ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ»

Η ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Μεταπτυχιακή Διατριβή της Αντωνογιαννάκη Ελένης
Επιβλέπων Καθηγητής: Γεώργιος Εξαδάκτυλος

Εξεταστική επιτροπή:
Γ. Εξαδάκτυλος, Καθηγητής
Ζ. Αγιουτάντης, Καθηγητής
Κ. Προβιδάκης, Αν. Καθηγητής

ΧΑΝΙΑ 2004

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Για την πραγματοποίηση της παρούσας εργασίας θερμές ευχαριστίες στον Καθηγητή κ. Γεώργιο Εξαδάκτυλο που μου πρότεινε το υπόψιν θέμα και για την πολύτιμη βοήθειά του σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της διατριβής, καθώς επίσης και στους συνεργάτες του κο Βασίλειο Ασημίδη και κο Παντελή Λιόλιο.

Επίσης, ευχαριστώ τον Καθηγητή Ζ. Αγιουτάντη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Κ. Προβιδάκη για τις διορθώσεις και παρατηρήσεις τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια να καταστρωθεί ένα υπολογιστικό εργαλείο ανάλυσης της αντοχής επίπεδων ρηγματωμένων φορέων μέσα από τη γενικότερη θεωρία της Ελαστικότητας και της Θραυστομηχανικής. Καταρχήν, παρουσιάζονται εν συντομία τα προβλήματα ρωγμών σε φέροντες οργανισμούς ή άλλες κατασκευές και μέθοδοι αντιμετώπισής τους με σύνθετα υλικά. Γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία της Θραυστομηχανικής. Κατόπιν, παρουσιάζονται περιληπτικά οι θεωρίες της Επίπεδης Ελαστικότητας και της Θραυστομηχανικής με έμφαση στη θεωρία των μιγαδικών δυναμικών και των ολοκληρωμάτων Cauchy και η εφαρμογή της στο πρόβλημα μιας ενισχυμένης με κυκλικό ενισχυτικό ελαστικό κάλυμμα ρωγμής που βρίσκεται σε επίπεδη ελαστική πλάκα. Σκοπός της προσομοίωσης αυτής είναι ο υπολογισμός του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων στα άκρα της ρωγμής και η διερεύνηση της επίδρασης διαφόρων γεωμετρικών και μηχανικών παραμέτρων του καλύμματος και της ρωγμής στο συντελεστή έντασης των τάσεων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πεδίο των επισκευών και ενισχύσεων των κατασκευών έχει αρχίσει να απασχολεί σε σημαντικό βαθμό τον τεχνικό κόσμο της χώρας, για λόγους που σχετίζονται αφενός με τη μείωση της σεισμικής τρωτότητας και αφετέρου με την αναβάθμιση των κατασκευών λόγω παλαιότητας, φθοράς, αλλαγής χρήσης κ.λ.π.

Οι βλάβες στις κατασκευές δεν είναι δυνατό να αποφευχθούν έστω και αν ο σχεδιασμός έχει γίνει σύμφωνα με τους πιο σύγχρονους Κανονισμούς με άρτια μελέτη και κατασκευή. Αυτό δεν οφείλεται μόνο στο βαθμό αξιοπιστίας των δεδομένων και ιδιαίτερα των σεισμικών ή στις παραδοχές εξιδανίκευσης και τις προσεγγίσεις του αναλυτικού προσομοιώματος. Η ίδια η φιλοσοφία των σύγχρονων αντισεισμικών κανονισμών, επιτρέπει τις βλάβες όχι μόνο στα μη φέροντα στοιχεία αλλά και στο ίδιο το δομικό σύστημα. Στο άρθρο 1.2 του Ελληνικού Αντισεισμικού Κανονισμού (Ο.Α.Σ.Π. 1999) γίνεται αποδεκτό ότι ο φέρων οργανισμός της κατασκευής θα υποστεί βλάβες κατά τη δράση του σεισμού σχεδιασμού που θα πρέπει να είναι «περιορισμένες και επιδιορθώσιμες». Ενώ για ένα πολύ ισχυρότερο σεισμό προβλέπεται ότι η πιθανότητα κατάρρευσης πρέπει να είναι επαρκώς μικρή.

