντας στη μετοχή με την υψηλότερη απόδοση σε ποσοστό >98.95 και στην αμέσως επόμενη σε όρους απόδοσης σε ποσοστό <1.05 . Μάλιστα, σε αρκετές περιπτώσεις το εντοπίζει επακριβώς, με τα ποσοστά να προκύπτουν ίσα με 99% και 1% για τις δύο μετοχές. Οι τεχνικές A και C δεν επιτυγχάνουν ικανοποιητική προσέγγιση του χαρτοφυλακίου μέγιστης απόδοσης σε καμία εφαρμογή, στο σύνολο των συνδυασμών μέγιστου πλήθους επαναλήψεων και μεγέθους σμήνους, που δοκιμάστηκαν.

Αξιολογώντας συνολικά τις μεθόδους συμπεραίνουμε ότι η B υπερέχει της C, η οποία υπερέχει της A. Η B ως η βέλτιστη μεταξύ των τριών επιλέγεται για τις υπόλοιπες δοκιμές και οι A και C εγκαταλείπονται.

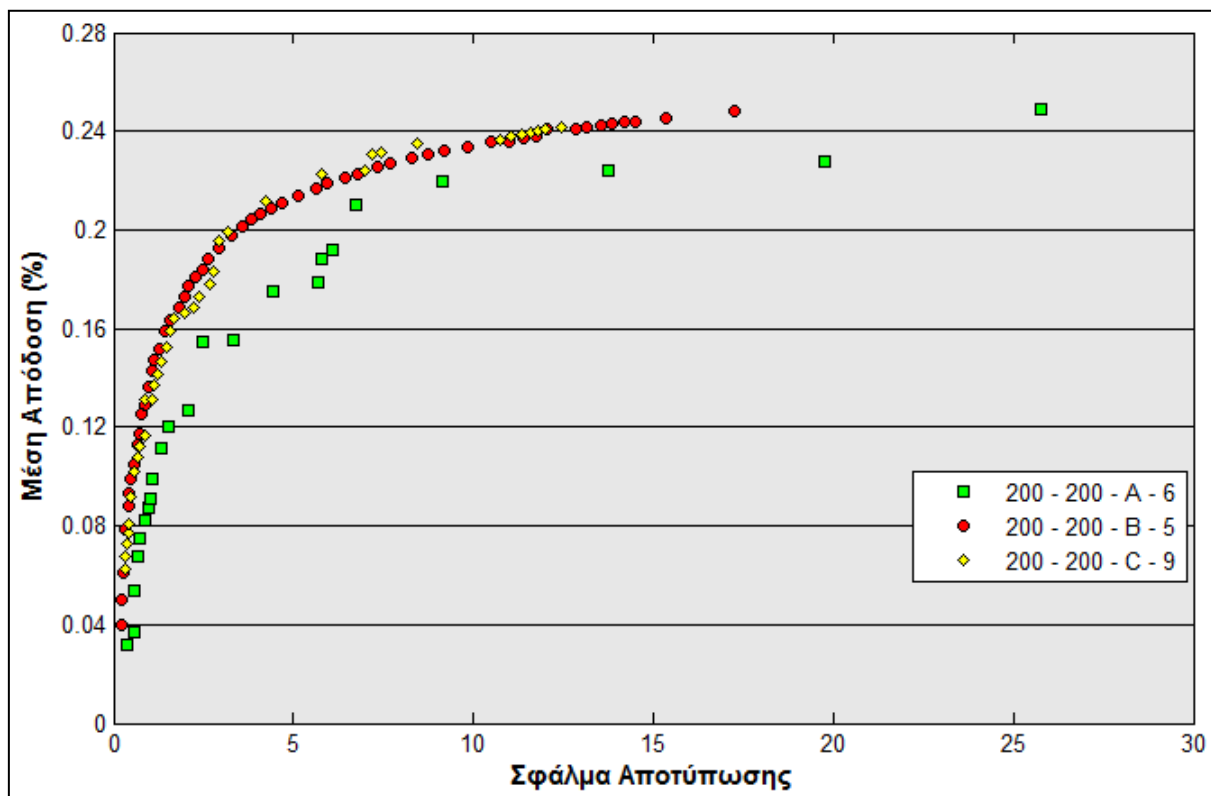
Ακολουθούν μερικά γραφήματα, που είναι ενδεικτικά της εξερεύνησης του χώρου λύσεων από τις τρεις μεθόδους. Στα υπομνήματα αυτών των γραφημάτων,

αλλά και αυτών που ακολουθούν στην υπόλοιπη εργασία, το σύμβολο κάθε PF^* (τετράγωνο, κύκλος ή ρόμβος) συνοδεύεται από τα εξής στοιχεία:

Για τον Γενικό Δείκτη → Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων – Μέγεθος Σμήνους – Μέθοδος – Αριθμός αρχείου εξόδου*

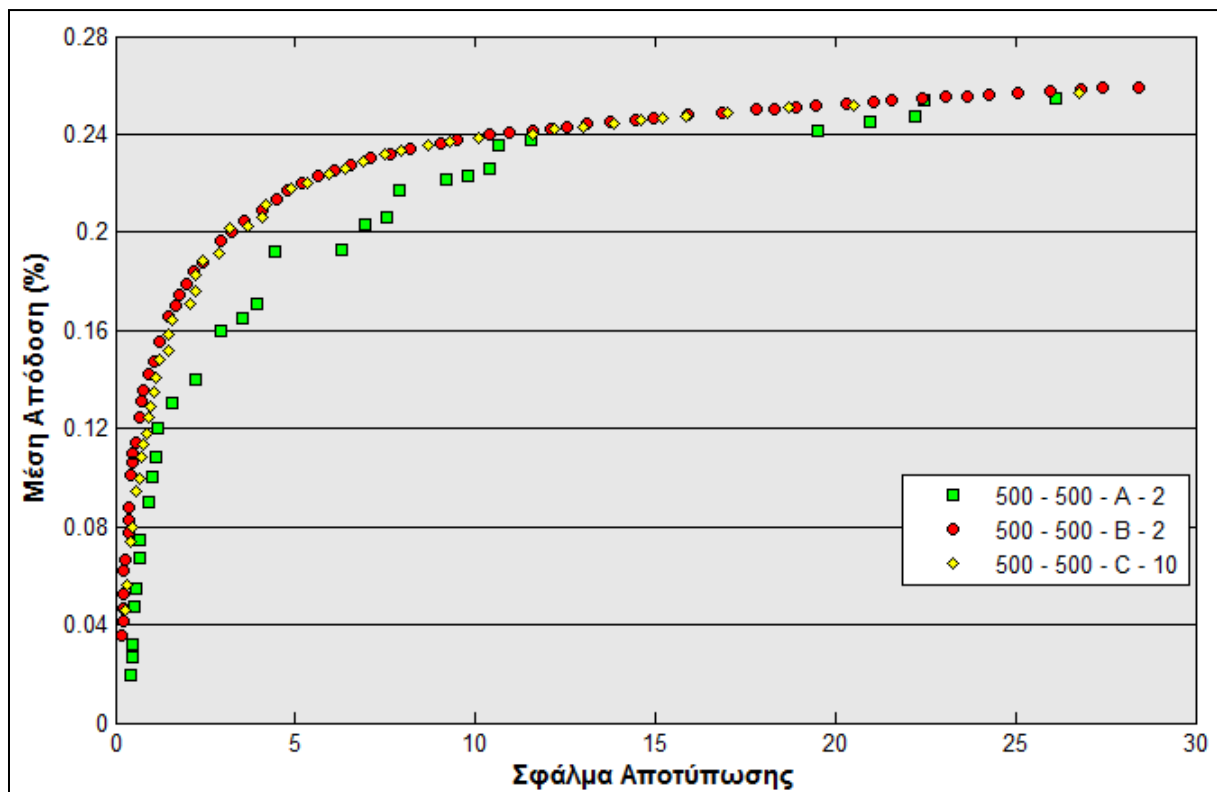
Για τον Xetra Dax → Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων – Μέγεθος Σμήνους – Αριθμός αρχείου εξόδου

Στα υπομνήματα των γραφημάτων του δισδιάστατου προβλήματος, που αφορούν τον Frankfurt Xetra Dax, δε συμπεριλαμβάνεται η μέθοδος, διότι πρόκειται για τη μέθοδο B. Στα υπομνήματα των γραφημάτων του τρισδιάστατου προβλήματος δε συμπεριλαμβάνεται η μέθοδος, επειδή πρόκειται για τη μέθοδο B ανεξαρτήτως δείκτη.

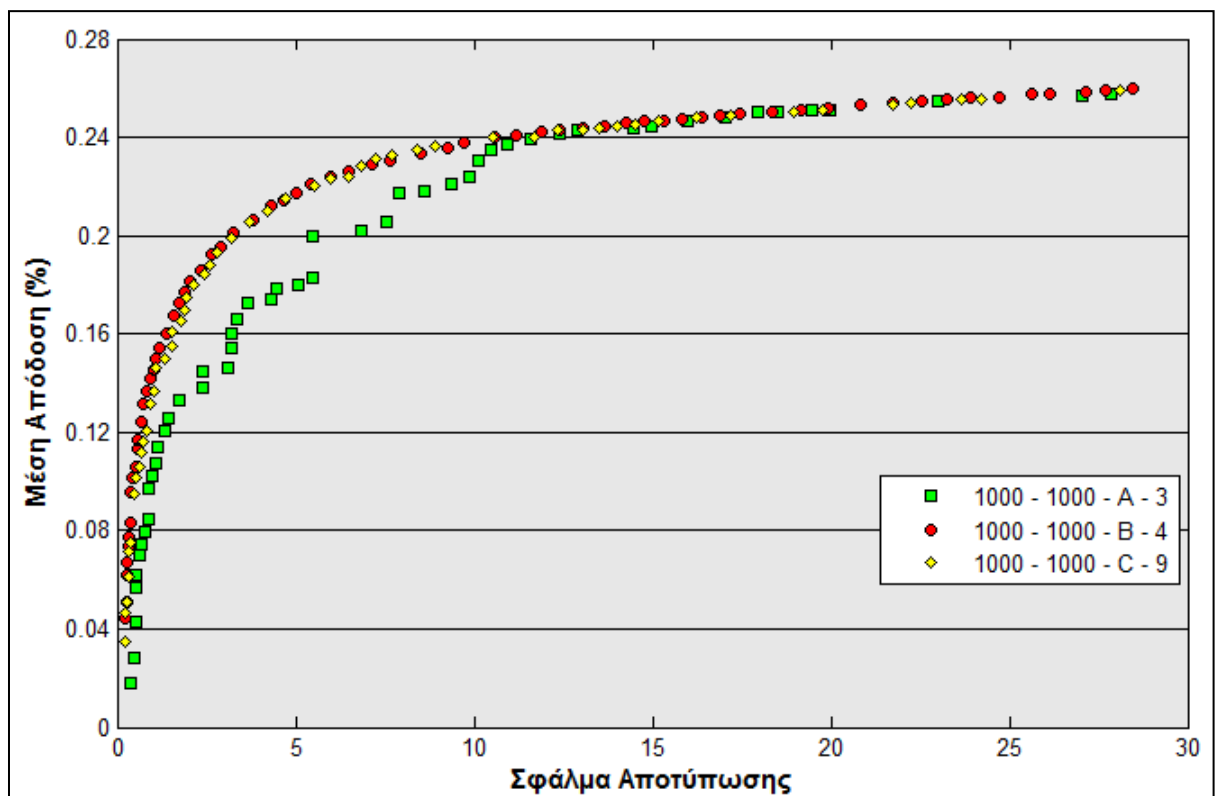


Γράφημα 5.1.1.1: Το PF^* με τις μεθόδους A,B, C σε χαμηλές τιμές επαναλήψεων με μικρό μέγεθος σμήνους

* Υπενθυμίζεται ότι τα αρχεία εξόδου των εκάστοτε 10 εφαρμογών αριθμούνται με αύξοντα αριθμό από το 1 έως το 10. Οπότε, ο αριθμός αρχείου εξόδου δηλώνει σε ποιο από τα 10 αρχεία εξόδου του δεδομένου συνδυασμού παραμέτρων (μέγιστο πλήθος επαναλήψεων – μέγεθος σμήνους – μέθοδος) αντιστοιχεί το PF^* , που παρουσιάζεται.



Γράφημα 5.1.1.2: Το PF^* με τις μεθόδους A,B, C σε ενδιάμεσες τιμές επαναλήψεων με μεσαίο μέγεθος σμήνους



Γράφημα 5.1.1.3: Το PF^* με τις μεθόδους A,B, C σε υψηλές τιμές επαναλήψεων με μεγάλο μέγεθος σμήνους

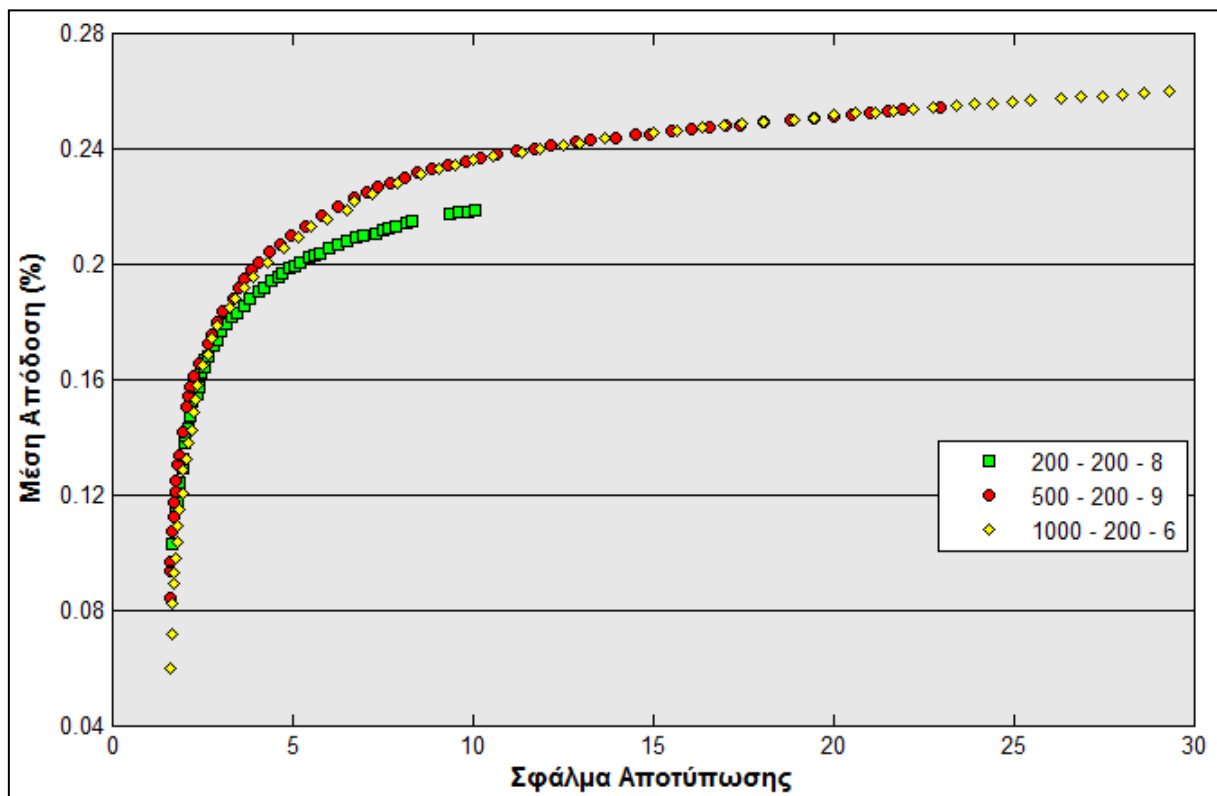
5.1.2. Frankfurt Xetra Dax

Ο επόμενος πίνακας συγκεντρώνει το σύνολο των αποτελεσμάτων για τον δείκτη Frankfurt Xetra Dax. Έχει συμπεριληφθεί το μέσο πλήθος περιορισμών των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, που προηγούνται του τελικού περιορισμού. Οι διακυμάνσεις, που παρουσιάζει αυτό το μέγεθος, είναι υψηλές λόγω της στοχαστικής φύσης του αλγορίθμου. Εντούτοις, αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα, διότι το μέσο πλήθος περιορισμών δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο σύγκρισης των συνδυασμών.

