ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επίλυση του προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή με πολλαπλές αντικειμενικές συναρτήσεις με χρήση του αλγορίθμου Διαφορικής Εξέλιξης

Ψύχας Ηρακλής-Δημήτριος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Μαρινάκης Ιωάννης

13/12/2010

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Μαρινάκη Ιωάννη, Λέκτορα καθηγητή στο Πολυτεχνείο Κρήτης, του οποίου η διδασκαλία κατά την διάρκεια της φοίτησης μου αλλά και η πολύτιμη βοήθεια του στην διαδικασία της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας αποτέλεσαν πολύ σημαντικούς παράγοντες για την ολοκλήρωσή της.

Περιεχόμενα

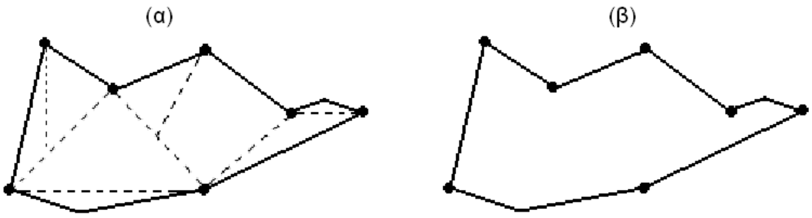
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να επιλύσει το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (Traveling Salesman Problem(TSP)) με πολλαπλές αντικειμενικές συναρτήσεις με την χρήση του αλγορίθμου της Διαφορικής εξέλιξης (Differential Evolution (DE)). Το πρόβλημά μας είναι πολυκριτήριο που σημαίνει ότι θα πρέπει ταυτόχρονα να βελτιστοποιούνται, όσο αυτό είναι εφικτό, δύο η τρεις αντικειμενικές συναρτήσεις (ή κριτήρια). Τα δεδομένα μας αποτελούνται από πέντε πίνακες που περιέχουν συντεταγμένες «πόλεων» σημείων. Οι πίνακες αυτοί στη συνέχεια συνδυάζονται ανά δύο και ανά τρείς, υπολογίζονται οι πίνακες με τα αντίστοιχα κόστη μετάβασης και το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους επιλύεται με τρείς διαφορετικές μεθόδους που αποτελούν παραλλαγές του αλγορίθμου της Διαφορικής Εξέλιξης. Στο κύριο μέρος της εργασίας θα αναφερθούμε στο θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο βασιστήκαμε, θα αναλύσουμε την μεθοδολογία στην οποία βασίζεται ο αλγόριθμος μας και τέλος θα παραθέσουμε τα καλύτερα αποτελέσματα όλων των συνδυασμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} Εισαγωγικά στοιχεία

1.1 Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή (TSP)

Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (travelling salesman problem-TSP) έχει σαν στόχο την εύρεση της συντομότερης διαδρομής (σε χρόνο, απόσταση ή άλλο κόστος) για ένα πωλητή με αφετηρία κάποιο σημείο, π.χ. ένα κέντρο διανομής και επιστροφή στο ίδιο σημείο αφού επισκευθεί έναν σταθερό αριθμό κόμβων (π.χ. πελατών) ακριβώς μία φορά τον καθένα. Μια σχηματική απεικόνιση του προβλήματος είναι αυτή του σχήματος 1. Ένας κύκλος δηλαδή που διέρχεται από τους κόμβους που αντιστοιχούν στο σημείο αφετηρίας και τους πελάτες ακριβώς μία φορά.



Σχήμα 1: Η πραγματική εικόνα μπορεί να διαφέρει από την αφαιρετική εικόνα ενός γραφήματος: οι διακεκομμένες γραμμές στο (α) αντιστοιχούν στο πραγματικό οδικό δίκτυο. Η κυκλική διαδρομή (β) θα πρέπει να ερμηνευθεί σωστά στο πραγματικό οδικό δίκτυο (α).

Για την διαμόρφωση ενός μαθηματικού προτύπου υποθέτουμε συνήθως ότι οι κόμβοι ανήκουν σε ένα μη διατεταγμένο γράφημα που είναι πλήρες. Υποθέτουμε $i=2,\dots,n$ οι κόμβοι των πελατών και $i=1$ ο κόμβος αφετηρίας. Από την υπόθεση, κάθε μη διατεταγμένο ζεύγος $\{i,j\}$ με $i\neq j$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,n$, αντιστοιχεί σε ένα σύνδεσμο ή ακμή του γραφήματος. Σε κάθε τέτοιο σύνδεσμο αντιστοιχίζουμε ένα σταθμό c_{ij} που είναι ίσο με το κόστος (όπως και αν νοείται αυτό) της διαδρομής του οχήματος από το i στο j ή αντίστροφα. Επειδή ένας τέτοιος σύνδεσμος δεν αντιστοιχεί πάντοτε σε κάποιο φυσικό τμήμα δρόμου θα υποθέσουμε ότι τα σταθμά έχουν υπολογιστεί έτσι ώστε να αντιστοιχούν στη διαδρομή ελάχιστου κόστους μεταξύ των δύο κόμβων, οπότε ικανοποιούν τις δύο συνθήκες.

Συμμετρία: $c_{ij} = c_{ji}$, $i\neq j$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,n$
Τριγωνική ανισότητα: $c_{ij} <= c_{ik} + c_{kj}$, $i\neq j\neq k$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,n$,

οι οποίες υπό αυτές τις συνθήκες είναι φυσιολογικές, καθώς και η μεν πρώτη απεξαρτεί το κόστος του απευθείας ταξιδιού μεταξύ i και j από την κατεύθυνση, ενώ η δεύτερη διατυπώνει ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι ο απευθείας.

Αν ορίσουμε τις δυαδικές μεταβλητές

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{εάν το όχημα κάνει χρήση του συνδέσμου } \{i,j\}, \\ 0, \text{αλλιώς}, \forall\, i, \forall\, j \text{ με } i \neq j \end{cases}$$

τότε το πρότυπο διαμορφώνεται ως εξής:

$$\min \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \qquad (1)$$

$$\text{υπό} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 2, \qquad i = 1, \dots, n \qquad (2)$$

$$\sum_{i \in C} \sum_{i \in \hat{C}} x_{ij} \geq 1, \qquad \forall C \subset \{1, \dots, n\}, C \neq \emptyset \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i, \forall j, i \neq j \qquad (4)$$

Οι περιορισμοί (2) επιβάλλουν στην λύση να έχει δύο συνδέσμους σε κάθε κόμβο, έτσι ώστε ο πωλητής να εισέλθει κατά μήκος του ενός και να εξέλθει κατά μήκος του άλλου, ενώ οι περιορισμοί (3) αποβλέπουν στην εξάλειψη κυκλικών διαδρομών που δεν διέρχονται από όλους τους κόμβους απαιτώντας από κάθε εν δυνάμει υπόκυκλο, που αντιπροσωπεύεται από ένα κατάλληλο με-κενό υποσύνολο C των κόμβων, να διαθέτει στην λύση τουλάχιστον ένα σύνδεσμο που οδηγεί στο συμπληρωματικό του υποσύνολο $\hat{C} = \{1,\dots, n\} \setminus C$. [1]

1.2 Εξελικτικοί Αλγόριθμοι

Πριν αναλύσουμε τον αλγόριθμο της διαφορικής εξέλιξης θα ήταν σκόπιμο να αναφερθούν κάποια γενικά εισαγωγικά στοιχεία για τους Εξελικτικούς Αλγορίθμους.

Οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι είναι τεχνικές επίλυσης προβλημάτων αναζήτησης-βελτιστοποίησης εμπνευσμένοι από την βιολογική εξέλιξη. Βασίζονται σε μια τεχνητή προσομοίωση της διαδικασίας της φυσικής εξέλιξης ή επιβίωσης του καλύτερου, γνωστής από τη *Θεωρία της Εξέλιξης των Ειδών*. Χρησιμοποιούνται για την επίλυση δύσκολων προβλημάτων που με παραδοσιακές μεθόδους θα ήταν πολύ δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να λυθούν.

Οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι βασίζονται σε μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία εξέλιξης ενός πληθυσμού. Πληθυσμός είναι ένα σύνολο από πιθανές λύσεις του προβλήματος. Η εξέλιξη του πληθυσμού οφείλεται στην οργανωμένη ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα στα διάφορα μέλη του πληθυσμού, που έχουν επιλεγεί κατάλληλα με βάση κάποιους κανόνες επιλογής (selection rules), ώστε ο νέος πληθυσμός που θα δημιουργηθεί να είναι πιθανόν καλύτερος από προηγούμενους. Η διαδικασία της ανταλλαγής πληροφοριών μεταξύ των μελών ενός πληθυσμού είναι δανεισμένη από τη βιολογία. Στη φύση, δομικά στοιχεία κάθε οργανισμού είναι τα γονίδια (genes), καθένα από τα οποία κωδικοποιεί και ένα χαρακτηριστικό του οργανισμού (π.χ. χρώμα ματιών). Οι τιμές ενός γονιδίου λέγονται alleles (π.χ. γαλανά μάτια). Τα γονίδια συνθέτουν τα χρωμοσώματα (chromosomes) που είναι αλυσίδες DNA. Σε κάθε οργανισμό, στο στάδιο της αναπαραγωγής, γίνεται τυχαία ανταλλαγή γονιδίων μεταξύ των γονέων για τη δημιουργία των χρωμοσωμάτων του νέου οργανισμού. Έτσι ο νέος οργανισμός κληρονομεί χαρακτηριστικά και από τους δύο γονείς. Συχνά παρατηρούνται και μεταλλάξεις, που είναι τυχαίες μεταβολές των τιμών τους, με αποτέλεσμα ο οργανισμός να παρουσιάζεται με νέα χαρακτηριστικά τα οποία δεν υπήρχαν στους γονείς. Ουσιώδες χαρακτηριστικό κάθε οργανισμού είναι η ποιότητά του. Πολλές φορές αυτό είναι καθοριστικό για την επιβίωσή του και κατά συνέπεια για την ικανότητά του να αναπαράγει απογόνους.

Κατά παρόμοιο τρόπο οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι δημιουργούν (συνήθως με τυχαίο τρόπο) έναν αρχικό πληθυσμό. Στη συνέχεια γίνεται αξιολόγηση του πληθυσμού (*evaluation*). Κάθε στοιχείο του πληθυσμού αξιολογείται με βάση κάποια μέθοδο (συνάρτηση αξιολόγησης - *fitness function*) και του αποδίδεται μία τιμή. Η συνάρτηση αξιολόγησης μετρά την ποιότητα μιας λύσης που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη γενετική δομή. Είναι ειδική για κάθε πρόβλημα και καθορίζει το «περιβάλλον» της εξέλιξης. Νέες λύσεις δημιουργούνται από κατάλληλα επιλεγμένα μέλη, με κάποιους κανόνες επιλογής (*selection rules*). Μπορεί να γίνουν ανασυνδυασμοί γενετικού υλικού (*recombinations*) μεταξύ των γονέων και μεταλλάξεις (*mutations*) που μεταβάλουν ακόμα περισσότερο τους απογόνους. Η μεταβολή στη δομή τους μας επιτρέπει να διερευνούμε νέες περιοχές στο χώρο λύσεων του προβλήματος. Στη διαδικασία επιλογής μπορεί να περιλαμβάνονται και οι απόγονοι, ώστε στο νέο πληθυσμό να μεταφέρονται τα καλύτερα μέλη. Ο νέος πληθυσμός αξιολογείται και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται (εξελικτικός κύκλος) έως ότου ικανοποιηθεί κάποια προκαθορισμένη συνθήκη τερματισμού. Αυτή μπορεί να είναι η επίτευξη της βέλτιστης λύσης, μια λύση που δεν βελτιώνεται περαιτέρω, κάποιο κριτήριο πλήρωσης χρόνου, ένας καθορισμένος αριθμός γενεών κ.ά. Ο τελικός πληθυσμός περιέχει μια συλλογή από λύσεις, από τις οποίες μία ή περισσότερες μπορεί να εφαρμοστεί στο συγκεκριμένο πρόβλημα.[6]

Τα πλεονεκτήματα των ΕΑ που οδήγησαν στην γρήγορη και ευρεία επικράτηση τους σε πολλές κατηγορίες προβλημάτων είναι τα εξής [5]:

- ✓ Το ενδιαφέρον, μη αυστηρό μαθηματικά, υπόβαθρό τους.
- ✓ Η ευκολία με την οποία προσαρμόζονται σε κάθε νέο πρόβλημα με μόνη προϋπόθεση την ύπαρξη προγραμματισμένου λογισμικού αξιολόγησης κάθε υποψήφιας λύσης.
- ✓ Η δυνατότητά τους να μην εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα.

1.3 Αλγόριθμος της Διαφορικής Εξέλιξης (DE)

Η **Διαφορική Εξέλιξη** είναι ένας στοχαστικός αλγόριθμος και προτάθηκε από τους Storn και Price. Αν και η διαφορική εξέλιξη έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με τους άλλους εξελικτικούς αλγορίθμους έχει και μια σειρά από διαφορές όπως το ότι εστιάζει στην απόσταση μεταξύ των μελών του πληθυσμού και στις διαφορετικές κατευθύνσεις που μπορεί να κινηθεί κάποιο μέρος του πληθυσμού. Για να εφαρμοστεί η διαφορική εξέλιξη θα πρέπει να έχουμε κωδικοποιήσει τις λύσεις με αναπαράσταση πραγματικού αριθμού ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν οι τελεστές μετάλλαξης που θα περιγραφούν παρακάτω. Στους εξελικτικούς αλγορίθμους όταν χρησιμοποιείται ο τελεστής διασταύρωσης αρχικά εφαρμόζεται πάνω σε δύο ή περισσότερους γονείς και στην συνέχεια στον απόγονο ή στους απογόνους που θα δημιουργηθούν εφαρμόζεται ένας τελεστής μετάλλαξης ο οποίος συνήθως μετακινεί την λύση από ένα σημείο σε κάποιο άλλο με την χρήση κάποιου βήματος που στηρίζεται σε κάποια κατανομή πιθανότητας. Οι βασικές διαφορές που παρουσιάζονται στην διαφορική εξέλιξη είναι οι εξής:

- Ο τελεστής μετάλλαξης χρησιμοποιείται αρχικά για να παραχθεί ένα δοκιμαστικό διάνυσμα, το οποίο στην συνέχεια χρησιμοποιείται με κάποιο τελεστή διασταύρωσης για την δημιουργία ενός απογόνου.
- Τα βήματα που γίνονται με τον τελεστή μετάλλαξης δεν υπόκειται σε κάποια γνωστή δομή πιθανοτήτων αλλά επηρεάζονται από τις διαφορετικές τιμές στα γονίδια ανάμεσα σε μέλη του πληθυσμού.

Ο τελεστής μετάλλαξης παράγει ένα δοκιμαστικό διάνυσμα για κάθε μέλος του πληθυσμού με μετάλλαξη ενός διανύσματος στόχου στο οποίο προστίθεται η διαφορά ανάμεσα στις τιμές των γονιδίων δύο ή περισσοτέρων ατόμων του πληθυσμού πολλαπλασιασμένων με κάποιο βάρος. Το δοκιμαστικό διάνυσμα τότε θα χρησιμοποιηθεί από τον τελεστή διασταύρωσης για να δημιουργηθεί ο απόγονος: Για κάθε γονέα $x_i(t)$, το δοκιμαστικό διάνυσμα $u_i(t)$ δημιουργείται ως εξής: Ένα διάνυσμα στόχου κάποιο άλλο μέλος του πληθυσμού, $x_{i1}(t)$, επιλέγεται από τον πληθυσμό έτσι ώστε $i \neq i_1$. Επίσης, δύο άλλα μέλη του πληθυσμού x_{i2} και x_{i3}, επιλέγονται τυχαία από τον πληθυσμό τέτοια ώστε $i \neq i_1 \neq i_2 \neq i_3$. Χρησιμοποιώντας τα επιλεγμένα, το δοκιμαστικό διάνυσμα υπολογίζεται με αντιμετάθεση των στοιχείων του διανύσματος στόχου ως ακολούθως:

$$u_i(t) = x_{i_1}(t) + \beta\left(x_{i_2}(t) - x_{i_3}(t)\right) \qquad (5)$$

όπου το $\beta \in (0,\infty)$ είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης. Το πάνω όριο του είναι συνήθως η τιμή 1 γιατί έχει αποδειχθεί ότι αν το $\beta > 1$ δεν υπάρχει μεγάλη έως καθόλου βελτίωση των λύσεων.

Το διάνυσμα βάσης x_{i1} μπορεί να υπολογιστεί με διαφορετικούς τρόπους. Μπορεί να είναι το καλύτερο μέλος του πληθυσμού ή ένα τυχαίο μέλος. Τα διανύσματα x_{i2} και x_{i3} επιλέγονται συνήθως τυχαία. Οι γονείς x_i του τύπου 5 στην συγκεκριμένη εργασία θα μπορούν να υπολογιστούν με τρεις διαφορετικές μεθόδους. Στην πρώτη μέθοδο το x_{i1} θα είναι το βέλτιστο άτομο που βρέθηκε από τον πίνακα pareto (θα γίνει αναφορά παρακάτω) των βέλτιστων ατόμων που έχουν επιλεγεί μέχρι την επανάληψη που εξετάζουμε (επανάληψη t). Το x_{i2} και x_{i3} θα έχουν τυχαία τιμή από τον πίνακα ατόμων απογόνων της προηγούμενης επανάληψης (t-1) που στην προκειμένη περίπτωση (επανάληψη t) αποτελούν τους γονείς. Στην δεύτερη μέθοδο το x_{i1} είναι τυχαίο από τον πίνακα γονέων που προέκυψε από την επανάληψη t-1 και τα x_{i2} και x_{i3} είναι τυχαία άτομα από τον πίνακα pareto των βέλτιστων ατόμων που έχουν επιλεγεί μέχρι την επανάληψη t.

Στην τρίτη μέθοδο το x_{i1} θα είναι το βέλτιστο άτομο που βρέθηκε από τον πίνακα pareto ενώ τα x_{i2} και x_{i3} θα είναι τυχαία από τον πίνακα pareto.

Μετά την ολοκλήρωση της φάσης της μετάλλαξης εφαρμόζεται ένας τελεστής διασταύρωσης. Στις πρώτες εφαρμογές που εμφανίστηκαν με την μέθοδο DE, η συνάρτηση ποιότητας του δοκιμαστικού διανύσματος και του γονέα συγκρίνονταν και αυτό που είχε την καλύτερη τιμή επιλέγονταν για την επόμενη γενιά. Στη συνέχεια για να βελτιωθεί η αποδοτικότητα της μεθόδου χρησιμοποιείται ένας τελεστής διασταύρωσης που ονομάζεται δυωνυμικός τελεστής διασταύρωσης (binomial crossover) ή ομοιόμορφος τελεστής διασταύρωσης (uniform crossover). Σε αυτό τον τελεστή τα γονίδια επιλέγονται τυχαία από το δοκιμαστικό διάνυσμα και από τον γονέα. Αρχικά επιλέγεται μια παράμετρος για τον τελεστή διασταύρωσης (*Cr*) η οποία ελέγχει την αναλογία των γονιδίων που θα επιλεγούν από το δοκιμαστικό διάνυσμα. Η τιμή του *Cr* συγκρίνεται με ένα τυχαίο αριθμό στο διάστημα $rand_i(0,1)$. Εάν ο τυχαίος αριθμός είναι μικρότερος ή ίσος με το *Cr*, η τιμή του γονιδίου του απογόνου κληρονομείται από το δοκιμαστικό διάνυσμα, αλλιώς επιλέγεται από τον γονέα :

$$x_i^{'}(t) = \begin{cases} u_i(t), εάν\ rand(0,1) \leq Cr \\ x_i(t), \quad\quad\quad\quad αλλιώς \end{cases} \quad (6)$$

Έτσι εάν η τιμή της παραμέτρου *Cr* είναι κοντά ή ίση με 1, τότε, τα περισσότερα (ή όλα αν είναι ίση με 1) τα γονίδια του απογόνου έχουν κληρονομηθεί από το δοκιμαστικό διάνυσμα αλλιώς αν είναι κοντά στο μηδέν τότε όλα τα γονίδια κληρονομούνται από τον γονέα.

Μετά τον τελεστή διασταύρωσης, η συνάρτηση ποιότητας του απογόνου x'_i (t) υπολογίζεται και εάν είναι καλύτερο από την συνάρτηση καταλληλότητας του γονέα τότε επιλέγεται για την επόμενη γενιά αλλιώς ο γονέας επιβιώνει για μια ακόμα γενιά. Παρακάτω ακλουθεί ένας ψευδοκώδικας της μεθόδου της DE :

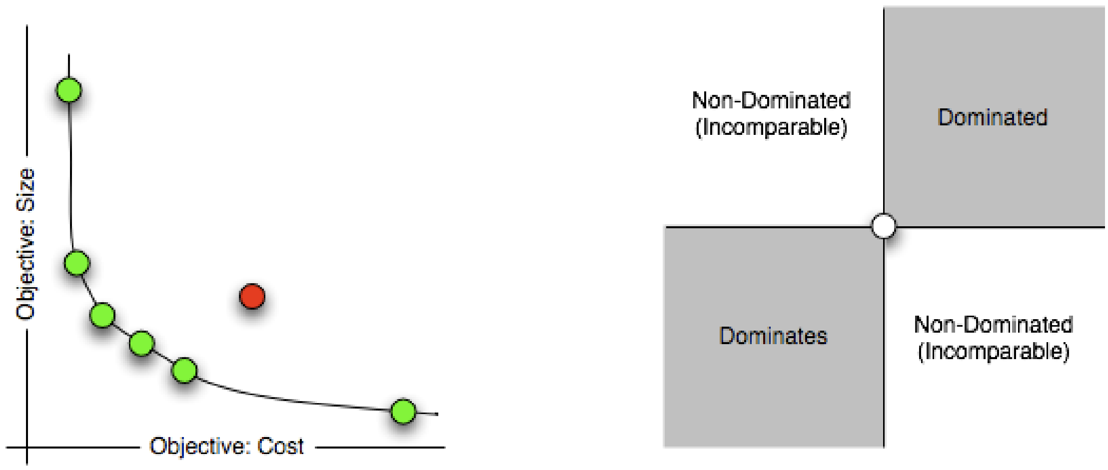
Αλγόριθμος Διαφορική Εξέλιξη *Αρχικοποίηση*
Αρχικοποίηση των παραμέτρων ελέγχου *β* και *Cr*
Επιλογή του τελεστή μετάλλαξης
Δημιουργία του αρχικού πληθυσμού
Υπολογισμός της συνάρτησης ποιότητας για κάθε μέλος του πληθυσμού
Κύρια Φάση
Do while δεν έχουν ικανοποιηθεί τα κριτήρια σταματήματος
    Επέλεξε το διάνυσμα του γονέα x_i (t)
    Δημιούργησε το δοκιμαστικό διάνυσμα u_i(t) εφαρμόζοντας τον τελεστή μετάλλαξης
    Δημιούργησε τον απόγονο x'_i (t) εφαρμόζοντας τον τελεστή μετάλλαξης
    Υπολογισμός της συνάρτησης ποιότητας (*fitness*) για τους απογόνους
    if *fitness*(x'_i (t))≤ *fitness*(x_i (t))
        Αντικατέστησε τον γονέα με τον απόγονο στην επόμενη γενιά
    else
        Πρόσθεσε τον γονέα στη νέα γενιά
    Endif
Enddo
Επέστρεψε το καλύτερο μέλος του πληθυσμού (βέλτιστη λύση)
[1]

1.4 Κυριαρχία Pareto

Ο όρος Pareto δημιουργήθηκε από τον ιταλό οικονομολόγο Vilfredo Pareto. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται συχνά για την εύρεση των βέλτιστων λύσεων στα προβλήματα πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων (ή κριτηρίων).

