



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Διπλωματική Εργασία

Υπολογιστική Υλοποίηση Εναλλακτικών Μοντέλων Βελτιστοποίησης Χαρτοφυλακίων

Συγγραφέας:

Ανδρέας Καμπιανάκης

Επιβλέπων:

Μιχάλης Δούμπος

Σχολή:

Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Στην οικογένειά μου.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον Αναπληρωτή Καθηγητή Μιχάλη Δούμπο για την πολύτιμη βοήθεια και τις συμβουλές του καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής. Επιπλέον, ευχαριστώ τους Βασίλη Μαρκουλάκη, Γιάννη Σαράντη, Γιώργο Ζωγράφο, Μιχάλη Τσαγκαράκη, Ιάκωβο Μαστρογιαννάκη, Βασίλη Παπαδερό και Τέρψη Βελιβασάκη για τη στήριξη τους.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	5
2	Θεωρητικό Υπόβαθρο	7
2.1	Χρηματοοικονομικός Κίνδυνος	7
2.2	Βασική Θεωρία Χαρτοφυλακίου	8
2.2.1	Αναμενόμενη Απόδοση	8
2.2.2	Κίνδυνος σε Χαρτοφυλάκια Χρεογράφων	9
2.2.3	Αποτελεσματικά Χαρτοφυλάκια	9
2.3	Συμπληρωματικά Θέματα	11
2.3.1	Υποθέσεις και περιορισμοί Μοντέρνας Θεωρίας Χαρτοφυλακίου	11
2.3.2	Πολυκριτήριος Προγραμματισμός στη Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου	11
2.3.3	Αξία σε κίνδυνο (VaR)	12
3	Βελτιστοποίηση επενδυτικών χαρτοφυλακίων	15
3.1	Μοντέλο Μέσου - Διακύμανσης	15
3.2	Μοντέλο Μέσου - ημί-διακύμανσης	16
3.3	Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο	17
3.4	Μέση Απόλυτη Απόκλιση	18
3.5	Μοντέλο Πολλαπλών Αποκλίσεων	19
3.6	Μέση Διαφορά Gini	20
3.7	Μοντέλο Minimax	21
3.8	Συμπληρωματικά Μοντέλα	22
3.8.1	Πλήθος χρεογράφων σε ένα χαρτοφυλάκιο	23
3.8.2	Προκαθορισμένες μονάδες συναλλαγών	24
3.8.3	Κόστος συναλλαγών	24
4	Υλοποίηση	27
4.1	Μοντελοποίηση	27
4.2	Περιβάλλον Εργασίας	29

4.3	Κατασκευή Περιβάλλοντος Εργασίας	30
4.4	Παράδειγμα Χρήσης	33
4.5	Μορφή Δεδομένων Εισαγωγής	35
4.6	Αριθμητικά Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης	38
5	Συμπεράσματα και Μελλοντικές Κατευθύνσεις	40

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στη σύγχρονη παγκοσμιοποιημένη αγορά ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος και η διαχείριση αυτού έχει αποκτήσει εξαιρετική σημασία, ιδιαίτερα σήμερα, όπου οι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν την εύθραυστη παγκόσμια οικονομία είναι χιλιάδες και πολλές φορές ασύνδετοι μεταξύ τους. Έτσι δημιουργείται ένα ερώτημα, ακαδημαϊκού αλλά και πραγματικού ενδιαφέροντος. Πώς μπορεί να προβλεφθεί αυτός ο κίνδυνος και να αποφευχθούν ή τουλάχιστον να περιοριστούν οι ζημίες;

Στο πεδίο της θεωρίας των χρηματοοικονομικών αγορών έχουν αναπτυχθεί διάφορες ποσοτικές μέθοδοι οι οποίες μπορούν να δώσουν μια πρόβλεψη αυτού του κινδύνου σε επίπεδο χαρτοφυλακίων. Ως χαρτοφυλάκιο ορίζεται το σύνολο των χρεογράφων, επικίνδυνων ή μη, που έχει στα χέρια του ένας επενδυτής. Μέσα από την πληθώρα επιλογών που έχει ο επενδυτής, είναι φανερό η αξία της μέτρησης του κινδύνου καθώς και η μεγάλη σημασία της.

Το πρώτο βήμα για την ποσοτική μέτρηση του κινδύνου σε χαρτοφυλάκια και την επιλογή βέλτιστων χαρτοφυλακίων πραγματοποιήθηκε από τον Harry Markowitz το 1952 [27], με την ανάπτυξη του μοντέλου μέσου-διακύμανσης, το οποίο παρουσιάζει μέχρι σήμερα ενδιαφέρον και χρησιμοποιείται από τους επενδυτές. Εν συνεχεία αναπτύχθηκαν διάφορες άλλες μέθοδοι, δίνοντας έμφαση σε εναλλακτικά μέτρα κινδύνου που μπορούσαν να γραμμικοποιήσουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων [36].

Η εργασία αυτή πραγματεύεται την υλοποίηση επτά δημοφιλών μοντέλων βελτιστοποίησης επενδυτικών χαρτοφυλακίων καθώς και την ενσωμάτωση σε αυτά συμπληρωματικών στοιχείων με στόχο τη ρεαλιστικότερη ανάλυση χαρτοφυλακίων. Η υπολογιστική υλοποίηση των μοντέλων πραγματοποιήθηκε μέσω της ανάπτυξης ενός απλού αλλά φιλικού προς το χρήστη συστήματος που βασίζεται σε ένα γραφικό περιβάλλον εργασίας.

Αρχικώς θα γίνει μια παρουσίαση της έννοιας του κινδύνου και του ρόλου αυτού στην επιλογή Βέλτιστου Χαρτοφυλακίου. Θα αναλυθούν μαθηματικά όλες οι υλοποιηθείσες σε αυτήν την εργασία μέθοδοι ελέγχου του κινδύνου και της ποσοτικοποίησης αυτού. Εν συνεχεία θα πραγματοποιηθεί μια ανάλυση της μεθόδου σύνθεσης Χαρτοφυλακίων από

το κάθε μοντέλο ξεχωριστά. Τέλος, θα γίνει μια επίδειξη της διεπαφής με το χρήστη και τις δυνατότητες της.

Τα δεδομένα των δοκιμών αφορούν 118 μετοχές του Χρηματιστηρίου Αθηνών, κατά τη χρονική περίοδο από τις 3/1/2005 έως 6/8/2009, δεδομένα όμως που μπορούν να μεταβληθούν ανάλογα με την είσοδο δεδομένων της αρεσκείας του χρήστη.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί όλη η θεωρία πίσω από την λέξη χαρτοφυλάκιο, δηλαδή η θεωρία χαρτοφυλακίου καθώς επίσης και η έννοια του κινδύνου από την χρηματοοικονομική σκοπιά.

2.1 Χρηματοοικονομικός Κίνδυνος

Η τιμή με την οποία κλείνει κάθε μετοχή στο Χρηματιστήριο επηρεάζεται από το γενικό σύνολο της πορείας της επιχείρησης, αλλά και από αστάθμητους παράγοντες ενίοτε κερδοσκοπικούς. Ο γενικός κίνδυνος που διατρέχει όμως ο επενδυτής προκύπτει απο αλληλεπιδράσεις διαφόρων ειδών κινδύνου στους οποίους εκτίθεται μια επιχείρηση, κίνδυνοι που συνοψίζονται στους [42]:

- Επιχειρηματικός Κίνδυνος. Το είδος αυτού του κινδύνου εξαρτάται από τον τομέα στον οποία δραστηριοποιείται μια επιχείρηση καθώς επίσης και από το είδος της ίδιας της επιχείρησης.
- Κίνδυνος της αγοράς. Ο κίνδυνος αυτός εμπεριέχεται σε κάθε κίνηση μιας επιχείρησης εντός της αγοράς. Παραδείγματα τέτοιου κινδύνου αποτελούν ο κίνδυνος των επιτοκίων, σε περίπτωση δανεισμού καθώς και ο κίνδυνος συναλλαγματικών ισοτιμιών σε περίπτωση που η επιχείρηση έχει συναλλαγές σε διεθνές επίπεδο (εκτός Ευρωπαϊκής Ένωσης στην περίπτωση της Ελλάδας)
- Πιστωτικός Κίνδυνος. Ο κίνδυνος αυτός αφορά την δυνατότητα της επιχείρησης να εισπράττει τα χρέη της από τρίτους.
- Λειτουργικός Κίνδυνος. Ο συγκεκριμένος τύπος κινδύνου αφορά τον βαθμό της εύρυθμης λειτουργίας της επιχείρησης, δηλαδή το κατά πόσο καλά συνεργάζεται και λειτουργεί το έμψυχο και το άψυχο κομμάτι της επιχείρησης.

- **Κίνδυνος Ρευστότητας.** Ο κίνδυνος ρευστότητας αφορά όταν την πιθανότητα να δημιουργηθούν ζημιές από την αδιαφορία των επενδυτών ως προς κάποιο χρεόγραφο.
- **Νομικός Κίνδυνος.** Ο τύπος αυτού του κινδύνου έχει να κάνει με το ρίσκο μιας επιχείρησης που έχει συνάψει συμβόλαιο με κάποιο φυσικό πρόσωπο ή άλλη επιχείρηση και δεν υπάρχει γνώση αν θα δικαιωθεί νομικά σε περίπτωση παραβίασης του συμβολαίου.

Παραπάνω λοιπόν παρουσιάζονται συνολικά οι κίνδυνοι οι οποίοι αντιμετωπίζονται από τις επιχειρήσεις σε ένα περιβάλλον ελεύθερης αγοράς και γίνεται καλύτερα αντιληπτή η αξία της έννοιας του κινδύνου σε χρηματοοικονομικούς όρους καθώς και της ποσοτικοποίηση αυτής όπου αυτό είναι δυνατόν.

2.2 Βασική Θεωρία Χαρτοφυλακίου

Η σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου, αφορά την επιλογή των χρεογράφων, που θα το αποτελέσουν και στο ποσοστό συμμετοχής του καθενός μέσα στο χαρτοφυλάκιο. Για να γίνει κάτι τέτοιο θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν όλες οι παραπάνω μορφές κινδύνου. Έτσι η επιλογή του ποσοστού συμμετοχής κάθε χρεογράφου γίνεται μια σύνθετη διαδικασία. Για την απλούστευση της διαδικασίας αυτής έχει αναπτυχθεί η θεωρία χαρτοφυλακίου η οποία, συνοπτικά, αφού εντοπίσει την αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο, διαφορετικών χαρτοφυλακίων, προτείνει είτε το χαρτοφυλάκιο ελαχίστου κινδύνου αν πρόκειται για χαρτοφυλάκια ίδιας απόδοσης-, είτε το χαρτοφυλάκιο μέγιστης απόδοσης αν η επιλογή γίνεται από χαρτοφυλάκια ίδιου κινδύνου. Για να γίνει κατανοητό αυτό θα πρέπει να εξεταστούν οι έννοιες της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου.

2.2.1 Αναμενόμενη Απόδοση

Αρχικά θα εξετάσουμε την έννοια της απόδοσης ενός χρεογράφου. Η έννοια αυτή αφορά την ποσοστιαία μεταβολή μιας μετοχής εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος. Έτσι γίνεται αντιληπτό ότι αν τη χρονική στιγμή t η αξία ενός χρεογράφου είναι P_t και την χρονική στιγμή $t + t'$ η αξία του ίδιου χρεογράφου είναι $P_{t+t'}$ τότε η απόδοση του θα δίδεται από τον τύπο [1]

$$r_{t'} = \frac{P_{t+t'} - P_t}{P_t} \quad (2.1)$$

Αν υπάρχουν από ιστορικά στοιχεία την αξία της μετοχής κάθε ημέρας για μια χρονική περίοδο τότε είναι δυνατόν να υπολογιστεί η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής, για την επόμενη μέρα. Ο τρόπος για να γίνει αυτό είναι μέσα από την μέση τιμή των αποδόσεων του χρεογράφου για το χρονικό διάστημα στο οποίο γίνεται η ανάλυση. Παρουσιάζεται

λοιπόν ο παρακάτω τύπος της αναμενόμενης απόδοσης :

$$\mu = \frac{\sum_{t=1}^T r_t}{T} \quad (2.2)$$

Προχωρώντας στην έννοια της αναμενόμενης απόδοσης ολόκληρου χαρτοφυλακίου στο οποίο το ποσοστό συμμετοχής του χρεογράφου i είναι w_i τότε η αναμενόμενη απόδοση ολόκληρου του χαρτοφυλακίου διαμορφώνεται μέσα από τον παρακάτω τύπο:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot E(r_i) \quad (2.3)$$

όπου n είναι το σύνολο των επιλεγθέντων χρεογράφων.