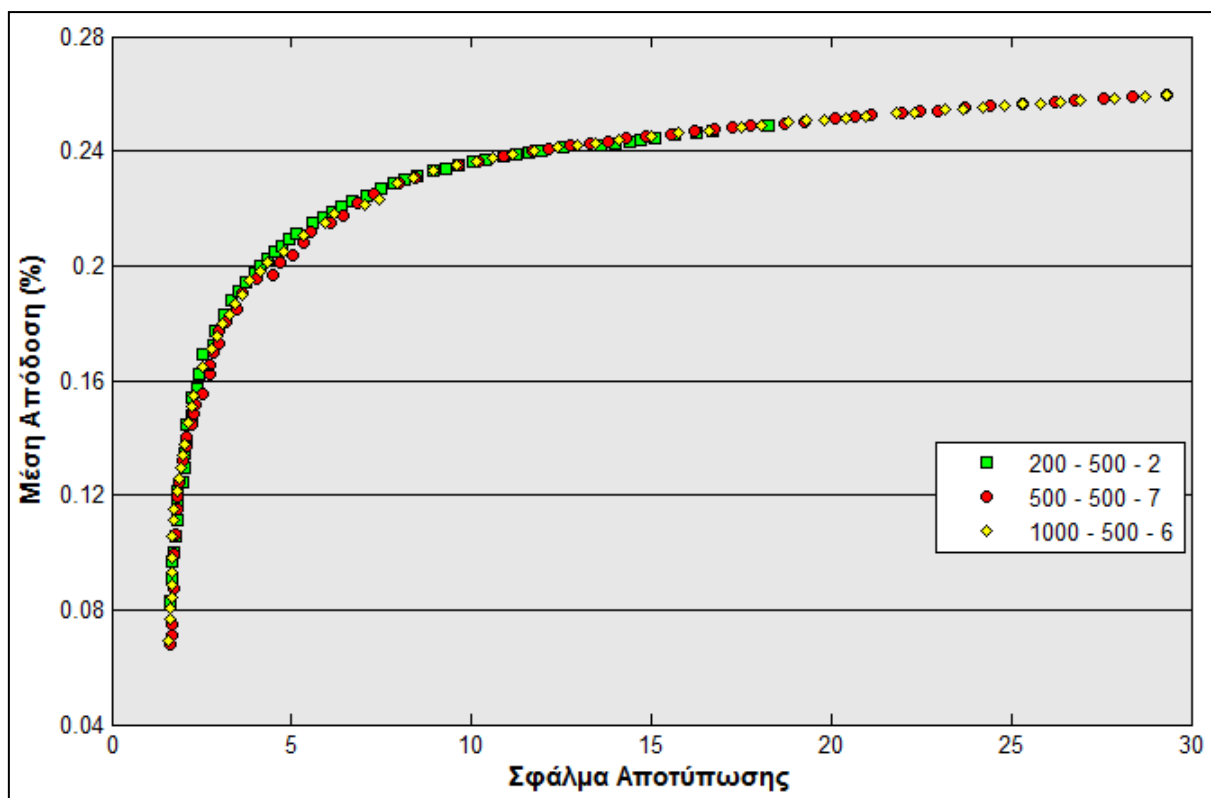
Frankfurt Xetra Dax					$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)	Περιορισμοί $x \in P^*$ πλην του τελικού
ΜΕΓΕΘΟΣ B	ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΜΗΝΟΥΣ	200	r	200	57.4	10.727	4.184	0.493	0.9
				500	61.5	10.605	4.961	1.447	2.7
				1000	62.2	10.755	5.272	3.503	6.3
			s ²	200	21.4	0.185	0.424	0.00207	2.1
				500	17.6	0.402	0.259	0.314	10.2
				1000	10.4	0.344	3.97×10^{-4}	8.56	6.23
		500	r	200	61.4	10.035	4.829	1.008	8.8
				500	65.0	10.442	5.200	2.981	14.7
				1000	64.6	10.557	5.283	5.350	20.4
			s ²	200	34.0	0.811	0.33	0.0272	41.7
				500	12.4	0.204	0.0658	0.765	37.8
				1000	82.7	0.129	2.78×10^{-5}	1.93	8.27
	ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΜΗΝΟΥΣ	1000	r	200	63.0	9.754	4.948	1.770	26.5
				500	66.1	10.043	5.285	6.547	35.8
				1000	67.2	10.469	5.286	10.914	45.5
			s ²	200	57.6	0.875	0.305	0.145	159.0
				500	8.77	0.197	1.40×10^{-5}	5.87	83.7
				1000	10.8	0.137	7.73×10^{-6}	3.35	1.17
		100	r	5000	67.4	9.229	5.284	2.814	201.5
				10000	65.1	10.292	5.285	4.811	444.2
				10000	18.8	0.597	4.37×10^{-5}	0.0268	801.0
			s ²	5000	5.82	0.306	1.78×10^{-5}	0.0243	115.0
				10000	18.8	0.597	4.37×10^{-5}	0.0268	801.0
				10000	18.8	0.597	4.37×10^{-5}	0.0268	801.0

Πίνακας 5.1.2.1: Συνολικά αποτελέσματα για τον Frankfurt Xetra Dax

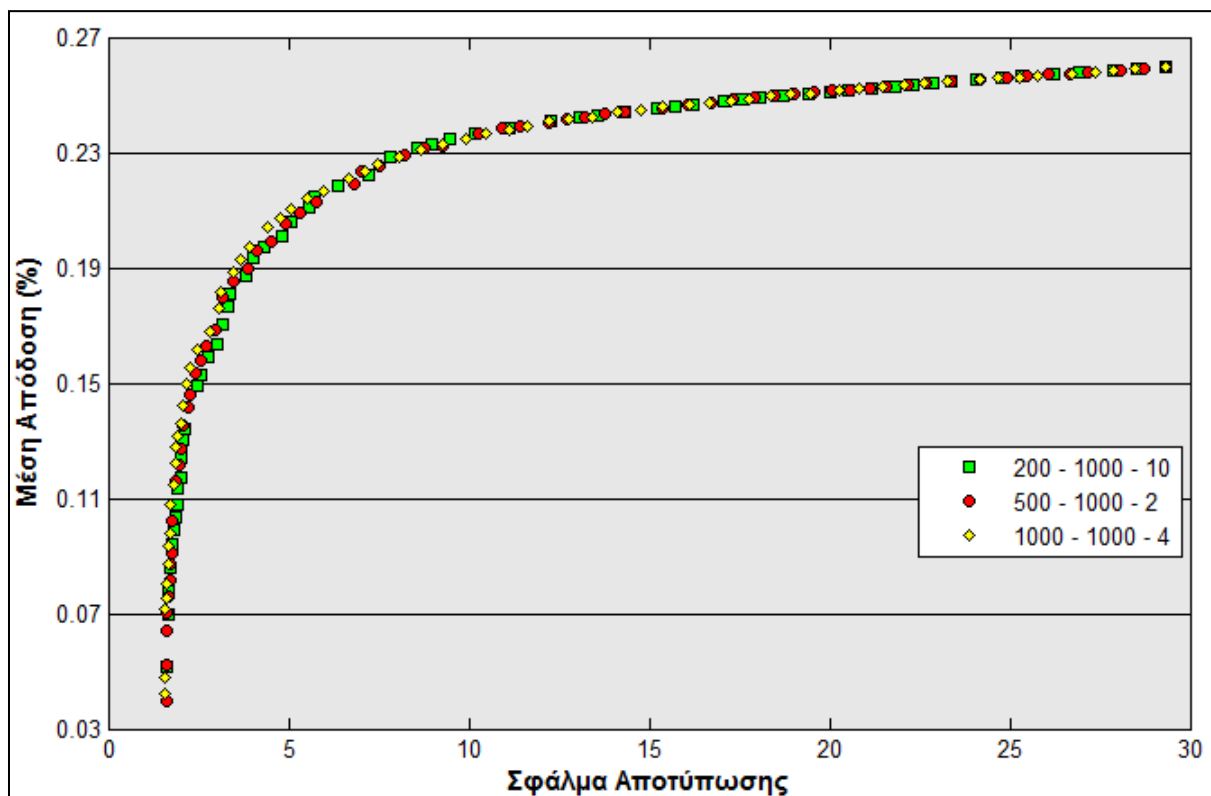
Όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω για την τεχνική B και τα αποτελέσματά της στην περίπτωση του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών ισχύουν και για το δείκτη Frankfurt Xetra Dax. Στα τρία επόμενα γραφήματα παρουσιάζεται η επίδραση, που έχει στα αποτελέσματα της τεχνικής B η διατήρηση αμετάβλητου μεγέθους σμήνους και μεταβλητού μέγιστου πλήθους επαναλήψεων. Στο πρώτο γράφημα είναι εντυπωσιακό ότι μεγαλώνει το κατά Pareto αποτελεσματικό μέτωπο (PF^*) κι άρα αυξάνεται ο βαθμός κάλυψης του χώρου λύσεων με κάθε αύξηση του πλήθους επαναλήψεων, ενώ το μέγεθος του σμήνους παραμένει σταθερά ίσο με 200. Στο δεύτερο γράφημα, όπου το μέγεθος του σμήνους ισούται με 500, μόνον η πρώτη αύξηση του μέγιστου πλήθους επαναλήψεων συνεπάγεται σημαντικά καλύτερη εξερεύνηση του χώρου λύσεων. Στην επόμενη αύξηση τα αποτελέσματα παρουσιάζουν περιορισμένες διαφορές, κυρίως όσον αφορά στην ομαλότητα. Τέλος, στο τρίτο γράφημα, που το μέγεθος του σμήνους ανέρχεται σε 1000, τα προκύπτοντα PF^* είναι σχεδόν ταυτόσημα μεταξύ τους ανεξάρτητα από το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων.



Γράφημα 5.1.2.1: Το PF^* με τη μέθοδο B σε χαμηλές, ενδιάμεσες και υψηλές τιμές επαναλήψεων με μικρό μέγεθος σμήνους

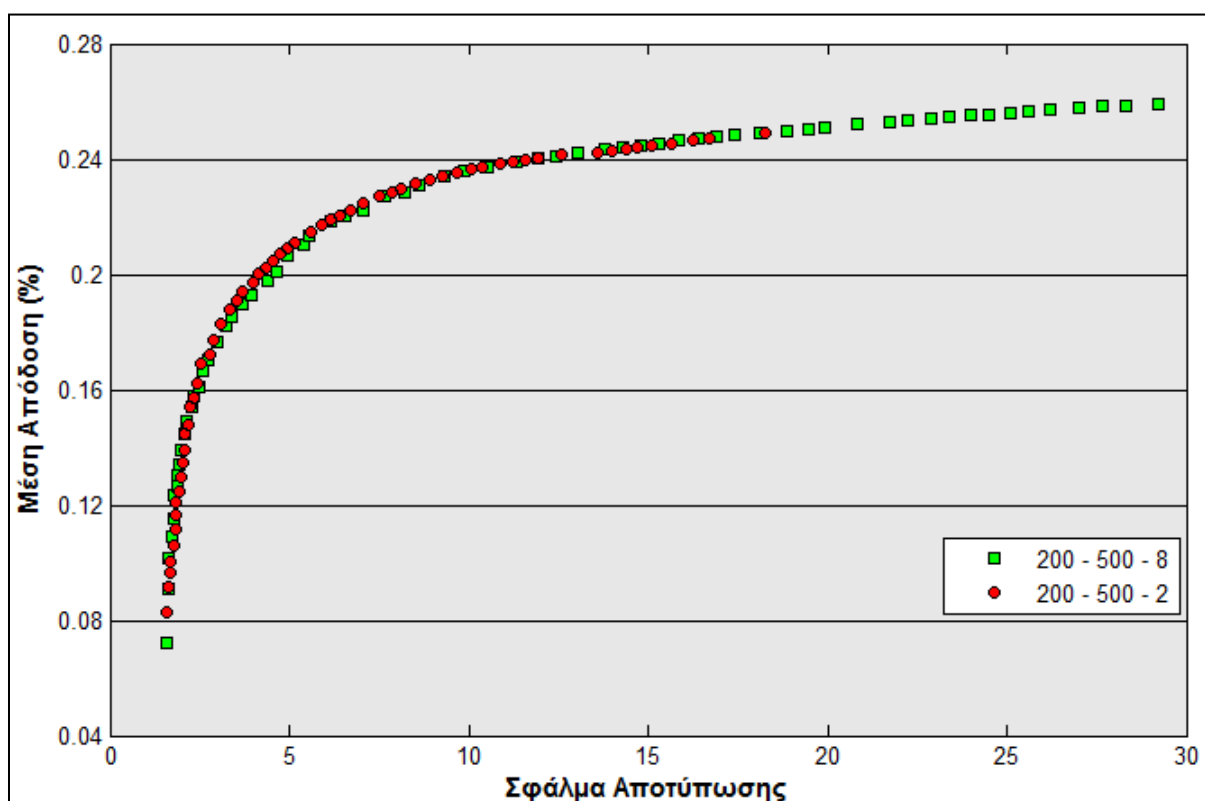


Γράφημα 5.1.2.2: Το PF^* με τη μέθοδο Β σε χαμηλές, ενδιάμεσες και υψηλές τιμές επαναλήψεων με μεσαίο μέγεθος σμήνους



Γράφημα 5.1.2.3: Το PF^* με τη μέθοδο Β σε χαμηλές, ενδιάμεσες και υψηλές τιμές επαναλήψεων με μεγάλο μέγεθος σμήνους

Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, η επιρροή της στοχαστικής φύσης του αλγορίθμου στα αποτελέσματα αυξάνεται αντιστρόφως ανάλογα με το πλήθος επαναλήψεων και το μέγεθος του σμήνους. Το γράφημα 5.1.2.4 αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του φαινομένου αυτού. Τα PF^* , που απεικονίζονται, έχουν προκύψει με μέγιστο πλήθος επαναλήψεων ίσο με 200 και μέγεθος σμήνους ίσο με 500. Μολονότι ο συνδυασμός πλήθους επαναλήψεων – μεγέθους σμήνους είναι κοινός, η αναζήτηση στο χώρο λύσεων είναι πολύ διαφορετική.