Έστω δυο διανύσματα X_1 και X_2 για τα οποία ισχύει $X_1=\{\chi_{1,1}, \chi_{1,2}, \ldots, \chi_{1,k}\}$, $X_2=\{\chi_{2,1}, \chi_{2,2}, \ldots, \chi_{2,k}\}$. Αν το k υποδηλώνει τον αριθμό των κριτηρίων ενός προβλήματος πολλαπλών συναρτήσεων-κριτηρίων τότε τα $\chi_{1,i}$ και $\chi_{2,i}$ υποδηλώνουν τις τιμές των X_1 και X_2 για το κριτήριο i. Έστω ότι οι αντικειμενικές είναι προς ελαχιστοποίηση με $\chi_{1,i} \leq \chi_{2,i}$ για κάθε $i \in [1,k)$. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το X_1 κυριαρχεί επί του X_2. Ένα διάνυσμα X_1 λέγεται μη κυριαρχούμενη λύση όταν δεν υπάρχει κανένα άλλο X_2 το οποίο να κυριαρχεί επί του X_1. Ένα διάνυσμα X_1 λέγεται **βέλτιστο κατά Pareto** αν δεν κυριαρχείται. Το σύνολο βέλτιστων κατά Pareto σημείων λέγεται **βέλτιστο μέτωπο Pareto** (Pareto front).

Στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 2) απεικονίζεται ένα μέτωπο Pareto των λύσεων ενός προβλήματος δύο κριτηρίων(“Size” και “cost”) καθώς και ένα σχήμα που επεξηγεί πότε ένα σημείο στο χώρο κυριαρχεί και πότε κυριαρχείται. [2]



Σχήμα 2. Σχεδίαση Pareto front και επεξήγηση κυριαρχούμενου ή μη σημείου

1.5 Πρόβλημα Βελτιστοποίησης Πολλαπλών Αντικειμενικών Συναρτήσεων (Multiobjective Optimization Problems)

Η **βελτιστοποίηση πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων** (multiobjective optimization) είναι ένα πρόβλημα σχεδιασμού ενός μοντέλου το οποίο έχει περισσότερες από μία αντικειμενικές συναρτήσεις ή κριτήρια. Αν οι συναρτήσεις δεν έχουν κάποιο κοινό χαρακτηριστικό τότε το πρόβλημα που προκύπτει είναι η εύρεση εκείνου του μοντέλου που ικανοποιεί όλες τις αντικρουόμενες συναρτήσεις. Στόχος είναι η επίλυση του προβλήματος αυτού. Ένα τέτοιου είδους πρόβλημα ονομάζεται **πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλαπλών κριτηρίων**. Η μοντελοποίηση του προβλήματος θα μπορούσε είναι η παρακάτω:

$$\min f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$$

υπό

$$g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$$
$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p$$

όπου $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης, f_i όπου $i = 1, \dots, k$ οι αντικειμενικές συναρτήσεις, και g_i όπου $i = 1, \dots, m$ και h_j όπου $j = 1, \dots, p$ οι περιορισμοί του προβλήματος.

Η ιδανική λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλαπλών κριτηρίων είναι η εύρεση των κατάλληλων παραμέτρων σχεδίασης οι οποίες βελτιστοποιούν τις συναρτήσεις ταυτόχρονα. Η λύση είναι ένα σύνολο τιμών το οποίο αποτελεί το βέλτιστο σύνολο κατά Pareto. [4]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} Αλγόριθμος επίλυσης

2.1 Στόχος και δεδομένα

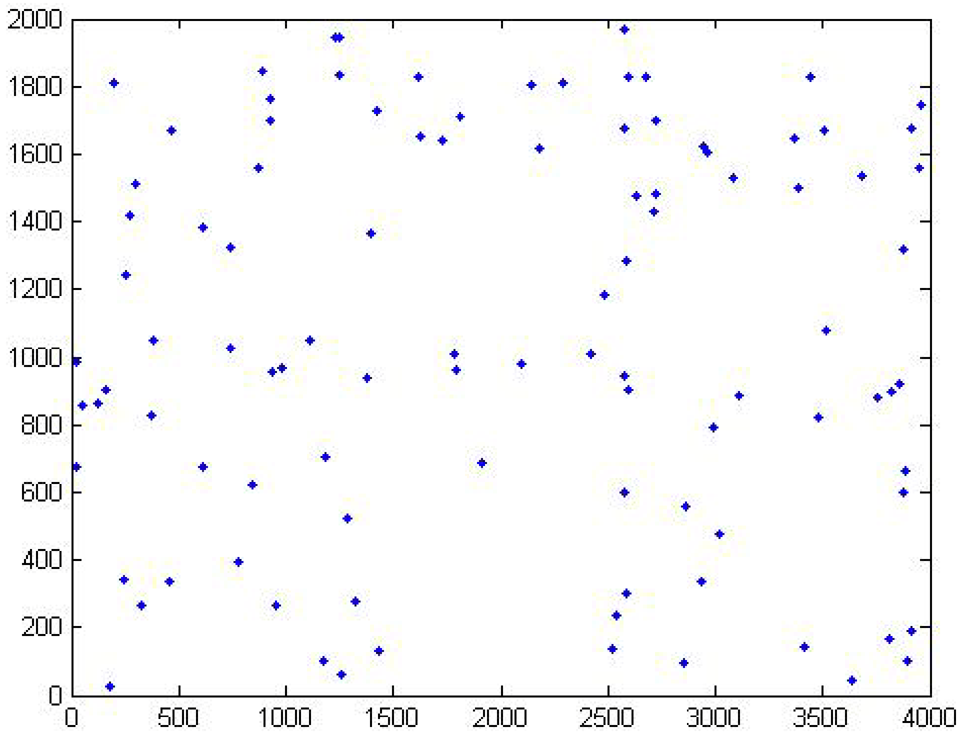
Στόχος αυτής της εργασίας είναι η εύρεση της συντομότερης διαδρομής (αλληλουχία κόμβων) την οποία πρέπει να ακολουθήσει ένας «πωλητής» διασχίζοντας 100 κόμβους και περνώντας από όλους μόνο μία φορά. Λέγοντας «συντομότερη διαδρομή» εννοούμε την διαδρομή με το λιγότερο κόστος. Το προς επίλυση πρόβλημα είναι πολυκριτήριο (multiobjective), δηλαδή αντί να υπολογιστεί ένας πληθυσμός συντομότερων διαδρομών με κριτήριο ένα πίνακα κόστους υπολογίζεται με βάση δύο ή τρείς πίνακες.

Οι πίνακες κόστους που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του κόστους κάθε διαδρομής υπολογίζονται με βάση το τύπο της απόστασης δύο σημείων στο χώρο :

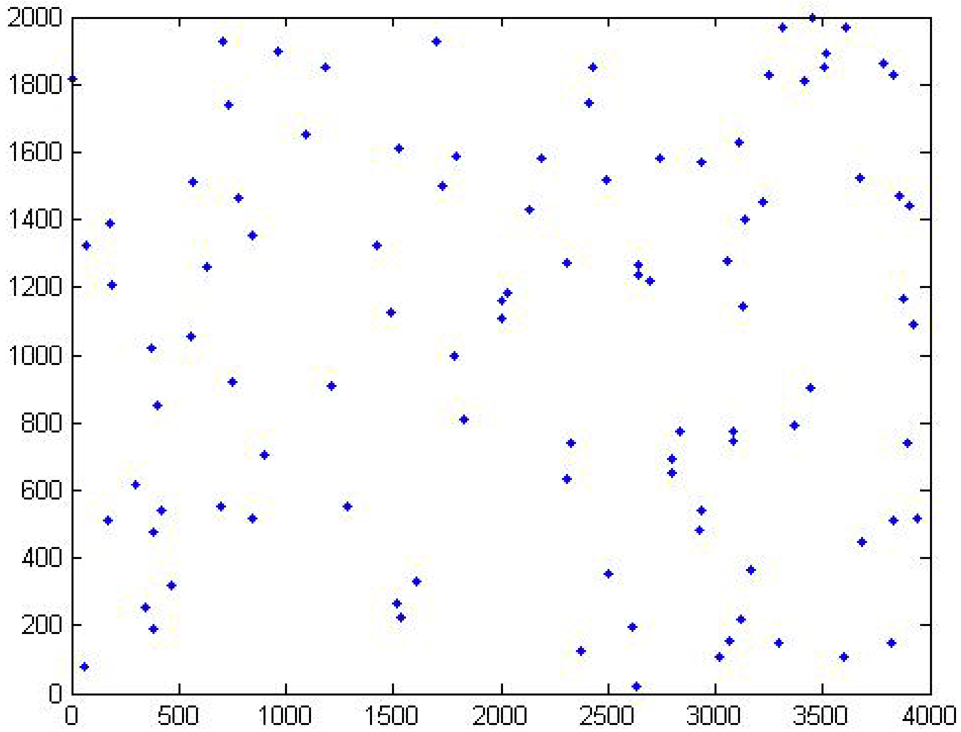
$$C_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \; με \; x, y \; συντεταγμένες \; σημείων \; i \; και \; j \quad (7)$$

Στη παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται πέντε διαφορετικοί πίνακες κόστους που έχουν υπολογιστεί με βάση τις τιμές πέντε διαφορετικών πινάκων που περιέχουν τις συντεταγμένες 100 σημείων στο χώρο. Οι πίνακες αυτοί ονομάζονται kroA100, kroB100, kroC100, kroD100, kroE100. Τα αποτελέσματα που θα εξαχθούν θα υπολογίζονται από συνδυασμό δύο η τριών πινάκων κόστους κάθε φορά.

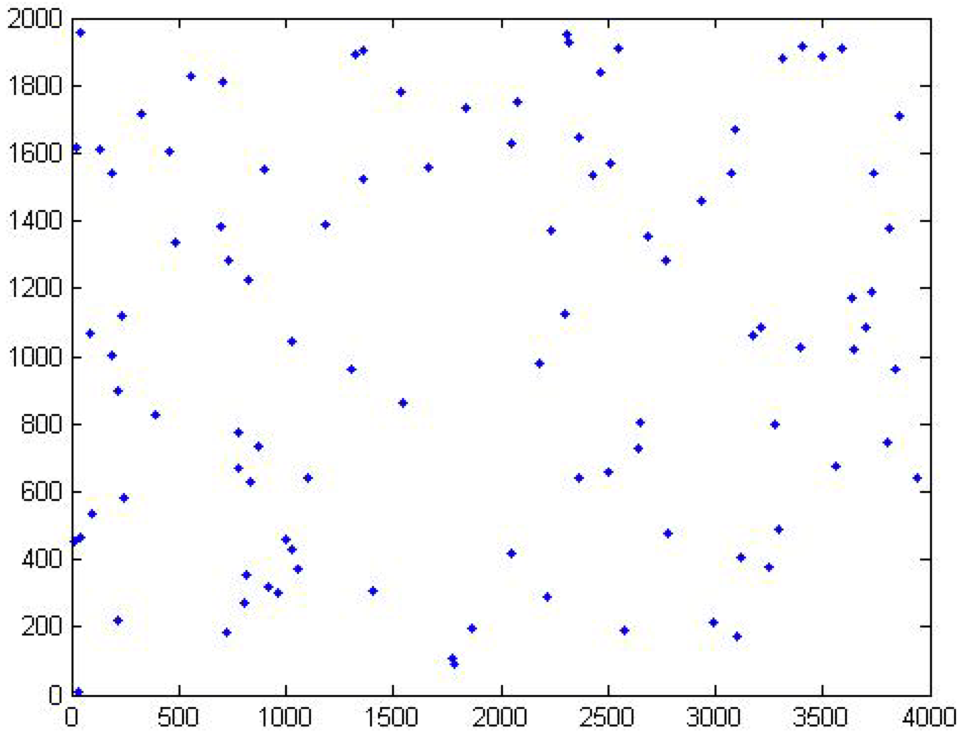
Η αναπαράσταση των σημείων των πινάκων kro απεικονίζονται στα διαγράμματα που ακολουθούν :



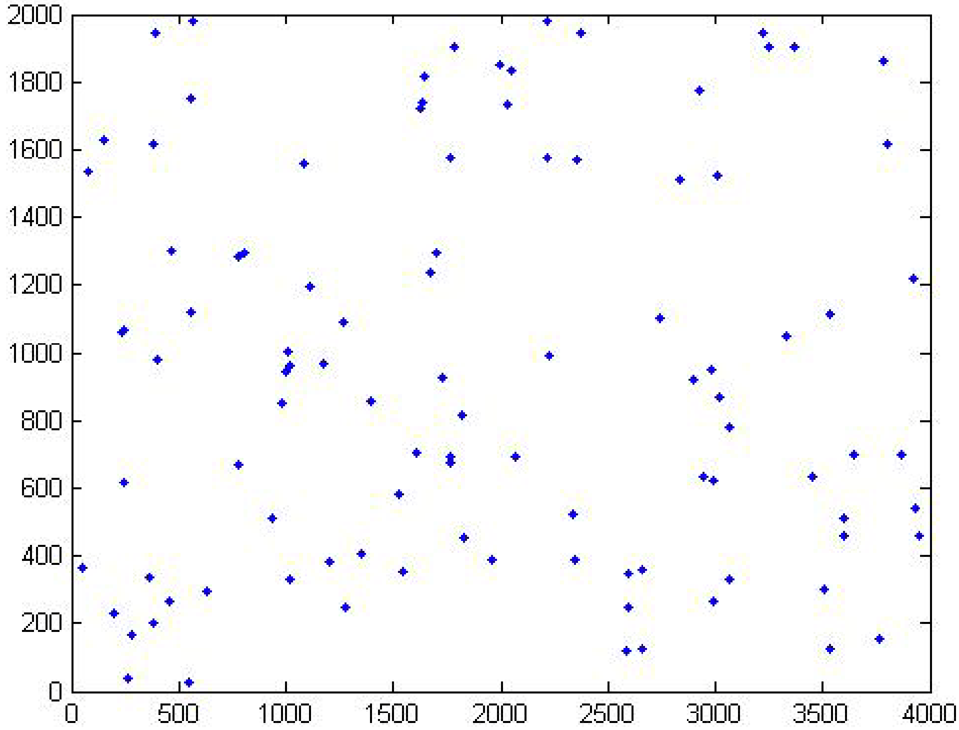
Διάγραμμα 1. Σημεία KroA100



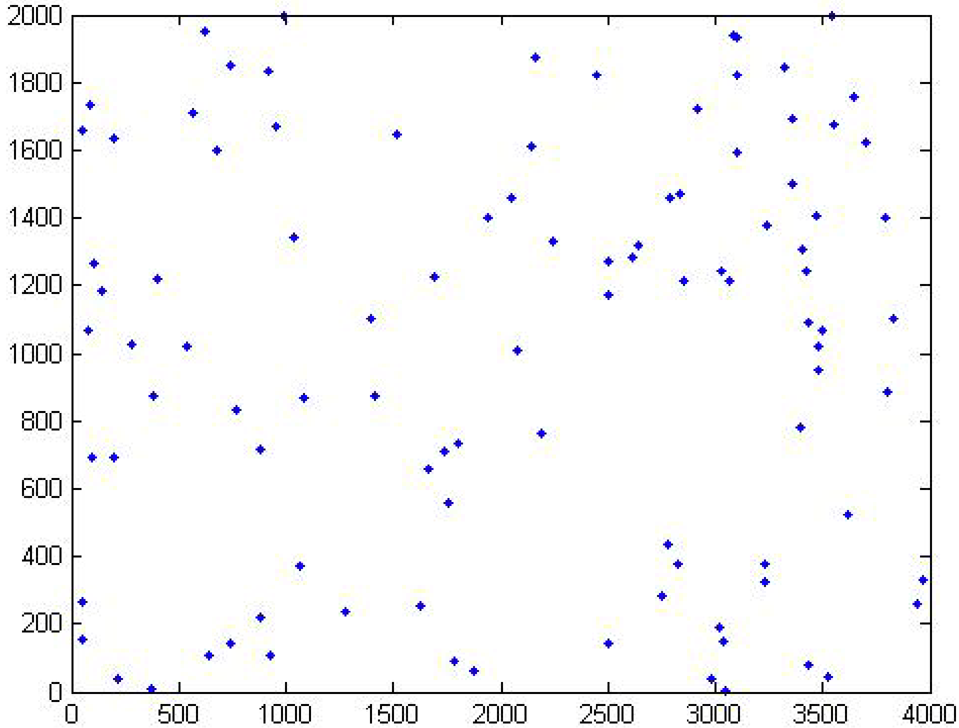
Διάγραμμα 2. Σημεία KroB100



Διάγραμμα 3. Σημεία KroC100



Διάγραμμα 4. Σημεία KroD100



Διάγραμμα 5. Σημεία KroE100

2.2 Διαδικασία επίλυσης

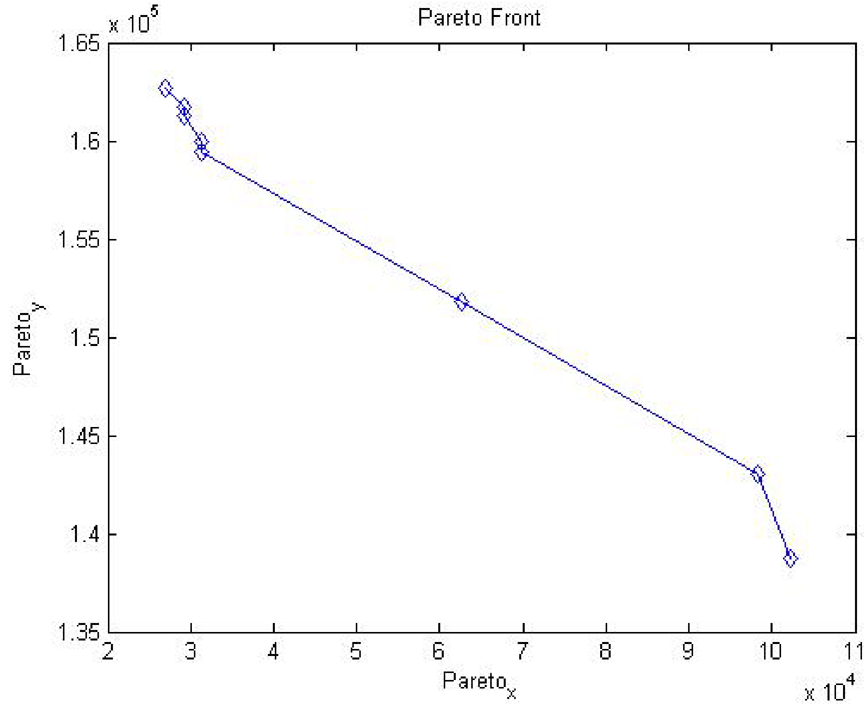
Στη συνέχεια θα γίνει ανάλυση της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος βήμα-βήμα.

Υπολογισμός αρχικού αριθμού ατόμων για τον σχηματισμό του πρώτου πληθυσμού λύσεων

Ο πληθυσμός λύσεων που χρησιμοποιούμε για να τρέξουμε τον αλγόριθμο της Διαφορικής Εξέλιξης αποτελείται από εκατό (100) άτομα. Κάθε άτομο αντιπροσωπεύει μία «διαδρομή». Έτσι ώστε να καταλήξουμε στον κατάλληλο αριθμό ατόμων έγιναν πολλές δοκιμές. Έπρεπε ο αριθμός των τελικών Pareto λύσεων να είναι ικανοποιητικός αλλά και η καμπυλότητα (κυρτότητα) στο διάγραμμα Pareto front να διαγράφεται όσο πιο ομαλά γίνεται. Η εκτέλεση και η συγγραφή των αλγορίθμων έγινε στο πρόγραμμα Matlab.

