

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΤΙΜΩΝ ΜΑΖΟΥΤ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ
ΝΕΥΡΟ-ΑΣΑΦΟΥΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ (ANFIS)

Μάιπα Καρολίνα

Επιβλέπων καθηγητής: Ατσαλάκης Γιώργος



ΧΑΝΙΑ, ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2011

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με βοήθησαν και μου συμπαραστάθηκαν στην προσπάθειά μου να ολοκληρώσω την παρούσα ερευνητική εργασία.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ατσαλάκη Γεώργιο, διδάκτορα του Πολυτεχνείου Κρήτης, για την καθοδήγησή του και τη βοήθειά του στην ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής αλλά και για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στον κ. Ζοπουνίδη Κώστα για την πολύτιμη στήριξή του όλα αυτά τα χρόνια.

Ακόμα, δεν θα μπορούσα παρά να πω ότι το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στην οικογένειά μου, που στάθηκε ο βράχος μου μέχρι και σήμερα και που χωρίς την υπομονή τους, την αγάπη τους και τη στήριξή τους η διαδρομή αυτή δεν θα ήτανε η ίδια.

Τέλος, ένα ακόμα ευχαριστώ σε όλους τους φίλους που γνώρισα στα Χανιά και όπου μαζί περάσαμε τις πιο όμορφες και συναρπαστικές «φοιτητικές» στιγμές.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	- 4 -
2. ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΚΑΙ ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ	- 6 -
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	- 6 -
2.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ	- 7 -
2.3 ΕΝΝΟΙΑ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ	- 9 -
2.4 ΧΡΗΣΕΙΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ	- 17 -
2.5 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΧΡΗΣΗΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ	- 18 -
2.6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ (membership function) (μ_A)	- 19 -
2.7 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ	- 26 -
2.8 ΛΟΓΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ	- 31 -
2.9 ΑΣΑΦΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ	- 35 -
2.10 ΑΣΑΦΗΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ	- 37 -
2.11 ΚΑΝΟΝΕΣ ΑΝ-ΤΟΤΕ (if-then rules)	- 39 -
2.12 ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ (Fuzzy Inference Systems)	- 42 -
2.12.1 FIS ΤΥΠΟΥ MAMDANI	- 43 -
2.12.2 FIS ΤΥΠΟΥ SUGENO	- 53 -
3. ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ	- 57 -
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	- 57 -
3.2 ΝΕΥΡΩΝΙΚΗ ΔΟΜΗ	- 58 -
3.3 ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ ΠΟΛΥΣΤΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ	- 62 -
3.4 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΑΘΗΣΗΣ	- 63 -
3.5 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΝΔ	- 66 -
3.6 ΝΕΥΡΟ-ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	- 67 -
3.6.1 ΑΣΑΦΕΙΣ ΝΕΥΡΩΝΕΣ	- 67 -
3.6.2 ΝΕΥΡΩΝΕΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ	- 68 -
3.6.3 ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΙ ΝΕΥΡΩΝΕΣ	- 68 -
3.6.4 ΣΥΝΘΕΤΙΚΟΙ ΝΕΥΡΩΝΕΣ	- 69 -
3.7 ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ (Adaptive Networks)	- 69 -
3.8 ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ	- 70 -
3.9 ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΣΕ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ	- 72 -
3.10 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ	- 74 -

3.10.1 ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΜΕ ΕΝΑΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΟΜΒΟ (LINEAR NODE)	- 74 -
3.10.2 ΔΙΚΤΥΟ PERCEPTRON	- 75 -
3.10.3 ΠΟΛΥΕΠΙΠΕΔΟ PERCEPTRON (MLP)	- 76 -
4.ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟ ΝΕΥΡΟ-ΑΣΑΦΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ	- 77 -
4.1 ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΤΟΥ ANFIS	- 77 -
4.2 ΕΚΤΙΜΗΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ (Least-Squares Estimator)	- 82 -
4.3 ΚΑΝΟΝΑΣ ΟΠΙΣΘΟΔΡΟΜΗΣ ΕΚΜΑΘΗΣΗΣ (Backpropagation Rule)	- 84 -
4.4 ΥΒΡΙΔΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ	- 92 -
4.5 ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ ΒΑΘΜΩΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΤΗ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ	- 92 -
4.6 ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ	- 95 -
4.7 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ANFIS	- 96 -
4.8 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ANFIS	- 97 -
4.9 Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ FIS ΕΙΣΟΔΟΥ	- 99 -
5. ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ (CASE STUDY)	- 100 -
6.ΕΠΙΛΟΓΟΣ	- 112 -
7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	- 113 -

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο όρος μαζούτ (προέρχεται από το γαλλικό mazout) ή πετρέλαιο εξωτερικής καύσης (fuel oil), αναφέρεται σε βαριά προϊόντα τα οποία είναι υπολείμματα της απόσταξης του αργού πετρελαίου. Γενικά, το μαζούτ είναι ένα μαύρο παχύρευστο, σε συνήθεις συνθήκες θερμοκρασίας, υγρό που χρησιμοποιείται κυρίως σαν καύσιμο σε μεγάλες εγκαταστάσεις παραγωγής ατμού ή ηλεκτρισμού καθώς και για κίνηση πλοίων.

Τα τελευταία χρόνια, η αύξηση των τιμών του πετρελαίου είχε τεράστιες επιπτώσεις στο κόστος παραγωγής των βιομηχανιών, καθώς το κόστος του βιομηχανικού μαζούτ στη χώρα μας είναι ένα από τα υψηλότερα του κόσμου και βεβαίως από τα υψηλότερα που υπάρχουν στην Ευρώπη. Αν συγκρίνουμε δε το κόστος το οποίο έχει σε σχέση με την Ισπανία, την Πορτογαλία ή την Ιταλία, θα δούμε ότι η διαφορά είναι τεράστια με αποτέλεσμα ο ΣΕΒ να προτύνει τη μείωση του ειδικού φόρου κατανάλωσης έτσι ώστε η χώρα μας να αποκτήσει και πάλι ανταγωνιστική πρώτη ύλη. Αν αναλογιστεί κανείς ότι τρεις από τους δυναμικότερους και κατ' εξοχήν εξαγωγικούς κλάδους της ελληνικής βιομηχανίας, η τσιμεντοβιομηχανία, η μεταλλουργία και η χαρτοβιομηχανία, πληρώνουν το μαζούτ 30% ακριβότερα σε σχέση με τους αντίστοιχους κλάδους στην Ευρώπη, λόγω της υπερδιπλάσιας φορολογίας που ισχύει στην Ελλάδα, είναι φανερό ότι οι προσπάθειες για ανταγωνιστική βιομηχανία ακυρώνονται.

Αν λοιπόν αποφάσιζε η κυβέρνηση να μειώσει τη φορολογία καυσίμων και ενέργειας που χρησιμοποιεί η βιομηχανία στα όρια της Ευρώπης, τότε οι ενεργοβόρες επιχειρήσεις με βελτιωμένη την ανταγωνιστικότητά τους θα επιτύγχαναν αύξηση παραγωγής, εξαγωγών και φυσικά κερδών, με αποτέλεσμα το κράτος να εισπράξει πολλαπλάσια των όσων θα απωλέσει από τη μείωση της φορολογίας. Συνεπώς, μια τέτοια βιομηχανική πολιτική θα δημιουργούσε ανάπτυξη της βιομηχανίας, αύξηση των επενδύσεων, βελτίωση της ανταγωνιστικότητας, δημιουργία νέων θέσεων απασχόλησης και ταυτόχρονα αύξηση των εσόδων του Δημοσίου με αποτέλεσμα άμεσο και επωφελές για όλους σε μια τέτοια περίοδο οικονομικής κρίσης για τη χώρα μας.

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η πρόβλεψη της τιμής του μαζούτ με δεδομένα παλαιότερες ημερήσιες τιμές του από την 1/1/1990 μέχρι σήμερα. Η συλλογή των στατιστικών στοιχείων έγινε από τον όμιλο Ελληνικά Πετρέλαια Α.Ε.

Αυτή η πρόβλεψη γίνεται με νευρο-ασαφή λογική και συγκεκριμένα με το προσαρμοστικό νευρο-ασαφές σύστημα εξαγωγής αποτελεσμάτων ANFIS (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System). Ενώ έχει προηγηθεί η ανάπτυξη κώδικα που τρέχει στο περιβάλλον της Matlab. Ακολουθεί η λεπτομερής αναγραφή του θεωρητικού υπόβαθρου της θεωρίας ασαφών συνόλων, της νευρο-ασαφούς λογικής και η ακριβής περιγραφή του συστήματος ANFIS. Τέλος παρατίθενται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του μοντέλου (γραφήματα και σφάλματα), ο αναλυτικός σχολιασμός τους και τα συμπεράσματα.

2. ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΚΑΙ ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ζούμε σε έναν κόσμο όχι μόνο αβέβαιο αλλά και πολύπλοκο. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι ένα πολύπλοκο σύστημα όπου χειριζόμενος τις πληροφορίες που του επιτρέπουν να κατανοεί το περιβάλλον του, είναι προικισμένος με τη δυνατότητα ή αλλιώς με την ιδιότητα της απροσεξίας. Μια ιδιότητα, η οποία δεν είναι εύκολα προσπελάσιμη με την τυπική, μαθηματική ανάλυση. Η βεβαιότητα και η σαφήνεια των μαθηματικών δεν αποτελεί συστατικό στοιχείο της ανθρώπινης φύσης. Οι άνθρωποι σκέπτονται συνήθως όχι με όρους ακριβών συμβόλων και αριθμών αλλά με ασαφείς όρους. Δηλαδή δεν έχουν απόλυτο όριο ακριβείας και η αριθμητικοποίηση ποιοτικών παραμέτρων, όσο κι αν είναι αναγκαία, είναι αυθαίρετη και εν πολλοίς πλασματική. Αυτοί οι ασαφείς όροι προσδιορίζουν κατηγορίες όχι όμως απόλυτα διαχωρισμένα και σαφώς καθορισμένα σύνολα. Η μετάβαση από τη μια κατηγορία στην άλλη γίνεται σταδιακά, μεταβαίνοντας από καταστάσεις με περισσότερη ή λιγότερη συσχέτιση με την κατηγορία.

Εντούτοις, ο πραγματικός κόσμος είναι ασαφής και όποτε προσπαθούμε να μετρήσουμε κάποια πράγματα με ακρίβεια, αδυνατούμε να μετρήσουμε κάποια άλλα με την ίδια ακρίβεια. Αυτήν την κατάσταση προσδιορίζει η αρχή της απροσδιοριστίας του Haisenberg.

Όπως αναφέρει και ο δημιουργός της ασαφούς λογικής Zadeh: «Τα βιολογικά συστήματα χαρακτηρίζονται από εξαιρετική πολυπλοκότητα η οποία είναι μεγέθους πολλαπλώς μεγαλύτερου από αυτό των περισσότερων πολύπλοκων άψυχων συστημάτων που έχει δημιουργήσει ή περιγράψει ο άνθρωπος».

2.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Στις αρχές του 20ου αιώνα ο B. Russel, έθεσε τα θεμέλια της αόριστης Ασαφούς σήμερα λογικής. Στη συνέχεια ο Heisenberg ανακάλυψε στην κβαντική φυσική την αρχή της αβεβαιότητας, σύμφωνα με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε κάποια πράγματα με πολύ μεγάλη ακρίβεια, αλλά δεν μπορούμε να μετρήσουμε ταυτόχρονα κάποια άλλα πράγματα με την ίδια ακρίβεια. Η αρχή αυτή δηλώνει ότι στην πραγματικότητα ασχολούμαστε με την τρίτημη λογική: Οι προτάσεις είναι αληθείς, ψευδείς ή ακαθόριστες. Έπειτα ο Πολωνός Γιαν Λιουκάσιεβιτς (Jan Llukasiewicz) στις αρχές του είκοσι αναφέρθηκε στην αναγκαιότητα δημιουργίας μίας μαθηματικής θεωρίας που θα επεξεργαζόταν ασαφείς και ανακριβείς έννοιες, οι οποίες δεν είναι δυνατό να μοντελοποιηθούν μέσω της θεωρίας των πιθανοτήτων. Έτσι, συστηματοποίησε την έννοια της ασαφούς λογικής, διατυπώνοντας μια πρώιμη ιδέα ασαφών συνόλων, στα οποία εκτός των δύο τιμών της κλασικής λογικής (αληθές-ψευδές), προσέθεσε και την κατά ήμισυ αληθή και κατά ήμισυ ψευδή τιμή. Δηλαδή, προσέθεσε και ένα ενδιάμεσο φάσμα τιμών καθιστώντας την περιγραφή του πραγματικού κόσμου ζήτημα βαθμού προσέγγισης της αλήθειας και του ψεύδους. Ουσιαστικά τεμάχισε το ακαθόριστο σε πολλαπλά κομμάτια, εισάγοντας την πολύτιμη ή πλειότιμη λογική και όρισε έτσι στην ακαθοριστία ένα συνεχές σύνολο. Για παράδειγμα, ένα ποτήρι νερό μπορεί να είναι μισογεμάτο και μισοάδειο ταυτόχρονα.

Από τη στιγμή που διαπιστώθηκε ότι δεν αίρεται η αρχή της αντίφασης με την εμφάνιση και τρίτης τιμής μεταξύ 0 και 1, άνοιξε ο δρόμος για τη δυνατότητα πολλών, άπειρων τιμών μεταξύ των δύο απόλυτων άκρων, που κατέστησε δυνατή στη συνέχεια την περιγραφή της πολυδύναμης ή ασαφούς λογικής. Η «νέα» αυτή λογική δεν εκθρονίζει την κλασική λογική αλλά αντίθετα τη διευρύνει καθιστώντας την ακριβέστερη. Δίνοντας τη δυνατότητα προσθήκης άπειρων τιμών μεταξύ 0 και 1 της κλασικής λογικής, επιτρέπει τη βαθμοποίηση της αλήθειας, η ο οποία έτσι κι αλλιώς ποτέ δεν ήταν απόλυτη.

Το 1937, ο φιλόσοφος της Κβαντικής θεωρίας Max Black εφάρμοσε τη συνεχή λογική σε σύνολα στοιχείων και συμβόλων και ονόμασε αυτή τη δομή αβεβαιότητα. Δημοσίευσε ένα άρθρο για τα αόριστα σύνολα, αυτά που σήμερα ονομάζουμε ασαφή σύνολα, το οποίο αγνοήθηκε από τον κόσμο της επιστήμης και της φιλοσοφίας.

Με βάση λοιπόν την πρακτική των ανθρώπων να χρησιμοποιούν ελαστικά σύνολα, γεννήθηκε το 1965 απ' τον Lofti Zadeh καθηγητή του Πανεπιστημίου Berkeley της Καλιφόρνιας και τη θεμελιώδη δημοσίευσή του με τίτλο “Fuzzy Sets”, ο όρος **ασαφής λογική (fuzzy logic)**, με σκοπό να εκφράσει από μαθηματική άποψη την αβεβαιότητα και την ασάφεια και να παρέχει τυποποιημένα εργαλεία ώστε να αντιμετωπιστεί η εγγενής σε πολλά προβλήματα ανακρίβεια. Σύμφωνα με τον Zadeh, η ασαφής λογική παρέχει μια μέθοδο εξήγησης και ταυτόχρονα μείωσης της πολυπλοκότητας των ασαφών συστημάτων. Κατά τον Zadeh, μεγάλο μέρος της πολυπλοκότητας των ασαφών συστημάτων προέρχονταν από τον τρόπο που αναπαρίστανται και χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές, καθώς μπορούσαν να αναπαραστήσουν την κατάσταση ενός φαινομένου, είτε ως υπάρχουσα, είτε ως μη υπάρχουσα, με αποτέλεσμα οι μαθηματικοί υπολογισμοί για την εκτίμηση πράξεων σε οριακές καταστάσεις να γίνονται ιδιαίτερα πολύπλοκοι. Την παραπάνω διαπίστωση τη δήλωσε με την αρχή της ασυμβατότητας:

«...καθώς η πολυπλοκότητα ενός συστήματος αυξάνεται, η ικανότητα για ακριβείς και ταυτόχρονα σημαντικές δηλώσεις σχετικά με τη συμπεριφορά του μειώνεται, μέχρι ένα σημείο πέρα από το οποίο η ακρίβεια και η σημαντικότητα αποτελούν σχεδόν αμοιβαία αποκλειόμενα χαρακτηριστικά...»

Κάτω από αυτό το πρίσμα μοντελοποίησης συστημάτων, οι βασικοί μηχανισμοί αναπαρίστανται με γλωσσικές και όχι μαθηματικές μεταβλητές. Σύμφωνα με τον Zadeh, οι άνθρωποι επικοινωνούν χρησιμοποιώντας ασαφείς όρους και όχι σύμβολα ή αριθμούς. Οι ασαφείς αυτοί όροι αναπαριστούν γενικές κατηγορίες και όχι καθορισμένα εκ των προτέρων σύνολα. Η μετάβαση από μια κατηγορία – έννοια, ιδέα ή κατάσταση προβλήματος – στην επόμενη είναι σταδιακή, με κάποιες καταστάσεις να έχουν μεγαλύτερη ή μικρότερη συμμετοχή σε ένα σύνολο από ότι σε κάποιο άλλο. Χρησιμοποιώντας αυτή την έννοια των ελάχιστων συνόλων και επηρεαζόμενος από τα έργα των Black και Lukaiseiwicz, πρότεινε την ιδέα των ασαφών συνόλων, εισάγοντας έτσι και την ασαφή λογική.

2.3 ΕΝΝΟΙΑ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Η ασαφής λογική (**fuzzy logic**), η οποία είναι αναλογική αντί να είναι διχοτομική, πολύτιμη (παίρνει πολλές τιμές) αντί να είναι δίτιμη, πολυσθενής αντί δισθενής, αποτελεί ένα υπερσύνολο της κλασικής λογικής, την οποία επεκτείνει, προκειμένου να μπορεί να χειριστεί τιμές αληθείας μεταξύ του «απολύτως αληθούς» και του «απολύτως ψευδούς».

Ο Έλληνας φιλόσοφος Ζήνωνας πρώτος προκάλεσε την κοινή λογική με τα γνωστά παράδοξά του. Σε ένα από αυτά, σχετικό με την έννοια της ασαφούς λογικής, θέτει το ερώτημα: «Αν αφαιρέσει κανείς έναν κόκκο άμμου από ένα σωρό άμμου, ο σωρός εξακολουθεί να παραμένει σωρός; Και αν αφαιρέσει και δεύτερο και τρίτο και κ.ο.κ., παραμένει σωρός; Και τότε παύει να είναι σωρός;» Καθίσταται έτσι εμφανής η ασαφής φύση του πραγματικού κόσμου και η δυσκολία να χαραχθεί μια διαχωριστική γραμμή που να ορίζει απολύτως το φυσιολογικό από το παθολογικό. Πότε ο σωρός της άμμου διέρχεται τη διαχωριστική γραμμή και καθίσταται μη σωρός; Τα ασαφή σύνολα αποτελούν μια απάντηση στο παράδοξο του σωρού του Ζήωνα. Κάθε φορά που αφαιρείται ένας κόκκος άμμου από το σωρό, ο σωρός παραμένει σωρός αλλά έχει μικρότερη συμμετοχή στο σύνολο.

Η αρχή της ασαφούς λογικής συμπυκνώνεται στη διαπίστωση ότι τα πάντα στον πραγματικό κόσμο είναι ζήτημα βαθμού. Στον πραγματικό κόσμο, μεταξύ του άσπρου-μαύρου (που εμφανίζεται σε ακραίες καταστάσεις και σαφώς ορισμένες, εν μέρει τεχνητά και αυθαίρετα) επικρατεί, κυριαρχεί το γκριζό σε όλες του τις αποχρώσεις, από το πιο ανοιχτό, που προσεγγίζει το άσπρο (αλήθεια), μέχρι το πιο σκούρο, που προσεγγίζει το μαύρο (ψεύδος). Στην περιοχή αυτή του γκριζου κινείται ο πραγματικός κόσμος και οι τόνοι της μπορούν να εκφραστούν καλύτερα με την πολυδύναμη λογική.

Συγκεκριμένα, μία πρόταση μπορεί να είναι αληθής "με κάποιο βαθμό αληθείας", και όχι απλά αληθής ή ψευδής. Με απλά λόγια, η ασαφής λογική λέει ότι τα πράγματα συχνά δεν είναι «άσπρο-μαύρο» αλλά «αποχρώσεις του γκρι».

Η ασαφής λογική ξεκινάει με τη σύλληψη του ασαφούς συνόλου το οποίο δεν έχει ξεκάθαρα και σαφώς καθορισμένα όρια και μπορεί να περιέχει στοιχεία με μερικό βαθμό συμμετοχής. Θα λέγαμε ότι εισερχόμαστε στον κόσμο όπου η αυστηρή λογική ναι-όχι σταματάει να

είναι χρήσιμη. Και το παρακάτω σχόλιο χαρακτηρίζει τα θεμέλια της ασαφούς λογικής:

Στην ασαφή λογική η αλήθεια κάθε υπόθεσης γίνεται υπόθεση ενός βαθμού.

Ένα ασαφές σύνολο A ορίζεται ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x, \mu_A(x))$, όπου $x \in X$ και $\mu_A(x) \in [0,1]$. Το σύνολο X αποτελεί ένα ευρύτερο σύνολο αναφοράς (universe of discourse) που περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα στα οποία μπορεί να γίνει αναφορά. Η τιμή $\mu_A(x)$ λέγεται βαθμός αλήθειας (degree of truth), συμβολίζει το βαθμό συγγένειας του x στο A και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$. Τέλος η συνάρτηση μ_A ονομάζεται **συνάρτηση συμμετοχής (membership function)**.

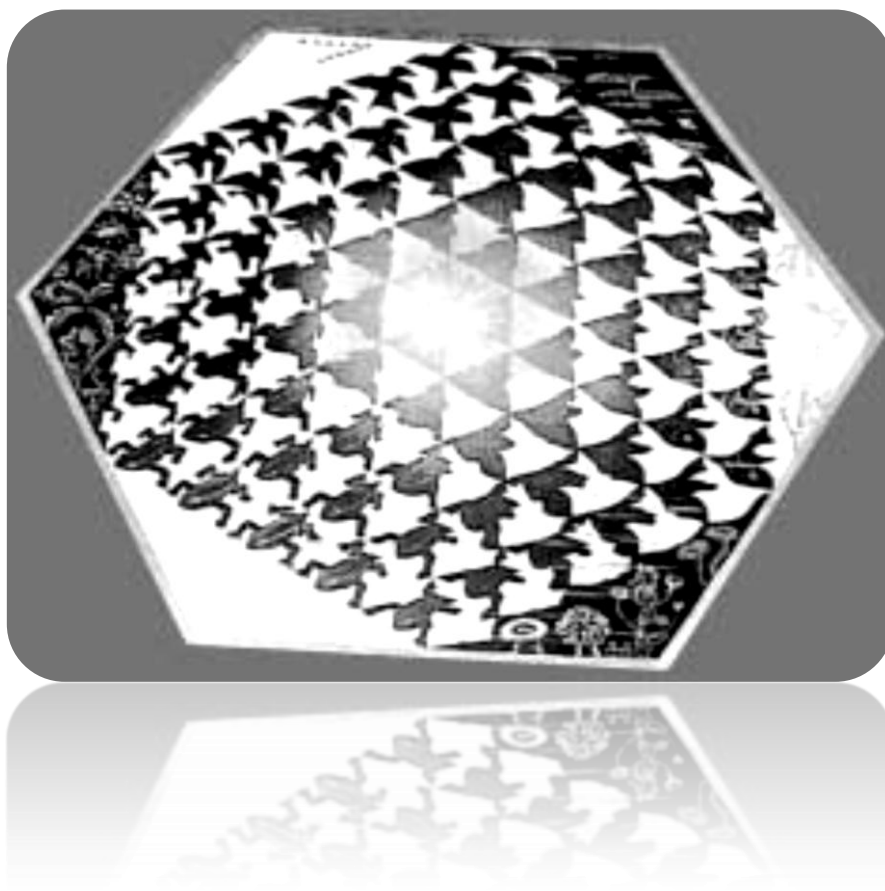
Ο παραδοσιακός ορισμός των συνόλων βασίζεται στο νόμο της διχοτομίας, ένα σημείο ανήκει ή δεν ανήκει σε ένα σύνολο, δηλαδή είναι εκτός συνόλου. Τα ασαφή σύνολα «σπάνε» σε κάποιο βαθμό το νόμο της διχοτομίας. Στοιχεία ανήκουν μερικώς σε κάποιο ασαφές σύνολο, ή μπορούν να ανήκουν σε περισσότερα του ενός συνόλου.

Τα **ασαφή σύνολα (Fuzzy Sets)** είναι συναρτήσεις που απεικονίζουν μια τιμή, η οποία μπορεί να είναι μέλος του συνόλου σε έναν αριθμό από το 0 έως το 1. Ο αριθμός αυτός δηλώνει το βαθμό συσχέτισης της τιμής με το ασαφές σύνολο. Όταν ο βαθμός αυτός είναι 0 τότε αυτό υποδηλώνει ότι η τιμή δεν ανήκει στο σύνολο, ενώ όταν είναι 1 τότε αυτό σημαίνει ότι η τιμή αυτή αντιπροσωπεύει πλήρως το ασαφές σύνολο. Ο βαθμός αυτός καθορίζεται από τη συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου.

Ένας **ασαφής αριθμός (Fuzzy Number)** είναι ένα κυρτό, ασαφές σύνολο, κανονικοποιημένο στο διάστημα $[0,1]$ του συνόλου των πραγματικών αριθμών, που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της κανονικότητας (normality) και της κυρτότητας (convexity). Υπάρχει ένα μόνο στοιχείο με βαθμό συμμετοχής 1. Τα περισσότερα μη-σύνθετα ασαφή σύνολα ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες και έτσι οι ασαφείς αριθμοί αποτελούν τον πιο βασικό και συνηθισμένο τύπο ασαφών συνόλων. Η συνάρτηση του ασαφούς αυτού συνόλου είναι συμμετοχής και μπορεί να λάβει οποιαδήποτε μορφή.

Παράδειγμα 1.

Όσοι είναι εξοικειωμένοι με τη ζωγραφική του Escher, θα έχουν ένα κατ' αναλογία παράδειγμα της ασαφούς λογικής και της βαθμοποίησης που αυτή εκφράζει. Στην εικόνα του Escher, μικρές μεταβολές, ασήμαντες ουσιαστικά, οδηγούν τελικά σε πλήρη παραμόρφωση ή καλύτερα, μεταμόρφωση του αντικειμένου.



Εικόνα 2.1. Παρατηρήστε τη μεταμόρφωση των πουλιών σε ψάρια στην έξω δεξιά σειρά της εικόνας από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς τα δεξιά (μαύρα σχήματα). Επίσης, τη μεταμόρφωση των ψαριών σε βατράχους, πρώτη και δεύτερη σειρά από κάτω προς τα πάνω, στο δεξιό κάτω τέταρτο της εικόνας.

Παράδειγμα 2.

Το ασαφές σύνολο περιέχει μέλη, τα οποία ανήκουν σε αυτό εν μέρει, κατά βαθμό. Το τυπικό παράδειγμα ασαφούς συνόλου είναι το «σύνολο των υψηλών ανθρώπων». Έστω ότι ο X έχει ύψος 167 cm. Ανήκει ο X στο σύνολο των υψηλών ατόμων; Στο κλασικό σύνολο των υψηλών ατόμων η ερώτηση που τίθεται είναι: είναι ψηλός ο X ; και για να απαντηθεί η ερώτηση θα πρέπει το ύψος του X να συγκριθεί με το (αυθαίρετο) όριο, πάνω από το οποίο κάποιος ορίζεται ως ψηλός (ανήκει στο σύνολο των ψηλών ατόμων) και κάτω από το οποίο ορίζεται ως όχι ψηλός (δεν ανήκει στο σύνολο των ψηλών ατόμων). Αν π.χ. το όριο είναι 165 cm, σύμφωνα με την κλασική λογική, ο X ανήκει στο σύνολο των ψηλών ατόμων, εφόσον το ύψος του υπερβαίνει τα 165 cm.

Στη θεωρία των ασαφών συνόλων, το ερώτημα που τίθεται δεν είναι αν ο X είναι ψηλός ή όχι, αλλά «πόσο ψηλός είναι ο X ». Με άλλα λόγια, σε τι ποσοστό ανήκει ο X στο σύνολο των ψηλών ατόμων. Αν το σημείο τομής μεταξύ ψηλών και όχι ψηλών ατόμων τεθεί στα 170 cm, τότε σύμφωνα με την κλασική λογική, άτομα κάτω των 170 cm ύψους δεν συμπεριλαμβάνονται στο σύνολο των ψηλών ατόμων έστω και αν η διαφορά τους από το σημείο τομής είναι 1 cm (ύψος 169 cm). Αντίθετα, στην ασαφή λογική που είναι διαβαθμισμένη, αυτό που καθορίζει τα πράγματα είναι ο βαθμός συμμετοχής στο σύνολο και απαντά στην ερώτηση σε τι βαθμό είναι κάποιος ψηλός και όχι αναγκαστικά αν είναι ψηλός ή όχι.

Παράδειγμα 3.

Έστω ότι τα όρια του ύψους στο οποίο μπορεί να φθάσει ή έχει περιγραφεί ότι έχει φθάσει ανθρώπινο ον, είναι 285 cm το ανώτερο (ο Ρώσος γίγαντας Μάχνωφ) και 140 cm το κατώτερο (ύψος που χαρακτηρίζει το νανισμό). Έστω τώρα ότι πέντε άτομα έχουν τα ακόλουθα ύψη: 190 cm, 180 cm, 170 cm, 169 cm, 150 cm.

Στην κλασική λογική του ναι-όχι, τα τρία πρώτα άτομα συμπεριλαμβάνονται στο σύνολο των ψηλών ατόμων (εφόσον το όριο είναι τα 170 cm), ενώ το τέταρτο άτομο παρόλο που η διαφορά του από το τρίτο είναι μόλις 1 cm, δεν συμπεριλαμβάνεται στους ψηλούς ανθρώπους.

Αντίθετα, η κατάσταση εκφρασμένη στην ασαφή λογική ως βαθμός συμμετοχής στο σύνολο και ως απάντηση στην ερώτηση πόσο ψηλό είναι το άτομο και όχι αν είναι ψηλό ή όχι, σε διχοτομική διάκριση, καθιστά τα

πράγματα παραδόξως σαφέστερα και την εκτίμηση του ύψους ακριβέστερη, ενώ παράλληλα καθίσταται εμφανές και το μέγεθος της διαφοράς (πίν. 1).

Αν θεωρήσουμε ότι το άτομο με ύψος 285 cm μετέχει 100% στο σύνολο των ψηλών ατόμων, τότε η συμμετοχή των υπολοίπων στο ίδιο σύνολο διαβαθμίζεται όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Έτσι το άτομο με ύψος 169 cm το οποίο στη δισθενή ταξινόμηση δεν συμπεριλαμβάνεται στο σύνολο των ψηλών ατόμων, στην ασαφή-πολυσθενή ταξινόμηση μετέχει του συνόλου κατά 59,3%, μόλις 0,3% κάτω του αμέσως επόμενου του που είναι τα 170 cm και το οποίο συμπεριλαμβάνεται στο σύνολο των ψηλών ατόμων.

Πίνακας 2.1. Ταξινόμηση βάσει κλασικής (δισθενούς) και ασαφής (πολυσθενούς) λογικής.

Άτομα	Ύψος (cm)	Δισθενής ταξινόμηση (1-0)	Ασαφής (πολυσθενής) (%)
A	190	1	66,7
B	180	1	63,1
Γ	170	1	59,6
Δ	169	0	59,3
E	150	0	52,6

Το χαρακτηριστικό της ασαφούς λογικής και των συνόλων της είναι ότι εκφράζουν κυρίως βαθμό συμμετοχής παρά σύνολο μελών. Εκτός αυτού όμως, περιλαμβάνουν και διακεκριμένα σύνολα, ασαφή δηλαδή σύνολα, τα οποία έχουν βαθμό συμμετοχής 1 και 0.

Εδώ χρειάζεται μια διασαφήνιση. Οποιοδήποτε στοιχείο, για να ανήκει σε ένα ασαφές σύνολο, μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή εκτός από το 0. Αντίθετα, για να ανήκει σε ένα κλασικό σύνολο, πρέπει να έχει τιμή 1.

Ακρίβεια & Σημασία στον Πραγματικό Κόσμο

Η ανακρίβεια, ή η ασάφεια είναι ο πυρήνας των ασαφών συνόλων και της ασαφούς λογικής.



Εικόνα 2.2. Προβλήματα που Αντιμετωπίζονται

Η γενική ιδέα της ασαφούς λογικής συνδέεται με την σχετικότητα της έννοιας «Ακρίβεια» (Precision).

Ερώτημα: Κατά πόσο είναι σημαντικό να δίδεται μία απολύτως ακριβής απάντηση, όταν μία προσεγγιστική απάντηση αρκεί;

Στο ανωτέρω ερώτημα έχουν δοθεί ως απαντήσεις διάφορες προτάσεις, όπως:

1. Η ακρίβεια δεν είναι κατ' ανάγκην η αλήθεια.
2. Σε ορισμένες περιπτώσεις, το περισσότερο μετρήσιμο «πνίγει» το σημαντικό.
3. Όσο αυξάνεται η πολυπλοκότητα, οι ακριβείς προτάσεις χάνουν την σημασία τους και οι προτάσεις με σημασία χάνουν την ακρίβειά τους.

Η ασαφής λογική αποτελεί ένα διαφορετικό, «πιο βολικό» τρόπο απεικόνισης ενός πεδίου ορισμού, σε ένα πεδίο τιμών.

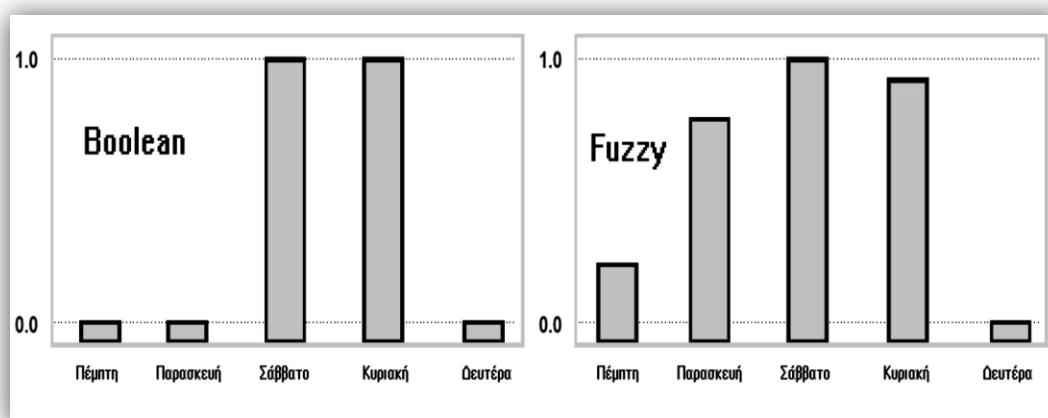
Παραδείγματα:

1. Γνωρίζοντας την ποιότητα εξυπηρέτησης σε ένα εστιατόριο, προκύπτει το ποσό του φιλοδώρηματος.
2. Γνωρίζοντας την επιθυμητή θερμοκρασία τροφοδοσίας ενός σώματος καλοριφέρ, ρυθμίζεται καταλλήλως η τριόδος βάννα.
3. Γνωρίζοντας την απόσταση του προς φωτογράφιση αντικειμένου, εστιάζεται ο φακός της φωτογραφικής μηχανής.
4. Γνωρίζοντας την ταχύτητα ενός οχήματος και τον αριθμό των στροφών του κινητήρα του, επιλέγεται η κατάλληλη σχέση στο κιβώτιο ταχυτήτων.

Οποιαδήποτε απεικόνιση μπορεί να επιτευχθεί χωρίς την χρήση ασαφούς λογικής. Η χρήση της όμως καθιστά ορισμένες λύσεις ταχύτερες και τις εφαρμογές οικονομικότερες. Είναι ιδιαιτέρως αποτελεσματική για την αντιμετώπιση προβλημάτων μη γραμμικών, με αβεβαιότητα.

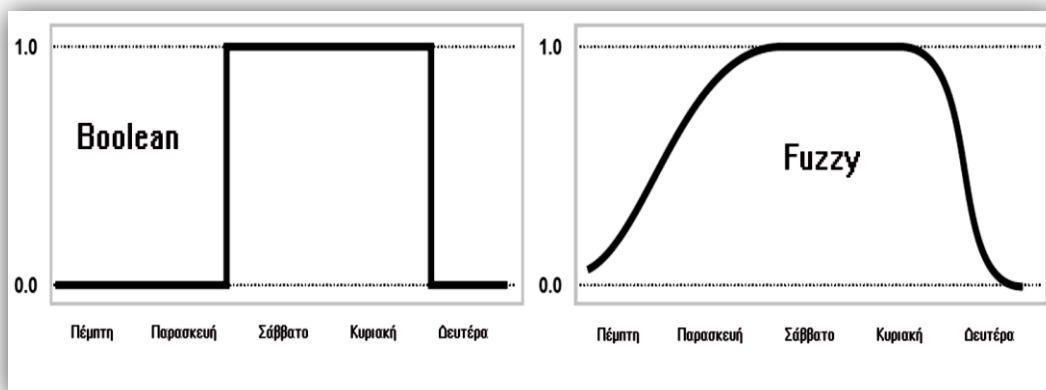
Η σκέψη στην ασαφή λογική είναι απλώς ένα πρόβλημα γενίκευσης της γνωστής ΝΑΙ-ΟΧΙ λογικής Boolean. Αν δώσουμε την τιμή 1 στο «αληθές» και την τιμή 0 στο «ψευδές», τότε λέμε ότι η ασαφής λογική επιτρέπει επίσης ενδιάμεσες τιμές όπως 0.2 ή 0.486 ή 0.79.

Για παράδειγμα στο σχήμα παρακάτω φαίνονται οι αληθείς τιμές των ημερών που θεωρούμε ότι ανήκουν στο σαββατοκύριακο, θεωρώντας ότι ο χρόνος παίρνει διακεκριμένες τιμές, πρώτα με Boolean Ναι-Όχι και δίπλα απαντήσεις ασαφούς λογικής με ενδιάμεσες τιμές.



Σχήμα 2.1 : Ημέρες που θεωρούμε ότι ανήκουν στο σαββατοκύριακο με διακεκριμένες τιμές χρόνου.

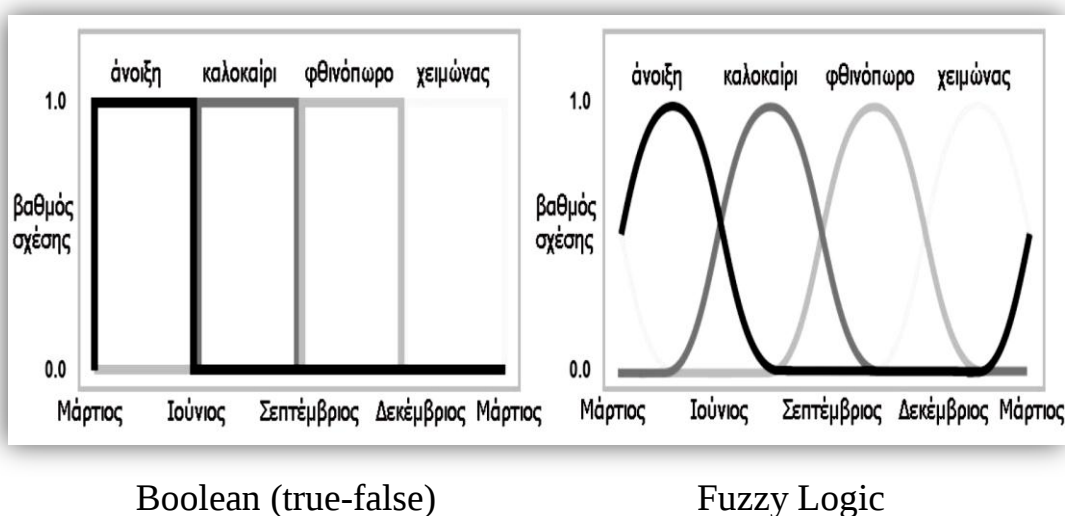
Το ίδιο πάλι παράδειγμα στο επόμενο σχήμα θεωρώντας όμως αυτή τη φορά ότι ο χρόνος παίρνει συνεχείς τιμές, πρώτα με Boolean Ναι-Όχι και δίπλα απαντήσεις ασαφούς λογικής με ενδιάμεσες τιμές. Τώρα καθορίζουμε και το βαθμό στον οποίο κάθε στιγμή ανήκει στο σαββατοκύριακο αντί για ολόκληρη τη μέρα κάθε φορά.



Σχήμα 2.2 : Ημέρες που θεωρούμε ότι ανήκουν στο σαββατοκύριακο με συνεχείς τιμές χρόνου.

Η καμπύλη που καθορίζει τις μέρες του σαββατοκύριακου κάθε στιγμής στο χρόνο, είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει τον χώρο των δεδομένων που εισάγουμε (χρόνος της εβδομάδας), στον χώρο των αποτελεσμάτων που εξάγουμε (χρόνος που ανήκει στο σαββατοκύριακο). Πιο συγκεκριμένα είναι γνωστή σαν **συνάρτηση συμμετοχής** (membership function).

Ένα άλλο παράδειγμα όμοιο με πριν αλλά και για πολλαπλά γεγονότα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όπου αναζητούμε ποια εποχή του χρόνου είναι πότε.



Σχήμα 2.3: Ποια εποχή του χρόνου είναι πότε.

2.4 ΧΡΗΣΕΙΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Αντίθετα με τα συμβατικά συστήματα ελέγχου, τα συστήματα που χρησιμοποιούν ασαφή λογική δεν χρειάζονται προηγούμενη «μαθηματική» ανάλυση της ελεγχόμενης διεργασίας αλλά «ποιοτική» περιγραφή των σημαντικών φαινομένων και αλληλεπιδράσεων, μέσα από τη διατύπωση των κανόνων ελέγχου. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι ιδιαίτερα επιθυμητό σε περιπτώσεις ελέγχου πολύπλοκων διεργασιών που δεν μπορούν να περιγραφούν σωστά με εξισώσεις ή άλλες συμβατικές μαθηματικές μεθόδους. Τέτοια παραδείγματα είναι π.χ. η αναγνώριση μορφής μέσα σε εικόνες ή η μουσική. Επίσης, η χρήση ασαφούς λογικής είναι κατάλληλη για τον έλεγχο διατάξεων που απαιτείται να λειτουργούν σε πολύ διαφορετικές συνθήκες π.χ. οι κινητήρες των οικιακών συσκευών, το πλυντήριο, οι συσκευές κλιματισμού. Ακόμη, χρησιμοποιείται όταν υπάρχουν και λειτουργούν πρακτικοί κανόνες, π.χ. από τη γνώση και την εμπειρία των χειριστών μιας συσκευής ή διάταξης.

Από τα τέλη της δεκαετίας του 80, οι εφαρμογές των συστημάτων αυτών εξαπλώνονται ταχύτατα, τόσο στη βιομηχανία όσο και στα προϊόντα ευρείας κατανάλωσης. Τα παραδείγματα κοινών συστημάτων που χρησιμοποιούν ασαφή λογική περιλαμβάνουν συσκευές, όπως φωτογραφικές μηχανές με αυτόματη εστίαση. Ο «σκοτεινός θάλαμος» στο εσωτερικό της φωτογραφικής μηχανής περιλαμβάνει αισθητήρια φωτεινότητας. Το σύστημα ελέγχου μετράει την ευκρίνεια σε έξι σημεία της εικόνας (καρρέ) και χρησιμοποιεί κανόνες (ασαφή λογική) για να αξιολογήσει την εστίαση και να ενεργοποιήσει έναν ηλεκτρικό μικρο-κινητήρα που μετακινεί ανάλογα τον εστιακό φακό. Το σύστημα ελέγχου μετράει τη θερμοκρασία, καθώς επίσης και τις εντολές από το χειριστήριο (επιθυμητή θερμοκρασία). Ένα τυπικό σύστημα χρησιμοποιεί περίπου 50 κανόνες ασαφούς λογικής για να καθορίσει τη ροή του αέρα (ταχύτητα ανεμιστήρα) και την ένταση της ψύξης (βαλβίδα του συμπιεστή). Αναφέρεται ότι συσκευές κλιματισμού με έλεγχο ασαφούς λογικής ανταποκρίνονται έως και πέντε φορές ταχύτερα στις εντολές του χειριστηρίου και ταυτόχρονα περιορίζουν την κατανάλωση έως και κατά 25%, συγκριτικά με μια συμβατική μονάδα.

2.5 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΧΡΗΣΗΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Μερικά από τα πλεονεκτήματα της χρήσης ασαφών μοντέλων σε συστήματα στήριξης αποφάσεων και έμπειρα συστήματα είναι:

- **Ικανότητα μοντελοποίησης ιδιαίτερα πολύπλοκων επιχειρηματικών προβλημάτων.**

Καθώς τα ασαφή συστήματα προσφέρουν γενικευμένες προσεγγίσεις και είναι κατάλληλα για τη μοντελοποίηση πολύπλοκων προβλημάτων, έχουν την ικανότητα να προσεγγίζουν τη συμπεριφορά συστημάτων που διαθέτουν έναν αριθμό ελάχιστα γνωστών χαρακτηριστικών. Η ικανότητά τους να επεξηγούν τη συλλογιστική τους, προσφέρει έναν ιδανικό τρόπο αντιμετώπισης αυτών των προβλημάτων.

- **Βελτιωμένη γνωστική μοντελοποίηση έμπειρων συστημάτων.**

Τα ασαφή συστήματα παρέχουν τη δυνατότητα άμεσης κωδικοποίησης της γνώσης με τρόπο παρόμοιο με εκείνο που αντιμετωπίζεται η διαδικασία απόφασης.

- **Ικανότητα μοντελοποίησης συστημάτων που εμπλέκουν πολλούς ειδικούς.**

Τα ασαφή συστήματα είναι κατάλληλα να αναπαραστήσουν πολλούς συνεργαζόμενους ακόμη και διαφωνούντες ειδικούς.

- **Μειωμένη πολυπλοκότητα μοντέλου.**

Καθώς τα ασαφή συστήματα απαιτούν λιγότερους κανόνες από τα παραδοσιακά συστήματα και αυτοί οι κανόνες βρίσκονται πιο κοντά στον τρόπο που εκφράζουμε τη γνώση στη φυσική γλώσσα, αφενός μπορούν να τροποποιηθούν με λιγότερα παραγόμενα λάθη και αφετέρου τα λογικά ή δομικά προβλήματα μπορούν να εντοπιστούν και να επιλυθούν σε μικρό χρονικό διάστημα.

- **Βελτιωμένος χειρισμός αβεβαιότητας και πιθανοτήτων.**

Η ασαφής λογική προσφέρει μια καλύτερη, πιο συνεπή και μαθηματικά ορθότερη μέθοδο χειρισμού της αβεβαιότητας, παρόλο που αναπαριστά την αβεβαιότητα και την ανακρίβεια ως ένα ενδογενές κομμάτι του μοντέλου, καθώς και οι δυο αυτές εναλλακτικές προσεγγίσεις βασίζονται στην ανάθεση τιμών αβεβαιότητας έξω από το μοντέλο καθ' αυτό.

2.6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ (membership function) (μ_A).

Έστω X ένα μη κενό σύνολο αντικειμένων, με την κλασσική έννοια του όρου, το οποίο αποτελεί το σύνολο αναφοράς (universe of discourse). Θεωρούμε ένα υποσύνολο A του X . Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $\mu_A: X \rightarrow \{0,1\}$, η οποία ονομάζεται Συνάρτηση Συμμετοχής κάθε στοιχείου x στο υποσύνολο A και είναι μια καμπύλη η οποία καθορίζει τον βαθμό στον οποίο κάθε σημείο του πεδίου ορισμού διαθέτει μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Η Συνάρτηση Συμμετοχής ορίζεται ως:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Στην πράξη η συνάρτηση συμμετοχής μπορεί να προέρχεται από:

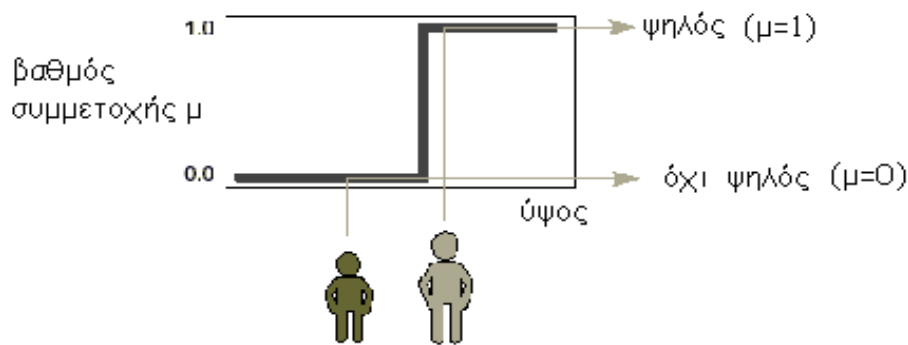
- Υποκειμενικές εκτιμήσεις
- Προκαθορισμένες (ad hoc) και απλοποιημένες μορφές
- Συχνότητες εμφανίσεων και πιθανότητες
- Φυσικές μετρήσεις
- Διαδικασίες μάθησης και προσαρμογής (συνήθως με νευρωνικά δίκτυα)

Η διαφορά των ασαφών συνόλων συγκριτικά με την κλασσική θεωρία συνόλων είναι ότι για τη χαρακτηριστική συνάρτηση της κλασσικής θεωρίας συνόλων ισχύει $\mu_A(x) \in \{0,1\}$, δηλαδή το x είτε ανήκει στο A [$\mu_A(x)=1$] ή δεν ανήκει [$\mu_A(x)=0$]. Άρα η ασαφής θεωρία συνόλων μεταπίπτει στην αντίστοιχη κλασσική, όταν οι δυνατές τιμές της συνάρτησης συμμετοχής είναι μόνο 0 ή 1.

Παρακάτω αναπτύσσεται ένα παράδειγμα προκειμένου να αποδείξουμε τη χρησιμότητα της χρησιμοποίησης των ασαφών συνόλων στην αναπαράσταση εννοιών που δεν έχουν σαφώς καθορισμένα όρια προσδιορισμού τους.

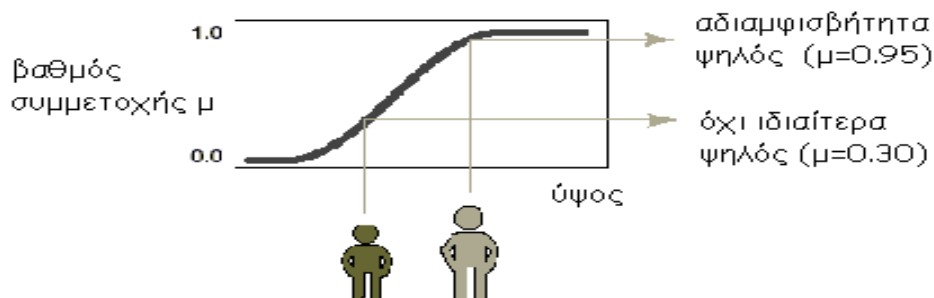
Ας υποθέσουμε ότι ο χώρος αναφοράς X είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων. Ένα ασαφές υποσύνολο του χώρου αυτού είναι οι ψηλοί άνθρωποι. Τα πιθανά ύψη έστω ότι κυμαίνονται από 1.20 μέχρι 2.30 . Η λέξη ψηλός μπορεί να συσχετισθεί με μια καμπύλη η οποία δείχνει κατά πόσο ένας άνθρωπος είναι ψηλός ή όχι. Αν χρησιμοποιήσουμε τις αρχές των κλασσικών συνόλων τότε για να ορίσουμε το σύνολο των ψηλών ανθρώπων θα πρέπει να ορίσουμε μια συγκεκριμένη τιμή ύψους , η οποία

θα διαχωρίζει τους ανθρώπους σε ψηλούς και κοντούς. Π.χ. ας υποθέσουμε ότι η τιμή αυτού του ύψους είναι 1.75m. τότε ένας άνθρωπος με ύψος 1.74 θα χαρακτηρίζεται κοντός ενώ ένας άνθρωπος με ύψος 1.76 θα χαρακτηρίζεται ψηλός. Ο παραπάνω διαχωρισμός φαίνεται παράλογος αφού έχουμε αντιστοιχήσει σε δύο ανθρώπους με αμελητέα διαφορά ύψους δύο αντίθετες μεταξύ τους έννοιες.



Σχήμα 2.4: Διακριτές συναρτήσεις συμμετοχής, για ψηλούς ανθρώπους.

Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε την έννοια ψηλός είναι μέσω μιας καμπύλης που έχει ομαλή διακύμανση και μεταβαίνει από την έννοια κοντός στην έννοια ψηλός. Αυτή η καμπύλη είναι η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου των ψηλών ανθρώπων. Με άλλα λόγια δεχόμαστε ότι όλοι οι άνθρωποι είναι σε κάποιο βαθμό ψηλοί αλλά δεν είναι όλοι στον ίδιο βαθμό ψηλοί.



Σχήμα 2.5: Συνεχείς συναρτήσεις συμμετοχής για ψηλούς ανθρώπους.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υποκειμενικοί παράγοντες ενυπάρχουν στα χαρακτηριστικά της δομής ενός ασαφούς συνόλου. Η μορφή δηλαδή της καμπύλης δεν μπορεί να είναι η ίδια όταν αναφερόμαστε σε ενήλικες και ανήλικες, σε γυναίκες και άντρες κλπ. Η μορφή επίσης της καμπύλης επιλέγεται αυθαίρετα σύμφωνα με την αντίληψη που έχει κάθε άνθρωπος για την έννοια ψηλός. Η μόνη προϋπόθεση που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση συμμετοχής είναι να βρίσκεται στο διάστημα τιμών $[0,1]$. Το

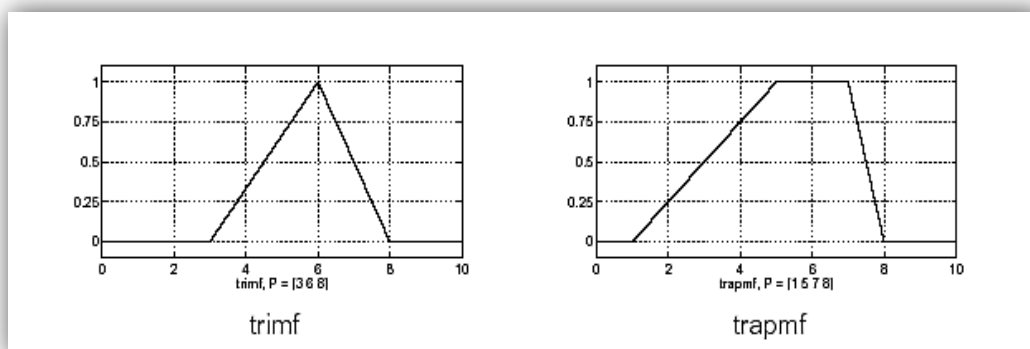
σχήμα της επιλέγεται μεν αυθαίρετα αλλά και με τρόπο που να διασφαλίζει όσο είναι δυνατό την απλότητα, την βολικότητα και την επάρκεια.

Υπάρχουν κάποιες μορφές συναρτήσεων συμμετοχής οι οποίες εφαρμόζονται με μεγάλη συχνότητα στις διάφορες εφαρμογές και αποτελούν κατά κάποιο τρόπο τις πρώτες επιλογές των ερευνητών στην απεικόνιση φυσικών προβλημάτων.

Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων συμμετοχής μπορεί να είναι:

- Γραμμικές (Τριγωνική, Τραπεζοειδής),
- Να ακολουθούν την κατανομή Gauss (Γκαουσιανή, Διπλή Γκαουσιανή, Γενικευμένη Καμπανοειδής),
- Σιγμοειδείς καμπύλες (Σιγμοειδής, Διαφορά Σιγμοειδών, Γινόμενο Σιγμοειδών),
- Τετραγωνικές ή κυβικές πολυωνμικές καμπύλες (Καμπύλη Z, Καμπύλη Π, Καμπύλη S).

Οι απλούστερες συναρτήσεις συμμετοχής είναι αυτές που σχηματίζονται από ευθείες γραμμές. Η απλούστερη από αυτές είναι η τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής, που δεν είναι τίποτα άλλο από ένα τρίγωνο. Στην ίδια κατηγορία ανήκει και η τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής. Αυτές οι δύο συναρτήσεις εξασφαλίζουν την απαίτηση για απλότητα.

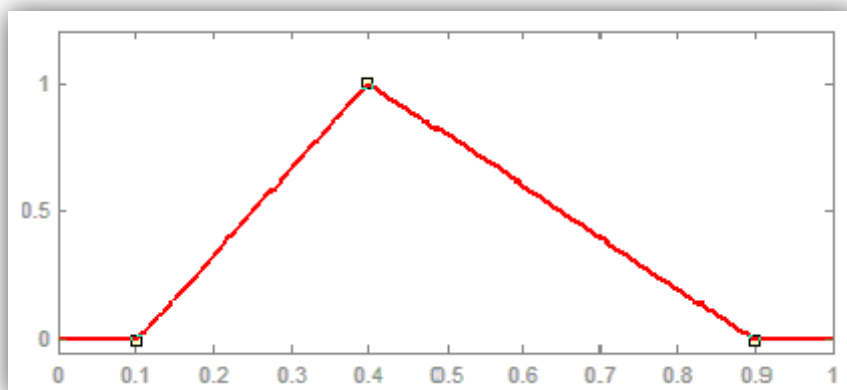


Σχήμα 2.6: Τριγωνική και τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής.

Η μαθηματική έκφραση της τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής αποδίδεται από την ακόλουθη σχέση. Στη σχέση αυτή οι παράμετροι a, b , και c είναι οι κορυφές το τριγώνου, όπου $a < b < c$.

$$\mu_{tri} = (x; a, b, c) = \max \left(\min \left(\frac{x - a}{b - a}, \frac{c - x}{c - b} \right), 0 \right)$$

Το σχήμα αποτελεί παράδειγμα τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής για $a=0.1$, $b=0.4$ και $c=0.9$.



Εικόνα 2.3 : Υπόδειγμα τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής

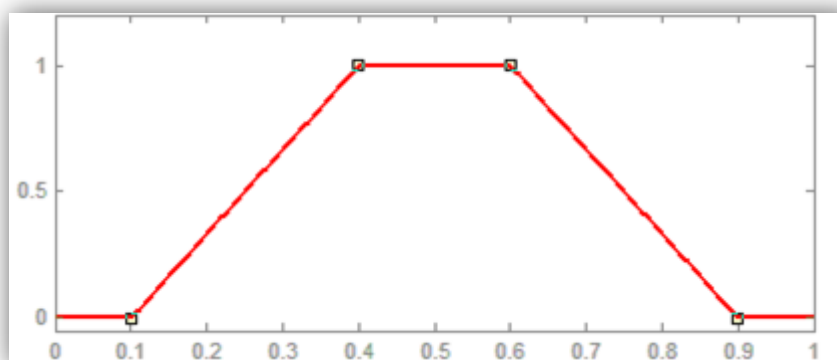
Στην τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής επισημαίνεται η εύκολη και απλή απεικόνιση εκτιμήσεων τριών σημείων (μικρή, μεσαία, μεγάλη πιθανότητα). Μεταξύ των ακραίων τιμών και της αναμενόμενης, οι υπόλοιπες τιμές αποτελούν ενδιάμεσες καταστάσεις που υποδεικνύουν την απόκλιση από τις εκτιμήσεις, πάντα όμως, μέσα στο εύρος τιμών που ορίζονται από τα τρία σημεία.

Παρακάτω δίδεται η μαθηματική έκφραση της τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής:

$$\mu_{trap} = (x; a, b, c, d) = \max \left(\min \left(\frac{x - a}{b - a}, 1, \frac{d - x}{c - b} \right), 0 \right)$$

Στη σχέση αυτή οι παράμετροι a, b, c και d είναι οι κορυφές του τραπεζίου, όπου $a < b < c < d$.

Το σχήμα αποτελεί παράδειγμα τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής με $a=0.1$, $b=0.4$, $c=0.6$ και $d=0.9$.



Εικόνα 2.4: Υπόδειγμα τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής

Στην τραπεζοειδή συνάρτηση συμμετοχής, η πιθανότητα εμφάνισης απεικονίζεται στη βάση της εκτίμησης δυο διαστημάτων, εκείνου που ορίζει το εύρος του συνόλου των ενδεχομένων (μεγάλη πλευρά τραπεζίου) και εκείνου που ορίζει το εύρος των πλέον αναμενόμενων ενδεχομένων (μικρή πλευρά τραπεζίου). Οι υπόλοιπες πλευρές, όπως και στην τριγωνική συνάρτηση, αποτελούν ενδιάμεσες καταστάσεις που υποδεικνύουν την απόκλιση από τις εκτιμήσεις.

Χάρη στην απλή μορφή τους και την υπολογιστική αποτελεσματικότητα, τόσο οι τριγωνικές MF όσο και οι τραπεζοειδείς, έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως και ιδιαίτερα σε εφαρμογές σε πραγματικό χρόνο. Όμως από τη στιγμή που κατασκευάζονται από τμήματα ευθειών, δεν είναι ομαλές στα άκρα (γωνίες), όπως αυτά προσδιορίζονται από τις παραμέτρους.

Δύο συναρτήσεις συμμετοχής που είναι δομημένες πάνω στη μορφή της κατανομής Gauss είναι μια απλή γκαουσιανή και μια σύνθεση δύο διαφορετικών γκαουσιανών.

Η συνάρτηση συμμετοχής που έχει τη μορφή της καμπύλης Gauss αποδίδεται από την σχέση:

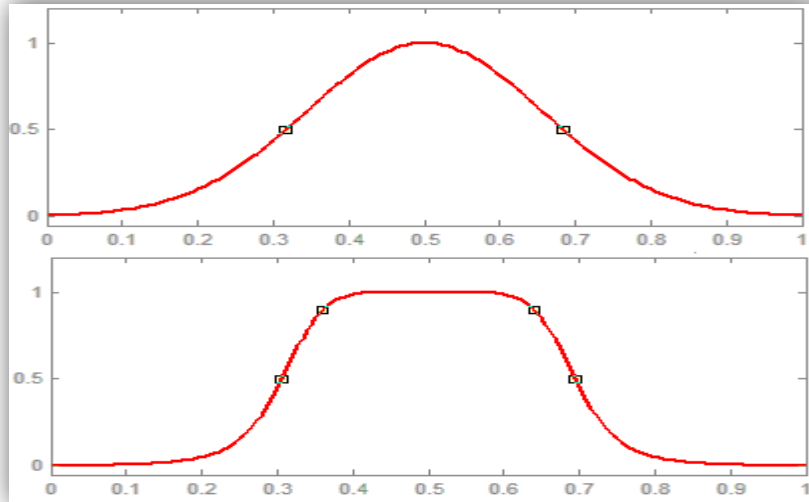
$$\mu_{gauss} = (x; c, \sigma) = e^{-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

Η Γκαουσιανή συνάρτηση συμμετοχής προσδιορίζεται επακριβώς από δύο παραμέτρους c και σ . Το c αναπαριστά το κέντρο της και το σ το πλάτος της.

Η γενικευμένη συνάρτηση συμμετοχής με μορφή καμπάνας ή Bell έχει τρεις παραμέτρους a , b και c , δηλαδή μια παραπάνω από την γκαουσιανή και περιγράφεται από τη σχέση:

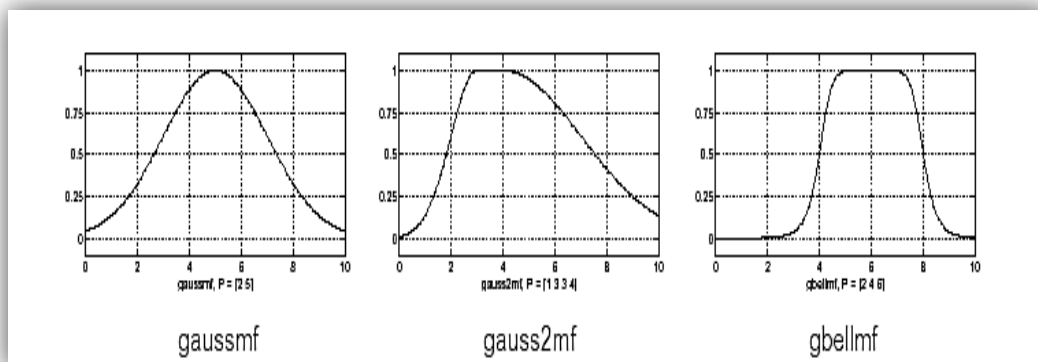
$$\mu_{gbell} = (x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}, b > 0$$

Οι παράμετροι c και σ για τη συνάρτηση συμμετοχής Gauss και a , b , c για τη Bell καθορίζουν τις λεπτομέρειες της μορφής των συναρτήσεων συμμετοχής για το εκάστοτε σύστημα.



Εικόνα 2.5: Υπόδειγμα συνάρτησης συμμετοχής Gauss και Bell.

Λόγω της ομαλότητάς τους και του ακριβούς προσδιορισμού τους, η γκαουσιανή και η καμπανοειδής MFs τείνουν να χρησιμοποιούνται ολοένα και πιο συχνά στον προσδιορισμό των ασαφών συνόλων. Έχουν το πλεονέκτημα να διατηρούν μη μηδενικές τιμές σε όλα τα σημεία αλλά δεν μπορούν να προσδιορίσουν ασύμμετρες συναρτήσεις συμμετοχής.



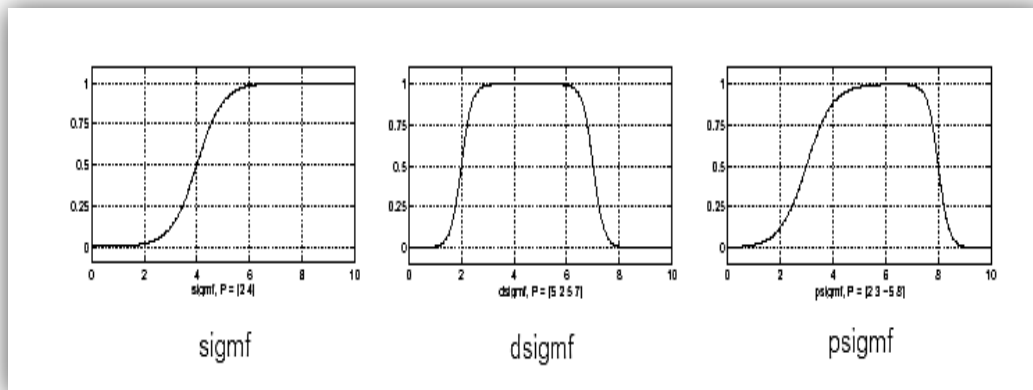
Σχήμα 2.7: Γκαουσιανή, Διπλή Γκαουσιανή και Καμπανοειδής συνάρτηση συμμετοχής.

Παρά το γεγονός ότι η γκαουσιανή συνάρτηση συμμετοχής και η συνάρτηση καμπάνας επιτυγχάνουν ομαλή διακύμανση δε μπορούν ωστόσο να ορίσουν ασύμμετρες συναρτήσεις συμμετοχής που είναι χρήσιμες σε πολλά πρακτικά προβλήματα. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται η σιγμοειδής συνάρτηση συμμετοχής η οποία είναι ασύμμετρη και ανοικτή είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά. Κλειστές συναρτήσεις συμμετοχής αυτού του τύπου μπορούν να παραχθούν αν συνθέσουμε δύο σιγμοειδείς. Έτσι προκύπτει η διαφορά μεταξύ δύο σιγμοειδών και το άθροισμα τους.

Η σιγμοειδής συνάρτηση συμμετοχής έχει μορφή:

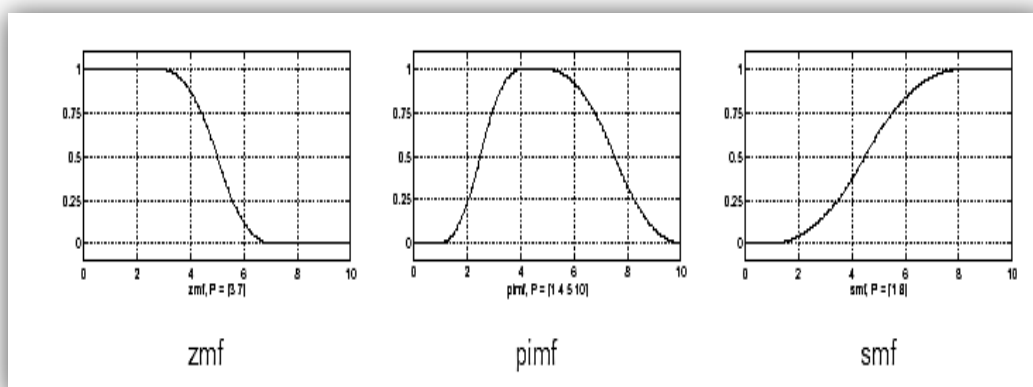
$$\text{sigmf}(x; \alpha, c) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(x-c)}}$$

Το α ρυθμίζει την κλίση στο σημείο διασταύρωσης $x=c$. Ανάλογα με την τιμή που θα πάρει το α , η σιγμοειδής MF είναι ανοιχτή αριστερά, ή ανοιχτή δεξιά και επομένως είναι κατάλληλη να χρησιμοποιηθεί στην αναπαράσταση εννοιών όπως «πολύ μεγάλο» ή «πολύ αρνητικό».



Σχήμα 2.8: Σιγμοειδής, Διαφορά σιγμοειδών και Άθροισμα σιγμοειδών συναρτήσεων συμμετοχής.

Επίσης υπάρχουν πολλές πολυωνυμικές καμπύλες που τις χρησιμοποιούμε σαν συναρτήσεις συμμετοχής. Τρεις από αυτές είναι η Z, η S και η Π οι οποίες έχουν ονομασθεί έτσι εξαιτίας του σχήματός τους. Η Z είναι μια ασύμμετρη πολυωνυμική καμπύλη που είναι ανοικτή στα αριστερά, η S είναι η κατοπτρική της Z και η Π είναι μια ασύμμετρη κλειστή καμπύλη σχήματος Π.



Σχήμα 2.9: Συναρτήσεις Συμμετοχής Πολυωνυμικών καμπύλων Z, Π και S.

2.7 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Για τα ασαφή σύνολα ορίζονται πράξεις και ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές που ισχύουν στα κλασικά σύνολα. Ορισμένες από αυτές, όπως είναι η ένωση και η τομή, ορίζονται μέσω των τελεστών $\min$ και $\max$ που συμβολίζονται με $\wedge$ και $\vee$ αντίστοιχα. Οι τελεστές αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επιλογή του μικρότερου και του μεγαλύτερου αντίστοιχα μεταξύ δύο στοιχείων (π.χ. $3 \wedge 4 = 3$, $3 \vee 4 = 4$) ή μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου. Το σύμβολο του εκάστοτε τελεστή μπορεί να γραφεί και στην αρχή των στοιχείων του συνόλου (προθεματική γραφή) ως εξής:

$$\mu = \wedge(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \wedge_{k=1}^n (\mu_k)$$

Το σύνολο A μπορεί να προσδιοριστεί επομένως από το σύνολο των παρακάτω ζευγών:

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

Κάθε ζευγάρι $(x, \mu_A(x))$ ονομάζεται **μονοσύνολο**.

Χώρος αναφοράς του ασαφούς συνόλου A είναι το σύνολο των στοιχείων του X που έχουν μη μηδενικό βαθμό συμμετοχής στο A .

$$\text{Supp } A = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}.$$

Το σύνολο A μπορεί να γραφεί και ως:

$$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \dots$$

$$A = \sum (\mu_i/x_i)$$

Στο συνεχή χώρο αναφοράς :

$$A = \int_x^\infty \mu_A(x) / x$$

Ασαφές δυναμοσύνολο $F(x)$, του υπερσυνόλου αναφοράς X , ονομάζεται το σύνολο όλων των ασαφών υποσυνόλων του X

Το σύνολο A είναι **υποσύνολο** του B ($A \subseteq B$) αν και μόνο αν

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$$

Αν ταυτόχρονα τα A και B δεν είναι ίσα , τότε το A θα ονομάζεται γνήσιο υποσύνολο του B

Μια οικογένεια ασαφών υποσυνόλων του X , θα λέγεται **ασαφής διαμέριση** $P^n(X)$ του X τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) και θα συμβολίζεται με $A^n = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, αν και μόνο αν:

$$A_j \neq A_i, \forall i, j \in N_n (i \neq j)$$

$$0 < \sum_{k=1}^m A_i(x_k) < m, \forall i \in N_n$$

Τα στοιχεία A_i $i \in N_n$ της A_n θα λέγονται κλάσεις της ασαφούς διαμέρισης

Πιο αναλυτικά, ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- Ένα ασαφές σύνολο ονομάζεται κανονικό αν υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού του για το οποίο $\mu(x_0)=1$.
- Δύο ασαφή σύνολα A και B ορισμένα στο ευρύτερο σύνολο αναφοράς X είναι ισοδύναμα αν οι συναρτήσεις συμμετοχής τους είναι ίσες σε όλο το πεδίο ορισμού τους. Δηλαδή:

$$A=B \text{ αν } \mu_A(x)=\mu_B(x), \forall x \in X$$

- Το συμπληρωματικό ενός ασαφούς συνόλου A είναι το $\bar{A}$ με συνάρτηση συμμετοχής:

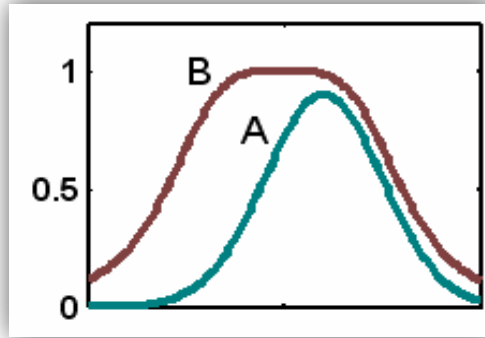
$$\bar{A} = X - A \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Η συμπληρωματικότητα στα ασαφή σύνολα είναι ισοδύναμη της άρνησης (NOT) στην ασαφή λογική.

- Για δύο ασαφή σύνολα A και B ορισμένα στο X , το A είναι υποσύνολο (subset, containment) του B , $A \subseteq B$ αν

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$$

Το σχήμα 2.10 απεικονίζει την έννοια του υποσυνόλου, όπου το A ασαφές σύνολο εμπεριέχεται στο B .



Σχήμα 2.10: Αναπαράσταση έννοιας υποσυνόλου στα ασαφή σύνολα.

- Η ένωση δύο ασαφών συνόλων A και B ορισμένων στο ίδιο υποσύνολο X είναι ένα νέο ασαφές σύνολο $C = A \cup B$, ή αλλιώς $C = A \text{ OR } B$, ορισμένο επίσης στο X , για το οποίο ισχύει:

$$A \cup B: \mu_{A \cup B}(x) = \vee(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X \text{ ή}$$

$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

Η ένωση δύο ασαφών συνόλων σχετίζεται με τη διάζευξη (OR) της ασαφούς λογικής.

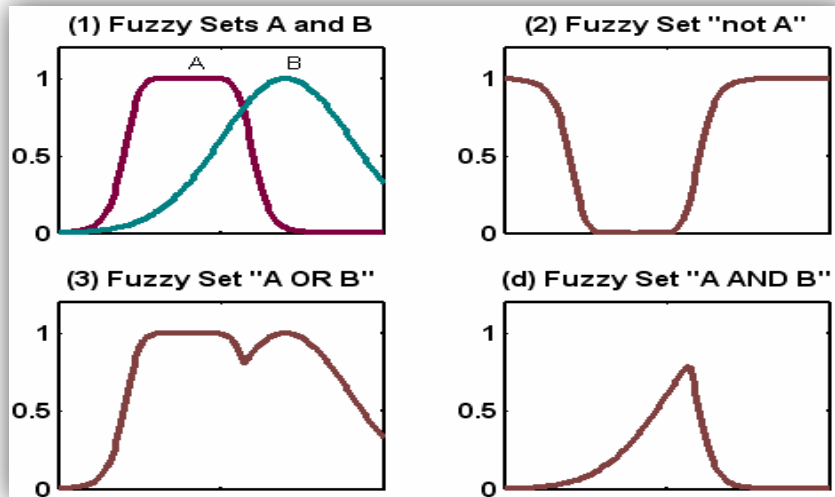
- Η τομή δύο ασαφών συνόλων A και B ορισμένων στο ίδιο σύνολο X είναι ένα ασαφές σύνολο $C = A \cap B$, ή αλλιώς $C = A \text{ AND } B$ ορισμένο επίσης στο X , για το οποίο ισχύει:

$$A \cap B: \mu_{A \cap B}(x) = \wedge(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X \text{ ή}$$

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

Η τομή δύο ασαφών συνόλων σχετίζεται με τη σύζευξη (AND) της ασαφούς λογικής.

Το σχήμα απεικονίζει (1) δύο ασαφή σύνολα A και B , (2) το $\bar{A}$, (3) την ένωση $A \cup B$, (4) την τομή $A \cap B$.



Σχήμα 2.11: Αναπαράσταση ένωσης-τομής ασαφών συνόλων.

- Κενό ασαφές σύνολο « $\emptyset$ » είναι αυτό για το οποίο η συνάρτηση συμμετοχής έχει την τιμή 0 σε όλο το πεδίο ορισμού του.
- Το γινόμενο δύο ασαφών συνόλων A και B ορισμένων στο X, είναι ένα νέο ασαφές σύνολο του οποίου η συνάρτηση συμμετοχής ισούται με το αλγεβρικό γινόμενο των αντίστοιχων συναρτήσεων συμμετοχής των A και B.

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x), \forall x \in X$$

- Το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού α με ένα ασαφές σύνολο A, δίνει ένα νέο ασαφές σύνολο $\alpha \cdot A$ για το οποίο ισχύει:

$$\mu_{\alpha \cdot A}(x) = \alpha \cdot \mu_A(x), \forall x \in X$$

- Ένα ασαφές σύνολο μπορεί να υψωθεί στη δύναμη α (θετικός πραγματικός αριθμός), υψώνοντας στο α τη συνάρτηση συμμετοχής του.

$$\mu_A^\alpha(x) = [\mu_A(x)]^\alpha, \forall x \in X$$

Η ύψωση ενός ασαφούς συνόλου στη δεύτερη δύναμη ($\alpha=2$), λαμβάνεται συνήθως ως μεταβολή της λεκτικής τιμής που αντιστοιχεί στο ασαφές σύνολο και συμβολίζεται με τον όρο «πολύ». Για παράδειγμα η ύψωση ενός συνόλου $A = \{\text{μικροί ακέραιοι}\}$ στη δεύτερη δύναμη δίνει $A^2 = \{\text{πολύ μικροί ακέραιοι}\}$.

Στην ασαφή θεωρία συνόλων, σε αντιστοιχία με την κλασική θεωρία συνόλων, ισχύουν τα παρακάτω για τα ασαφή σύνολα A , B και C ορισμένα στο ίδιο σύνολο X :

→ Νόμος της διπλής άρνησης: $(\bar{\bar{A}}) = A$

→ Ταυτοδυναμία: $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$

→ Προσεταιριστική ιδιότητα: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ και
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

→ Επιμεριστική ιδιότητα: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ και
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

→ Απορροφητική ιδιότητα: $A \cap (A \cup B) = A$ και $A \cup (A \cap B) = A$

→ Νόμος του De Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ και $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Όλες οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών συνόλων A , B και C αντί για τα ίδια τα ονόματά τους. Για παράδειγμα η αντιμεταθετική ιδιότητα θα μπορούσε να γραφεί και σαν:

$$\mu_A(x) \cap \mu_B(x) = \mu_B(x) \cap \mu_A(x)$$

Υπάρχουν μερικές ιδιότητες της κλασικής θεωρίας συνόλων που δεν ισχύουν στην περίπτωση των ασαφών συνόλων. Για παράδειγμα η σχέση $A \cap \bar{A} = \emptyset$, που στην κλασική θεωρία συνόλων αποτελεί το νόμο της αντίφασης, στη θεωρία των ασαφών συνόλων γίνεται:

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

Παρόμοια η σχέση που στην κλασική θεωρία συνόλων αποτελεί το νόμο του αποκλειόμενου μέσου, στη θεωρία των ασαφών συνόλων γίνεται:

$$A \cup \bar{A} \neq X$$

2.8 ΛΟΓΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί στα ασαφή σύνολα και καθόλου στην ασαφή λογική. Η ασαφής λογική δεν είναι παρά ένα υπερσύνολο της λογικής Boolean. Αν δηλαδή απομονώσουμε τους ακραίους βαθμούς συμμετοχής 0 (πλήρως ψευδές) και 1 (πλήρως αληθές) τότε οι κλασικοί λογικοί τελεστές μπορούν να εφαρμοσθούν. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα αληθείας:

A	B	A and B	A	B	A or B	A	not A
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		
AND			OR			NOT	

Σχήμα 2.12: Πίνακας αληθείας Boolean.

Μεταβαίνοντας στον χώρο της ασαφούς λογικής πρέπει να έχουμε κατά νου ότι οι έννοιες αληθές και ψευδές είναι θέμα βαθμού συμμετοχής. Επομένως ο πίνακας αυτός πρέπει να μετατραπεί με τρόπο που να συμπεριλαμβάνει αυτήν την αρχή. Οι τιμές των εισόδων A και B είναι τώρα πραγματικοί αριθμοί από το 0 μέχρι το 1. Πρέπει λοιπόν να ευρεθεί μια συνάρτηση που να διατηρεί τις ιδιότητες της συνάρτησης AND και ταυτόχρονα να μπορεί να επεκτείνεται για πραγματικούς αριθμούς.

Μια πιθανή απάντηση μπορεί να είναι ο τελεστής $\min(A,B)$, η ελάχιστη δηλαδή τιμή των εισόδων A και B. Με βάση το ίδιο σκεπτικό, μια συνάρτηση που μπορεί να αντικαταστήσει τον τελεστή OR της Boolean λογικής είναι ο τελεστής $\max(A,B)$. Τέλος ο τελεστής NOT A μπορεί να αντικατασταθεί με την πράξη $1-A$.

Παρακάτω βλέπουμε ότι ο πίνακας αληθείας παραμένει αμετάβλητος αν εφαρμόσουμε τις παραπάνω υποκαταστάσεις.