2.2.2 Κίνδυνος σε Χαρτοφυλάκια Χρεογράφων

Η ποσοτικοποίηση του κινδύνου ενός χρεογράφου αποτελεί ουσιαστικά την τιμή της τυπικής απόκλισης του. Η τυπική απόκλιση ορίζεται ως την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, και πρακτικά αποτελεί την μεταβλητότητα γύρω από την μέση τιμή του. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω εκφράζεται από τον τύπο [1]:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^T [r_t - \mu]^2}}{T - 1} \quad (2.4)$$

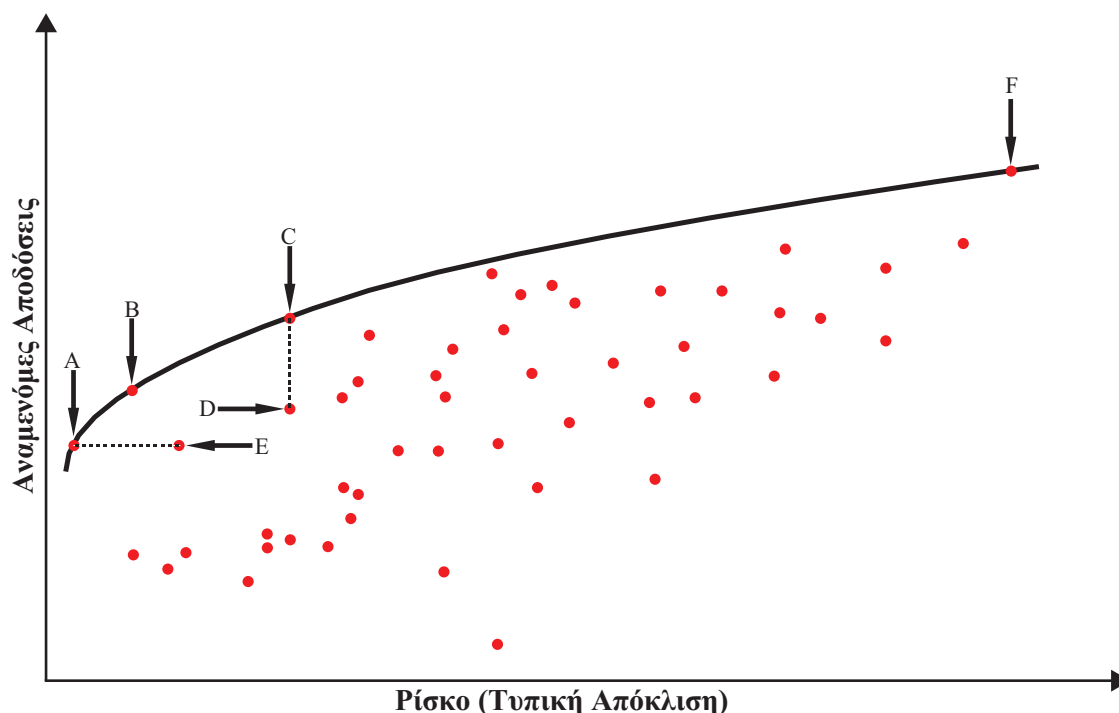
Η έκφραση αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε χαρτοφυλάκια χρεογράφων μέσα από τον τύπο :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij}} \quad (2.5)$$

Με την χρήση του παραπάνω μαθηματικού τύπου είναι εφικτή η ποσοτικοποίηση του κινδύνου σε χαρτοφυλάκια σύμφωνα με την τυπική απόκλιση, άλλα θα πρέπει να επισημανθεί ότι υπάρχουν και άλλα μέτρα κινδύνου, ορισμένα από τα οποία θα αναλυθούν στη συνέχεια.

2.2.3 Αποτελεσματικά Χαρτοφυλάκια

Ο όρος αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 1950 από τον Harry Markowitz [27], [30]. Ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο λέγεται εκείνο το οποίο σε δεδομένο επίπεδο κινδύνου παρέχει τη μεγαλύτερη απόδοση και σε δεδομένη απόδοση έχει το μικρότερο κίνδυνο. Σύμφωνα με αυτό αυτόν τον ορισμό, ένας επενδυτής θα



Σχήμα 2.1: Αποτελεσματικά Χαρτοφυλάκια

επιλέξει από το σύνολο των δυνατών χαρτοφυλακίων, το χαρτοφυλάκιο εκείνο το οποίο:

- α) Του προσφέρει την μέγιστη προσδοκώμενη απόδοση για διάφορα επίπεδα κινδύνου και
- β) Του προσφέρει τον μικρότερο κίνδυνο για διάφορα επίπεδα προσδοκώμενης απόδοσης.

Τα χαρτοφυλάκια που πληρούν αυτές τις προϋποθέσεις αναφέρονται ως αποτελεσματικά.

Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα όπου, σχηματίζονται όλα τα δυνατά χαρτοφυλάκια όπως αυτά διαγράφονται βάσει των σχέσεων αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου. Το σύνολο των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων έχει την μορφή μιας παραβολής στους άξονες της αναμενόμενης απόδοσης (κάθετος άξονας) και του κινδύνου (οριζόντιος άξονας). Τα σημεία A, B, C, D, E, F, δείχνουν μερικά από τα χαρτοφυλάκια. Από όλα τα χαρτοφυλάκια πιο αποδοτικά είναι εκείνα που βρίσκονται στο "βορειοδυτικότερο" μέρος της καμπύλης των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων μεταξύ A και F. Όλα τα άλλα χαρτοφυλάκια είναι αναποτελεσματικά. Για παράδειγμα, το A χαρτοφυλάκιο υπερέχει του E γιατί προσφέρει την ίδια απόδοση με μικρότερο κίνδυνο. Αντίστοιχα το C χαρτοφυλάκιο υπερέχει του D γιατί προσφέρει μεγαλύτερη απόδοση στο ίδιο επίπεδο κινδύνου.

2.3 Συμπληρωματικά Θέματα

2.3.1 Υποθέσεις και περιορισμοί Μοντέρνας Θεωρίας Χαρτοφυλακίου

Στη Μοντέρνα Θεωρία Χαρτοφυλακίου πραγματοποιείται μια σειρά υποθέσεων αναφορικά με την αγορά και τους επενδυτές [42] [33],

- Οι επενδυτές είναι "λογικοί" και συμπεριφέρονται με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιήσουν την ωφέλειά τους σύμφωνα με το διαθέσιμο κεφάλαιο.
- Οι επενδυτές έχουν ελεύθερη πρόσβαση σε δίκαιη και ορθή πληροφόρηση αναφορικά με το ρίσκο και τις αναμενόμενες αποδόσεις.
- Οι αγορές είναι αποτελεσματικές και απορροφούν την πληροφορία γρήγορα και τέλεια.
- Οι επενδυτές αποφεύγουν το ρίσκο μέσα από την προσπάθεια μεγιστοποίησης του κέρδους και ελαχιστοποίησης του κινδύνου.
- Οι επενδυτές βασίζονται στις αποφάσεις τους σύμφωνα με την αναμενόμενη απόδοση και κάποιο μαθηματικώς καθορισμένο μέτρο κινδύνου.
- Οι επενδυτές προτιμούν υψηλότερες αποδόσεις σε σχέση με χαμηλότερες αποδόσεις σε δεδομένο επίπεδο ρίσκου.

Στην βιβλιογραφία όμως έχει αναφερθεί ότι αρκετές από τις υποθέσεις αυτές δεν ισχύουν, όπως η λογική των επενδυτών όπου δείχνουν συχνά να προτιμούν χαρτοφυλάκια διαφορετικά από αυτά των αναλύσεων [8] [21]. Επιπλέον η πολυπλοκότητα αυξάνεται όσο μεγαλώνει το πρόβλημα, καθιστώντας την επίλυσή του εξαιρετικά δύσκολη έως και αδύνατη. Τέλος, η μοντέρνα θεωρία χαρτοφυλακίου δεν λαμβάνει υπόψη την μοναδικότητα του κάθε επενδυτή, και τους λαμβάνει όλους σαν ένα σώμα, αδιαφορώντας για την συμπεριφορά που μπορεί να έχει ο καθένας από αυτούς. Έτσι η διαφορά θεσμικών και μη θεσμικών επενδυτών μπορεί να οδηγήσει σε αξίες πολύ μεγαλύτερες από τις πραγματικές, λόγω αγελαίας συμπεριφοράς της δεύτερης κατηγορίας επενδυτών, κάτι που οδηγεί σε συστηματική υπερέτιμηση των χρηματιστηριακών αξιών [26].

2.3.2 Πολυκριτήριος Προγραμματισμός στη Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου

Ως πολυκριτήριος προγραμματισμός ορίζεται η επέκταση του κλασσικού μαθηματικού προγραμματισμού όπου μια σειρά από αντικειμενικές συναρτήσεις βελτιστοποιούνται. Σε αυτό το είδος προγραμματισμού η βέλτιστη λύση δεν έχει την ίδια έννοια με αυτή

του κλασσικού μαθηματικού προγραμματισμού, αφού οι πολλαπλές αντικειμενικές συναρτήσεις έχουν αντικρουόμενο χαρακτήρα. Έτσι υπάρχει αδυναμία στην εύρεση λύσεων η οποία να βελτιστοποιεί ταυτόχρονα όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις που αποτελούν το πρόβλημα. Γίνεται κατανοητό ότι στόχος είναι να βρεθεί μια κατάλληλη συμβιβαστική λύση. Το αποτελεσματικό σύνολο αποτελείται από λύσεις, οι οποίες δεν κυριαρχούνται από οποιαδήποτε άλλη εφικτή λύση κάποιου από τα κριτήρια. Η ύπαρξη πολλαπλών κινδύνων κατά την βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων και η ανάγκη εύρεσης λύσεων οι οποίες θα έχουν λάβει υπόψιν πέρα του ενός μέτρου κινδύνου, οδήγησε τη χρήση του πολυκριτηρίου προγραμματισμού για την βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων. Τα θεμελιώδη μοντέλα ανάλυσης, που χρησιμοποιούνται συνήθως στην πράξη, τονίζουν ότι οι τιμές των μετοχών εξαρτώνται από την ευρωστία του αποθεματικού της εταιρείας και την ικανότητά της να πληρώσει τα μερίσματα. Αυτό είναι ένα επιπλέον πρόβλημα πολυκριτηρίας ανάλυσης γιατί για τη λύση του πρέπει να εκτιμήσουμε την αποδοτικότητα της επιχείρησης, το επίπεδο του χρέους της (βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα), καθώς και η ποιότητα της διαχείρισης. Τέλος, στην πράξη, ο επενδυτής έχει μια προσωπική στάση και ειδικούς στόχους. Στην βιβλιογραφία έχει περιγραφεί αναλυτικά η ανάγκη για αυτού του είδους προγραμματισμό στην περίπτωση της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων [43] [44] [38] [11] [37]. Μέσα από τον πολυκριτήριο προγραμματισμό είναι δυνατή η καλύτερη μελέτη του επενδυτή ο οποίος υπόκειται σε κάποιον κίνδυνο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αντίθετα από την κλασσική θεωρία που επιβάλλει κάποιον κανόνα αναφορικά με την συμπεριφορά του [15].

2.3.3 Αξία σε κίνδυνο (VaR)

Στην κλασσική θεωρία χαρτοφυλακίου ο κίνδυνος ορίζεται από τη μεταβλητότητα των αποδόσεων μιας επένδυσης. Τις τελευταίες δύο δεκαετίες όμως έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στη χρήση μέτρων κινδύνων που εστιάζουν στις αναμενόμενες ζημιές μιας επένδυσης, με στόχο να βοηθήσουν στο σχεδιασμό επενδυτικών στρατηγικών που παρέχουν μεγαλύτερη ασφάλεια σε ακραία αρνητικά ενδεχόμενα. Το πιο δημοφιλές μέτρο που έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια αυτά είναι η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk, VaR), η οποία χρησιμοποιείται πλέον εκτεταμένα από επενδυτές αλλά και εποπτικούς φορείς. Η VaR αναπτύχθηκε ώστε να αποτελέσει ένα κατανοητό και γενικό μέτρο κινδύνου που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε επενδυτική θέση (απλής ή σύνθετης) αλλά και γενικά σε κάθε πλαίσιο που εμπλέκονται χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι κάθε τύπου. Όταν πρόκειται κανείς να υπολογίσει την τιμή της VaR για μια συγκεκριμένη επένδυση, ουσιαστικά πρόκειται να απαντήσει στην εξής απλή ερώτηση. « Ποια είναι η μέγιστη ζημία που μπορεί να υπάρξει λόγω της επένδυσης, σε ένα δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης » [17]. Το διάστημα εμπιστοσύνης, καθορίζει το εύρος των εκτιμήσεων ανάλογα με το επιθυμητό

βαθμό στατιστικής βεβαιότητας. Για την περίπτωση της διαχείρισης χαρτοφυλακίων χρεογράφων το όριο που επιλέγεται συνήθως κυμαίνεται σε επίπεδα άνω του 90%. Για διαστήματα 90%, 95% και 99% οι εκτιμήσεις του κινδύνου αναφέρονται ως VaR90, VaR95 και VaR99 αντίστοιχα.

Για να προσδιοριστεί η οριακή απόδοση r^* απαιτείται η γνώση της κατανομής πιθανότητας των αποδόσεων. Η ανάλυση μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά θεωρώντας ότι η απόδοση ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ , όπως παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 2.2. Στην πράξη ο υπολογισμός της VaR γίνεται μέσω σύνθετων υπολογιστικών διαδικασιών που βασίζονται σε προσομοιώσεις Monte Carlo, οι οποίες επιτρέπουν την εκτίμηση της κατανομής των αποδόσεων. Ο υπολογισμός της VaR σε χαρτοφυλάκια μπορεί να πραγματοποιηθεί γνωρίζοντας την μέγιστη ζημία $\Delta P = P - P_t^*$ σε χρονικό ορίζοντα t με επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \alpha$, ώστε η ζημία ΔP_t^* να υπολογιστεί ως την πιθανότητα $Pr(\Delta P \leq \Delta P^*) = \alpha$. Γνωρίζοντας ότι: $r_{t'} = \frac{P_{t+t'} - P_t}{P_t}$ από προηγούμενο κεφάλαιο μπορεί να γραφεί ότι

$$\Delta P = rP \quad (2.6)$$

Επομένως:

$$Pr(rP \leq r^*P) = \alpha \iff Pr(r \leq r^*) = \alpha \quad (2.7)$$

Θεωρώντας, όπως αναφέρθηκε παραπάνω ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ η (2.7) θα μετασχηματιστεί σε

$$Pr(r \leq r^*) = \alpha \iff Pr(Z \leq Z^* = \frac{r^* - \mu}{\sigma}) = \alpha \quad (2.8)$$

Η τιμή του Z μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τους πίνακες της κανονικής κατανομής, για $1 - \alpha = 95\%$, $Z^* = -1.65$, άρα το r^* υπολογίζεται ως :

$$r^* = \mu + Z\sigma \quad (2.9)$$

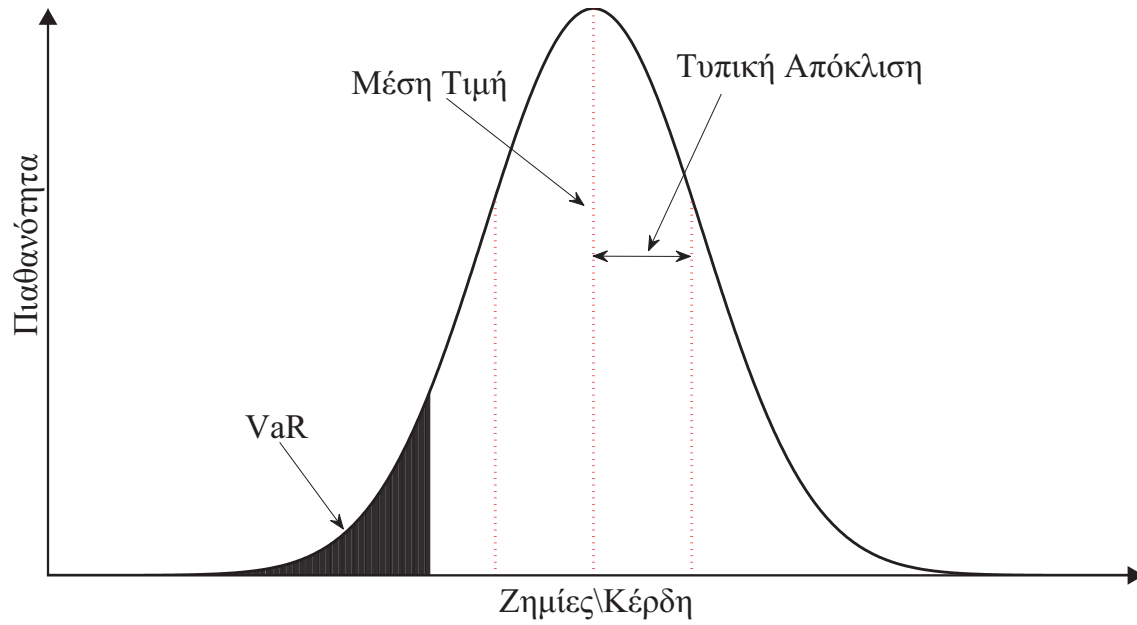
άρα και η VaR υπολογίζεται ως

$$VaR = -\Delta P^* = -r^*P = (-\mu + Z^*\sigma)P \quad (2.10)$$

Η παραπάνω σχέση για την Αξία σε Κίνδυνο εκφράζει τη ζημία σε απόλυτους όρους, αλλά υπάρχει και ο υπολογισμός σε σχετικούς όρους που απλοποιεί τους υπολογισμούς και δίνει την ίδια πληροφορία. Έτσι η σχετική αξία σε κίνδυνο είναι :

$$VaR = -(r^*P - \mu P) = -(\mu P + Z^*\sigma P - \mu P) = -Z^*\sigma P \quad (2.11)$$

Παρατηρεί κανείς παραπάνω ότι απαιτείται μόνο ο προσδιορισμός της τυπικής απόκλισης για τον προσδιορισμό της VaR υποθέτοντας πάντα ότι η κατανομή των αποδόσεων είναι κανονική [17].