Στη συνέχεια παραθέτουμε για τον συνδυασμό kroA100-kroB100 τρία διαφορετικά διαγράμματα Pareto front για διαφορετικό αριθμό ατόμων:

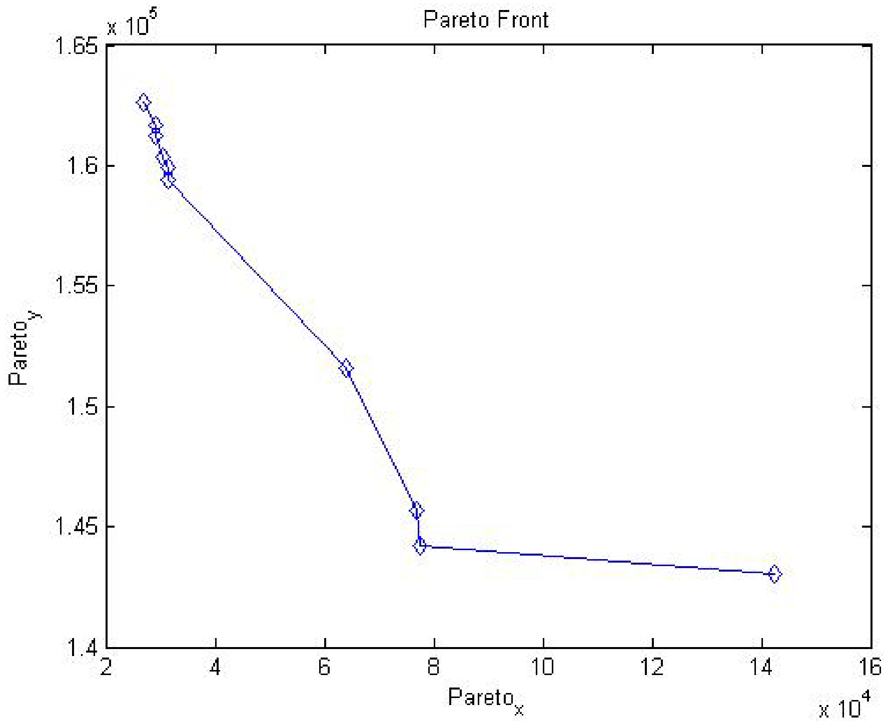
Για 20 άτομα



Διάγραμμα 6. Pareto front kroA100-kroB100 με 20 άτομα

Άτομα Pareto front : 8

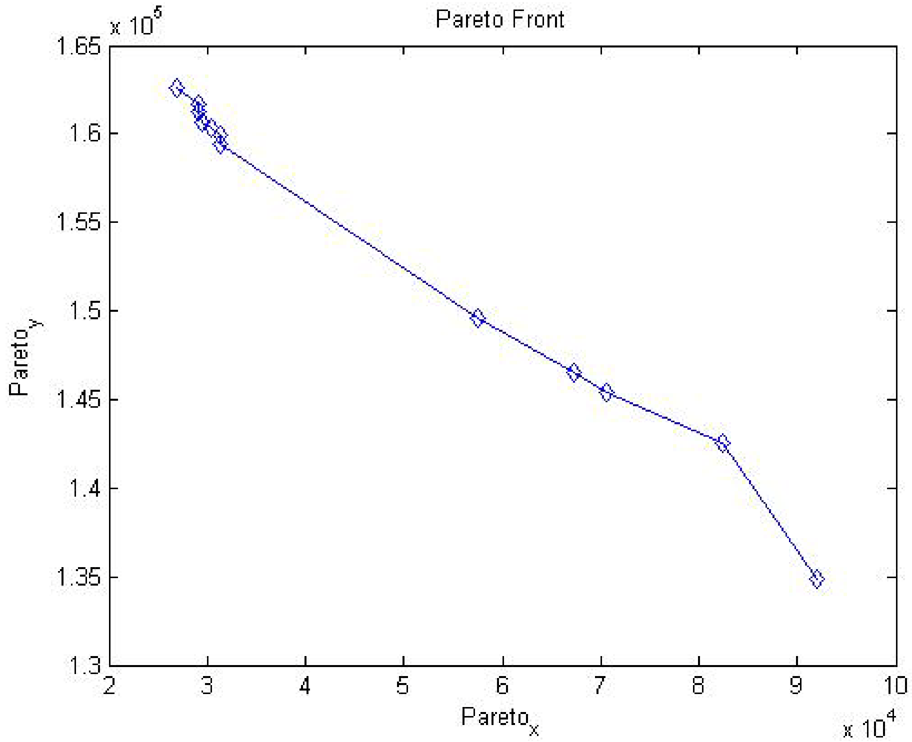
Για 50 άτομα



Διάγραμμα 7. Pareto front kroA100-kroB100 με 50 άτομα

Άτομα Pareto front : 10

Για 100 άτομα



Διάγραμμα 8. Pareto front kroA100-kroB100 με 100 άτομα

Άτομα Pareto front : 12

Από τα τρία παραπάνω διαγράμματα καταλήξαμε στα εξής συμπεράσματα:

- Το πρώτο διάγραμμα των 20 ατόμων έχει μια μέτρια καμπυλότητα όσων αφορά το διάγραμμα και ο αριθμός των ατόμων είναι αρκετά μικρός.
- Το δεύτερο διάγραμμα των 50 ατόμων έχει χειρότερη καμπυλότητα από το πρώτο με μόλις δύο άτομο Pareto περισσότερα.
- Το τελευταίο διάγραμμα των 100 ατόμων έχει καλύτερη καμπυλότητα σε σχέση με το πρώτο και υπερτερεί ως προς τον αριθμό ατόμων Pareto σε σχέση και με τα δυο προηγούμενα. Μπορούμε να πούμε ότι είναι μια αρκετά ικανοποιητική λύση.

Οι λύσεις που παρουσιάστηκαν υπολογίστηκαν μόνο από τον πρώτο συνδυασμό πινάκων kro και από την 1^{η} μέθοδο επίλυσης (οι μέθοδοι επίλυσης είναι συνολικά τρεις για κάθε συνδυασμό και θα γίνει αναλυτική περιγραφή τους αργότερα). Υπήρξαν και άλλες δοκιμές άλλων συνδυασμών και μεθόδων που έδωσαν καλύτερες λύσεις και αποδώσεις για 100 άτομα όσων αφορά την κυρτότητα του διαγράμματος και τον αριθμό σωματιδίων.

Υπολογισμός πινάκων κόστους C

Προκειμένου να καταφέρουμε να παράγουμε μια αρχική, σχετικά καλή, διαδρομή (ώστε να έχουμε και ένα σχετικά καλό αρχικό κόστος) θα πρέπει να υπολογίσουμε το πίνακα κόστους για κάθε Kro πίνακα σημείων και έπειτα με την χρήση της μεθόδου του «Πλησιέστερου Γείτονα» να παράγουμε αυτή τη διαδρομή. Ο υπολογισμός των τιμών των πινάκων αυτών γίνεται με την χρήση του τύπου (7) που αναφέραμε προηγουμένως.

Σε αυτή την εργασία θα εξάγουμε τα τελικά αποτελέσματα με βάση τους εξής ανά δύο και ανά τρείς συνδυασμούς πινάκων kro:

Ανά δύο

- kroA100-kroB100
- kroA100-kroC100
- kroA100-kroD100
- kroA100-kroE100
- kroB100-kroC100
- kroB100-kroD100
- kroB100-kroE100
- kroC100-kroD100
- kroC100-kroE100
- kroD100-kroE100

Ανά τρεις

- kroA100-kroB100-kroC100
- kroA100-kroB100-kroD100
- kroA100-kroB100-kroE100
- kroA100-kroC100-kroD100
- kroA100-kroC100-kroE100
- kroA100-kroD100-kroE100
- kroB100-kroC100-kroD100
- kroB100-kroC100-kroE100
- kroB100-kroD100-kroE100
- kroB100-kroC100-kroD100

Παράδειγμα

Για να γίνει πιο κατανοητή η επίλυση του προβλήματος παραθέτουμε στην συνέχεια δύο πίνακες κόστους (C_A και C_B) που θα μπορούσαν να προκύψουν με την χρήση του τύπου (7) από δύο πίνακες με συντεταγμένες πέντε (5) κόμβων (πόλεων) A και B (αντίστοιχης μορφής με τους πίνακες kro).

C_A					
κόμβοι	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	5	7	4	9
2	5	0	3	6	8
3	7	3	0	2	1
4	4	6	2	0	5
5	9	8	1	5	0

Πίνακας 1. Κόστη μετάβασης από τον ένα κόμβο στον άλλο με βάση τις συντεταγμένες του πίνακα A

C_B					
κόμβοι	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	3	9	8	5
2	3	0	6	7	9
3	9	6	0	2	4
4	8	7	2	0	5
5	5	9	4	5	0

Πίνακας 2. Κόστη μετάβασης από τον ένα κόμβο στον άλλο με βάση τις συντεταγμένες του πίνακα B

Παρατηρώντας τους πίνακες μπορούμε να δούμε ότι για να πάει κανείς από κάποιον κόμβο στον εαυτό του έχει κόστος 0 ενώ για να πάει από έναν κόμβο σε έναν άλλο έχει κόστος όσο αυτό που αναγράφεται στο αντίστοιχο κελί. Για παράδειγμα για να μεταφερθούμε στο κόμβο 2 από τον κόμβο 1 με βάση το κόστος του πίνακα C_A θα έχουμε κόστος 5 μονάδες.

Δημιουργία διαδρομής πρώτου ατόμου με την μέθοδο του Πλησιέστερου Γείτονα

Αφού έχουμε δημιουργήσει τους πίνακες του κόστους για κάθε πίνακα συντεταγμένων Kro στη συνέχεια θα πρέπει να επιλέγουμε ποιά θα είναι τα δύο ή τρία kro που θα συνδυάσουμε. Έπειτα διαλέγουμε με βάση ποιο πίνακα κόστους C θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Πλησιέστερου Γείτονα. Με τη μέθοδο αυτή θα δημιουργήσουμε το πρώτο μας άτομο (δηλ. την πρώτη μας διαδρομή). Η αλληλουχία των κόμβων (διαδρομή) θα αποθηκεύεται κάθε φορά σε ένα διάνυσμα diadromh το οποίο με τη σειρά του θα αποθηκεύεται σε έναν πίνακα komvoi του οποίου κάθε γραμμή αποτελεί και ένα άτομο. Επίσης για κάθε διάνυσμα diadromh θα υπολογίζεται ένας δυσδιάστατος πίνακας κόστους μετάβασης (kostos_metavashs) από τον ένα κόμβο στον επόμενο για κάθε ένα από τους δύο (ή τρεις) πίνακες κόστους C. Τέλος από το άθροισμα των κοστών μετάβασης κάθε γραμμής του πίνακα kostos_metavashs θα προκύπτει ο πίνακας συνολικού κόστους (kostos) κάθε ατόμου για κάθε ένα από τους δύο (ή τρεις) πίνακες κόστους C.

Για να γίνει ποιο κατανοητή η μέθοδος θα την εξηγήσουμε συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα (συνέχεια)</u>

Το διάνυσμα diadromh είναι ένα διάνυσμα που παρουσιάζει την αλληλουχία των κόμβων που πρέπει να ακολουθήσει ο πωλητής για να ολοκληρώσει την διαδρομή του και να επιστρέψει στον αρχικό κόμβο. Το πρώτο του στοιχείο στην προκειμένη περίπτωση θα είναι ο κόμβος 1 και έπειτα θα ακολουθήσουν οι υπόλοιποι κόμβοι (άλλοι τέσσερεις κόμβοι για το παράδειγμα μας) με την χρήση της μεθόδου του πλησιέστερου γείτονα.

Αρχικά συμπληρώνουμε στο δίανυσμά μας μόνο το πρώτο στοιχείο (κόμβος 1):

	diadromh
κόμβοι	1

Πίνακας 3. Ο πίνακας diadromh με ένα στοιχείο συμπληρωμένο

Στη συνέχεια ελέγχουμε την γραμμή που δείχνει το στοιχείο στο πρώτο κελί του πίνακα diadromh (δηλ στην $1^{η}$ γραμμή εφόσον το πρώτο στοιχείο είναι το 1) του πίνακα C_A (το ποιόν πίνακα C θα διαλέξουμε είναι στη κρίση του προγραμματιστή). Έτσι πάμε στην $1^{η}$ γραμμή του πίνακα C_A και ελέγχουμε όλα τα στοιχεία της (εκτός αυτού της $1^{ης}$ στήλης αφού τον κόμβο 1 τον έχουμε ήδη τοποθετήσει στο διάνυσμα diadromh) για να βρούμε τη στήλη με το μικρότερο κόστος. Στη περίπτωσή μας η $4^{η}$ στήλη είναι αυτή με το μικρότερο κόστος (με κόστος ίσο με 4). Εφόσον η $4^{η}$ στήλη είναι αυτή με το μικρότερο κόστος τοποθετούμε τον αριθμό 4 στο δεύτερο κελί του πίνακα diadromh. Έτσι ο πίνακας διαδρομή γίνεται :

	Diadromh				
κόμβοι	1	4			

Πίνακας 4. Ο πίνακας diadromh με δύο στοιχεία συμπληρωμένα

Με την ίδια λογική μεταβαίνουμε στην $4^η$ γραμμή του πίνακα C_A και ελέγχουμε όλα της τα στοιχεία (εκτός της $1^{ης}$ και $4^{ης}$ στήλης που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί). Στην $4^η$ γραμμή του C_A το μικρότερο στοιχείο είναι αυτό της στήλης 3 (με κόστος ίσο με 2). Άρα τοποθετούμε στο επόμενο κελί του diadromh το νούμερο 3:

	Diadromh				
κόμβοι	1	4	3		

Πίνακας 5. Ο πίνακας diadromh με τρία στοιχεία συμπληρωμένα

Με την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στο τελικό διάνυσμα diadromh που παρουσιάζεται παρακάτω:

	Diadromh				
κόμβοι	1	4	3	5	2

Πίνακας 6. Ο πίνακας diadromh με όλα τα στοιχεία συμπληρωμένα

Από τον πίνακα 6 παρατηρούμε ότι ο πωλητής σε αυτή την διαδρομή θα πρέπει να ξεκινήσει από την πόλη 1 να πάει στην 4, έπειτα στην 3, μετά στην 5, τέλος στην 2 και να επιστρέψει πάλι στην 1 (στο πρώτο κελί) για να κλείσει τον κύκλο.

Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε το κόστος μετάβασης για αυτή την διαδρομή και για κάθε πίνακα κόστους C. Οι τιμές αυτέ θα αποθηκευτούν στον δυσδιάστατο πίνακα kostos_metabashs. Ο πίνακας αυτός θα έχει δύο γραμμές (ή τρεις αν έχουμε τρεις πίνακες κόστους C) και κάθε γραμμή του θα έχει το κόστος μεταφοράς από τον ένα κόμβο στον επόμενο σύμφωνα με κάθε πίνακα C. Για παράδειγμα το κόστος από τον κόμβο 1 στον κόμβο 4 σύμφωνα με το C_A έχει κόστος 4. Άρα στο πρώτο κελί της πρώτης σειράς του πίνακα kostos_metavashs θα μπει ο αριθμός 4. Αντίστοιχα για την ίδια μετάβαση αλλά με βάση το C_B, το πρώτο κελί της δεύτερης γραμμής του πίνακα kostos_metavashs θα έχει κόστος 8. Ο πίνακας θα έχει 5 στήλες και στη τελευταία στήλη θα φαίνεται η μετάβαση από τον τελευταίο κόμβο (δηλ. τον 2) στον κόμβο αφετηρία, δηλαδή στον κόμβο 1 για την περίπτωσή μας. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε συμπληρωμένο τον πίνακα kostos_metavashs:

kostos_metavashs					
C_A	4	2	1	8	5
C_B	8	2	4	9	3

Πίνακας 7. Ο πίνακας kostos_metavashs με όλα τα στοιχεία συμπληρωμένα

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε τον πίνακα συνολικού κόστους (kostos) που αποτελεί το άθροισμα κάθε μίας από τις γραμμές του kostos_metavashs. Ο πίνακας αυτός δείχνει τα συνολικά κόστη για κάθε άτομο που παράγουμε. Θα παράγουμε τρία άτομα άρα θα έχει τρείς γραμμές. Επίσης θα έχει δύο στήλες αφού στη προκειμένη περίπτωση έχουμε δύο πίνακες κόστους C. Μέχρι τώρα ο πίνακας kostos θα έχει την παρακάτω μορφή:

Kostos		
άτομα\C	C_A	C_B
1	20	26
2		
3		

Πίνακας 8. Ο πίνακας kostos με το κόστος του πρώτου ατόμου συμπληρωμένο

Τέλος τοποθετούμε την διαδρομή του πρώτου ατόμου που παράγαμε (δηλ τα στοιχεία του diadromh) στη πρώτη γραμμή του πίνακα komvoi στον οποίο αποθηκεύεται η διαδρομή κάθε ατόμου. Στη προκειμένη περίπτωση του παραδείγματος θα έχουμε τρεις γραμμές αφού θα παράγουμε συνολικά τρία άτομα και πέντε στήλες αφού έχουμε πέντε κόμβους. Ο πίνακας komvoi παρουσιάζεται παρακάτω:

άτομα\κόμβοι	komvoi				
1	1	4	3	5	2
2					
3					

Πίνακας 9. Ο πίνακας komvoi με τη διαδρομή του πρώτου ατόμου συμπληρωμένη

Δημιουργία διαδρομής επόμενων ατόμων με την μέθοδο 2-opt

Αφού δημιουργήσαμε το αρχικό μας άτομο στη συνέχεια σκεφτήκαμε να δημιουργήσουμε τα υπόλοιπα άτομα με τη μέθοδο 2-opt. Με αυτή την λογική θα είχαμε 100 άτομα με περίπου ίδιες λύσεις και με παρόμοια, αρκετά κοντά στο βέλτιστο, ολικά κόστη. Έπειτα σκεφτήκαμε πως με αυτό τον τρόπο ίσως να χάναμε κάποια πολύ καλύτερη λύση η οποία δεν θα έμοιαζε καθόλου με αυτή που παρήγαγε η μέθοδος του πλησιέστερου γείτονα. Έτσι καταλήξαμε στην απόφαση να παράγουμε τα πρώτα 49 άτομα με τη μέθοδο 2-opt και τα υπόλοιπα 50 με τυχαίο (rand) τρόπο.

Η μέθοδος 2-opt θα γίνει εύκολα κατανοητή εφαρμόζοντας τη στο προηγούμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα (συνέχεια)

Από το παράδειγμα του προηγούμενου βήματος έχουμε ήδη γνωστή την διαδρομή του πρώτου ατόμου (diadromh) καθώς και τον αντίστοιχο πίνακα κόστους μετάβασης (Kostos_metabashs). Το πρώτο βήμα στην μέθοδο 2-opt είναι να επιλέξουμε ποιό C θα χρησιμοποιήσουμε. Τυχαία διαλέγουμε το C_A. Έπειτα ελέγχουμε στη πρώτη γραμμή του πίνακα kostos_metavashs (δηλ. αυτή που δημιουργήθηκε σύμφωνα με το C_A) ποιά είναι τα δύο κελιά που περιέχουν το μεγαλύτερο κόστος. Τα κελιά αυτά όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα είναι το κελί 4 και το κελί 5 με αντίστοιχα κόστη 8 και 5.

kostos_metavashs					
C_A	4	2	1	**8**	**5**
C_B	8	2	4	9	3

Πίνακας 10. Ο πίνακας kostos_metavashs με τα δύο μεγαλύτερα κόστη της πρώτης γραμμής κόκκινα

Στη συνέχεια πηγαίνουμε στα αντίστοιχα κελιά του πίνακα diadromh (κελί 4 και 5) και εναλλάσσουμε μεταξύ τους το περιεχόμενό τους. Το ίδιο κάνουμε και στα περιεχόμενα όλων των άλλων κελιών (αν υπάρχουν) του diadromh που βρίσκονται ενδιάμεσα των δύο αρχικών. Έτσι η νέα μας διαδρομή, η διαδρομή του δεύτερου ατόμου, φαίνεται στο παρακάτω αλλαγμένο πίνακα diadromh (η αλλαγή φαίνεται με κόκκινο χρώμα):

Diadromh					
κόμβοι	1	4	3	**2**	**5**

Πίνακας 11. Ο πίνακας diadromh του δεύτερου ατόμου όπως προέκυψε από την μέθοδο 2-opt

Το επόμενο βήμα είναι να δημιουργήσουμε για το νέο μας πίνακα kostos_metavashs και να συμπληρώσουμε τις δεύτερες γραμμές των πινάκων kostos και komvoi. Τους πίνακες αυτούς τους συμπληρώνουμε με την ίδια διαδικασία που περιγράψαμε για το πρώτο άτομο και παρουσιάζονται παρακάτω:

kostos_metavashs					
C_A	4	2	3	8	9
C_B	8	2	6	9	5

Πίνακας 12. Ο πίνακας kostos_metavashs του δεύτερου ατόμου

Kostos		
άτομα\C	C_A	C_B
1	20	26
2	26	30
3		

Πίνακας 13. Ο πίνακας kostos με συμπληρωμένα και τα ολικά κόστη του δεύτερου ατόμου

άτομα\κόμβοι	Komvoi				
1	1	4	3	5	2
2	1	4	3	2	5
3					

Πίνακας 14. Ο πίνακας komvoi με τη διαδρομή και του δεύτερου ατόμου συμπληρωμένη

Δημιουργία διαδρομής επόμενων ατόμων με τυχαίο (rand) τρόπο

Τα επόμενα 50 άτομα θα παραχθούν με τυχαίο τρόπο. Αυτός ο τρόπος μπορεί να μας δώσει άτομα ίσως με ένα καλύτερο κόστος που δεν θα καταφέρουν να μας δώσουν τα προηγούμενα 50 άτομα. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την παραγωγή τυχαίου σωματιδίου παράγοντας το τρίτο και τελευταίο άτομο του παραδείγματός μας:

<u>Παράδειγμα (συνέχεια)</u>

Το τελευταίο μας άτομο θα παραχθεί με τυχαίο τρόπο και στη συνέχεια θα συμπληρωθούν οι πίνακες kostos_metavashs, kostos και komvoi.

Η τυχαία μας διαδρομή θα μπορούσε να είναι η ακόλουθη:

Diadromh					
κόμβοι	1	5	3	4	2

Πίνακας 15. Ο πίνακας diadromh του τρίτου ατόμου όπως προέκυψε από την μέθοδο rand

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε και τους πίνακες kostos_metavashs, kostos και komvoi όπως στα προηγούμενα άτομα:

kostos_metavashs					
C_A	9	1	2	6	5
C_B	5	4	2	7	3

Πίνακας 16. Ο πίνακας kostos_metavashs του τρίτου ατόμου

Kostos		
άτομα\C	C_A	C_B
1	20	26
2	26	30
3	23	21

Πίνακας 17. Ο πίνακας kostos με συμπληρωμένα και τα ολικά κόστη του τρίτου ατόμου

άτομα\κόμβοι	Komvoi				
1	1	4	3	5	2
2	1	4	3	2	5
3	1	5	3	4	2

Πίνακας 18. Ο πίνακας komvoi με τη διαδρομή και του τρίτου ατόμου συμπληρωμένη

Έτσι καταφέραμε να συμπληρώσουμε και τις τρείς διαδρομές, δηλαδή και τα τρία άτομα που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο DE ώστε να βρούμε τον πληθυσμό των Pareto βέλτιστων ατόμων.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ DE

Δημιουργία πίνακα x

Ξεκινώντας τον αλγόριθμο Διαφορικής Εξέλιξης αρχικά πρέπει να μετατρέψουμε τις τιμές του πίνακα komvoi από διακριτού τύπου σε συνεχείς. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει διαιρώντας όλα τα στοιχεία του πίνακα komvoi με το μέγιστο αριθμό κόμβων, δηλαδή το 100. Από την συνέχεια του προβλήματος που ακολουθεί θα γίνει πιο κατανοητή η διαδικασία:

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αφού ο μέγιστος αριθμός κόμβων είναι 5 στο παράδειγμά μας θα διαιρέσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα komvoi με αυτό τον αριθμό. Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας x:

Άτομα			**X**		
1	0.2	0.8	0.6	1	0.4
2	0.2	0.8	0.6	0.4	1
3	0.2	1	0.6	0.8	0.4

Πίνακας 19. Ο πίνακας x με τις διαδρομές όλων των ατόμων συμπληρωμένες

Δημιουργία πινάκων P και veltisto_kostos

Για να μπορέσουμε να συγκρατήσουμε τα καλύτερα άτομα και τα κόστη τους μέχρι την επανάληψη που έχει γίνει (όταν αρχίσουν οι επαναλήψεις) θα πρέπει τα άτομα του πίνακα x που προκύπτουν σε κάθε επανάληψη να συγκριθούν με τα άτομα που είναι αποθηκευμένα στον πίνακα P. Αν κάποιο από τα άτομα του πίνακα x έχει δώσει καλύτερο κόστος από το αντίστοιχο άτομο του P τότε το αντικαθιστούμε και ταυτόχρονα αντικαθιστούμε και το κόστος του παλιού σωματιδίου του P με αυτό του νέου στον πίνακα veltisto_kostos. Αυτή η διαδικασία θα γίνεται στο τέλος κάθε επανάληψης. Για το ξεκίνημά μας, πριν μπούμε στην διαδικασία των επαναλήψεων, αποθηκεύουμε το περιεχόμενο του πίνακα x στο πίνακα P και το περιεχόμενο του πίνακα kostos στο πίνακα veltisto_kostos.