A	B	$\min(A,B)$	A	B	$\max(A,B)$	A	$1-A$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

AND

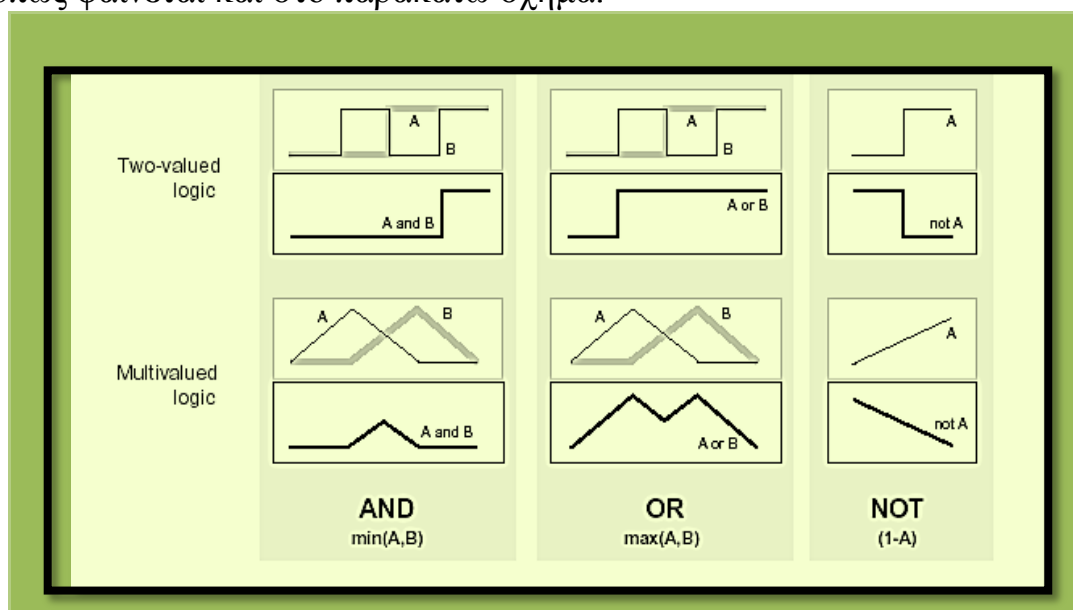
OR

NOT

Σχήμα 2.13: Πίνακας αληθείας ασαφούς λογικής.

Αφού έχουμε ορίσει συναρτήσεις που μπορούν να ορίσουν τον πίνακα αληθείας, μπορούμε πλέον να επεκταθούμε και στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε αντικαταστήσει τον πίνακα αληθείας με ένα γράφημα δύο ασαφών συνόλων. Στο πάνω μέρος έχουμε την περίπτωση συνόλων με δύο τιμές ενώ στο κάτω φαίνεται ο τρόπος που φαίνεται πως λειτουργούν οι τελεστές στην περίπτωση που οι τιμές αληθείας A και B μεταβάλλονται συνεχώς από το 0 στο 1.

Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε νέες καμπύλες από ήδη υπάρχουσες, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.14: Κατασκευή νέων καμπυλών από ήδη υπάρχουσες, με τη βοήθεια των τελεστών.

Στην ασαφή λογική χρησιμοποιούμε τους τελεστές ΚΑΙ (AND), Ή (OR), και ΟΧΙ (NOT), που είναι γενικοί μηχανισμοί πραγματοποίησης πράξεων.

Το ΚΑΙ (AND) υλοποιείται μέσα από την πράξη min ή την πράξη product (prod) ή αλλιώς γινόμενο.

Το Ή (OR) υλοποιείται μέσα από την πράξη max ή μέσα από το αλγεβρικό άθροισμα που ισούται με “ $a+b-ab$ ”. Στα αγγλικά λέγεται επίσης και probabilistic OR.

Έχουμε ορίσει την τομή, την ένωση και το συμπλήρωμα ενός ασαφούς συνόλου με τους τελεστές min, max, $1-A$ οι οποίοι είναι οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενοι. Ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες συναρτήσεις για τον ίδιο σκοπό.

Ειδικότερα, η τομή δύο ασαφών συνόλων A και B προσδιορίζεται γενικώς από μια δυαδική απεικόνιση T που αθροίζει (aggregates) τις δύο συναρτήσεις συμμετοχής ως εξής:

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Αυτού του είδους οι τελεστές τομής αναφέρονται συνήθως ως τελεστές T-norm (τριγωνική νόρμα, triangular norm) και πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω προϋποθέσεις:

Οριακές συνθήκες:	$T(0, 0) = 0, \quad T(a, 1) = T(1, a) = a$
Μονοτονία:	$T(a, b) \leq T(c, d), \quad \text{if } a \leq c \text{ and } b \leq d$
Αντιμεταθετικότητα:	$T(a, b) = T(b, a)$
Συσχέτιση:	$T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$

- Η πρώτη προϋπόθεση επιβάλλει τη γενίκευση σε σύνολα διακριτών τιμών (crisp sets).
- Η δεύτερη δείχνει ότι μια μείωση στους βαθμούς (τιμές) συμμετοχής στο A ή στο B , δεν μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση του βαθμού συμμετοχής της τομής των A και B ($A \cap B$).
- Η τρίτη προϋπόθεση δείχνει ότι ο τελεστής είναι αδιάφορος για τη σειρά με την οποία θα εκτελεστούν οι πράξεις των ασαφών συνόλων.
- Τέλος η τέταρτη προϋπόθεση μας επιτρέπει να παίρνουμε τομές μεταξύ οποιονδήποτε συνόλων σε οποιαδήποτε διάταξη ζευγών.

Τέσσερις από τους πιο γνωστούς τελεστές T-norm είναι:

Minimum:	$T_{\min}(\alpha, b) = \min(\alpha, b) = \alpha \wedge b$
Αλγεβρικό Γινόμενο:	$T_{ap}(\alpha, b) = \alpha b$
Καθορισμένο Γινόμενο:	$T_{bp}(\alpha, b) = 0 \vee (\alpha + b - 1)$
Δραστικό Γινόμενο:	$T_{dp}(\alpha, b) = \begin{cases} \alpha, & \alpha \vee b = 1 \\ b, & \alpha \wedge \alpha = 1 \\ 0, & \alpha \wedge \alpha, b < 1 \end{cases}$,όπου $0 \leq \alpha, b \leq 1$

Ο τελεστής της ασαφούς ένωσης προσδιορίζεται με μια δυαδική αντιστοίχιση S:

$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Οι ασαφείς τελεστές ένωσης αναφέρονται συνήθως ως T-conorm (ή S-norm) και πρέπει να πληρούν τις παρακάτω προϋποθέσεις:

Οριακές συνθήκες:	$S(1, 1) = 1, \quad S(a, 0) = S(0, a) = a$
Μονοτονία:	$S(a, b) \leq S(c, d), \text{ if } a \leq c \text{ and } b \leq d$
Αντιμεταθετικότητα:	$S(a, b) = S(b, a)$
Συσχέτιση:	$S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$

Οι επεξηγήσεις είναι ίδιες με αυτές των T-norm όπως εκφράστηκαν παραπάνω.

Τέσσερις από τους πιο γνωστούς τελεστές T-conorm είναι:

Maximum:	$S_{\max}(\alpha, b) = \max(\alpha, b) = \alpha \vee b$
Αλγεβρικό Άθροισμα:	$S_{as}(\alpha, b) = \alpha + b - \alpha b$
Καθορισμένο Άθροισμα:	$S_{bs}(\alpha, b) = 1 \wedge (\alpha + b)$
Δραστικό Άθροισμα:	$S_{ds}(\alpha, b) = \begin{cases} \alpha, & \alpha \vee b = 0 \\ b, & \alpha \wedge \alpha = 0 \\ 1, & \alpha \wedge \alpha, b > 0 \end{cases}$,όπου $0 \leq \alpha, b \leq 1$

Τέλος το συμπλήρωμα A' ενός ασαφούς συνόλου A δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{A'}(x) = c(\mu_A(x))$$

όπου η συνάρτηση c πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

Οριακές συνθήκες:	$c(0)=1$ και $c(1)=0$
Μονοτονία:	$\forall a, b \in [0,1], \text{ αν } a \leq b \Rightarrow c(a) \geq c(b)$
Συνέχεια:	c συνεχής στο $[0,1]$.
Επαγωγή:	$\forall a \in [0,1], \text{ είναι } c(c(a)) = a$

Το σύννηθες συμπλήρωμα δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

2.9 ΑΣΑΦΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Οι ασαφείς σχέσεις (fuzzy relations) είναι ασαφή σύνολα ορισμένα σε πεδία αναφοράς ανώτερης διάστασης (π.χ. $X \times X$, $X \times Y \times Z$ κλπ). Ποιοτικά, μια ασαφής σχέση R θα μπορούσε να είναι μια έκφραση της μορφής «είναι βαρύτερο από» και η οποία θα συνδέει τα στοιχεία δύο άλλων συνόλων:

$R = \langle\langle x \text{ είναι βαρύτερο από } y \rangle\rangle$, όπου $x \in X$, $y \in Y$ και $R \in X \times Y$

Οι ασαφείς σχέσεις μπορεί να εκφραστούν με αναφορά όλων των ζευγών (τιμή, βαθμός συμμετοχής), δηλαδή ζευγών της μορφής $[(x,y), \mu_R(x,y)]$. Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης, ιδιαίτερα χρήσιμος σε υπολογισμούς είναι σε μορφή πίνακα:

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \cdots & \mu_R(x_1, y_n) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \cdots & \mu_R(x_2, y_n) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mu_R(x_m, y_1) & \mu_R(x_m, y_2) & \cdots & \mu_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

Οι ασαφείς σχέσεις μπορούν να συνδυαστούν μεταξύ τους μέσω της διαδικασίας της σύνθεσης (composition). Αν για παράδειγμα συνδυαστεί η ασαφής σχέση $R_1(x,y)$ ορισμένη στο $X \times Y$ με την ασαφή σχέση $R_2(y,z)$ ορισμένη στο $Y \times Z$ τότε θα προκύψει μία ασαφής σχέση $R(x,z)$ η οποία θα ορίζεται στο σύνολο $X \times Z$ και θα συσχετίζει άμεσα στοιχεία των συνόλων X και Z . Βέβαια είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί επακριβώς η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_R(x,z)$ της R με χρήση των συναρτήσεων συμμετοχής των R_1 και R_2 , δηλαδή των $\mu_{R_1}(x, y)$ και $\mu_{R_2}(y, z)$.

Οι βασικές πράξεις που ορίζονται μεταξύ των ασαφών σχέσεων είναι η αντιστροφή και η σύνθεση.

- Αντίστροφη σχέση της $R(X,Y)$ είναι η ασαφής σχέση $R^{-1}(X,Y)$ με τύπο: $R^{-1}(x, y) = R(x, y)$ για κάθε x που ανήκει στον X και για κάθε y που ανήκει στον Y . Ο πίνακας συμμετοχής που παριστάνει την R^{-1} είναι ο ανάστροφος του R .
- Η σύνθεση είναι πολύ σημαντική διαδικασία καθώς όπως θα δούμε παρακάτω οι κανόνες της μορφής if-then αντιστοιχούν σε ασαφείς σχέσεις και το πρόβλημα της ασαφούς συλλογιστικής είναι μαθηματικά ισοδύναμο με τη σύνθεση. Οι περισσότεροι γνωστές μέθοδοι σύνθεσης ασαφών συνόλων είναι η σύνθεση max-min (max-min composition) και η σύνθεση max-product (max-product composition).

Αν $R_1(x,y)$ και $R_2(y,z)$ είναι δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στα σύνολα $X \times Y$ και $Y \times Z$ αντίστοιχα, τότε η σύνθεση τους δίνει μια νέα σχέση $R_1 \circ R_2$ ορισμένη στο $X \times Z$.

Η sup-t σύνθεση $R: X \times Y \rightarrow [0,1]$ δύο ασαφών σχέσεων:

$R_1: X \times Y \rightarrow [0,1]$ και $R_2: X \times Y \rightarrow [0,1]$ ορίζεται από την εξίσωση:

$$R(x, y) = [R_1 \circ R_2](x, y) = \sup_{y \in Y} t[R_1(x, y), R_2(y, z)]$$

Η συνάρτηση συμμετοχής για την περίπτωση της max-min σύνθεσης δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z)]$$

Στην περίπτωση της σύνθεσης max-product έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(y, z)]$$

2.10 ΑΣΑΦΗΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ

Η βάση πάνω στην οποία στηρίζεται η λήψη αποφάσεων είναι η παραγωγή συλλογιστικής. Η ασαφής λογική ασχολείται με την παραγωγή συλλογιστικής σε περιβάλλον αβεβαιότητας. Για το σκοπό αυτό, θεμελιώνεται η δομή και η μαθηματική αναπαράσταση ενός ασαφούς γεγονότος με τον ορισμό των ασαφών συνόλων και καθορίζεται ο τρόπος με τον οποίο συνδυάζουμε τα γεγονότα για να παράγουμε λογικές προτάσεις ή σχέσεις και συνεπώς συμπεράσματα.

Οι συλλογιστικοί τρόποι που κυρίως χρησιμοποιούνται είναι τρεις:

- Ο **modus ponens (MP)** παράγει συμπεράσματα από ένα σύνολο υποθέσεων σύμφωνα με το σχήμα:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

όπου A και B συγκεκριμένα γεγονότα. Ο παραπάνω κανόνας ερμηνεύεται ως εξής: Αν το γεγονός A συνεπάγεται το γεγονός B και επιπλέον έχουμε ως υπόθεση ότι ισχύει το A, τότε το συμπέρασμα που παίρνουμε είναι ότι ισχύει και το B. Όμως σε περιβάλλον ασάφειας τα γεγονότα ισχύουν σε κάποιο βαθμό.

Έτσι ο παραπάνω κανόνας πρέπει να τροποποιηθεί για να συμπεριλάβει και την ασάφεια. Καταλήγουμε με αυτόν τον τρόπο στο **γενικευμένο κανόνα modus ponens (generalized modus ponens)** ο οποίος έχει την παρακάτω μορφή:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A' \Rightarrow B'$$

- Αντίστοιχα ο **γενικευμένος κανόνας modus tolens (MT) (generalized modus tolens)** διατυπώνεται ως εξής:

$$(A \Rightarrow B) \wedge B' \Rightarrow A'$$

Ας εξετάσουμε τώρα την ερμηνεία των παραπάνω κανόνων. Για παράδειγμα ο γενικευμένος κανόνας modus ponens ερμηνεύεται ως εξής:

Αν το γεγονός A συνεπάγεται το γεγονός B και έχουμε ως υπόθεση ότι ισχύει το A σε κάποιο βαθμό, τότε θα ισχύει και το B σε κάποιο βαθμό. Πρέπει λοιπόν να προσδιοριστεί ο βαθμός στον οποίο πληρείται το γεγονός B. Αυτός εξαρτάται από το βαθμό στον οποίο πληρείται το γεγονός A και από το είδος της συνεπαγωγής που εφαρμόζουμε.

Η πράξη της ασαφούς συνεπαγωγής υλοποιεί τη μαθηματική σχέση $A \Rightarrow B$, όταν τα A και B είναι ασαφή γεγονότα.

Το σχήμα που προτείνεται από τη θεωρία των ασαφών συνόλων για την εξαγωγή του γεγονότος B' από τα γεγονότα A, A', B περιγράφεται από την παρακάτω σχέση που αποτελεί το **συνθετικό κανόνα του Zadeh**:

$$B'(y) = \sup_{x \in X} t[A'(x), \sigma(A(x), B(y))]$$

όπου σ είναι μια συνάρτηση που υλοποιεί την πράξη της ασαφούς συνεπαγωγής.

Επομένως η επιλογή της συνάρτησης που υλοποιεί την ασαφή συνεπαγωγή έχει ουσιαστικό ρόλο για την ασαφή συλλογιστική που παράγεται με βάση το παραπάνω σχήμα. Ένα από τα κριτήρια που χρησιμοποιείται γι' αυτή την επιλογή είναι το **κριτήριο της ανάκλησης (recall)**, το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

$$B(y) = \sup_{x \in X} t[A(x), \sigma(A(x), B(y))]$$

Το κριτήριο αυτό έχει την εξής ερμηνεία: η ασαφής συνεπαγωγή πρέπει να είναι τέτοια ώστε όταν η υπόθεση πληρείται ακριβώς, τότε να λαμβάνουμε το συμπέρασμα του κανόνα $A \Rightarrow B$, δηλαδή το γεγονός B.

Η απαίτηση αυτή είναι εύλογη αφού όταν δεν υπάρχει αβεβαιότητα η ασαφής συλλογιστική οφείλει να ταυτίζεται με την κλασική συλλογιστική.

2.11 KANONEΣ AN-TOTE (if-then rules)

Τα ασαφή σύνολα και οι ασαφείς τελεστές είναι τα υποκείμενα και τα ρήματα του ασαφούς λογισμού. Οι προτάσεις if-then χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν τις συνθήκες εκείνες που συνιστούν την ασαφή λογική. Ένας απλός κανόνας if-then έχει τη μορφή:

if x is A then y is B,

όπου A και B είναι οι γλωσσικές μεταβλητές που προσδιορίζονται από ασαφή σύνολα με χώρο αναφοράς X και Y αντίστοιχα. Το πρώτο κομμάτι του κανόνα 'if x is A' ονομάζεται υπόθεση (antecedent ή premise) ενώ το δεύτερο κομμάτι 'then y is B' ονομάζεται συνέπεια ή συμπίερασμα (consequent ή conclusion).

Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου κανόνα μπορεί να είναι το εξής:

if service is good then tip is average

Η λέξη *good* αντιπροσωπεύεται από έναν αριθμό που κυμαίνεται ανάμεσα στο 0 και το 1. Έτσι η υπόθεση είναι μια μετάφραση που επιστρέφει μια τιμή από το 0 έως το 1. Από την άλλη μεριά η λέξη *average* αποτελεί ένα ασαφές σύνολο και έτσι η συνέπεια του κανόνα είναι μια συσχέτιση της εξόδου y στο ασαφές σύνολο B.

Στους κανόνες if-then η λέξη 'is' έχει διαφορετική έννοια ανάλογα με το αν εμφανίζεται στο πρώτο ή στο δεύτερο μέρος του κανόνα. Έτσι όταν εμφανίζεται στο πρώτο μέρος του κανόνα έχει την έννοια του ελέγχου ισότητας (δηλαδή την ίδια έννοια που δίνουμε στο σύμβολο =). Αντίθετα όταν εμφανίζεται στο δεύτερο μέρος του κανόνα έχει την έννοια της καταχώρησης (δηλαδή την έννοια που δίνουμε στο σύμβολο =). Ο παραπάνω κανόνας λοιπόν θα μπορούσε να γραφεί συμβολικά και ως εξής:

if service == good then tip = average

Γενικά η είσοδος σε έναν κανόνα if-then είναι η τρέχουσα τιμή της μεταβλητής εισόδου ενώ η έξοδος του κανόνα είναι ολόκληρο το ασαφές σύνολο. Από αυτό όμως το ασαφές σύνολο θα πρέπει να κρατήσουμε μια τιμή έτσι ώστε να μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα. Γι' αυτό πρέπει να γίνει μια διαδικασία που ονομάζεται αποσαφήνιση (defuzzification). Για την αποσαφήνιση αναφερόμαστε εκτενέστερα παρακάτω.

Για να διερμηνεύσουμε έναν κανόνα If-then πρέπει να ακολουθήσουμε κάποια στάδια:

1. Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε την είσοδο. Για να γίνει αυτό όμως πρέπει να γίνει ασαφοποίηση της εισόδου και να εφαρμοσθούν οι κατάλληλοι ασαφείς τελεστές.
2. Να εφαρμόσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στο δεύτερο μέρος του κανόνα

Αν πάρουμε την απλή περίπτωση των δυαδικών τιμών, οι κανόνες if-then είναι αρκετά εύκολο να εφαρμοσθούν. Αν η προϋπόθεση είναι αληθής τότε και η συνέπεια θα είναι αληθής.

Πώς όμως επεκτείνεται η παραπάνω συλλογιστική για να συμπεριλάβει και ασαφείς τιμές; Όταν η προϋπόθεση είναι αληθής σε κάποιο βαθμό τότε και η συνέπεια είναι αληθής στον ίδιο βαθμό.

Με άλλα λόγια:

Δυαδική λογική: $p \rightarrow q$ (Τα p και q είναι είτε πλήρως αληθή ή πλήρως ψευδή)

Ασαφή λογική: $0.5p \rightarrow 0.5q$ (Τα p και q είναι μερικώς αληθή και μερικώς ψευδή)

Η προϋπόθεση ενός κανόνα μπορεί να αποτελείται από περισσότερα του ενός μέρη. Όπως για παράδειγμα ο παρακάτω κανόνας:

if sky is gray and wind is strong and barometer is falling, then ..

Σ' αυτή την περίπτωση όλα τα μέρη της προϋπόθεσης υπολογίζονται ταυτόχρονα και καταλήγουμε σε ένα μοναδικό νούμερο ανάλογα με τους λογικούς τελεστές που χρησιμοποιούμε.

Αλλά και η συνέπεια ενός κανόνα μπορεί να αποτελείται από περισσότερα του ενός μέρη. Για παράδειγμα ο παρακάτω κανόνας:

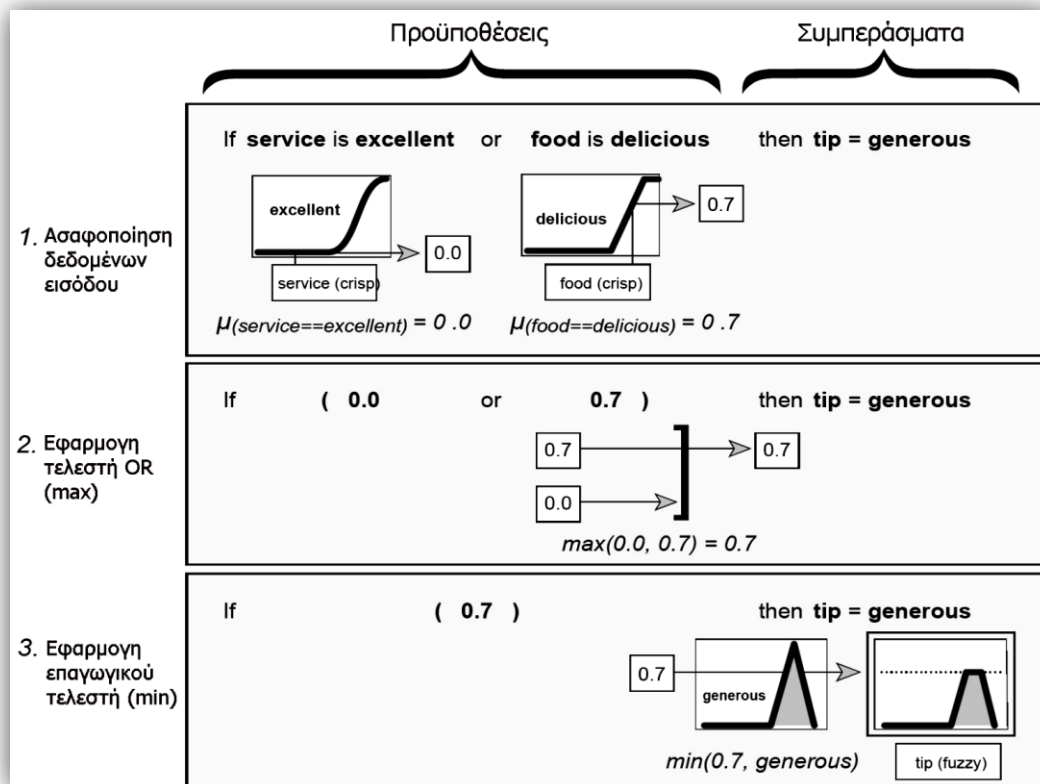
if temperature is cold then hot water valve is open and cold water valve is shut.

Όλα τα μέρη της συνέπειας του κανόνα επηρεάζονται το ίδιο από το αποτέλεσμα της προϋπόθεσης. Η συνέπεια του κανόνα προσδιορίζει ένα

ασαφές σύνολο το οποίο συσχετίζεται με την έξοδο. Η συνάρτηση συνεπαγωγής (implication function) στη συνέχεια, τροποποιεί το ασαφές σύνολο στο βαθμό που προσδιορίζεται από την προϋπόθεση του κανόνα.

Μια πολύ συνηθισμένη συνάρτηση για να γίνει αυτό είναι η αποκοπή με τη χρήση του τελεστή $\min$.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζονται οι κανόνες if-then.



Σχήμα 2.15: Οι κανόνες if-then στην ασαφή λογική.

2.12 ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ (Fuzzy Inference Systems)

Το σημαντικότερο εργαλείο μοντελοποίησης το οποίο βασίζεται στη θεωρία των ασαφών συνόλων είναι το FIS. Το FIS είναι η διαδικασία διατύπωσης και αντιστοίχισης κάποιων εισαγόμενων δεδομένων, σε κάποια εξαγόμενα δεδομένα, κάνοντας χρήση της ασαφούς λογικής. Η αντιστοίχιση των δεδομένων παρέχει μια βάση από την οποία θα εξάγουμε τις αποφάσεις ή θα διακρίνουμε υποδείξεις.

Δύο γνωστοί τύποι FIS υπάρχουν:

- Το Mamdani που πρωτοδιατυπώθηκε το 1975 από τον Ebrahim Mamdani
- Και το Sugeno ή Takagi-Sugeno-Kang που παρουσιάστηκε το 1985.

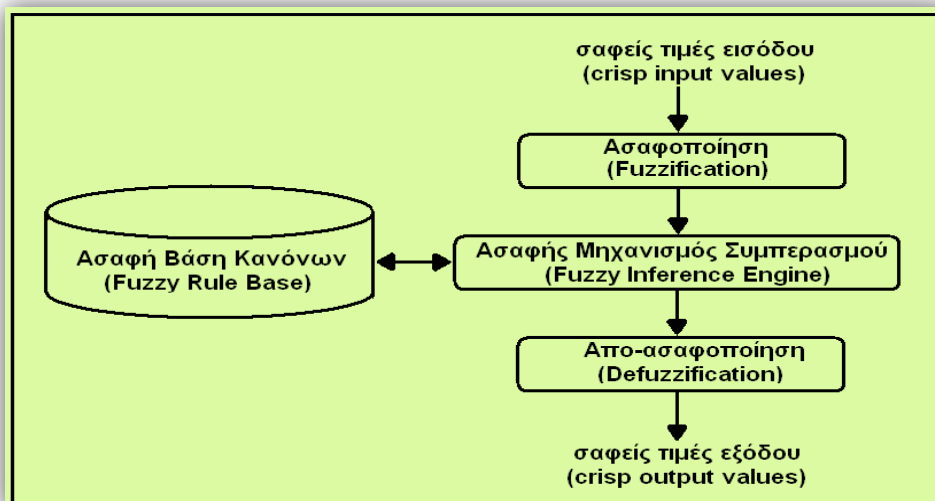
Εφαρμογές των FIS έχουμε σε τομείς όπως ο αυτόματος έλεγχος, η ταξινόμηση δεδομένων, η ανάλυση αποφάσεων, τα έμπειρα συστήματα και η όραση υπολογιστών.

Η βασική δομή ενός FIS αποτελείται από τις ακόλουθες δομικές μονάδες:

- Μία βάση ασαφών κανόνων της μορφής EAN – TOTE (Ασαφής Βάση Γνώσης).
- Μία ασαφή συλλογιστική μηχανή. Αυτή υλοποιεί την εξαγωγή συμπερασμάτων από τις εισόδους του συστήματος με βάση την ασαφή βάση γνώσης.
- Μία μονάδα ασαφοποίησης (ασαφοποιητική μονάδα διεπαφής), η οποία μετατρέπει τα δεδομένα εισόδου σε ασαφή σύνολα.
- Μία μονάδα αποασαφοποίησης (αποασαφοποιητική μονάδα διεπαφής), η οποία μετατρέπει τα ασαφή συμπεράσματα σε σαφώς καθορισμένη μορφή.

Ένα βασικό FIS μπορεί να πάρει είτε ασαφείς εισόδους, είτε σαφείς (συγκεκριμένες) με τη μορφή ασαφών singletons. Η έξοδος όμως που παράγει είναι πάντα ασαφή σύνολα. Μερικές φορές είναι αναγκαίο να έχουμε σαφή έξοδο, ειδικά όταν το FIS χρησιμοποιείται σαν ελεγκτής. Τότε χρειαζόμαστε μια μέθοδο αποασαφοποίησης, για να εξάγουμε ένα σαφές αποτέλεσμα που να αντιπροσωπεύει με τον καλύτερο τρόπο το ασαφές σύνολο.

Με σαφείς εισόδους και εξόδους, ένα FIS υλοποιεί μια μη-γραμμική αντιστοίχιση, από τον χώρο εισόδου σε αυτόν της εξόδου, με έναν αριθμό κανόνων if-then, καθένας εκ των οποίων περιγράφει μια τοπική συμπεριφορά της αντιστοίχισης. Ειδικότερα, το μέρος των προϋποθέσεων ενός κανόνα προσδιορίζει μια ασαφή περιοχή στο χώρο της εισόδου, ενώ αυτός των συμπερασμάτων προσδιορίζει την έξοδο σε μια ασαφή περιοχή.



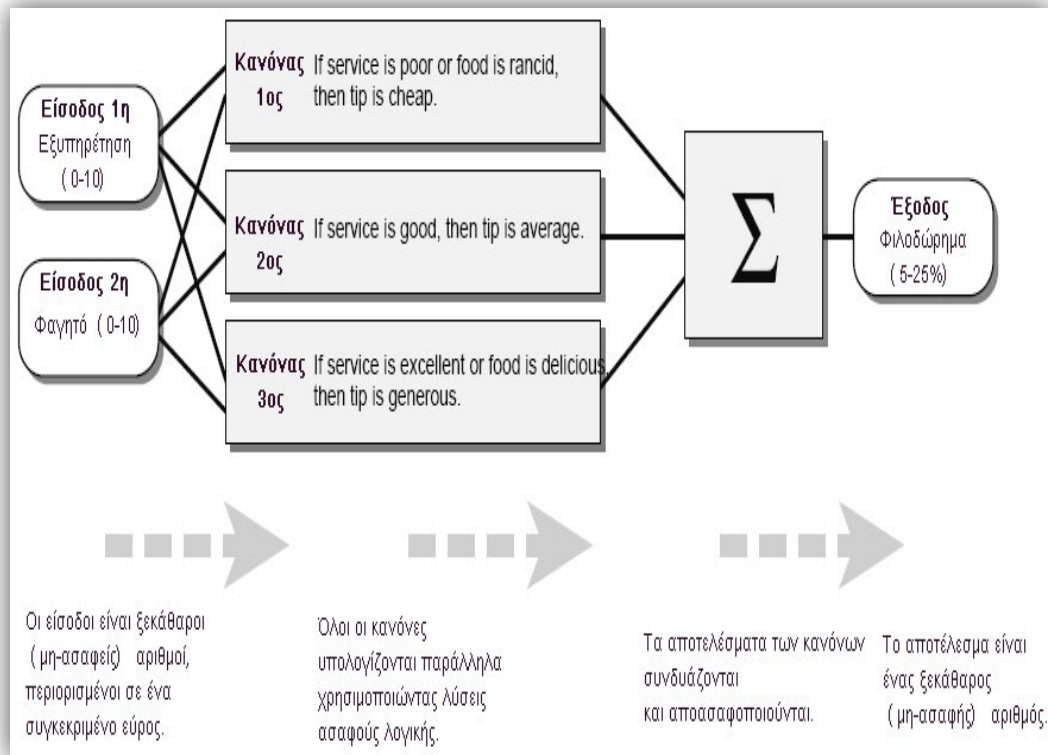
Σχήμα 2.16: Διάγραμμα ενός ασαφούς συστήματος εξαγωγής συμπερασμάτων.

Παρακάτω αναπτύσσεται ο τρόπος με τον οποίο εξελίσσεται η παραπάνω διαδικασία μέσα από ένα σύστημα ασαφούς συλλογιστικής (fuzzy inference system, FIS) που ονομάζεται Mamdani.

2.12.1 FIS ΤΥΠΟΥ MAMDANI

Στο Mamdani, πρέπει οι συναρτήσεις συμμετοχής να είναι ασαφή σύνολα. Μετά την διαδικασία της ενώσεως, υπάρχει ένα ασαφές σύνολο για κάθε μεταβλητή εξόδου που χρειάζεται αποασαφοποίηση.

Θα εξετάσουμε τώρα πως λειτουργεί ένα FIS τύπου Mamdani μέσα από το πρόβλημα του φιλοδωρήματος που αναφέραμε παραπάνω. Το σύστημα έχει δύο εισόδους και τρεις κανόνες. Οι είσοδοι του συστήματος είναι η ποιότητα του φαγητού και η εξυπηρέτηση. Θεωρούμε ότι ο πελάτης βαθμολογεί την ποιότητα του φαγητού και την εξυπηρέτηση με μια κλίμακα από το 0 έως το 10. Η έξοδος του συστήματος είναι το φιλοδώρημα που θα δώσει ο πελάτης, το οποίο κυμαίνεται από 5% έως 25% της τιμής του λογαριασμού. Η βασική δομή του συστήματος φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 2.17: Σύστημα 2 εισόδων, 3 κανόνων και 1 εξόδου.

Η πληροφορία οδεύει από τα αριστερά προς τα δεξιά και καταλήγει σε μία μοναδική έξοδο. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των συστημάτων ασαφούς λογικής είναι η παράλληλη εφαρμογή των κανόνων. Στα κλασικά συστήματα δυαδικής λογικής, έχουμε χρήση διακοπών που ανοίγουν και κλείνουν ανάλογα με τις τιμές των εισόδων. Στα ασαφή συστήματα μεταβαίνουμε ομαλά από περιοχή σε περιοχή ανάλογα με τις συνέπειες των κανόνων.

Η διαδικασία της απεικόνισης των εισόδων στις εξόδους, μέσα από ένα σύστημα ασαφούς λογικής, ακολουθεί πέντε βήματα:

1. Ασαφοποίηση των εισόδων.
2. Εφαρμογή των ασαφών λογικών τελεστών στις προϋπόθεσης των κανόνων.
3. Καθορισμός των συνεπαγωγών των κανόνων.
4. Συγκέντρωση όλων των συνεπαγωγών των κανόνων.
5. Αποασαφοποίηση.

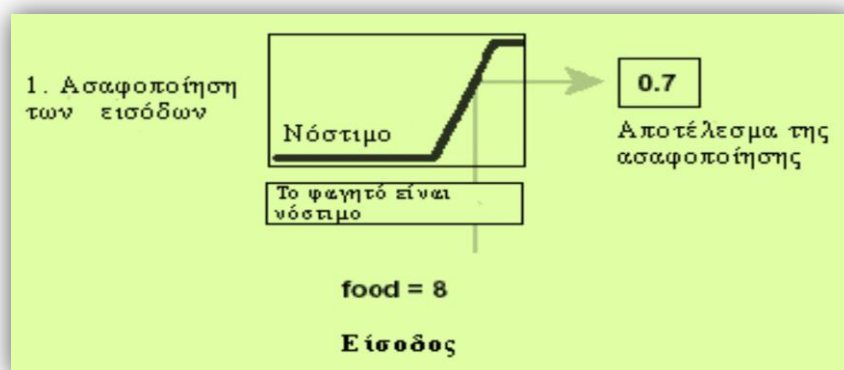
Θα εξετάσουμε κάθε βήμα από τα παραπάνω ξεχωριστά.

ΒΗΜΑ 1^ο Ασαφοποίηση εισόδων

Το πρώτο βήμα έχει να κάνει με την ασαφοποίηση των εισόδων δηλαδή αυτό που κάνουμε είναι να πάρουμε τις εισόδους και να καθορίσουμε σε ποιο βαθμό κάθε είσοδος ανήκει σε ένα ασαφές σύνολο μέσα από τις συναρτήσεις συμμετοχής. Οι εισοδοί είναι αριθμητικές τιμές μέσα στα όρια του χώρου αναφοράς (στην περίπτωση του προβλήματος που εξετάζουμε από 0 μέχρι 10) και οι έξοδοι είναι βαθμοί συμμετοχής στο προσδιορισμένο ασαφές σύνολο.

Η ασαφοποίηση των εισόδων μπορεί να γίνει είτε με χρήση πίνακα τιμών είτε μέσα από μια συνάρτηση. Το παράδειγμα μας είναι δομημένο σε τρεις κανόνες, κάθε ένας από τους οποίους προϋποθέτει την κατάταξη των εισόδων σε διαφορετικές λεκτικές μεταβλητές, π.χ. *service is poor*, *service is good*, *food is rancid*, *food is delicious*.

Πριν να εφαρμοσθούν οι κανόνες θα πρέπει να ασαφοποιηθούν οι εισοδοί σύμφωνα με τις λεκτικές μεταβλητές. Για παράδειγμα, σε ποιο βαθμό το φαγητό είναι νόστιμο. Αν υποθέσουμε ότι το φαγητό έχει αξιολογηθεί με μια συγκεκριμένη βαθμολογία από το 0 έως το 10 (π.χ. 7) τότε πως μπορούμε να συμπεράνουμε σε ποιο βαθμό είναι «νόστιμο»; Θα χρησιμοποιήσουμε μια γραφική απεικόνιση που ουσιαστικά αποτελεί τη συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου «νόστιμο».



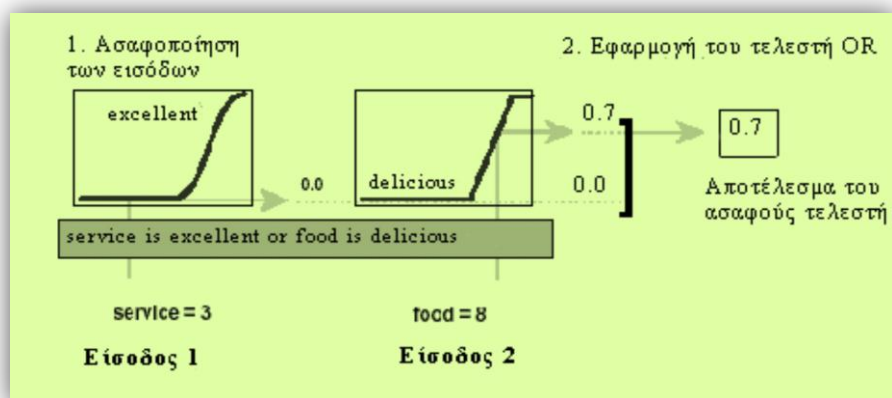
Σχήμα 2.18: Ασαφοποίηση των εισόδων.

ΒΗΜΑ 2^ο. Εφαρμογή των ασαφών τελεστών.

Αφού έχουμε ασαφοποιήσει τις εισόδους, μπορούμε να γνωρίζουμε σε ποιο βαθμό ικανοποιείται κάθε μέρος των προϋποθέσεων των if-then κανόνων. Αν ένας κανόνας if-then έχει στο σκέλος if περισσότερα του ενός μέρη, τότε πρέπει να εφαρμοσθούν οι ασαφείς τελεστές ώστε να καθορισθεί ένα νούμερο που αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα της προϋπόθεσης του κανόνα. Το νούμερο αυτό θα εφαρμοσθεί έπειτα στη

συνάρτηση εξόδου. Οι είσοδοι ενός λογικού τελεστή είναι δύο ή περισσότεροι βαθμοί συμμετοχής που έχουν προκύψει από τις ασαφιοποιημένες μεταβλητές εισόδου. Η έξοδος του τελεστή είναι απλά ένας βαθμός αλήθειας.

Όπως είδαμε κατά την αναφορά στους ασαφείς τελεστές, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός συναρτήσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουν τους τελεστές AND και OR. Συνήθως χρησιμοποιούνται ο τελεστής max για το OR και min για το AND. Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε πως εφαρμόζονται οι τελεστές.



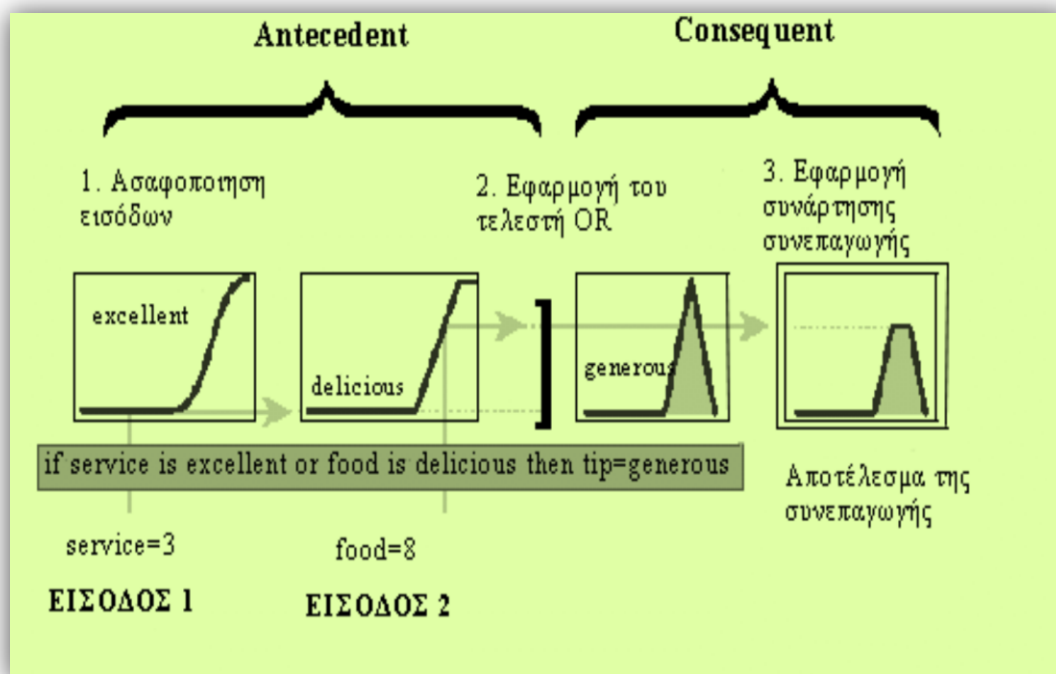
Σχήμα 2.19: Τρεις κανόνες του προβλήματος και ο τρόπος που συνδυάζονται τα αποτελέσματά τους σε ένα ασαφές σύνολο.

ΒΗΜΑ 3^ο Μέθοδος εφαρμογής της συνεπαγωγής (Apply Implication Method).