Σχήμα 2.2: Αξία σε Κίνδυνο [1]

Κεφάλαιο 3

Βελτιστοποίηση επενδυτικών χαρτοφυλακίων

Μετά την θεωρητική ανάλυση των εννοιών Αναμενόμενη Απόδοση, Κίνδυνος, Αποτελεσματικό Χαρτοφυλάκιο, Αξία σε Κίνδυνο, σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιασθούν και θα μελετηθούν και άλλα μοντέλα που αναπτύχθηκαν για την μέτρηση του κινδύνου. Θα παρουσιασθούν επίσης και συμπληρωματικά μοντέλα, τα οποία ουσιαστικά προσφέρουν ρεαλιστικότερες αναλύσεις και μοντελοποιούν καλύτερα την πραγματικότητα [16]. Καθένα από αυτά χρησιμοποιεί κάποιο διαφορετικό μαθηματικό τύπο για την μέτρηση του κινδύνου.

3.1 Μοντέλο Μέσου - Διακύμανσης

Το συγκεκριμένο μοντέλο βελτιστοποίησης επενδυτικών χαρτοφυλακίων αποτέλεσε την αρχή για την σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίων και υπήρξε ο ακρογωνιαίος λίθος για την μελέτη του κινδύνου σε χρεόγραφα. Χρησιμοποιείται ακόμη λόγω απλότητας και καλύτερης φυσικής κατανόησης των όρων του, όμως η τετραγωνική του φύση το κάνει δύσκολο στην επίλυσή του για την εύρεση βέλτιστων χαρτοφυλακίων [23] σε σχέση με μοντέλα που είναι γραμμικά και θα αναλυθούν εκτενέστερα παρακάτω.

Στην περίπτωση του μοντέλου αυτού έστω ότι υπάρχουν n χρεόγραφα. Κάθε χρεόγραφο i έχει αναμενόμενη απόδοση μ_i , η διακύμανση των αποδόσεων του συμβολίζεται ως σ_i^2 , ενώ σ_{ij} είναι η συν-διακύμανση των αποδόσεών του σε σχέση με ένα άλλο χρεό-

γραφο j . Αν R είναι η επιθυμητή απόδοση του χαρτοφυλακίου τότε:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j, \quad (3.1)$$

$$\text{Υ.Π} \quad \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \geq R, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (3.3)$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \dots n \quad (3.4)$$

Αυτό είναι ένα πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού, και ως εκ τούτου η επιλυσιμότητά του προβληματίζει παλαιότερα. Σήμερα όμως, τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία επιτρέπουν τη λύση του παραπάνω τετραγωνικού προγράμματος ακόμα και για δεδομένα μεγάλων διαστάσεων [23].

3.2 Μοντέλο Μέσου - ημί-διακύμανσης

Μια εναλλακτική στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου με χρήση της γενικής διακύμανσης είναι η χρήση του όρου της μέσης ημι-διακύμανσης, που προτάθηκε από τον Markowitz [30], [28]. Επειδή ένας επενδυτής ανησυχεί για την υποαπόδοση αντί για την υπεραπόδοση, η ήμι-διακύμανση είναι ένα πιο κατάλληλο μέτρο κινδύνου από τη διακύμανση. Η διαφορά του είναι ότι η ήμι-διακύμανση μετρά μόνο προς τα κάτω απόκλιση, όχι άνω και κάτω αποκλίσεις όπως η διακύμανση.

Το μοντέλο αυτό επιδιώκει να εντοπίσει βέλτιστα χαρτοφυλάκια λαμβάνοντας υπόψιν τις αναμενόμενες αποδόσεις του κάθε χρεογράφου καθώς και την ήμι-διακύμανση αυτών όπως αυτή αναπτύχθηκε παραπάνω [29]. Τα αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια της επίλυσης αυτού του προβλήματος έχουν ελάχιστη ήμι-διακύμανση για μια δεδομένη αναμενόμενη απόδοση, και ανώτατες αναμενόμενες αποδόσεις για ένα δεδομένη ήμι-διακύμανση. Το σύνολο όλων των αποτελεσματικών χαρτοφυλάκια σχηματίζουν το αποτελεσματικό σύνορο στο γράφημα απόδοσης / ήμι-διακύμανσης.

Το γραμμικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης [23] που σχηματίζεται από τα παραπάνω

είναι το εξής:

$$\min \sum_{t=1}^T z_t^2, \quad (3.5)$$

$$\text{Υ.Π} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^n (r_{ti} - \mu_i) - d_t + z_t = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu_i \geq R, \quad (3.8)$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \dots n \quad (3.9)$$

Η παραπάνω μοντελοποίηση οδήγησε στην πρώτη μορφή χρήσης του κινδύνου επιδείνωσης ως μέτρου κινδύνου, που αν και υπολογιστικά δυσκολότερο σε περιπτώσεις όπου προστίθενται περαιτέρω περιορισμοί [14], είναι αρκετά δημοφιλείς μέθοδοι [24] όπως θα δειχθεί παρακάτω.

3.3 Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο

Η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο (Conditional Value at Risk, CVAR) αποτελεί επέκταση της αξίας σε κίνδυνο (VaR), με στόχο τη διαμόρφωση μιας καλύτερης εκτίμησης των ζημιών σε ακραία αρνητικές συνθήκες και την αντιμετώπιση ορισμένων θεωρητικών προβλημάτων της αξίας σε κίνδυνον [34]. Για συνεχείς κατανομές, CVAR ορίζεται ως η αναμενόμενη απώλεια στις περιπτώσεις εκείνες όπου οι απώλειες μιας επενδυτικής θέσης υπερβούν την αντίστοιχη VaR. Ωστόσο, για τις γενικές κατανομές, συμπεριλαμβανομένων των διακριτών κατανομών, η CVAR ορίζεται ως ο σταθμισμένος μέσος όρος της VaR και των ζημιών που αυστηρά υπερβαίνουν τη VaR [34]. Για γενικές κατανομές, η CVAR, έχει πιο ελκυστικές ιδιότητες από την VaR. Η CVAR είναι υπο-πρόσθετική και κυρτή [34]. Επιπλέον, η CVAR διαθέτει όλες τις βασικές ιδιότητες ενός λογικού μέτρου κινδύνου, κάτι το οποίο δεν συμβαίνει με τη VaR, σύμφωνα με τον Artzner [3], [4]. Αν και η CVaR δεν έχει γίνει πλήρως αποδεκτή στην οικονομική βιομηχανία, η CVaR κερδίζει έδαφος στον ασφαλιστικό τομέα [12]. Η μαθηματική μοντελοποίηση της CVAR παρου-

σιάζεται ως εξής [2]:

$$\min \quad \eta + \frac{1}{T\beta} \sum_{t=1}^T d_t, \quad (3.10)$$

$$\text{Υ.Π} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu_i \geq R, \quad (3.12)$$

$$n + \sum_{i=1}^n r_{ti} w_i + d_t \geq 0, \quad (3.13)$$

$$d_t \geq 0 \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (3.14)$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \dots n \quad (3.15)$$

Βελτιστοποιώντας τη CVaR ελαχιστοποιείται και η VaR, αφού ισχύει ότι $CVaR \geq VaR$. Πέραν τούτου ένα ακόμα πλεονέκτημα της CVaR σε σχέση με την απλή VaR είναι το ότι μπορεί να βελτιστοποιηθεί με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού και έτσι η δημιουργία βέλτιστων χαρτοφυλακίων να γίνει μια διαδικασία επίλυσης ενός γραμμικού προβλήματος η οποία είναι σχετικά απλή στην κατανόηση και εύκολη στη χρήση αλλά και στην υλοποίηση [32].

3.4 Μέση Απόλυτη Απόκλιση

Οι δυσκολίες επίλυσης το μοντέλου του Markowitz και τον παραλλαγών του [35] [39] οδήγησε τους Konno και Yamazaki το 1988 να παρουσιάσουν ένα μοντέλο αποτελούμενο αποκλειστικά από γραμμικούς περιορισμούς [20], το οποίο χρησιμοποιεί ως μέτρο κινδύνου την μέση απόλυτη απόκλιση (Mean Absolute Deviation, MAD). Ως μέση απόλυτη απόκλιση ορίζεται η μέση τιμή της απόλυτης απόκλισης από το μέσο των δεδομένων. Έτσι προτάθηκε το παρακάτω μέγεθος σαν μέτρο ρίσκου :

$$MAD_i = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n |r_{it} - \mu_i|$$

Επεκτείνοντας το μέτρο κινδύνου για χαρτοφυλάκια μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι λόγω του απολύτου που εμπεριέχει το μέτρο κινδύνου το πρόβλημα που δημιουργείται δεν μπορεί να είναι γραμμικό. Όμως εύκολα μπορεί να γίνει τέτοιο προσθέτοντας μια περαιτέρω μεταβλητή. Έτσι το πρόβλημα που δημιουργείται προς επίλυση είναι το παρα-

κάτω:

$$\min \sum_{t=1}^T y_t, \quad (3.16)$$

$$\text{Υ.Π} \sum_{i=1}^n w_i [r_{ti} - \mu_i] + y_t \geq 0 \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i [r_{it} - \mu_i] - y_t \geq 0 \quad (3.18)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu_i \geq R, \quad (3.19)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.20)$$

$$y_t \geq 0 \quad t = 1, 2, 3, \dots, T \quad (3.21)$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.22)$$

Η παραπάνω μοντελοποίηση βοηθάει στην εξέταση μεγαλύτερου αριθμού χρεογράφων λόγω της ευκολίας στην επίλυση του γραμμικού προβλήματος καθώς επίσης και στην πρόσθεση περιορισμών που το κάνουν ρεαλιστικότερο [2]

3.5 Μοντέλο Πολλαπλών Αποκλίσεων

Το μοντέλο MAD που παρουσιάστηκε προηγουμένως παρά την απλότητά του και το χαμηλό υπολογιστικό του φόρτο, δεν "τιμωρεί" μεγάλες αποκλίσεις που τυχόν παρουσιάζονται [31]. Έτσι προτάθηκε μια διαφορετική μορφή του μοντέλου, η οποία θα λαμβάνει υπόψιν της τέτοιες αποκλίσεις και θα προσφέρει καλύτερη μοντελοποίηση στην επιλογή αποφυγής του κινδύνου. Η επέκταση αυτή ονομάστηκε m-MAD όπου ως m συμβολίζεται το πλήθος των αποκλίσεων ανώτερης τάξης που λαμβάνονται υπόψη για τη μοντελοποίηση του επενδυτικού κινδύνου. Έτσι σαν μοντελοποίηση στην επέκταση του προηγούμε-

νου μοντέλου διαμορφώνεται το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα:

$$\min \sum_{j=1}^m z_j \lambda_j, \quad (3.23)$$

$$\text{Y.Π} \quad z_0 \geq R \quad (3.24)$$

$$z_0 - \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = 0, \quad (3.25)$$

$$-Tz_j + \sum_{t=1}^T d_{tj} = 0 \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.26)$$

$$d_{tj} + \sum_{k=0}^{j-1} z_k + \sum_{i=1}^n r_{it} w_i \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.27)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.28)$$

$$d_{tj} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T, \quad j = 1 \dots m \quad (3.29)$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \dots n \quad (3.30)$$

Στη διατύπωση αυτή, η μεταβλητή απόφασης z_0 ορίζει την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, η μεταβλητή z_1 τη μέση απόλυτη αρνητική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου σε σχέση με την αναμενόμενη απόδοσή του, ενώ οι υπόλοιπες μεταβλητές $z_2, \dots, z_m$ αντιστοιχούν σε υψηλότερης τάξης αρνητικές αποκλίσεις σε σχέση με την αναμενόμενη απόδοση και την απόκλιση z_1 :

$$z_j = E \left\{ \max \left\{ \mu_i - \sum_{k=1}^{j-1} z_k - R_p, 0 \right\} \right\}, \quad j = 2, \dots, m$$

όπου ως E συμβολίζεται η μέση τιμή και ως R_p η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου.

Αυτές οι αποκλίσεις διαφορετικών τάξεων σταθμίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστές $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, ανάλογα με σημαντικότητα που τους αποδίδει ο επενδυτής.