Άρα

P = = x και
veltisto_kostos == kostos

Δημιουργία πινάκων Pareto_kostos και Pareto_P

Αφού έχουμε δημιουργήσει τον αρχικό μας πίνακα veltisto_kostos από αυτόν θα πρέπει να κρατήσουμε τα pareto βέλτιστα κόστη (Pareto front) και την αντίστοιχη διαδρομή, από τον πίνακα P, των ατόμων με αυτά τα κόστη. Τα Pareto βέλτιστα κόστη αποθηκεύονται στον πίνακα Pareto_kostos και οι διαδρομές των αντίστοιχων ατόμων στον πίνακα Pareto_P. Για να είναι ένα άτομο που εξετάζουμε κυρίαρχο σε ένα άλλο θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

- το δεύτερο να έχει και τα δύο (ή τρία αν έχουμε τρία κριτήρια κόστους) του κόστη (αντίστοιχη γραμμή veltisto_kostos) μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα αυτού που εξετάζουμε. Τότε το δεύτερο διαγράφεται από το Pareto_kostos και το Pareto_P.
- το δεύτερο να έχει όλα του τα κόστη ίσα με τα αντίστοιχα του πρώτου. Στην προκειμένη περίπτωση κυριαρχεί το πρώτο και το δεύτερο διαγράφεται από τους πίνακες.

Αν και τα δύο άτομα έχουν από ένα αντίστοιχο κόστος μεγαλύτερο και από ένα μικρότερο τότε ανήκουν και τα δύο στο Pareto front. Φυσικά στην εργασία μας τα κόστη κάθε ατόμου συγκρίνονται με περισσότερα από ένα μη διαγραμμένα άτομα ώστε να κυριαρχήσουν και να μείνουν στο Pareto front.

Αφού δημιουργήσουμε τους δύο πίνακες Pareto αποθηκεύουμε τυχαία σε μια μεταβλητή g το νούμερο (σειρά) από ένα από τα Pareto άτομα των πινάκων Pareto και σε μια μεταβλητή w τον συνολικό αριθμό ατόμων Pareto.

Για να γίνει πιο εύκολη η κατανόηση της διαδικασίας παραθέτουμε το επόμενο παράδειγμα που είναι συνέχεια του προηγούμενου:

<u>Παράδειγμα (συνέχεια)</u>

Από τον παρακάτω πίνακα veltisto_kostos βλέπουμε ότι πρέπει να διαγραφεί το άτομο 2 αφού όλα του τα κόστη είναι μεγαλύτερα από των άλλων και να κρατηθούν στο Pareto_kostos τα άτομα 1 και 3 που έχουν από ένα αντίστοιχο κόστος μεγαλύτερο και από ένα μικρότερο.

Veltisto_kostos		
άτομα\C	**C_A**	**C_B**
1	20	26
2	26	30
3	23	21

Πίνακας 20. Ο αρχικός πίνακας veltisto_kostos

Έτσι ο πίνακας Pareto_kostos σχηματίζεται ως εξής:

Pareto_kostos		
σειρά (άτομα)\C	**C_A**	**C_B**
1	20	26
2	23	21

Πίνακας 21. Ο αρχικός πίνακας Pareto_kostos με τα δύο πρώτα κυρίαρχα άτομα

Και ο πίνακας Pareto_P σχηματίζεται ως εξής:

σειρά (άτομα)	Pareto_P				
1	0.2	0.8	0.6	1	0.4
2	0.2	1	0.6	0.8	0.4

Πίνακας 22. Ο αρχικός πίνακας Pareto_P με τα δύο πρώτα κυρίαρχα άτομα

Από αυτά τα δύο Pareto άτομα επιλέγουμε τυχαία το νούμερο 2 και αυτό το νούμερο το αποθηκεύουμε στην μεταβλητή g ώστε να χρησιμοποιηθεί αργότερα. Άρα g = 2. Επίσης κρατάμε και τον αριθμό (ποσότητα) των ατόμων Pareto w = 2.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ DE

Στην εργασία αυτή έχει οριστεί ως αριθμός επαναλήψεων για τη βελτίωση της λύσης του προηγούμενου βήματος το 100. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου θα γίνονται με τη σειρά οι διαδικασίες που ακολουθούν:

Επιλογή μεθόδου υπολογισμού δοκιμαστικού διανύσματος u

Όπως αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο ο τύπος του δοκιμαστικού διανύσματος u για μια επανάληψη t είναι ο ακόλουθος:

$$u_i(t) = x_{i_1}(t) + \beta\left(x_{i_2}(t) - x_{i_3}(t)\right)$$

Όπου x_i τα άτομα και $i \neq i_1 \neq i_2 \neq i_3$. Προκειμένου να παράγουμε τα επόμενα άτομα των επαναλήψεων μας λαμβάνοντας υπόψη τις λύσεις των προηγούμενων, κάθε φορά, ατόμων Pareto και προσπαθώντας να δημιουργήσουμε τουλάχιστον τρεις διαφορετικές μεθόδους σχηματισμού του u ώστε να έχουμε όσο το δυνατό περισσότερες διαφορετικές λύσεις στο αρχείο μας, καταλήξαμε στις παρακάτω μεθόδους:

$1^η$ Μέθοδος

$$u_i(t) = Pareto\_P_g(t-1) + \beta\big(P_{i1}(t-1) - P_{i2}(t-1)\big) \qquad (8)$$

Όπου $i \neq i_1 \neq i_2 \neq g$, με i_1 *και* i_2 τυχαίοι ακέραιοι є [1,100] και *β* = 0.5.

$2^η$ Μέθοδος

$$u_i(t) = P_{i1}(t-1) + \beta\big(Pareto\_P_{i2}(t-1) - Pareto\_P_{i3}(t-1)\big) \qquad (9)$$

Όπου $i \neq i_1 \neq i_2 \neq i_3$, με i_1 τυχαίοι ακέραιοι є [1,100],και i_2 και i_3 τυχαίοι ακέραιοι є [1,w] και *β* = 0.5.

$3^η$ Μέθοδος

$$u_i(t) = Pareto\_P_g(t-1) + \beta\big(Pareto\_P_{i1}(t-1) - Pareto\_P_{i2}(t-1)\big) \quad (10)$$

Όπου $i \neq i_1 \neq i_2 \neq g$, με i_1 *και* i_2 τυχαίοι ακέραιοι є [1,w] και *β* = 0.5.

Όπως φάνηκε στις παραπάνω μεθόδους στο τύπο του u_i χρησιμοποιούνται μόνο στοιχεία από τους πίνακες *P* και *Pareto_P* αντί για τον πίνακα *x*. Αυτό γίνεται διότι είναι προτιμότερο να αξιοποιούμε τα νέα βέλτιστα δεδομένα κάθε επανάληψης παρά τα δεδομένα του πίνακα *x* που παράγεται κάθε φορά ο οποίος δεν είναι ποτέ σίγουρο πως έχει παράγει βελτιωμένα αποτελέσματα σε κάθε επανάληψη.

Πρέπει να τονίσουμε ότι σε αυτές τις διαδικασίες επίλυσης δεν θα χρησιμοποιηθεί τελεστής διασταύρωσης Cr, δηλαδή θα θεωρήσουμε *Cr = 1*. Με τον τρόπο αυτό όποιος νέος πίνακας *u(t)* παράγεται θεωρείται άμεσα ότι το περιεχόμενο του αποτελεί την επόμενη γενιά του *x(t-1)* και αμέσως μετατρέπεται σε *x(t)*.

Μετατροπή του πίνακα x σε πίνακα komvoi

Στη συνέχεια πρέπει να μετατρέψουμε τις συνεχείς τιμές του πίνακα x σε διακριτές και να τις αποθηκεύσουμε στον νέο μας πίνακα komvoi. Από αυτό το πίνακα και με την χρήση των πινάκων κόστους C θα υπολογίσουμε για κάθε νέο άτομο τα κόστη μετάβασης του (πίνακες kostos_metavashs) και τα συνολικά τους κόστη για κάθε C (πίνακας kostos).

Η διαδικασία μετατροπής του πίνακα x σε πίνακα komvoi θα αναλυθεί παρακάτω με την βοήθεια ενός παραδείγματος:

<u>Παράδειγμα</u>

Η διαδικασία γίνεται εξετάζοντας τον πίνακα x γραμμή-γραμμή. Έστω ότι έχουμε την ακόλουθη γραμμή του πίνακα x:

	x				
Άτομο	0,5	0,7	1	0,3	0,2

Πίνακας 23. Ένα τυχαίο άτομο του πίνακα x

Για την γραμμή αυτή ψάχνω να βρω πιο είναι το κελί με τη μικρότερη τιμή. Στη προκειμένη περίπτωση το κελί με τη μικρότερη τιμή είναι το 5^{o}. Τότε συμπληρώνω στον πίνακα komvoi για το αντίστοιχο άτομο στο 5^{o} κελί τον αριθμό 1. Έπειτα ελέγχω ξανά τη γραμμή του ατόμου στο πίνακα x για να βρω το κελί με την αμέσως επόμενη μεγαλύτερη τιμή. Στο παράδειγμά μας είναι το κελί 4 με τιμή 0.3. με τον ίδιο τρόπο συνεχίζω να ελέγχω και τα υπόλοιπα κελιά αυτής της γραμμής καταλήγοντας στον πίνακα 24.

	komvoi				
Άτομο	3	4	5	2	1

Πίνακας 24. Αλλαγμένη σειρά (άτομο) του πίνακα komvoi με βάση τον πίνακα x

Αφού έχουμε, πλέον, σχηματίσει τον πίνακα komvoi μπορούμε να υπολογίσουμε και τους πίνακες kostos_metavashs και kostos για κάθε άτομο με τον τρόπο που δείξαμε σε προηγούμενο βήμα. Στη συνέχεια με το ενδεχόμενο πιθανής βελτίωσης των αποτελεσμάτων εφαρμόζουμε 100 επαναλήψεις της μεθόδου 2-opt στους πίνακες x και komvoi ταυτόχρονα (με τον τρόπο που περιγράψαμε σε προηγούμενο βήμα, προσέχοντας ότι μεταβολή γίνει στον πίνακα komvoi να γίνεται η αντίστοιχη αλλαγή στον πίνακα x) και καταλήγουμε σε νέους πίνακες x, komvoi και kostos (αν υπάρχουν βελτιώσεις από τη 2-opt, αλλιώς κρατάμε αυτούς που προέκυψαν από το προηγούμενο βήμα).

Σύγκριση P(t-1) με x(t) και σχηματισμός P(t)

Από την προηγούμενη επανάληψη (t-1) έχουμε υπολογίσει έναν πίνακα P(t-1) και ένα veltisto_kostos(t-1). Στο σημείο αυτό θα πρέπει να συγκρίνουμε τα κόστη (kostos(t)) από τα νέα σωματίδια που είναι αποθηκευμένα στον πίνακα x(t) με τα κόστη που βρίσκονται στο πίνακα veltisto_kostos(t-1). Αν για κάποιο άτομο το κόστος του στον πίνακα kostos(t) είναι μικρότερο ή ίσο από το αντίστοιχο στο πίνακα veltisto_kostos(t-1) τότε αντικαθιστούμε και αποθηκεύουμε τις τιμές που είχε αυτό το σωματίδιο στο πίνακα P(t-1) με τις τιμές που έχει στο x(t). Το ίδιο ακριβώς κάνουμε και για τις αντίστοιχες τιμές του στον πίνακα veltisto_kostos(t-1). Με τον τρόπο αυτό αντικαταστήσαμε στο πίνακα P(t) τα άτομα που είχανε καλύτερο κόστος από τα αντίστοιχα προηγούμενά τους στην επανάληψη t και το ίδιο κάναμε για αυτά τα άτομα στο πίνακα veltisto_kostos(t). Έτσι δημιουργήσαμε τους πίνακες P και veltisto_kostos για την επανάληψη t.

Δημιουργία νέων πινάκων Pareto_P και Pareto_kostos

Στο τέλος κάθε επανάληψης t θα πρέπει να υπολογίσουμε το νέο μας πίνακα Pareto_P(t) και τον πίνακα Pareto_kostos(t). Ένας εύκολος τρόπος για να υπολογίσουμε τον πίνακα Pareto_kostos(t) είναι να τοποθετήσουμε σε ένα ενιαίο πίνακα τις τιμές των πινάκων veltisto_kostos(t) και Pareto_kostos(t-1). Σε αυτό τον ενιαίο πίνακα κάνουμε συγκρίσεις ανάμεσα στα κόστη όλων των ατόμων με τη μέθοδο που εξηγήσαμε σε προηγούμενο βήμα με αποτέλεσμα να διαγράφουμε όλα τα κυριαρχούμενα άτομα και να παραμένουν μόνο τα άτομα που είναι βέλτιστα κατά Pareto. Τα κόστη αυτών των ατόμων τοποθετούνται στον πίνακα Pareto_kostos(t) και ταυτόχρονα στον πίνακα Pareto_P(t) τοποθετείται το περιεχόμενο του κάθε ατόμου από τον πίνακα P(t) ή Pareto_P(t-1) αναλόγως με το αν το άτομο αυτό κρατήθηκε στα Pareto βέλτιστα επειδή έγινε κυρίαρχο λόγω του περιεχομένου στο veltisto_kostos(t) ή στο Pareto_kostos(t-1). Αφού υπολογίσουμε τους πίνακες Pareto_P και Pareto_kostos κρατάμε τυχαία σε μια μεταβλητή g τον αριθμό (κατάταξη) ενός ατόμου του πίνακα Pareto_P και σε μια μεταβλητή w το σύνολο των ατόμων Pareto. Τέλος όταν τελειώσουν οι επαναλήψεις μετατρέπουμε τον τελικό πίνακα Pareto_P σε πίνακα komvoi όπως κάναμε παραπάνω με τον x.

Δημιουργία διαγραμμάτων και υπολογισμός αποδόσεων

Αφού τελειώσουμε όλες τις επαναλήψεις θα χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες Pareto_P και Pareto_kostos για να παράγουμε διαγράμματα Pareto front για κάθε συνδυασμό πινάκων kro και για καθεμία από τις τρεις μεθόδους επίλυσης και την απόδοση που έχουν οι τιμές κάθε πίνακα. Στα διαγράμματα με Pareto x συμβολίζουμε την τιμή κόστους που έχει κάθε άτομο σύμφωνα το πρώτο πίνακα κόστους C ενώ με Pareto y σύμφωνα το δεύτερο πίνακα C (αν έχουμε και τρίτο πίνακα κόστους συμβολίζουμε με Pareto z). Για να υπολογίσουμε την απόδοση των δύο πινάκων Pareto εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία:

Αρχικά για καθένα από τους πίνακες αθροίζουμε τα μέγιστα από κάθε στήλη. Στη συνέχεια το αποτέλεσμα του αθροίσματος το υψώνουμε σε τετραγωνική ρίζα. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόδοση τόσο καλύτερο είναι το αποτέλεσμα που έχουμε βρει.

Οι τύποι αποδόσεων για το Pareto_P (Mp) και το Pareto_kostos (Mk) φαίνονται παρακάτω [3]:

$$M_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \max\{\|\alpha_i' - b_i'\|; a', b' \in Pareto\_P\}} \qquad (11)$$

$$M_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \max\{\|p_i' - q_i'\|; p', q' \in Pareto\_kostos\}} \quad (12)$$

2.3 Ψευδοκώδικας

Ο Ψευδοκώδικας που θα μπορούσαμε να προτείνουμε είναι ο ακόλουθος [1]**:**

Επιλογή αριθμού μεθόδου
Επιλογή αριθμού κόμβων
Διάβασμα συντεταγμένων x και y από αρχείο excel
Γέμισμα πίνακα κόστους 1 (Ca)
Γέμισμα πίνακα κόστους 2 (Cb)
Εφαρμογή μεθόδου πλησιέστερου γείτονα για παραγωγή του πρώτου ατόμου
Εφαρμογή μεθόδου 2-opt για παραγωγή των πρώτων μισών ατόμων
Εφαρμογή random μεθόδου για παραγωγή των υπόλοιπων μισών ατόμων
Αρχικοποίηση του πίνακα γονέων x
Αποθήκευση στον πίνακα P τον πίνακα x και στον πίνακα veltisto kostos τον πίνακα kostos
Do until δεν έχει φτάσει ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων :
    Υπολογισμός του δοκιμαστικού διανύσματος με κάποια από τις τρεις μεθόδους
    Μετατροπή του δοκιμαστικού διανύσματος σε πίνακα γονέων x
    Δημιουργία του πίνακα κόμβων (komvoi) με βάση το νέο πίνακα γονέων x
    Δημιουργία του πίνακα κόστους (kostos) από τον πίνακα κόμβων
    Εφαρμογή μεθόδου 2-opt για βελτίωση της λύσης κάθε ατόμου Αντικατάσταση χειρότερων ατόμων του P με τα καλύτερα άτομα του x
    Υπολογισμός του πίνακα Pareto P, Pareto kostos, του βέλτιστου ατόμου g ολόκληρου του πληθυσμού και του αριθμού των βέλτιστων ατόμων w
End do
Εφαρμογή αλγόριθμου φυσαλίδας για ταξινόμηση του πίνακα Pareto kostos κατά αύξουσα σειρά
Σχεδιασμός διαγραμμάτων Pareto μετώπου
Υπολογισμός απόδοσης για πίνακες Pareto P
Υπολογισμός απόδοσης για πίνακες Pareto kostos

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} Αποτελέσματα

3.1 Γενικές πληροφορίες

Από τον συνδυασμό των πινάκων kro προέκυψαν είκοσι συνδυασμοί που αναφέρθηκαν και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Από αυτούς οι δέκα αποτελούν συνδυασμούς ανά δύο και οι υπόλοιποι δέκα ανά τρείς. Κάθε ένας από τους συνδυασμούς αυτούς επιλύθηκε με τρείς διαφορετικές μεθόδους. Σε κάθε λύση υπολογίζουμε τον συνολικό αριθμό των Pareto ατόμων (w), την απόδοση των σημείων του πίνακα Pareto_P (Mp) και την απόδοση των σημείων του πίνακα Pareto_kostos (Mk).

Προκειμένου να μην παραθέσουμε στο σημείο αυτό όλα τα αποτελέσματα, θα αναφέρουμε μόνο τα καλύτερα αποτελέσματα που προέκυψαν από τους συνδυασμούς αυτούς. Όλα συνολικά τα αποτελέσματα θα τοποθετηθούν στο παράρτημα.

3.2 Αποτελέσματα με συνδυασμό δύο πινάκων συντεταγμένων (kro)

Από τον συνδυασμό των πινάκων kro ανά δύο προέκυψαν δέκα συνδυασμοί. Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι επιλύουμε με τρείς διαφορετικές μεθόδους καταλήγουμε σε τριάντα διαφορετικές λύσεις. Παρακάτω θα παραθέσουμε πέντε συνδυασμούς πινάκων kro που μας έδωσαν τις καλύτερες λύσεις, θα αναφέρουμε για κάθε συνδυασμό ποια μέθοδος έδωσε το καλύτερο αποτέλεσμα και στο τέλος θα κατατάξουμε τις μεθόδους λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα που προέκυψαν και από τους δέκα συνδυασμούς.

Τα κριτήρια με βάση τα οποία επιλέξαμε τις καλύτερες λύσεις είναι τα εξής:

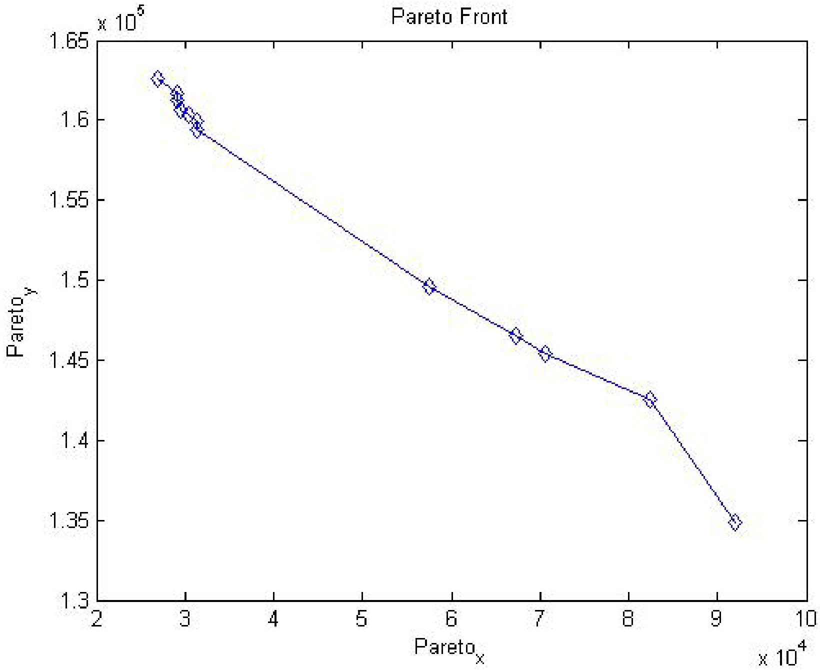
- αριθμός σημείων στο διάγραμμα
- διασπορά των σημείων
- καμπυλότητα (κυρτότητα) της καμπύλης
- αποδώσεις Mp και Mk

Οι καλύτεροι συνδυασμοί παρουσιάζονται παρακάτω:

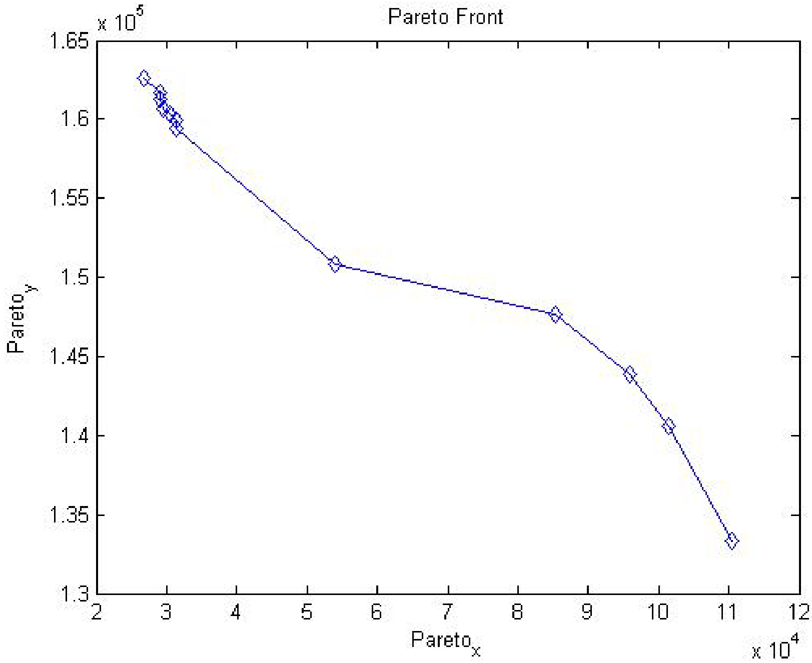
kroA100-kroB100

	A-B		
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	12	12	12
Mp	9,2187	9,5246	9,0757
Mk	504,6794	522,4990	537,4683