Σε μία χώρα όπως η Ελλάδα που βρίσκεται σε ένα έντονα σεισμογόνο χώρο, οι γνώσεις μας για τη σεισμική συμπεριφορά των κατασκευών δοκιμάζονται κάθε φορά που συμβαίνει ένας ισχυρός σεισμός. Για κάθε νέα κατασκευή υπάρχει η δυνατότητα ενός ορθότερου και ασφαλέστερου σχεδιασμού. Τα αποτελέσματα των καταστροφικών σεισμών των τελευταίων 40 χρόνων δείχνουν ότι είναι σχεδόν σίγουρο ότι πολλές από τις υπάρχουσες κατασκευές θα πάθουν σοβαρές ζημιές σε ένα επόμενο σεισμό. Είναι λοιπόν φανερό ότι υπάρχει προβληματισμός για τον ανασχεδιασμό των κατασκευών που είχαν σχεδιαστεί με παλαιότερους κώδικες και όχι μόνο για τις κατασκευές που έπαθαν ζημιές σε μια συγκεκριμένη περιοχή μετά από ένα ισχυρό σεισμό.

Η ύπαρξη των βλαβών σε μια κατασκευή, θέτει εκ των πραγμάτων το θέμα του ανασχεδιασμού της κατασκευής. Το θέμα είναι σοβαρό και σύνθετο και προϋποθέτει ότι παράγοντες όπως η σπουδαιότητα, το κόστος, η ηλικία και ο υπόλοιπος χρόνος ζωής της κατασκευής, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη για τον καθορισμό των κριτηρίων αποδοχής στον ανασχεδιασμό μιας κατασκευής.

Το πιο σημαντικό θέμα όμως, είναι ότι ενώ η μελέτη και η κατασκευή των νέων κτιρίων, καθώς και τα υλικά των νέων κατασκευών, καλύπτονται από πλήθος κανονισμών και προδιαγραφών, δε συμβαίνει το ίδιο με τις υπάρχουσες κατασκευές. Πράγματι, το σημερινό (μη ικανοποιητικό) επίπεδο γνώσεων σε θέματα προσεισμικών και μετασεισμικών επεμβάσεων, αλλά και το πλήθος και το πολύπλοκο των προβλημάτων που σχετίζονται με τα θέματα των επεμβάσεων, καθιστούν δυσχερή τη ρύθμισή τους μέσω ενός κανονιστικού κειμένου.

Αναφέρονται μερικά μόνο από τα ερωτήματα στα οποία καλείται να απαντήσει ο Μηχανικός Μελετητής των επεμβάσεων σε μια υφιστάμενη κατασκευή: Αποτίμηση της απομένουσας φέρουσας ικανότητας μίας υφιστάμενης κατασκευής (με ή χωρίς βλάβες), στάθμη φέρουσας ικανότητας η οποία θα πρέπει να εξασφαλίζεται στο δόμημα μετά από τις επεμβάσεις, υπολογισμός των δυσκαμψιών των επί μέρους δομικών στοιχείων μετά από την εκδήλωση βλαβών και μετά από την επέμβαση, υπολογισμός της φέρουσας ικανότητας μίας διατομής ενός στοιχείου μετά από την επέμβαση, βαθμός μονολιθικότητας, μεταφορά δυνάμεων σε διεπιφάνειες παλιών και νέων υλικών, χειρισμός υλικών/μεθόδων επεμβάσεως/προσομοιωμάτων σχεδιασμού από απόψεως αξιοπιστίας, επί μέρους συντελεστές ασφάλειας κ.λ.π.