Σε σχέση με το μοντέλο MAD, η παραπάνω μοντελοποίηση έχει μεγαλύτερες διαστάσεις και υπολογιστική πολυπλοκότητα, αλλά επειδή το μοντέλο βασίζεται σε μια διατύπωση γραμμικού προγραμματισμού, παραμένει υπολογιστικά απλούστερο σε σχέση με τετραγωνικά μοντέλα που βασίζονται στη διακύμανση και την ήμι-διακύμανση [23]

3.6 Μέση Διαφορά Gini

Το 1982 παρουσιάστηκε ένα μοντέλο βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων, στο οποίο ως μέτρο κινδύνου χρησιμοποιείται η μέση διαφορά Gini (Gini mean difference, GMD) [45],

με σκοπό αφενός την δημιουργία ενός γραμμικού μοντέλου έναντι του Markowitz καθώς επίσης και να αντιμετωπίσει το πρόβλημα όπου το αποτελεσματικό σύνολο μπορεί να εμπεριέχει χαρτοφυλάκια που χαρακτηρίζονται από χαμηλό ρίσκο αλλά και πολύ χαμηλές αποδόσεις [23]. Το μοντέλο αυτό λαμβάνει σαν μέτρο κινδύνου το μέση διαφορά του Gini η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\frac{1}{2} \sum_{t'=1}^T \sum_{t''=1}^T |y_{t'} - y_{t''}|$$

Είναι αντιληπτό ότι το μοντέλο βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων που σχηματίζεται είναι:

$$\min \sum_{t'=1}^T \sum_{t'' \neq t'}^T d_{t't''}, \quad (3.31)$$

$$\text{Υ.Π} \quad d_{t't''} \geq 0, \quad t', t'' = 1, 2, \dots, T, \quad t' \neq t'', \quad (3.32)$$

$$d_{t't''} \geq \sum_{i=1}^n (r_{it'} - r_{it''}) w_i, \quad t', t'' = 1, 2, \dots, T, \quad t' \neq t'', \quad (3.33)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.34)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu_i \geq R \quad (3.35)$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \dots n \quad (3.36)$$

Το θετικό που παρουσιάζει το παρόν μοντέλο σε σχέση με το μοντέλο του Markowitz είναι εναλλαξιμότητα: η GMD έχει δύο συντελεστές συσχέτισης να σχετίζονται με αυτήν, και η μεταξύ τους διαφορά είναι ευαίσθητη στην εναλλαξιμότητα μεταξύ οριακών κατανομών [45]. Όμως λόγω της φύσης της μέσης διαφοράς του Gini ο υπολογιστικός φόρτος της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων με αυτή τη μέθοδο είναι αυξημένος [22].

3.7 Μοντέλο Minimax

Το τελευταίο από τα κύρια μοντέλα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου χρησιμοποιεί ένα minimax κριτήριο επιλογής [46], το οποίο ορίζεται από τη χειρότερη απόδοση του χαρτοφυλακίου σε μια σειρά χρονικών περιόδων. Η πρακτική σημασία αυτού μέτρου είναι ότι ένας επενδυτής επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τη χειρότερη πιθανή απόδοση του χαρτοφυλακίου, δηλαδή να περιορίσει τη μέγιστη απώλεια που μπορεί να συμβεί. Το αντίστοιχο

πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου παρουσιάζεται παρακάτω ως [41]:

$$\max \quad M_P, \quad (3.37)$$

$$\text{Υ.Π} \quad \sum_{i=1}^n w_i r_{ti} \geq M_P, \quad (3.38)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (3.39)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu_i \geq R \quad (3.40)$$

$$w_i \geq 0, \text{ για } i = 1..n \quad (3.41)$$

Η απλότητα του μοντέλου, το κάνει εύκολα επιλύσιμο σαν γραμμικό πρόβλημα και είναι εύκολο να προστεθούν περαιτέρω περιορισμοί οι οποίοι θα δώσουν ρεαλισμό στις αναλύσεις [46].

3.8 Συμπληρωματικά Μοντέλα

Σε πραγματικές συνθήκες όπου οι επενδυτές εξετάζουν χαρτοφυλάκια που πληρούν διαφορετικά ρεαλιστικά χαρακτηριστικά όπως ελάχιστες παρτίδες συναλλαγών και κόστος των συναλλαγών, η επιλυσιμότητα Γραμμικών μοντέλων γίνεται μια κρίσιμη πτυχή. Ακόμη και αν η λύση των τετραγωνικών μοντέλων του Markowitz και το Semi-Variance έχει αντιμετωπιστεί για περιορισμούς πλήθους μετοχών και ελαχίστων παρτίδων συναλλαγών [9] [2], η υπολογιστική πρόκληση για την επίλυση των μεγάλων πραγματικών προβλημάτων χαρτοφυλακίου δικαιολόγησε μια μακρά παράδοση στη βιβλιογραφία του μικτού αέριου προγραμματισμού για επιλογή χαρτοφυλακίου με πραγματικά χαρακτηριστικά [6] [10] [18] [19] [25]. Τα μοντέλα που θα παρουσιαστούν παρακάτω, ουσιαστικά επεκτείνουν τα βασικά μοντέλα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου που παρουσιάστηκαν παραπάνω και ως συνέπεια έχουν την αύξηση σε πολυπλοκότητα και σε δυσκολία επίλυσης. Όμως οι αναλύσεις που πραγματοποιούν είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα και οι παράμετροί τους μπορούν να προσαρμοστούν ανάλογα με τη χρηματαγορά και τις απαιτήσεις του επενδυτή. Οι περιορισμοί που θα παρουσιαστούν είναι :

- Περιορισμοί πληθυσμού μετοχών. Ο επενδυτής επιλέγει το μέγιστο αριθμό μετοχών που θέλει να επενδύσει.
- Περιορισμός ελαχίστων παρτίδων συναλλαγών. Ο επενδυτής ουσιαστικά στρογγυλοποιεί τα ποσοστά που επενδύει, λόγω περιορισμών της χρηματαγοράς.
- Περιορισμοί επιβάρυνσης συναλλαγών. Ορισμένες χρηματαγορές έχουν ορίσει δια-

φορετική προμήθεια συναλλαγής για διαφορετικά επενδύόμενα ποσά, παράμετρος που ο επενδυτής πρέπει να συνυπολογίσει σε κάθε αναπροσαρμογή ενός χαρτοφυλακίου που ήδη διαθέτει.

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικότερα το κάθε ένα από αυτά τα συμπληρωματικά μοντέλα ξεχωριστά.

3.8.1 Πλήθος χρεογράφων σε ένα χαρτοφυλάκιο

Μία από τις βασικές υποθέσεις της θεωρίας χαρτοφυλακίου είναι ότι οι επενδυτές μπορούν να έχουν στην κατοχή τους καλά διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια. Ωστόσο, υπάρχουν ενδείξεις ότι οι επενδυτές συνήθως κατέχουν μόνο ένα μικρό αριθμό χρεογράφων. Οι ατέλειες της αγοράς όπως είναι το σταθερό κόστος των συναλλαγών παρέχουν μία από τις πιθανές εξηγήσεις για την επιλογή των ελάχιστα διαφοροποιημένων χαρτοφυλακίων [40]. Επιπλέον η ανάγκη να αποφευχθεί το κόστος της παρακολούθησης και εκ νέου στάθμισης του χαρτοφυλακίου οδηγεί τους επενδυτές στην κοινή πρακτική του περιορισμού του αριθμού των τίτλων (πληθυσμός χρεογράφων χαρτοφυλακίου) που μπορεί να επιλεγεί σε ένα χαρτοφυλάκιο. Περιορισμός Ο περιορισμός για το πλήθος των χρεογράφων σε ένα χαρτοφυλάκιο μπορεί να εκφραστεί είτε ως αυστηρή ισότητα ή ως ανισότητα επιβάλλοντας ότι ο αριθμός των επιλεγμένων τίτλων δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από ένα προκαθορισμένο αριθμό. Η πρόσθεση του παραπάνω περιορισμού γίνεται σε όλα τα προαναφερθέντα μοντέλα προσθέτοντας μια μεταβλητή x_i που υπόκειται στους παρακάτω περιορισμούς :

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq k, \quad (3.42)$$

$$x_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad (3.43)$$

$$l_i x_i \leq w_i \leq u_i x_i \quad (3.44)$$

Η μεταβλητή x_i είναι όπως φαίνεται μια δυαδική μεταβλητή η οποία δείχνει ουσιαστικά αν συμμετέχει η μετοχή στο χαρτοφυλάκιο. Το k υποδεικνύει τον μέγιστο αριθμό επιθυμητών μετοχών ενώ ως l_i και u_i συμβολίζονται τα κάτω και άνω όρια, αντίστοιχα, του ποσοστού συμμετοχής w_i του χρεογράφου. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι ο παραπάνω περιορισμός αποτελεί μια συνέχεια του περιορισμού ελάχιστης συμμετοχής, όπως αυτός αναπτύχθηκε από τους Beale και Forrest [16], δηλαδή προσθέτοντας τους μόνο τους δύο τελευταίους περιορισμούς .

3.8.2 Προκαθορισμένες μονάδες συναλλαγών

Σε κάθε χρηματιστηριακή αγορά, οι συναλλαγές πραγματοποιούνται σε προκαθορισμένες μονάδες (τεμάχια) κάθε χρεογράφου. Αυτοί οι περιορισμοί είναι συνήθεις απαιτήσεις συναλλαγών πράγμα που σημαίνει ότι η επένδυση σε ένα χρεόγραφο πρέπει να εκφράζεται ως πολλαπλάσιο μιας προκαθορισμένης μονάδας συναλλαγής. Η χρηματική αξία κάθε μονάδας συναλλαγών εκφράζεται ως ποσοστό της αξίας ενός χαρτοφυλακίου [16] έτσι ώστε η σύνθεση του χαρτοφυλακίου (ποσοστά συμμετοχής των χρεογράφων σε αυτό) να ορίζεται βάσει αυτών των ποσοστιαίων αναλογιών. Επιπλέον ο περιορισμός του προϋπολογισμού γίνεται « ελαστικός » με εισάγοντας μεταβλητές απόκλισης . Οι μεταβλητές αυτές συμβολίζονται ως ϵ^+ και ϵ^- , που ελαχιστοποιούνται, ώστε ο περιορισμός του προϋπολογισμού να ξεφεύγει όσο το δυνατόν λιγότερο, στην βέλτιστη λύση [16], δηλαδή σε περίπτωση που κάποιος έχει να κάνει με ποσοστά συμμετοχής, αυτά να αθροίζονται στο 1. Για να γίνει κάτι τέτοιο, οι μεταβλητές απόκλισης θα πρέπει να έχουν πολύ μικρές τιμές [23]. Σε όλα τα μοντέλα ανεξαιρέτως το ποσοστό συμμετοχής αλλάζει μορφή και εκφράζεται ως $w_i = f_i y_i$ όπου το f_i συμβολίζει τη μονάδα συναλλαγής για το χρεόγραφο i (ως ποσοστό του διαθέσιμου κεφαλαίου) και y_i είναι το πλήθος των μονάδων που αγοράζονται από το χρεόγραφο i . Έτσι όλα τα μοντέλα θα μετατραπούν και ο νέος γενικός τύπος μετά την πρόσθεση των μεταβλητών που προαναφέρθηκαν θα είναι:

$$\min \quad Z_{Lot} = f_{obj} + \gamma \epsilon^+ + \gamma \epsilon^-, \quad (3.45)$$

$$\text{Y.Π} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (3.46)$$

$$w_i - f_i y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.47)$$

$$w_i \in \mathcal{A}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.48)$$

$$\epsilon^+, \epsilon^- \geq 0, \quad (3.49)$$

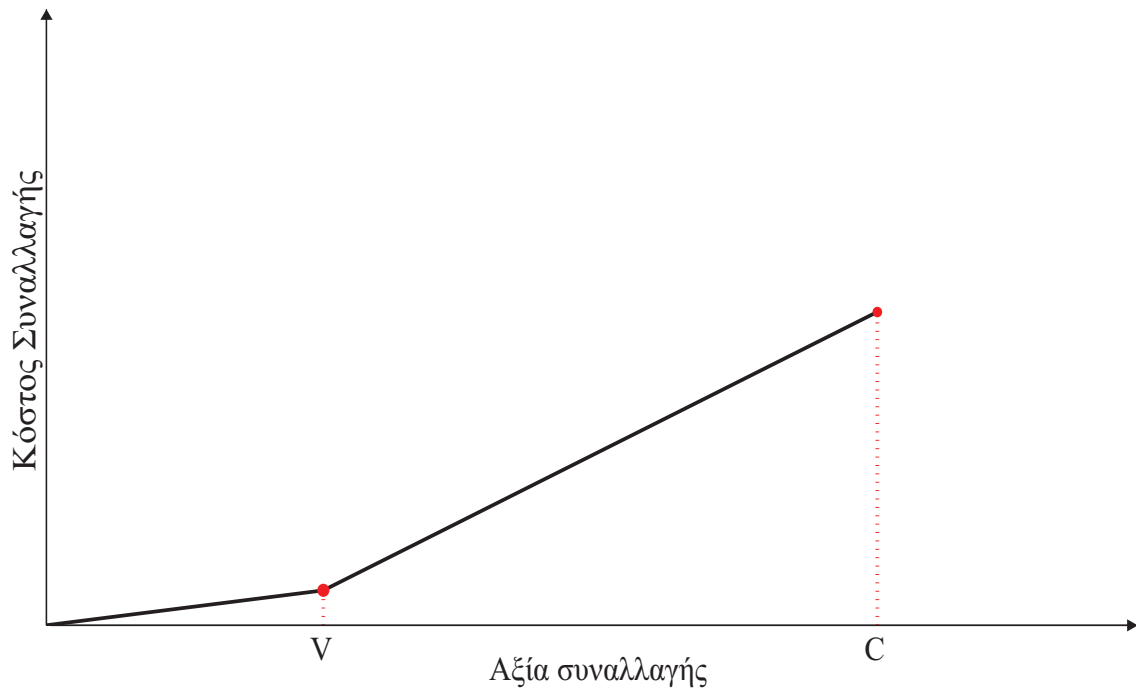
$$y_i \in Z^*, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.50)$$

όπου ως f_{obj} συμβολίζεται η αντικειμενική συνάρτηση ενός από τα κύρια μοντέλα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων που αναλύθηκε προηγούμενα και $\mathcal{A}$ είναι το αντίστοιχο σύνολο των εφικτών λύσεων.