Γράφημα 5.1.2.4: Το PF^* με τη μέθοδο B σε χαμηλές τιμές επαναλήψεων με μεσαίο μέγεθος σμήνους

5.1.3. Υπερέχοντες συνδυασμοί για τους δύο δείκτες

Αν εξαιρεθεί η παράμετρος της χρονικής διάρκειας οι συνδυασμοί 500 – 1000, 1000 – 500 και 1000 – 1000 (Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων – Μέγεθος σμήνους) προκύπτουν ισοδύναμοι μεταξύ τους. Επιπλέον υπερτερούν του συνδυασμού 500 – 500, επειδή, αν και μεγαλύτερης διάρκειας παρουσιάζουν λίγο υψηλότερη μέση τιμή και σημαντικά μικρότερη διακύμανση στο μέτρο M_f . Ακόμη, παρατηρείται πως οι συνδυασμοί 5000 – 100 και 10000 – 100 καταλήγουν σε εξίσου καλά αποτελέσματα με τους συνδυασμούς 500 – 1000, 1000 – 500 και 1000 – 1000 με εξαίρεση μια μικρής τάξεως μείωση του μέτρου M_v και της σημαντικής βελτίωσης της χρονικής διάρκειας. Η βελτίωση έγκειται στον περιορισμό της μέσης τιμής και της διακύμανσης (οι τιμές σημειώνονται με **bold** στον πίνακα 5.1.3.1). Λαμβάνοντας υπόψη ότι η εκάστοτε πληροφορία έχει αξία για έναν επενδυτή, εφόσον είναι έγκαιρη και ακριβής, συμπεραίνουμε τη σημασία των σχετιζόμενων με τη διάρκεια μειώσεων.

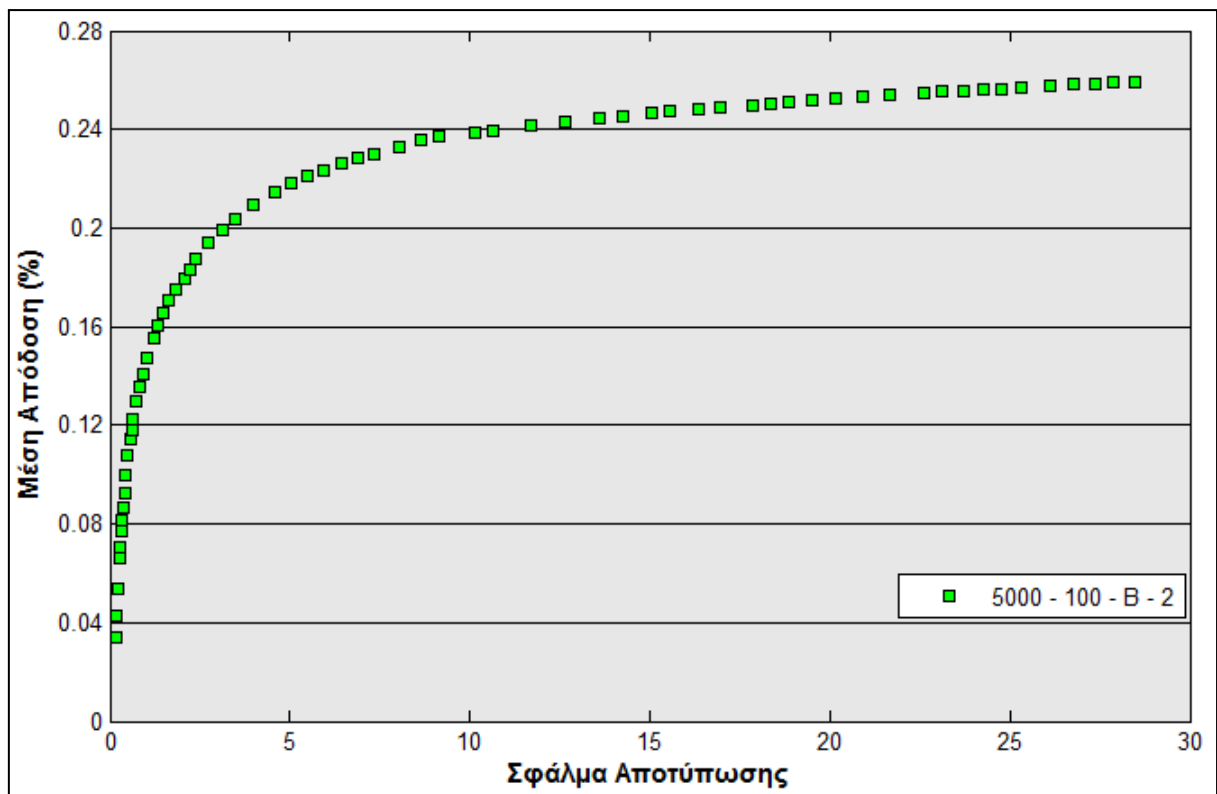
Τέλος, ο συνδυασμός 5000 – 100 υπερτερεί του 10000 – 100, διότι η παράμετρος της χρονικής διάρκειας εμφανίζεται μικρότερη κατά $\cong 43.41\%$ για το Γενικό Δείκτη και κατά $\cong 41.51\%$ για τον Frankfurt Xetra Dax.

Εν κατακλείδι, στα βέλτιστα αποτελέσματα καταλήγει η μέθοδος B για μέγιστο πλήθος επαναλήψεων ίσο με 5000 και μέγεθος σμήνους ίσο με 100.

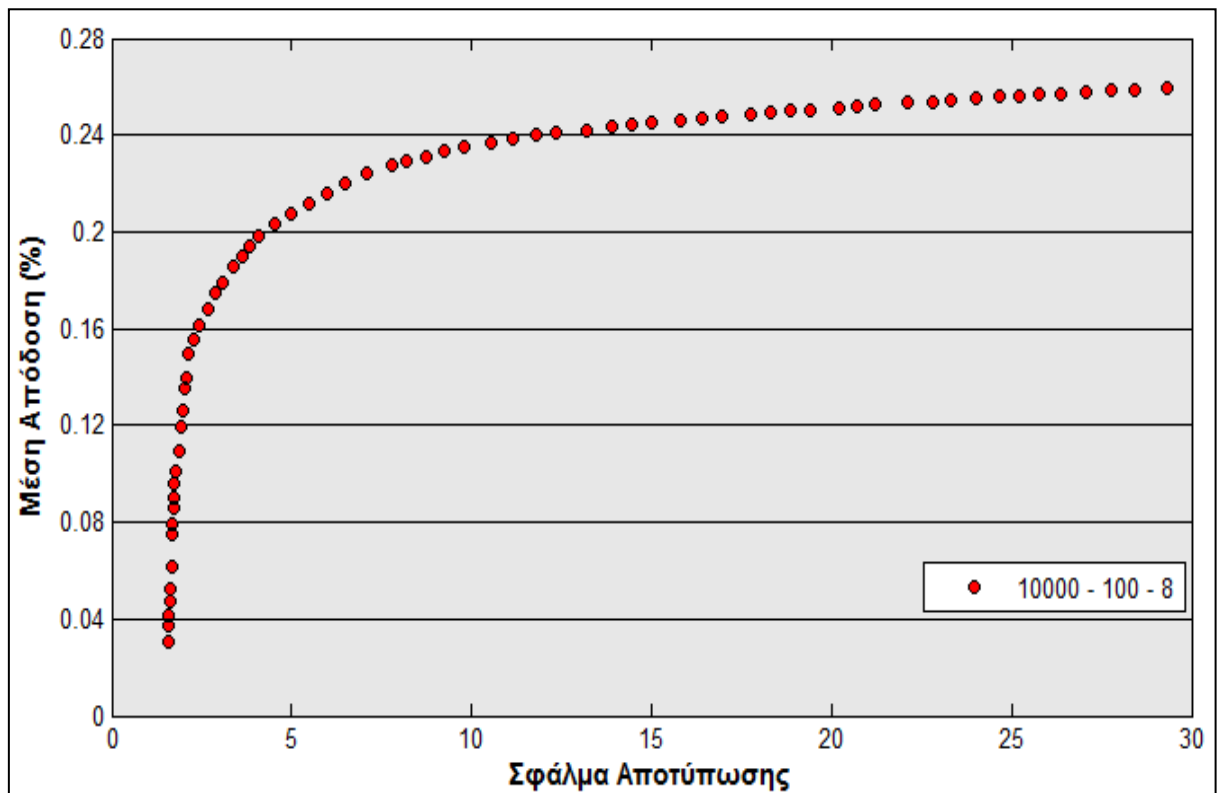
Γενικός Δείκτης					$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)	Περιορισμοί $x \in P^*$ πλην του τελικού
ΜΕΘΟΔΟΣ Β	ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΜΗΝΟΥΣ	500	r	500	63.9	10.478	5.027	3.510	11.6
				1000	67.8	9.832	5.334	5.317	37.1
			s ²	500	8.77	0.273	0.273	1.09	54.9
				1000	4.40	0.189	4.8×10^{-5}	0.88	26.1
		1000	r	500	65.2	10.506	5.336	6.461	20.0
				1000	67.1	10.501	5.338	12.227	44.6
			s ²	500	3.73	0.108	2.8×10^{-5}	1.53	4.67
				1000	5.66	0.0774	2.33×10^{-5}	4.77	6.27
		100	r	5000	67.2	9.528	5.338	2.751	197.5
				10000	67.9	9.564	5.335	4.861	434.5
			s ²	5000	10.6	0.327	3.27×10^{-5}	0.0192	193.0
				10000	11.9	0.485	2.74×10^{-5}	0.0294	559.0
Frankfurt Xetra Dax					$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)	Περιορισμοί $x \in P^*$ πλην του τελικού
ΜΕΘΟΔΟΣ Β	ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΜΗΝΟΥΣ	500	r	500	65.0	10.442	5.200	2.981	14.7
				1000	66.1	10.043	5.285	6.547	35.8
			s ²	500	12.4	0.204	0.0658	0.765	37.8
				1000	8.77	0.197	1.40×10^{-5}	5.87	83.7
		1000	r	500	64.6	10.557	5.283	5.350	20.4
				1000	67.2	10.469	5.286	10.914	45.5
			s ²	500	8.27	0.129	2.78×10^{-5}	1.93	8.27
				1000	10.8	0.137	7.73×10^{-6}	3.35	1.17
		100	r	5000	67.4	9.229	5.284	2.814	201.5
				10000	65.1	10.292	5.285	4.811	444.2
			s ²	5000	5.82	0.306	1.78×10^{-5}	0.0243	115.0
				10000	18.8	0.597	4.37×10^{-5}	0.0268	801.0

Πίνακας 5.1.3.1: Βέλτιστα αποτελέσματα για τους δύο δείκτες

Στα γραφήματα 5.1.3.1 και 5.1.3.2 αποτυπώνεται πως η μέθοδος B με τους συνδυασμούς 5000 – 100 και 10000 – 100 παράγει πολύ καλή κατανομή τιμών και εξαιρετική ομαλότητα του κατά Pareto βελτίστου μετώπου (PF^*). Το πρώτο γράφημα αφορά το Γενικό Δείκτη του X.A.A., ενώ το δεύτερο τον Frankfurt Xetra Dax.



Γράφημα 5.1.3.1: Το PF^* για τον Γενικό Δείκτη με τη μέθοδο B, στις 5000 επαναλήψεις με μέγεθος σμήνους ίσο με 100



Γράφημα 5.1.3.2: Το PF^* για τον Frankfurt Xetra Dax με τη μέθοδο B, στις 10000 επαναλήψεις με μέγεθος σμήνους ίσο με 100

5.2. min Σφάλμα Αποτύπωσης – max Μέση Απόδοση – min VaR

Το δεδομένο πρόβλημα βελτιστοποίησης παρουσιάζει αυξημένη πολυπλοκότητα. Οι συνδυασμοί, που αναδείχθηκαν βέλτιστοι για τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, στην προκειμένη περίπτωση δεν επαρκούν για την εξαγωγή αρκούντως καλών αποτελεσμάτων. Ακόμη, σε αντιδιαστολή με το πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο αντικειμενικών συναρτήσεων, στο τρέχον πρόβλημα οι απαιτούμενες χρονικές διάρκειες εκτέλεσης προκύπτουν πολύ μεγαλύτερες.

Η επίλυση του προβλήματος τριών διαστάσεων οδηγεί σε ένα τρισδιάστατο κατά Pareto αποτελεσματικό μέτωπο. Δηλαδή, τα διανύσματα αντικειμενικών συναρτήσεων των $x \in P^*$ σχηματίζουν μία επιφάνεια. Οι βέλτιστες λύσεις, στις οποίες καταλήγει ο αλγόριθμος, είναι εκατοντάδες.

Η επίλυση του προβλήματος επιχειρήθηκε για τους δύο δείκτες με τους παρακάτω συνδυασμούς μόνο για τη μέθοδο B, η οποία αναδείχθηκε βέλτιστη:

Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων	Μέγεθος Σμήνους	Μέγιστο πλήθος $x \in P^*$
1000	1000	3000
2000	500	2500
10000	100	1000

Πίνακας 5.2.1: Γενικός Δείκτης και Frankfurt Xetra Dax – Συνδυασμοί

Οι συνδυασμοί επιλέχθηκαν, επειδή κατόπιν δοκιμών αναδείχθηκαν ιδιαίτερα αποτελεσματικοί, όσον αφορά στο πλήθος των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, στα μέτρα απόδοσης M_v και M_f και στην κατανομή και στην ομαλότητα του κατά Pareto αποτελεσματικού μετώπου. Επιπλέον, κριτήριο επιλογής αποτέλεσε η διατήρηση του χρόνου εκτέλεσης σε επίπεδα κάτω των 150 min. Αξίζει να σημειωθεί πως το σύνολο των εφαρμογών προσέγγισε το χαρτοφυλάκιο μέγιστης απόδοσης.

Όσον αφορά στις συνθέσεις των χαρτοφυλακίων οι παρατηρήσεις είναι ανάλογες με αυτές του προβλήματος δύο διαστάσεων. Δηλαδή, όσο μικρότερο είναι το σφάλμα αποτύπωσης και χαμηλότερη η VaR τόσο τα χαρτοφυλάκια διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τις μετοχές, που τα συνθέτουν. Αυτό οφείλεται (όπως και στο πρόβλημα δύο διαστάσεων) στον υψηλών διαστάσεων χώρο αναζήτησης, στη στοχαστική φύση του αλγορίθμου και στο γεγονός ότι αρκετά από τα χαρτοφυλάκια μικρού σφάλματος αποτύπωσης και χαμηλής VaR ακολουθούν την αρχή της διαφοροποίησης, δηλαδή αποτελούνται από πολλές μετοχές (>6). Οι συνδυασμοί διαφορετικών μετοχών, που μπορούν να εξασφαλίσουν μικρό σφάλμα αποτύπωσης και χαμηλή VaR, δηλαδή περιορισμένο κίνδυνο, είναι εξαιρετικά πολλοί.

Η αύξηση της απόδοσης συνεπάγεται περιορισμό του πλήθους μετοχών, που συνθέτουν τα χαρτοφυλάκια. Οι συνδυασμοί μετοχών που δύνανται να εγγυηθούν υψηλές αποδόσεις δεν είναι πάρα πολλοί. Κατά συνέπεια, οι μετοχές, που συνθέτουν

τα χαρτοφυλάκια υψηλών αποδόσεων με πλήθος μετοχών ≤ 6 , είναι σε μεγάλο βαθμό κοινές. Βέβαια, διαφορές ως προς το ποσοστό συμμετοχής κάθε μετοχής αναπόφευκτα υφίστανται.

5.2.1. Γενικός Δείκτης Χ.Α.Α.