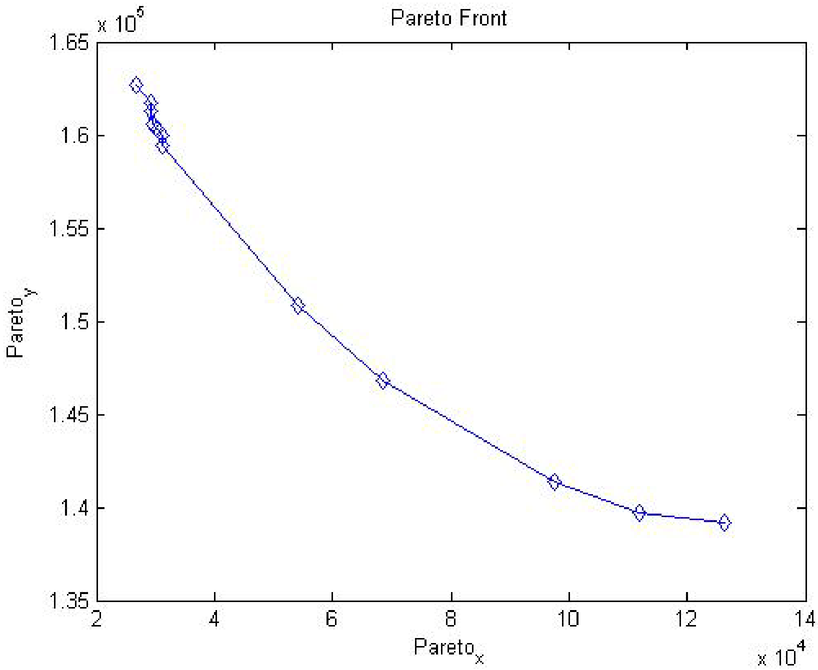
Πίνακας 25. Δεδομένα από συνδυασμό kroA100-kroB100



Διάγραμμα 9. kroA100-kroB100 μέθοδος 1



Διάγραμμα 10. kroA100-kroB100 μέθοδος 2



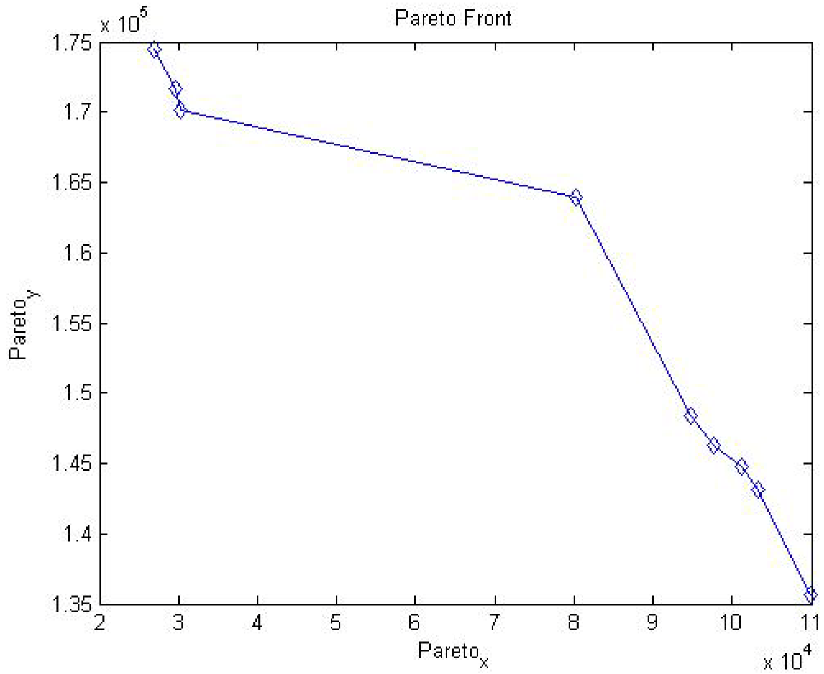
Διάγραμμα 11. kroA100-kroB100 μέθοδος 3

Το καλύτερο αποτέλεσμα με βάση τα κριτήρια που επιλέγουμε φαίνεται να δίνεται από την μέθοδο 3.

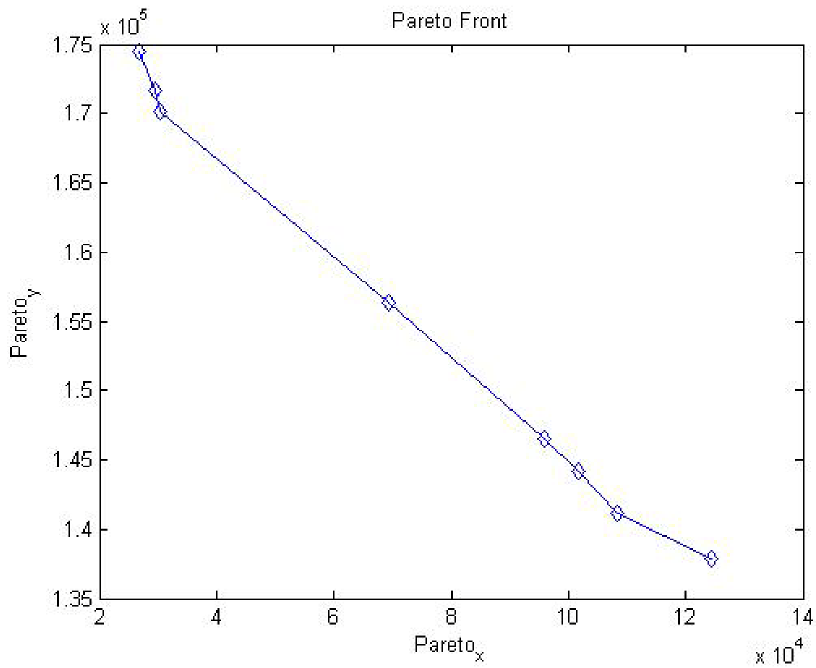
kroA100-kroC100

	A-C		
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	9	8	10
Mp	9,5079	9,7250	9,9737
Mk	533,3587	546,7063	527,5361

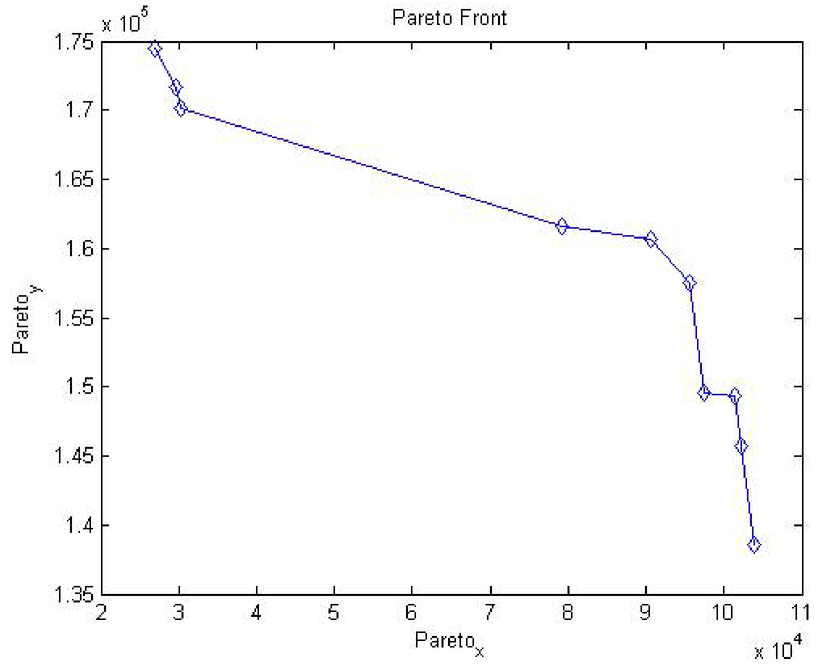
Πίνακας 26. Δεδομένα από συνδυασμό kroA100-kroC100



Διάγραμμα 12. kroA100-kroC100 μέθοδος 1



Διάγραμμα 13. kroA100-kroC100 μέθοδος 2



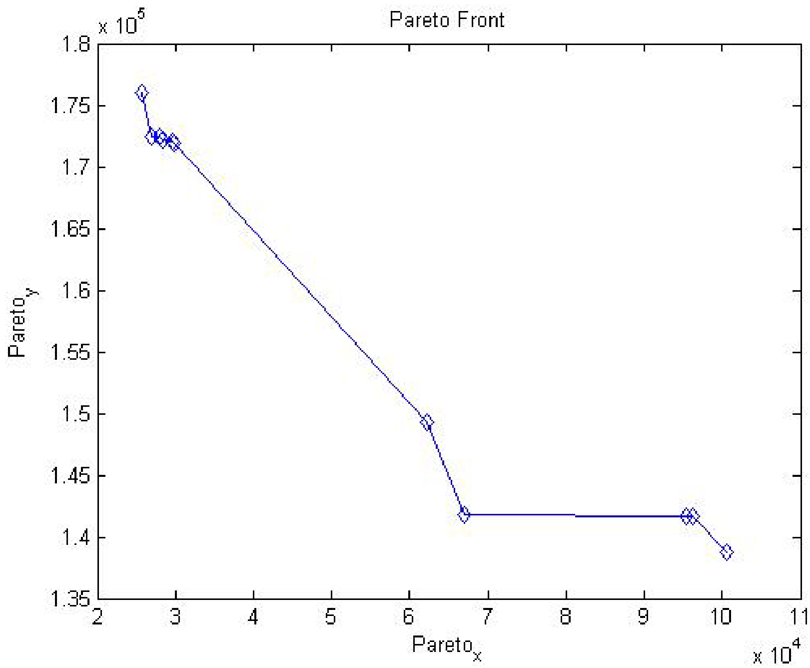
Διάγραμμα 14. kroA100-kroC100 μέθοδος 3

Το καλύτερο αποτέλεσμα με βάση τα κριτήρια που επιλέγουμε φαίνεται να δίνεται από την μέθοδο 2.

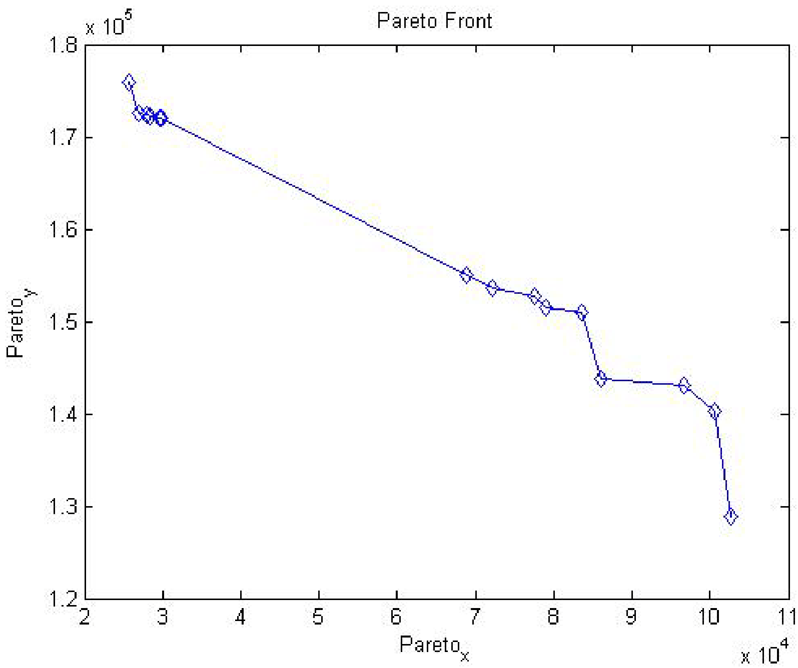
kroB100-kroC100

B-C			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	11	15	13
Mp	9,6361	10,1796	9,3175
Mk	525,9098	527,7665	533,7296

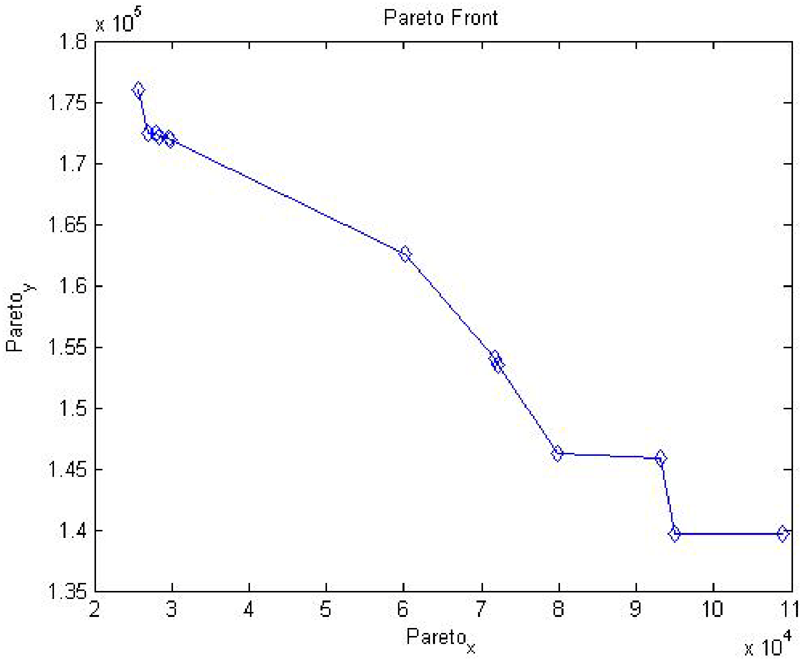
Πίνακας 27. Δεδομένα από συνδυασμό kroB100-kroC100



Διάγραμμα 15. kroB100-kroC100 μέθοδος 1



Διάγραμμα 16. kroB100-kroC100 μέθοδος 2



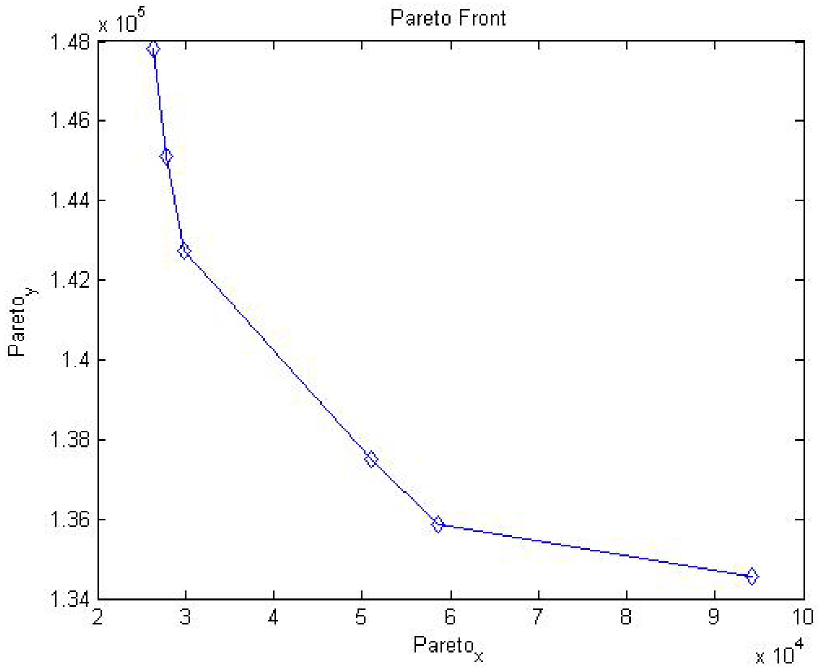
Διάγραμμα 17. kroB100-kroC100 μέθοδος 3

Το καλύτερο αποτέλεσμα με βάση τα κριτήρια που επιλέγουμε φαίνεται να δίνεται από την μέθοδο 2.

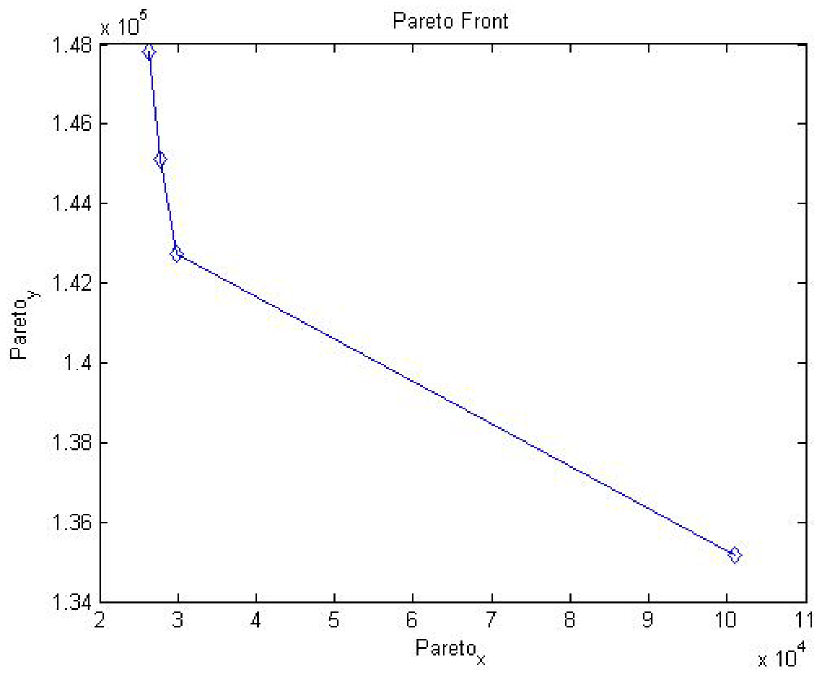
kroC100-kroD100

C-D			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	6	4	4
Mp	8,9031	8,0685	8,0685
Mk	492,0194	498,7175	498,7175

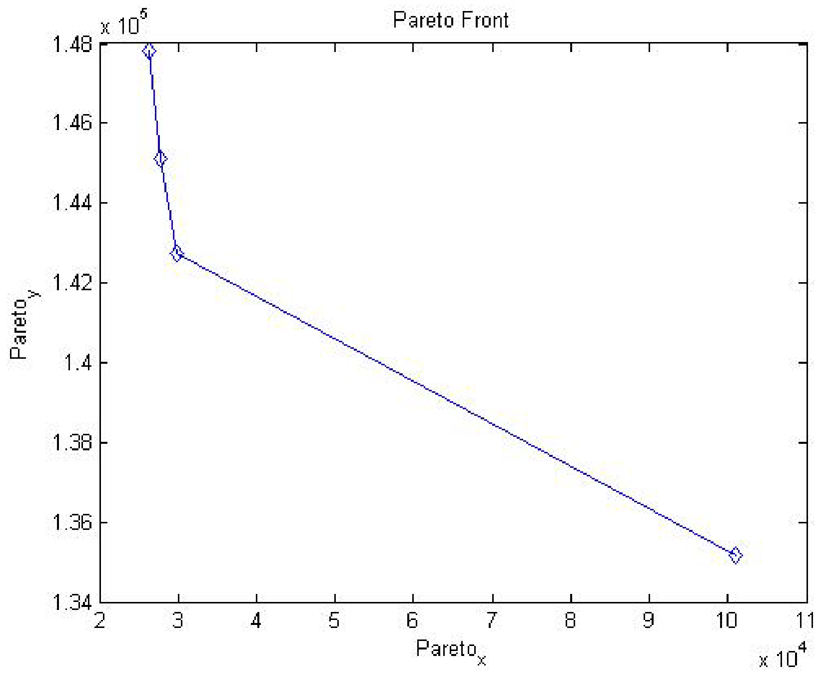
Πίνακας 28. Δεδομένα από συνδυασμό kroC100-kroD100



Διάγραμμα 18. kroC100-kroD100 μέθοδος 1



Διάγραμμα 19. kroC100-kroD100 μέθοδος 2



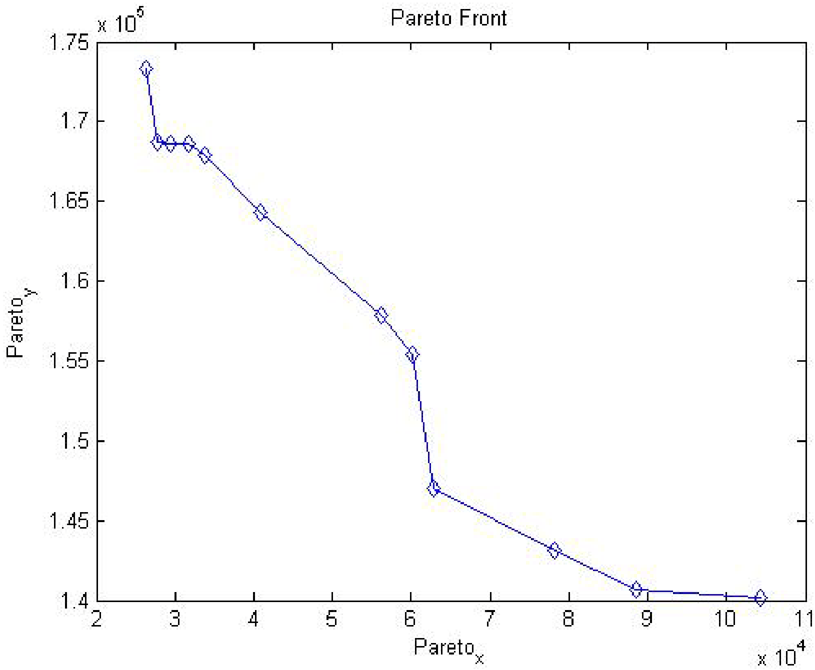
Διάγραμμα 20. kroC100-kroD100 μέθοδος 3

Το καλύτερο αποτέλεσμα με βάση τα κριτήρια που επιλέγουμε φαίνεται να δίνεται από την μέθοδο 1.