Για να εφαρμόσουμε την συνάρτηση συνεπαγωγής πρέπει να γνωρίζουμε το βάρος του κάθε κανόνα. Οι κανόνες if-then έχουν βάρη τα οποία εφαρμόζονται στο νούμερο που δίνει το κομμάτι της υπόθεσης και που μπορούν να κυμαίνονται από 0 έως 1. Συνήθως τα βάρη αυτά είναι ίσα με 1, ωστόσο μπορούμε να δώσουμε σ' αυτά μια οποιαδήποτε τιμή από 0 έως 1. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να δώσουμε μικρότερη έμφαση σε έναν κανόνα σε σχέση με κάποιον άλλο, αυτό μπορούμε να το κάνουμε μέσω των τιμών των βαρών τους.

Αφού έχουμε αναθέσει στους κανόνες τα βάρη, μπορούμε να εφαρμόσουμε την συνάρτηση συνεπαγωγής. Το αποτέλεσμα ενός κανόνα if-then είναι ένα ασαφές σύνολο που αντιπροσωπεύεται από μια συνάρτηση συμμετοχής που σταθμίζει κατάλληλα τα λεκτικά χαρακτηριστικά που έχουν ανατεθεί σ' αυτόν. Το αποτέλεσμα αυτό αναδιαμορφώνεται με τη χρήση μιας συνάρτησης που είναι συνδεδεμένη

με το μέρος της υπόθεσης. Η είσοδος για τη διαδικασία συνεπαγωγής είναι ένας αριθμός που δίδεται από την υπόθεση και η έξοδος είναι ένα ασαφές σύνολο. Αυτή η διαδικασία εφαρμόζεται για κάθε κανόνα.

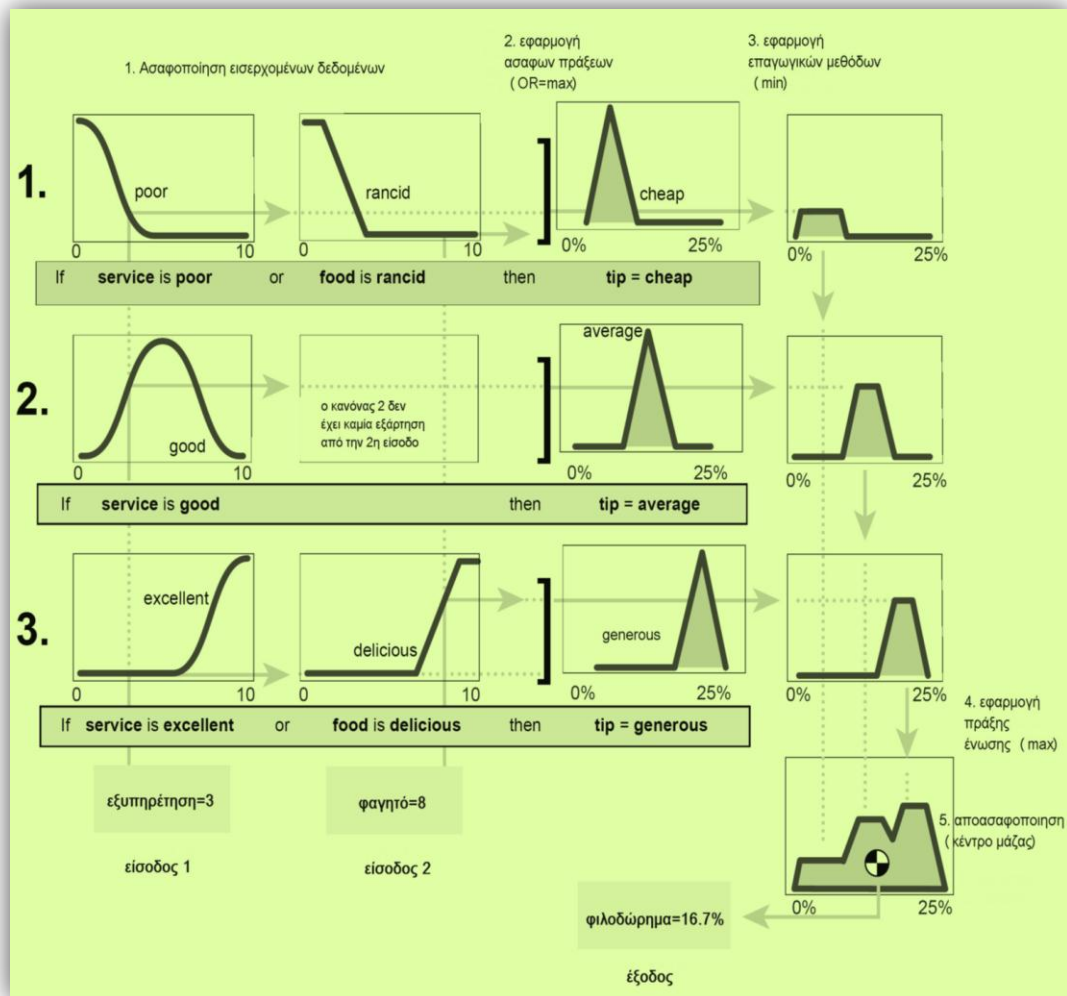


Σχήμα 2.20: Μέθοδος εφαρμογής της συνεπαγωγής.

ΒΗΜΑ 4^ο Συγκέντρωση όλων των εξόδων των κανόνων (aggregation).

Σε ένα FIS οι αποφάσεις βασίζονται στον έλεγχο όλων των κανόνων. Επομένως, όλοι οι κανόνες πρέπει να συνδυαστούν προκειμένου να καταλήξουμε σε μια απόφαση. Η συγκέντρωση των κανόνων είναι μια διαδικασία κατά την οποία όλα τα ασαφή σύνολα που προκύπτουν ως έξοδοι των κανόνων συνδυάζονται ώστε να σχηματίσουν ένα μοναδικό ασαφές σύνολο. Η συγκέντρωση είναι η διαδικασία που προηγείται της αποσαφήνισης και δέχεται ως είσοδο τις αποκομμένες συναρτήσεις εξόδου του προηγούμενου βήματος. Η διαδικασία της συγκέντρωσης των εξόδων είναι αντιμεταθετική και έτσι η σειρά με την οποία εκτελούνται οι κανόνες δεν έχει σημασία στην έκβαση του αποτελέσματος.

Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε τους τρεις κανόνες του προβλήματος και τον τρόπο που συνδυάζονται τα αποτελέσματά τους σε ένα ασαφές σύνολο. Η συνάρτηση που χρησιμοποιείται για τη σύνθεση όλων των εξόδων των κανόνων στο σχήμα είναι η "max".



Σχήμα 2.21: FIS Mamdani, για το ποσοστό φιλοδωρήματος.

ΒΗΜΑ 5^ο Αποασαφοποίηση (defuzzification).

Η είσοδος για τη διαδικασία της αποασαφοποίησης είναι το ασαφές σύνολο που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα. Η έξοδος της αποασαφοποίησης είναι ένας αριθμός. Η αποασαφοποίηση είναι αναγκαία γιατί επιθυμούμε να έχουμε ως αποτέλεσμα έναν αριθμό που θα μας επιτρέψει να πάρουμε συγκεκριμένες αποφάσεις. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να γίνει η αποασαφοποίηση. Ένας ιδιαίτερα δημοφιλής είναι ο υπολογισμός του κέντρου βάρους της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης συμμετοχής του ασαφούς συνόλου. Άλλες επίσης δημοφιλείς μέθοδοι είναι η μέση τιμή, η μέγιστη θέση του μεγίστου και η ελάχιστη θέση του μεγίστου.

Μέθοδος αποασαφοποίησης MAXIMUM

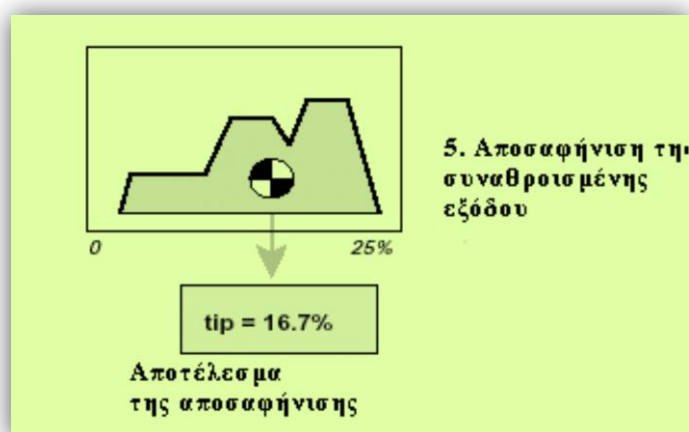
Σύμφωνα με τη μέθοδο αποασαφοποίησης «**maximum**», η διακριτή τιμή είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή συνάρτησης συμμετοχής του τελικού αποτελέσματος. Αν υπάρχουν περισσότερες από μία τέτοιες τιμές, τότε λαμβάνεται ανάλογα με την περίπτωση είτε ο μέσος όρος τους (average-of-maximum) ή η μέγιστη τιμή τους (maximum-of-maximum) ή η ελάχιστη τιμή τους (minimum-of-maximum).

Μέθοδος Κέντρου Βάρους Cendroid

Σύμφωνα με τη μέθοδο αποασαφοποίησης «**cendroid**», η διακριτή τιμή είναι αυτή που προκύπτει από το κέντρο βάρους της τελικής συνάρτησης συμμετοχής για την ασαφή παράμετρο εξόδου. Το κέντρο βάρους μιας επιφάνειας που ορίζεται από μια συνάρτηση $f(t)$ και τους καρτεσιανούς άξονες, βρίσκεται στη θέση t που ορίζεται από τη σχέση:

$$t_{\kappa\beta} = \frac{\int t \cdot f(t) dt}{\int f(t) dt}$$

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε πως εφαρμόζεται η μέθοδος της αποσαφήνισης για το παράδειγμά μας.



Σχήμα 2.22: Γραφική απεικόνιση της μεθόδου αποασαφοποίησης κέντρου βάρους που χρησιμοποιήθηκε στο παράδειγμα.

Στην περίπτωση διακριτού συνόλου αναφοράς, τα ολοκληρώματα στην παραπάνω σχέση αντικαθίστανται με διακριτό άθροισμα και γίνεται δειγματοληψία N σημείων στο σύνολο αναφοράς.

Ένα χαρακτηριστικό της μεθόδου αποασαφοποίησης «cendroid» είναι ότι στην περίπτωση που έχει γίνει σύνθεση αποτελεσμάτων από επιμέρους κανόνες και υπάρχουν τυχόν αλληλοεπικαλυπτόμενες περιοχές, αυτές λαμβάνονται υπόψη μία μόνο φορά. Επίσης, στην περίπτωση που η συνάρτηση συμμετοχής είναι παντού 0, το αποτέλεσμα της αποσαφήνισης ορίζεται κατά σύμβαση.

Μαθηματική ανάπτυξη του μοντέλου του μηχανισμού εξαγωγής συμπεράσματος από ασαφείς κανόνες (Μηχανισμός ασαφούς συλλογισμού-Mechanism of Reasoning).

Οι μηχανισμοί ασαφούς συλλογισμού ή (μηχανισμοί εξαγωγής συμπερασμάτων), αναφέρονται στην μέθοδο με την οποία παράγονται συμπεράσματα από κάθε ασαφή κανόνα IF-THEN και πως αυτά τα αποτελέσματα-συμπεράσματα συνδυάζονται έτσι ώστε να παραχθεί το ολικό αποτέλεσμα από όλους τους ασαφείς κανόνες.

Έστω ότι η ασαφής βάση γνώσης περιέχει n κανόνες IF-THEN της μορφής:

Κανόνας i : IF x is A_i AND y is B_i THEN z είναι C_i ($i=1,...,n$ όπου n : κανόνες)

Κανόνας j : IF x is A_j AND y is B_j THEN z είναι C_j

Όπου A_i , B_i , και C_i είναι ασαφή σύνολα στα σύνολα αναφοράς X , Y και Z αντίστοιχα.

Παρακάτω θα αναλυθεί το μαθηματικό υπόβαθρο του μηχανισμού ασαφούς συλλογισμού κατά τη μέθοδο Mamdani.

Έστω ότι ως είσοδος του συστήματος των n κανόνων είναι τα ασαφή σύνολα A' και B' στα σύνολα αναφοράς X και Y αντίστοιχα.

Βήμα 1^ο: Ασαφοποίηση των εισόδων και Βήμα 2^ο: Εφαρμογή των ασαφών λογικών τελεστών στις υποθέσεις των κανόνων.

Υπολογίζεται η προσαρμοστικότητα (adaptability) του κάθε κανόνα. Για τον κανόνα i έχουμε:

$$W_i = [max_x(\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{A'}(x))] \wedge [max_y(\mu_{B_i}(x) \wedge \mu_{B'}(x))]$$

ενώ για τον κανόνα j είναι:

$$W_j = [max_x(\mu_{A_j}(x) \wedge \mu_{A'}(x))] \wedge [max_y(\mu_{B_j}(x) \wedge \mu_{B'}(x))]$$

Αν οι κανόνες είναι της μορφής

IF x_1 is A_1 AND y_1 is A_1 AND...AND x_m is A_m THEN z είναι C_i

Τότε η προσαρμοστικότητα του κανόνα είναι:

$$W = [max_{x_1}(\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_1'}(x_1))] \wedge [max_{x_2}(\mu_{B_1}(x_2) \wedge \mu_{B_1'}(x_2))] \\ \wedge \dots \wedge [max_{x_m}(\mu_{A_m}(x_m) \wedge \mu_{A_m'}(x_m))]$$

Αν οι είσοδοι του συστήματος είναι αριθμητικές τιμές, έστω x_0 και y_0 τότε η προσαρμοστικότητα του κανόνα i δίνεται από τη σχέση:

$$W_i = \mu_{A_i}(x_0) \wedge \mu_{B_i}(y_0), \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Η σχέση που συνδέει τα μέρη της υπόθεσης δηλαδή τα x is A_i και y is B_i είναι η min στις παραπάνω σχέσεις αλλά θα μπορούσε να είναι και μια οποιαδήποτε t-norm. Οι t-norms μπορούν να μοντελοποιήσουν και το λογικό AND των ασαφών κανόνων.

Βήμα 3^ο: Εφαρμογή των συνεπαγωγών.

Οι συνεπαγωγές είναι εκείνες οι συναρτήσεις που συνδέουν την υπόθεση ενός κανόνα με το συμπέρασμα του. Η εφαρμογή μιας συνεπαγωγής στην προσαρμοστικότητα ενός κανόνα και στο συμπέρασμα, το μέρος IF-THEN του, έχει ως αποτέλεσμα την εξαγωγή του ολικού συμπεράσματος (έξοδος) του κανόνα.

Ολικό συμπέρασμα κανόνα i :

$$\mu_{c_i'}(z) = I(W_i, \mu_{c_i}(z)), \forall z \in Z$$

Το ολικό συμπέρασμα ενός κανόνα είναι βέβαια ένα ασαφές σύνολο στο χώρο αναφοράς Z.

Ολικό συμπέρασμα κανόνα j :

$$\mu_{c_j'}(z) = I\left(W_j, \mu_{c_j}(z)\right), \forall z \in Z$$

ΒΗΜΑ 4^ο: Σύνθεση όλων των εξόδων των κανόνων (aggregation).

Η εξαγωγή του τελικού συμπεράσματος του συστήματος απαιτεί τη σύνθεση των ασαφών συνόλων που αποτελούν τις εξόδους των κάθε ξεχωριστών κανόνων. Το τελικό συμπέρασμα είναι ένα ασαφές σύνολο στο χώρο αναφοράς Z.

Η σύνθεση των εξόδων των κανόνων όταν υπάρχουν n κανόνες επιτυγχάνεται με την σχέση:

$$\mu_c(z) = \mu_{c_1'}(z) \vee \mu_{c_2'}(z) \vee \dots \vee \mu_{c_n'}(z), \text{ όπου } \vee \text{ η συνάρτηση max.}$$

Το ασαφές σύνολο το οποίο εξάγεται από τη μέθοδο του “aggregation” αποασαφοποιείται εν συνεχεία για να δώσει το τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα με τις μεθόδους που περιγράψαμε επαρκώς στο βήμα 5 τις προηγούμενης ενότητας.

Διαγραμματική μέθοδος επίλυσης.

Μία εναλλακτική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων ασαφούς συλλογιστικής είναι η διαγραμματική επίλυση. Αυτή επιτρέπει τη γρήγορη, αλλά προσεγγιστική εκτίμηση της τελικής λύσης χωρίς να απαιτεί όλους τους αριθμητικούς υπολογισμούς που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της μεθόδου είναι οι συναρτήσεις συμμετοχής των παραμέτρων του προβλήματος να είναι συνεχείς καμπύλες και όχι σύνολο ζευγών.

2.12.2 FIS ΤΥΠΟΥ SUGENO

Παραπάνω ασχοληθήκαμε με τα συστήματα Mamdani που είναι και τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα. Ωστόσο υπάρχει και η μέθοδος Sugeno που δημιουργήθηκε το 1985 σε μια προσπάθεια να αναπτυχθεί μια συστηματική προσέγγιση στην γέννηση ασαφών κανόνων από ένα δεδομένο σύνολο δεδομένων εισόδου-εξόδου.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι περισσότερο αποτελεσματική η χρήση μεμονωμένων σημείων-αιχμών σαν συναρτήσεις συμμετοχής εξόδου από ένα συνεχές κατανομημένο ασαφές σύνολο. Μια τέτοια αιχμή είναι γνωστή με τον αγγλικό όρο συνάρτηση συμμετοχής εξόδου singleton και θα μπορούσε να χαρακτηριστεί σαν προαποασαφοποιημένο ασαφές σύνολο. Η συνάρτηση συμμετοχής ενός singleton είναι $\mu_A(x) = 1$.

Αυτές εμπλουτίζουν την επάρκεια της διαδικασίας αποασαφοποίησης διότι απλοποιούν ιδιαιτέρως τους απαιτούμενους υπολογισμούς σε σχέση με την πιο γενική μέθοδο Mamdani, στην οποία βρίσκουμε το κέντρο μάζας και χρησιμοποιούμε τον σταθμικό μέσο μερικών σημείων. Τα συστήματα Sugeno υποστηρίζουν αυτόν τον τύπο του μοντέλου.

Η μέθοδος Sugeno έχει ομοιότητες με τη μέθοδο των συστημάτων Mamdani από πολλές απόψεις. Τα δύο πρώτα βήματά της (ασαφοποίηση των εισόδων και εφαρμογή των ασαφών τελεστών) είναι ακριβώς ίδια. Η κύρια διαφορά ανάμεσα στα δύο συστήματα έγκειται στο ότι οι συναρτήσεις συμμετοχής στην έξοδο των συστημάτων Sugeno είναι είτε γραμμικές είτε σταθερά.

Ένας τυπικός ασαφής κανόνας σε συστήματα Sugeno έχει την μορφή:

$$\text{if } x \text{ is } A \text{ and } y \text{ is } B \text{ then } z = f(x, y)$$

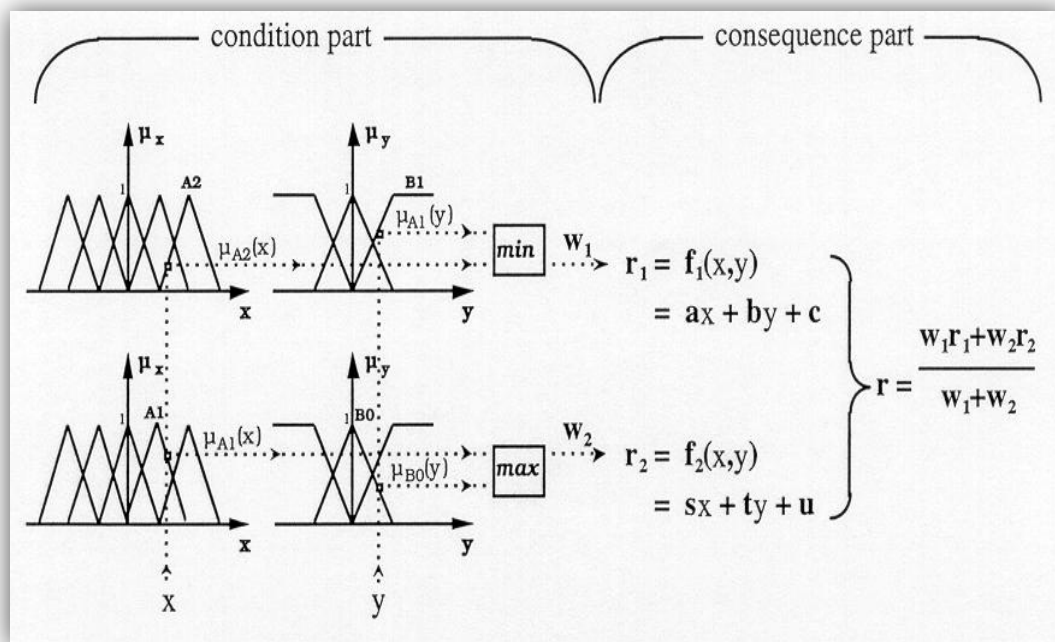
Όπου A και B είναι τα ασαφή σύνολα της προϋπόθεσης ενώ $f(x, y)$ είναι μια σαφής συνάρτηση στο χώρο των συμπερασμάτων. Συνήθως το $f(x, y)$ είναι ένα πολυώνυμο των μεταβλητών εισόδου x, y αλλά μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, αρκεί να μπορεί να περιγράψει καταλλήλως την έξοδο του μοντέλου μέσα στην ασαφή περιοχή που ορίστηκε από τις προϋποθέσεις των κανόνων.

Όταν το $f(x, y)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το FIS ονομάζεται ασαφές μοντέλο Sugeno πρώτου βαθμού. Για παράδειγμα:

$$\text{If Input 1} = x \text{ and Input 2} = y, \text{ then Output is } z = ax + by + c.$$

Για ένα Sugeno μηδενικού βαθμού, το επίπεδο εξόδου z είναι μια σταθερά ($a=b=0$) και μπορεί να θεωρηθεί και σαν μια ειδική περίπτωση FIS Mamdani, στο οποίο το συμπέρασμα κάθε κανόνα μπορεί να προσδιοριστεί από ένα ασαφές singleton (ή προαποασαφοποιημένο συμπέρασμα).

Η έξοδος ενός Sugeno μηδενικού βαθμού είναι μια ομαλή συνάρτηση των μεταβλητών εισόδου του, εφόσον οι γειτονικές συναρτήσεις συμμετοχής στις προϋποθέσεις έχουν αρκετή επικάλυψη.



Σχήμα 2.23: Το πρώτου βαθμού ασαφές μοντέλο Sugeno.

Το επίπεδο εξόδου z_i κάθε κανόνα είναι σταθμισμένο με βάρη ή αλλιώς με μια δύναμη πυροδότησης (βαθμός ενεργοποίησης) w_i για κάθε κανόνα.

Για παράδειγμα, για τον τελεστή ΚΑΙ με 1^η είσοδο = x και 2^η είσοδο = y , η δύναμη πυροδότησης είναι:

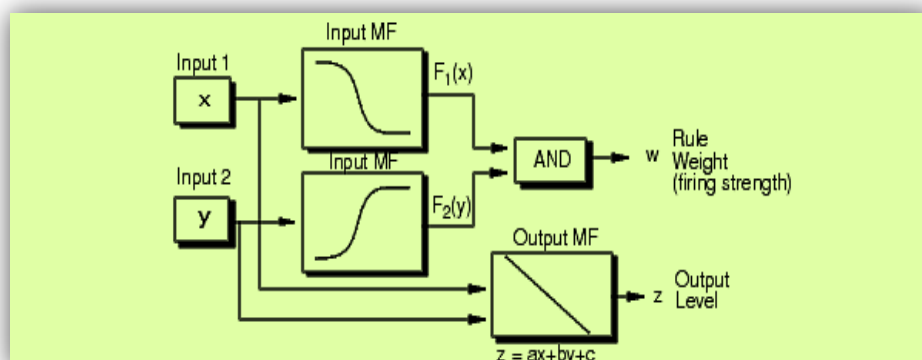
$$w_i = \text{πράξη ΚΑΙ } (F_1(x), F_2(x))$$

όπου $F_{1,2}(\cdot)$ είναι συναρτήσεις συμμετοχής για τις εισόδους 1 και 2.

Η τελική έξοδος του συστήματος είναι ο σταθμισμένος μέσος όλων των εξόδων και δίνεται από τον τύπο:

$$\text{Τελική έξοδος} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

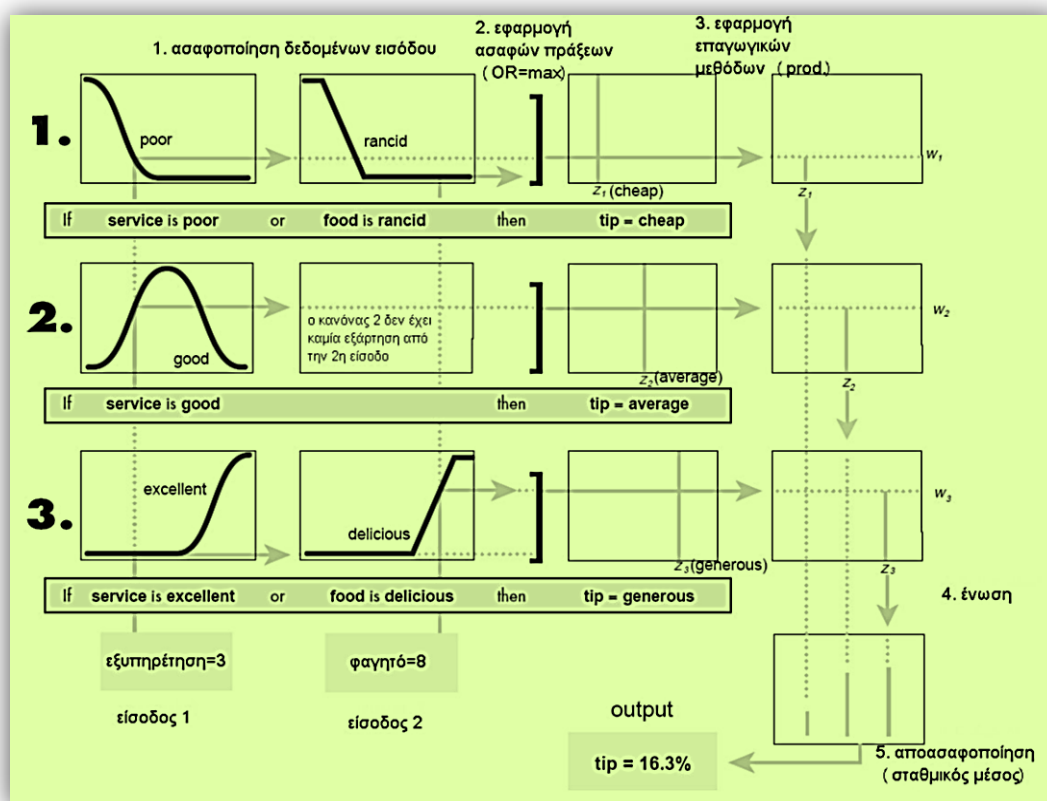
Ακόμα ένα σχήμα για τη λειτουργία ενός Sugeno φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 2.24: Λειτουργία ενός Sugeno.

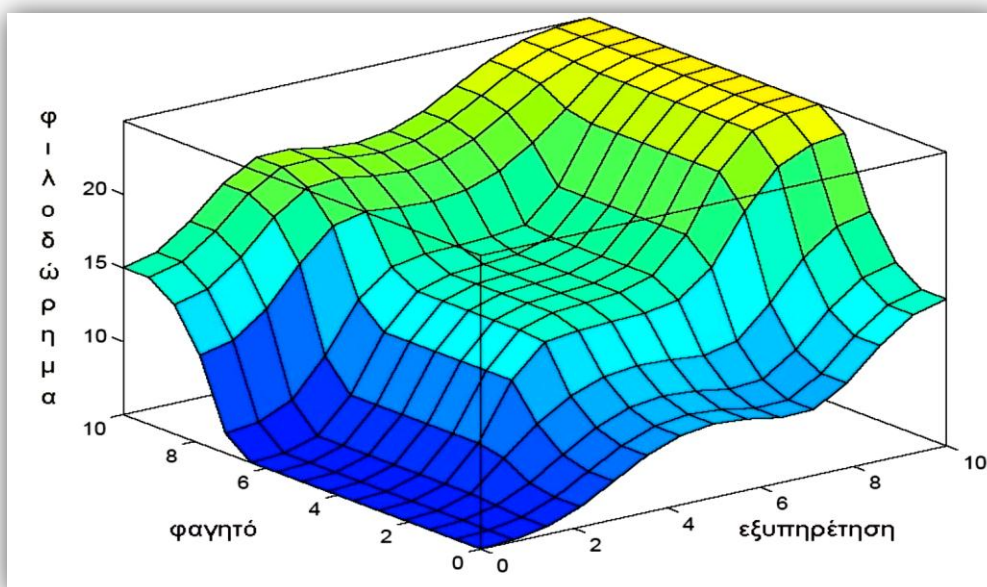
Ενώ στο παρακάτω σχήμα φαίνεται σε πλήρη ανάπτυξη ένα διάγραμμα FIS Sugeno (για το πρόβλημα με το ποσοστό του φιλοδωρήματος). Για το δεδομένο πρόβλημα, η χρήση συναρτήσεων singleton είναι απολύτως επαρκής.

Ένας εύκολος τρόπος να κατανοήσουμε τα πρώτου βαθμού Sugeno είναι να σκεφτούμε ότι κάθε κανόνας προσδιορίζει την θέση ενός «κινούμενου singleton». Οι αιχμές δηλαδή των singleton της εξόδου μπορούν να κινηθούν με γραμμικό τρόπο στον χώρο εξόδου, αναλόγως με το ποιες είναι οι είσοδοι. Το σύστημα έτσι γίνεται αρκετά μικρό και επαρκές.



Σχήμα 2.25: FIS Sugeno, για το ποσοστό φιλοδωρήματος.

Η τρισδιάστατη μορφή της τελικής επιφάνειας που αποτελεί την λύση του παραπάνω προβλήματος για όλες τις εισόδους και εξόδους (0-10) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.26: Η επιφάνεια της λύσης του προβλήματος για το φιλοδώρημα.

Συστήματα Sugeno ανώτερης τάξης είναι εφικτά, όμως δεν προσφέρουν σημαντικές βελτιώσεις και ταυτόχρονα τείνουν να παρουσιάζουν σημαντική πολυπλοκότητα με μικρό προφανές κέρδος. Τα συστήματα Sugeno λόγω του μικρότερου μεγέθους τους και του ότι είναι πιο επαρκή υπολογιστικά σε σχέση με τα Mamdani, χρησιμοποιούνται σε προσαρμοστικές τεχνικές κατασκευής ασαφών μοντέλων.

Συνοπτικά η σύγκριση Sugeno-Mamdani γίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Πλεονεκτήματα Sugeno	Πλεονεκτήματα Mamdani
Επαρκέστερα υπολογιστικά	Είναι διαισθητικά
Καλή λειτουργία για γραμμικές τεχνικές	Έχουν πολύ μεγάλη αποδοχή
Καλή λειτουργία για βελτιστοποίηση και προσαρμοστικές τεχνικές	Ευπροσάρμοστα στον ανθρώπινο τρόπο εισαγωγής δεδομένων εισόδου
Εγγυημένη συνέχεια της τελικής επιφάνειας που αποτελεί την λύση	
Καλά προσαρμοσμένο στη μαθηματική ανάλυση	

3. ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα Τεχνητό Νευρωνικό Δίκτυο (ΤΝΔ) είναι ένα μοντέλο επεξεργασίας πληροφοριών, το οποίο έχει εμπνευστεί από τον τρόπο με τον οποίο επεξεργάζονται οι πληροφορίες από βιολογικά νευρικά συστήματα, όπως ο εγκέφαλος. Το βασικό στοιχείο αυτού του μοντέλου είναι η καινοτόμος δομή του συστήματος επεξεργασίας πληροφοριών. Συντίθενται από ένα μεγάλο αριθμό αλληλοσυνδεδεμένων, ανεξάρτητων επεξεργαστών (νευρώνες), οι οποίοι εργάζονται ομαδικά για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος.

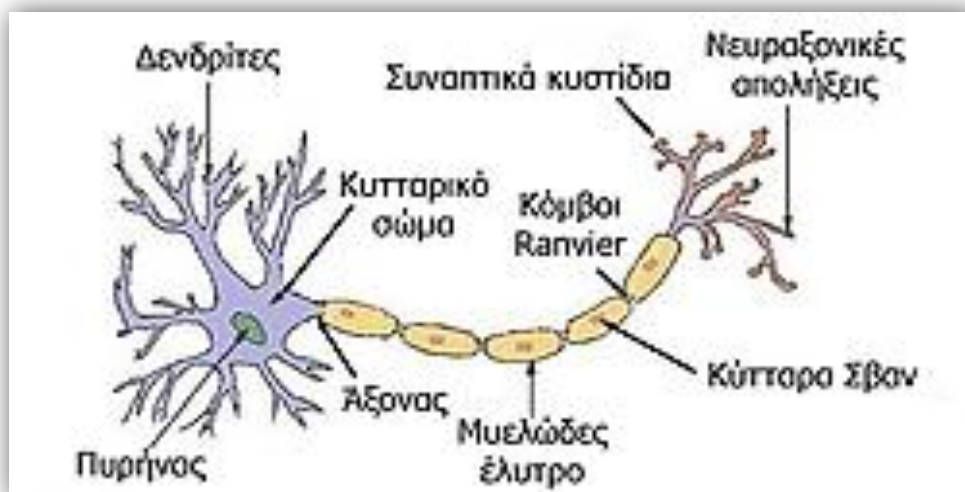
Τα νευρωνικά δίκτυα, όπως οι άνθρωποι, εκπαιδεύονται μέσω παραδειγμάτων και αναπτύσσονται για εξειδικευμένες εφαρμογές, μέσω μιας διαδικασίας μάθησης. Μερικές εφαρμογές τους περιλαμβάνουν την αναγνώριση προτύπων (pattern recognition) και την ταξινόμηση δεδομένων, εργασίες οι οποίες είναι πολύ πολύπλοκες για να γίνουν από ανθρώπους ή από άλλες τεχνικές. Η μάθηση σε βιολογικά συστήματα περιλαμβάνει προσαρμογή των διασυνδεδεμένων που υπάρχουν μεταξύ των νευρώνων. Αυτό ισχύει και στα νευρωνικά δίκτυα. Τα νευρωνικά δίκτυα συμπεριφέρονται σαν «μαύρα κουτιά» (black-box behavior) προς τους χρήστες τους, συνήθως είναι αδύνατη η εξαγωγή σαφούς γνώσης από αυτά. Έχουν δηλαδή τη δυνατότητα να επιλύουν δύσκολα προβλήματα, αλλά δεν μας αποκαλύπτουν τον τρόπο.

Παρόμοια προβλήματα εμφανίζονται στην περίπτωση που θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε υπάρχουσα γνώση σχετικά με τη διασύνδεση μεταξύ των προτύπων εισόδου και εξόδου. Δεν είναι δυνατή η ενσωμάτωση τέτοιας γνώσης στο δίκτυο προκειμένου να επιταχυνθεί ή να απλοποιηθεί η διαδικασία μάθησης, ένα νευρωνικό δίκτυο πάντα εκπαιδεύεται από την αρχή.

Τα δυνατά σημεία των νευρωνικών δικτύων είναι η δυνατότητα μάθησης από εκπαίδευση και διαμοιραζόμενη δομή, η οποία τους δίνει υψηλές δυνατότητες στην παράλληλη εκτέλεση υλικού ή λογισμικού. Το αδύνατο σημείο τους, είναι η ανικανότητα τους στην ενσωμάτωση ή εξαγωγή γνώσης. Το πλήθος των νευρώνων και των διασυνδέσεων τους, αλλά και οι παράμετροι της διαδικασίας μάθησης τους, συνήθως επιλέγονται από εμπειρία, ή βασίζονται σε κανόνες χειρισμού.

3.2 ΝΕΥΡΩΝΙΚΗ ΔΟΜΗ

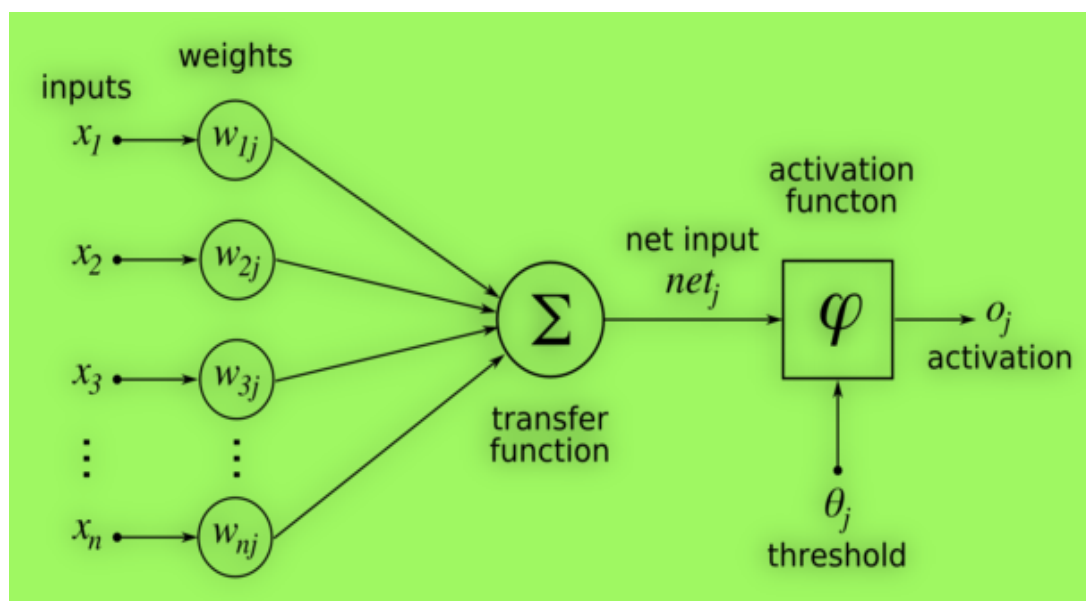
Όπως ήδη αναφέραμε και είναι γνωστό από τη βιολογία, η δομική μονάδα του εγκεφάλου είναι ο νευρώνας. Ένας τυπικός βιολογικός νευρώνας αποτελείται, όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα, από το σώμα, που περιλαμβάνει τον πυρήνα του, τους δενδρίτες, μέσω των οποίων λαμβάνει σήματα από γειτονικούς νευρώνες (σημεία εισόδου) και τον άξονα που είναι η έξοδος του νευρώνα και το μέσο σύνδεσής του με τους άλλους νευρώνες. Σε κάθε δενδρίτη υπάρχει ένα απειροελάχιστο κενό που ονομάζεται σύναψη. Οι συνάψεις μέσω χημικών διαδικασιών επιταχύνουν ή επιβραδύνουν τη ροή ηλεκτρονίων προς το σώμα του νευρώνα. Η ικανότητα μάθησης και μνήμης που παρουσιάζει ο εγκέφαλος οφείλεται στην ικανότητά των συνάψεων να μεταβάλλουν την αγωγιμότητά τους. Τα ηλεκτρικά σήματα που εισέρχονται στο σώμα του νευρώνα μέσω των δενδριτών συνδυάζονται και αν το αποτέλεσμα ξεπερνά κάποια τιμή κατωφλίου το σήμα διαδίδεται με τη βοήθεια του άξονα και στους άλλους νευρώνες.



Σχήμα 3.1: Δομή βιολογικού νευρώνα

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα είναι εμπνευσμένα από το βιολογικό νευρωνικό σύστημα. Τα στοιχεία που αποτελούν ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο είναι οι νευρώνες οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους μέσω βαρών. Τα βάρη αυτά μπορούν να προσαρμόζονται κατά τη διαδικασία της μάθησης. Μπορούμε να διαχωρίσουμε τα ΤΝΔ σε δύο βασικές κατηγορίες. Στην πρώτη έχουμε τα στατικά νευρωνικά δίκτυα τα οποία δεν περιέχουν στοιχεία με μνήμη αλλά μπορούν να έχουν ως εισόδους προηγούμενες τιμές των εισόδων και στη δεύτερη έχουμε τα δυναμικά νευρωνικά δίκτυα τα οποία διαθέτουν στοιχεία μνήμης και είναι κατάλληλα για την προτυποποίηση μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη μορφή ενός τεχνητού νευρώνα:



Σχήμα 3.2: Δομή τεχνητού νευρώνα

Τα ΤΝΔ αποτελούνται από κυκλώματα που περιέχουν κόμβους που αλληλοσυνδέονται με διάφορες αρχιτεκτονικές. Οι συντελεστές διασύνδεσης, ή συναπτικά βάρη (synaptic weights) του δικτύου, είναι αρχικά άγνωστα και στόχος της μάθησης είναι η συστηματική εύρεσή τους ελαχιστοποιώντας κάποιο μέτρο του σφάλματος μεταξύ της επιθυμητής και της πραγματικής εξόδου του δικτύου.

Ένας στατικός νευρώνας χωρίς μνήμη αποτελείται από έναν σταθμισμένο αθροιστή, η έξοδος του οποίου είναι το σταθμισμένο άθροισμα των εισόδων του, δηλαδή: $\sigma = \sum_{i=1}^n x_i w_{ij} + \theta_j$, όπου w και x είναι τα συναπτικά βάρη και οι εισοδοί του νευρώνα αντίστοιχα και θ είναι η σταθερά της πόλωσης (bias).

Θετική τιμή κάποιου βάρους σημαίνει διέγερση της εισόδου ενώ αντίθετα, μια αρνητική τιμή σημαίνει αποδιέγερση. Συνεπώς, η απόλυτη τιμή του βάρους καθορίζει την ισχύ της σύνδεσης.