3.8.3 Κόστος συναλλαγών

Η βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου λαμβάνοντας υπόψη το κόστος των συναλλαγών στοχεύει στην ελαχιστοποίηση του αθροίσματος του κόστους των συναλλαγών και του κινδύνου. Μόλις ένα υποσύνολο των τίτλων είναι επιλεγμένο από τον επενδυτή, οι σχετικές δαπάνες υπολογίζονται εύκολα. Το έργο του μοντέλου αυτού είναι να καθορίσει το υποσύνολο των χαρτοφυλακίων το οποίο ελαχιστοποιεί τα έξοδα αυτά [5]. Διαισθη-

τικά, εάν ένα κόστος συναλλαγής για ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο είναι πολύ μεγάλο, μπορεί να μην είναι θετικό να αλλάξει η συμμετοχή του εν λόγω χρεογράφου στο χαρτοφυλάκιο. Εναλλακτικά, εάν το κόστος της συναλλαγής είναι αρκετά μικρό, μπορεί να είναι θετικό να πραγματοποιηθεί η αλλαγή ακόμη κι αν αυτό σημαίνει επιβάρυνση με το κόστος της συναλλαγής. Το πρόβλημα αυτό μπορεί ανάλογα τη μοντελοποίηση να οδηγήσει σε περίπλοκα τετραγωνικά προβλήματα με μεγάλες δυσκολίες επίλυσης τους. Εδώ θα παρουσιαστεί το πρόβλημα με το κόστος συναλλαγών να είναι γραμμικό, μορφή που είναι σαφώς πιο εύκολη σε επίλυση και ρεαλιστικότερη σε όρους πραγματικού χρόνου για τη διαχείριση χαρτοφυλακίου [13], [7]. Η μοντελοποίηση που υλοποιήθηκε βασίζεται στον καθορισμό του κόστους συναλλαγών μέσω μιας κατά τμήματα γραμμικής συνάρτησης, δηλαδή υποθέτουμε ότι το κόστος αλλάζει σε συγκεκριμένα σημεία-κατώφλια του όγκου συναλλαγών, όπως δείχνει το Σχήμα 3.1. Η υλοποίηση διατυπώνεται μαθηματικώς



Σχήμα 3.1: Μοντελοποίηση της συνάρτησης κόστους συναλλαγών

ως εξής:

$$TC = \begin{cases} s_1 \cdot t & 0 < t < V \\ s_1 \cdot V + s_2(t - V) & V < t < C \end{cases}$$

ως C συμβολίζεται το διαθέσιμο κεφάλαιο προς επένδυση, s_1 είναι το κόστος για συναλλαγές που η αξία τους δεν υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο V και s_2 είναι το κόστος για συναλλαγές μεγαλύτερης αξίας (τα κόστη συναλλαγών θεωρούνται ως ποσοστά επί της αξίας της συναλλαγής). Έτσι η συνολική μοντελοποίηση για τα προβλήματα με κό-

στος συναλλαγών είναι:

$$\min Z_{TC} = f_{obj} + \sum_{i=1}^n (s_{1i}c_{1i} + s_{2i}c_{2i}), \quad (3.51)$$

$$\text{Υ.Π} \quad z_i = c_{1i} + c_{2i} \quad (3.52)$$

$$z_i \geq w_i - w_{0i}, \quad (3.53)$$

$$z_i \geq w_{0i} - w_i, \quad (3.54)$$

$$w \in \mathcal{A} \quad (3.55)$$

$$0 \leq c_{1i} \leq V \quad (3.56)$$

$$0 \leq c_{2i} \leq C - V \quad (3.57)$$

όπου w_{0i} είναι το ποσοστό συμμετοχής της μετοχής i σε ένα χαρτοφυλάκιο που ήδη διαθέτει ο επενδυτής. Έτσι με την παραπάνω μοντελοποίηση το επιλύεται γρήγορα το πρόβλημα του κόστους συναλλαγών.

Κεφάλαιο 4

Υλοποίηση

Στοχος της διπλωματικής αυτής υπήρξε η υλοποίηση όλων των παραπάνω μοντέλων με τρόπο ώστε αυτά να μπορούν να δώσουν συνδυασμένα αποτελέσματα, δηλαδή όλα τα συμπληρωματικά μοντέλα που αναφέρθηκαν παραπάνω να μπορούν να συνδεθούν με όλα τα κύρια, αλλά και μεταξύ τους. Με αυτό το σκεπτικό δημιουργήθηκε ένα εργαλείο που θα μπορεί μέσα από πολλαπλά μοντέλα να αναλύσει τον κίνδυνο της αγοράς καθώς και να δώσει ευανάγνωστα στατιστικά και γραφήματα.

Όλα τα παραπάνω υλοποιήθηκαν σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB 2012b. Στην υλοποίηση χρησιμοποιήθηκαν ενδεικτικά δεδομένα από το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών για 118 μετοχές την περίοδο 3/1/2005 - 6/8/2009. Το σύστημα όμως που αναπτύχθηκε επιτρέπει στο χρήστη να χρησιμοποιήσει οποιαδήποτε άλλα δεδομένα από την Ελλάδα ή άλλες αγορές.. Τέλος θα πρέπει να αναφερθεί ότι έγινε η χρήση πρόσθετου επιλύτη γραμμικών και τετραγωνικών προβλημάτων, του Gurobi Optimizer 5.5.

4.1 Μοντελοποίηση

Τα προαναφερθέντα μοντέλα υλοποιήθηκαν σύμφωνα με τον τρόπο που ορίζεται στο manual του Gurobi Optimizer 5.5 για MATLAB, ο οποίος περιγράφεται μαθηματικά ως εξής :

$$\min \quad x'Qx + c'x \quad \text{Αντικειμενική Συνάρτηση} \quad (4.1\alpha')$$

$$\text{Υ.Π} \quad Ax \leq b_L \quad \text{Γραμμικοί Περιορισμοί} \quad (4.1\beta')$$

$$x'Q_c x + q'x \leq b_Q \quad \text{Τετραγωνικοί Περιορισμοί} \quad (4.1\gamma')$$

$$l \leq x \leq u \quad \text{Οριακοί Περιορισμοί} \quad (4.1\delta')$$

$$(4.1\epsilon')$$

οπου για τον κάθε όρο ισχύει:

- x , συμβολίζει το διάνυσμα των μεταβλητών
- Q , συμβολίζει τον πίνακα των μεταβλητών στο τετραγωνικό μέρος της αντικειμενικής συνάρτησης
- c , συμβολίζει το διάνυσμα των συντελεστών στο γραμμικό μέρος της αντικειμενικής συνάρτησης
- A , συμβολίζει τον πίνακα των συντελεστών στους γραμμικούς περιορισμούς
- b_L , συμβολίζει το διάνυσμα με τα δεξιά μέλη των γραμμικών περιορισμών
- q , συμβολίζει το διάνυσμα των μεταβλητών στο γραμμικό μέρος των τετραγωνικών περιορισμών
- Q_c είναι ο πίνακας με τους συντελεστές των μεταβλητών στο τετραγωνικό τμήμα των τετραγωνικών περιορισμών
- b_Q , συμβολίζει το διάνυσμα με τα δεξιά μέλη των τετραγωνικών περιορισμών
- l , συμβολίζει το διάνυσμα των κάτω ορίων για τις μεταβλητές απόφασης
- u , συμβολίζει το διάνυσμα των άνω ορίων για τις μεταβλητές απόφασης

Παρακάτω θα δοθεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα για τη την μορφοποίηση του κάθε πίνακα που περιγράφηκε παραπάνω. Για αυτό το σκοπό θα δούμε την υλοποίηση του μοντέλου MAD. Το διάνυσμα των μεταβλητών θα είναι $x = \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}$ όπου $w = (w_1, \dots, w_n)$ είναι το διάνυσμα με τα ποσοστά συμμετοχής των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο και $y = (y_1, \dots, y_T)$ είναι το διάνυσμα με τις αποκλίσεις των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου από τη μέση απόδοση. Ως παράδειγμα, θα εξεταστεί η περίπτωση των δύο μετοχών και τριών χρονικών περιόδων, δηλαδή ο πίνακας x θα γίνει $\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}'$. Έτσι όπως υποδεικνύει η εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης 3.16 το διάνυσμα c θα γίνει $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}'$ ώστε από πράξεις πινάκων να προκύψει το $y_1 + y_2 + y_3$. Με αντίστοιχο τρόπο σκέψης θα σχηματιστούν και οι υπόλοιποι, δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ r_{1,1} - \mu_1 & r_{1,2} - \mu_2 & 1 & 0 & 0 \\ r_{2,1} - \mu_1 & r_{2,2} - \mu_2 & 0 & 1 & 0 \\ r_{3,1} - \mu_1 & r_{3,2} - \mu_2 & 0 & 0 & 1 \\ r_{1,1} - \mu_1 & r_{1,2} - \mu_2 & -1 & 0 & 0 \\ r_{2,1} - \mu_1 & r_{2,2} - \mu_2 & 0 & -1 & 0 \\ r_{3,1} - \mu_1 & r_{3,2} - \mu_2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η τελευταία σειρά αποτελεί τον περιορισμό της ισότητας $w_1 + w_2 = 1$. Τέλος θα έχουμε τους πίνακες των άνω και κάτω ορίων οι οποίοι θα είναι :

$$l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} \text{inf} \\ \text{inf} \\ \text{inf} \\ \text{inf} \\ \text{inf} \\ \text{inf} \\ \text{inf} \\ \text{inf} \end{bmatrix}$$

όπου ως inf συμβολίζεται ότι δεν έχει η συγκεκριμένη μεταβλητή όριο. Επιπλέον θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο τύπος κάθε περιορισμού ορίζεται μέσω του ακόλουθου πίνακα:

$$sense = \begin{bmatrix} \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \\ = \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας για λόγους προγραμματιστικής ευκολίας προτιμήθηκε να έχει όλους τους τελεστές προς την ίδια κατεύθυνση και να αλλάζουν τα πρόσημα των A και b . Επιπλέον θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μορφοποίηση του κάθε μοντέλου γίνεται σε ξεχωριστή συνάρτηση για το κάθε ένα. Οι συναρτήσεις των περιορισμών πληθυσμού, των μονάδων συναλλαγής και κόστους συναλλαγών, είναι κοινές. Τέλος, δημιουργήθηκε κατάλληλη συνάρτηση επίλυσης η οποία αποθηκεύει τα δεδομένα που επιστρέφει σαν αποτελέσματα ο Gurobi Optimizer 5.5 και αλλάζει τον αριθμό της επιθυμητής απόδοσης κατάλληλα, ώστε να δημιουργηθούν πολλαπλά χαρτοφυλάκια.

4.2 Περιβάλλον Εργασίας

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για την δημιουργία ενός εργαλείου εξαγωγής αποτελεσμάτων με τρόπο εύχρηστο και αποτελεσματικό για τον απλό χρήστη, κρίθηκε απαραίτητο να σχεδιασθεί μια διεπαφή χρήστη-μηχανής. Έτσι, σύμφωνα με τις αρχές του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού και με τη χρήση του ενσωματωμένου εργαλείου της MATLAB, ονομαζόμενο GUIDE δημιουργήθηκε μια πλήρης εφαρμογή, με τις εξής

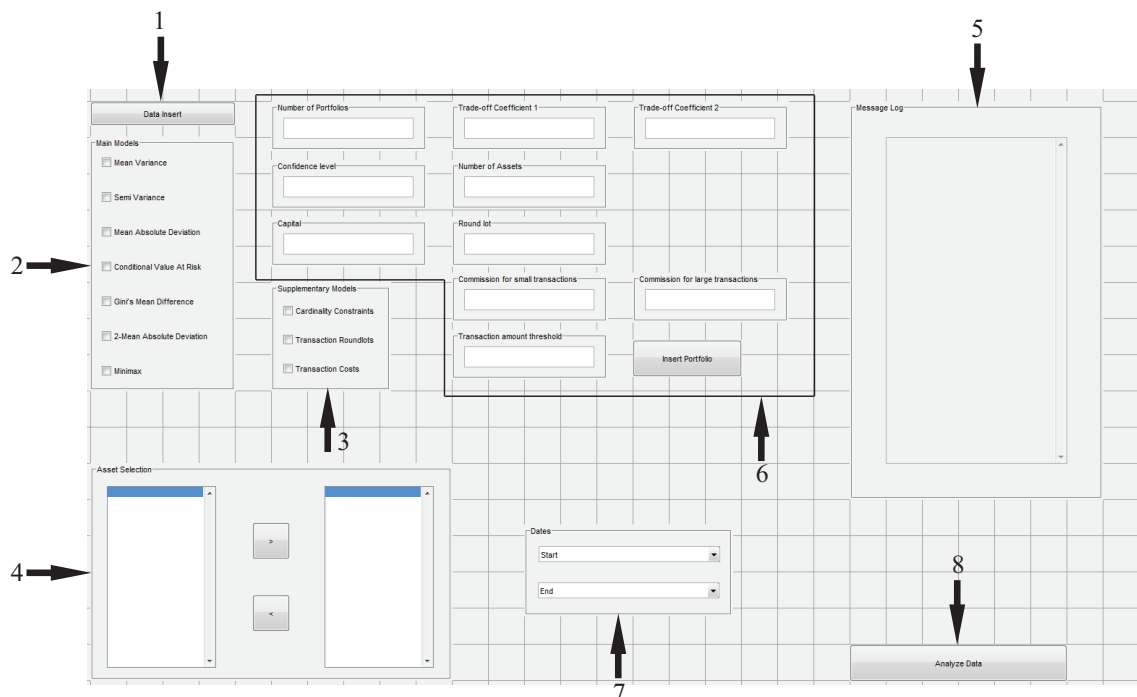
δυνατότητες:

- Επίλυση γραμμικών προβλημάτων ανάλυσης κινδύνου
- Μορφοποίηση δεδομένων Χρήστη, για καλύτερη ανάλυση
- Γραφική απεικόνιση αποτελεσμάτων
- Εξαγωγή στατιστικών ανά χαρτοφυλάκιο
- Πληροφόρηση χρήστη για κάθε μοντέλο
- Έλεγχος ορθότητας δεδομένων χρήστη
- Εξαγωγή των αποτελεσμάτων σε αρχεία Excel
- Χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων για μελλοντική ανάλυση
- Εξαγωγή ανάλυσης πορείας χαρτοφυλακίου μέσα στο χρόνο