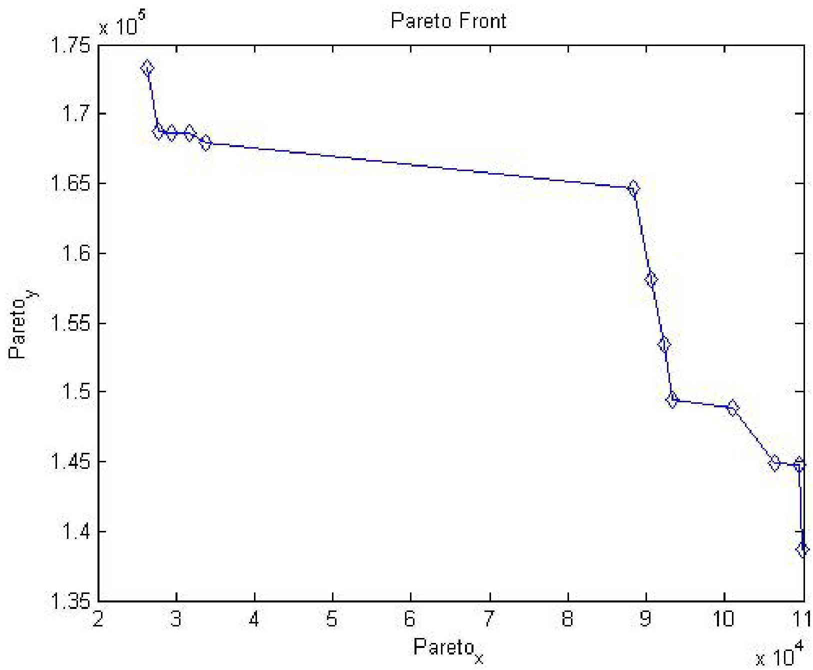
kroC100-kroE100

C-E			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	12	13	11
Mp	9,2987	10,1035	9,7950
Mk	526,9434	532,2780	584,7851

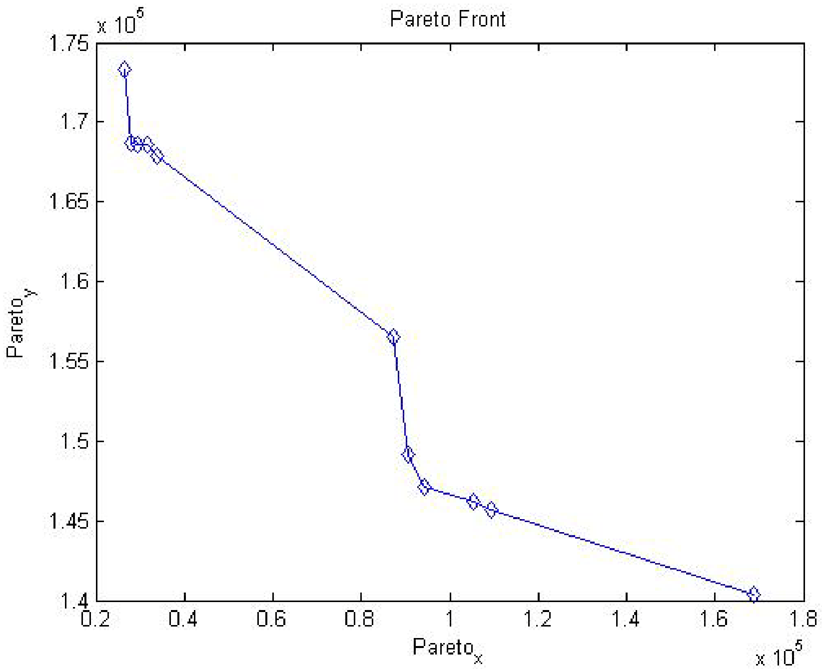
Πίνακας 29. Δεδομένα από συνδυασμό kroC100-kroE100



Διάγραμμα 21. kroC100-kroE100 μέθοδος 1



Διάγραμμα 22. kroC100-kroE100 μέθοδος 2



Διάγραμμα 23. kroC100-kroE100 μέθοδος 3

Το καλύτερο αποτέλεσμα με βάση τα κριτήρια που επιλέγουμε φαίνεται να δίνεται από την μέθοδο 1.

Συνολικά και στους δέκα συνδυασμούς η μέθοδος 1 υπερίσχυσε τρείς φορές, η μέθοδος 2 υπερίσχυσε έξι φορές και τέλος η μέθοδος 3 μόλις μία.

3.3 Αποτελέσματα με συνδυασμό τριών πινάκων συντεταγμένων (kro)

Από τον συνδυασμό των πινάκων kro ανά τρία προέκυψαν δέκα συνδυασμοί. Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι επιλύουμε με τρείς διαφορετικές μεθόδους καταλήγουμε σε τριάντα διαφορετικές λύσεις. Παρακάτω θα παραθέσουμε πέντε συνδυασμούς πινάκων kro που μας έδωσαν τις καλύτερες λύσεις, θα αναφέρουμε για κάθε συνδυασμό ποια μέθοδος έδωσε το καλύτερο αποτέλεσμα και στο τέλος θα κατατάξουμε τις μεθόδους λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα που προέκυψαν και από τους δέκα συνδυασμούς.

Τα κριτήρια με βάση τα οποία επιλέξαμε τις καλύτερες λύσεις είναι τα εξής:

- αριθμός σημείων στο διάγραμμα
- αποδώσεις Mp και Mk

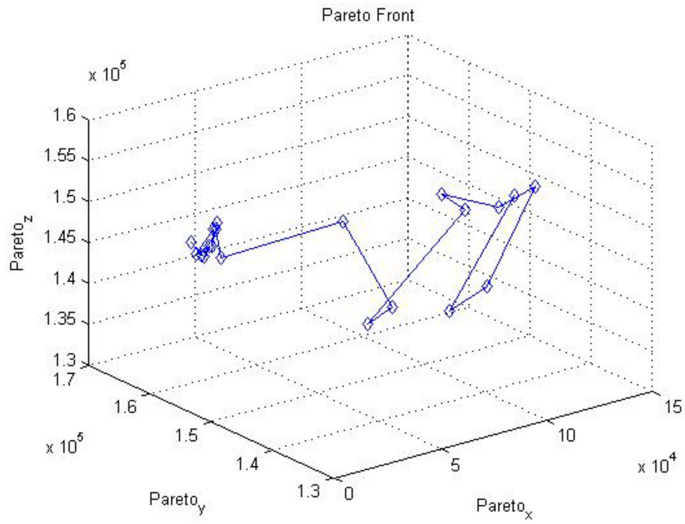
Ο λόγος για τον οποίο δεν χρησιμοποιούμε σαν κριτήρια μας την καμπυλότητα αλλά και την διασπορά των σημείων είναι το ότι τα τρισδιάστατα διαγράμματα είναι αρκετά πολύπλοκα ώστε να καταφέρουμε εύκολα να διακρίνουμε την καμπυλότητα και την διασπορά των σημείων.

Οι καλύτεροι συνδυασμοί παρουσιάζονται παρακάτω:

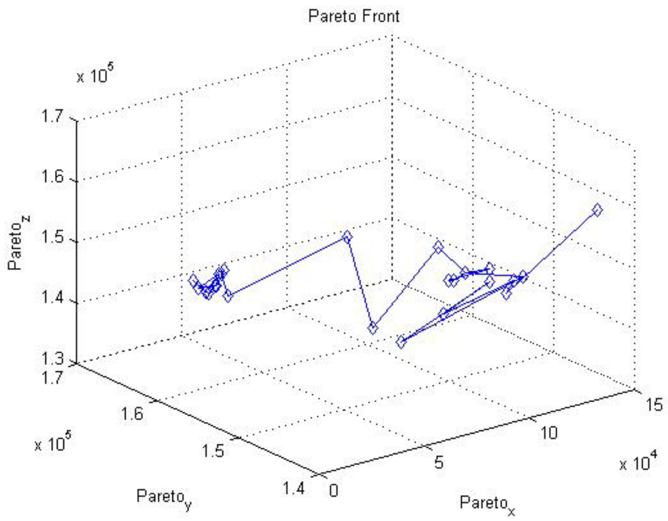
kroA100-kroB100-kroD100

A-B-D			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	20	25	20
Mp	10,1430	11,2363	9,8919
Mk	665,6102	678,2425	663,5827

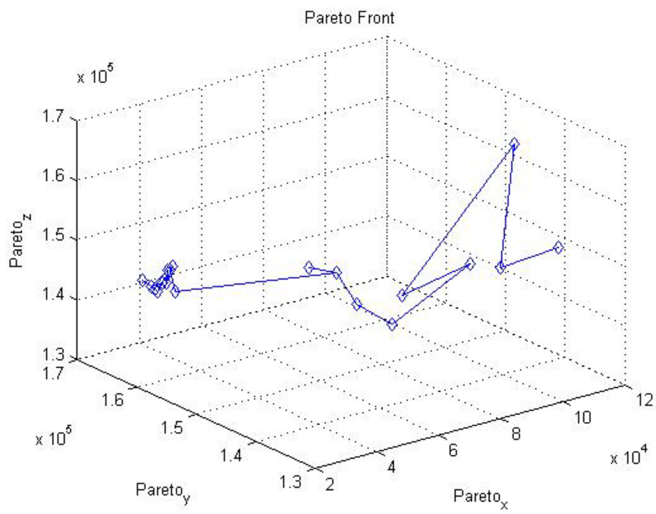
Πίνακας 30. Δεδομένα από συνδυασμό kroA100-kroB100-kroD100



Διάγραμμα 24. kroA100-kroB100-kroD100 μέθοδος 1



Διάγραμμα 25. kroA100-kroB100-kroD100 μέθοδος 2



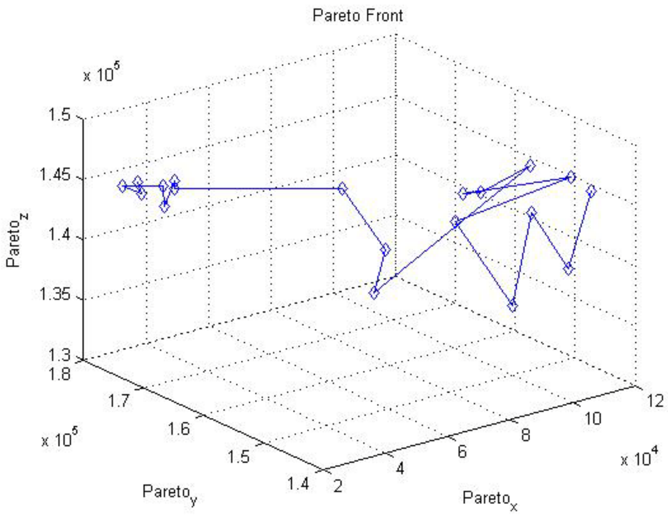
Διάγραμμα 26. kroA100-kroB100-kroD100 μέθοδος 3

Το καλύτερο αποτέλεσμα με βάση τα κριτήρια που επιλέγουμε φαίνεται να δίνεται από την μέθοδο 2.

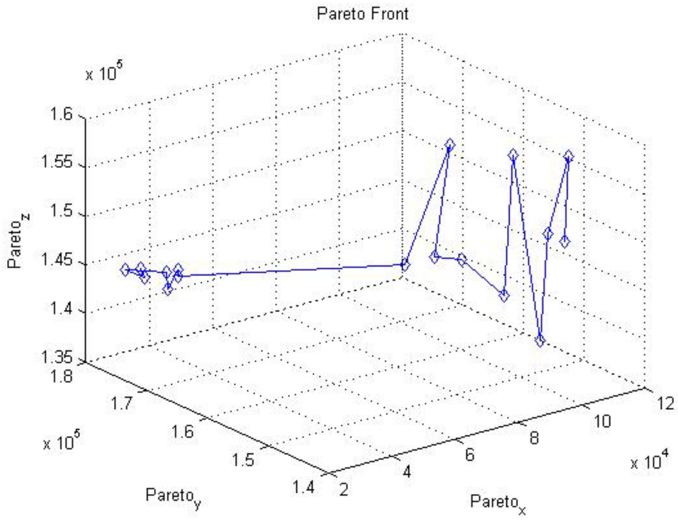
kroA100-kroC100-kroD100

A-C-D			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	19	17	19
Mp	10,1883	10,2983	11,1660
Mk	660,9592	668,8289	679,0750

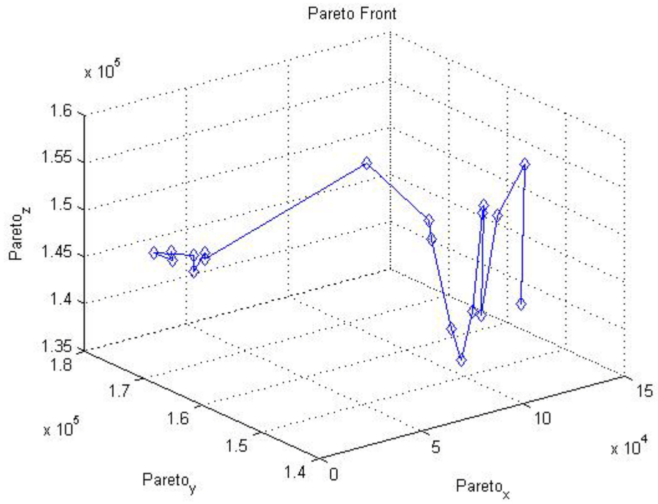
Πίνακας 31. Δεδομένα από συνδυασμό kroA100-kroC100-kroD100



Διάγραμμα 27. kroA100-kroC100-kroD100 μέθοδος 1



Διάγραμμα 28. kroA100-kroC100-kroD100 μέθοδος 2



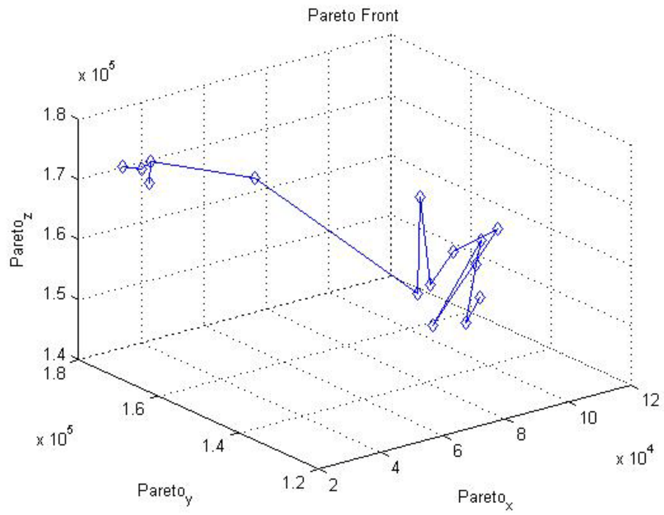
Διάγραμμα 29. kroA100-kroC100-kroD100 μέθοδος 3

Το καλύτερο αποτέλεσμα με βάση τα κριτήρια που επιλέγουμε φαίνεται να δίνεται από την μέθοδο 3.

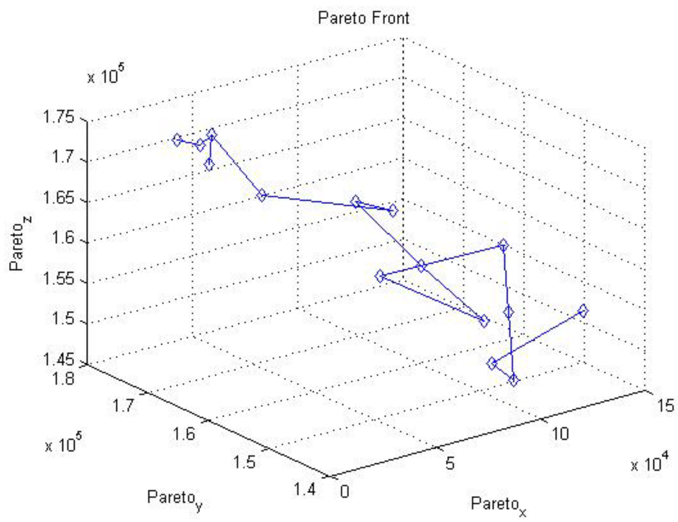
kroA100-kroC100-kroE100

A-C-E			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	16	16	17
Mp	9,9738	10,4423	10,7098
Mk	676,3646	691,6667	692,1955

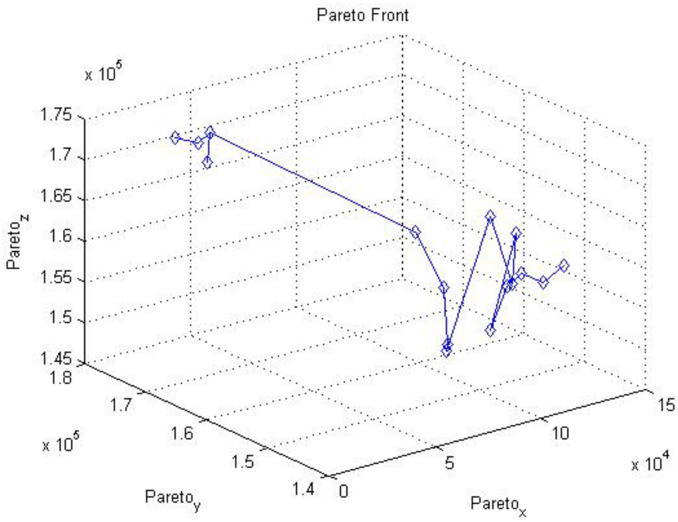
Πίνακας 32. Δεδομένα από συνδυασμό kroA100-kroC100-kroE100



Διάγραμμα 30. kroA100-kroC100-kroE100 μέθοδος 1



Διάγραμμα 31. kroA100-kroC100-kroE100 μέθοδος 2



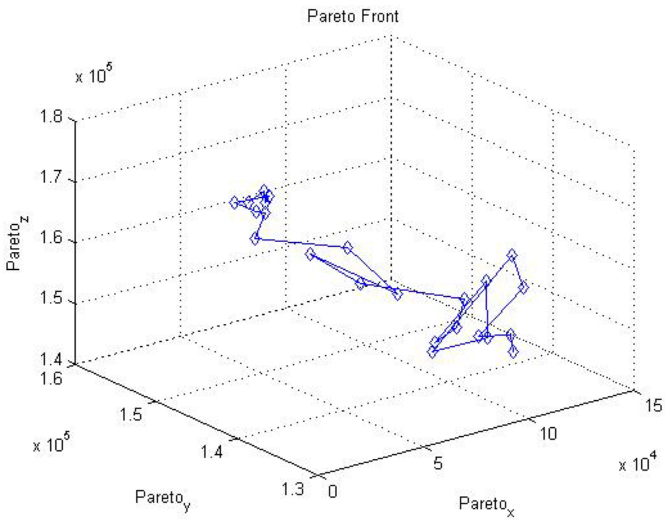
Διάγραμμα 32. kroA100-kroC100-kroE100 μέθοδος 3

Το καλύτερο αποτέλεσμα με βάση τα κριτήρια που επιλέγουμε φαίνεται να δίνεται από την μέθοδο 3.

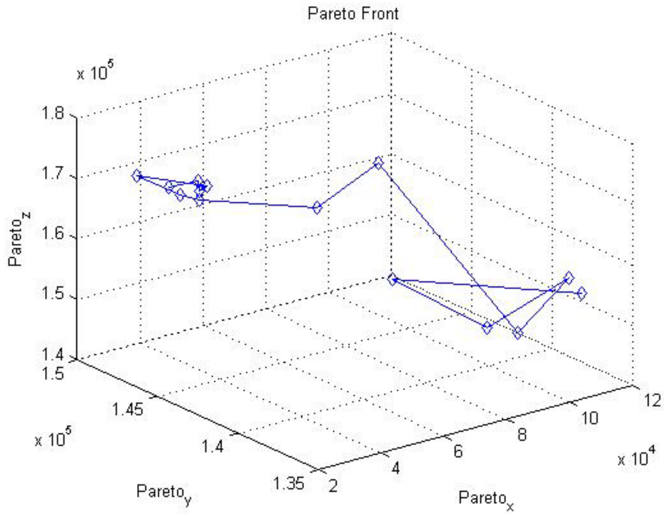
kroA100-kroD100-kroE100

A-D-E			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	24	15	22
Mp	10,8762	10,1705	10,5930
Mk	674,8580	662,6429	683,7669

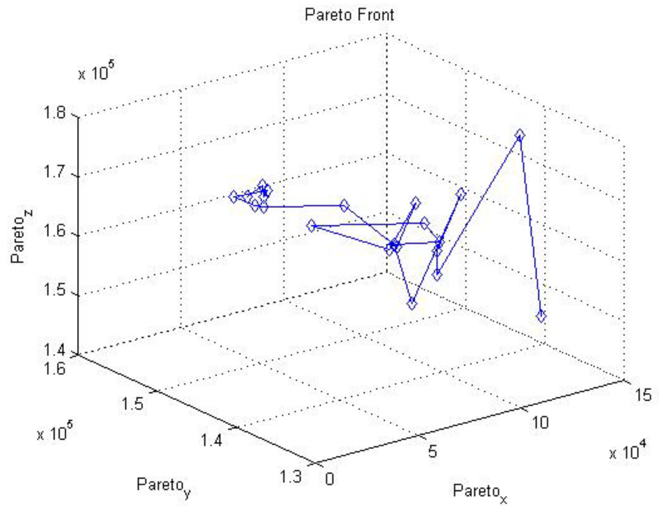
Πίνακας 33. Δεδομένα από συνδυασμό kroA100-kroD100-kroE100



Διάγραμμα 33. kroA100-kroD100-kroE100 μέθοδος 1



Διάγραμμα 34. kroA100-kroD100-kroE100 μέθοδος 2



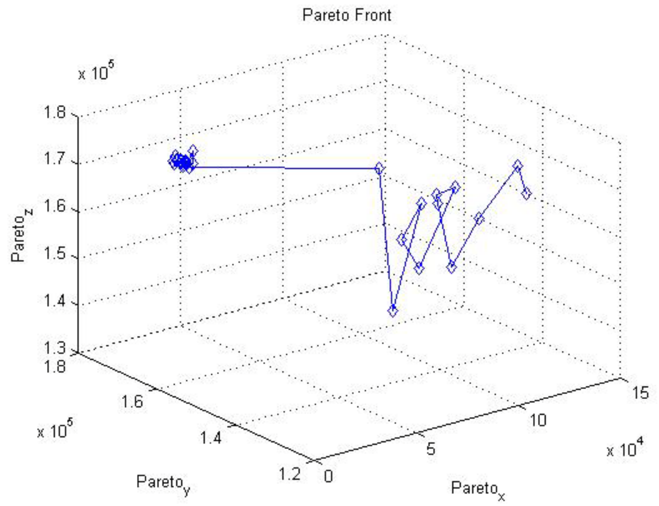
Διάγραμμα 35. kroA100-kroD100-kroE100 μέθοδος 3

Το καλύτερο αποτέλεσμα με βάση τα κριτήρια που επιλέγουμε φαίνεται να δίνεται από την μέθοδο 1.