Το σταθμισμένο άθροισμα σ ενεργοποιεί ένα στοιχείο συμπίεσης ή παραμόρφωσης $f(\cdot)$ (compression element) που έχει μη γραμμική σχέση μεταφοράς. Μια πρωτόγονη μορφή του στοιχείου αυτού έχει χαρακτήρα λογικής μονάδας κατωφλίου (threshold logic unit) στην οποία η έξοδος του νευρώνα απότομα αλλάζει κατάσταση όταν το σήμα σ περάσει κάποιο κατώφλι που ορίζεται από την τιμή της πόλωσης θ .

Έχουν προταθεί πολλές συναρτήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το στοιχείο παραμόρφωσης ή συμπίεσης, μερικές από αυτές είναι οι παρακάτω:

- Γραμμικός νευρώνας (linear neuron) με τη σχέση:
$$f(\sigma) = \sigma.$$
- Δυαδικός νευρώνας (binary neuron) με τη σχέση κατωφλιού:
$$f(\sigma) = 1, \text{ αν } \sigma > 0$$
$$f(\sigma) = 0, \text{ αν } \sigma \leq 0$$
- Σιγμοειδής νευρώνας (sigmoidal) με τη λογιστική σχέση:
$$f(\sigma) = 1 / (1 + e^{-\sigma}) \in [0, 1]$$
- Νευρώνας υπερβολικής εφαπτομένης (hyperbolic tangent) με τη σχέση:
$$f(\sigma) = 1 - e^{-\sigma} / (1 + e^{-\sigma}) \in [-1, 1]$$
- Perceptron με τη σχέση:
$$f(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$$

Σε αντίθεση με τους στατικούς νευρώνες που αναφέραμε παραπάνω, ένας δυναμικός νευρώνας συμπεριλαμβάνει και μνήμη. Στην περίπτωση αυτή, η είσοδος του στοιχείου παραμόρφωσης εξαρτάται όχι μόνο από το σταθμισμένο άθροισμα αλλά και από την προηγούμενη τιμή του, δηλαδή έχει επαναληπτική μορφή:

$$\sigma(k) = \sigma(k-1) + \sum_{i=1}^{n+1} w_i \cdot x_i(k)$$

όπου k είναι ο δείκτης του χρόνου δειγματοληψίας.

Είναι ευνόητο ότι εδώ απαιτείται αποθήκευση της προηγούμενης τιμής της εισόδου, δηλαδή $\sigma(k-1)$. Οι δυναμικοί νευρώνες είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για την ταυτοποίηση δυναμικών διαδικασιών και την προσομοίωση δυναμικών συστημάτων.

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα αναπτύχθηκαν ιδιαίτερα κατά τη δεκαετία του 80 και βρίσκουν σήμερα εφαρμογή σε πάρα πολλά προβλήματα.

Μερικά από αυτά παρουσιάζονται παρακάτω:

- Κατηγοριοποίηση προτύπων. Το έργο της κατηγοριοποίησης έχει να κάνει με την κατάταξη σε κάποια κατηγορία ενός διανύσματος εισόδου που περιλαμβάνει δείγματα ενός πρωτογενούς ή επεξεργασμένου σήματος.
- Διαμόρφωση συναθροίσεων (clustering). Η διαδικασία αυτή μοιάζει με την προηγούμενη με τη μόνη διαφορά ότι στη διαμόρφωση συναθροίσεων δεν είναι εκ των προτέρων γνωστός ο αριθμός των κατηγοριών.
- Προσέγγιση συναρτήσεων. Με δεδομένα ζεύγη εισόδων-εξόδων που είναι δείγματα από μια άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$ ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο μπορεί να εκπαιδευτεί ώστε να προσεγγίσει αυτή τη συνάρτηση.
- Πρόβλεψη Χρονοσειρών. Μέσω των τεχνητών νευρωνικών δικτύων μπορούν να προβλεφθούν οι μελλοντικές τιμές ενός σήματος, δεδομένων των τιμών του σήματος σε χρονικές τιμές του παρελθόντος.
- Βελτιστοποίηση. Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα εφαρμόζονται σε προβλήματα βελτιστοποίησης.
- Συσχετιστική Μνήμη. Μέσω των τεχνητών νευρωνικών δικτύων μπορούν υλοποιηθούν συστήματα συσχετιστικής μνήμης, στα οποία η ανάκληση υλοποιείται μέσω παρουσίασης του περιεχόμενου της μνήμης.
- Αυτόματος έλεγχος. Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα εφαρμόζονται σε ευρεία κλίμακα σε συστήματα αυτομάτου ελέγχου, όπως π.χ. έλεγχος κίνησης μηχανών, έλεγχος ρομποτικών μελών κτλ.

Τα βασικά πλεονεκτήματα των ΤΝΔ στην πρόβλεψη έναντι των κλασικών στατιστικών τεχνικών που αναφέραμε παραπάνω είναι ότι μπορούν να αναγνωρίσουν μη γραμμικές διαχωριστικές επιφάνειες ανάμεσα στις εισόδους και μπορούν ακόμα να λειτουργήσουν ικανοποιητικά με μη πλήρη δεδομένα. Επιπλέον τα νευρωνικά δίκτυα δεν προγραμματίζονται αλλά μαθαίνουν. Έτσι δε χρειάζεται να έχουμε κατανοήσει πλήρως ένα πρόβλημα για να το επιλύσουμε μέσω των νευρωνικών δικτύων. Βέβαια πρέπει να σημειώσουμε ότι τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα δεν μπορούν να δώσουν απάντηση στο πώς έφτασαν σε ένα αποτέλεσμα, δεν είναι δηλαδή κατάλληλα για εξαγωγή συμπερασμάτων (extrapolation), αλλά μόνο για παρεμβολή (interpolation).

3.3 ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ ΠΟΛΥΣΤΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

Τα ΤΝΔ είναι συμπλέγματα νευρώνων που έχουν συναρτήσεις μεταφοράς, τις συναρτήσεις που αναφέραμε στην παραπάνω παράγραφο και είναι δομημένα ιεραρχικά κατά στρώματα. Το χαμηλότερο ή πρώτο στρώμα περιέχει τους κόμβους της εισόδου και το υψηλότερο στρώμα περιέχει τους κόμβους που παράγουν τα αποτελέσματα (ή συμπεράσματα).

Οι νευρώνες ενός πολυστρωματικού δικτύου διατάσσονται σε στρώματα, στιβάδες ή επίπεδα (layers). Στα συνήθη πρότυπα ΤΝΔ πρόσθιας τροφοδότησης (feedforward neural networks) οι έξοδοι κάθε στρώματος συνδέονται με όλους τους νευρώνες του επόμενου στρώματος και η πληροφορία ρέει από τις εισόδους προς τις εξόδους του δικτύου. Τα ενδιάμεσα στρώματα ονομάζονται κρυφά (hidden layers) και δεν επικοινωνούν άμεσα με το περιβάλλον.

Αν και θεωρητικά ένα ΤΝΔ μπορεί να έχει πολλά στρώματα, έχει αποδειχτεί ότι οποιαδήποτε σχέση μεταξύ εισόδων και εξόδων μπορεί να υλοποιηθεί με ένα μόνο κρυφό στρώμα.

Ανάλογα με τον τρόπο διασύνδεσης των επιπέδων και τρόπο που επικοινωνούν οι κόμβοι μεταξύ τους, προκύπτουν διάφορες αρχιτεκτονικές ΤΝΔ.

Μια κατηγοριοποίηση είναι η εξής:

- Δίκτυα τύπου Hopfield όπου οι κόμβοι ενός επιπέδου επιδρούν με τους κόμβους του ιδίου, του αμέσως επόμενου ή και προηγούμενου επιπέδου.
- Δίκτυα πρόσθιας τροφοδότησης (feedforward networks) στα οποία η πληροφορία μεταδίδεται από τα χαμηλότερα στα υψηλότερα στρώματα.
- Δίκτυα με ανατροφοδότηση (feedback networks) στα οποία υπάρχει τουλάχιστον ένας κλειστός βρόχος.
- Συμμετρικά αυτο-συσχετιστικά δίκτυα (symmetric auto-associative networks) όπου τόσο οι συνδέσεις όσο και τα συναπτικά βάρη τους είναι συμμετρικά.

3.4 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η ιδιότητα της προσαρμογής των ΝΔ σε μεταβαλλόμενους χώρους προβλημάτων σχετίζεται με την ικανότητα μάθησης τους. Η μάθηση είναι μια θεμελιακή ικανότητα των νευρωνικών δικτύων η οποία τους παρέχει την ικανότητα να μαθαίνουν από το περιβάλλον τους και να βελτιώνουν τη συμπεριφορά τους με το πέρασμα του χρόνου. Ειδικότερα στα ΝΔ η μάθηση αναφέρεται στην διεργασία επίτευξης μιας επιθυμητής συμπεριφοράς μέσω ενημέρωσης των τιμών των συναπτικών βαρών. Έτσι ένα ΝΔ μαθαίνει για το περιβάλλον του μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας ανανέωσης των συναπτικών βαρών και κατωφλίων.

Σε γενικές γραμμές μπορεί να λεχθεί ότι αλγόριθμος μάθησης είναι κάθε προκαθορισμένο σύνολο καλά ορισμένων κανόνων επίλυσης του προβλήματος εκπαίδευσης του νευρωνικού δικτύου. Κάθε αλγόριθμος μάθησης προσφέρει έναν άλλο τρόπο προσαρμογής των συναπτικών βαρών. Γενικά υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι μάθησης στα ΝΔ, καθένας από τους οποίους παρουσιάζει πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα. Τα προβλήματα μάθησης τα οποία επιλύουν οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι εξαρτώνται και από το περιβάλλον στο οποίο εργάζεται κάθε ΝΔ. Έτσι διαφορετικά μοντέλα του περιβάλλοντος οδηγούν σε διαφορετικά μοντέλα εκπαίδευσης.

Επιβλεπόμενη Μάθηση:

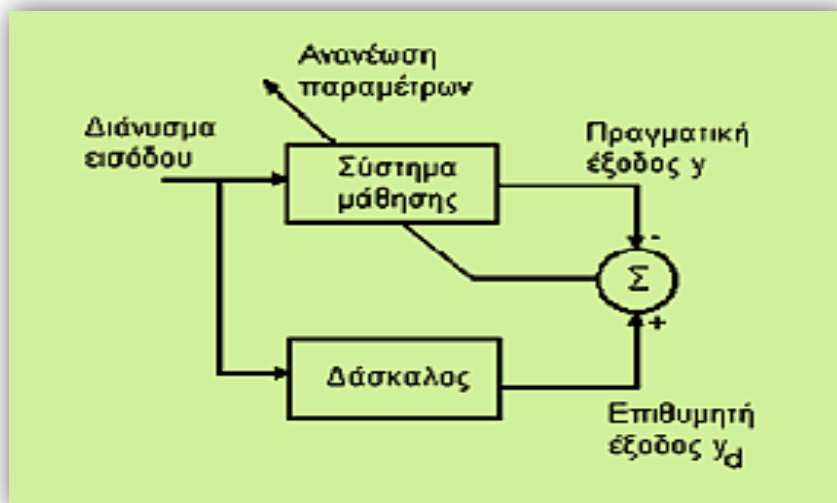
Σχηματικά η δομή της επιβλεπόμενης μάθησης φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Παρατηρείται ότι στην επιβλεπόμενη μάθηση συνυπάρχουν δυο βασικές συνιστώσες, το σύστημα εκμάθησης και ο δάσκαλος. Το κύριο χαρακτηριστικό της επιβλεπόμενης μάθησης είναι η ύπαρξη του εξωτερικού δασκάλου ο οποίος με βάση την γνώση που είναι αποθηκευμένη σε αυτόν είναι σε θέση να διδάξει στο σύστημα μάθησης τις επιθυμητές εξόδους για το σύνολο εισόδων εκπαίδευσης. Όταν ο δάσκαλος και το ΝΔ λαμβάνουν ένα διάνυσμα εισόδου εκπαίδευσης, ο δάσκαλος δίνει στο νευρωνικό δίκτυο μια επιθυμητή έξοδο η οποία αναπαριστά την βέλτιστη δράση που πρέπει να εμφανίζει το ΝΔ. Οι παράμετροι του ΝΔ ανανεώνονται βάσει του διανύσματος εκπαίδευσης και του διανύσματος σφάλματος (δηλαδή της διαφοράς πραγματικής και επιθυμητής απόκρισης του δικτύου).

Η συνάρτηση κόστους ορίζεται ως:

$$J(w)=1/2 * E [(y(t)-y_d(t))^2]$$

όπου w είναι το διάνυσμα των προς επιλογή ελεύθερων παραμέτρων του συστήματος μάθησης (δηλαδή του ΝΔ).

Η ανανέωση των παραμέτρων παίρνει την μορφή του αλγορίθμου διόρθωσης σφάλματος. Η σταδιακή ανανέωση των παραμέτρων κάνει τελικά το ΝΔ μάθησης να μιμείται τη δεδομένη επιθυμητή συμπεριφορά. Δύο περιπτώσεις αλγορίθμων επιβλεπόμενης μάθησης είναι ο αλγόριθμος ελαχίστου μέσου τετραγώνου και η γενίκευσή του που είναι γνωστή ως αλγόριθμος ανάστροφης διάδοσης.



Σχήμα 3.3: Δομή Επιβλεπόμενης Μάθησης (Supervising learning).

Ενισχυτική Μάθηση:

Σε αυτή την περίπτωση το ΝΔ τροφοδοτείται και πάλι με δειγματικά πρότυπα εισόδου αλλά δεν τροφοδοτείται με τις επιθυμητές αποκρίσεις σε αυτές τις εισόδους. Χρησιμοποιείται ένα συνολικό μέτρο της επάρκειας της προκύπτουσας απόκρισης το οποίο μπορεί να οδηγήσει το νευρωνικό δίκτυο στην επιθυμητή συμπεριφορά. Το μέτρο αυτό είναι γνωστό ως ενισχυτικό σήμα (reinforcement signal) και ανατροφοδοτείται στο ΝΔ έτσι ώστε να επιβραβεύσει τις ορθές συμπεριφορές και να τιμωρήσει τις λανθασμένες.

Η ενισχυτική μάθηση διακρίνεται σε συσχετιστική και μη συσχετιστική ενισχυτική μάθηση. Στην πρώτη περίπτωση το περιβάλλον τροφοδοτεί πέρα από το ενισχυτικό σήμα και άλλες μορφές πληροφορίας από τις οποίες το ΝΔ πρέπει να αποτυπώσει μια απεικόνιση συσχέτισης αιτίου αποτελέσματος. Στην δεύτερη περίπτωση η μόνη πληροφορία που δίδεται από το περιβάλλον είναι το ενισχυτικό σήμα και ο προορισμός του ΝΔ είναι να επιλέξει μια μοναδική βέλτιστη ενέργεια.

Επιγραμματικά η ενισχυτική μάθηση λειτουργεί ως εξής:

- Το ΝΔ υπολογίζει τις εξόδους που παράγονται από την τρέχουσα είσοδο με τις παρούσες τιμές των βαρών.
- Το σύστημα αξιολογεί την έξοδο και το ενισχυτικό σήμα τροφοδοτείται στο δίκτυο.
- Τα βάρη ανανεώνονται με βάση το ενισχυτικό σήμα, αυξάνοντας τις τιμές των βαρών που συνέβαλλαν σε ορθή συμπεριφορά ή μειώνοντας τις τιμές των βαρών που προκάλεσαν αποκλίνουσα συμπεριφορά.
- Το νευρωνικό δίκτυο ψάχνει να βρει ένα σύνολο βαρών τα οποία να τείνουν να αποφύγουν αρνητικά ενισχυτικά σήματα.

Η βασική διαφορά ανάμεσα στην ενισχυτική και την επιβλεπόμενη μάθηση είναι ότι στην ενισχυτική μάθηση το σύστημα μάθησης βελτιώνεται χρησιμοποιώντας ένα κριτήριο συμπεριφοράς οι τιμές του οποίου δίνονται από το περιβάλλον, ενώ στην επιβλεπόμενη μάθηση το κριτήριο συμπεριφοράς (συνάρτηση σφάλματος) καθορίζεται εσωτερικά με βάση τις επιθυμητές αποκρίσεις.

Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση:

Σε αυτό τον τύπο μάθησης που καλείται αυτο-οργανούμενη μάθηση δεν χρησιμοποιείται εξωτερικός δάσκαλος ούτε μια βάση γνώσης για να επιβλέψει την εκπαίδευση του ΝΔ, το μόνο στοιχείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την υλοποίηση της εκπαίδευσης είναι τα διανύσματα εισόδου.

Ένα σύστημα μη επιβλεπόμενης μάθησης εξελίσσεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξαγάγει χαρακτηριστικά ή κανονικότητες από τα παρουσιαζόμενα πρότυπα, χωρίς ωστόσο να έχει την πληροφορία για το ποιες έξοδοι ή ποιες κατηγορίες συσχετίζονται με τα χαρακτηριστικά εισόδου. Με άλλα λόγια το σύστημα μάθησης εντοπίζει ή κατηγοριοποιεί τα διανύσματα εισόδου χωρίς καμία εκ των προτέρων πληροφόρηση από το περιβάλλον. Εξαιτίας αυτών, η μη επιβλεπόμενη μάθηση συχνά χρησιμοποιείται σε προβλήματα ομαδοποίησης, εξαγωγής εσωτερικών χαρακτηριστικών και ανίχνευσης συμμετριών.

Τα νευρωνικά δίκτυα μη επιβλεπόμενης μάθησης εκπαιδεύονται έτσι ώστε να αποκρίνονται σε διαφορετικά διανύσματα εισόδου με διαφορετικά τμήματα του δικτύου. Το ΝΔ εκπαιδεύεται με τέτοιο τρόπο ώστε να αυξάνει την πυροδότηση του ως απόκριση σε συχνά εμφανιζόμενες εισόδους, γι' αυτό και συχνά ονομάζεται εκτιμητής πιθανοτήτων (probability estimator). Κατά αυτό τον τρόπο το νευρωνικό δίκτυο αναπτύσσει συγκεκριμένες εσωτερικές αναπαραστάσεις οι οποίες κωδικοποιούν τα διάφορα διανύσματα εισόδου.

3.5 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΝΔ

Στόχος των αλγορίθμων μάθησης είναι η συστηματική και ταχεία εύρεση των συναπτικών βαρών του δικτύου ώστε να ελαχιστοποιείται κάποιο μέτρο του σφάλματος μεταξύ των πραγματικών και των επιθυμητών εξόδων του δικτύου. Η δυνατότητα εφαρμογής των διαφόρων αλγορίθμων μάθησης που έχουν αναπτυχθεί, εξαρτάται από τον τύπο του ΤΝΔ και από την κατηγοριοποίηση των διαδικασιών μάθησης, όπως έγινε στην προηγούμενη παράγραφο.

Όπως αναφέραμε, για τη μάθηση χωρίς εποπτεία, στο δίκτυο δεν παρέχεται καμία πληροφορία σχετικά με την επιθυμητή έξοδο που αντιστοιχεί σε κάθε είσοδο. Αντίθετα, το δίκτυο αυτο-οργανώνεται και μαθαίνει να αποκρίνεται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της εισόδου. Παραδείγματα αλγορίθμων μάθησης χωρίς εποπτεία είναι ο αλγόριθμος του Hebb, η ανταγωνιστική μάθηση (competitive learning), οι αυτο-οργανούμενοι χάρτες (self organizing maps) του Kohonen και η θεωρία του προσαρμοστικού συντονισμού (adaptive resonance theory) του Grossberg. Πολλές τοπολογίες ΤΝΔ, όπως τα δίκτυα Hopfield, Hamming και Boltzman επίσης χρησιμοποιούν παρόμοια μέθοδο μάθησης. Γενικά με την ικανότητά τους να υλοποιούν αυθαίρετες σχέσεις εισόδου-εξόδου, τα πρότυπα αυτά χρησιμοποιούνται ως συνδεδεκές μνήμες (associative memories) ή ταξινομητές προτύπων (classifiers).

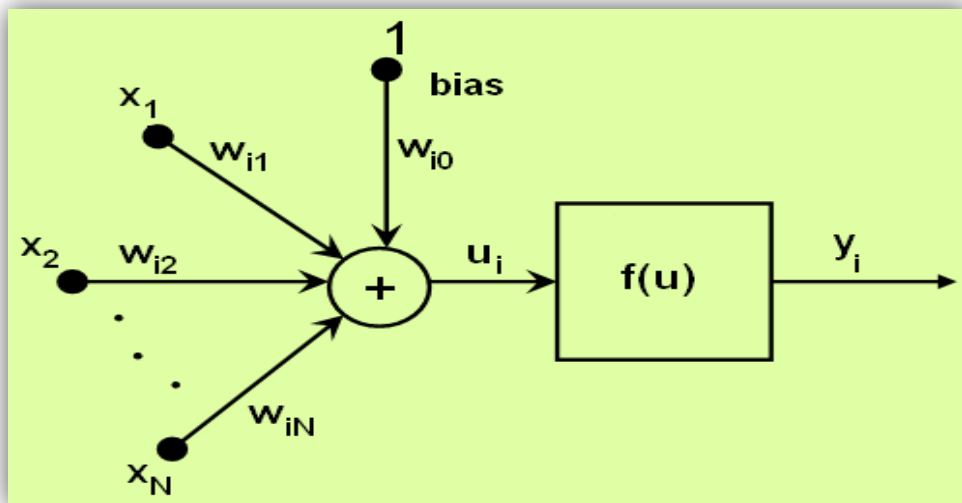
Στην πράξη, στις περισσότερες εφαρμογές ΤΝΔ χρησιμοποιείται μάθηση υπό επίβλεψη (supervised learning), για την οποία υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι. Στον αλγόριθμο που βασίζεται στον κανόνα Δέλτα (Delta rule learning), η διαφορά μεταξύ πραγματικής και επιθυμητής εξόδου ελαχιστοποιείται μέσω μιας διαδικασίας ελαχίστων τετραγώνων. Στον αλγόριθμο ανάστροφης μετάδοσης λάθους (back propagation) η μεταβολή των βαρών βασίζεται στον υπολογισμό της συνεισφοράς κάθε βάρους στο συνολικό σφάλμα. Στην ανταγωνιστική μάθηση (competitive learning) οι τεχνητοί νευρώνες συναγωνίζονται, κατά κάποιο τρόπο, μεταξύ τους και μόνο αυτός με τη μεγαλύτερη απόκριση σε δοθείσα είσοδο τροποποιεί τα βάρη του. Τέλος, στην τυχαία μάθηση (random learning), οι μεταβολές στα βάρη εισάγονται τυχαία και ανάλογα με το αν η έξοδος βελτιώνεται ή όχι με βάση κάποια προκαθορισμένα από το χρήστη κριτήρια, οι μεταβολές αυτές υιοθετούνται ή απορρίπτονται.

3.6 ΝΕΥΡΟ-ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τα νευροασαφή συστήματα. Η δομική μονάδα των συστημάτων αυτών είναι οι ασαφείς νευρώνες.

3.6.1 ΑΣΑΦΕΙΣ ΝΕΥΡΩΝΕΣ

Οι ασαφείς νευρώνες έχουν τη μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.4: Ασαφείς Νευρώνες

Όπου :

$x_1, x_2, \dots, x_N$	οι είσοδοι του νευρώνα
$w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN}$	τα βάρη των συνάψεων
u_i	η συνάρτηση συμμετοχής του νευρώνα
$f(u)$	η συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα
y_i	η έξοδος του νευρώνα

Οι ασαφείς νευρώνες διακρίνονται σε νευρώνες συμμετοχής και σε λειτουργικούς νευρώνες. Παρακάτω γίνεται αναφορά στα χαρακτηριστικά κάθε κατηγορίας ασαφών νευρώνων.

3.6.2 ΝΕΥΡΩΝΕΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ

Οι συνηθέστερες μορφές συναρτήσεων συμμετοχής είναι η τριγωνική, η γκαουσιανή, η τραπεζοειδής, η κανονική κοκ. Οι παραπάνω συναρτήσεις συμμετοχής μπορούν να υλοποιηθούν με τη χρήση ενός νευρώνα. Η συνάρτηση συμμετοχής μπορεί να υλοποιηθεί θεωρώντας ότι ο νευρώνας δέχεται ως είσοδο το x και δίνει έξοδο y απαιτώντας η συνάρτηση συμμετοχής του να έχει τη μορφή u . Αν δηλαδή υποθέσουμε ότι η συνάρτηση συμμετοχής είναι η κανονική, τότε για να υλοποιηθεί πρέπει η συνάρτηση ενεργοποίησης να είναι:

$$f(u) = \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

Όπου m κέντρο της συνάρτησης συμμετοχής και σ το εύρος της.

3.6.3 ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΙ ΝΕΥΡΩΝΕΣ

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να υλοποιηθούν οι βασικές πράξεις των ασαφών συνόλων. Οι πράξεις αυτές στηρίζονται σε λειτουργίες όπως η τ -νόρμα, η σ -νόρμα, το ασαφές συμπλήρωμα κλπ. Οι παραπάνω λειτουργίες μπορούν να αντικαταστήσουν τη συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα αν θεωρήσουμε ότι οι είσοδοι δεν αθροίζονται πολλαπλασιασμένοι με βάρη όπως στους κλασσικούς νευρώνες. Για να μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε τους αλγορίθμους μάθησης (π.χ. τον back propagation αλγόριθμος αντίστροφης διάδοσης) θα πρέπει οι λειτουργίες να είναι παραγωγίσιμες.

Για την υλοποίηση των ασαφών λειτουργιών μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της συνάρτησης μεταφοράς του νευρώνα. Στην περίπτωση αυτή ο νευρώνας δεν υλοποιεί το αναλυτικό γινόμενο της εισόδου με το διάνυσμα των βαρών αλλά την πράξη της συγκεκριμένης ασαφούς λειτουργίας θεωρώντας ότι όλα τα βάρη είναι 1. Ως συνάρτηση συμμετοχής λαμβάνεται η :

$$f(u) = \begin{cases} 1, u > 1 \\ u, 0 \leq u \leq 1 \\ 0, u < 0 \end{cases}$$

3.6.4 ΣΥΝΘΕΤΙΚΟΙ ΝΕΥΡΩΝΕΣ

Παραπάνω αναφερθήκαμε στη σύνθεση των ασαφών σχέσεων. Η πράξη της σύνθεσης αποτελεί μια γενίκευση της πράξης του αναλυτικού γινομένου των διανυσμάτων και υλοποιείται από τη συνάρτηση μεταφοράς f των νευρώνων. Η μορφή του νευρώνα είναι η ίδια και ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$f = \underset{i \in N_m}{\text{union}} t(x_i, w_i)$$

$$y = f(u)$$

όπου union είναι μια σ-νόρμα και t είναι μια τ-νόρμα.

Ως συνάρτηση ενεργοποίησης θεωρείται η συνάρτηση αναρρίχησης. Παρατηρούμε ότι ο συνθετικός νευρώνας είναι μια γενίκευση του κλασικού νευρώνα, αφού η πράξη της φραγμένης άθροισης, η οποία εξασφαλίζεται από τη συνάρτηση ενεργοποίησης είναι μια ειδική περίπτωση της φραγμένης ένωσης, ενώ το γινόμενο είναι μια ειδική περίπτωση της ασαφούς τομής.

3.7 ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ (Adaptive Networks)

Ένα προσαρμοστικό δίκτυο είναι αυτό που στη δομή του περιέχει έναν αριθμό κόμβων συνδεδεμένων μέσω κατευθυντικών συνδέσεων. Κάθε κόμβος αναπαριστά μια μονάδα επεξεργασίας και οι σύνδεσμοι μεταξύ κόμβων προσδιορίζουν την αιτιολογική σχέση (casual relationship) μεταξύ των συνδεδεμένων κόμβων. Προσαρμοστικός είναι ο κόμβος όλος ή μέρος του, που σημαίνει ότι οι έξοδοι αυτών των κόμβων εξαρτώνται από προσαρμοζόμενες – τροποποιήσιμες παραμέτρους που ανήκουν σε αυτούς τους κόμβους. Οι κανόνες εκπαίδευσης προσδιορίζουν πως αυτές οι παράμετροι θα πρέπει να αλλάζουν ώστε να ελαχιστοποιείται το προκαθορισμένο μέτρο σφάλματος (error measure) το οποίο είναι μια μαθηματική έκφραση που μετράει την ασυμφωνία μεταξύ της πραγματικής εξόδου του δικτύου και της επιθυμητής εξόδου.

Τα προσαρμοστικά δίκτυα χρησιμοποιούνται στην ταυτοποίηση συστήματος. Εμείς θα πρέπει να βρούμε μια κατάλληλη αρχιτεκτονική για το δίκτυο και να θέσουμε ένα σύνολο παραμέτρων που μπορούν να μοντελοποιήσουν καλύτερα ένα σύστημα-στόχο, το οποίο περιγράφεται από ένα σύνολο ζευγών δεδομένων εισόδου-εξόδου.

Ο βασικός κανόνας ενός προσαρμοστικού δικτύου είναι η απότομη φθίνουσα μέθοδος, στην οποία το βαθμωτό διάνυσμα προκύπτει από επιτυχείς επικλήσεις του κανόνα της αλυσίδας. Αυτή η μέθοδος

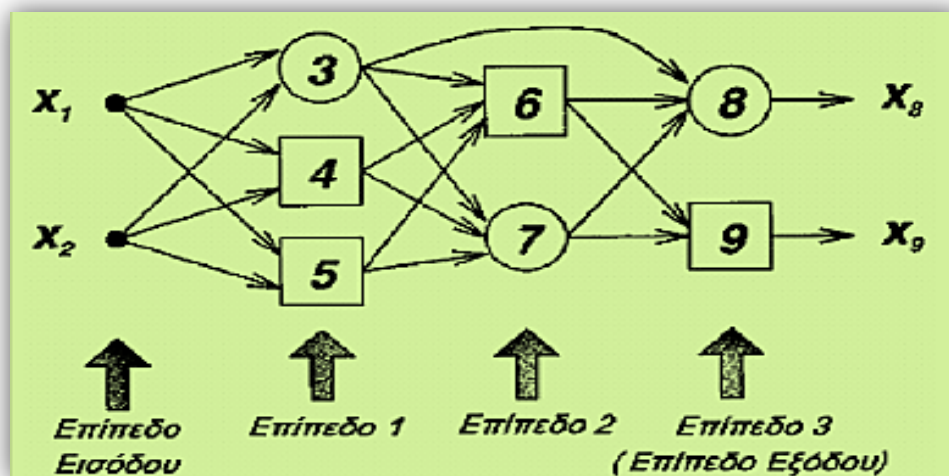
χρησιμοποιείται και για την εύρεση του βαθμωτού σε ένα νευρωνικό δίκτυο πολλών επιπέδων. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται κανόνας οπισθόδρομης διάδοσης (back propagation learning rule).

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ.

Για να κάνουμε ένα ασαφές σύστημα προσαρμοστικό, θα πρέπει να ξέρουμε τις παραγώγους μιας συνάρτησης συμμετοχής ως προς το όρισμα εισόδου και τις παραμέτρους. Αυτές οι πληροφορίες από τις παραγώγους παίζουν σημαντικό ρόλο στην μάθηση ή την προσαρμογή ενός ασαφούς συστήματος.

3.8 ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

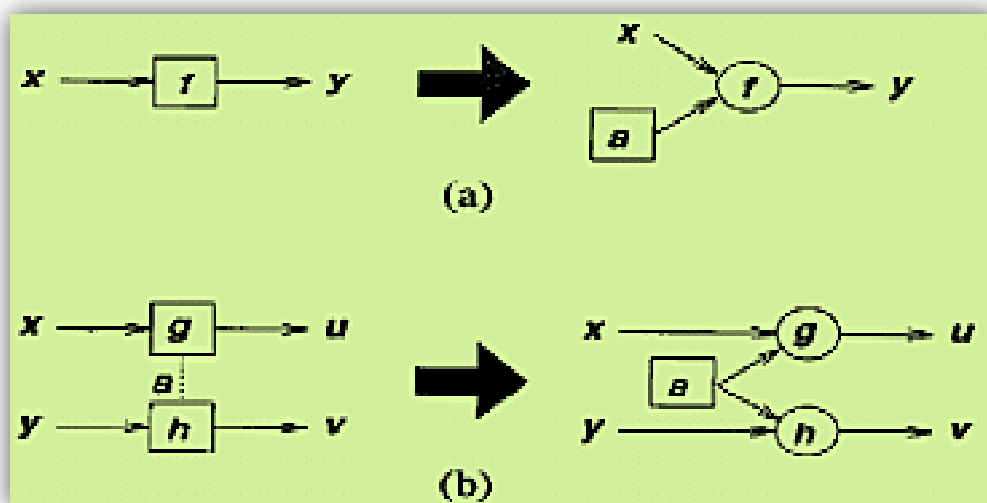
Όπως φανερώνει και η ονομασία, ένα προσαρμοστικό δίκτυο παρουσιάζει τέτοια δομή ώστε η συνολική συμπεριφορά εισόδου-εξόδου να διαμορφώνεται από ένα σύνολο τροποποιήσιμων παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα, η σύνθεση ενός προσαρμοστικού δικτύου πραγματοποιείται από ένα σύνολο κόμβων συνδεδεμένων με προσανατολισμένους συνδέσμους, όπου κάθε κόμβος εκτελεί μια συγκεκριμένη λειτουργία στα εισερχόμενα σήματα, για να παράξει μια μονήρη έξοδο. Επίσης, κάθε σύνδεσμος καθορίζει τη κατεύθυνση ροής του σήματος από τον ένα κόμβο στον άλλον. Συνήθως μια συνάρτηση κόμβου είναι μια παραμετρική συνάρτηση με τροποποιήσιμες παραμέτρους. Αλλάζοντας τις παραμέτρους, μπορούμε να αλλάξουμε τη λειτουργία κόμβου καθώς και τη συνολική συμπεριφορά του προσαρμοστικού δικτύου.



Σχήμα 3.5: Ένα εμπροσθόδρομο (feed-forward) προσαρμοστικό δίκτυο σε αναπαράσταση με επίπεδα.

Οι σύνδεσμοι σε ένα προσαρμοστικό δίκτυο χρησιμοποιούνται απλώς για να προσδιορίσουν την κατεύθυνση διάδοσης των σημάτων εξόδου. Γενικά δεν υπάρχουν βάρη ή παράμετροι σχετιζόμενοι με συνδέσμους. Το παραπάνω σχήμα είναι ένα αντιπροσωπευτικό προσαρμοστικό δίκτυο με δύο εισόδους και δύο εξόδους.

Οι παράμετροι ενός προσαρμοστικού δικτύου είναι κατανεμημένοι μέσα στους κόμβους, ώστε κάθε κόμβος να περιέχει ένα τοπικό σύνολο παραμέτρων. Η ένωση αυτών των τοπικών παραμέτρων είναι το ολικό σύνολο παραμέτρων του δικτύου. Αν το σύνολο παραμέτρων ενός κόμβου δεν είναι κενό, τότε η λειτουργία του κόμβου εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων. Στα σχήματα, αναπαριστούμε τον **προσαρμοστικό κόμβο** αυτού του είδους με ένα τετράγωνο. Από την άλλη, αν ο κόμβος περιέχει κενό σύνολο παραμέτρων, τότε η λειτουργία του είναι καθορισμένη. Ακόμα, αναπαριστούμε τον τύπο του **προκαθορισμένου κόμβου** με ένα κύκλο. Κάθε προσαρμοστικός κόμβος μπορεί να διασπαστεί σε ένα προκαθορισμένο κόμβο συν ένα ή περισσότερους κόμβους παραμέτρων.

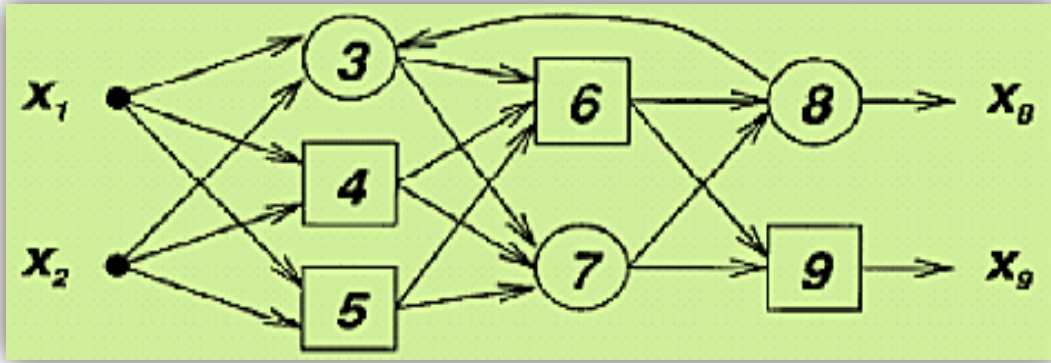


Σχήμα 3.6: (α) ένας μονός κόμβος και (β) ένα πρόβλημα με κοινές παραμέτρους.

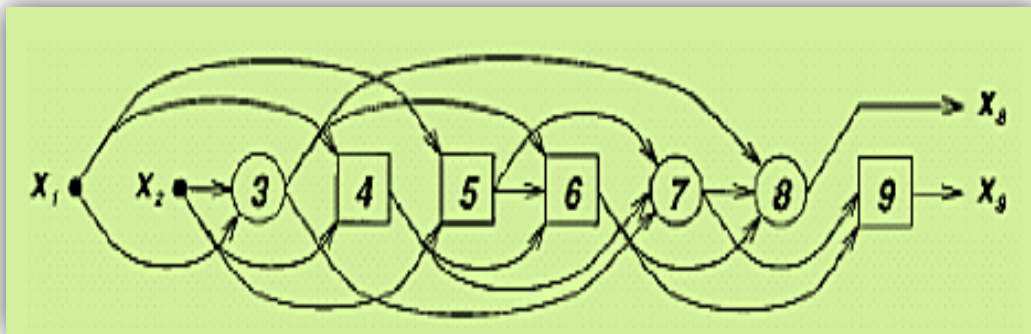
3.9 ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΣΕ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Το παραπάνω σχήμα δείχνει ένα προσαρμοστικό δίκτυο με έναν μόνο κόμβο, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί σαν $y = f(x, a)$ όπου x, y είναι η είσοδος και η έξοδος αντιστοίχως και a είναι η παράμετρος κόμβου. Μια ισοδύναμη απεικόνιση είναι να μετακινήσουμε μια παράμετρο έξω από τον κόμβο και να την τοποθετήσουμε σε ένα **κόμβο παράμετρο** όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Αυτός ο κόμβος παράμετρος είναι μια ειδική περίπτωση ενός προσαρμοστικού κόμβου στον οποίο δεν υπάρχουν είσοδοι και η έξοδος είναι η ίδια παράμετρος. Ο κόμβος παράμετρος είναι χρήσιμος στην επίλυση συγκεκριμένων αντιπροσωπευτικών προβλημάτων. Στο παράδειγμα καταμερισμού παραμέτρων στο σχήμα (β), δύο προσαρμοστικοί κόμβοι $u = g(x, a)$ και $u = h(y, a)$ μοιράζονται την ίδια παράμετρο a , όπως δηλώνεται και από τη διάστικτη γραμμή που ενώνει τους δυο αυτούς κόμβους. Βγάζοντας έξω την παράμετρο και βάζοντας την μέσα σε ένα κόμβο παράμετρο μπορούμε να ενσωματώσουμε τις απαιτήσεις του καταμερισμού παραμέτρων μέσα στην αρχιτεκτονική σχεδίαση του δικτύου. Αυτό απλοποιεί την αναπαράσταση του δικτύου όπως και την εφαρμογή του σε λογισμικό.

Τα προσαρμοστικά δίκτυα είναι γενικώς κατηγοριοποιημένα σε δυο κατηγορίες με βάση τον τύπο των διασυνδέσεων που εμφανίζουν: εμπροσθόδρομα δίκτυα (feedward) και επαναληπτικά. Το προσαρμοστικό δίκτυο που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα είναι εμπροσθόδρομο, αφού η έξοδος κάθε κόμβου διαδίδεται από την πλευρά της εισόδου (αριστερά) προς τη πλευρά της εξόδου (δεξιά) πάντα. Αν υπάρχει σύνδεσμος ανάδρασης που σχηματίζει ένα κυκλικό μονοπάτι στο δίκτυο, τότε το δίκτυο είναι επαναληπτικό. Το παρακάτω σχήμα είναι ένα παράδειγμα. Στα γραφήματα, ένα εμπροσθόδρομο δίκτυο αναπαριστάται από ένα κυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα που δεν περιέχει κατευθυνόμενους κύκλους, ενώ ένα επαναληπτικό δίκτυο περιέχει πάντα τουλάχιστον ένα κατευθυνόμενο κύκλο.



Σχήμα 3.7: Επαναληπτικό προσαρμοστικό δίκτυο.



Σχήμα 3.8: Εμπροσθόδρομο προσαρμοστικό δίκτυο (τοπολογική διάταξη).

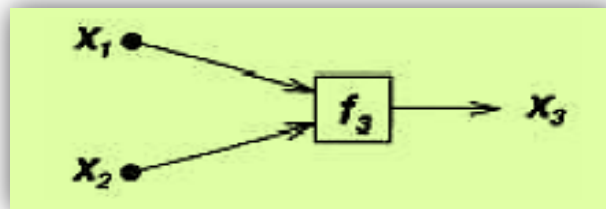
Στην **αναπαράσταση με επίπεδα** του εμπροσθόδρομου προσαρμοστικού δικτύου στο σχήμα που παρουσιάστηκε παραπάνω, δεν υπάρχουν σύνδεσμοι μεταξύ κόμβων στο ίδιο επίπεδο και οι έξοδοι των κόμβων σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο είναι πάντα συνδεδεμένες με κόμβους σε διαδοχικά επίπεδα. Αυτή η αναπαράσταση είναι συνήθως προτιμητέα εξαιτίας της εύκολης διαμόρφωσης της αφού οι κόμβοι στο ίδιο επίπεδο έχουν την ίδια λειτουργία ή γεννούν το ίδιο επίπεδο αφαίρεσης όσον αφορά τα διανύσματα εισόδου.