Γενικός Δείκτης			$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)	Περιορισμοί $x \in P^*$ πλην του τελικού
ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΜΗΝΟΥΣ	2000	r	641.5	12.069	6.166	94.330	140.5
	500	s²	220.0	0.111	1.05×10^{-5}	0.113	27.8
	1000	r	665.9	12.067	6.167	95.381	120.5
	1000	s²	305.0	0.0204	1.12×10^{-5}	0.0683	20.1
	10000	r	510.6	12.410	6.162	92.990	392.9
	100	s²	278.0	0.0534	2.45×10^{-5}	0.0629	1210.0

Πίνακας 5.2.1.1: Συνολικά αποτελέσματα για τον Γενικό Δείκτη

Στον παραπάνω πίνακα οι μέσοι όροι είναι καλοί και οι διακυμάνσεις των κρίσιμων παραμέτρων M_v και M_f και της χρονικής διάρκειας κυμαίνονται σε χαμηλές τιμές.

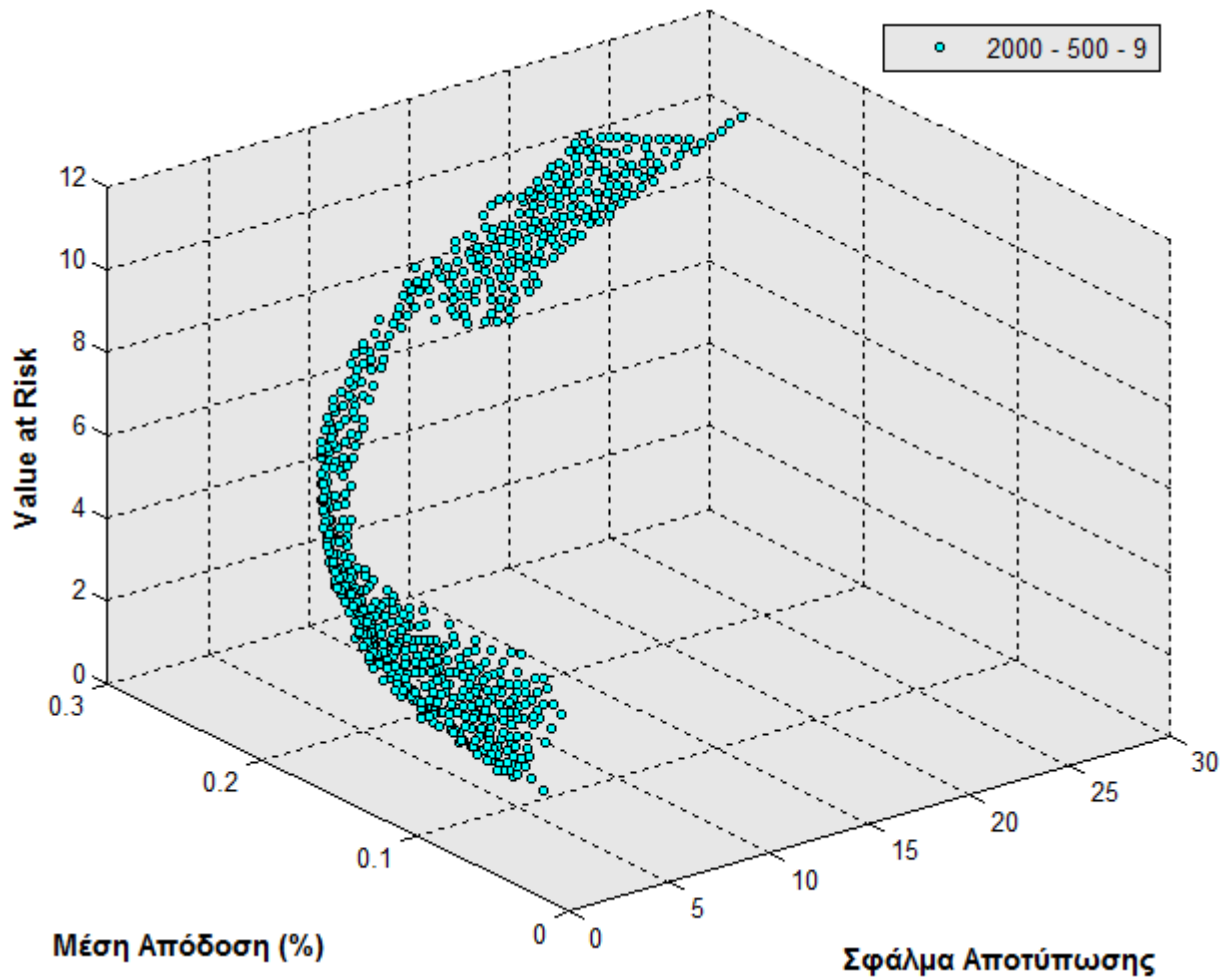
Γενικός Δείκτης		Μέγιστο πλήθος $x \in P^*$	$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)	Περιορισμοί $x \in P^*$ πλην του τελικού
ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΜΗΝΟΥΣ	1000	1500	640	11.716	6.175	47.67	102
	500						
	1000	1500	659	11.530	5.131	47.57	44
	500						
	1000	10000	676	12.073	6.161	137.37	34
	1000						
	5000	1000	656	12.339	4.915	46.5	82
	100						

Πίνακας 5.2.1.2: Συνδυασμοί, που κρίθηκαν ακατάλληλοι ή μη προτιμητέοι

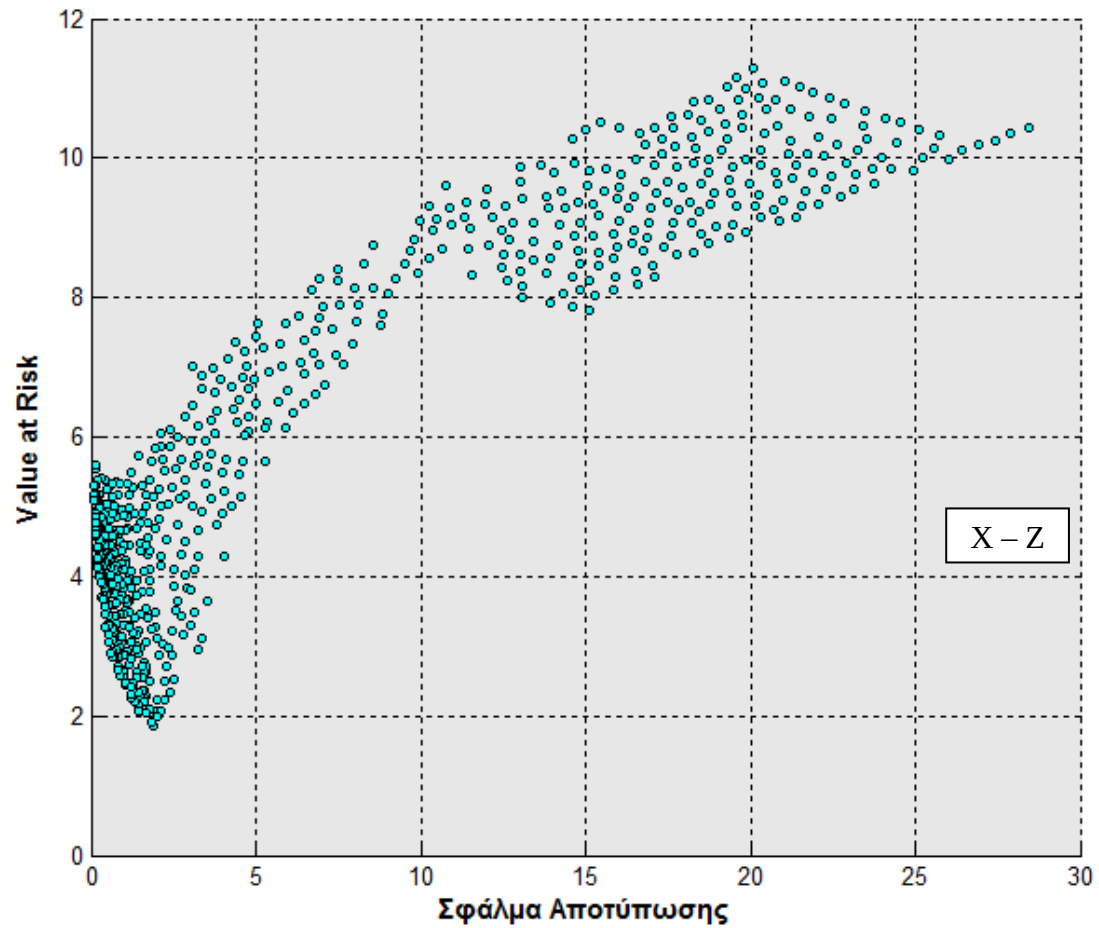
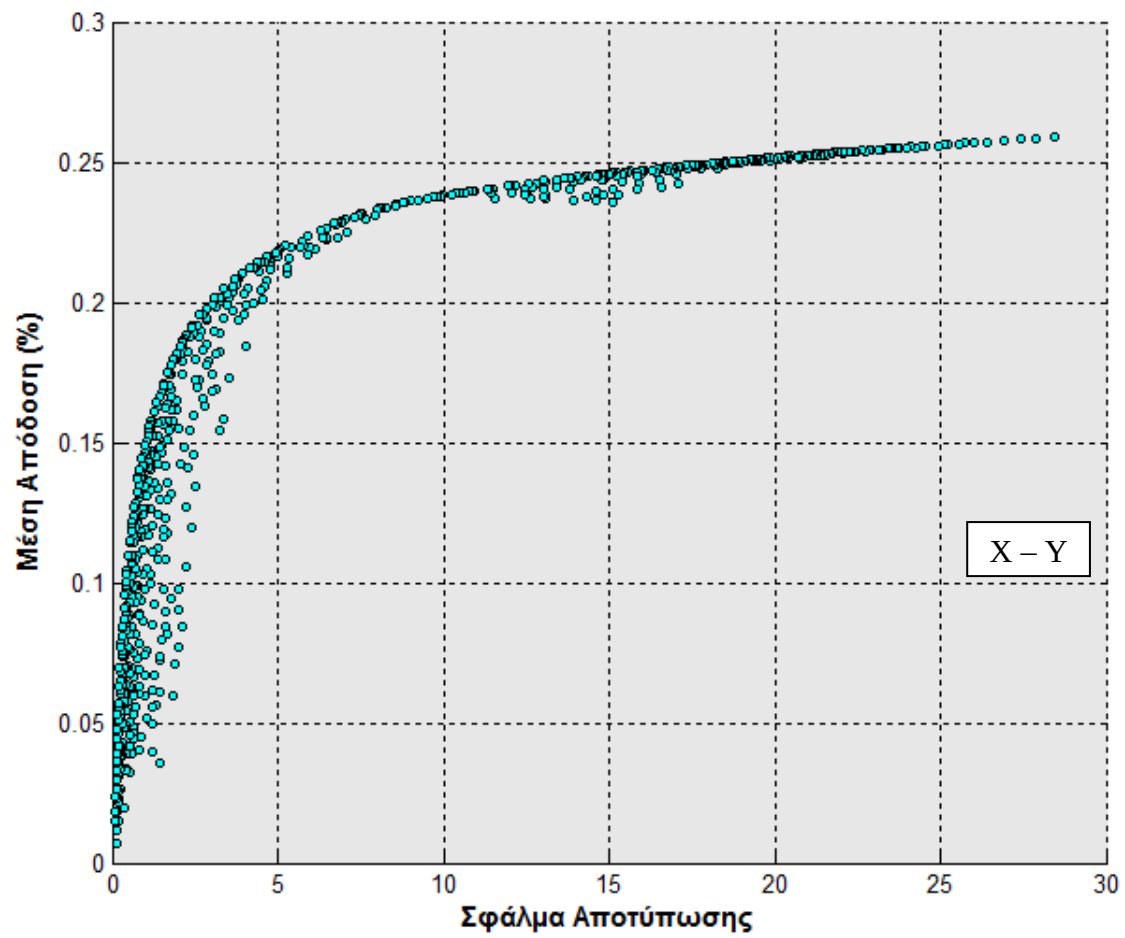
Ο πίνακας 5.2.1.2 περιλαμβάνει ακατάλληλους ή μη προτιμητέους συνδυασμούς. Πιο αναλυτικά, ο συνδυασμός 1000 – 500 με μέγιστο πλήθος $x \in P^*$ ίσο με 1500 θεωρήθηκε ακατάλληλος. Παρατηρούμε ότι στην πρώτη εφαρμογή έδωσε εφάμιλλα αποτελέσματα με τους συνδυασμούς, που εν τέλει επιλέχθηκαν, και μάλιστα σε διάρκεια κατά 50% μικρότερη. Εντούτοις, η αμέσως επόμενη εφαρμογή αν και το ίδιο καλή σε όρους διάρκειας με την πρώτη, έδωσε χαμηλό M_f . Ο λόγος είναι εμφανής. Στην πρώτη εφαρμογή συντελέστηκαν 102 περιορισμοί πριν τον τελικό, ενώ στη δεύτερη μόλις 44. Φαίνεται, λοιπόν, πως οι 44 επανενάρξεις της αναζήτησης στο χώρο λύσεων (με