Το πεδίο γνώσεων πάνω στις μεθόδους ενίσχυσης των κατασκευών, προσανατολίζεται, λόγω αναγκαιότητας, κυρίως στα στοιχεία που είναι κατασκευασμένα από οπλισμένο σκυρόδεμα με άμεσο επακόλουθο, τα τελευταία χρόνια, να έχουν αναπτυχθεί αρκετοί μέθοδοι επισκευής/ενίσχυσης.

Στην παρούσα εργασία το πρόβλημα επικεντρώνεται αποκλειστικά στην περίπτωση ρωγμών σε επίπεδους φορείς μορφής πλάκας. Γίνεται μια προσπάθεια να καταστρωθεί υπολογιστικός κώδικας για την αριθμητική ανάλυση των ρηγματώσεων μέσα από τη γενικότερη θεωρία της Ελαστικότητας και της Θραυστομηχανικής. Εν συντομία η διάταξη των κεφαλαίων έχει ως εξής:

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται, εν συντομία, προβλήματα ρωγμών και μέθοδοι αντιμετώπισής τους με σύνθετα υλικά.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία της Θραυστομηχανικής.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μαθηματική θεωρία της επίπεδης ελαστικότητας και της Θραυστομηχανικής με έμφαση στη θεωρία των μιγαδικών δυναμικών και η εφαρμογή της στο πρόβλημα μιας ενισχυμένης, με κυκλικό ενισχυτικό ελαστικό κάλυμμα, ρωγμής που βρίσκεται σε επίπεδη ελαστική πλάκα. Σκοπός της προσομοίωσης αυτής είναι ο υπολογισμός του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων στα άκρα της ρωγμής και η διερεύνηση της επίδρασης που έχει το κάλυμμα σε αυτόν.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και οι προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

2. ΡΗΓΜΑΤΩΣΕΙΣ – ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ ΕΠΕΜΒΑΣΗΣ – ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΕΜΒΑΣΗΣ

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Οι ρωγμές σε κατασκευές από σκυρόδεμα, δεν είναι ασύνηθες φαινόμενο. Το αντίθετο μάλιστα. Αυτό εξάλλου δεν είναι παράλογο, αφού οι ρηγματώσεις θα μπορούσαν απλοποιητικά να χαρακτηριστούν ως ορατές παραμορφώσεις, ενός φορέα που είναι παραμορφωμένος. Όμως το γεγονός της ύπαρξης τους δεν συνεπάγεται πάντοτε την ανάγκη επισκευής τους. Η απόφαση για την αναγκαιότητα της επέμβασης προϋποθέτει τη διερεύνηση των αιτιών της ρηγμάτωσης, την εξακρίβωση της φύσης της ρωγμής και την υποβάθμιση της αντοχής της κατασκευής λόγω των ρωγμών.

Τα αίτια ρηγμάτωσης στοιχείων από οπλισμένο σκυρόδεμα, είναι πολλά και δεν είναι του παρόντος μία εκτεταμένη αναφορά σε αυτό. Όμως μπορούν να αναφερθούν τα πλέον συνήθη, που είναι η συστολή ξήρανσης, η διάβρωση του οπλισμού και τα αυξημένα μηχανικά φορτία. Παρόλο που δεν είναι εύκολη μια αξιολογική κατάταξη των αιτιών ρηγμάτωσης με βάση το βαθμό επικινδυνότητας της κατασκευής, αφού από την ίδια αιτία μπορεί να προκύψει μικρός ή μεγάλος βαθμός βλάβης, δεν μπορεί να μην υποσημειωθεί η ιδιαίτερη σημασία για την άμεση ασφάλεια της κατασκευής των ρηγματώσεων που οφείλονται σε υπέρβαση αντοχής. Είναι ως εκ τούτου φρόνιμο, να τίθεται σαν πρωταρχικό θέμα διερεύνησης η στατική επάρκεια του φορέα.