Μια άλλη αναπαράσταση εμπροσθόδρομου δικτύου είναι η αναπαράσταση τοπολογικής ταξινόμησης η οποία παρουσιάζει τους κόμβους σε μια διατεταγμένη ακολουθία 1,2,3, ..., τέτοια που να μην υπάρχουν σύνδεσμοι από τον κόμβο i στον κόμβο j , οποτεδήποτε $i \geq j$. Αυτή η αναπαράσταση είναι λιγότερο διαμορφώσιμη από ότι η αναπαράσταση με επίπεδα, όμως διευκολύνει τον σχηματισμό κανόνων εκπαίδευσης. Η αναπαράσταση τοπολογικής ταξινόμησης είναι στην πραγματικότητα μια ειδική περίπτωση της αναπαράστασης με επίπεδα, με έναν κόμβο ανά επίπεδο.

Ένα εμπροσθόδρομο προσαρμοστικό δίκτυο είναι στην πραγματικότητα μια στατική αντιστοίχιση μεταξύ των χωρών εισόδου και εξόδου. Αυτή η αντιστοιχία μπορεί να είναι μια απλή γραμμική σχέση ή μη γραμμική, εξαρτώμενη από τη δομή του δικτύου (διάταξη κόμβων και συνδέσεων) και τη λειτουργία κάθε κόμβου. Για να κατασκευάσουμε ένα προσαρμοστικό δίκτυο χρησιμοποιούμε ένα σύνολο δεδομένων προς εκπαίδευση και κάποιες διαδικασίες όπως οι κανόνες εκπαίδευσης ή οι προσαρμοστικοί αλγόριθμοι για την τροποποίηση των παραμέτρων με σκοπό να βελτιώσουμε την απόδοση του δικτύου. Συνήθως η απόδοση ενός δικτύου μετριέται ως η διαφορά μεταξύ της επιθυμητής εξόδου και της πραγματικής, κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Αυτή η διαφορά ονομάζεται μέτρηση σφάλματος. Γενικότερα, ένας κανόνας εκπαίδευσης εξάγεται από την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης τεχνικής βελτιστοποίησης για μια δεδομένη μέτρηση σφάλματος.

3.10 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

3.10.1 ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΜΕ ΕΝΑΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΟΜΒΟ (LINEAR NODE)



Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται ένα προσαρμοστικό δίκτυο με ένα κόμβο. Ορίζεται :

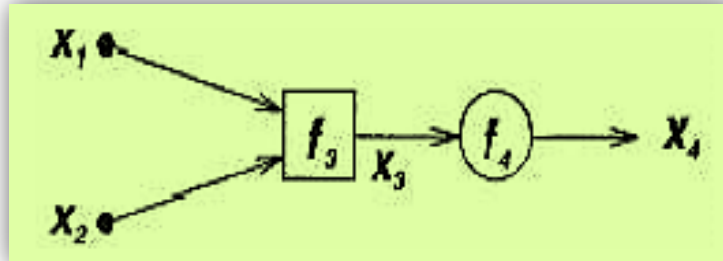
$$x_3 = f_3(x_1, x_2, ; a_1, a_2, a_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3$$

Όπου x_1, x_2 είναι οι είσοδοι και a_1, a_2, a_3 είναι οι τροποποιήσιμες παράμετροι.

Η συνάρτηση προσδιορίζει ένα επίπεδο σε ένα χώρο x_1 - x_2 και βάζοντας διάφορες τιμές για τις παραμέτρους μπορούμε να τοποθετήσουμε αυτό το επίπεδο αυθαίρετα όπως εμείς θέλουμε. Χρησιμοποιώντας το τετραγωνικό σφάλμα ως σφάλμα μέτρησης για το δίκτυο, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τις βέλτιστες παραμέτρους μέσω της μεθόδου εκτίμησης των γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων.

3.10.2 ΔΙΚΤΥΟ PERCEPTRON

Εάν στο παραπάνω δίκτυο προσθέσουμε έναν επιπλέον κόμβο ώστε να επιτρέψουμε στην έξοδο του δικτύου να παίρνει μόνο δυο τιμές 0 και 1, τότε παίρνουμε το μη γραμμικό δίκτυο:



Οι κόμβοι εκφράζονται ως:

$$x_3 = f_3(x_1, x_2, ; a_1, a_2, a_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3$$

και

$$x_4 = f_4(x_3) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_3 \geq 0 \\ 0 & \text{if } x_3 < 0 \end{cases}$$

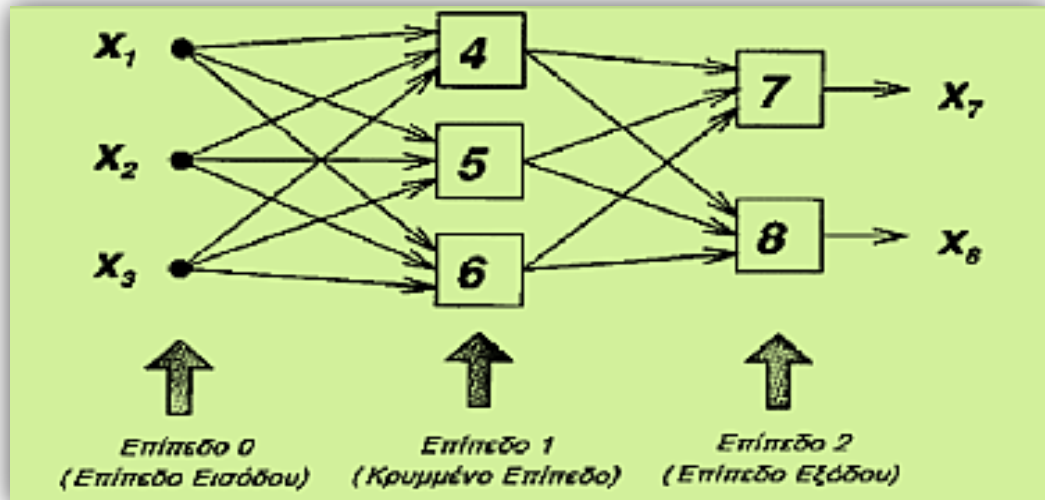
όπου f_3 είναι μια γραμμική συνάρτηση και f_4 η βηματική συνάρτηση που αντιστοιχεί το x_3 είτε στο 0 είτε στο 1.

Την ολική συνάρτηση του δικτύου μπορούμε να την δούμε σαν ένα γραμμικό ταξινομητή. Ο πρώτος κόμβος σχηματίζει ένα όριο απόφασης σαν μια ευθεία γραμμή στον χώρο των x_1 - x_2 και ο δεύτερος δείχνει σε ποιο ημιεπίπεδο ανήκει το διάνυσμα εισόδου (x_1, x_2) . Μπορεί να σχηματιστεί ένα ισοδύναμο ημιεπίπεδο με ένα μόνο κόμβο όπου η συνάρτηση των f_3 και f_4 . Ο κόμβος που προκύπτει είναι ένα δομικό υλικό. Μιας και η βηματική συνάρτηση είναι ασυνεχής σε ένα σημείο και επίπεδη σε όλα τα άλλα σημεία, μια εναλλακτική λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε τη σιγμοειδή συνάρτηση σαν μια συθλιπτική συνάρτηση που παίρνει τιμές από 0 έως 1.

$$x_4 = f_4(x_3) = \frac{1}{1 + e^{-x_3}}$$

3.10.3 ΠΟΛΥΕΠΙΠΕΔΟ PERCEPTRON (MLP)

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την αρχιτεκτονική για ένα πολυεπίπεδο perceptron με τρεις εισόδους, δύο εξόδους και τρεις κρυμμένους κόμβους που δεν συνδέονται απευθείας ούτε σε είσοδο ούτε σε έξοδο.



Σχήμα 3.9: Πολυεπίπεδο Perceptron (Multilayer Perceptron)

Κάθε κόμβος σε ένα δίκτυο αυτού του τύπου έχει την ίδια συνάρτηση κόμβου, που είναι σύνθεση μιας γραμμικής f_3 και μιας σιγμοειδούς f_4 . Δηλαδή, η συνάρτηση κόμβου στον κόμβο 7 στο παραπάνω σχήμα είναι:

$$x_7 = \frac{1}{1 + \exp \left[- \left(w_{4,7}x_4 + w_{5,7}x_5 + w_{6,7}x_6 + t_7 \right) \right]}$$

όπου x_4 , x_5 και x_6 είναι οι εξοδοί από τους κόμβους 4, 5 και 6 αντίστοιχα και το σύνολο των παραμέτρων του κόμβου 7 δηλώνεται με το $\{w_{4,7}, w_{5,7}, w_{6,7}, t_7\}$. Συνήθως το $w_{i,j}$ είναι το βάρος που σχετίζεται με το σύνδεσμο που ενώνει τον i -οστό κόμβο και τον j -οστό κόμβο και το t_j σαν το κατώφλι (threshold) που συνδέεται με τον κόμβο j . Γενικά, ένας σύνδεσμος δείχνει μόνο την κατεύθυνση της ροής σήματος μεταξύ των συνδεδεμένων κόμβων.

4.ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟ ΝΕΥΡΟ-ΑΣΑΦΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ (ADAPTIVE NEURO-FUZZY INFERENCE SYSTEM-ANFIS)

4.1 ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΤΟΥ ANFIS

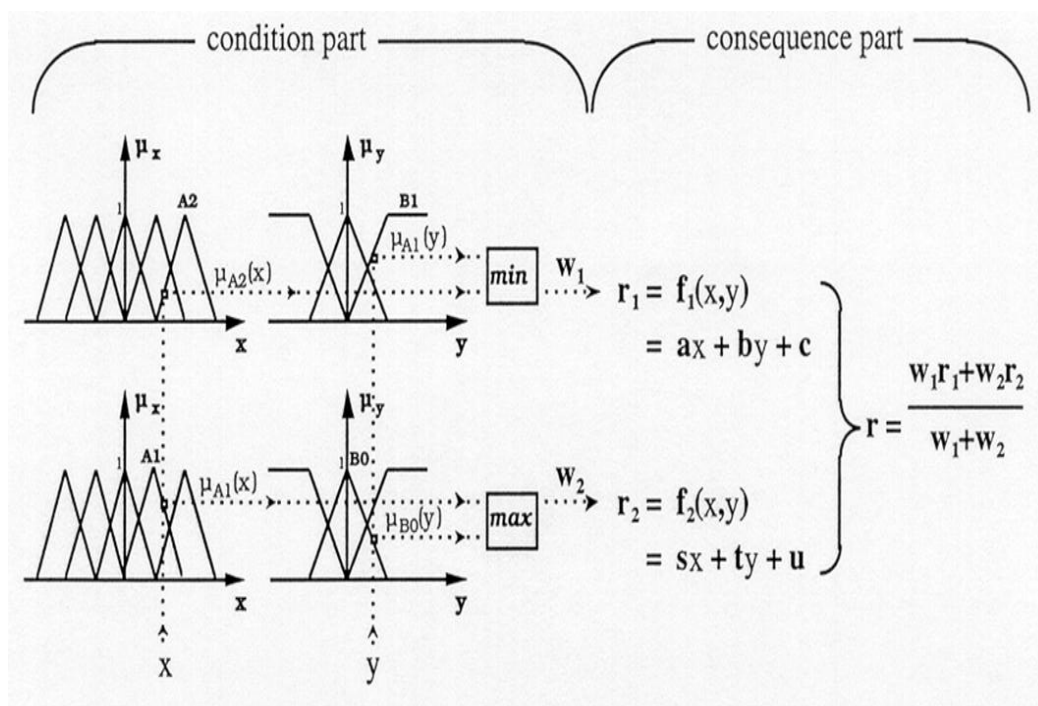
Ο αλγόριθμος ANFIS είναι από τους κυριότερους αλλά και ταυτόχρονα από τους πρώτους που εφαρμόστηκαν για την επίλυση προβλημάτων στο πεδίο των νευρο-ασαφών συστημάτων. Παρακάτω περιγράφεται το δίκτυο, υποθέτοντας ότι το πρόβλημα που θα αναλυθεί έχει 2 εισόδους x και y και μια έξοδο z .

Υποθέτοντας ότι για ένα 1^{ης} τάξης μοντέλο Sugeno, μια τυπική βάση κανόνων (rule base) θα μπορούσε να είναι η εξής:

Κανόνας 1: Εάν x είναι A_1 και y είναι B_1 τότε $f_1 = p_1x + q_1y + r_1$

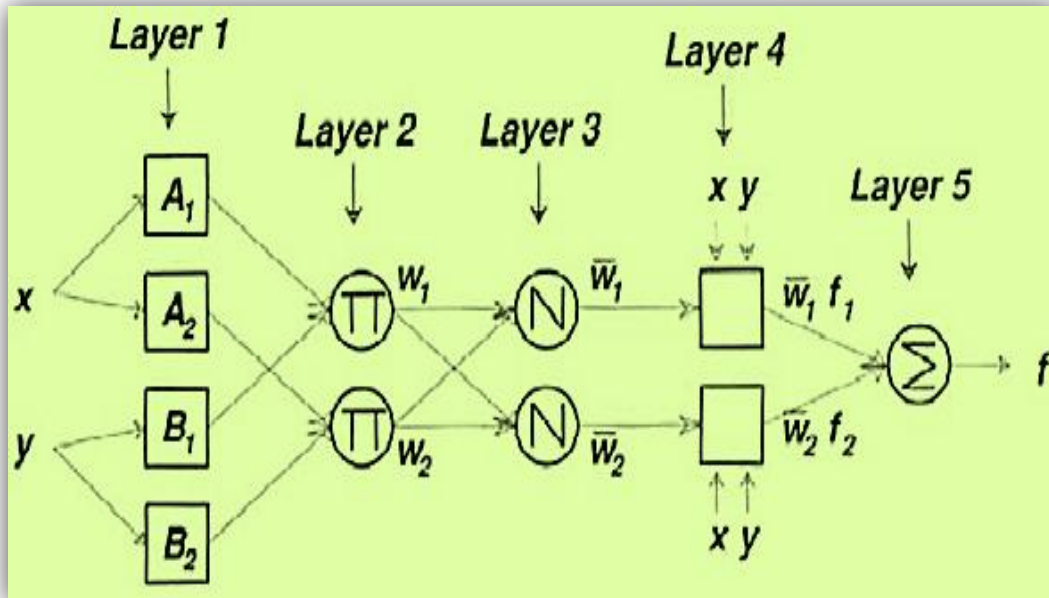
Κανόνας 2: Εάν x είναι A_2 και y είναι B_2 τότε $f_2 = p_2x + q_2y + r_2$

Το παρακάτω σχήμα δείχνει με απλό τρόπο τη διαδικασία συμπερασμού (inference procedure) του μοντέλου Sugeno. Στην περίπτωση του t-operator έχει επιλεγεί η τομή των ασαφών συνόλων (A, B): $\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$.



Σχήμα 4.1: Ασαφής Συλλογιστική (fuzzy reasoning)

Όπως γίνεται φανερό, η έξοδος r του πρωτοβάθμιου μοντέλου Sugeno είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος. Η αντίστοιχη αναπαράσταση του δικτύου ANFIS παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.2: Η αρχιτεκτονική του ANFIS

Το παραπάνω σχήμα απεικονίζει τον συλλογιστικό μηχανισμό (reasoning) για αυτό το μοντέλο Sugeno και την αντίστοιχη ισοδύναμη αρχιτεκτονική του ANFIS, όπου οι κόμβοι του ίδιου επιπέδου έχουν παρόμοιες συναρτήσεις. Παρακάτω παρουσιάζεται πιο αναλυτικά η διεργασία που εκτελείται σε κάθε επίπεδο.

Layer 1: Κάθε κόμβος i σε αυτό το επίπεδο είναι ένας προσαρμόσιμος (adaptive) κόμβος με συνάρτηση κόμβου:

$$O_{1,i} = \mu_{A_i}(x) \text{ για } i=1,2 \text{ ή}$$

$$O_{1,i} = \mu_{B_{i-2}}(y) \text{ για } i=3,4$$

όπου x (ή y) η είσοδος στον κόμβο i και A_i (ή B_{i-2}) η γλωσσική μεταβλητή (small, large, κλπ.) που σχετίζεται με αυτή τη συνάρτηση κόμβου. Με άλλα λόγια, το $O_{1,i}$ είναι ο βαθμός συμμετοχής του ασαφούς συνόλου $A (=A_1, A_2, B_1, B_2)$ και καθορίζει το βαθμό στον οποίο η είσοδος x (ή y) ικανοποιεί τον ποσοτικοποιητή A . Εδώ η συνάρτηση συμμετοχής για το A μπορεί να είναι οποιαδήποτε κατάλληλη παραμετρική συνάρτηση συμμετοχής όπως για παράδειγμα η συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c_i}{a_i} \right|^{2bi}}$$

όπου a_i, b_i, c_i είναι το σύνολο των παραμέτρων.

Καθώς οι τιμές των παραμέτρων αλλάζουν, οι συναρτήσεις διαμορφώνονται ανάλογα, παρουσιάζοντας έτσι διάφορες μορφές της αρχικής συνάρτησης συμμετοχής για το ασαφές σύνολο A . Οι παράμετροι σε αυτό το επίπεδο αναφέρονται ως **αρχικοί παράμετροι** (premise parameters).

Layer 2: Κάθε κόμβος σε αυτό το επίπεδο είναι ένας σταθερός (fixed) κόμβος Π , του οποίου η έξοδος είναι το γινόμενο όλων των εισερχόμενων σημάτων:

$$O_{2,i} = w_i = \mu_{Ai}(x) \cdot \mu_{Bi}(y), \text{ για } i=1,2$$

Κάθε κόμβος αντιπροσωπεύει τη βαθμό ενεργοποίησης που έχει ο κανόνας. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και οποιαδήποτε άλλη τ-norm που χρησιμοποιεί τον τελεστή AND.

Layer 3: Κάθε κόμβος σε αυτό το επίπεδο είναι ένας σταθερός κόμβος N . Ο i -οστός κόμβος υπολογίζει το λόγο του βαθμού ενεργοποίησης του i -οστού κανόνα στο άθροισμα των βαθμών ενεργοποίησης όλων των κανόνων:

$$O_{3,i} = \overline{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2}, \text{ για } i=1, 2$$

Για ευκολία, οι έξοδοι αυτού του επιπέδου ονομάζονται κανονικοποιημένοι βαθμοί ενεργοποίησης (normalized firing strengths).

Layer 4: Κάθε κόμβος i σε αυτό το επίπεδο είναι ένας προσαρμόσιμος κόμβος με μια συνάρτηση κόμβου:

$$O_{4,1} = \overline{w}_i f_i = \overline{w}_i (p_x + q_i y + r_i)$$

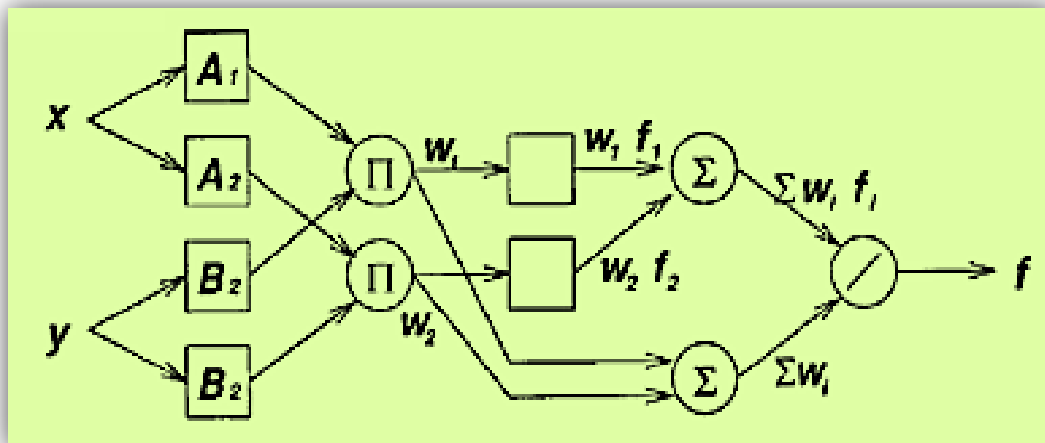
όπου: $\overline{w}_i$ είναι ο κανονικοποιημένος βαθμός ενεργοποίησης του επιπέδου 3 και $\{p_i, q_i, r_i\}$ είναι το σύνολο των παραμέτρων. Οι παράμετροι σε αυτό

το επίπεδο αναφέρονται ως **επακόλουθοι παράμετροι** (consequent parameters).

Layer 5: Ο μοναδικός κόμβος σε αυτό το επίπεδο είναι ένας σταθερός κόμβος Σ που υπολογίζει τη συνολική έξοδο σαν το ολικό άθροισμα όλων των εισερχόμενων σημάτων:

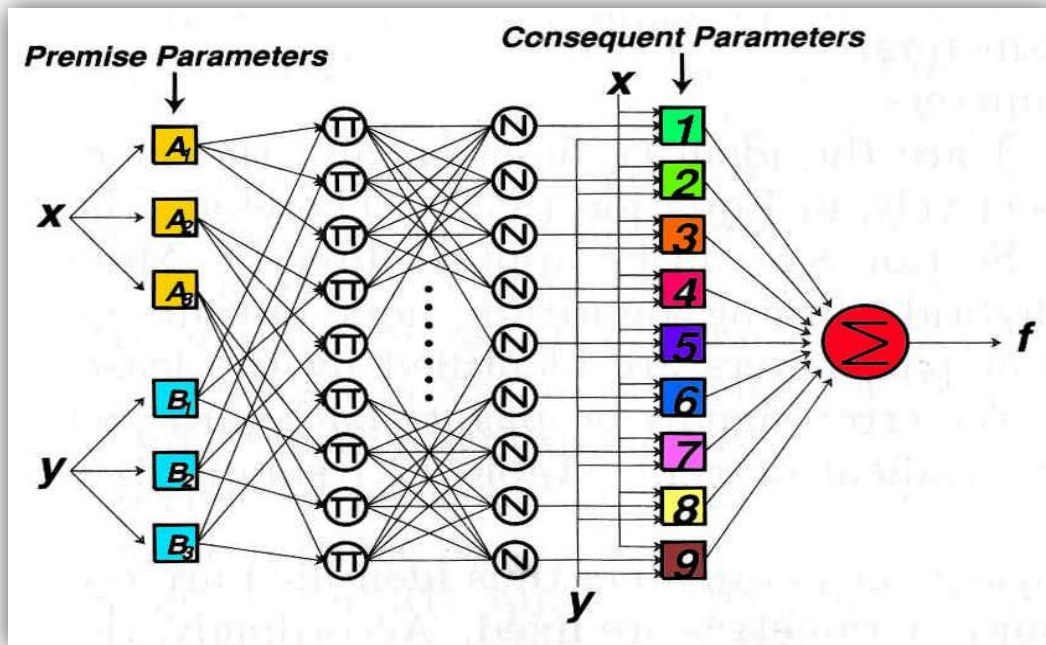
$$\text{Overall output} = O_{5,1} = \sum_i \bar{w}_i f_i = \frac{\sum_i w_i f_i}{\sum_i w_i}$$

Αυτό το προσαρμοστικό δίκτυο είναι λειτουργικά ισοδύναμο με το ασαφές μοντέλο Sugeno. Μπορούμε να συνδυάσουμε τα επίπεδα 3 και 4 για να δημιουργήσουμε ένα ισοδύναμο δίκτυο με τέσσερα μόνο επίπεδα. Με το ίδιο δείγμα μπορούμε να πραγματοποιήσουμε την κανονικοποίηση των βαρών στο τελευταίο επίπεδο. Το σχήμα απεικονίζεται ένα ANFIS αυτού του τύπου. Στην ακραία περίπτωση μπορούμε να συρρικνώσουμε ακόμα και όλο το δίκτυο σε ένα μόνο προσαρμοστικό κόμβο με το ίδιο σύνολο παραμέτρων. Η ανάθεση συναρτήσεων κόμβων και η σύνθεση του δικτύου είναι αυθαίρετες. Κάθε κόμβος και κάθε επίπεδο πραγματοποιούν λειτουργίες που είναι σημαντικές και έχουν την δυνατότητα να αποτελούνται από επιμέρους τμήματα.

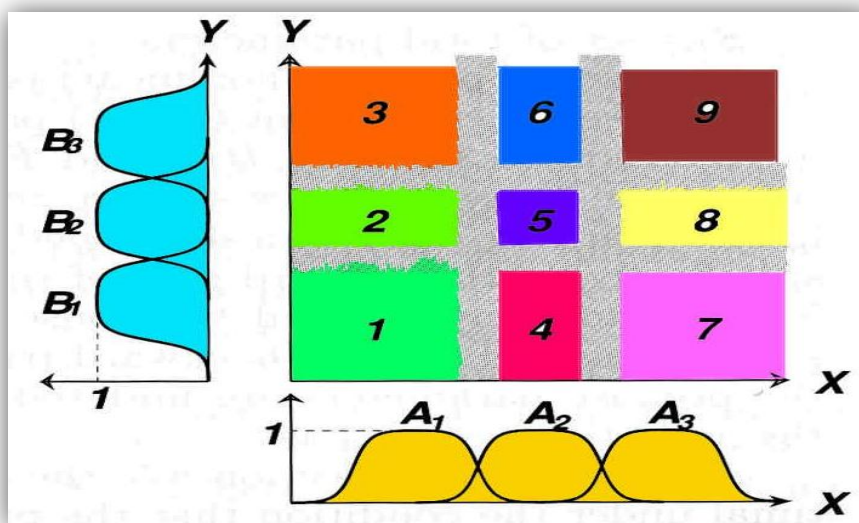


Σχήμα 4.3: Η αρχιτεκτονική του ANFIS για το ασαφές σύνολο Sugeno, όπου η κανονικοποίηση βαρών πραγματοποιείται στο τελευταίο επίπεδο.

Στο ANFIS μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο Mamdani. Το Sugeno χρησιμοποιείται περισσότερο συχνά, μιας και διακρίνεται για τη διαφάνεια και την αποτελεσματικότητά του.



Σχήμα 4.4: Η αρχιτεκτονική του ANFIS για το ασαφές μοντέλο Sugeno με 2 εισόδους και εννέα κανόνες



Σχήμα 4.5: Ο χώρος εισόδου, χωρισμένος σε εννέα ασαφής περιοχές.

Στο σχήμα 4 βλέπουμε μια αρχιτεκτονική του ANFIS που είναι ισοδύναμη με ένα ασαφές μοντέλο Sugeno πρώτου βαθμού δυο εισόδων και εννέα κανόνων, όπου σε κάθε είσοδο θεωρούμε ότι αντιστοιχούν τρεις συναρτήσεις συμμετοχής. Στο σχήμα 5 απεικονίζεται δυο διαστάσεων χώρος εισόδου ο οποίος είναι χωρισμένος σε εννέα υπέρθετες (overlapping) ασαφείς περιοχές όπου κάθε μια ελέγχεται από έναν ασαφή κανόνα if – then. Αυτό σημαίνει ότι το μέρος των προϋποθέσεων ενός κανόνα προσδιορίζει μια ασαφή περιοχή, ενώ το μέρος των συμπερασμάτων προσδιορίζει την έξοδο μέσα στην περιοχή.

4.2 ΕΚΤΙΜΗΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ (Least-Squares Estimator)

Στο γενικό πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων, η έξοδος του γραμμικού μοντέλου y δίνεται από τη γραμμικά παραμετροποιημένη έκφραση:

$$y = \theta_1 f_1(u) + \theta_2 f_2(u) + \dots \theta_n f_n(u)$$

Όπου $u = [u_1, \dots, u_p]^T$ είναι το διάνυσμα εισόδου του μοντέλου $f_1, \dots, f_n$ είναι γνωστές συναρτήσεις του u και $\theta_1, \dots, \theta_n$ είναι άγνωστες παράμετροι που θα υπολογιστούν. Στην στατιστική, η διαδικασία της προσαρμογής δεδομένων χρησιμοποιώντας ένα γραμμικό μοντέλο, αναφέρεται και ως γραμμική παλινδρόμηση. Γι' αυτό και η εξίσωση καλείται **συνάρτηση παλινδρόμησης**, και τα θ_i ονομάζονται **συντελεστές παλινδρόμησης**.

Για να προσδιοριστούν οι άγνωστες παράμετροι θ_i , συνήθως πρέπει να εκτελεστούν πειράματα για να βρεθεί ένα σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης που αποτελείται από ζευγάρια δεδομένων $\{(u_i, y_i), i = 1, \dots, m\}$ τα οποία αντιπροσωπεύουν τα επιθυμητά ζευγάρια εισόδου – εξόδου του συστήματος στόχου που θα μοντελοποιηθεί. Η αντικατάσταση κάθε ζεύγους στοιχείων στην εξίσωση παράγει ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων m :

$$\begin{array}{l} f_1(u_1) \theta_1 + f_2(u_1) \theta_2 + \dots + f_n(u_1) \theta_n = y_1, \\ f_1(u_2) \theta_1 + f_2(u_2) \theta_2 + \dots + f_n(u_2) \theta_n = y_2, \\ \dots \\ f_1(u_m) \theta_1 + f_2(u_m) \theta_2 + \dots + f_n(u_m) \theta_n = y_m, \end{array}$$

Σε μορφή πινάκων, οι προηγούμενες εξισώσεις μπορούν να γραφτούν σε συνοπτική μορφή:

$$A\theta = y$$

όπου A είναι ένας $m \times n$ πίνακας (πίνακας σχεδιασμού) :

$$A = \begin{bmatrix} f_1(u_1) & \dots & f_n(u_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(u_m) & \dots & f_n(u_m) \end{bmatrix}$$

θ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

και y είναι ένα $m \times 1$ διάνυσμα εξόδου:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Η i -οστή σειρά του ενωμένου πίνακα δεδομένων $[A : y]$, που δηλώνεται με $[a_i^T : y_i]$, σχετίζεται με το i -οστό ζευγάρι δεδομένων εισόδου-εξόδου (u_i, y_i) μέσα από τη σχέση:

$$a_i^T = [f_1(u_i), \dots, f_n(u_i)]$$

Το μεγαλύτερο μέρος των υπολογισμών βασίζεται στους πίνακες A και y . Μερικές φορές γίνεται αναφορά στο $[a_i^T : y_i]$ σαν το i -οστό ζευγάρι δεδομένων του συνόλου δεδομένων εκπαίδευσης.

Για να προσδιοριστεί μεμονωμένα το άγνωστο διάνυσμα θ , είναι απαραίτητο να ισχύει $m \geq n$. Αν ο A είναι τετραγωνικός ($m=n$) και αντιστρέψιμος με ορίζουσα διάφορη του μηδενός, τότε μπορούμε να βρούμε το θ επιλύοντας την παρακάτω εξίσωση:

$$\theta = A^{-1}y$$

Ο m είναι συνήθως μεγαλύτερος από τον n , που σημαίνει ότι υπάρχουν περισσότερα ζευγάρια στοιχείων από τις παραμέτρους για προσαρμογή. Σε αυτήν τη περίπτωση, μια ακριβής λύση που να ικανοποιεί όλες τις m εξισώσεις δεν είναι πάντα δυνατή, μιας και τα στοιχεία μπορεί να εμπεριέχουν θόρυβο, ή το μοντέλο να μην είναι κατάλληλο για τη περιγραφή του συστήματος στόχου. Κατά συνέπεια η εξίσωση πρέπει να τροποποιηθεί με την ενσωμάτωση ενός διανύσματος σφάλματος e για να υπολογίσουμε τον τυχαίο θόρυβο ή το σφάλμα του μοντέλου ως εξής:

$$A\theta + e = y$$

Τώρα, αντί της εύρεσης της ακριβούς λύσης της εξίσωσης, πρέπει να βρεθεί το $\theta = \hat{\theta}$ που ελαχιστοποιεί το άθροισμα του τετραγωνικού σφάλματος που ορίζεται ως:

$$E(\theta) = \sum_{i=1}^m (y_i - a_i^T \theta)^2 = e^T e = (y - A\theta)^T (y - A\theta)$$

όπου $e = y - A\theta$ είναι το διάνυσμα σφάλματος που παράγεται από μια συγκεκριμένη επιλογή ενός θ . Πρέπει να σημειωθεί ότι το $E(\theta)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και έχει ένα μοναδικό ελάχιστο στο $\theta = \hat{\theta}$.

Το ακόλουθο θεώρημα δηλώνει έναν απαραίτητο όρο που ικανοποιείται από τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\theta}$.

Θεώρημα: Εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων

Το τετραγωνικό σφάλμα στην παραπάνω εξίσωση ελαχιστοποιείται όταν $\theta = \hat{\theta}$, ο οποίος καλείται εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων (LSE) και ο οποίος ικανοποιεί την κανονική εξίσωση:

$$A^T A \hat{\theta} = A^T y$$

Αν ο $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός, το $\hat{\theta}$ είναι μοναδικό και δίνεται από την εξίσωση:

$$\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

4.3 ΚΑΝΟΝΑΣ ΟΠΙΣΘΟΔΡΟΜΗΣ ΕΚΜΑΘΗΣΗΣ (Backpropagation Rule)

Η ενότητα αυτή παρουσιάζει ένα βασικό κανόνα εκμάθησης για προσαρμοστικά δίκτυα, που είναι στην ουσία η πιο απλή μέθοδος βαθμωτής ελαχιστοποίησης. Το κεντρικό μέρος αυτού του κανόνα εκμάθησης αφορά στο πώς επιλέγεται ένα διάνυσμα κλίσης στο οποίο κάθε στοιχείο ορίζεται ως η παράγωγος του μέτρου σφάλματος ως προς μια παράμετρο. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του κανόνα αλυσίδας, ενός βασικού τύπου για το διαφορισμό σύνθετων συναρτήσεων. Η διαδικασία εύρεσης ενός διανύσματος κλίσης σε ένα δίκτυο αναφέρεται γενικά σαν **οπισθοδρόμηση** (backpropagation) επειδή το διάνυσμα κλίσης υπολογίζεται σε κατεύθυνση αντίθετη από τη ροή της εξόδου κάθε κόμβου. Μόλις επιλεγεί η κλίση, διάφορες τεχνικές βελτιστοποίησης και παλινδρόμησης βασισμένες στις παραγώγους είναι διαθέσιμες για την ενημέρωση των παραμέτρων. Ειδικότερα, αν χρησιμοποιούμε το διάνυσμα κλίσης σε μια απλή μέθοδο βαθμωτής ελαχιστοποίησης, το προκύπτον παράδειγμα εκμάθησης αναφέρεται συχνά ως **κανόνας οπισθοδρόμησης εκμάθησης**.

Έστω ότι έχουμε ένα προσαρμοστικό δίκτυο που έχει L επίπεδα και το επίπεδο I (όπου $I = 0, 1, \dots, L$; $I = 0$ αντιπροσωπεύει το επίπεδο εισόδου) έχει $N(I)$. Τότε η έξοδος και η συνάρτηση του κόμβου i [$i = 1, \dots, N(I)$] στο επίπεδο I μπορούν να αναπαρασταθούν σαν $x_{I,i}$ και $f_{I,i}$ αντίστοιχα. Ας υποθεθεί ότι δεν υπάρχει καμία σύνδεση μεταξύ μη συνεχόμενων επιπέδων. Δεδομένου ότι η έξοδος ενός κόμβου εξαρτάται από τα εισερχόμενα σήματα και το σύνολο των παραμέτρων του κόμβου, προκύπτει η ακόλουθη γενική έκφραση για τη συνάρτηση των κόμβων $f_{I,i}$:

$$x_{I,i} = f_{I,i}(x_{I-1,1}, \dots, x_{I-1,N(I-1)}, \alpha, \beta, \gamma, \dots)$$

Όπου α, β, γ κλπ. είναι οι παράμετροι αυτού του κόμβου.

Υποθέτοντας ότι το δοσμένο σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης έχει P καταχωρήσεις, μπορεί να οριστεί ένα μέτρο σφάλματος για την p -οστή καταχώρηση ($1 \leq p \leq P$) των δεδομένων εκπαίδευσης σαν το άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων:

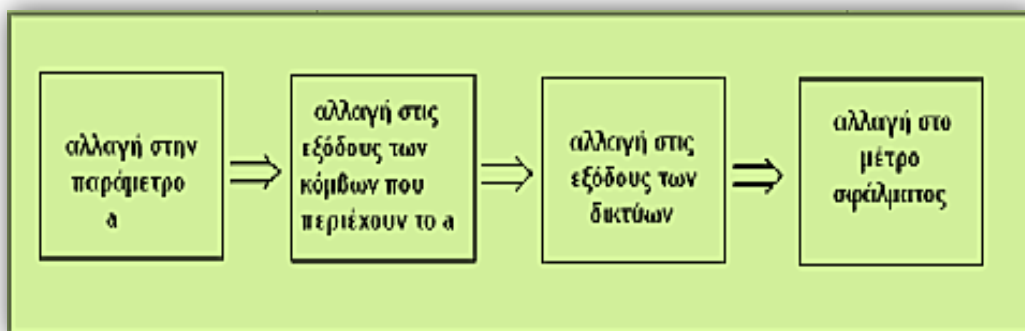
$$E_p = \sum_{k=1}^{N(L)} (d_k - x_{L,k})^2$$

Όπου d_k είναι το k -οστή τιμή του p -οστού επιθυμητού διανύσματος εξόδου και $x_{L,k}$ είναι η k -οστή τιμή του πραγματικού διανύσματος εξόδου που παράγεται με την εισαγωγή του p -οστού διανύσματος εισόδου στο δίκτυο. (Για σημειογραφική απλότητα, παραλείπεται ο δείκτης p και από το d_k και από το $x_{L,k}$). Προφανώς, όταν το E_p είναι ίσο με το μηδέν, το δίκτυο είναι ικανό να αναπαράγει ακριβώς το επιθυμητό διάνυσμα εξόδου στο p -οστό ζευγάρι δεδομένων εκπαίδευσης. Ο στόχος εδώ είναι να ελαχιστοποιηθεί το ολικό σφάλμα μέτρησης, που ορίζεται ως:

$$E = \sum_{p=1}^P E_p$$

Επιπλέον, ας υποτεθεί ότι το E_p εξαρτάται μόνο από τους κόμβους εξόδου.

Για να χρησιμοποιηθεί η βαθμωτή ελαχιστοποίηση ώστε να ελαχιστοποιηθεί το μέτρο σφάλματος, πρέπει πρώτα να βρεθεί το διάνυσμα κλίσης. Πριν υπολογιστεί το διάνυσμα κλίσης, πρέπει να παρατηρηθούν οι ακόλουθες αιτιώδεις σχέσεις:



όπου τα βέλη ($\Rightarrow$) δείχνουν τις αιτιώδεις σχέσεις. Δηλαδή, μια μικρή αλλαγή σε μια παράμετρο α θα επηρεάσει την έξοδο του κόμβου που περιέχει το α . Αυτό με τη σειρά του θα επηρεάσει την έξοδο του τελευταίου επιπέδου και συνεπώς το μέτρο του σφάλματος.

Η βασική αρχή στον υπολογισμό του διανύσματος κλίσης είναι να περαστεί μια σειρά από πληροφορίες παραγώγων ξεκινώντας από το επίπεδο εξόδου και πηγαίνοντας ανάποδα από επίπεδο σε επίπεδο έως ότου καταλήξει η διαδικασία στο επίπεδο εισόδου.

Το σήμα σφάλματος $\varepsilon_{l,i}$ ορίζεται σαν τη παράγωγο του μέτρου σφάλματος E_p ως προς την έξοδο του κόμβου i στο επίπεδο l , λαμβάνοντας υπόψη και τις άμεσες και τις έμμεσες συνδέσεις:

$$\varepsilon_{l,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}}$$

Η έκφραση αυτή ονομάστηκε πεπλεγμένη παράγωγος (ordered derivative) του Werbos. Η διαφορά μεταξύ πεπλεγμένης και κανονικής μερικής παραγώγου είναι ότι για μια έξοδο ενός εσωτερικού κόμβου $x_{l,i}$, όπου $l \neq L$, η μερική παράγωγος $\frac{\partial E_p}{\partial x_{l,i}}$ είναι ίση με μηδέν, μιας και το E_p δεν εξαρτάται από το $x_{l,i}$ άμεσα. Παρ' όλα αυτά, είναι φανερό ότι το E_p εξαρτάται έμμεσα από το $x_{l,i}$, καθώς μια αλλαγή στο $x_{l,i}$ θα εξαπλωθεί μέσω εμμέσων διαδρομών στο επίπεδο εξόδου και γι' αυτό έχουμε και αλλαγή στην τιμή του E_p . Γι' αυτό, το $\varepsilon_{l,i}$ μπορεί να χαρακτηριστεί και σαν η αναλογία αυτών των δύο απειροελάχιστων αλλαγών.