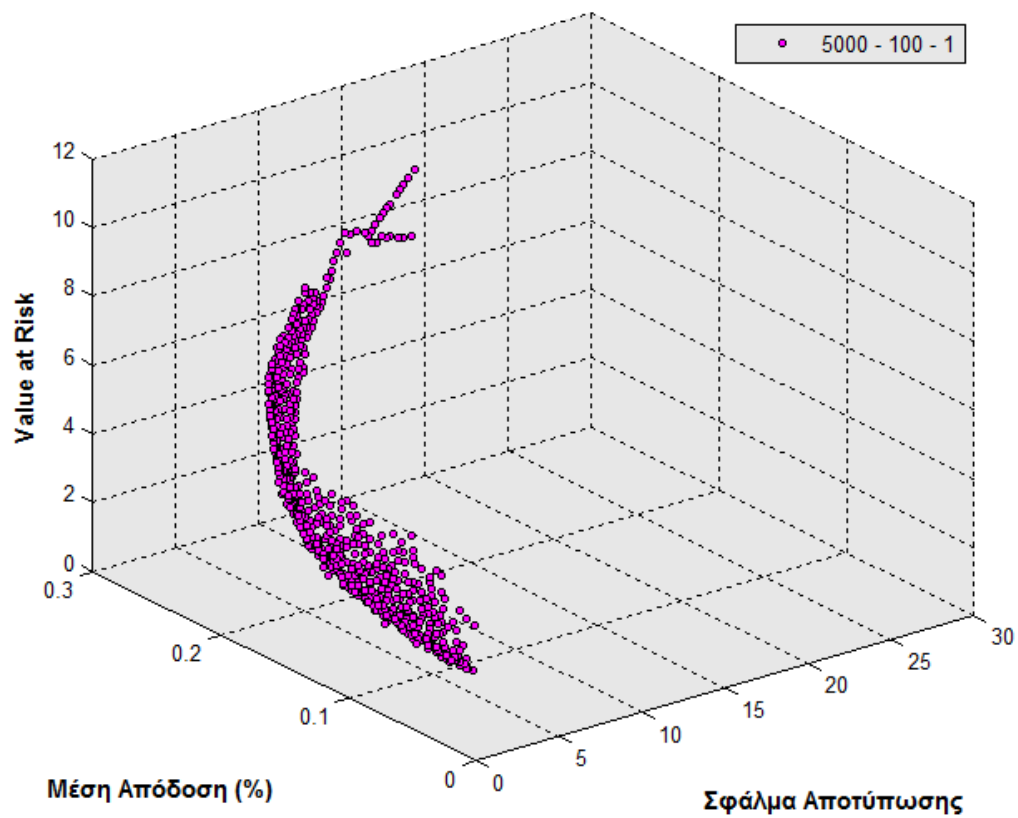
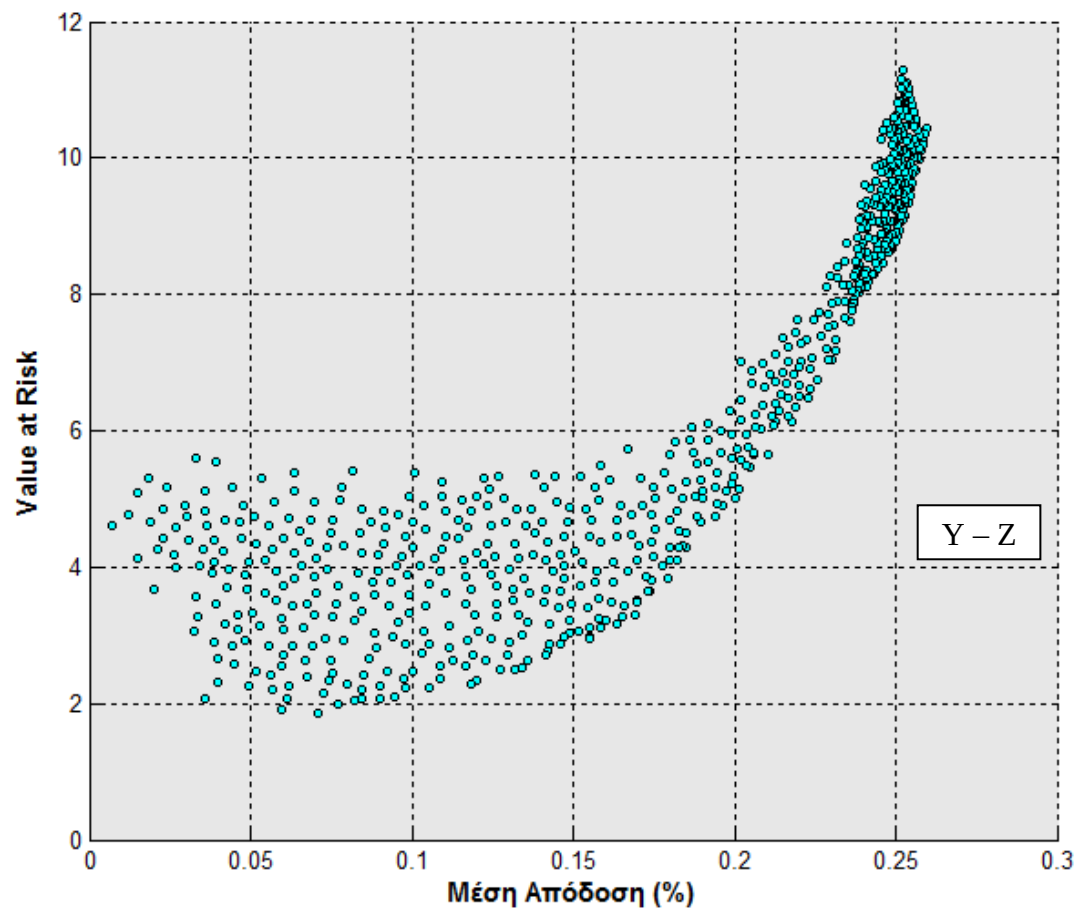
αφετηρία ένα μικρότερο σύνολο $x \in P^*$) δεν ήταν επαρκείς. Εξάγεται το συμπέρασμα ότι απαιτείται για το δεδομένο πληθυσμό λύσεων μεγαλύτερο μέγιστο πλήθος επαναλήψεων ή και διαφορετικό μέγιστο πλήθος $x \in P^*$, προκειμένου να αμβλυνθεί η επίδραση του στοχαστικού χαρακτήρα του αλγορίθμου στα αποτελέσματα. Επίσης, η περίπτωση 5000 – 100 με μέγιστο πλήθος $x \in P^*$ ίσο με 1000 κρίθηκε απορριπτέα, επειδή κατέληξε σε μικρή τιμή του μέτρου απόδοσης M_f . Τέλος, ο συνδυασμός 1000 – 1000 με μέγιστο πλήθος $x \in P^*$ ίσο με 1500 θεωρήθηκε μη προτιμητέος. Παρόλο, που οι επιδόσεις στις διάφορες παραμέτρους είναι παρεμφερείς με τους συνδυασμούς, που επιλέχθηκαν, ο απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης είναι υψηλός κι αυτό αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα.

Το γράφημα της είναι μία χαρακτηριστική περίπτωση του τρισδιάστατου κατά Pareto αποτελεσματικού μετώπου, PF^* . Παρουσιάζονται ακόμη οι προβολές στα επίπεδα $X - Y$, $X - Z$ και $Y - Z$ και για λόγους σύγκρισης παρατίθεται η γραφική απεικόνιση της απορριφθείσας περίπτωσης 5000 – 100 με μέγιστο πλήθος $x \in P^*$ ίσο με 1000.



Γράφημα: 5.2.1.1: Το PF^* με τη μέθοδο B, μέγιστο πλήθος επαναλήψεων ίσο με 2000 και μέγεθος σμήνους ίσο με 500





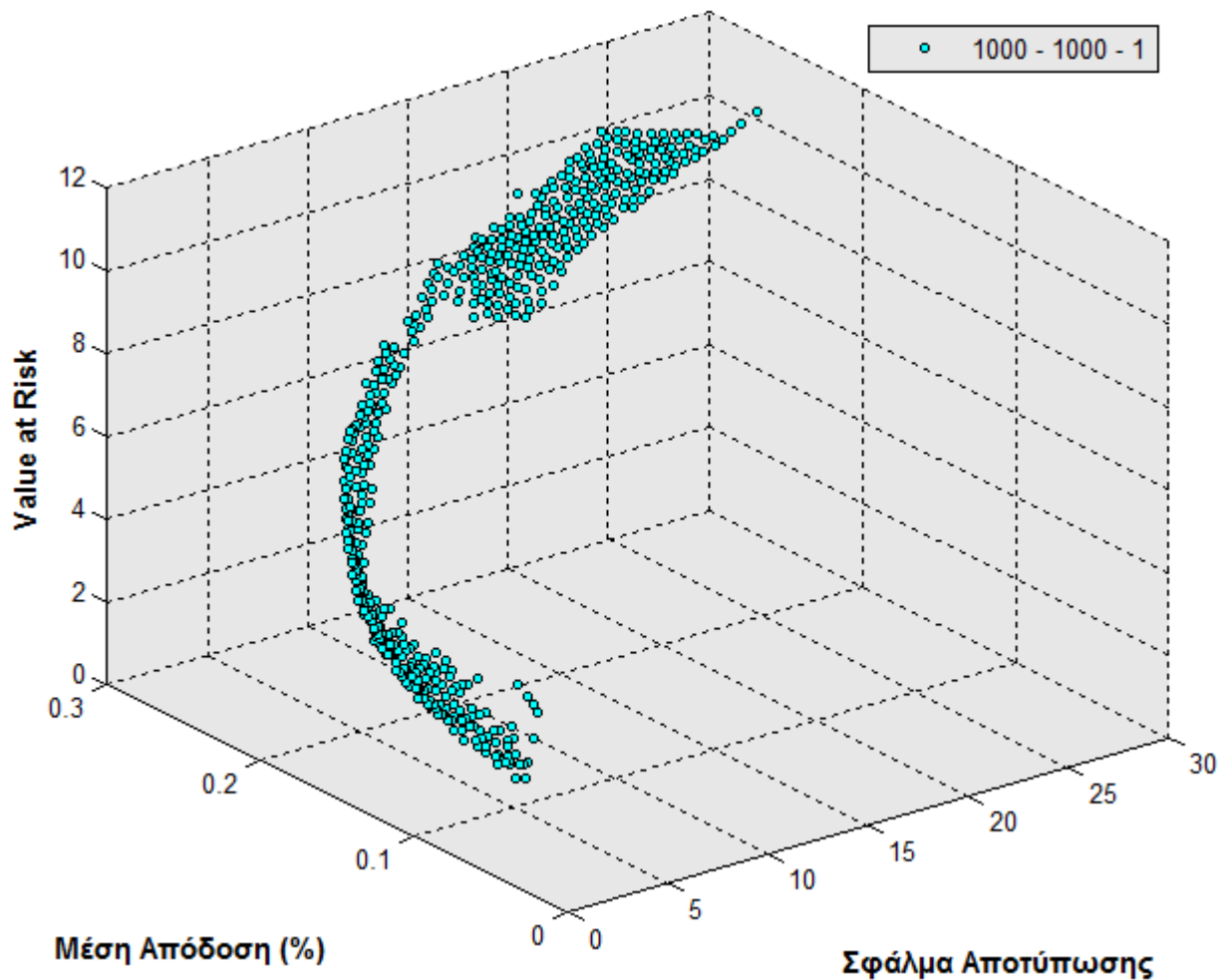
Γράφημα: 5.2.1.2: Το PF^* με τη μέθοδο B, μέγιστο πλήθος επαναλήψεων ίσο με 5000 και μέγεθος σμήνους ίσο με 100

Η διαφορά στο μέτρο απόδοσης M_f (6.169 έναντι 4.915), δηλαδή στην έκταση του κατά Pareto αποτελεσματικού μετώπου, γίνεται εύκολα αντιληπτή με μια απλή σύγκριση των γραφημάτων 5.2.1.1 και 5.2.1.2.

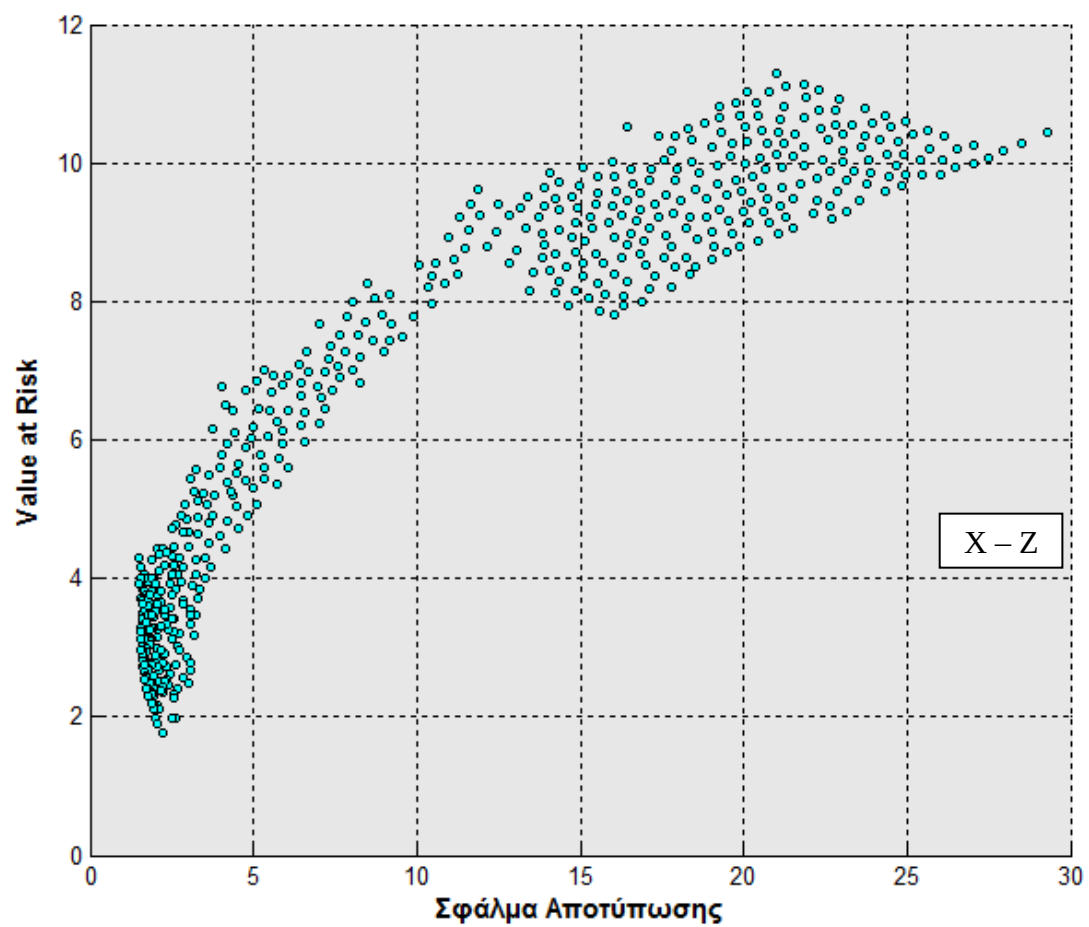
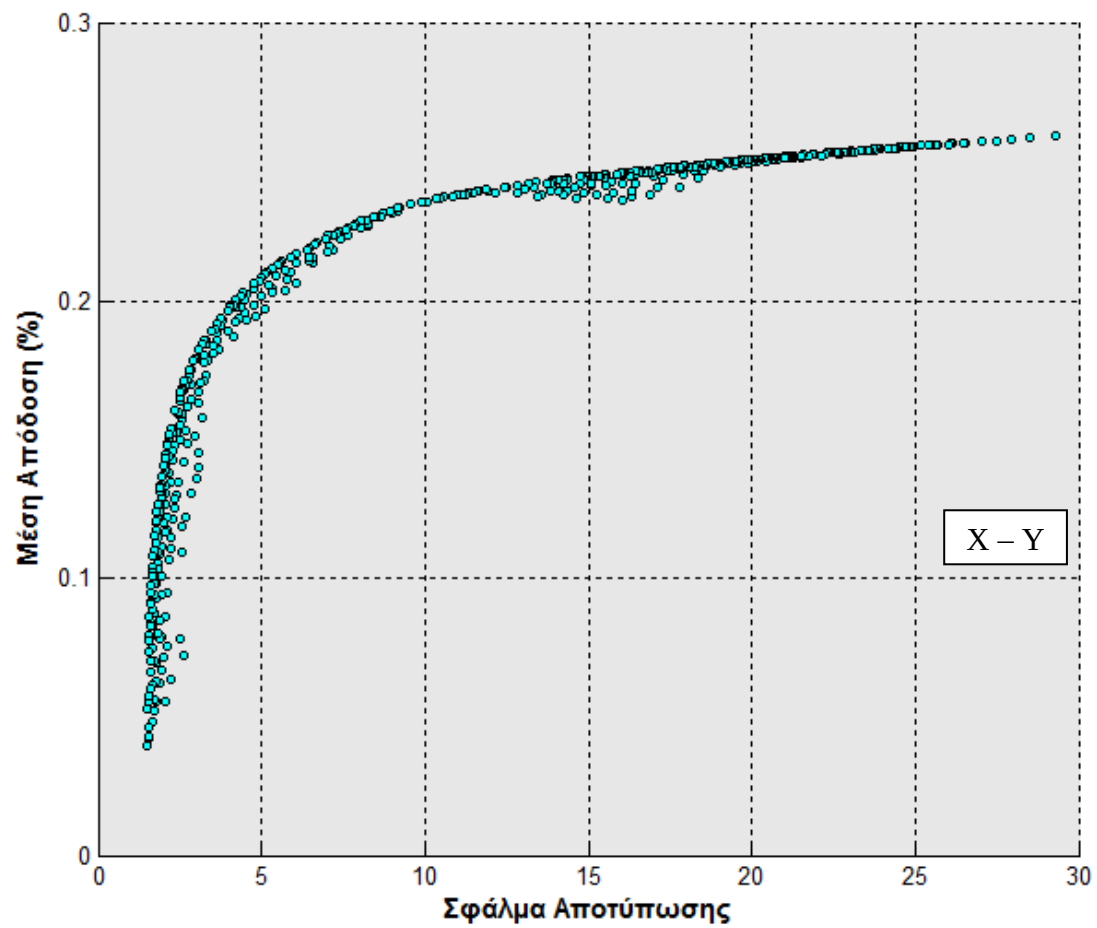
5.2.2. Frankfurt Xetra Dax