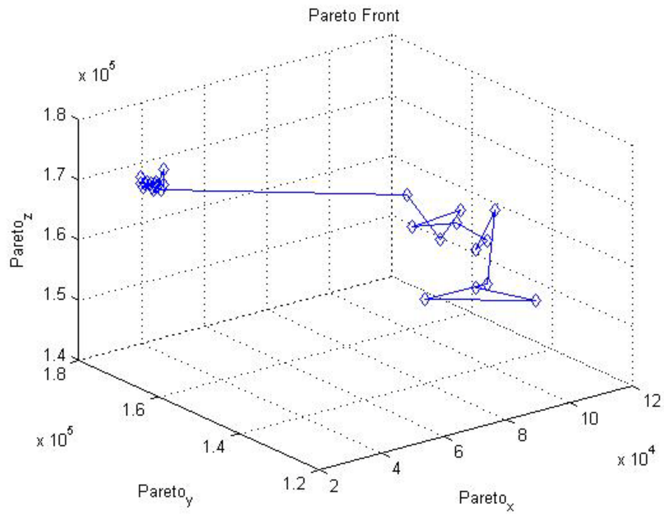
kroB100-kroD100-kroE100

B-D-E			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	29	29	39
Mp	10,1789	10,9355	10,6912
Mk	696,6866	675,8097	717,7709

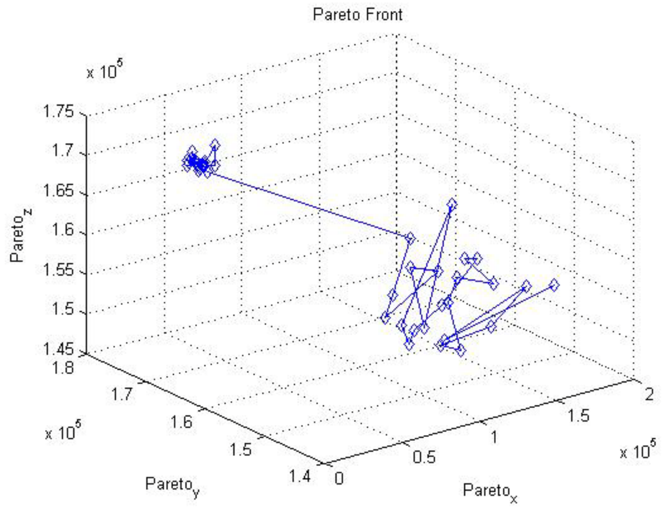
Πίνακας 34. Δεδομένα από συνδυασμό kroB100-kroD100-kroE100



Διάγραμμα 36. kroB100-kroD100-kroE100 μέθοδος 1



Διάγραμμα 37. kroB100-kroD100-kroE100 μέθοδος 2



Διάγραμμα 38. kroB100-kroD100-kroE100 μέθοδος 3

Το καλύτερο αποτέλεσμα με βάση τα κριτήρια που επιλέγουμε φαίνεται να δίνεται από την μέθοδο 3.

Συνολικά και στους δέκα συνδυασμούς η μέθοδος 1 υπερίσχυσε τρείς φορές, η μέθοδος 2 υπερίσχυσε πάλι τρείς φορές και τέλος η μέθοδος 3 τέσσερις φορές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία επιλύσαμε το πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή (Traveling Salesman Problem(TSP)) με πολλαπλές αντικειμενικές συναρτήσεις με την χρήση του αλγορίθμου της Διαφορικής εξέλιξης (Differential Evolution (DE)). Για την επίλυση του αλγορίθμου χρησιμοποιήσαμε τρείς διαφορετικές μεθόδους επίλυσης. Τα δεδομένα μας αποτελούνταν από πέντε πίνακες που περιέχουν συντεταγμένες «πόλεων» σημείων. Από τον συνδυασμό των δεδομένων ανά δύο και ανά τρία προέκυψαν μέσω της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος τα συνολικά κόστη κάθε Pareto βέλτιστου ατόμου (κάθε άτομο αποτελεί μία λύση) κάθε πληθυσμού λύσεων για κάθε μία από τις τρείς διαφορετικές μεθόδους επίλυσης.

Τα αποτελέσματα μας ήταν τα εξής:

I. Για τους συνδυασμούς ανά δύο η μέθοδος 1 υπερίσχυσε τρείς φορές, η μέθοδος 2 υπερίσχυσε έξι φορές και η μέθοδος 3 μόλις μία.

II. Για τους συνδυασμούς ανά τρείς η μέθοδος 1 υπερίσχυσε τρείς φορές, η μέθοδος 2 υπερίσχυσε πάλι τρείς φορές και η μέθοδος 3 τέσσερις φορές.

III. Συνολικά η μέθοδος 2 μας έδωσε τα καλύτερα αποτελέσματα (9 φορές καλύτερη), ακολούθησε η μέθοδος 1 (6 φορές καλύτερη) και τελευταία η μέθοδος 3 (5 φορές καλύτερη).

Βιβλιογραφία

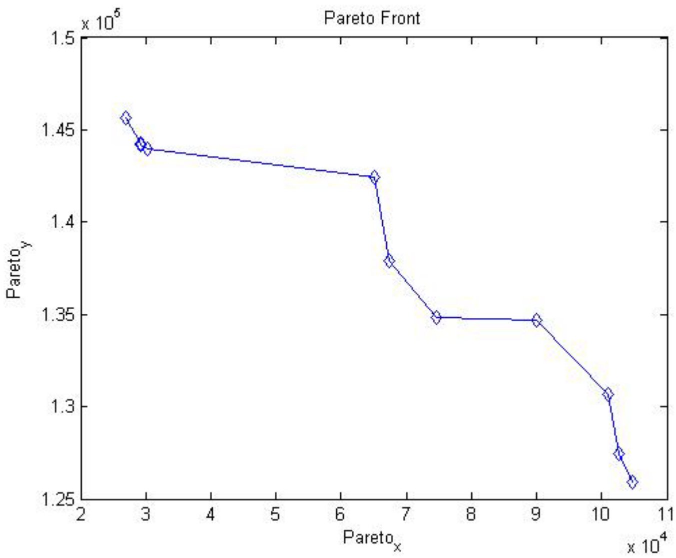
1. Βιβλίο Ιωάννη Μαρινάκη / Αθανάσιος Μυγδαλάς «ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ», Εκδόσεις σοφία, Θεσσαλονίκη 2008
2. Σημειώσεις Αθανάσιος Μυγδαλάς «Θεωρία Παιγνίων και Προγραμματισμός Ισορροπίας»
3. Επιστημονικό άρθρο «Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results» των Eckart Zitzler, Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele, Journal Evolutionary Computation, Ιούνιο 2000
4. Επιστημονικό άρθρο Andrez Jaskiewicz, Piotr Zielniewicz « Pareto memetic algorithm with path relinking for bi-objective traveling salesperson problem», των Andrzej Jaszkiewicz, Piotrielniewicz, European Journal Of Operational Research, 15 Οκτωβρίου 2007
5. Διπλωματική Εργασία Παναγιώτης Ανδρεάδης «Βελτιστοποίηση παραμέτρων έγχυσης σε δίχρονους ναυτικούς κινητήρες Diesel» 2008
6. Πτυχιακή Εργασία Αστέριου Κακλαμάνου «Δημιουργία Επενδυτικού Μοντέλου με χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων» 2002

Παράρτημα

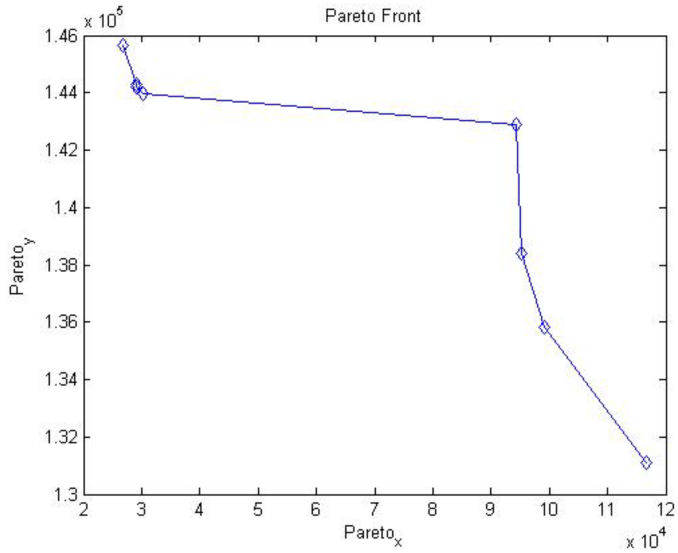
<u>kroA100-kroD100</u>

A-D			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	11	8	7
Mp	9,3303	9,2501	9,4798
Mk	500,3837	512,0951	497,9409

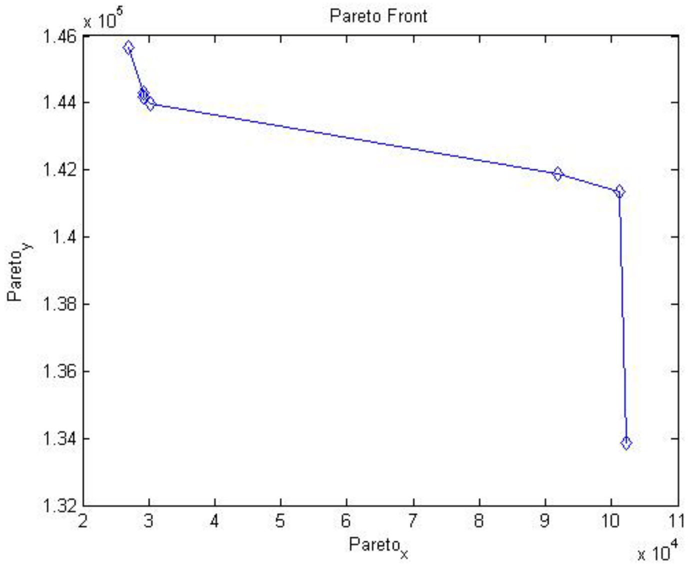
Δεδομένα από συνδυασμό kroA100-kroD100



kroA100-kroD100 μέθοδος 1



kroA100-kroD100 μέθοδος 2

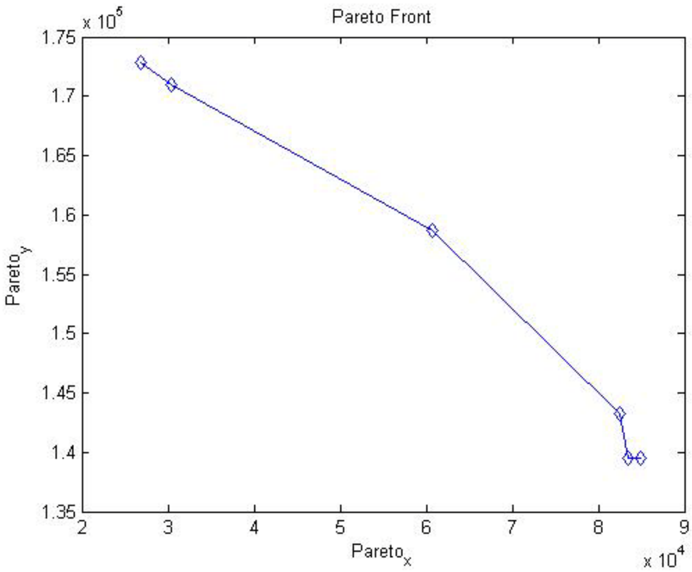


kroA100-kroD100 μέθοδος 3

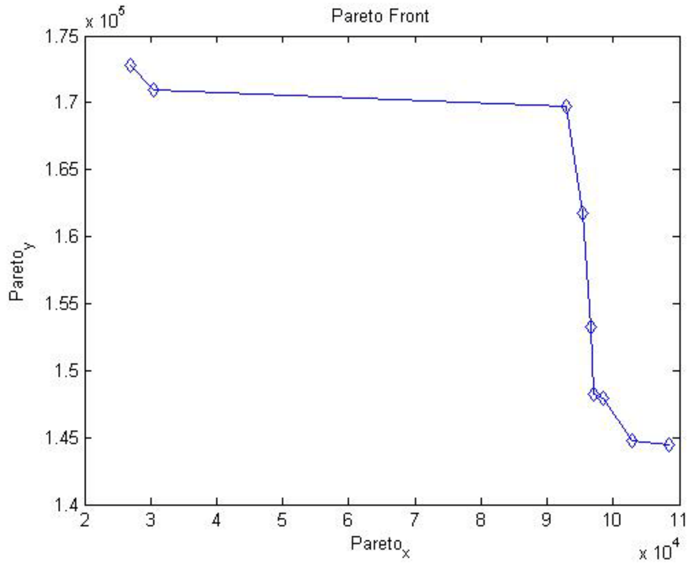
kroA100-kroE100

A-E			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	6	9	4
Mp	8,6571	10,2546	9,1479
Mk	507,6302	530,4062	533,5542

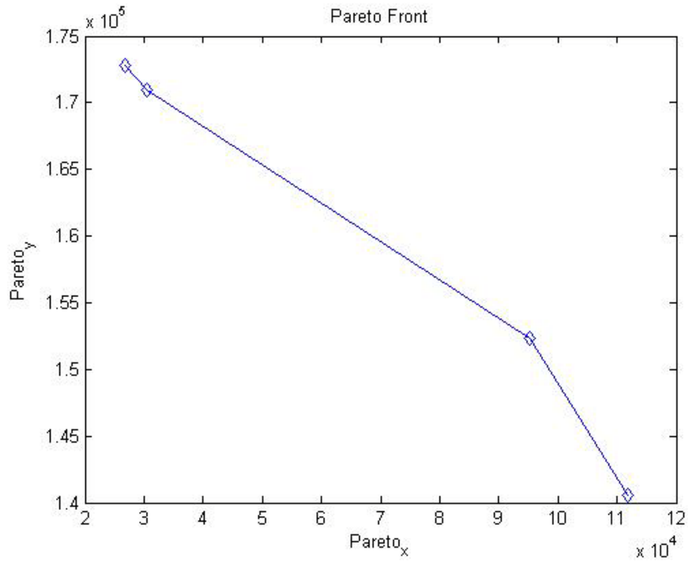
Δεδομένα από συνδυασμό kroA100-kroE100



kroA100-kroE100 μέθοδος 1



kroA100-kroE100 μέθοδος 2

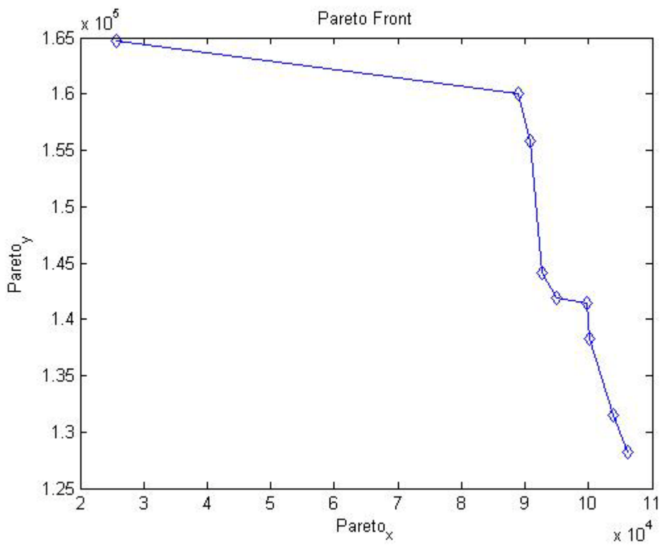


kroA100-kroE100 μέθοδος 3

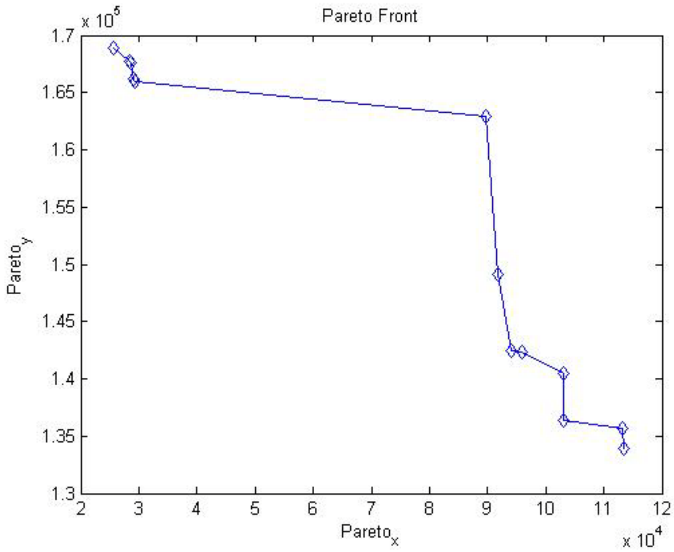
<u>kroB100-kroD100</u>

B-D			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	9	13	8
Mp	10,2904	10,5204	9,3184
Mk	520,3544	531,4229	524,2813

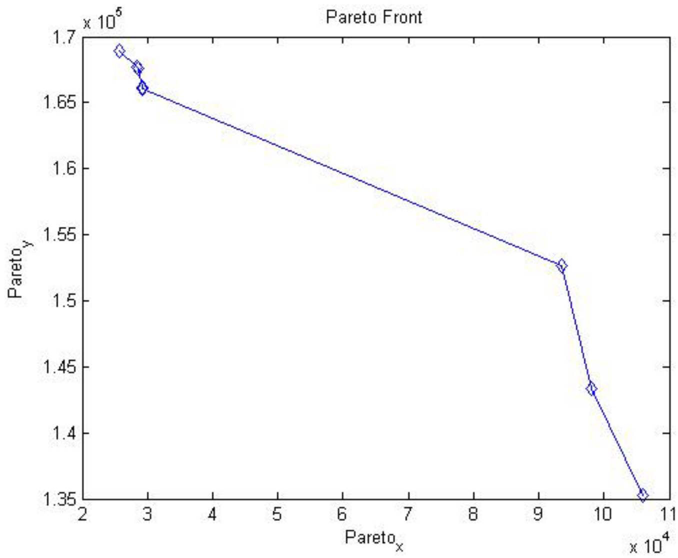
Δεδομένα από συνδυασμό kroB100-kroD100



kroB100-kroD100 μέθοδος 1



kroB100-kroD100 μέθοδος 2

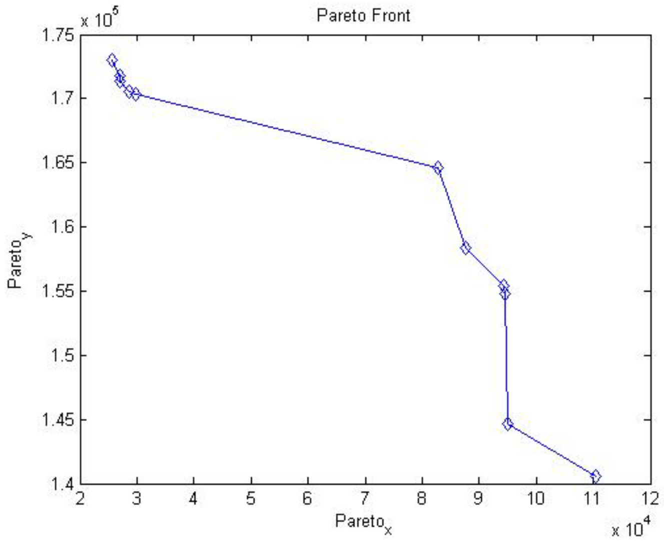


kroB100-kroD100 μέθοδος 3

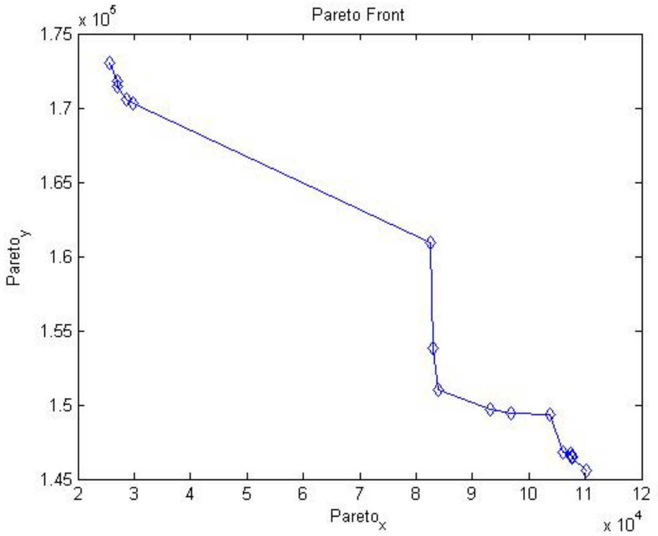
<u>kroB100-kroE100</u>

B-E			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	11	16	12
Mp	9,5883	10,2027	9,5462
Mk	532,2940	532,1192	521,7734

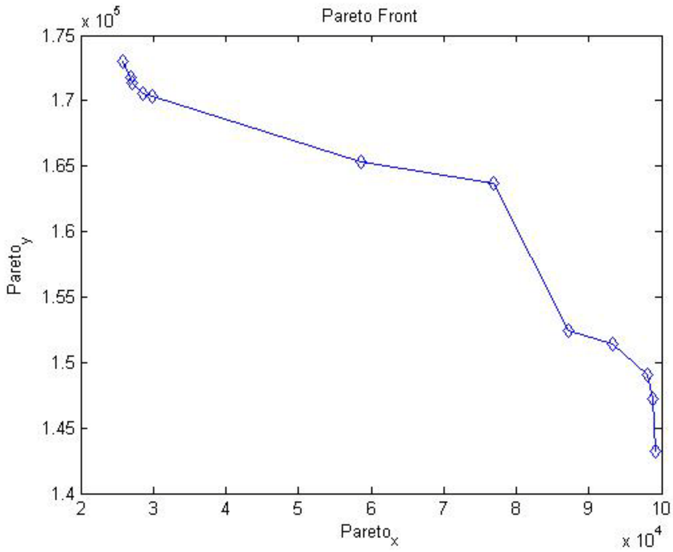
Δεδομένα από συνδυασμό kroB100-kroE100



kroB100-kroE100 μέθοδος 1



kroB100-kroE100 μέθοδος 2

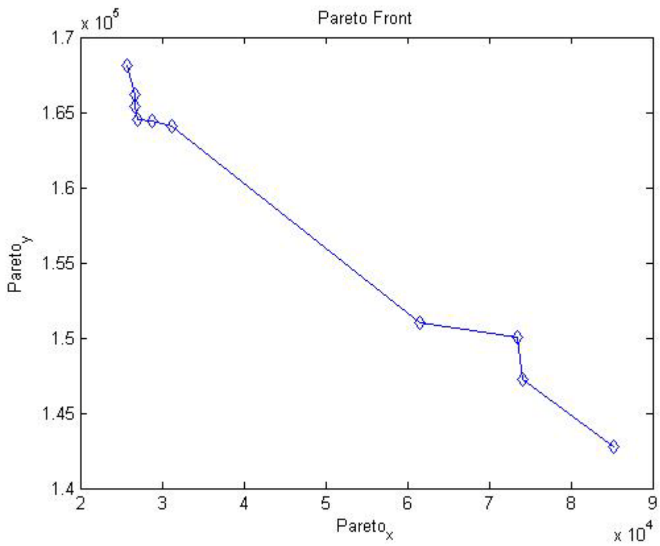


kroB100-kroE100 μέθοδος 3

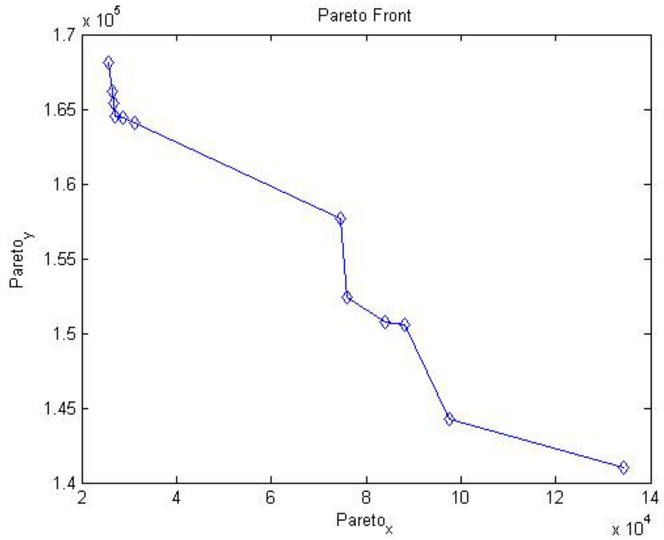
<u>kroD100-kroE100</u>

D-E			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	10	12	10
Mp	8,9213	9,6530	8,8752
Mk	503,2326	549,9937	534,5528