Το σήμα σφάλματος για τον i -οστό κόμβο εξόδου (στο επίπεδο L) μπορεί να υπολογιστεί απ' ευθείας:

$$\varepsilon_{L,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{L,i}} = \frac{\partial E_p}{\partial x_{L,i}}$$

Αυτό ισούται με $\varepsilon_{L,i} = -2(d_i - x_{L,i})$ αν το E_p ορίζεται όπως στην εξίσωση παραπάνω. Για έναν εσωτερικό κόμβο στην i -οστή θέση του επιπέδου l , το σήμα σφάλματος μπορεί να βρεθεί από τον κανόνα αλυσίδας (Leibniz):

$$\varepsilon_{l,i} = \underbrace{\frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}}}_{\text{error signal at layer } l} = \sum_{m=1}^{N(l+1)} \underbrace{\frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l+1,m}}}_{\text{error signal at layer } l+1} \frac{\partial^+ f_{l+1,m}}{\partial x_{l,i}} = \sum_{m=1}^{N(l+1)} \varepsilon_{l+1,m} \frac{\partial f_{l+1,m}}{\partial x_{l,i}}$$

όπου $0 \leq l \leq L-1$. Δηλαδή το σήμα σφάλματος ενός εσωτερικού κόμβου στο στρώμα l μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των κόμβων στο στρώμα $l+1$. Επομένως, για οποιαδήποτε l και i [και $1 \leq i \leq N(l)$], μπορούν να βρεθούν τα:

$$\varepsilon_{l,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}}$$

εφαρμόζοντας πρώτα την εξίσωση για να βρούμε τα σήματα σφάλματος του επιπέδου εξόδου και έπειτα εφαρμόζοντας την παραπάνω εξίσωση επαναληπτικά έως ότου καταλήξει η διαδικασία στο επιθυμητό επίπεδο l . Η διαδικασία αυτή καλείται οπισθοδρόμηση (back propagation) δεδομένου ότι τα σήματα σφάλματος λαμβάνονται διαδοχικά από το επίπεδο εξόδου προς το επίπεδο εισόδου.

Το διάνυσμα κλίσης ορίζεται ως η παράγωγος του μέτρου σφάλματος ως προς κάθε παράμετρο, έτσι πρέπει να εφαρμοστεί ο κανόνας της αλυσίδας ξανά για να βρεθεί το διάνυσμα κλίσης το οποίο είναι και προαπαιτούμενο για να χρησιμοποιήσουμε την απότομη φθίνουσα μέθοδο (steepest descent). Εάν $\mathbf{a}$ είναι μια παράμετρος του i -στού κόμβου στο επίπεδο l , τότε ισχύει:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial a} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}} \frac{\partial f_{l,i}}{\partial a} = \varepsilon_{l,i} \frac{\partial f_{l,i}}{\partial a}$$

Ας σημειωθεί ότι αν επιτραπεί στην παράμετρο $\mathbf{a}$ να είναι κοινή μεταξύ διαφορετικών κόμβων, τότε η εξίσωση πρέπει να αλλαχθεί σε μια πιο γενική μορφή:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial a} = \sum_{x^* \in S} \frac{\partial^+ E_p}{\partial x^*} \frac{\partial f_{l,i}}{\partial a}$$

όπου S είναι το σύνολο των κόμβων που περιέχουν το $\mathbf{a}$ σαν παράμετρο, ενώ x^* είναι η έξοδος και f^* είναι η συνάρτηση ενός γενικού κόμβου στο S . Η παράγωγος του γενικού μέτρου σφάλματος E ως προς το $\mathbf{a}$ είναι:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial a} = \sum_{p=1}^p \frac{\partial^+ E_p}{\partial a}$$

Συνεπώς, για την απλούστερη βαθμωτή ελαχιστοποίηση χωρίς ελαχιστοποίηση γραμμών, ο τύπος για τη νέα παράμετρο $\mathbf{a}$ είναι:

$$\Delta a = -\eta \frac{\partial^+ E_p}{\partial a}$$

όπου το η είναι ο βαθμός εκμάθησης (learning rate), ο οποίος μπορεί να αναλυθεί ως:

$$\eta = \frac{\kappa}{\sqrt{\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha} \right)^2}}$$

όπου το κ είναι το μέγεθος βήματος (step size), το μήκος δηλαδή κάθε μετάβασης κατά μήκος της κατεύθυνσης κλίσης στο διάστημα των

παραμέτρων. Συνήθως το μέγεθος του βήματος μπορεί να αλλαχθεί για να μεταβληθεί η ταχύτητα σύγκλισης.

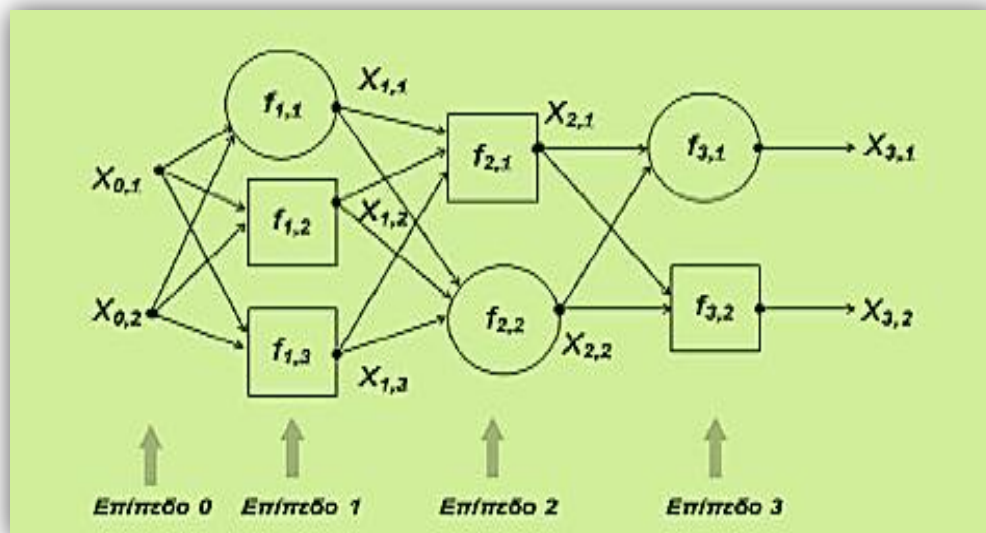
Όταν ένα δίκτυο χωρίς ανατροφοδότηση n -κόμβων αναπαριστάται στην τοπολογική του διάταξη, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο σφάλματος E_p σαν την έξοδο ενός επιπλέον κόμβου με ένδειξη $n+1$, του οποίου η συνάρτηση κόμβου f_{n+1} μπορεί να οριστεί από τις εξόδους κάθε κόμβου με μικρότερη ένδειξη. Επομένως, το E_p μπορεί να εξαρτάται άμεσα από οποιονδήποτε κόμβο. Εφαρμόζοντας πάλι τον κανόνα της αλυσίδας, παίρνουμε τον παρακάτω τύπο για να υπολογίσουμε το σήμα σφάλματος $\varepsilon_i = \frac{\partial E_p}{\partial x_i}$:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial x_i} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} + \sum_{i < j \leq n} \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

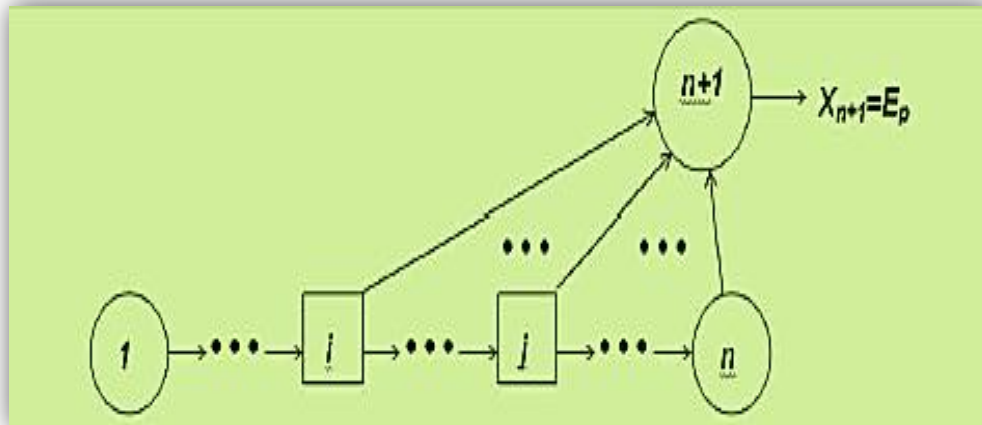
ή

$$\varepsilon_i = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} + \sum_{i < j \leq n} e_j \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

όπου ο πρώτος όρος δείχνει την άμεση επίδραση του x_i στο E_p μέσω της άμεσης σύνδεσης από τον κόμβο i στον κόμβο $n+1$ και κάθε παραγόμενος όρος στο άθροισμα δείχνει την έμμεση επίδραση του x_i στο E_p . Μόλις βρεθεί το σήμα σφάλματος για κάθε κόμβο, τότε το διάνυσμα κλίσης για τις παραμέτρους εξάγεται όπως πριν.

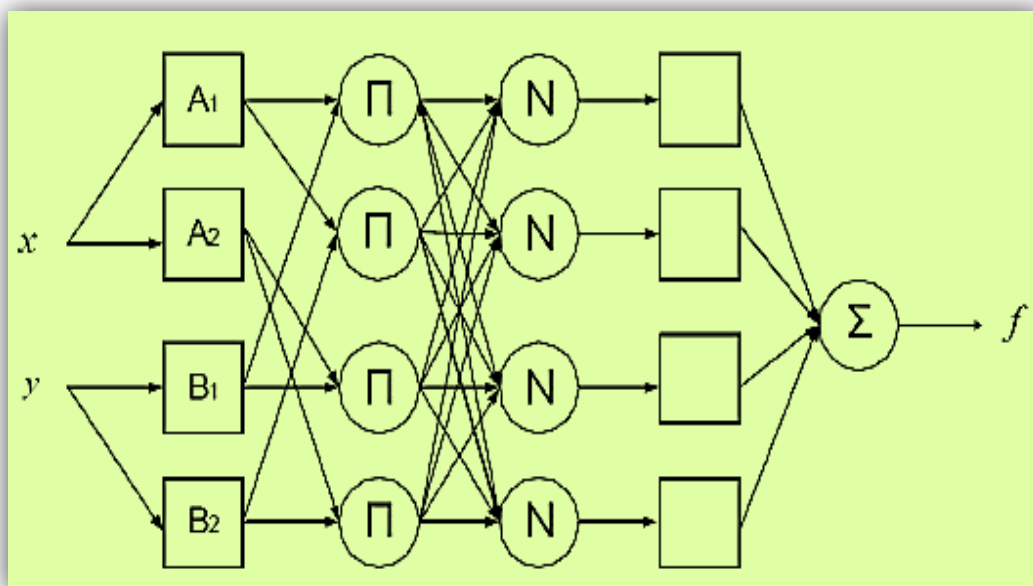


Σχήμα 4.6: Αναπαράσταση επιπέδων.

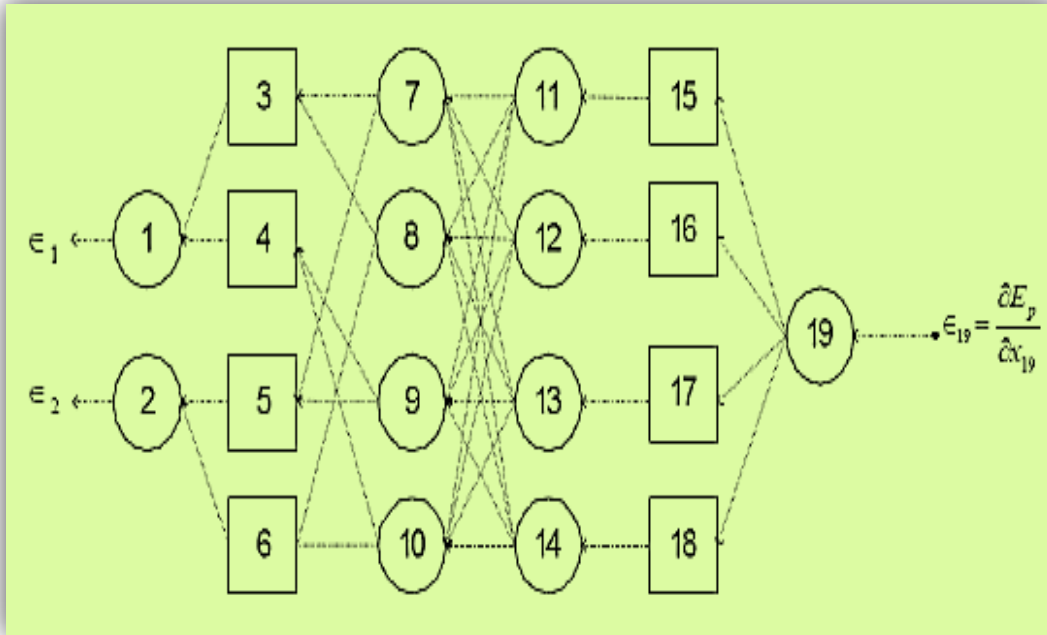


Σχήμα 4.7: Αναπαράσταση τοπολογικής σειράς.

Ένας άλλος συστηματικός τρόπος να υπολογιστούν τα σήματα σφάλματος, είναι μέσω της αναπαράστασης του δικτύου διάδοσης σφάλματος. Το ακόλουθο σχήμα δείχνει το μοντέλο ANFIS και το δίκτυο διάδοσης σφάλματος του:



Σχήμα 4.8: (α) Το προσαρμόσιμο δίκτυο.



Σχήμα 4.8: (β) Το δίκτυο διάδοσης σφάλματος

Τώρα θα υπολογιστούν τα σήματα σφάλματος στους εσωτερικούς κόμβους. Χρησιμοποιούνται τα f_i και x_i για το συμβολισμό της συνάρτησης και της εξόδου του κόμβου i . Η έξοδος του κόμβου i είναι το σήμα σφάλματος αυτού του κόμβου στο πραγματικό προσαρμοστικό δίκτυο. Σε σύμβολα, αν επιλεχθεί το τετραγωνικό μέτρο σφάλματος για E_p , τότε ισχύει το ακόλουθο:

$$\varepsilon_{19} = -2(d_{19} - x_{19})$$

Αυτό επειδή ο κόμβος 19 είναι μόνο ένας κόμβος προσωρινής αποθήκευσης στο δίκτυο διάδοσης σφάλματος. Για τους κόμβους 15, 16, 17 και 18 ισχύουν:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{18} &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{18}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{18}} = \varepsilon_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{18}} \\ \varepsilon_{17} &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{17}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{17}} = \varepsilon_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{17}} \\ \varepsilon_{16} &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{16}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{16}} = \varepsilon_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{16}} \\ \varepsilon_{15} &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{15}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{15}} = \varepsilon_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{15}} \end{aligned}$$

Αυτό είναι επειδή όλοι αυτοί οι κόμβοι εξαρτώνται από τον κόμβο 19. Αυτό ισχύει και για τους κόμβους 11, 12, 13 και 14 με τη διαφορά ότι κάθε ένας από αυτούς εξαρτάται από διαφορετικό κόμβο:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{14} &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{14}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{18}} \frac{\partial f_{18}}{\partial x_{14}} = \varepsilon_{18} \frac{\partial f_{18}}{\partial x_{14}} \\ \varepsilon_{13} &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{13}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{17}} \frac{\partial f_{17}}{\partial x_{13}} = \varepsilon_{17} \frac{\partial f_{17}}{\partial x_{13}} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{12}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{16}} \frac{\partial f_{16}}{\partial x_{12}} = \varepsilon_{16} \frac{\partial f_{16}}{\partial x_{12}} \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{11}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{15}} \frac{\partial f_{15}}{\partial x_{11}} = \varepsilon_{15} \frac{\partial f_{15}}{\partial x_{11}}\end{aligned}$$

Αντιθέτως, οι κόμβοι 7, 8, 9 και 10 εξαρτώνται από τέσσερις διαφορετικούς κόμβους. Έτσι ισχύει:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{10} &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{10}} = \varepsilon_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_{10}} + \varepsilon_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_{10}} + \varepsilon_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_{10}} + \varepsilon_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_{10}} \\ \varepsilon_9 &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_9} = \varepsilon_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_9} + \varepsilon_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_9} + \varepsilon_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_9} + \varepsilon_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_9} \\ \varepsilon_8 &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_8} = \varepsilon_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_8} + \varepsilon_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_8} + \varepsilon_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_8} + \varepsilon_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_8} \\ \varepsilon_7 &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_7} = \varepsilon_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_7} + \varepsilon_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_7} + \varepsilon_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_7} + \varepsilon_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_7}\end{aligned}$$

Οι κόμβοι 3, 4, 5 και 6 εξαρτώνται από δύο διαφορετικούς κόμβους και σαν αποτέλεσμα προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\varepsilon_6 &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_6} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{10}} \frac{\partial f_{10}}{\partial x_6} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_8} \frac{\partial f_8}{\partial x_6} = \varepsilon_{10} \frac{\partial f_{10}}{\partial x_6} + \varepsilon_8 \frac{\partial f_8}{\partial x_6} \\ \varepsilon_5 &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_5} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_9} \frac{\partial f_9}{\partial x_5} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_7} \frac{\partial f_7}{\partial x_5} = \varepsilon_9 \frac{\partial f_9}{\partial x_5} + \varepsilon_7 \frac{\partial f_7}{\partial x_5} \\ \varepsilon_4 &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_4} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{10}} \frac{\partial f_{10}}{\partial x_4} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_9} \frac{\partial f_9}{\partial x_4} = \varepsilon_{10} \frac{\partial f_{10}}{\partial x_4} + \varepsilon_9 \frac{\partial f_9}{\partial x_4} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_3} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_8} \frac{\partial f_8}{\partial x_3} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_7} \frac{\partial f_7}{\partial x_3} = \varepsilon_8 \frac{\partial f_8}{\partial x_3} + \varepsilon_7 \frac{\partial f_7}{\partial x_3}\end{aligned}$$

Τέλος, οι κόμβοι 1 και 2 εξαρτώνται και αυτοί από δύο κόμβους και έτσι ισχύει:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_2} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_6} \frac{\partial f_6}{\partial x_2} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_5} \frac{\partial f_5}{\partial x_2} = \varepsilon_6 \frac{\partial f_6}{\partial x_2} + \varepsilon_5 \frac{\partial f_5}{\partial x_2} \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_1} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_4} \frac{\partial f_4}{\partial x_1} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \varepsilon_4 \frac{\partial f_4}{\partial x_1} + \varepsilon_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\end{aligned}$$

4.4 ΥΒΡΙΔΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Το ANFIS χρησιμοποιεί έναν υβριδικό αλγόριθμο εκμάθησης για να προσδιορίσει τις παραμέτρους του ασαφούς συστήματος τύπου Sugeno. Εφαρμόζει έναν συνδυασμό της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (least-squares) και της μεθόδου οπισθόδρομης βαθμωτής ελαχιστοποίησης (backpropagation gradient descent) για την εκπαίδευση παραμέτρων των συναρτήσεων συμμετοχής του FIS ώστε να μιμηθεί ένα δοσμένο σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης.

4.5 ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ ΒΑΘΜΩΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΤΗ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Η έξοδος ενός προσαρμόσιμου δικτύου είναι γραμμική σε μερικές από τις παραμέτρους του δικτύου. Έτσι μπορούν να προσδιοριστούν αυτές οι γραμμικές παράμετροι με τη γραμμική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων που περιγράφηκε παραπάνω. Αυτή η προσέγγιση οδηγεί σε έναν υβριδικό κανόνα εκμάθησης που συνδυάζει τη βαθμωτή ελαχιστοποίηση (SD) και τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων (LSE) για γρήγορο προσδιορισμό παραμέτρων.

Από την αρχιτεκτονική δομή του ANFIS παρατηρούμε ότι οι τιμές των παραμέτρων από τις προϋποθέσεις είναι προκαθορισμένες (αμετάβλητες), η ολική έξοδος μπορεί να εκφραστεί σαν ο γραμμικός συνδυασμός των παραμέτρων από τα συμπεράσματα. Σε σύμβολα, η έξοδος f ξαναγράφεται:

$$\begin{aligned}f &= \frac{w_1}{w_1 + w_2} f_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2} f_2 \\ &= \overline{w_1}(p_1 x + q_1 y + r_1) + \overline{w_2}(p_2 x + q_2 y + r_2) \\ &= (\overline{w_1} x) p_1 + (\overline{w_1} y) q_1 + (\overline{w_1}) r_1 + (\overline{w_2} x) p_2 + (\overline{w_2} y) q_2 + (\overline{w_2}) r_2\end{aligned}$$

η οποία είναι γραμμική στις παραμέτρους των συμπερασμάτων p_1, q_1, r_1, p_2, q_2 και r_2 .

Έστω ότι:

S = σύνολο όλων των παραμέτρων,

S_1 =σύνολο των (μη γραμμικών) παραμέτρων από τις προϋποθέσεις,

S_2 = σύνολο των (γραμμικών) παραμέτρων από τα συμπεράσματα.

Το προσαρμοστικό δίκτυο έχει μια έξοδο που αναπαριστάται ως:

$$O = F(i, S)$$

όπου i είναι το διάνυσμα των μεταβλητών εισόδου, S είναι το σύνολο των παραμέτρων και F είναι η συνολική συνάρτηση που εφαρμόζεται από το προσαρμοστικό δίκτυο. Αν υπάρχει μια συνάρτηση H τέτοια ώστε η σύνθετη συνάρτηση $H \circ F$ είναι γραμμική σε κάποια από τα στοιχεία του S , τότε αυτά τα στοιχεία μπορούν να βρεθούν από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Ακόμα πιο τυπικά, αν το σύνολο των παραμέτρων S , μπορεί να διαιρεθεί σε δύο σύνολα,

$$S = S_1 \oplus S_2$$

όπου το $\oplus$ αντιπροσωπεύει την άμεση άθροιση (direct sum), τέτοια ώστε η $H \circ F$ να είναι γραμμική στα στοιχεία του S_2 , τότε εφαρμόζοντας την H στην εξίσωση για την έξοδο παραπάνω έχουμε:

$$H(\circ) = H \circ F(B_i, S)$$

Η $H(.)$ είναι ταυτοτική συνάρτηση και η $F(.,.)$ είναι η συνάρτηση του συστήματος ασαφούς συμπεράσματος αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, ο υβριδικός αλγόριθμος μάθησης που αναπτύχθηκε παραπάνω μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα. Αναλυτικότερα, όπως συμβαίνει και στα νευρωνικά δίκτυα, θα ξεχωρίσουν δύο φάσεις στη διαδικασία εκπαίδευσης:

1. Πέρασμα προς τα εμπρός (forward pass): Στη φάση αυτή το σήμα εισόδου διαδίδεται από το επίπεδο 1 μέχρι το επίπεδο 4 και οι παράμετροι (p_i, q_i, r_i) για $i=1,2$ εκτιμώνται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
2. Πέρασμα προς τα πίσω (backward pass): Στη φάση αυτή έχοντας μια ένδειξη του λάθους, πραγματοποιείται μια διόρθωση κατά μια ποσότητα που ορίζεται από τη μέθοδο της βαθμωτής κατάβασης (Gradient Descent), των μεταβλητών a_i, b_i, c_i .

Το ANFIS διασπά το σύνολο των παραμέτρων του σε δυο υποσύνολα, εκ των οποίων το ένα αποτελεί γραμμικό σύνολο παραμέτρων και επομένως είναι δυνατό να εκπαιδευτεί με γραμμικούς αλγορίθμους, όπως η μέθοδος

των ελαχίστων τετραγώνων (least squared). Οι γραμμικοί αλγόριθμοι εκμάθησης επιτυγχάνουν συνολικά ελάχιστα (global minimums) της συνάρτησης κόστους στο χώρο των παραμέτρων τους και είναι αποδοτικοί από πλευράς απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου. Το δεύτερο υποσύνολο παραμέτρων εκπαιδεύεται με αλγόριθμους που μπορούν να δημιουργήσουν μη-γραμμικές απεικονίσεις, όπως η βαθμωτή κατάβαση (gradient descent). Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι απαιτητικοί από πλευράς υπολογιστικού χρόνου εκπαίδευσης και δεν υπάρχει εγγύηση για την πραγματοποίηση του συνολικού ελαχίστου της συνάρτησης κόστους στο χώρο των παραμέτρων τους. Ο αλγόριθμος εκμάθησης του ANFIS συνδυάζει περάσματα προς τα εμπρός και προς τα πίσω. Στο πέρασμα εμπρός γίνεται η μάθηση των γραμμικών παραμέτρων και στο πέρασμα προς τα πίσω γίνεται η προσαρμογή των μη-γραμμικών αντίστοιχα. Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι δραστηριότητες του κάθε περάσματος.

Πίνακας: Δραστηριότητες κατά την εκπαίδευση

	Εμπροσθόδρομο πέρασμα	Οπισθόδρομο πέρασμα
Παράμετροι των προϋποθέσεων	Προκαθορισμένες (αμετάβλητες)	Βαθμωτή φθίνουσα μέθοδος
Παράμετροι των συμπερασμάτων	Εκτιμητήρια ελαχίστων τετραγώνων	Προκαθορισμένες (αμετάβλητες)
Σήματα	Έξοδοι των κόμβων	Σήματα σφάλματος

Το πλεονέκτημα της μεθόδου έγκειται στο γεγονός της ύπαρξης τόσο γραμμικών όσο και μη γραμμικών μεθόδων, που την καθιστά ταχύτερη από τα κλασικά νευρωνικά δίκτυα. Οι παράμετροι των συμπερασμάτων που ευρίσκονται με αυτόν τον τρόπο είναι βέλτιστες, υπό την προϋπόθεση ότι οι παράμετροι των προϋποθέσεων είναι προκαθορισμένες (αμετάβλητες). Αναλόγως, η υβριδική προσέγγιση συγκλίνει πολύ γρηγορότερα μιας και μειώνει τις διαστάσεις του διαστήματος αναζήτησης της αρχικής καθαρής μεθόδου οπισθόδρομης διάδοσης.

Μέχρι τώρα χρησιμοποιούσαμε προκαθορισμένες και αυθαίρετα επιλεγμένες συναρτήσεις συμμετοχής. Πολλές φορές έχουμε μια συλλογή από δεδομένα εισόδου / εξόδου και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

ένα προκαθορισμένο μοντέλο βασισμένο στα στοιχεία αυτά ώστε να ξέρουμε ποιες συναρτήσεις συμμετοχής και με ποιες παραμέτρους να χρησιμοποιήσουμε. Τότε μπορούμε να βοηθηθούμε από το ANFIS, ώστε να βρούμε τις καταλληλότερες συναρτήσεις συμμετοχής.

Οι νεύρο-προσαρμοστικές τεχνικές είναι αρκετά απλές. Έτσι παρέχεται μια μέθοδος ώστε το ασαφές μοντέλο να εκπαιδευτεί με τις πληροφορίες που του δίνει το σύνολο των δεδομένων, ώστε να υπολογιστούν οι παράμετροι των συναρτήσεων συμμετοχής με σκοπό την εύρεση του καλύτερου τρόπου που θα επιτρέπει στο σύστημα εξαγωγής συμπερασμάτων να ανιχνεύει τα δεδομένα εισόδου / εξόδου. Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με αυτή των νευρωνικών δικτύων.

Η προσαρμογή των παραμέτρων των συναρτήσεων συμμετοχής από ένα ANFIS γίνεται με αλγόριθμους εκπαίδευσης είτε μόνο με back propagation είτε με έναν υβριδικό αλγόριθμο, συνδυασμό back propagation και ελαχίστων τετραγώνων.

Ο υπολογισμός των παραμέτρων αυτών, που αλλάζουν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εκμάθησης, διευκολύνεται από ένα βαθμωτό διάνυσμα που μας δείχνει πόσο καλά το FIS μοντελοποιεί τα δεδομένα εισόδου / εξόδου για το εν λόγω σύνολο παραμέτρων. Μόλις αποκτήσουμε το βαθμωτό διάνυσμα μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποιον από τους πολλούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης, για να βελτιώσουμε αυτές τις παραμέτρους, ούτως ώστε να μειώσουμε το μέγεθος του σφάλματος (συνήθως το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ πραγματικών και επιθυμητών τιμών).

4.6 ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ

Κάθε σύνολο δεδομένων που χρησιμοποιούμε στο ANFIS, πρέπει να είναι σε μορφή πίνακα, με τα δεδομένα εισόδου να είναι διατεταγμένα σαν διανύσματα σε όλες τις στήλες, εκτός της τελευταίας την οποία καταλαμβάνει το διανύσματα με τα δεδομένα εξόδου.

Στην πρόβλεψη χρονοσειρών, χρησιμοποιούμε γνωστές τιμές τους μέχρι ένα χρονικό σημείο t , για να προβλέψουμε την τιμή σε ένα σημείο στο μέλλον $t + P$. Η συνήθης μέθοδος για αυτού του είδους τις προβλέψεις, είναι να δημιουργήσουμε μια αντιστοίχιση από D δειγματικά σημεία δεδομένων, που απέχουν Δ μονάδες χρόνου μεταξύ τους:

$$x(t - (D - 1) \Delta), x(t - (D - 2) \Delta), \dots, x(t - \Delta), x(t)$$

για να προβλέψουμε μια μελλοντική τιμή $x(t + P)$.

Πχ. Αν $D = 3$, $\Delta = P = 4$, θα δημιουργήσουμε ένα διάνυσμα τριών διαστάσεων για τα δεδομένα εκπαίδευσης στην είσοδο: $w(t) = [x(t-8) \ x(t-4) \ x(t)]$ και η αντίστοιχη έξοδος θα είναι: $s(t) = x(t+4)$

Για να έχουμε καλές δυνατότητες γενικοποίησης, είναι σημαντικό να είναι ο αριθμός των δεδομένων προς εκπαίδευση αρκετές φορές μεγαλύτερος απ' ό,τι ο αριθμός των παραμέτρων που επιδιώκουμε να υπολογίσουμε. Μια καλή αναλογία μεταξύ δεδομένων / παραμέτρων είναι το 5.

Η απόδοση της πρόβλεψης, συγκρίνεται με τα αποτελέσματα μιας προσέγγισης ενός νευρωνικού δικτύου σειριακής συσχέτισης (cascade correlation neural network approach) και ενός συμβατικού μοντέλου αυτοπαλινδρόμησης (auto regressive AR).

Ένα μέτρο σύγκρισης και ελέγχου των αποτελεσμάτων είναι η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (root mean square error – RMSE). Κατά την διάρκεια της εκπαίδευσης συνήθως θα πρέπει το $RMSE_{tm}$ των δεδομένων για εκπαίδευση να είναι μικρότερο του $RMSE_{chk}$ των δεδομένων για έλεγχο ($RMSE_{chk} > RMSE_{tm}$).

4.7 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ANFIS

Το ANFIS παρουσιάζει μεγάλο βαθμό πολυπλοκότητας και δεν είναι διαθέσιμο για όλες τις επιλογές συστημάτων ασαφούς inference και υποστηρίζει μόνο συστήματα τύπου Sugeno.

Ειδικότερα οι κυριότεροι περιορισμοί του ANFIS που αναφέρονται στην διεθνή βιβλιογραφία είναι:

- Βασίζεται σε ένα FIS τύπου Sugeno.
- Πρώτης ή μηδενικής τάξης συστήματα.
- Έχει μια έξοδο, που λαμβάνεται με τη μέθοδο της αποασαφοποίησης σταθμισμένου μέσου. Όλες οι συναρτήσεις συμμετοχής εξίσου πρέπει να είναι του ίδιου τύπου, είτε γραμμικές είτε σταθερές.
- Δεν μπορεί να γίνεται κοινή χρήση κανόνων. Διαφορετικοί κανόνες δεν μπορούν να έχουν την ίδια συνάρτηση συμμετοχής εξόδου.
- Πρέπει να υπάρχουν βάρη σε κάθε κανόνα
- Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε συνάρτηση συμμετοχής, παρά μόνο προκαθορισμένες που επιβάλλουν οι ορισμοί του ANFIS.

4.8 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ANFIS

Το ANFIS δέχεται ως ορίσματα ορισμένες παραμέτρους εκπαίδευσης με τη μορφή διανύσματος (trnOp) που προσδιορίζει επακριβώς τα κριτήρια, σύμφωνα με τα οποία τερματίζει η διαδικασία εκπαίδευσης, και τη στρατηγική προσαρμογής του διαστήματος βήματος (step-size):

- trnOp(1): αριθμός επαναλήψεων εκπαίδευσης (default:10)
- trnOp(2): ανοχή σφάλματος (error tolerance) (default:0)
- trnOp(3): αρχικό διάστημα βήματος (default:0,01)
- trnOp(4): Μείωση διαστήματος σφάλματος (default:0,9)
- trnOp(5): Αύξηση διαστήματος σφάλματος (default:1,1)

Η διαδικασία εκπαίδευσης τερματίζεται αν ο καθορισμένος αριθμός επαναλήψεων ολοκληρωθεί ή αν ο στόχος σφάλματος (error goal) επιτευχθεί. Συνήθως θέλουμε η μεταβολή του διαστήματος βήματος να είναι μια καμπύλη που αυξάνει αρχικά, φτάνει κάποιο μέγιστο, και μετά μειώνεται για το εναπομείναν της εκπαίδευσης. Αυτή η ιδανική μεταβολή του διαστήματος βήματος επιτυγχάνεται ρυθμίζοντας το αρχικό διάστημα βήματος και την αύξηση / μείωσή του (trnOp(3)-trnOp(5)). Η default τιμές θέτονται έτσι, ώστε να καλύπτουν ένα μεγάλο μέρος των εργασιών εκμάθησης. Για οποιαδήποτε ιδιαίτερη εφαρμογή μπορούμε να μεταβάλουμε αυτές τις επιλογές ώστε να βελτιστοποιήσουμε την εκπαίδευση. Όταν δεν χρησιμοποιείται η επιλογή για δεδομένα ελέγχου, η δομή της εξόδου του FIS αντιστοιχεί σε ένα ελάχιστο σφάλμα εκπαίδευσης, αλλιώς η έξοδος που σώζεται είναι αυτή που σχετίζεται με το ελάχιστο σφάλμα ελέγχου.

Το σφάλμα εκπαίδευσης (training error) είναι η διαφορά ανάμεσα στην τιμή της εξόδου των δεδομένων εκπαίδευσης, και την έξοδο του συστήματος ασαφούς inference που αντιστοιχεί στην ίδια τιμή της εισόδου των δεδομένων εκπαίδευσης (αυτή που σχετίζεται με εκείνη την τιμή της εξόδου των δεδομένων εκπαίδευσης). Το σφάλμα εκπαίδευσης (διάνυσμα trnError που επιστρέφει το anfis) εγγράφει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (root mean squared error-RMSE) του συνόλου δεδομένων εκπαίδευσης. Το μητρώο του διαστήματος βήματος (step-size-ss) εγγράφει το διάστημα βήματος κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης. Η γραφική παράσταση του ss δίνει τη μεταβολή του διαστήματος βήματος, που λειτουργεί σαν μια αναφορά για τη ρύθμιση του αρχικού διαστήματος βήματος και της αντίστοιχης αύξησης / μείωσης. Το διάστημα βήματος μεταβάλλεται σύμφωνα με τις ακόλουθες οδηγίες:

- Αν το σφάλμα υπόκειται σε 4 διαδοχικές μειώσεις, το διάστημα βήματος αυξάνει πολλαπλασιαζόμενο με μια σταθερά μεγαλύτερη της μονάδας (αύξηση διαστήματος βήματος).
- Αν το σφάλμα υπόκειται σε δύο διαδοχικούς συνδυασμούς μιας αύξησης και μιας μείωσης, το διάστημα βήματος μειώνεται πολλαπλασιαζόμενο με μια σταθερά μικρότερη της μονάδας (μείωση διαστήματος βήματος).

Τα δεδομένα ελέγχου, *chkData*, που εισάγονται μέσω του ANFIS, χρησιμοποιούνται για έλεγχο της ικανότητας γενίκευσης του συστήματος ασαφούς inference. Αυτά είναι σημαντικά για εργασίες εκμάθησης, για τις οποίες ο αριθμός των εισόδων είναι μεγάλος, και/ ή τα ίδια τα δεδομένα περιέχουν θόρυβο. Αφού η δομή του μοντέλου που δίνει η *anfis* είναι σταθερή, υπάρχει μια τάση του μοντέλου να φτάνει σε κορεσμό από τα δεδομένα πάνω στα οποία εκπαιδεύεται, ειδικά για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων εκπαίδευσης. Αν συμβαίνει πράγματι κορεσμός, δεν μπορούμε να περιμένουμε το σύστημα ασαφούς inference να ανταποκρίνεται καλά σε άλλα ανεξάρτητα σύνολα δεδομένων, ειδικά αν έχουν υποστεί φθορά από θόρυβο.

Ένα σύνολο δεδομένων ελέγχου μπορεί να είναι χρήσιμο για αυτές τις καταστάσεις. Αυτό το σύνολο δεδομένων χρησιμοποιείται για την επαλήθευση της εγκυρότητας του μοντέλου, εφαρμόζοντας τα δεδομένα ελέγχου σε ένα μοντέλο και παρατηρώντας πόσο καλά ανταποκρίνεται αυτό. Οι παράμετροι των συναρτήσεων συμμετοχής του FIS που υπολογίζονται όταν και τα δεδομένα εκπαίδευσης και αυτά του ελέγχου φορτώνονται σχετίζονται με την επανάληψη εκπαίδευσης που έχει το ελάχιστο σφάλμα ελέγχου. Η χρήση της επανάληψης ελάχιστου σφάλματος δεδομένων ελέγχου για τον προσδιορισμό των παραμέτρων των συναρτήσεων συμμετοχής υποθέτει:

- Τα δεδομένα ελέγχου είναι παρόμοια με τα δεδομένα εκπαίδευσης, έτσι ώστε το σφάλμα δεδομένων ελέγχου θα μειωθεί καθώς η εκπαίδευση αρχίζει.
- Τα δεδομένα ελέγχου αυξάνουν ως ένα σημείο στην εκπαίδευση, μετά το οποίο έχει συμβεί κορεσμός.

Η έξοδος της *anfis* είναι η δομή της εξόδου του FIS με το ελάχιστο σφάλμα ελέγχου και αυτή πρέπει να χρησιμοποιηθεί για περαιτέρω υπολογισμό αν δεδομένα ελέγχου χρησιμοποιούνται για επαλήθευση πιστοποίησης. Ας σημειωθεί ότι το σφάλμα ελέγχου είναι η διαφορά ανάμεσα στην τιμή της εξόδου των δεδομένων ελέγχου, και την έξοδο του συστήματος ασαφούς inference που αντιστοιχεί στην τιμή εισόδου ίδιων δεδομένων ελέγχου (αυτή που σχετίζεται με εκείνη την τιμή της εξόδου των δεδομένων ελέγχου).

4.9 Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ FIS ΕΙΣΟΔΟΥ

Η δομή της FIS εισόδου μπορεί να δοθεί από την συνάρτηση `genfis1` του Fuzzy Logic Toolbox. Αυτή η δομή βασίζεται σε έναν καθορισμένο αριθμό συναρτήσεων συμμετοχής των μεταβλητών εισόδου. Αυτό εμπλέκει το πρόβλημα της λεγόμενης κατάρας των διαστάσεων (*curse of dimensionality*), όταν ο αριθμός των εισόδων είναι μεγάλος, δηλαδή περισσότερες από 4 ή 5 και προκαλεί μια έκρηξη του αριθμού των κανόνων. Το Fuzzy Logic Toolbox προσφέρει μια μέθοδο που παρέχει κάποια μείωση διαστάσεων στο σύστημα ασαφούς inference. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια δομή FIS χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Clustering (συστάδων). Αυτή και ιδιαίτερα η μέθοδος Subtractive Clustering (αφαιρετική μέθοδος συστάδων) διαχωρίζει τα δεδομένα σε ομάδες που ονομάζονται συστάδες, και δημιουργεί ένα FIS με τον ελάχιστο αριθμό κανόνων που απαιτούνται για να διαχωριστούν οι ιδιότητες ασάφειας που σχετίζονται με κάθε συστάδα (cluster).

5. ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ (CASE STUDY)

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ

Στο πρακτικό κομμάτι της εργασίας κατασκευάστηκε αλγόριθμος για να τρέχει σε Matlab, κάνοντας χρήση του fuzzy logic toolbox, το οποίο περιέχει όλα τα απαραίτητα εργαλεία για την ολοκληρωμένη αναπτυξη και αναλυτική χρήση ενός ANFIS για την πρόβλεψη της τιμής του μαζούτ (\$/βαρέλι).

Ο αλγόριθμος δέχεται δεδομένα από μια χρονοσειρά που περιέχει ημερήσιες τιμές του βιομηχανικού μαζούτ για την περίοδο 1990-2009. Με βάση αυτές τις τιμές προβλέπει τις αναμενόμενες τιμές για το μέλλον. Η χρονοσειρά που χρησιμοποιούμε, περιέχει 5045 παρατηρήσεις (2009-1990).

Στην περίπτωση μας χρησιμοποιήσαμε τα πρώτα 4763 δεδομένα για την εκπαίδευση του συστήματος δημιουργώντας ένα πίνακα, όπου τα τελευταία 282 δεδομένα τα χρησιμοποιούμε για την αξιολόγηση της προβλεπτικής ικανότητας του συστήματος.

Έπειτα δημιουργήσαμε ένα ANFIS, με τη βοήθεια του fuzzy logic toolbox, το οποίο υπολογίζει τις καταλληλότερες παραμέτρους των συναρτήσεων συμμετοχής (MF parameters).

Οι κανόνες του ANFIS που χρησιμοποιήσαμε είναι οι εξής:

1. If (input1 is in1mf1) then (output is out1mf1) (1)
2. If (input1 is in1mf2) then (output is out1mf2) (1)

Στον πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωμένα τα χαρακτηριστικά του ANFIS.

Πίνακας: Χαρακτηριστικά του ANFIS

Τύπος ασαφούς μηχανισμού συμπερασμού	Sugeno
Αριθμός εισόδων	1
Ονομασία εισόδου	Input1
Ονομασία εξόδου	Output1
Αριθμός συναρτήσεων συμμετοχής	2 trap
Αριθμός κανόνων	2
And method	Product

Or method	Max
Imp. method	Product
Agg. method	Max
Defuzz. method	Wtaver
Αριθμός κόμβων	12
Αριθμός γραμμικών παραμέτρων	4
Αριθμός μη γραμμικών παραμέτρων	8
Αριθμός ζευγών εκπαίδευσης (training data pairs)	4763

Ακολούθησε η εξαγωγή τεσσάρων τύπων σφαλμάτων ώστε να μπορέσει να γίνει η σύγκριση μεταξύ των μοντέλων.