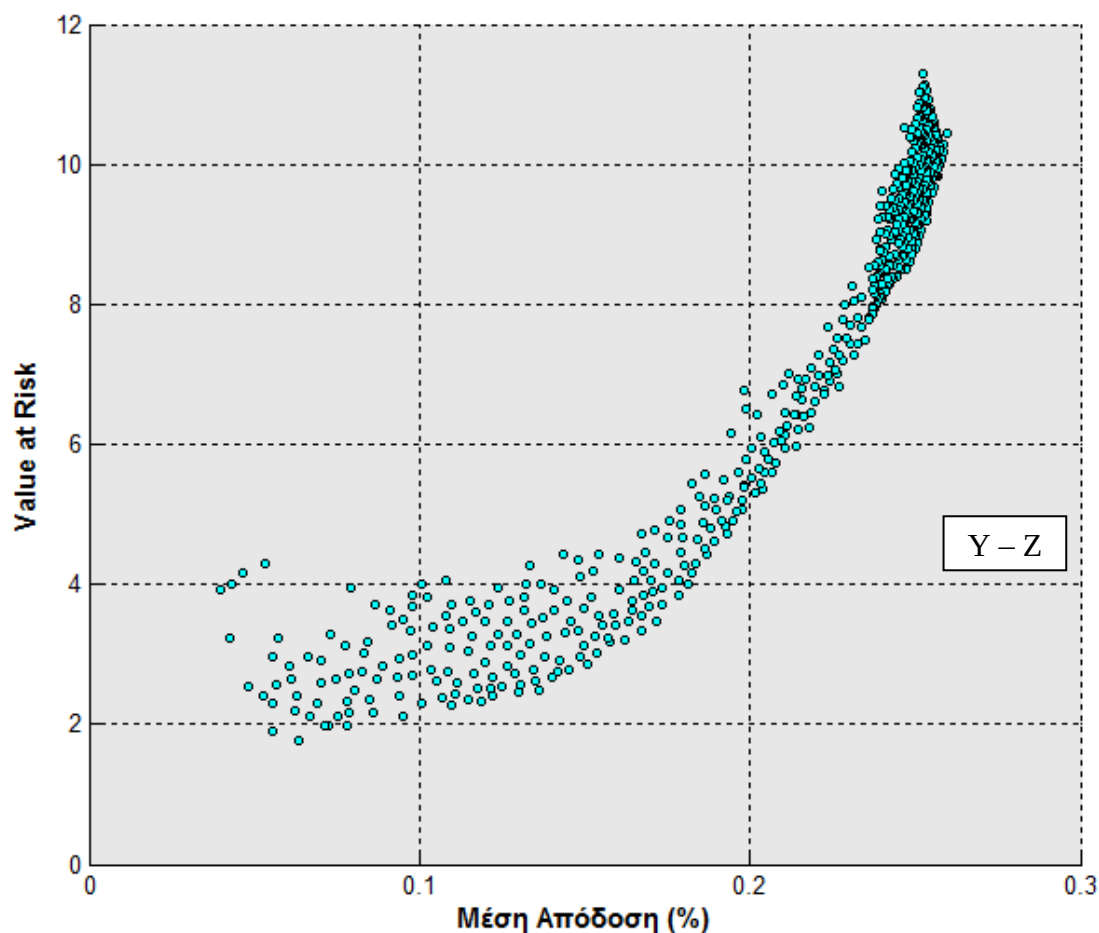
Frankfurt Xetra Dax			$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)	Περιορισμοί $x \in P^*$ πλην του τελικού
ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΜΗΝΟΥΣ	2000	r	518.4	11.784	6.121	95.49	174.3
	500	s ²	282.0	0.0706	5.24×10^{-5}	0.144	12.9
	1000	r	524.3	11.671	6.123	98.10	146.0
	1000	s ²	75.6	0.0299	3.35×10^{-5}	0.227	5.33
	10000	r	459.2	12.163	6.121	93.84	501.2
	100	s ²	109.0	0.0164	2.91×10^{-5}	0.0856	354.0

Πίνακας 5.2.2.1: Συνολικά αποτελέσματα για τον Frankfurt Xetra Dax



Γράφημα: 5.2.2.1 Το PF^* με τη μέθοδο B, μέγιστο πλήθος επαναλήψεων ίσο με 1000 και μέγεθος σμήνους ίσο με 1000





Για τον Xetra Dax ισχύουν τα ίδια ακριβώς με το Γενικό Δείκτη, όπως φαίνεται συγκρίνοντας τους πίνακες 5.2.1.1 και 5.2.2.1. Μοναδική διαφορά, που εντοπίζεται, είναι τα πιο μικρά σύνολα κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, στους αντίστοιχους συνδυασμούς. Η εξήγηση είναι ο διαφορετικός δείκτης προς αποτύπωση.

5.3. $\min$ Σφάλμα Αποτύπωσης – $\max$ Μέση Απόδοση – $\min$ VaR – $\min$ Πλήθος Μετοχών Χαρτοφυλακίου

Το πρόβλημα των τεσσάρων αντικειμενικών συναρτήσεων παρουσιάζει μία μεγάλη δυσκολία. Πρόκειται για τη διάρκεια εκτέλεσης του προγράμματος. Λόγω της ιδιαίτερα αυξημένης πολυπλοκότητας η εύρεση ικανοποιητικών αποτελεσμάτων σε λογικό χρονικό πλαίσιο αποτελεί πρόκληση. Βάσει του ορίου των 150 min, που έχει τεθεί για τις εφαρμογές της παρούσας εργασίας, αναδείχθηκε κατάλληλος και για τους δύο δείκτες ο εξής συνδυασμός:

Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων	→	2000
Μέγεθος Σμήνους	→	500
Μέγιστο πλήθος $x \in P^*$	→	5000

Ο πίνακας 5.3.1 συγκεντρώνει τα αποτελέσματα των δύο δεικτών:

		$x \in P^*$	M_v	M_f	Διάρκεια (min)	Περιορισμοί $x \in P^*$ πλην του τελικού
Γενικός Δείκτης	r	4422.111	14.187	7.269	145.499	168.3
	s²	4.17×10^4	0.0069	0.0936	33.4	753.0
Xetra Dax	r	2040.222	14.119	7.260	109.291	86.3
	s²	2.73×10^4	0.00894	0.00916	4.27	28.7

Πίνακας 5.3.1: Αποτελέσματα του 4-d προβλήματος για τους δύο δείκτες

Μια πρώτη παρατήρηση για τα αποτελέσματα, που περιλαμβάνονται στον πίνακα, έχει να κάνει με το πλήθος στοιχείων του κατά Pareto βελτίστου συνόλου. Πρόκειται για χιλιάδες λύσεις, γεγονός αναμενόμενο δεδομένου του δυσθεώρητου πλήθους συνδυασμών, που μπορούν να λάβουν χώρα. Υπενθυμίζεται ότι στο πρόβλημα δύο συναρτήσεων η αντίστοιχη παράμετρος ανερχόταν σε δεκάδες, ενώ στο πρόβλημα 3 διαστάσεων σε εκατοντάδες. Κάτι που γίνεται αμέσως αντιληπτό, είναι οι σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο δεικτών, αναφορικά με τις τιμές ορισμένων παραμέτρων. Στις τρεις συναρτήσεις διαπιστώθηκαν πιο μικρά σύνολα κατά Pareto βέλτιστων λύσεων στους αντίστοιχους συνδυασμούς για τον Frankfurt Xetra Dax. Στην προκειμένη περίπτωση, η διαφορά αυτή είναι πιο έντονη με τα $x \in P^*$ του Frankfurt Xetra Dax να είναι λιγότερα από τα υποδιπλάσια των $x \in P^*$ του Γενικού Δείκτη και συνοδεύεται από υπολογίσιμη διαφορά στη διάρκεια εκτέλεσης. Φυσικά, ο λόγος είναι και πάλι ο διαφορετικός δείκτης προς αποτύπωση.

Αξίζει να αναφερθεί, πως μία εκ των δέκα εφαρμογών, που σχετίζονται με αποτύπωση του Γενικού Δείκτη, τερμάτισε γιατί παρήλθε ο μέγιστος επιτρεπτός χρόνος και όχι γιατί καλύφθηκαν οι επαναλήψεις. Ακόμη, τονίζεται πως σε κάθε εφαρμογή για το Γενικό Δείκτη παρουσιάστηκαν αρκετά χαρτοφυλάκια αρνητικής μέσης απόδοσης. Η παρατήρηση αυτή έχει ενδιαφέρον, καθώς στα προβλήματα δύο και τριών συναρτήσεων χαρτοφυλάκια αρνητικής μέσης απόδοσης προέκυψαν ελάχιστες φορές. Επιπροσθέτως, σημειώνεται πως το χαρτοφυλάκιο μέγιστης απόδοσης προσεγγίστηκε στο σύνολο των εφαρμογών και πως όσον αφορά στη σύνθεση των χαρτοφυλακίων τα αποτελέσματα είναι ανάλογα των προβλημάτων δύο και τριών αντικειμενικών συναρτήσεων.

Οι διακυμάνσεις των μεγεθών, προκύπτουν πιο αυξημένες από αυτές του προβλήματος τριών αντικειμενικών στόχων. Ενδεχομένως για τον περιορισμό της επίδρασης στα αποτελέσματα, που έχει η στοχαστική φύση του αλγορίθμου, να απαιτείται τροποποίηση του πληθυσμού λύσεων ή και του μέγιστου πλήθους επαναλήψεων ή και του μέγιστο πλήθους $x \in P^*$.

Σχετικά με τη σύνθεση των χαρτοφυλακίων ισχύουν όσα αναφέρθηκαν για το πρόβλημα τριών αντικειμενικών συναρτήσεων.

6. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ – ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΩΝ ΣΕΝΑΡΙΩΝ

Η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου αξιολογείται μέσω της εξέτασης υποθετικών επενδύσεων με χρονικό ορίζοντα 1 έτους (1/9/2009 – 31/8/2010). Οι επενδύσεις διαμορφώνονται σύμφωνα με τις λύσεις του αλγορίθμου και εκτιμάται ποια θα ήταν η ωφέλεια του επενδυτή. Οι λύσεις, που λαμβάνονται υπόψη, αντιστοιχούν στο πρόβλημα τριών στόχων (min Σφάλμα Αποτύπωσης – max Μέση Απόδοση – min VaR). Για κάθε δείκτη εξετάζονται έξι επενδυτικά σενάρια, στα οποία συμπεριλαμβάνονται πιθανές επιλογές επενδυτή φιλικού ή εχθρικού προς το ρίσκο, καθώς επίσης ενδιάμεσες καταστάσεις. Σε όλα τα σενάρια θεωρείται αρχικό κεφάλαιο ίσο με 10,000 €.

Η ανάπτυξη των σεναρίων υλοποιήθηκε με χρήση του Microsoft Office Excel 2007. Θεωρήθηκε στην αρχή της περιόδου (1/9/2009) επένδυση κεφαλαίου ίσου με 10,000 € σε κάθε δείκτη και σε κάθε χαρτοφυλάκιο μετοχών. Στη συνέχεια, υπολογίστηκε η αξία της επένδυσης την περίοδο 2/9/2009 – 31/8/2010 συναρτήσει των αποδόσεων κάθε δείκτη και κάθε χαρτοφυλακίου:

$$\begin{aligned} 1/9/2009 & \rightarrow V_0 = 10,000 \text{ €} \\ 2/9/2009 & \rightarrow V_1 = V_0 \times (1 + r_{C1}) \\ 3/9/2009 & \rightarrow V_2 = V_1 \times (1 + r_{C2}) \\ 4/9/2009 & \rightarrow V_3 = V_2 \times (1 + r_{C3}) \\ & \vdots \\ 31/8/2010 & \rightarrow V_{250} = V_{249} \times (1 + r_{C250}) \end{aligned}$$

Δηλαδή, η αξία της επένδυσης τη χρονική στιγμή $t = 1, 3, \dots, 250$ υπολογίζεται από τη σχέση $V_t = V_{t-1} \times (1 + r_{Ct})$, όπου $C = I$ αν πρόκειται για επένδυση σε δείκτη και $C = P$ αν πρόκειται για επένδυση σε χαρτοφυλάκιο.

Ακολουθεί παρουσίαση των χαρτοφυλακίων που επιλέχθηκαν και των χρονοσειρών εξέλιξης των επενδύσεων σε αυτά. Οι χρονοσειρές παρουσιάζονται ανά τρεις και στο ίδιο γράφημα παρατίθεται για λόγους σύγκρισης η χρονοσειρά εξέλιξης της επένδυσης στον αντίστοιχο δείκτη:

ΓΕΝΙΚΟΣ ΔΕΙΚΤΗΣ:

2000 - 500 - 6 - χαρτοφυλάκιο 569	
67	2.587 %
50	15.049 %
78	82.364 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	20.391
Μέση Απόδοση	0.2520 %
VaR	9.3744 %

Χαρτοφυλάκιο G - 1

2000 - 500 - 6 - χαρτοφυλάκιο 193	
83	6.670 %
78	8.241 %
50	9.056 %
51	9.278 %
63	9.655 %
30	27.126 %
71	29.974 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	2.437
Μέση Απόδοση	0.1219 %
VaR	2.3858 %

Χαρτοφυλάκιο G - 2

2000 - 500 - 6 - χαρτοφυλάκιο 120	
42	1.252 %
50	1.262 %
72	1.622 %
87	2.015 %
21	2.129 %
49	2.437 %
78	2.896 %
82	3.145 %
63	4.315 %
19	4.692 %
23	4.958 %
71	5.723 %
40	6.572 %
12	7.672 %
3	8.186 %
38	11.487 %
83	12.808 %
30	16.830 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	0.709
Μέση Απόδοση	0.0857 %
VaR	3.3341 %

Χαρτοφυλάκιο G - 3

10000 - 100 - 7 - χαρτοφυλάκιο 281	
50	15.445 %
67	16.018 %
78	16.447 %
83	18.534 %
30	33.557 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	2.908
Μέση Απόδοση	0.1807 %
VaR	3.9187 %

Χαρτοφυλάκιο G – 4

10000 - 100 - 8 - χαρτοφυλάκιο 16	
39	1.339 %
94	3.086 %
50	4.702 %
12	5.611 %
30	5.760 %
22	7.613 %
34	9.525 %
29	11.415 %
40	11.972 %
38	17.463 %
71	21.514 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	1.090
Μέση Απόδοση	0.0319 %
VaR	2.5716 %

Χαρτοφυλάκιο G – 5

10000 - 100 - 3 - χαρτοφυλάκιο 497	
67	1.000 %
78	99.000 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	28.467
Μέση Απόδοση	0.2595 %
VaR	10.4444 %

Χαρτοφυλάκιο G – 6

FRANKFURT ΧΕΤΡΑ DAX:

10000 - 100 - 1 – χαρτοφυλάκιο 456	
67	1.926 %
78	98.074 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	28.831
Μέση Απόδοση	0.2591 %
VaR	10.3599 %