4.3 Κατασκευή Περιβάλλοντος Εργασίας

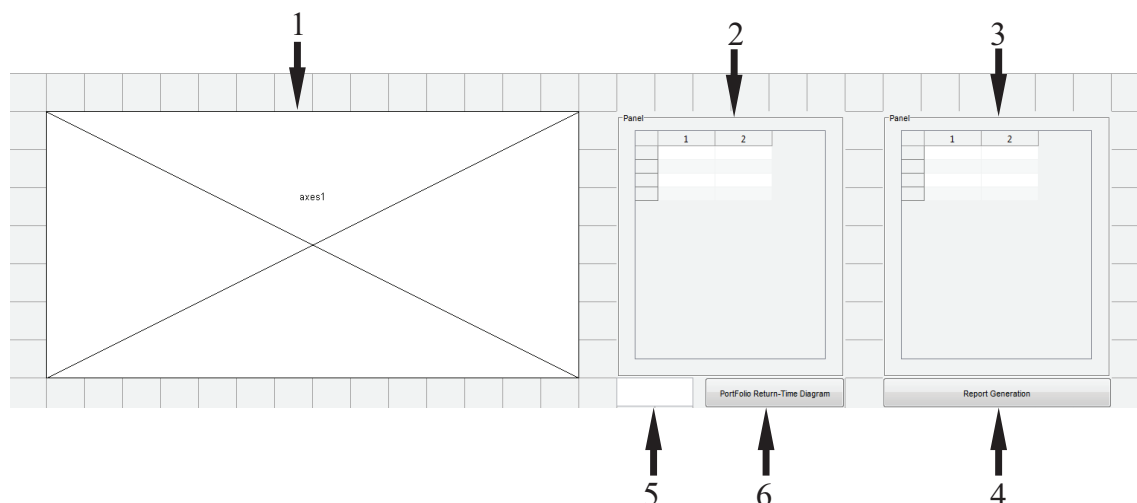
Οι παραπάνω λειτουργίες υλοποιούνται μέσα από τη χρήση πολλαπλών οθονών και κουμπιών που με κατάλληλο τρόπο εμφανίζονται στην οθόνη του χρήστη. Επίσης να σημειωθεί ότι όλες οι οθόνες είναι μεταβλητού μεγέθους και καλύτερη προσαρμογή σε μικρότερες οθόνες. Παρακάτω παρουσιάζεται η αρχική οθόνη κατασκευής της διεπαφής. Το Σχήμα 4.1 δείχνει αριθμημένα τα τμήματα από τα οποία αποτελείται το περιβάλλον εργασίας, πριν το χρησιμοποιήσει ο χρήστης, ουσιαστικά όλα τα τμήματα που είναι εμφανή και μη εμφανή πριν αρχίσει η διάδραση με το χρήστη. Απαριθμώντας τα τμήματα αυτά παρατηρείται :

1. Είσοδος δεδομένων μετοχών απο κατάλληλα διαμορφωμένο Excel.
2. Επιλογή κύριου μοντέλου
3. Επιλογή συμπληρωματικού μοντέλου
4. Τμήμα επιλογής επιθυμητών μετοχών
5. Τμήμα εμφάνισης πληροφοριών για κάθε μοντέλο
6. Τμήμα εισαγωγής παραμέτρων για μοντέλα
7. Τμήμα επιλογής επιθυμητών ημερομηνιών ανάλυσης.
8. Κουμπί εκτέλεσης ανάλυσης



Σχήμα 4.1: Οθόνη κατασκευής

Γύρω από αυτή την δομή φτιάχτηκε η διεπαφή με την οποία ο χρήστης εισάγει τα δεδομένα του στο σύστημα. Δημιουργήθηκαν δυο επιπλέον δομές, μια για την περίπτωση που ο χρήστης επιλέξει ένα μοντέλο για βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου, και μια για την περίπτωση που θα επιλέξει πάνω από ένα μοντέλο. Οι δομές αυτές παρουσιάζονται παρακάτω. Για το Σχήμα 4.2 τα αριθμημένα τμήματα δείχνουν τα εξής:

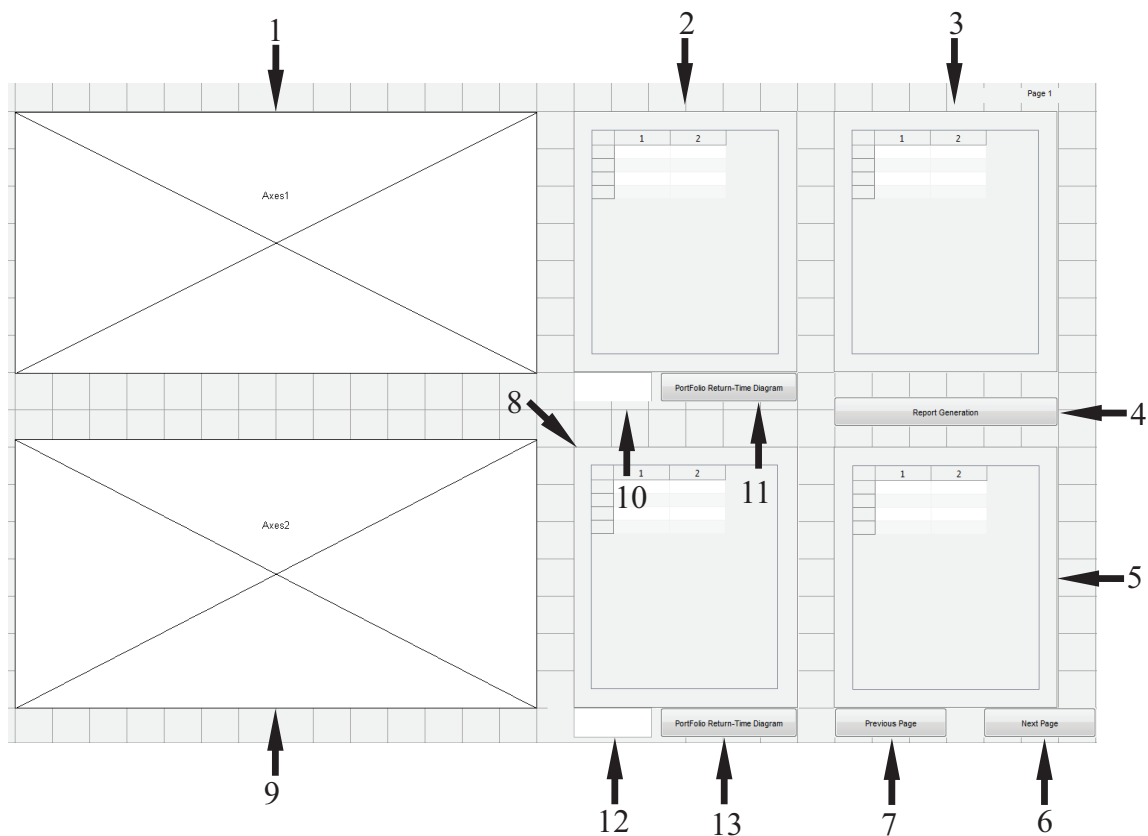


Σχήμα 4.2: Κατασκευή Οθόνης Αποτελεσμάτων 1

1. Γράφημα αποτελεσματικού ορίου

2. Πίνακας αποτελεσμάτων ανά χαρτοφυλάκιο
3. Πίνακας στατιστικών ανά χαρτοφυλάκιο
4. Κουμπί εξαγωγής αναφοράς
5. Πεδίο επιλογής χαρτοφυλακίων για ανάλυση πορείας χαρτοφυλακίου μέσα στο χρόνο
6. Κουμπί εξαγωγής ανάλυσης πορείας χαρτοφυλακίων μέσα στο χρόνο

Αντίστοιχη είναι και η εικόνα που παρουσιάζει η κατασκευή οθόνης αποτελεσμάτων για περισσότερα του ενός μοντέλα: Για το Σχήμα 4.3 τα αριθμημένα τμήματα δείχνουν τα εξής:



Σχήμα 4.3: Κατασκευή Οθόνης Αποτελεσμάτων 2

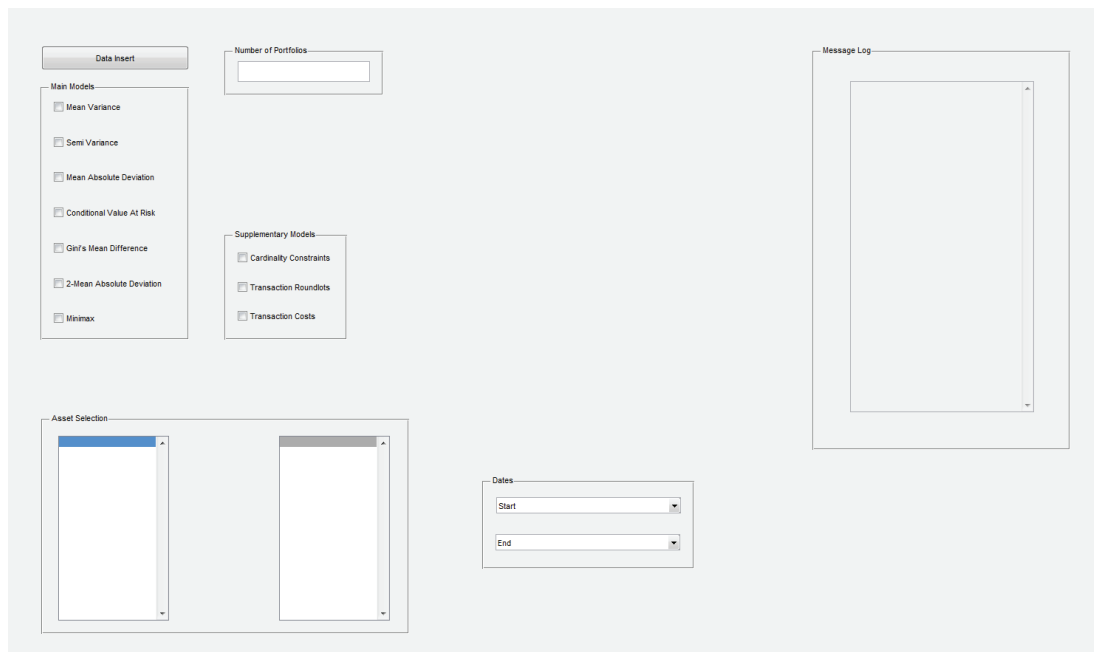
1. Γράφημα αποτελεσματικού ορίου πρώτου μοντέλου
2. Πίνακας αποτελεσμάτων ανά χαρτοφυλάκιο πρώτου μοντέλου
3. Πίνακας στατιστικών ανά χαρτοφυλάκιο πρώτου μοντέλου
4. Κουμπί εξαγωγής αναφοράς

5. Πίνακας στατιστικών ανά χαρτοφυλάκιο δεύτερου μοντέλου
6. Κουμπί για την εμφάνιση επόμενου ζεύγους αποτελεσμάτων
7. Κουμπί για την εμφάνιση προηγούμενου ζεύγους αποτελεσμάτων
8. Πίνακας αποτελεσμάτων ανά χαρτοφυλάκιο δεύτερου μοντέλου
9. Γράφημα αποτελεσματικού ορίου δεύτερου μοντέλου

Οι δυο διαφορετικές οθόνες αποτελεσμάτων δημιουργήθηκαν για αισθητικούς λόγους. Θα πρέπει βέβαια να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη μορφή δεν είναι αυτή που βλέπει ο χρήστης. Στο χρήστη εμφανίζονται μόνο οι παράμετροι των μοντέλων που έχει επιλέξει.

4.4 Παράδειγμα Χρήσης

Παρακάτω θα δοθεί ένα παράδειγμα για την περίπτωση του CVAR, ενώ θα γραφούν και για τα υπόλοιπα μοντέλα οι παράμετροι οι οποίες εμφανίζονται. Η οθόνη που βλέπει ο χρήστης φαίνεται στο Σχήμα 4.4 : Μετά την εισαγωγή των δεδομένων από το χρήστη



Σχήμα 4.4: Οθόνη Χρήστη

με το πάτημα του Data Insert και την επιλογή του Conditional Value at Risk καθώς και την επιλογή μετοχών και ημερομηνιών ανάλυσης, εμφανίζεται η οθόνη του Σχήματος 4.5. Όπως φαίνεται το παράθυρο του Confidence Level εμφανίστηκε στην οθόνη και ο χρήστης μπορεί να βάλει τιμή ανάμεσα στο 50 και το 99.9. Σε περίπτωση λάθους τιμής θα εμφανιστεί κατάλληλο μήνυμα.

Data Insert

Main Models

- ☐ Mean Variance
- ☐ Semi Variance
- ☐ Mean Absolute Deviation
- ☒ Conditional Value At Risk
- ☐ Gini's Mean Difference
- ☐ 2-Mean Absolute Deviation
- ☐ Minimax

Number of Portfolios
5

Confidence level
95

Supplementary Models

- ☐ Cardinality Constraints
- ☐ Transaction Roundlots
- ☐ Transaction Costs

Asset Selection

Left list: BOX, BVVDS, BYTE, DCH, DION, DOU, DOL, DOMIK, DROME, EEZ, EORA, EDRP, EEEK, ELBA, ELBE, ELGEX, ELKA, FLIAKTVR

Right list: ABAJ, AGRI, AGRAS, ALAPIS, ALFA, ALKAT, ALKO, ALMY, ALTER, ANEK, ARBA, ASKO, ASPT, ATT, AXON, BARGIA, BOKA, BOUT

Dates

Start: 3/1/2005
End: 9/9/2005

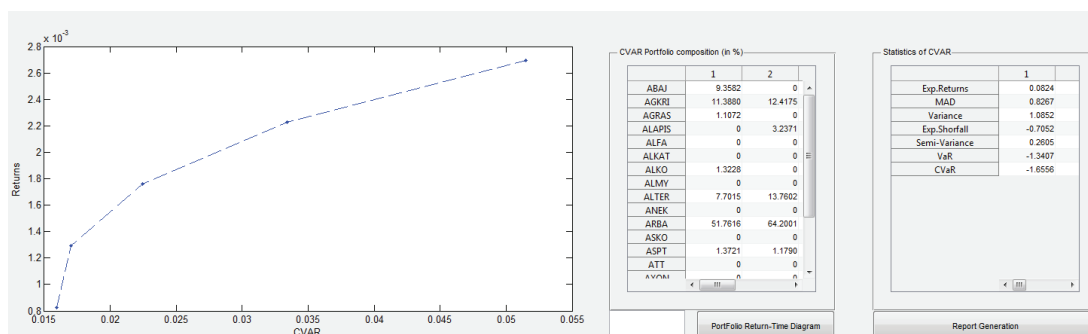
Message Log

Value-at-Risk (VaR) is the maximum expected loss at a user-defined confidence level. Conditional VaR (CVaR) is the conditional expected loss for losses that exceed VaR. The confidence level used by the model is defined as a number between 50 and 99.9 (50-99.9% confidence level).