Τα σφάλματα είναι:

- **Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE)**

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2$$

- **Η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (RMSE)**

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2}$$

- **Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE)**

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |e_t|$$

- **Το μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα (MAPE)**

$$MAPE = \frac{100}{N} \sum_{t=1}^N |e_t|,$$

όπου

$$e_t = \frac{F_t - A_t}{A_t}, \quad F_t \text{ και } A_t \text{ είναι πραγματικές τιμές.}$$

Στη συνέχεια τρέξαμε το ANFIS για κάθε είδους συνάρτησης συμμετοχής ξεχωριστά για να δούμε ποιο είδος συναρτήσεως μας δίνει τα μικρότερα σφάλματα και τα συγκρίναμε με αυτά που μας δίνουν τα μοντέλα AR και ARMA, μέσω του System Identification Toolbox της Matlab. Τα αποτελέσματα καταγράφηκαν αναλυτικά στους παρακάτω πίνακες.

2 rules

EPOCH_400		MSE	RMSE	MAE	MAPE
GBELL					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.016055517342581	0.005008715502193
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.01597420471096	0.004996469665026
	ANFIS	1.111169705769467	0.010541203469099	0.006301302998348	0.001179770932306
TRI					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.05008715502192
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.04996469665026
	ANFIS	4.112080930103515	0.064125509199565	0.040459555693531	0.008157615970996
GAUSS2					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	2.310814708762762	0.152013641123511	0.112637868201433	0.034688322218966
GAUSS					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	2.336829861877986	0.152866931083148	0.113474124197665	0.034790398280400
TRAP					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	1.962284586212707	0.140081568602465	0.101656067807303	0.032926302206631
PI					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	2.165099292224912	0.147142763744090	0.108465358535600	0.034031529242864

3 rules

EPOCH_400		MSE	RMSE	MAE	MAPE
GBELL					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	2.843725499593376	0.168633493102449	0.125495974619958	0.036852337543739
TRI					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.016055517342581	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.015974204710597	0.049964696650260
	ANFIS	4.299961860040739	0.065574094427912	0.040660885485840	0.008209958280119
GAUSS2					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	3.075549222319840	0.175372438607663	0.130837467350759	0.037745927105191
GAUSS					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	2.279342604402310	0.150974918592537	0.111933052665733	0.034579316209770
TRAP					
	AR	4.440454648725812	0.021072386311772	0.001605551734258	0.005008715502192
	ARMA	4.388897190904098	0.020949694964137	0.001597420471060	0.004996469665026
	ANFIS	1.113251730017639	0.010551074495129	0.003682299463841	0.000723953416934
PI					
	AR	4.440454648725812	0.021072386311772	0.001605551734258	0.005008715502192
	ARMA	4.388897190904098	0.020949694964137	0.001597420471060	0.004996469665026
	ANFIS	3.835534213745557	0.011989848143508	0.017313834519573	0.004027468877987

4 rules

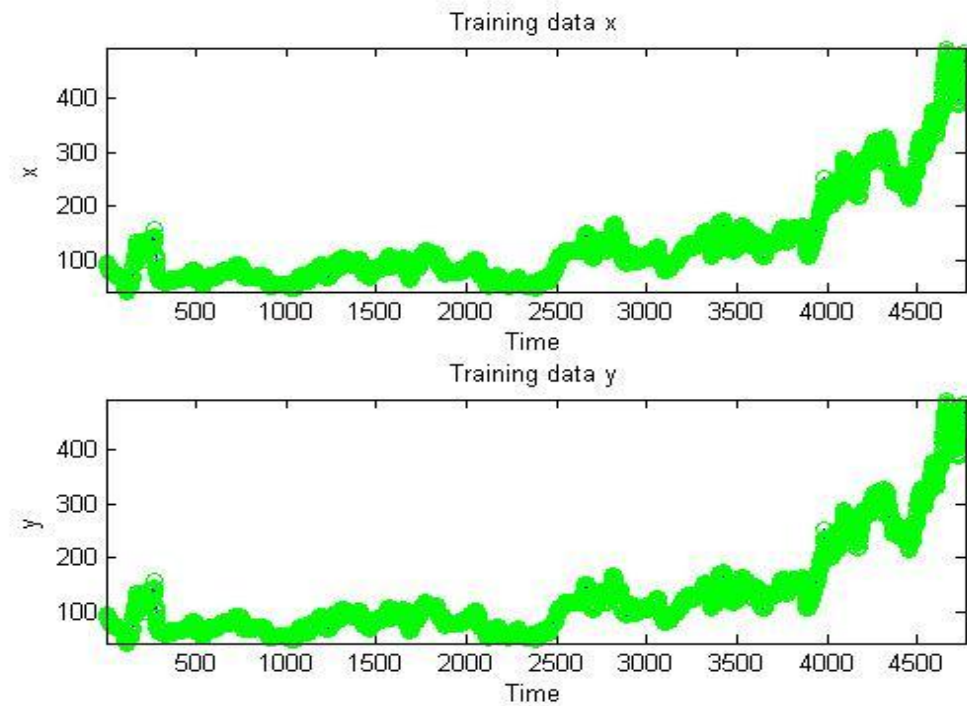
EPOCH_400		MSE	RMSE	MAE	MAPE
GBELL					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	2.374724647534682	0.154101416201626	0.112029800202381	0.034712006297773
TRI					
	AR	4.440454648725812	0.021072386311772	0.016055517342581	0.005008715502192
	ARMA	4.388897190904098	0.020949694964137	0.015974204710596	0.004996469665026
	ANFIS	1.346939620286751	0.011605772788948	0.005370593896717	0.001006055638070
GAUSS2					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	2.052172900867472	0.143254071525645	0.105287661704095	0.033554961350576
GAUSS					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	2.260800008276250	0.150359569308915	0.109656356234853	0.034266957752677
TRAP					
	AR	4.440454648725812	0.021072386311772	0.016055517342581	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.020949694964137	0.015974204710596	0.049964696650260
	ANFIS	2.614241568035479	0.016168616415870	0.007726981308272	0.001376166636667
PI					
	AR	4.440454648725812	0.021072386311772	0.016055517342581	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.020949694964137	0.015974204710596	0.049964696650260
	ANFIS	2.613928834064872	0.016167649285115	0.007716055938963	0.001373890582874

5 rules

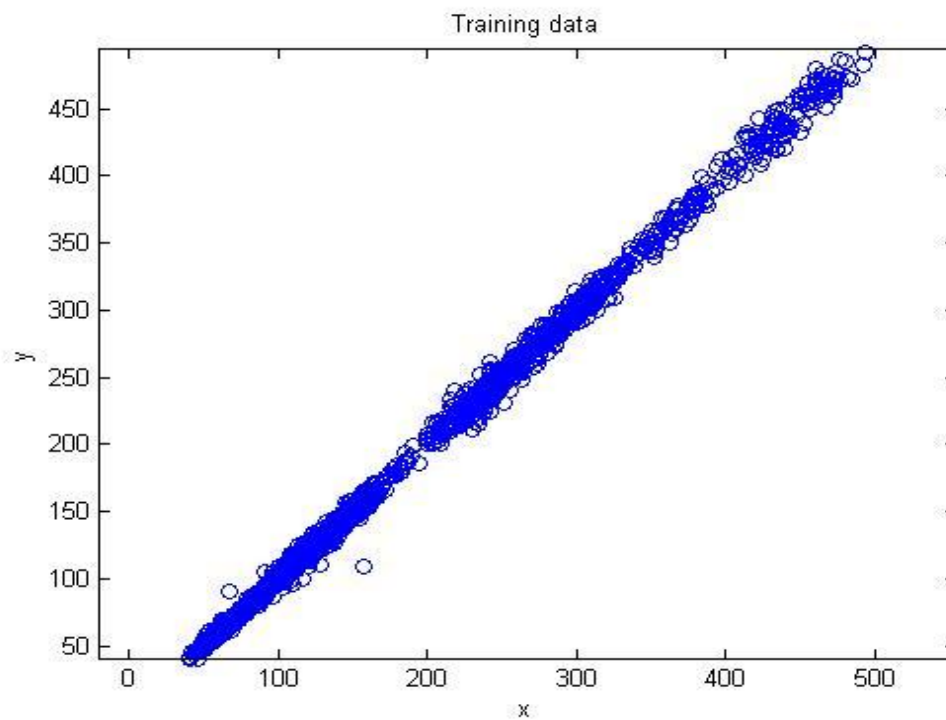
EPOCH_400		MSE	RMSE	MAE	MAPE
GBELL					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	3.034274572224203	0.174191692460467	0.127453066492892	0.037237478343507
TRI					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	4.100993927936030	0.020250910912687	0.012232485861448	0.002177140813048
GAUSS2					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	2.256111702451768	0.150203585258534	0.111423358761931	0.034635270034415
GAUSS					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	4.191122884558569	0.203408211231337	0.152809560464210	0.042686861064723
TRAP					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	3.048582980084430	0.017460191809039	0.009034256439676	0.001599131355520
PI					
	AR	4.440454648725812	0.210723863117726	0.160555173425815	0.050087155021926
	ARMA	4.388897190904098	0.209496949641375	0.159742047105966	0.049964696650260
	ANFIS	3.048661761083872	0.017460417409340	0.009037756027314	0.001599457404700

Τα μικρότερα σφάλματα σύμφωνα με το ANFIS τα είχαμε με την τραπεζοειδή συνάρτηση συμμετοχής (trapmf) χρησιμοποιώντας τρεις συναρτήσεις συμμετοχής (3 mfs).

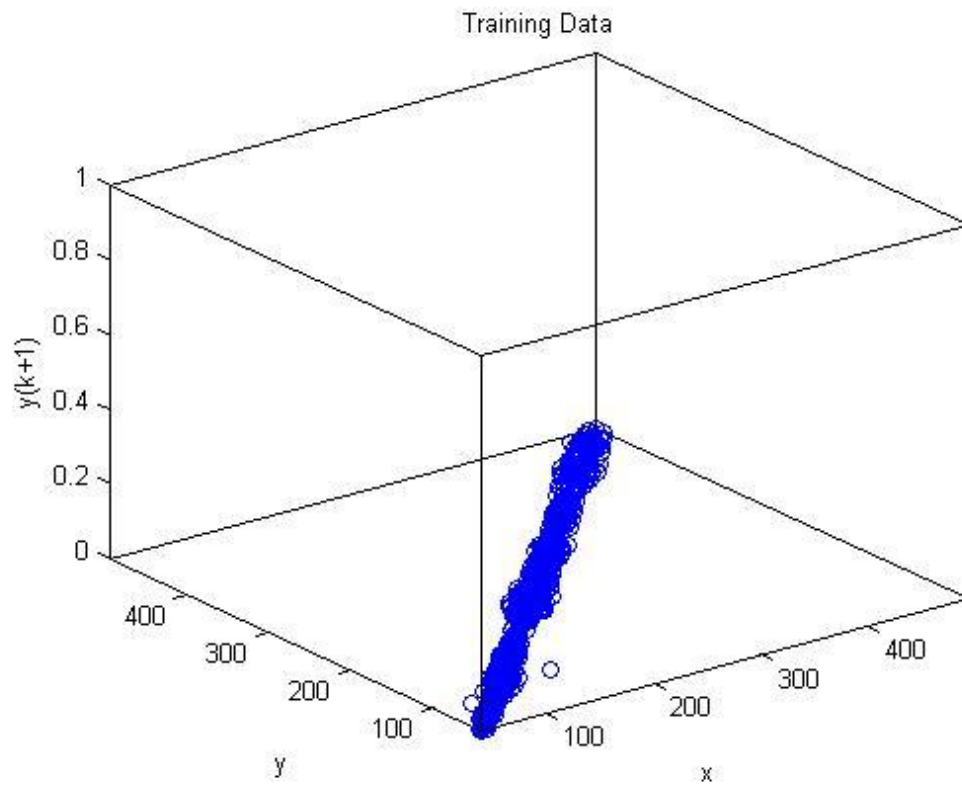
Παρακάτω απεικονίζονται ενδεικτικά κάποια γραφήματα από τα τελικά αποτελέσματα των δοκιμών που πραγματοποιήθηκαν. Συγκεκριμένα αφορούν τη δοκιμή με την καλύτερη τιμή του ANFIS που βρέθηκε χρησιμοποιώντας τρεις συναρτήσεις συμμετοχής trapmf κι αριθμό εποχών 400.



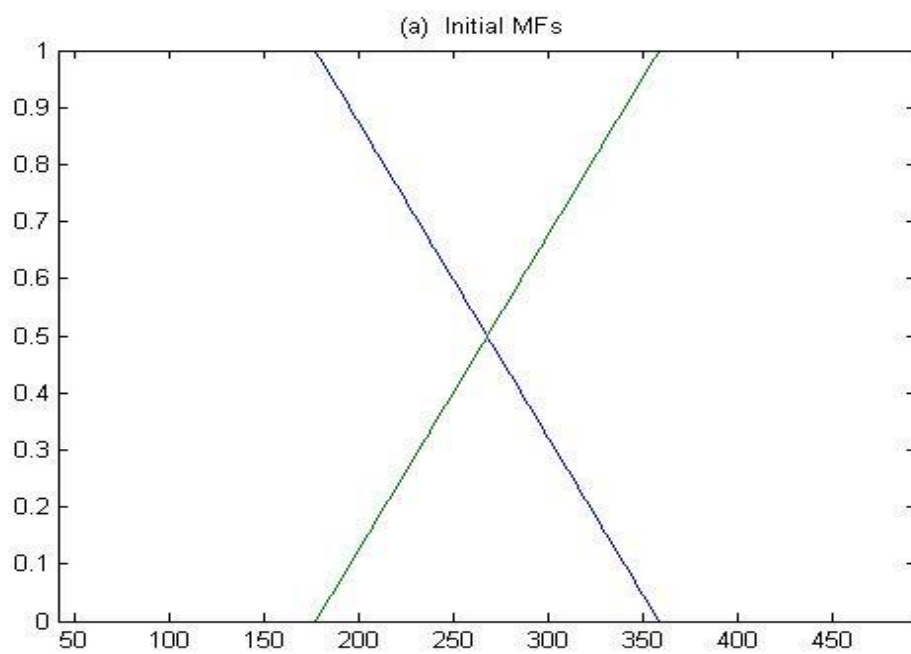
Γράφημα 5.1: Διασπορά δεδομένων εκπαίδευσης.



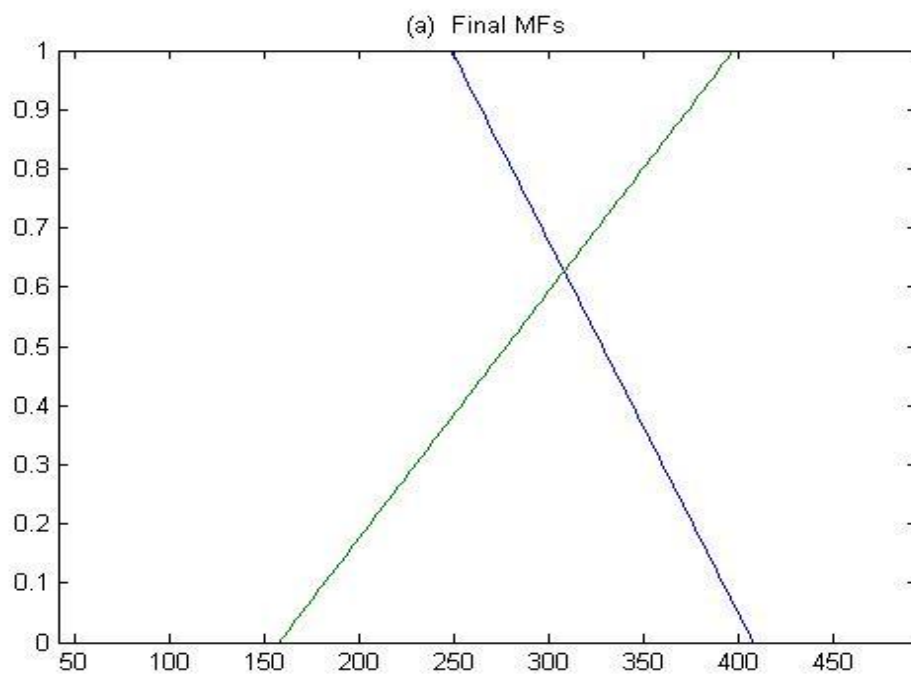
Γράφημα 5.2 : Διασπορά των δεδομένων εκπαίδευσης 2D



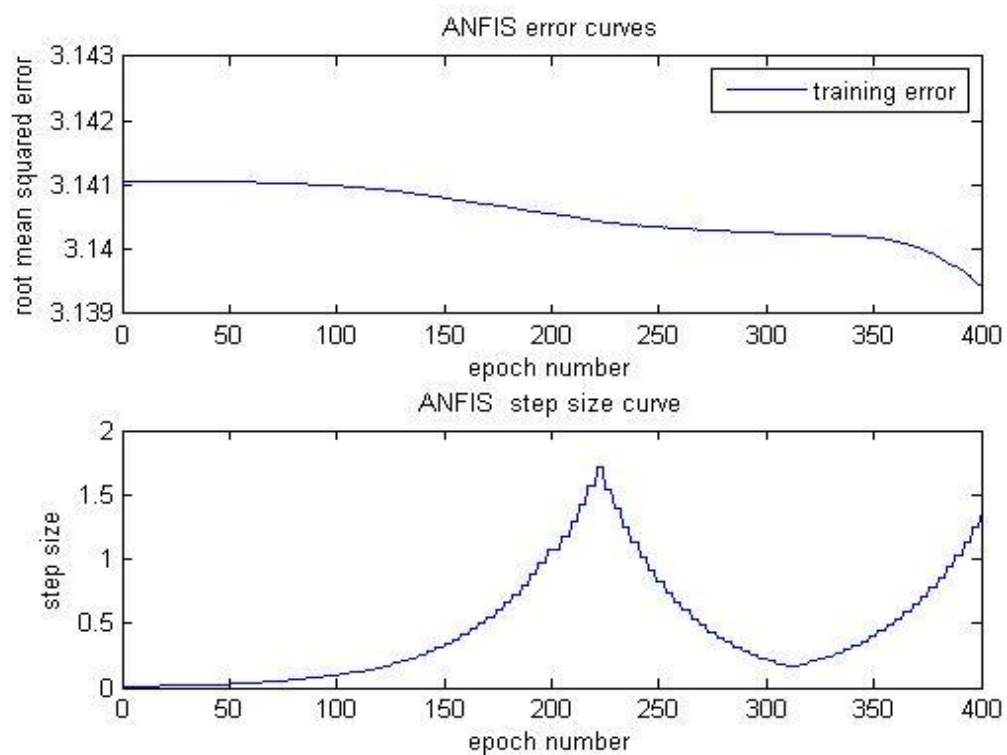
Γράφημα 5.3 : Διασπορά των δεδομένων εκπαίδευσης 3D



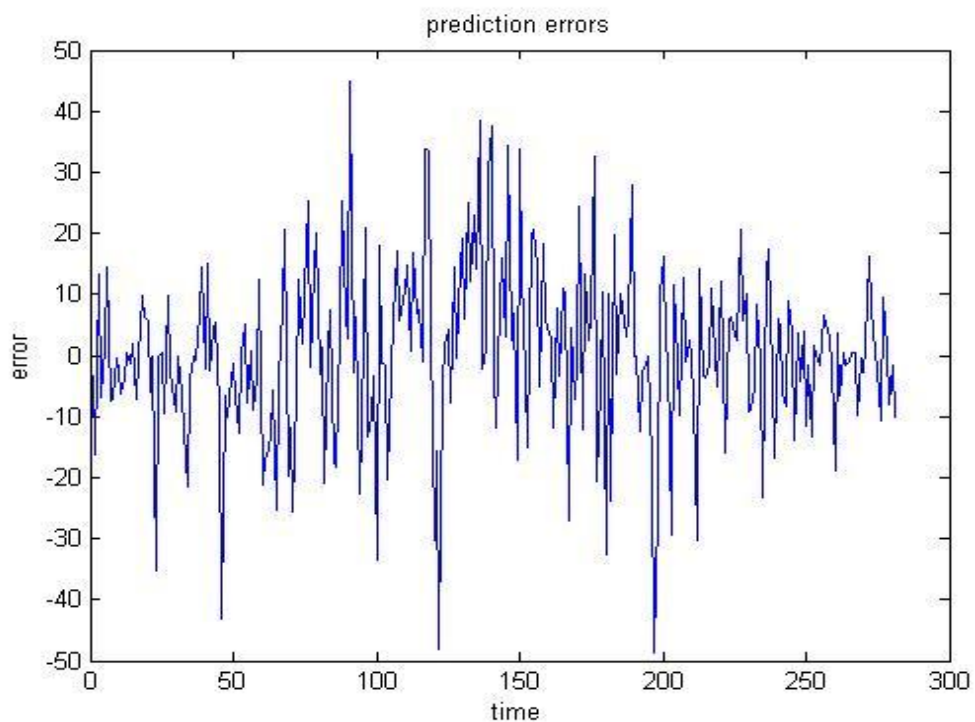
Γράφημα 5.4: Αρχικές συναρτήσεις συμμετοχής



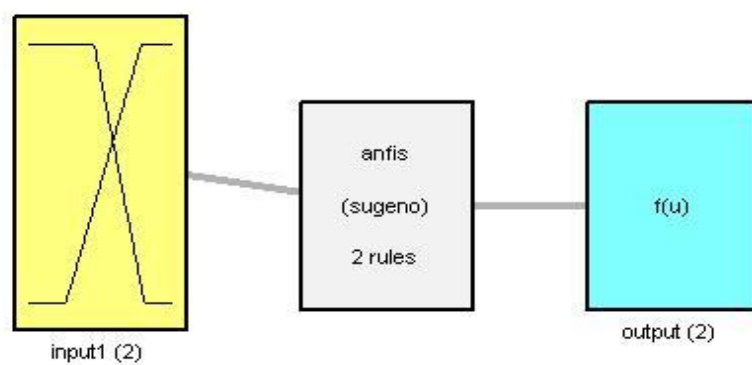
Γράφημα 5.5: Τελικές συναρτήσεις συμμετοχής



Γράφημα 5.6: Καμπύλες σφαλμάτων εκπαίδευσης και καμπύλες μεγέθους βήματος της δοκιμής με το ANFIS.

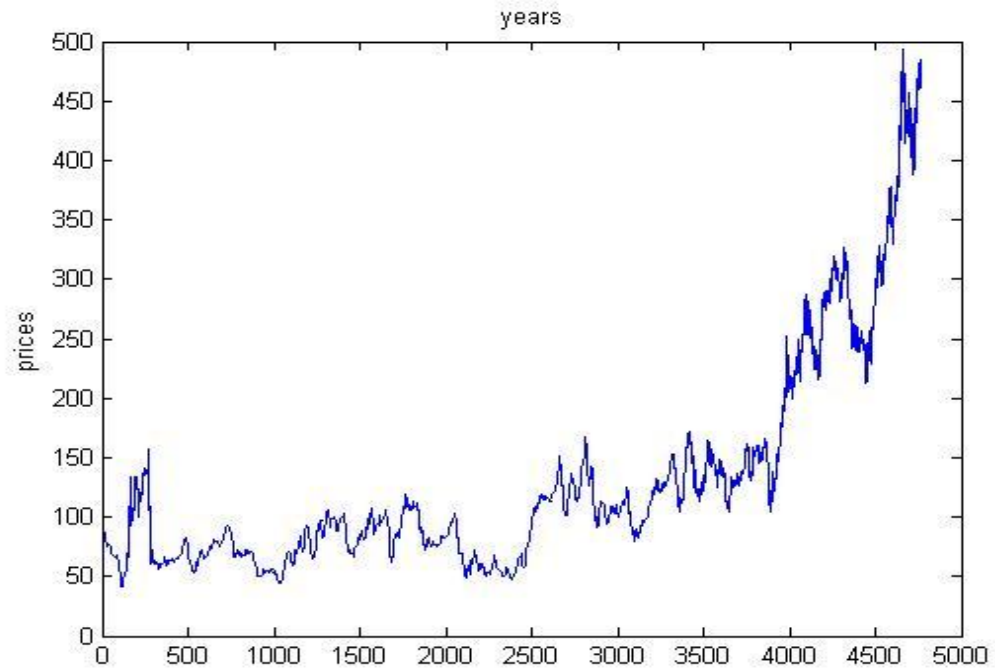


Γράφημα 5.7: Σφάλματα πρόβλεψης του ANFIS.

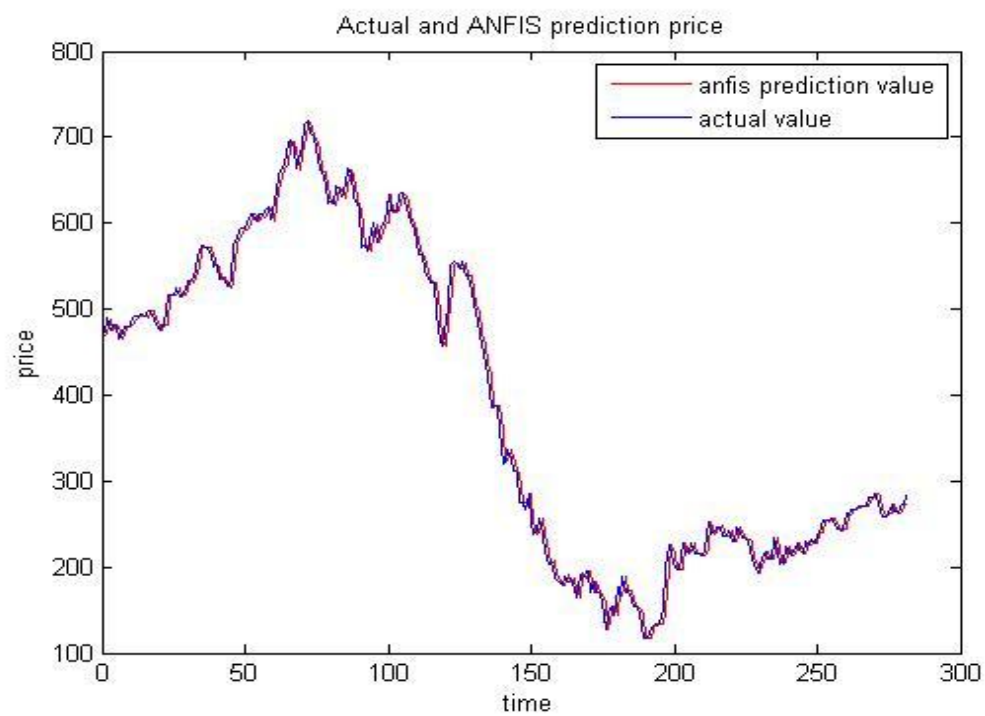


System anfis: 1 inputs, 1 outputs, 2 rules

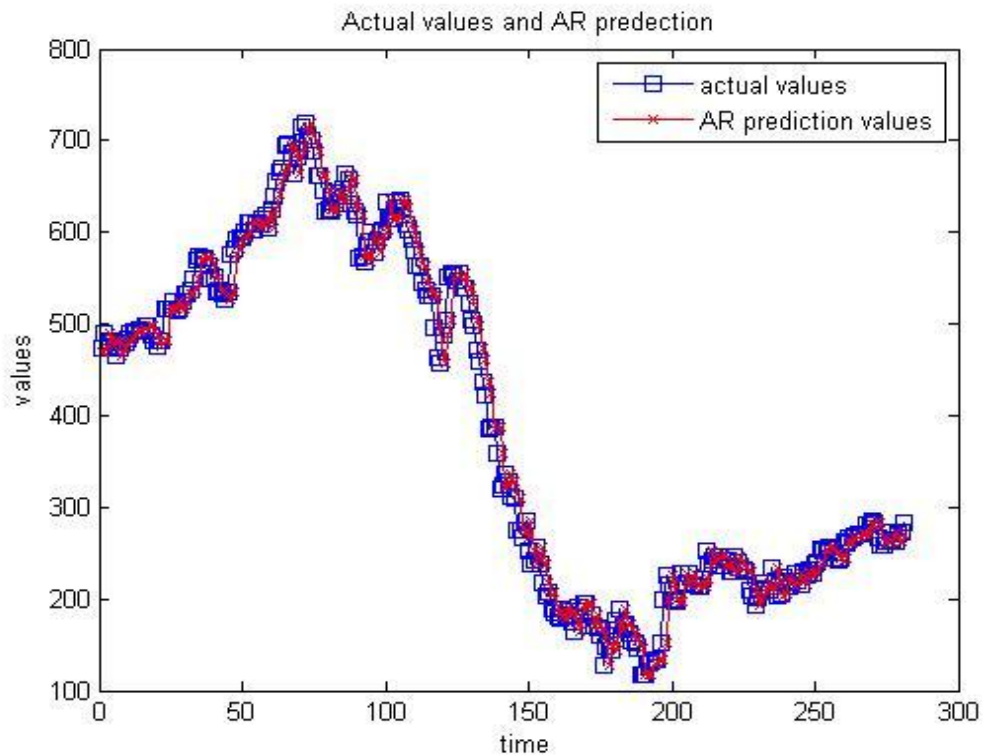
Σχήμα 5.8: Παρουσίαση της τελικής δομής του ANFIS.



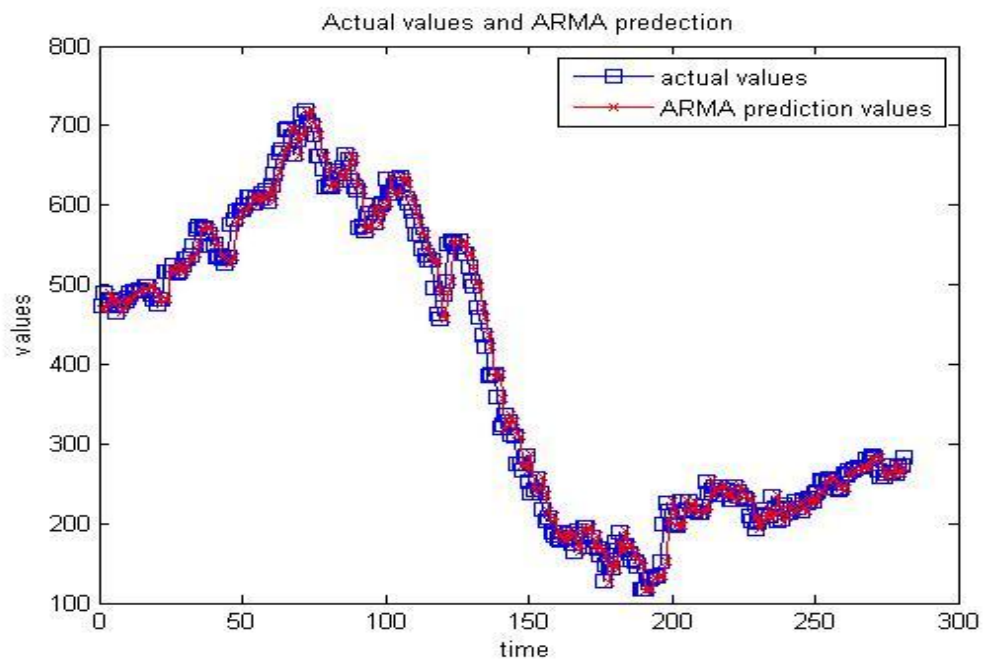
Γράφημα 5.9: Δεδομένα Εκπαίδευσης



Γράφημα 5.10: Σύγκριση τιμών πρόβλεψης του μοντέλου ANFIS με των πραγματικών τιμών του μαζούτ.



Γράφημα 5.11: Σύγκριση τιμών πρόβλεψης του μοντέλου AR με των πραγματικών τιμών του μαζούτ.



Γράφημα 5.12: Σύγκριση τιμών πρόβλεψης του μοντέλου ARMA με των πραγματικών τιμών του μαζούτ.

6.ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Μέσα στα πλαίσια της παρούσας εργασίας παρουσιάστηκε το θεωρητικό υπόβαθρο των νευροασαφών συστημάτων και η εφαρμογή τους σε ένα πρόβλημα πρόβλεψης τιμών.

Ένα σημαντικό στοιχείο για κάποιον που θέλει να ασχολήθει με ένα νευρο-ασαφές σύστημα είναι οι γνώσεις πάνω σε στατιστικές μεθόδους, αριθμητική ανάλυση, αλγεβρικά συστήματα, πίνακες, καθώς και θεωρητικό υπόβαθρο των νευρωνικών δικτύων, πως μπορούν αυτά να εκπαιδευτούν και πως μπορούν να γίνουν προσαρμοστικά.

Το νευροασαφές μοντέλο ANFIS που χρησιμοποιήθηκε, απαιτεί μεν ανεπτυγμένο γνωστικό υπόβαθρο λόγω της πολυπλοκότητάς του, αλλά έχει την ικανότητα να προσαρμόζεται πολύ καλά στις απαιτήσεις των προβλημάτων και να δίνει έτσι μικρότερα σφάλματα και άρα καλύτερα αποτελέσματα. Για την εκπαίδευση του συστήματος χρησιμοποιείται ένα τμήμα των δεδομένων in sample, ενώ για τον έλεγχο των τιμών πρόβλεψης ένα τμήμα out of sample. Για να γίνει αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας του μοντέλου, γίνεται μια πρώτη οπτική ανάγνωση από τα εξαγόμενα διαγράμματα της Matlab και έπειτα αναλύονται οι διάφορες τιμές σφαλμάτων που προέκυψαν μετά το πέρας της διαδικασίας.

Από τους πίνακες των αποτελεσμάτων του ANFIS, γίνεται αντιληπτό ότι τα αποτελέσματα της πρόβλεψης ήταν αρκετά ακριβή αφού οι τιμές των σφαλμάτων ήταν χαμηλές. Ενώ, σε σχέση με τα μοντέλα πρόβλεψης, τα καλύτερα αποτελέσματα τα παρέχει το ANFIS έναντι των AR και ARMA.

Γενικότερα προβλέψεις που πραγματοποιούνται με νευρωνικά δίκτυα είναι πιο αξιόπιστες από αυτές των υπολοίπων κλασικών μεθόδων, με τα αρνητικά τους στοιχεία όπως του ότι απαιτούνται πολλά δεδομένα για την εκπαίδευση του συστήματος ή του ότι απαιτούν πολύ μεγάλες οικονομικές επενδύσεις σε τεχνολογικό εξοπλισμό, να μην μπορούν να επισκιάσουν τα θετικά στοιχεία αφού μακροπρόθεσμα τα οφέλη είναι πολύ περισσότερα.

Είναι σίγουρο δε, ότι στο εγγύς μέλλον τα νευρο-ασαφή συστήματα θα είναι ο κανόνας και όχι η εξαίρεση στις επιλογές των αναλυτών δεδομένων.

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Aistis Raudys (2005). Accuracy of MLP Based Data Visualization Used in Oil Prices Forecasting Task.
- Akihiro Amano (1987). A Small Forecasting Model of the World Oil Market.
- Atsalakis G. & Zopounidis C. (2009). Forecasting turning points in stock market prices by applying a neuro-fuzzy model. *International Journal of Engineering and Management*, 1(1), 19-28. No impact factor.
- Atsalakis G., Nezis D., & Zopounidis C. (2009). Neuro-fuzzy versus traditional models for forecasting the wind energy production. In Skiadas, C. (Ed), *Advances in data analysis, statistics for industry* (pp. 279-291). Birkhauser Boston: Springer.
- Atsalakis G., Skiadas C. and Braimis I. (2007). Probability of trend prediction of exchange rate by neuro-fuzzy techniques. In Skiadas C. (Ed) *Recent advances in stochastic modeling and data analysis* (pp. 414-422). London, World Scientific Co. Pte. Ltd
- Atsalakis G. and Valavanis K. (2010). Forecasting stock trends using a combined technical analysis and neuro-fuzzy based approach. Accepted in *Journal of Financial Decision Making*. No impact factor.
- Atsalakis G. & Minudaki C. (2007). Prediction of daily irrigation water demand using adaptive neuro-fuzzy inference system (ANFIS), *International Conference on Energy, Environment, 90 Ecosystems and Sustainable Development* (pp. 368-373). Ag.Nikolaos, Greece: WSEAS.
- Atsalakis G. & Ucenic C. (2007). Forecasting the tourism demand using ANFIS for assuring successful strategies in the view of sustainable development in the tourism sector. *Proceedings of the 2nd IASME/WSEAS International Conference on Energy & Environment*, (pp. 213-219). Portorose, Slovenia.
- Atsalakis G. & Ucenic C. (2005). Time series prediction of the Greek manufacturing index for the non-metallic minerals sector using a neuro-fuzzy approach (ANFIS). *International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis* (pp. 211-218), Brest, France.
- B. Zimmerg. Crude oil price forecasting with anfis.
- Brown, M., Harris, C. (1994). *Neuro-fuzzy adaptive modelling and control*. New York: Prentice-Hall.

- Bruce Abramson, Anthony Finizza (1995). “Probabilistic forecasts from probabilistic models” a case study in the oil market.
- Bruce Abramson, Anthony Finizza (1991). Using belief networks to forecast oil prices.
- Buckley, J.J., Hayashi, Y. (1994). Fuzzy neural networks: a survey. *Fuzzy Sets and Systems* 66 1–13.
- Cheng, B., Titterton, D.M. (1994). Neural Networks: A review from a Statistical Perspective. *Statistical Science* 9, 2-30.
- Chiara Longo, Matteo Manera, Anil Markandya and Elisa Scarpa (2007). Evaluating the Empirical Performance of Alternative Econometric Models for Oil Price Forecasting.
- E.S. Dokuchaev, A.M. Rogacheva, E.V. Evtushenko (2006). The forecasting of the world oil price by summing up linear trend and periodic functions.
- Freeman, J. A., Skapura, D. M. (1992). Neural networks algorithm, application and programming techniques. MI, USA: Addison-Wesley.
- Jang, J.-S. R. (1993). ANFIS: Adaptive-Network-based Fuzzy Inference Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 23, No.3, pp. 665-685.
- Jesus Crespo Cuaresma, Adusei Jumah and Sohbet Karbuz (2002). Modelling and Forecasting Oil Prices: The Role of Asymmetric Cycles.
- Jinlan Liu, Yin Bai, Bin Li. A New Approach to Forecast Crude Oil Price Based on Fuzzy Neural Network.
- Komsan Suriya (2006). Forecasting Crude Oil Price Using Neural Networks.
- Lean Yu, Kin Keung Lai, Shouyang Wang, Kaijian He (2007). Oil Price Forecasting with an EMD-Based Multiscale Neural Network Learning Paradigm.
- M. A. Kaboudan (2001). Compumetric Forecasting of Crude Oil Prices.
- Mehrzad Zamani (2004). An Econometrics Forecasting Model of Short Term Oil Spot Price.
- Michael Ye, John Zyren, Joanne Shore (2002). Forecasting Crude Oil Spot Price Using OECD Petroleum Inventory Levels.
- Michael Ye, John Zyren, Joanne Shore (2005). Forecasting short-run crude oil price using high- and low-inventory variables.
- Mohammad Reza Amin-Naseri, Ehsan Ahmadi Gharacheh. A hybrid artificial intelligence approach to monthly forecasting of crude oil price time series.
- Salah Abosedraa, Hamid Baghestani (2003). On the predictive accuracy of crude oil futures prices.

- Sam Mirmirani and Hsi Cheng Li (2004). A comparison of var and neural networks with genetic algorithm in forecasting price of oil.
- Shahriar Yousefi, Ilona Weinreich, Dominik Reinartz (2005). Wavelet-based prediction of oil prices.
- Steven P. Schnaars “A comparison of extrapolation models on yearly sales forecasts” International Journal of Forecasting 2 (1986) 71-85, North-Holland
- Thalia Chantziara, George Skiadopoulos (2007). Can the dynamics of the term structure of petroleum futures be forecasted? Evidence from major markets.
- Thomas A. Knetsch (2006). Forecasting the price of crude oil via convenience yield predictions.
- Ucenic C. & Atsalakis G. (2009). Forecasting CPI using a neural network with fuzzy inference system. 13th International Conference on Applied Stochastic Models and Data Analysis. Vilnius Lithuania.
- V. Kodogiannis and A. Lolis “Forecasting Financial Time Series using Neural Network and Fuzzy System-based Techniques”. Neural Comput & Applic (2002)11:90–102
- Wang Shouyang, YU Lean, K. K. Lai (2005). Crude oil price forecasting with TEI@I methodology.
- Wen Xie, Lean Yu, Shanying Xu, and Shouyang Wang (2006). A new method for crude oil price forecasting based on support vector machines.
- Xun Zhang, K.K Lai, Shoy-Yang Wang (2008). A new approach for crude oil price analysis based on Empirical Mode Decomposition.
- Ying Fan, Qiang Liang, Yi-Ming Wei (2006). A generalized pattern matching approach for multistep prediction of crude oil price.
- Yejing Bao, Xun Zhang, Lean Yu, and Shouyang Wang (2007). Crude Oil Price Prediction Based On Multi-scale Decomposition.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets and systems. In: Fox, J., ed., System Theory. Polytechnic Press, Brooklyn, NY, pp. 29-37.
- Zadeh, L. A. (1972). A fuzzy set interpretation of linguistic hedges. Journal of Cybernetics, 2(3), pp. 4-34.
- Zadeh, L. A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, 1(1), pp. 28-44.
- Εμμανουήλ Μ. Βουμβουλάκης (2003). Βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη φορτίου με χρήση νευρωνικών δικτύων και ασαφούς λογικής.
- Κίτσιος Εμμανουήλ (2004). Εφαρμογή νευροασαφών συστημάτων στην εκτίμηση πιστωτικού κινδύνου.
- Χρυσή Μινουδάκη (2007). Πρόβλεψη κατανάλωσης νερού στο Ν.Χανίων χρησιμοποιώντας το νεύρο-ασαφές σύστημα (ANFIS).