Χαρτοφυλάκιο D – 1

10000 - 100 - 1 - χαρτοφυλάκιο 1	
12	1.254 %
39	1.879 %
111	2.250 %
47	2.297 %
71	10.253 %
94	15.072 %
30	15.429 %
40	17.143 %
63	34.422 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	1.972
Μέση Απόδοση	0.0323 %
VaR	2.1285 %

Χαρτοφυλάκιο D – 2

2000 - 500 - 9 – χαρτοφυλάκιο 75	
51	2.561 %
60	2.581 %
72	3.858 %
42	4.063 %
83	8.167 %
78	9.070 %
63	17.182 %
71	20.114 %
30	32.404 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	2.532
Μέση Απόδοση	0.1111 %
VaR	2.3513 %

Χαρτοφυλάκιο D – 3

1000 - 1000 - 3 – χαρτοφυλάκιο 252	
83	1.562 %
59	1.831 %
51	3.727 %
87	7.895 %
50	26.784 %
78	27.830 %
67	30.371 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	6.931
Μέση Απόδοση	0.2232 %
VaR	7.3022 %

Χαρτοφυλάκιο D – 4

2000 - 500 - 9 - χαρτοφυλάκιο 37	
72	1.203 %
38	1.222 %
45	1.407 %
111	1.497 %
83	1.514 %
42	2.159 %
86	2.274 %
107	2.639 %
40	3.819 %
60	5.433 %
7	6.322 %
12	8.193 %
63	18.301 %
71	21.347 %
30	22.669 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	1.900
Μέση Απόδοση	0.0782 %
VaR	2.2687 %

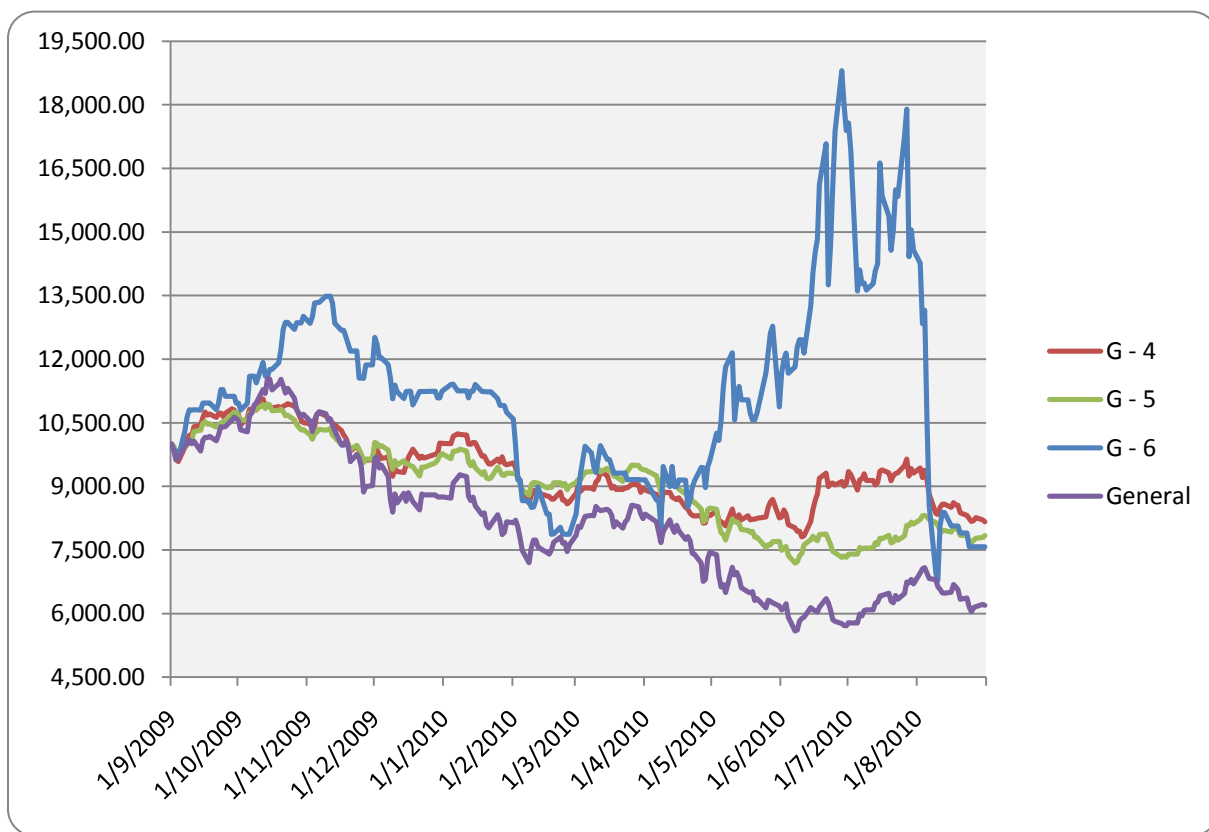
Χαρτοφυλάκιο D – 5

10000 - 100 - 6 - χαρτοφυλάκιο 453	
67	2.819 %
50	4.575 %
78	92.607 %
Σφάλμα Αποτύπωσης	26.009
Μέση Απόδοση	0.2567 %
VaR	9.8637 %

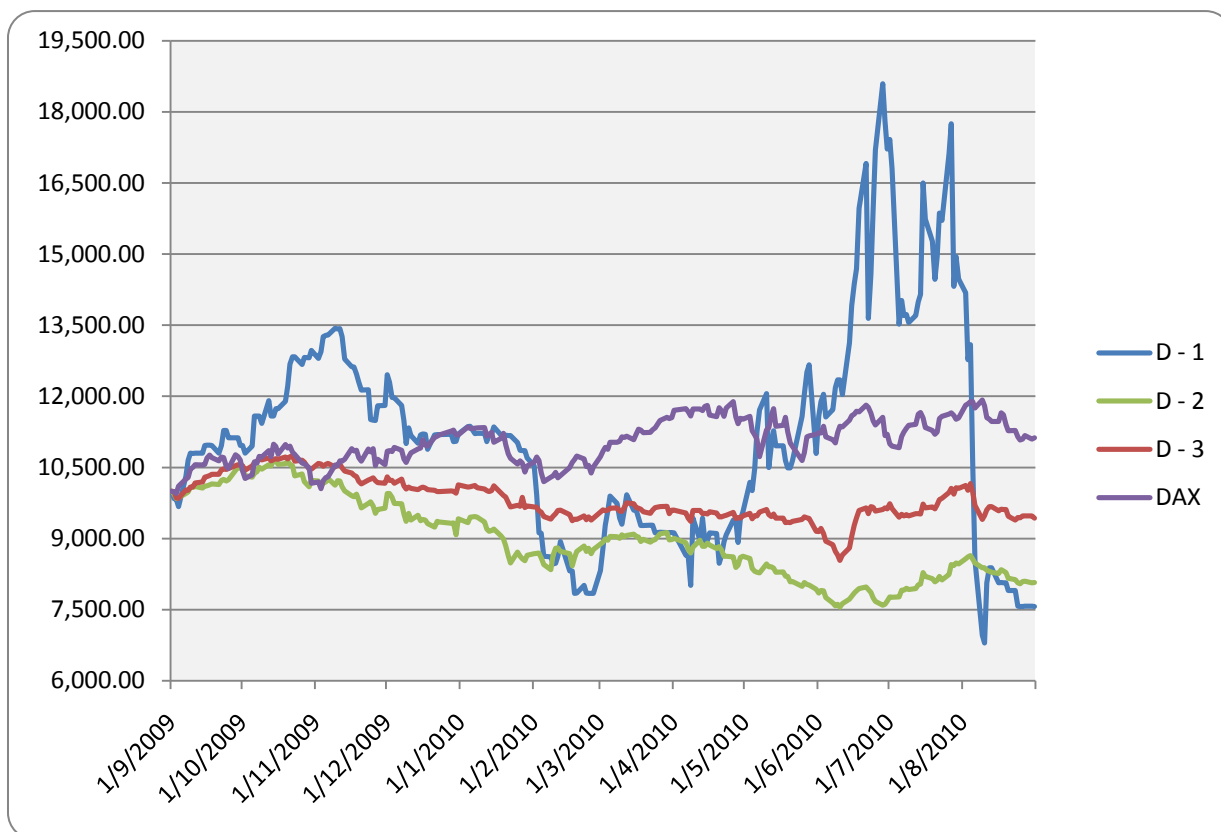
Χαρτοφυλάκιο D – 6



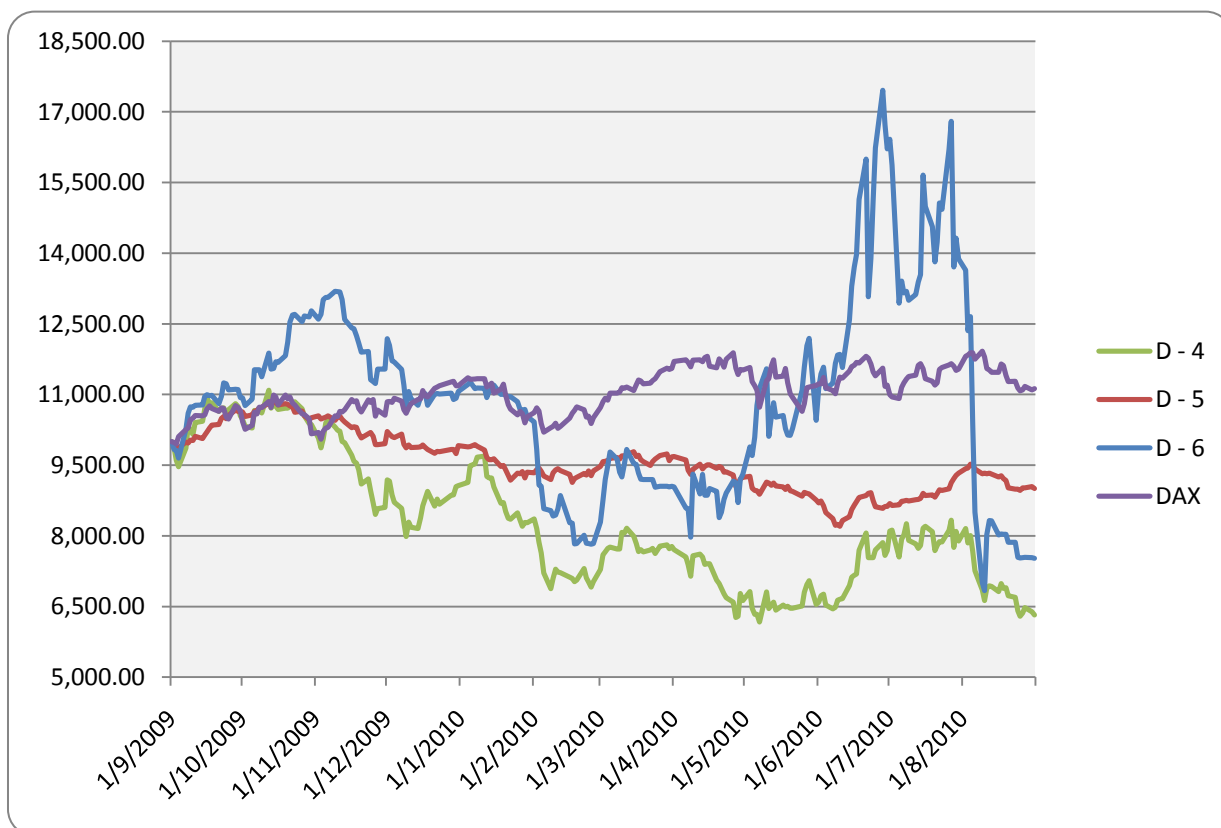
Γράφημα 6.1: Εξέλιξη των επενδύσεων στα G – 1, G – 2 και G – 3 και στον Γενικό Δείκτη



Γράφημα 6.2: Εξέλιξη των επενδύσεων στα G – 4, G – 5 και G – 6 και στον Γενικό Δείκτη



Γράφημα 6.3: Εξέλιξη των επενδύσεων στα D – 1, D – 2 και D – 3 και στον Xetra Dax



Γράφημα 6.4: Εξέλιξη των επενδύσεων στα D – 4, D – 5 και D – 6 και στον Xetra Dax

Εν γένει, όπως ήταν αναμενόμενο, οι χρονοσειρές, που αντιστοιχούν στα χαρτοφυλάκια πολύ χαμηλού κινδύνου (μικρό σφάλμα αποτύπωσης και αρκετά χαμηλή VaR) στην περίοδο 1/9/2005 – 31/8/2009, G – 2, G – 3, G – 5, D – 2 και D – 5, παρουσιάζουν τις μικρότερες μεταβολές στην περίοδο 1/9/2005 – 31/8/2009. Αντίθετα, οι χρονοσειρές των χαρτοφυλακίων ιδιαίτερα υψηλού ρίσκου άρα και απόδοσης G – 1, G – 6, D – 1, D – 6 παρουσιάζουν σημαντικές αυξομειώσεις.

Δυστυχώς, καμία από τις εικονιζόμενες επενδύσεις δεν αποφέρει κέρδος στον επενδυτή στο πέρας της περιόδου (31/8/2010). Ωστόσο, καμία χρονοσειρά δεν είναι μονίμως πτωτική και όλες οι χρονοσειρές υπερβαίνουν την αρχική αξία της επένδυσης μεταξύ 1/9/2009 και 1/11/2009. Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στις χρονοσειρές, που αντιστοιχούν στα χαρτοφυλάκια G – 1, G – 6, D – 1 και D – 6. Παρουσιάζουν τις περισσότερες και μεγαλύτερες ανόδους και καθόδους. Η αξία της επένδυσης κυμαίνεται στο μεγαλύτερο τμήμα της εξεταζόμενης περιόδου σε τιμές μεγαλύτερες της αρχικής. Στα τέσσερα γραφήματα η αξία φτάνει σε μέγιστο στις 28/6/2010 έχοντας σημειώσει άνοδο από τις 22/6/2010. Στην περίπτωση του G – 1 το αρχικό κεφάλαιο στις 28/6/2010 έχει αυξηθεί κατά περίπου 54.7%, ενώ στην περίπτωση του G – 6 κατά περίπου 88%. Για τα D – 1 και D – 6 στις 28/6/2010 η αύξηση του αρχικού κεφαλαίου είναι της τάξεως του 85.9% και 74.6% αντίστοιχα.

Ένα βασικό συμπέρασμα, που συνάγεται, είναι πως η επένδυση σε κάποιο από τα χαρτοφυλάκια δεν εξασφαλίζει κέρδος με βεβαιότητα. Χρειάζεται συνεχής παρακολούθηση κι αναπροσδιορισμός της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου ανά τακτά χρονικά διαστήματα.

Το γεγονός των ζημιολογώνων επενδύσεων δεν οφείλεται σε αστοχία του αλγορίθμου. Ας μην παραγνωρίζουμε το γεγονός ότι οι χρηματιστηριακές αγορές είναι ένα ευμετάβλητο, στοχαστικό σύστημα, που εξαρτάται από την ανθρώπινη συμπεριφορά. Ως γνωστόν είναι εξαιρετικά ευαίσθητες σε πολιτικές, κοινωνικές και οικονομικές αλλαγές. Πρέπει να ληφθεί υπόψη πως τμήμα της περιόδου, από την οποία αντλήθηκαν τα δεδομένα εισόδου, όπως και το διάστημα ελέγχου, στο οποίο αντιστοιχούν τα παραπάνω γραφήματα, συμπίπτει με τη βαθιά οικονομική κρίση, που ξεκίνησε πριν από μερικά χρόνια και τη βιώνουμε παγκοσμίως έως και σήμερα.