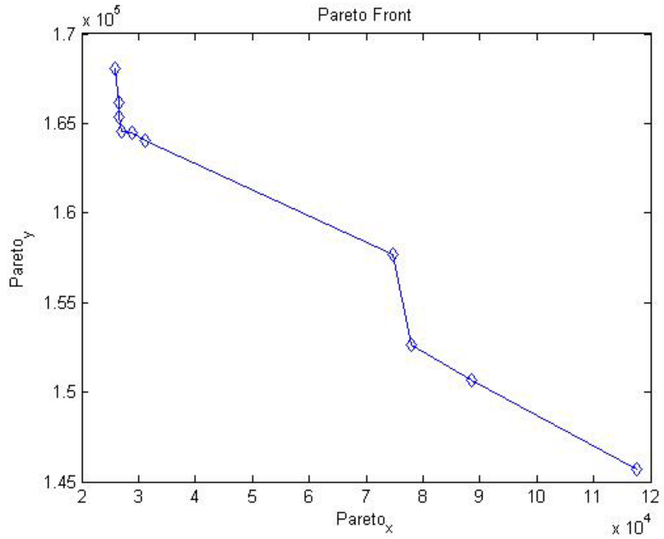
Δεδομένα από συνδυασμό kroD100-kroE100



kroD100-kroE100 μέθοδος 1



kroD100-kroE100 μέθοδος 2

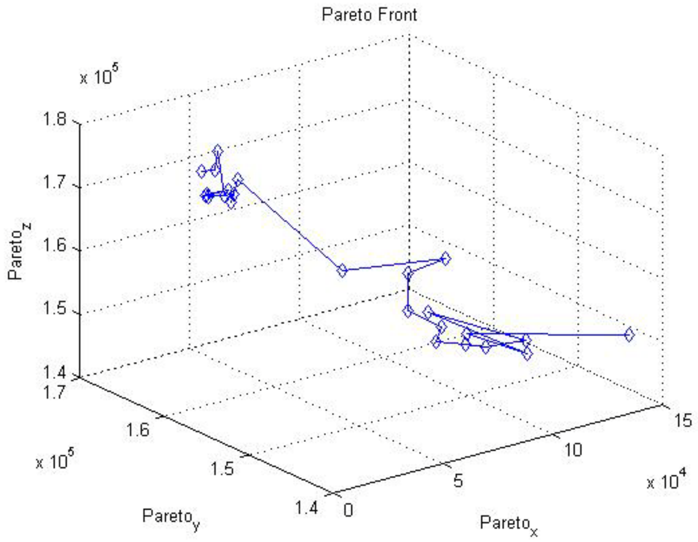


kroD100-kroE100 μέθοδος 3

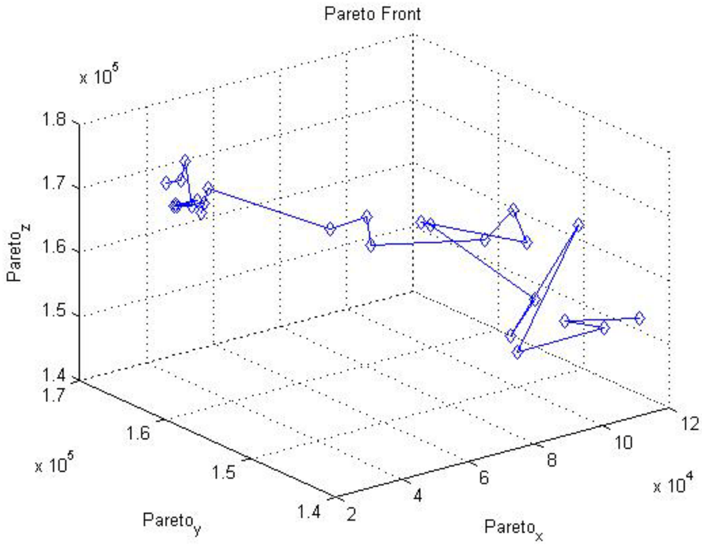
kroA100-kroB100-kroC100

A-B-C			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	24	26	20
Mp	10,0237	10,4805	10,2485
Mk	693,3658	675,3858	708,9838

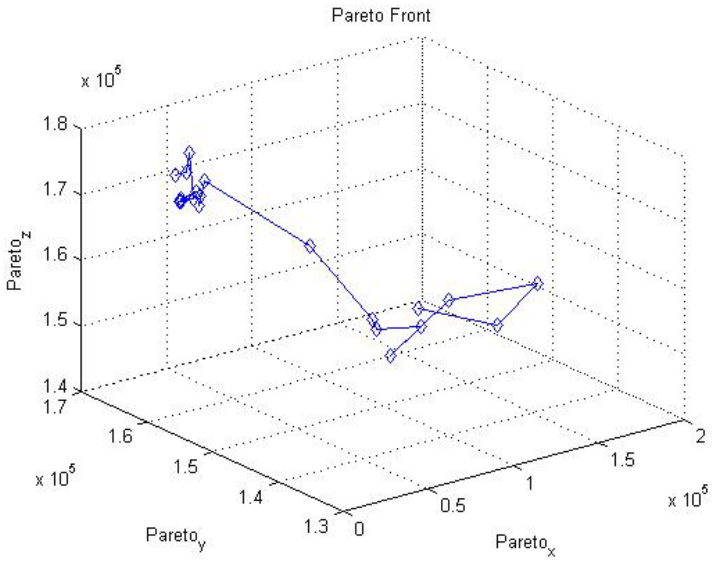
Δεδομένα από συνδυασμό kroA100-kroB100-kroC100



kroA100-kroB100-kroC100 μέθοδος 1



kroA100-kroB100-kroC100 μέθοδος 2

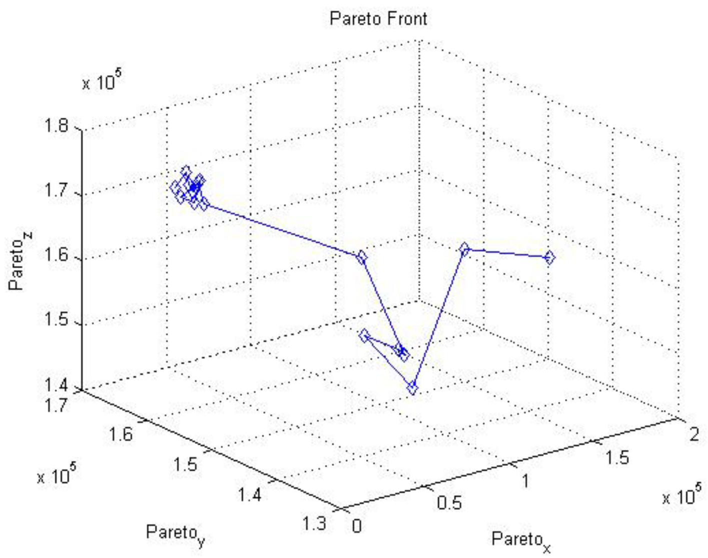


kroA100-kroB100-kroC100 μέθοδος 3

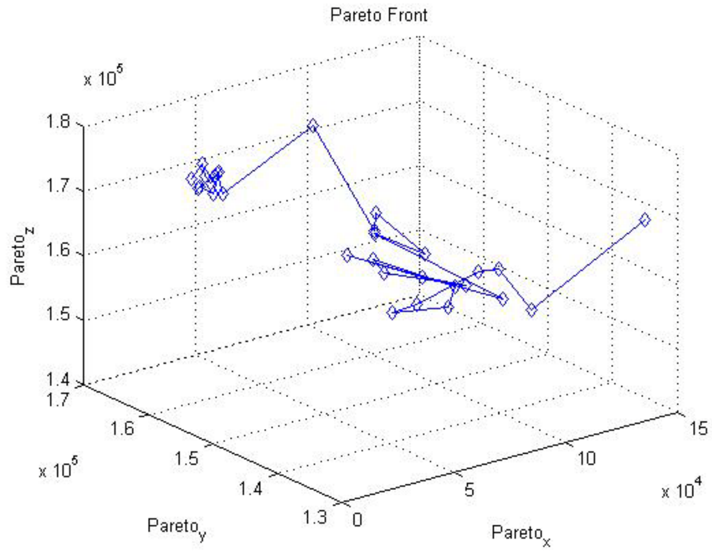
<u>kroA100-kroB100-kroE100</u>

A-B-E			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	18	30	21
Mp	9.6245	10.8483	10.1587
Mk	704.0256	699.5361	721.2569

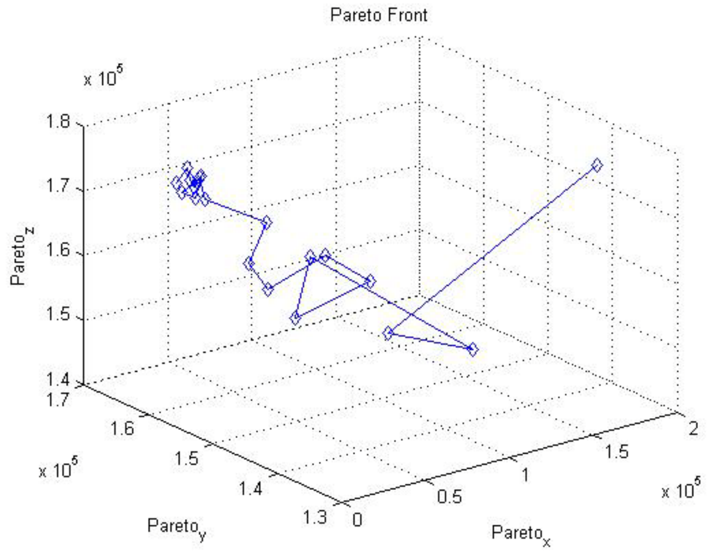
Δεδομένα από συνδυασμό kroA100-kroB100-kroE100



kroA100-kroB100-kroE100 μέθοδος 1



kroA100-kroB100-kroE100 μέθοδος 2

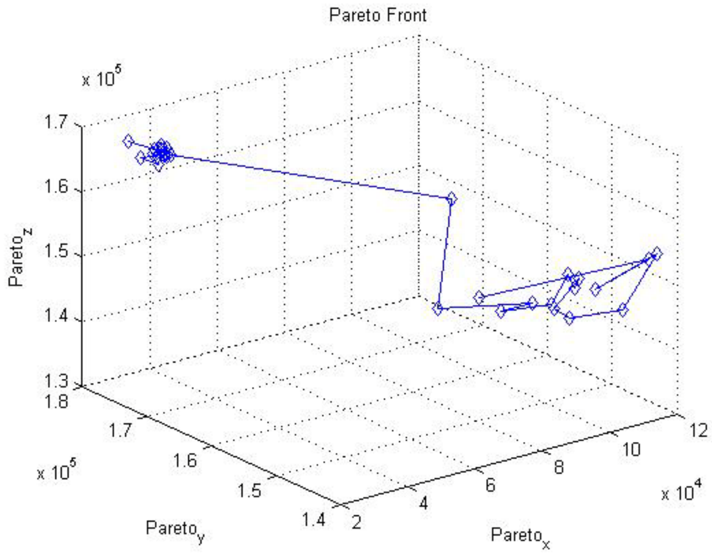


kroA100-kroB100-kroE100 μέθοδος 3

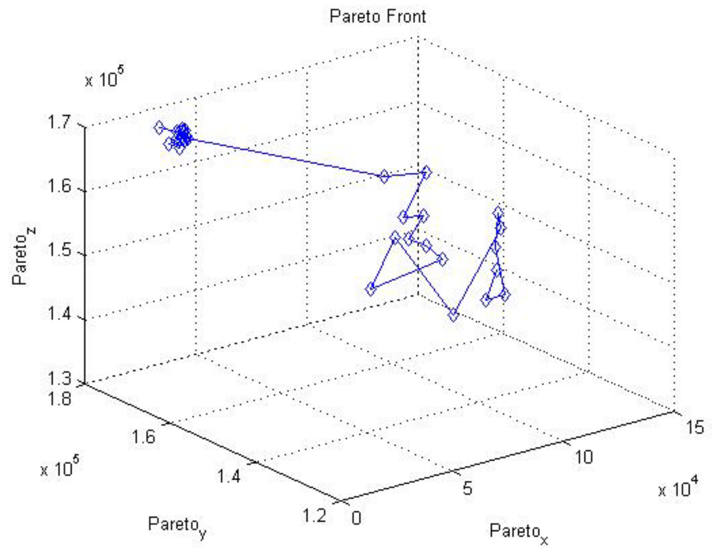
<u>kroB100-kroC100-kroD100</u>

B-C-D			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	29	30	26
Mp	10,4958	10,2893	10,3354
Mk	682,0624	702,9679	706,6220

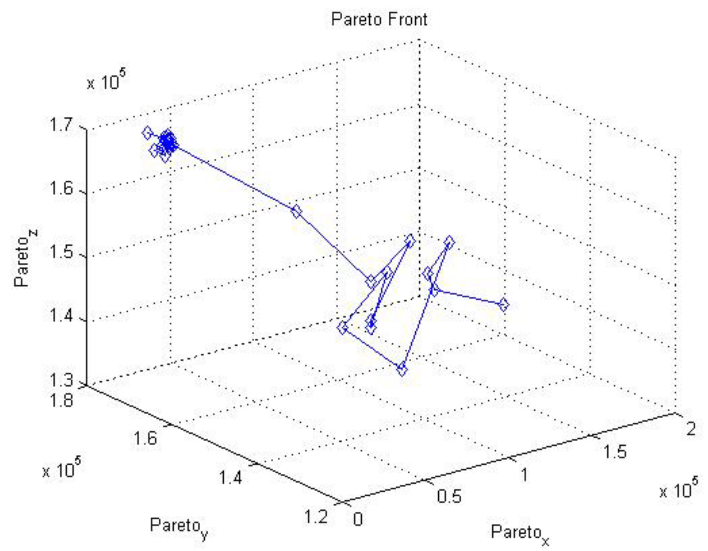
Δεδομένα από συνδυασμό kroB100-kroC100-kroD100



kroB100-kroC100-kroD100 μέθοδος 1



kroB100-kroC100-kroD100 μέθοδος 2

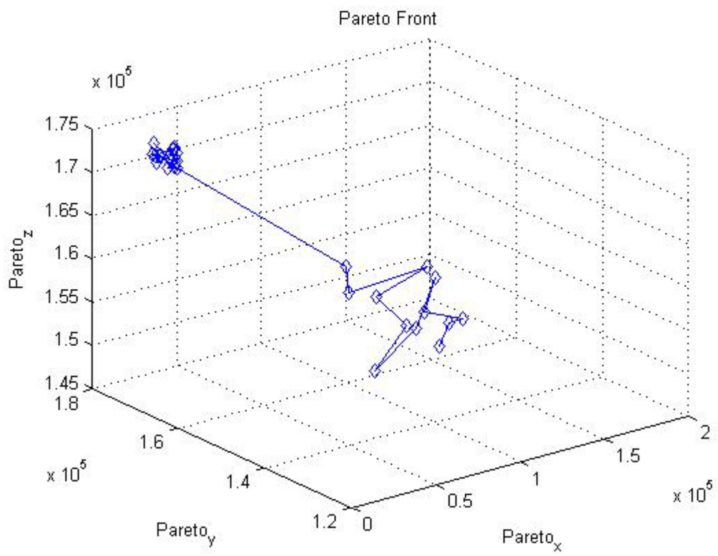


kroB100-kroC100-kroD100 μέθοδος 3

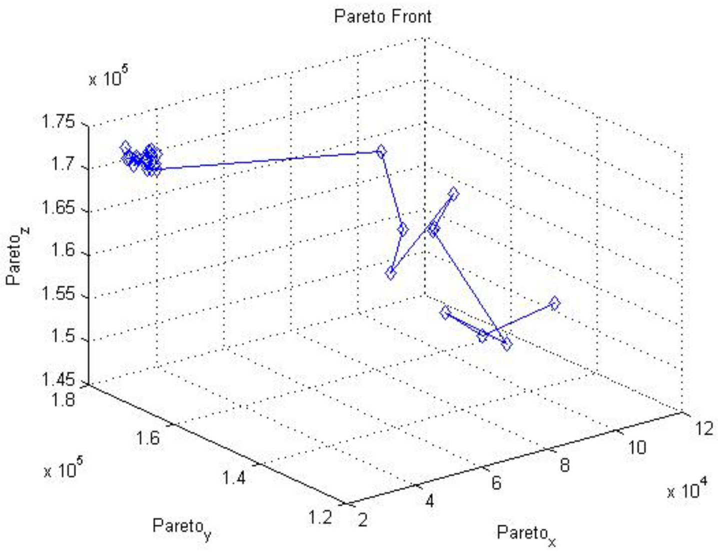
<u>kroB100-kroC100-kroE100</u>

B-C-E			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	29	27	25
Mp	10,4610	9,7680	9,7889
Mk	711,2059	676,3547	684,1359

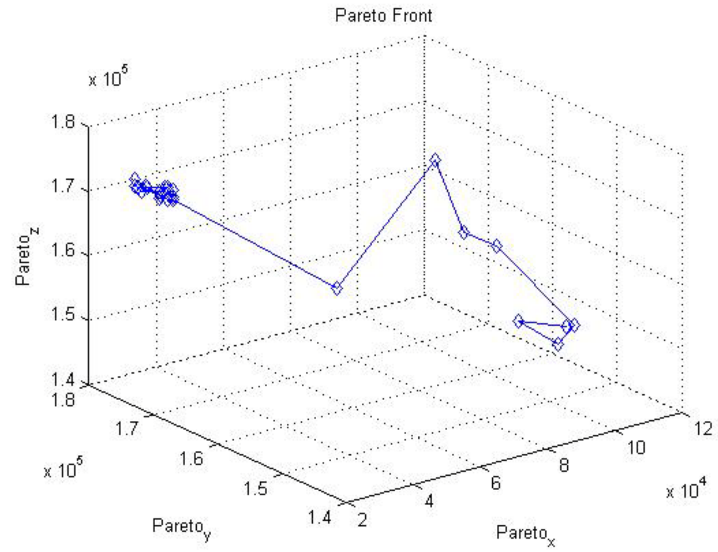
Δεδομένα από συνδυασμό kroB100-kroC100-kroE100



kroB100-kroC100-kroE100 μέθοδος 1



kroB100-kroC100-kroE100 μέθοδος 2

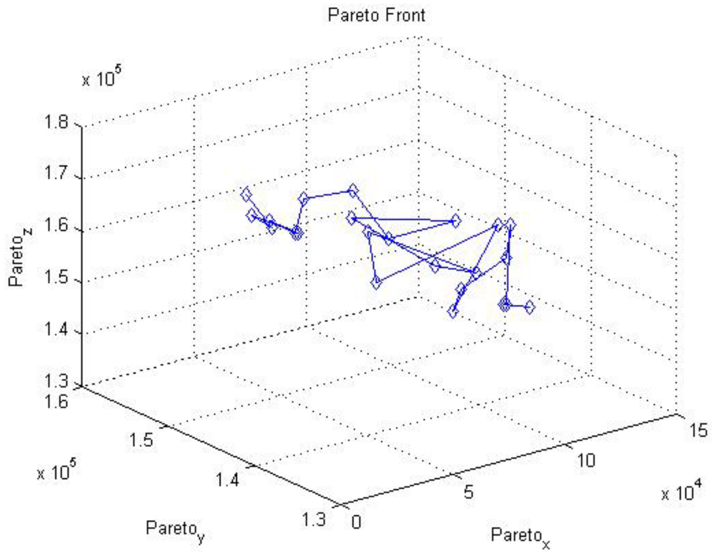


kroB100-kroC100-kroE100 μέθοδος 3

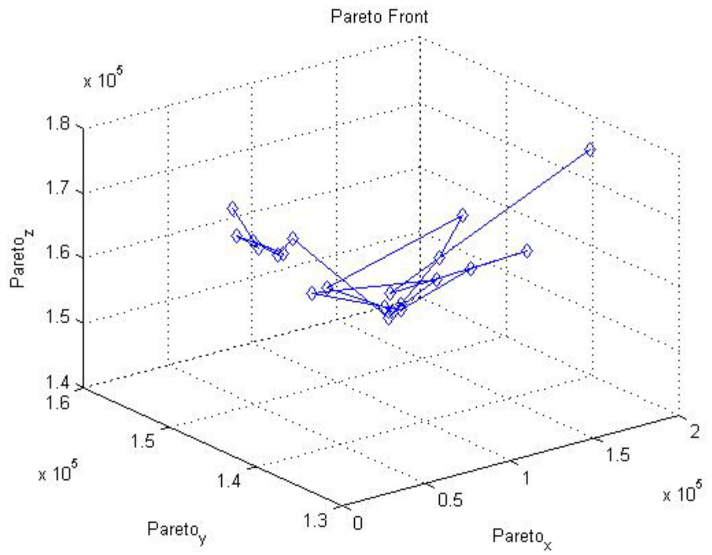
<u>kroC100-kroD100-kroE100</u>

C-D-E			
	Μέθοδος 1	**Μέθοδος 2**	**Μέθοδος 3**
W	23	21	18
Mp	11,1290	10,7289	10,3742
Mk	686,3603	718,2180	703,7990

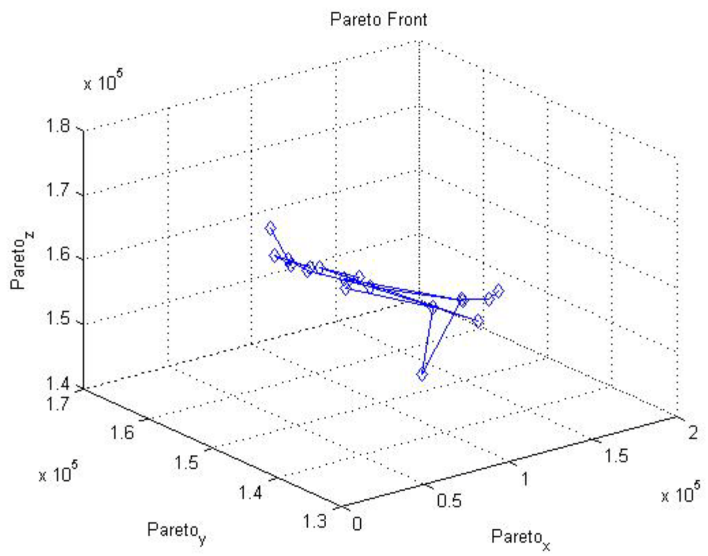
Δεδομένα από συνδυασμό kroC100-kroD100-kroE100



kroC100-kroD100-kroE100 μέθοδος 1



kroC100-kroD100-kroE100 μέθοδος 2



kroC100-kroD100-kroE100 μέθοδος 3