Analyze Data

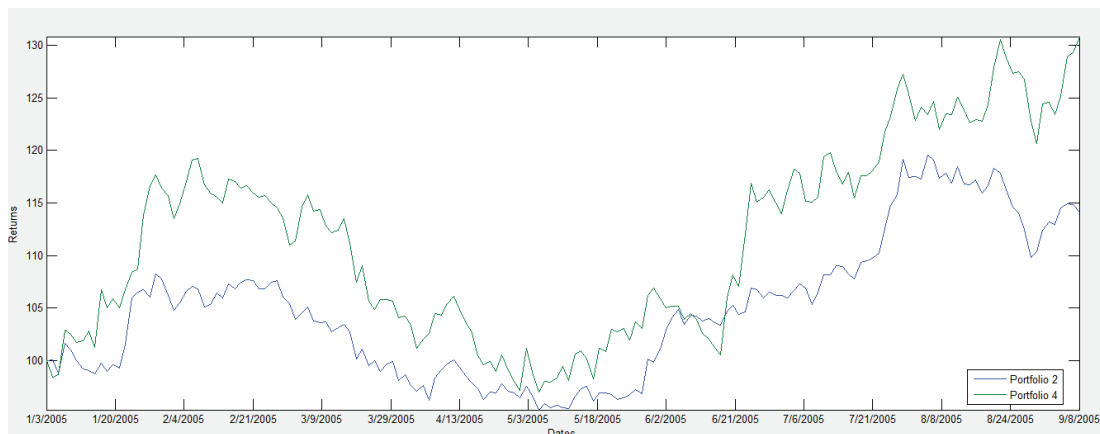
Σχήμα 4.5: Οθόνη Χρήστη μετά την εισαγωγή δεδομένων

Αφού επιλεγούν σωστές παράμετροι και πατηθεί το κουμπί Analyze Data εμφανίζεται η Οθόνη Αποτελεσμάτων 1 με την μορφή του Σχήματος 4.6 Αν ο χρήστης επιλέξει να

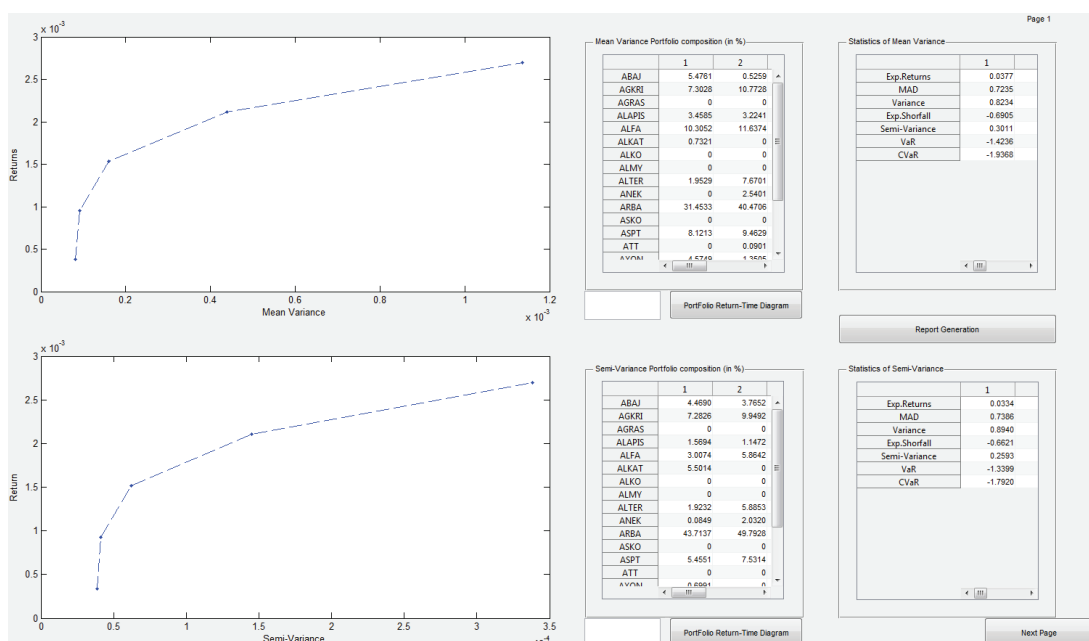


Σχήμα 4.6: Οθόνη Αποτελεσμάτων 1

κάνει μια ανάλυση κάποιων χαρτοφυλακίων μέσα στο χρόνο μπορεί να πληκτρολογήσει τον αριθμό των επιθυμητών χαρτοφυλακίων και να πατήσει και να πατήσει το κατάλληλο κουμπί. Έτσι θα εμφανιστεί το γράφημα 4.4, που εδώ εφαρμόστηκε για τα χαρτοφυλακία 2,4. Τέλος σε περίπτωση που ο χρήστης επιλέξει πάνω από 1 μοντέλο, η τα αποτελέσματα εμφανίζονται μέσω της οθόνης που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.8. Αν πατηθεί το Next θα συνεχιστεί η εμφάνιση αποτελεσμάτων, και για τα υπόλοιπα μοντέλα που έχει επιλέξει ο χρήστης. Τέλος θα πρέπει να αναφερθεί η δυνατότητα εξαγωγής αποτελεσμάτων σε Excel. Έτσι πατώντας το κουμπί Report Generation, μπορεί να δημιουργηθεί πλήρως αυτοματοποιημένα ένα αρχείο με το όνομα Report, σε μορφή Excel. Στην ενότητα 4.5 θα παρουσιασθεί πλήρως η μορφή της εξαγόμενης από το σύστημα αναφοράς.



Σχήμα 4.7: Γράφημα Πορείας Χαρτοφυλακίων μέσα στο χρόνο



Σχήμα 4.8: Παρουσίαση αποτελεσμάτων πολλαπλών μοντέλων

4.5 Μορφή Δεδομένων Εισαγωγής

Για τη χρήση των μοντέλων βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων, απαιτούνται δεδομένα για τις τιμές των μετοχών, τα οποία μπορεί να συλλέξει εύκολα ο χρήστης από διάφορες πηγές μέσω του διαδικτύου. Τα απαιτούμενα δεδομένα οργανώνονται σε κατάλληλα αρχεία Excel, ως εξής:

- Αρχείο Excel με την τιμή κλεισίματος της μετοχής, το όνομα της και την ημερομηνία στην οποία έκλεισε στη συγκεκριμένη τιμή.
- Αρχείο Excel, γραμμένο από το χρήστη, με το όνομα της μετοχής και το ποσοστό συμμετοχής της στο χαρτοφυλάκιο. Το αρχείο αυτό χρησιμοποιείται στην πε-

ρίπτωση όπου ο χρήστης θέλει να εξετάσει την αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου του μέσω του μοντέλου που λαμβάνει υπόψη το κόστος συναλλαγών.

Σχήμα 4.9: Μορφή εισαγωγής δεδομένων στο σύστημα

Τα τμήματα περιέχουν, όπως υποδεικνύει η αρίθμηση

1. Ημερομηνία με την μορφή dd/mm/yyyy, αλλά και άλλες μορφές ημερομηνίας είναι αποδεκτές από το σύστημα.
2. Ονόματα μετοχών, όπως αυτές παρουσιάζονται στο Χρηματιστήριο.
3. Τιμές κλεισίματος ανά μετοχή ανά ημέρα.

Το δεύτερο είδος αρχείου εισαγωγής δεδομένων, το αρχείο που έγραψε ο χρήστης, έχει την μορφή του Σχήματος 4.10

	A	B
1	ALAPIS	10
2	ALFA	20
3	ALKAT	30

Σχήμα 4.10: Μορφή εισαγωγής Χαρτοφυλακίου στο σύστημα

Οι αριθμημένες περιοχές υποδεικνύουν:

1. Τα ονόματα των μετοχών του Χαρτοφυλακίου
2. Το % ποσοστό συμμετοχής της αντίστοιχης μετοχής στο Χαρτοφυλάκιο

Τέλος η μορφή της αναφοράς που εξάγει το σύστημα και μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί από το χρήστη για περαιτέρω αναλύσεις φαίνεται στο Σχήμα 4.11 Τα τμήματα στα οποία

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1		Mean Variance					Semi-Variance					Mean Absolute Deviation					Gini's Mean Difference				
2	ABAI	5,476057	0,525941	0	0	0	4,468954	3,765185	0	0	0	6,567229	0	0	0	0	4,689965	0,891944	0	0	0
3	AGRI	7,302798	0,777276	15,28841	22,27523	0	7,282552	9,949248	11,32111	12,71387	0	6,496136	12,68662	9,402103	6,142503	0	6,080324	10,17384	12,46667	12,98927	0
4	AGRS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	ALAPIS	3,458467	3,224132	0	0	0	1,569362	1,147162	0,211652	0	0	2,689637	2,140146	0,999358	0	0	3,210077	2,247936	0	0	0
6	ALFA	10,30518	11,63738	0,366722	0	0	3,007432	5,864163	0	0	0	9,717206	4,862561	0	0	0	10,09503	10,48115	0,602792	0	0
7	ALKA	0,732119	0	0	0	0	5,301364	0	0	0	0	0,503115	0	0	0	0	2,144115	0	0	0	0
8	ALKO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	ALMY	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,073357	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	ALTER	1,95293	7,670067	21,282	54,60822	100	1,923234	5,885284	24,62988	57,93823	100	3,140693	5,752751	27,74883	61,11788	100	2,144315	7,024506	22,88722	57,73137	100
11	ANEK	0	2,540107	0	0	0	0,084914	2,032019	0	0	0	4,72457	5,567942	0,311817	0	0	0,929598	2,834871	0	0	0
12	ARBA	31,45326	40,47061	48,87113	11,00811	0	43,71369	49,79281	55,01114	23,97203	0	30,40511	43,34982	49,27831	17,67785	0	32,12215	42,15721	50,33432	19,05821	0
13	ASKO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	ASPT	8,12128	9,462863	0	0	0	5,455053	7,531449	0	0	0	8,16201	7,849904	2,348345	0	0	8,210062	9,753617	0	0	0
15	ATT	0	0,090092	13,30045	12,10752	0	0	0	4,277255	5,375856	0	0	3,654182	8,556972	15,06177	0	0	0	11,28595	10,22115	0
16	AXON	4,574942	1,350509	0	0	0	0,699108	0	0	0	0	4,808203	1,535018	0	0	0	4,345249	1,287953	0	0	0
17	BARDIA	9,593288	0	0	0	0	8,508775	0,659719	0	0	0	8,707193	0	0	0	0	9,617457	0	0	0	0
18	BIOKA	11,76004	11,14167	0,891144	0	0	9,473862	11,48605	4,548667	0	0	10,44516	11,5277	1,354265	0	0	11,96162	11,69914	2,420826	0	0
19	BIOT	1,791758	0	0	0	0	2,696186	0	0	0	0	0,95783	0	0	0	0	0,592003	0	0	0	0
20	BIOXX	0,299412	0	0	0	0	2,97889	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	BOSYS	3,159783	1,113475	0	0	0	2,636564	1,886802	0	0	0	2,673893	0	0	0	0	3,858042	1,447838	0	0	0
22																					
23	Exp.Return	0,037663	0,095639	0,153602	0,211565	0,269529	0,033437	0,09246	0,151483	0,210506	0,269529	0,044466	0,100732	0,156997	0,213263	0,269529	0,03554	0,094037	0,152533	0,211032	0,269529
24	MAD	0,72347	0,757164	0,971887	1,463816	2,167033	0,738569	0,759708	0,95644	1,422553	2,167033	0,714558	0,757723	0,975642	1,443482	2,167033	0,720866	0,753166	0,958908	1,426748	2,167033
25	Variance	0,823435	0,926687	1,609195	4,413542	11,43441	0,894022	0,955636	1,638036	4,451868	11,43441	0,838805	0,979365	1,771419	4,74884	11,43441	0,829683	0,922887	1,59892	4,450345	11,43441
26	Exp.Short	-0,6905	-0,68112	-0,55356	-0,29754	-0,17083	-0,66206	-0,68979	-0,59292	-0,3152	-0,15592	-0,71411	-0,68998	-0,57753	-0,28952	-0,19779	-0,67017	-0,64564	-0,55342	-0,29179	-0,17495
27	Semi-Vari	0,301093	0,350539	0,486094	0,635296	0,804786	0,25932	0,315641	0,426177	0,657063	0,85983	0,326668	0,383236	0,48118	0,646801	0,792759	0,310727	0,37333	0,506866	0,6866	0,815974
28	Var	-1,42359	-1,42292	-1,60331	-2,63954	-4,36032	-1,39889	-1,34174	-1,53295	-2,68506	-4,36032	-1,36049	-1,31309	-1,73347	-2,96474	-4,36032	-1,01727	-0,73733	-0,506866	-0,6866	-0,815974
29	CVaR	-1,93677	-1,86044	-1,70617	-1,12044	-0,49873	-1,792	-1,75619	-1,17354	-0,75769	-0,38112	-1,98451	-1,84697	-1,37316	-1,19139	-0,57512	-1,96779	-1,88153	-1,75821	-1,07289	-0,42773

Σχήμα 4.11: Μορφή εξαγόμενης αναφοράς

χωρίζεται αναφορά, όπως διακρίνονται στο Σχήμα 4.11

1. Τα ονόματα των επιλεγμένων μετοχών
2. Τα ονόματα των επιλεγμένων μοντέλων
3. Τα ποσοστά συμμετοχής ανά Χαρτοφυλάκιο ανά μοντέλο
4. Τα στατιστικά ανά Χαρτοφυλάκιο

Τα στατιστικά τα οποία εγγράφονται στην αναφορά είναι:

- Αναμενόμενη απόδοση ανά χαρτοφυλάκιο
- Μέση Απόλυτη Απόκλιση ανά χαρτοφυλάκιο
- Διακύμανση ανά χαρτοφυλάκιο
- Αναμενόμενη απώλεια ανά χαρτοφυλάκιο
- Ήμι-διακύμανση ανά χαρτοφυλάκιο

- Αξία σε Κίνδυνο ανά χαρτοφυλάκιο
- Υπό συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο ανά χαρτοφυλάκιο

Πρέπει να σημειωθεί ότι η προεπιλεγμένη επιλογή επιπέδου εμπιστοσύνης είναι 95%. Σε περίπτωση που χρήστης επιλέξει το CVAR, τότε αυτό το στατιστικό θα αλλάξει επίπεδο και θα γίνει όσο επέλεξε ο χρήστης.