Ακόμη, πρέπει να τονιστεί πως το όφελος δεν ταυτίζεται πάντα με το κέρδος. Στα γραφήματα 6.1 και 6.2 παρατηρούμε πως όλες οι επενδύσεις στα χαρτοφυλάκια είναι πιο επικερδείς σχεδόν σε κάθε χρονική στιγμή από την επένδυση στο Γενικό Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών. Με δεδομένο ότι ο Γενικός Δείκτης έχει έντονα καθοδική πορεία μια καλή στρατηγική θα ήταν αυτή της μη επένδυσης στο χρηματιστήριο. Εφόσον, όμως, δεν υπάρχει η δυνατότητα μη επένδυσης (αμοιβαία κεφάλαια) ή ο επενδυτής αποφασίζει να επενδύσει, έχοντας στη διάθεσή του τα αποτελέσματα ενός ισχυρού εργαλείου τεχνικής ανάλυσης μπορεί να μη βγαίνει κερδισμένος ή αλώβητος, αλλά κατά πάσα πιθανότητα καταφέρνει να ελέγξει καλύτερα τον κίνδυνο και να περιορίσει τη ζημία του. Σίγουρα, λοιπόν, βγαίνει ωφελημένος.

Στα γραφήματα 6.3 και 6.4 η επένδυση στον Xetra Dax του Χρηματιστηρίου Αξιών της Φρανκφούρτης παρουσιάζει συγκρατημένα ανοδική πορεία παρότι πρόκειται για μια περίοδο κρίσης. Το γεγονός αυτό αντικατοπτρίζει σε κάποιο βαθμό ότι η γερμανική οικονομία είναι ισχυρή, αντέχει στις πιέσεις και σταδιακά ανακάμπτει.

Ωστόσο, το γεγονός της αποτύπωσης του Xetra Dax αποδεικνύεται ότι δεν επαρκεί για να δώσει στα χαρτοφυλάκια D – 2, D – 3, D – 4 και D – 5 πορεία ανάλογη του δείκτη αφενός γιατί οι μετοχές του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών, που χρησιμοποιήθηκαν, είναι έντονα πτωτικές και αφετέρου γιατί η βελτιστοποίηση δεν αφορά μόνο την ελαχιστοποίηση του σφάλματος αποτύπωσης. Μόνον οι επενδύσεις στα χαρτοφυλάκια D – 1 και D – 6 κινούνται ανά μεγάλα διαστήματα ψηλότερα από την επένδυση στον Xetra Dax λόγω μεγάλων αυξομειώσεων.

Υπενθυμίζεται ότι τα δεδομένα του πρόσφατου παρελθόντος δίνουν μόνο μια εκτίμηση για το μέλλον. Τα μελλοντικά δεδομένα ενδέχεται να αποκλίνουν σημαντικά. Αυτό γίνεται πιο εύκολα αντιληπτό εξετάζοντας τους πίνακες 6.1 και 6.2, οι οποίοι δείχνουν πως διαμορφώθηκαν τα τρία μεγέθη προς βελτιστοποίηση (σφάλμα αποτύπωσης, μέση απόδοση και αξία σε κίνδυνο) στην περίοδο 1/9/2005 – 31/8/2009 και στο διάστημα ελέγχου (1/9/2009 – 31/8/2010) για τα ανωτέρω χαρτοφυλάκια:

	G – 1	G – 2	G – 3	G – 4	G – 5	G – 6
	1/9/2005 – 31/8/2009			1/9/2005 – 31/8/2009		
TE	20.391	2.437	0.709	2.908	1.090	28.467
$E(r_{Pt})$	0.2520 %	0.1219 %	0.0857 %	0.1807 %	0.0319 %	0.2595 %
VaR	9.3744 %	2.3858 %	3.3341 %	3.9187 %	2.5716 %	10.4444 %
	1/9/2009 – 31/8/2010			1/9/2009 – 31/8/2010		
TE	17.213	4.869	1.531	3.733	1.717	24.862
$E(r_{Pt})$	- 0.0305 %	- 0.0401 %	- 0.0675 %	- 0.0684 %	- 0.0887 %	0.0154 %
VaR	16.3440 %	2.3843 %	3.5507 %	4.6055 %	3.3014 %	19.4888 %

Πίνακας 6.1: TE, $E(r_{Pt})$ και VaR για τα χαρτοφυλάκια G – 1 έως G – 6

	D – 1	D – 2	D – 3	D – 4	D – 5	D – 6
	1/9/2005 – 31/8/2009			1/9/2005 – 31/8/2009		
TE	28.831	1.972	2.532	6.931	1.900	26.009
$E(r_{Pt})$	0.2591 %	0.0323 %	0.1111 %	0.2232 %	0.0782 %	0.2567 %
VaR	10.3599 %	2.1285 %	2.3513 %	7.3022 %	2.2687 %	9.8637 %
	1/9/2009 – 31/8/2010			1/9/2009 – 31/8/2010		
TE	24.289	1.690	1.966	5.946	1.419	21.743
$E(r_{Pt})$	0.0131 %	- 0.0799 %	- 0.0198 %	- 0.1485 %	- 0.0381 %	- 0.0019 %
VaR	19.3212 %	2.6350 %	2.8440 %	6.9762 %	2.4334 %	18.3363 %

Πίνακας 6.2: TE, $E(r_{Pt})$ και VaR για τα χαρτοφυλάκια D – 1 έως D – 6

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αντικείμενο της εργασίας αυτής ήταν η ανάπτυξη ενός αλγορίθμου της οικογενείας MOPSO για την επίλυση χρηματοοικονομικών προβλημάτων πολλαπλών στόχων. Το σύνολο των προβλημάτων είχε ως κεντρικό άξονα το πρόβλημα της αποτύπωσης χρηματιστηριακών δεικτών. Τα προβλήματα επιλύθηκαν δύο φορές μία με αποτύπωση του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών και μία με τον Xetra Dax του Χρηματιστηρίου Αξιών της Φρανκφούρτης. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο δεδομένος αλγόριθμος μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο λήψης αποφάσεων για έναν επενδυτή. Μέσα σε ένα λογικό χρονικό πλαίσιο του παρέχεται η δυνατότητα να διαμορφώσει ένα χαρτοφυλάκιο αποτυπώνοντας τη συμπεριφορά συγκεκριμένου δείκτη, μεγιστοποιώντας την απόδοσή του και περιορίζοντας τόσο την αξία σε κίνδυνο όσο και το πλήθος των μετοχών του χαρτοφυλακίου. Ο αλγόριθμος αποδείχθηκε εξαιρετικά αποτελεσματικός για προβλήματα δύο, αλλά και τριών διαστάσεων. Σε προβλήματα τεσσάρων διαστάσεων είναι εφικτή η εξαγωγή καλών λύσεων, εντούτοις η χρονική επιβάρυνση κρίνεται σημαντική. Τέλος, σημειώνεται ότι στις περιπτώσεις προβλημάτων μεγαλύτερων των δύο διαστάσεων ο αλγόριθμος καταλήγει σε εκατοντάδες ή χιλιάδες λύσεις. Συνεπώς, για να καταστεί εφικτό για τον επενδυτή να αξιοποιήσει τα αποτελέσματα, χρειάζεται ένα επιπρόσθετο κριτήριο ή ένας συνδυασμός κριτηρίων για τον περιορισμό τους (π.χ.: η απόδοση να είναι $> m$ και το σφάλμα αποτύπωσης να είναι $< n$, όπου m και n δεδομένες τιμές).

Η μελλοντική έρευνα θα είναι χρήσιμο να επικεντρωθεί στην ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού χρόνου και στη βελτίωση της αναζήτησης του χώρου λύσεων σε πάσης φύσεως προβλήματα βελτιστοποίησης πολλαπλών στόχων. Κατ' αυτόν τον τρόπο, θα μπορέσουν να δοθούν ρεαλιστικές λύσεις σε προβλήματα διαφόρων επιστημονικών κλάδων, πολλά από τα οποία έχουν και κοινωνικές διαστάσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alvarez-Benitez, J.E., Everson, R.M. and Fieldsend J.E. (2005), “A MOPSO algorithm based exclusively on pareto dominance concepts”, In *Third International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, EMO 2005.*, pages 459 – 473, Guanajuato, México, LNCS 3410, Springer-Verlag

Bamberg, G. and Wagner, N. (2000), “Equity index replication with standard and robust regression estimators”, *OR Spektrum*, 22, 525 – 543

Beasley, J.E., Meade, N. and Chang, T.-J. (2003), “An evolutionary heuristic for the index tracking problem”, *European Journal of Operational Research*, 148, 621 – 643

Clerc, M., Kennedy, J. (2002), “The particle swarm: explosion, stability and convergence in a multi – dimensional complex space”, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6, 58 – 73

Coello Coello, C.A. and Lechuga, M.S. (2002), “MOPSO: A proposal for multiple objective particle swarm optimization”, In *Congress on Evolutionary Computation (CEC'2002)*, volume 2, pages 1051–1056, Piscataway, New Jersey, IEEE Service Center

Coello Coello, C.A., Pulido, G.T and Lechuga, M.S. (2004), “Handling multiple objectives with particle swarm optimization”, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 8(3): 256 – 279

Dembo, R. and Rosen, D. (1999), “The practice of portfolio replication: A practical overview of forward and inverse problems”, *Annals of Operations Research*, 85, 267 – 284

Derichs, U. and Nickel, N. (2004), “On a local-search heuristic for a class of tracking error minimization problems in portfolio management”, *Annals of Operations Research*, 131(1–4), 47 – 77

Dorigo, M. (1992), “Optimization, Learning and Natural Algorithms”, PhD thesis, Politecnico di Milano

Dose, C. and Cincotti, S. (2005), “Clustering of financial time series with application to index and enhanced-index tracking portfolio”, *Physica A*, 355, 145 – 151

Eddelbütter, D. (1996), “A genetic algorithm for passive management: Creating index funds with fewer stocks”, 3rd International Conference Forecasting Financial Markets: Advances for Exchange Rates, Interest Rates and Asset Management London

Engelbrecht, A.P. (2007), "Computational Intelligence, An Introduction", John Wiley & Sons Ltd, England

Feo, T.A. and Resende, M.G.C. (1989), "A probabilistic heuristic for a computationally difficult set covering problem", *Operations Research Letters*, 8: 67 – 71

Feo, T.A. and Resende, M.G.C. (1995), "Greedy randomized adaptive search procedures", *Journal of Global Optimization*, 6: 109 – 133

Glover, F. (1977), "Heuristics for Integer Programming Using Surrogate Constraints." *Decision Sciences*, 8, 156 – 166

Glover, F. (1986), "Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence", *Computers and Operations Research*, Vol. 13, No. 5, 533 – 549

Grinold, R.C. and Kahn, R.N. (1999), "Active Portfolio Management: a quantative approach for providing superior returns and controlling risk", McGraw-Hill

Goldberg, D.E. (1989), "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts

Holland, J.H. (1975), "Adaptation in Natural and Artificial Systems", University of Michigan Press: Ann Arbor, MI

Janson, S. and Merkle, D. (2005), "A new multiobjective particle swarm optimization algorithm using clustering applied to automated docking", In María J. Blesa, Christian Blum, Andrea Roli, and Michael Sampels, editors, *Hybrid Metaheuristics, Second International Workshop, HM 2005*, pages 128 – 142, Barcelona, Spain, Springer. Lecture Notes in Computer Science Vol. 3636.

Kennedy, J. and Eberhart, R.C. (1995), "Particle swarm optimization", *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks*, pages 1942–1948, Piscataway, New Jersey. IEEE Service Center

Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D. and Vecchi, M.P. (1982), "Optimization by simulated annealing", *Science*, 220, 671 – 680

Larsen, G.A. and Resnick, B.G. (1998), "Empirical insights on indexing", *The Journal of Portfolio Management*, 25(1), 51 – 60

Li, X. (2003), "A non-dominated sorting particle swarm optimizer for multiobjective optimization", In Erick Cantú - Paz et al., editor, *Proceedings of the Genetic and*

Evolutionary Computation Conference (GECCO'2003), pages 37–48. Springer. Lecture Notes in Computer Science Vol. 2723

Mahfouf, M., Chen, M.-Y. and Linkens, D.A. (2004), “Adaptive weighted particle swarm optimization for multi-objective optimal design of alloy steels”, In *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VIII*, pages 762 – 771, Birmingham, UK, Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science Vol. 3242.

Meade, N. and Salkin, G.R. (1990), “Developing and Maintaining an Equity Index Fund”, *The Journal of the Operational Research Society*, Vol. 41, No. 7, 599 – 607

Moore, J. and Chapman, R. (1999), “Application of particle swarm to multiobjective optimization”, Department of Computer Science and Software Engineering, Auburn University

Mostaghim, S. and Teich, J. (2003), “Strategies for finding good local guides in multi-objective particle swarm optimization (MOPSO)”, In *Proceedings of the 2003 IEEE Swarm Intelligence Symposium*, pages 26 – 33, Indianapolis, Indiana, USA, IEEE Service Center.

Parsopoulos, K.E. and Vrahatis, M.N. (2002), “Particle swarm optimization method in multiobjective problems”, In *Proceedings of the 2002 ACM Symposium on Applied Computing (SAC'2002)*, pages 603–607, Madrid, Spain, ACM Press.

Price, K.V., and Storn, R.M. and Lampinen, J.A. (2005), *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*, Springer, Heidelberg

Reyes-Sierra, M. and Coello Coello, C.A. (2006), “Multi-Objective Particle Swarm Optimizers: A Survey of the State-of-the-Art”, CINVESTAV-IPN (Evolutionary Computation Group), Electrical Engineering Department, Computer Science Section, Mexico

Roll, R. (1992), “A mean/variance analysis of tracking error”, *The Journal of Portfolio Management*, 18(4): 57 – 66

Shapcott, J. (1992), “Index tracking: Genetic algorithms for investment portfolio Selection”, Technical Report EPCC-SS92-24, Edinburgh Parallel Computing Centre, The University of Edinburgh, UK

Shi, Y. and Eberhart, R.C. (1998), “A modified particle swarm optimizer”, *Proceedings of 1998 IEEE World Congress on Computational Intelligence*, 69 – 73

Storn, R. and Price, K. (1997), “Differential evolution: A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces”, *Journal of Global Optimization*, 11, 341 – 359

Tabata, Y. and Takeda, E. (1995), “Bicriteria optimization problem of designing an index fund”, *The Journal of the Operational Research Society*, Vol. 46, No. 8, 1023 – 1032

Villalobos-Arias, M.A., Pulido, G.T. and Coello Coello, C.A. (2005), “A proposal to use stripes to maintain diversity in a multi-objective particle swarm optimizer”, In *Proceedings of the 2005 IEEE Swarm Intelligence Symposium*, pages 22 – 29, Pasadena, California, USA, IEEE Press.

Zhang, L.B., Zhou, C.G., Liu, X.H., Ma, Z.Q. and Liang, Y.C. (2003), “Solving multi objective optimization problems using particle swarm optimization”, In *Congress on Evolutionary Computation (CEC'2003)*, volume 3, pages 2400 – 2405, Canberra, Australia, IEEE Press

Zitzler, E., Deb, K. and Thiele, L. (2000), “Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results. *Evolutionary Computation*, 8(2): 173 – 195

Zitzler, E. and Thiele, L. (1999), “Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach”, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4): 257 – 271