4.6 Αριθμητικά Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης

Στα πλαίσια της υπολογιστικής υλοποίησης μοντέλων βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων μετρήθηκαν και οι χρόνοι που κάθε ένα από τα μοντέλα χρειαζόταν για να εκτελέσει αναλύσεις. Ο υπολογιστής οποίος έγινε χρήση για να εξαχθούν τα παρακάτω δεδομένα είναι AMD Athlon® 64 X2 Dual Core Processor 5600+ στα 2.9 GHz με μνήμη RAM στα 6 GB και Windows 7® (x64) Professional Service Pack 1 και η ανάλυση έγινε με τιμές 50 μετοχών σε βάθος χρόνου 100 ημερών. Διερευνήθηκε το κάθε μοντέλο ξεχωρίστα και με τη χρήση των συμπληρωματικών μοντέλων. Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για τις παραμέτρους των μοντέλων είναι:

- CVAR, το επίπεδο εμπιστοσύνης ορίστηκε ως 95%.
- 2-MAD, οι τιμές των αποκλίσεων ορίστηκαν ως 0.75 και 0.25.
- Πλήθος χρεογράφων, στον περιορισμό του πλήθους χρεογράφων, ο μέγιστος αριθμός τους ορίστηκε ως πέντε
- Προκαθορισμένες μονάδες συναλλαγών, στον περιορισμό των προκαθορισμένων μονάδων το επενδύόμενο κεφάλαιο ορίστηκε ως 100000€ και 10 μονάδες ελάχιστης συναλλαγής.
- Κόστος συναλλαγών, σαν προμήθεια έως 15000€ ορίστηκε το 0.75% ενώ άνω αυτού του ποσού το 0.25%, ενώ ως χαρτοφυλάκιο χρήστη θεωρήθηκε το χαρτοφυλάκιο με την ελάχιστη διακύμανση από τη μέση απόκλιση .

Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα λαμβάνονται οι παρακάτω χρόνοι σε δευτερόλεπτα. Η πρώτη στήλη του πίνακα περιέχει τα αριθμητικά αποτελέσματα των μεθόδων χωρίς την χρήση κάποιου επιπλέον περιορισμού. Στη δεύτερη στήλη είναι τα αριθμητικά αποτελέσματα με την χρήση του περιορισμού του πλήθους χρεογράφων, στην τρίτη με τον περιορισμό των προκαθορισμένων μονάδων, ενώ στην τέταρτη με την χρήση του περιορισμού του κόστους συναλλαγών. Για χάριν συντομογραφίας οι περιορισμοί του πλήθους χρεογράφων, των προκαθορισμένων μονάδων συναλλαγών και του κόστους συναλλαγών

θα αναφερθούν ως CARD, LOT, TC αντίστοιχα. Επιπλέον ως NOC συμβολίζεται το πρόβλημα χωρίς κανένα επιπλέον περιορισμό, ενώ ως SUM συμβολίζεται το πρόβλημα που συνδυάζει όλα τα παραπάνω στοιχεία.

Πίνακας 4.1: Ενδεικτικοί χρόνοι επίλυσης των προβλημάτων βελτιστοποίησης

	NOC	CARD	LOT	TC	SUM
Mean Variance	0.010	0.103	0.004	0.014	0.018
Semi-Variance	0.046	0.509	0.012	0.047	0.013
MAD	0.026	3.887	0.019	0.029	0.139
2 MAD	0.027	3.574	0.031	0.031	0.079
Minimax	0.007	0.117	0.011	0.010	0.019
CVAR	0.008	0.015	0.008	0.012	0.015
GMD	0.259	221.984	7.324	0.232	19.734

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι το πρόβλημα που επιλύεται με τον περιορισμό του πλήθους των χρεογράφων είναι το πιο χρονοβόρο σε όλες τις περιπτώσεις ενώ το πρόβλημα που επιλύεται με τον περιορισμό των προκαθορισμένων μονάδων είναι πιο εύκολα επιλύσιμο ακόμη και απο το πρόβλημα χωρίς κανέναν επιπλέον περιορισμό. Επίσης, η μέση διαφορά του Gini (GMD) αποτελεί μακράν το πιο δυσεπίλυτο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Θα πρέπει να σημειωθεί όμως ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελεί και το πρόβλημα με το μεγαλύτερο αριθμό περιορισμών. Το μοντέλο Μέσου Διακύμανσης, αν και τετραγωνικό επιλύεται ταχύτερα από γραμμικά μοντέλα όπως το MAD και το 2 MAD. Αναφορικά με αυτά τα δύο μοντέλα (MAD και 2 MAD) είναι χαρακτηριστικό ότι οι χρόνοι επίλυσης τους είναι παραπλήσιοι αν και σε μερικές περιπτώσεις το 2 MAD επιλύεται ταχύτερα αν και εμπεριέχει περισσότερους περιορισμούς. Τέλος, η συνολική εικόνα είναι ότι παρότι επιλύθηκαν προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού, αυτό έγινε σε πολύ γρήγορο χρόνος. Μέγιστος χρόνος είναι τα 3 λεπτά και 41.9840 δευτερόλεπτα στη μέση διαφορά του Gini με ενεργό τον περιορισμό του πλήθους μετοχών .

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα και Μελλοντικές Κατευθύνσεις

Στην διπλωματική εργασία που παρουσιάστηκε παραπάνω έγινε χρήση διαφόρων μοντέλων βελτιστοποίησης για την ανάπτυξη ενός εργαλείου που θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί από μη εξειδικευμένους χρήστες καθώς και από ανθρώπους χωρίς ιδιαίτερη γνώση πάνω στη θεωρία χαρτοφυλακίου. Το εργαλείο αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για άτομα τα οποία θέλουν να κάνουν συγκριτικές μελέτες των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς επίσης και να σκιαγραφούν την συμπεριφορά αυτών μέσα από τη χρήση των επιπλέον περιορισμών. Γίνεται κατανοητό λοιπόν ότι το σύστημα αυτό είναι μια πρώτη βάση για την δημιουργία ενός πλήρους συστήματος υποστήριξης αποφάσεων για την βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων, εάν ενσωματωθεί σε αυτό κάποια πολυκριτήρια μέθοδος υποστήριξης αποφάσεων. Επιπλέον, αν προστεθεί η δυνατότητα αυτοματοποιημένης ανάκτησης δεδομένων μέσα από πηγές (ιστοσελίδες και βάσεις) που είναι διαθέσιμες στο διαδίκτυο καθώς και η δυνατότητα πραγματοποιήσεις εξειδικευμένων αναλύσεων μέσω προσομοιώσεων Monte Carlo, ο χρήστης θα μπορούσε να έχει στη διάθεσή του ένα ολοκληρωμένο εργαλείο για τη λήψη αποφάσεων σε θέματα βελτιστοποίησης επενδυτικών χαρτοφυλακίων.

Βιβλιογραφία

- [1] . Δούμπος. Μαθηματικός και Χρηματοοικονομικός Λογισμός. Σημειώσεις Μαθήματος, 2010.
- [2] E. Angelellia, R. Mansini, and G. Speranza. A comparison of MAD and cvar models with real features. *Journal of Banking and Finance*, Vol.32(No.7):1188–1197, July 2008.
- [3] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Thinking coherently. *Risk*, Vol.10:68–71, November 1997.
- [4] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk, 1998.
- [5] R. Baule. Optimal portfolio selection for the small investor considering risk and transaction costs. *Operational Research Spectrum*, Vol.32(No.32):61–76, January 2010.
- [6] D. Bertsimas, C. Darnell, R. Soucy, V. Otterloo, and C. Llc. Portfolio construction through mixed-integer programming at. *otterloo and company. Interfaces*, pages 49–66, 1999.
- [7] M. J. Best and J. Hlouskova. An algorithm for portfolio optimization with transaction costs. *Management Science*, 51:1676–1688, 2005.
- [8] C. Camere and M. Webber. Recent developments in modelling preferences: Uncertainty and ambiguity. *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol.5(No.4):325–370, October 1992.
- [9] J. T. Chang, N. Meade, J. E. Beasley, and Y. Sharaiha. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers and Operations Research*, page 1271, 2000.
- [10] L. Chiodi, R. Mansini, and G. Speranza. Semi-absolute deviation rule for mutual funds portfolio selection. *Annals of Operations Research*, Vol.124:245–265, 2003.

- [11] Z. Constantin and D. Michael. Multi-criteria decision aid in financial decision making: methodologies and literature review. *Multi-Criteria Decision Analysis*, Vol.11(No.12):167–186, 2002.
- [12] P. Embrechts, S. I. Resnick, and G. Samorodnitsky. Extreme value theory as a risk management tool. *North American Actuarial Journal*, pages 30–41, 1999.
- [13] F. J. Fabozzi, P. N. Kolm, D. A. Pachamanova, and S. M. Focardi. *Robust Portfolio Optimization and Management*. John Wiley and Sons, Inc., 2007.
- [14] M. Gilli and E. Këllezi. A global optimization heuristic for portfolio choice with var and expected shortfall. In *Computational Methods in Decision-making, Economics and Finance, Applied Optimization Series*, pages 167–183. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [15] C. Hurson and C. Zopounidis. On the use of multicriteria decision aid methods to portfolio selection. In J. Clímaco, editor, *Multicriteria Analysis*, pages 496–507. Springer Berlin Heidelberg, 1997.
- [16] N. J. Jobst, M. Horniman, C. Lucas, and G. Mitra. Computational aspects of alternative portfolio selection models in the presence of discrete asset choice constraints. *Quantitative Finance*, Vol.1(No.5):489–501, April 2001.
- [17] P. Jorion. *Value at Risk - The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill, New York, NY, 3rd edition, 2007.
- [18] H. Kellerer, R. Mansini, and M. G. Speranza. Selecting portfolios with fixed costs and minimum transaction lots. *Annals of Operations Research*, Vol.99(No.1-4):287–304, December 2000.
- [19] H. Konno and A. Wijayanayake. Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints. *Mathematical Programming*, Vol.89(No.2):233–250, January 2001.
- [20] H. Konno and H. Yamazaki. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Management Science*, Vol.37(No.5):519–531, May 1991.
- [21] Y. Kroll, H. Levy, and A. Rapoport. Experimental test of the separation theorem and the capital asset pricing model. *The American Economic Review*, Vol.78(No.3):500–519, June 1988.
- [22] R. Mansini, W. Ogryczak, and G. Speranza. On lp solvable models for portfolio selection. *Informatica*, Vol.14(No.1):37–62, 2003.

- [23] R. Mansini, W. Ogryczak, and G. Speranza. Twenty years of linear programming based portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, August 2013. Article in Press.
- [24] R. Mansini and G. Speranza. LP solvable models for portfolio optimization: A survey and comparison - part I, 2001.
- [25] R. Mansini and G. Speranza. An exact approach for portfolio selection with transaction costs and rounds. *IIE Transactions*, Vol.37(No.10):919–929, January 2005.
- [26] D. G. Maringer. *Portfolio Management with Heuristic Optimization (Advances in Computational Management Science)*. Springer, 2005.
- [27] H. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, Vol.7(No.1):77–91, March 1952.
- [28] H. Markowitz. The optimization of quadratic functions subject to linear constraints. www.rand.org, February 1955.
- [29] H. Markowitz, P. Todd, G. Xu, and Y. Yamane. Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm. *Annals of Operations Research*, Vol.45(No.1):307–317, December 1993.
- [30] H. M. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments (Cowles Foundation Monograph: No. 16)*. Yale University Press, 1968.
- [31] W. Michalowski and et al. Extending the mad portfolio optimization model to incorporate downside risk aversion, 1998.
- [32] J. Palmquist, S. Uryasev, and P. Krokmal. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints, 1999.
- [33] F. K. Reilly and K. C. Brown. *Investment Analysis and Portfolio Management (with Thomson ONE - Business School Edition and Stock-Trak Coupon)*. Cengage Learning, 2011.
- [34] R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, Vol.2:21–41, 2000.
- [35] W. F. Sharpe. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, Vol. 9(No. 2):277–293, January 1963.

- [36] W. F. Sharpe. A linear programming approximation for the general portfolio analysis problem. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.6(No.5):1263–1275, December 1971.
- [37] J. Spronk and W. G. Hallerbach. Financial modelling: where to go? with an illustration for portfolio management. *European Journal of Operational Research*, Vol.99(No.1):113–125, May 1997.
- [38] R. E. Steuer, Y. Qi, and M. Hirschberger. Portfolio selection in the presence of multiple criteria. In C. Zopounidis, M. Doumpos, and P. M. Pardalos, editors, *Handbook of Financial Engineering*, volume Vol.18, pages 3–24. Springer US, 2008.
- [39] B. K. Stone. A linear programming formulation of the general portfolio selection problem. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 8(No. 4):621–636, September 1973.
- [40] W. T. Using genetic algorithms to construct portfolios. In S. Satchell and A. Scowcroft, editors, *Advances in Portfolio Construction and Implementation*, chapter Chapter 6, page 135–160. Butterworth Heinemann, 2003.
- [41] K. L. Teo and X. Q. Yang. Portfolio selection problem with minimax type risk function, 1999.
- [42] P. Xidonas, G. Mavrotas, T. Krintas, J. Psarras, and C. Zopounidis. *Multicriteria Portfolio Management (Springer Optimization and Its Applications)*. Springer, 2012.
- [43] P. Xidonas, G. Mavrotas, and J. Psarras. Portfolio management within the frame of multiobjective mathematical programming: a categorized bibliographic study. *Operational Research-An International Journal*, Vol.8(No.1):21–41, 2010.
- [44] P. Xidonas, G. Mavrotas, and J. E. Psarras. A multicriteria methodology for equity selection using financial analysis. *Computers and Operational Research*, Vol.36(No.12):3187–3203, 2009.
- [45] S. Yitzhaki. Gini’s mean difference: a superior measure of variability for non-normal distributions. *METRON - International Journal of Statistics*, Vol.61(No.2):285–316, 2003.
- [46] M. R. Young. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. *Management Science*, Vol.44:173–183, 1998.