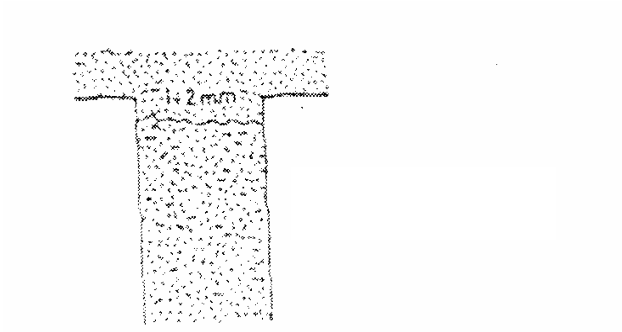
Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση ρηγματώσεων που παρατηρούνται από υπέρβαση αντοχής στο εφελκυόμενο ή θλιβόμενο πέλμα του στοιχείου, λόγω ανεπαρκούς οπλισμού ή στατικού ύψους και αντοχής σκυροδέματος αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι η επισκευή τέτοιου είδους ρωγμών, δεν προσφέρει βελτίωση στη στατική συμπεριφορά, αφού η ροπή αντοχής της διατομής δεν πρέπει να αυξηθεί με τέτοιες διαδικασίες.

Ο μηχανικός θα αξιολογήσει τις μαρτυρίες από τις ρηγματώσεις αυτού του είδους και εφόσον εκτιμηθεί ότι αυτή η συμπεριφορά βρίσκεται μέσα στα αποδεκτά όρια των κανονισμών, μπορεί να επιλέξει τη διαδικασία επισκευής της ρωγμής για αισθητικούς λόγους ή για λόγους προστασίας των οπλισμών από διάβρωση (Δρίτσος, 2001)

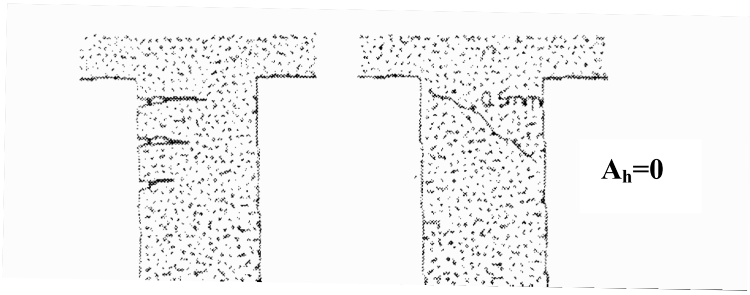
2.2 ΤΥΠΙΚΟΙ ΒΑΘΜΟΙ ΒΛΑΒΗΣ ΣΕ ΦΕΡΟΝΤΑ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟ ΑΠΟ ΟΠΛΙΣΜΕΝΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ

Μετά από ένα ισχυρό σεισμό, οι βλάβες στα υποστυλώματα, τα τοιχώματα και τους κόμβους δοκών-υποστυλωμάτων μιας κατασκευής είναι από τις πιο συχνές και συγχρόνως από τις πιο σοβαρές. Η αξιολόγηση της σοβαρότητας των βλαβών στα παραπάνω στοιχεία αποτελεί πρώτη προτεραιότητα για την εκτίμηση της ασφάλειας της κατασκευής γιατί τέτοιου είδους βλάβες μπορεί να οδηγήσουν σε τμηματική ή ολική κατάρρευση του δομήματος. Είναι από τις περιπτώσεις όπου ο Μηχανικός, εκτιμώντας το επίπεδο βλάβης αμέσως μετά τον σεισμό σε στενά χρονικά περιθώρια πρέπει να αποφασίσει για άμεσα μέτρα προσωρινής υποστύλωσης και απομάκρυνσης ενοίκων. Η εμπειρία του παρελθόντος έχει δείξει την κρισιμότητα του χρονικού διαστήματος αμέσως μετά από τον κύριο σεισμό όπου ένας ισχυρός μετασεισμός είναι πολύ πιθανός και συχνά καταστρεπτικότερος του κύριου σεισμού (Δρίτσος, 2001).

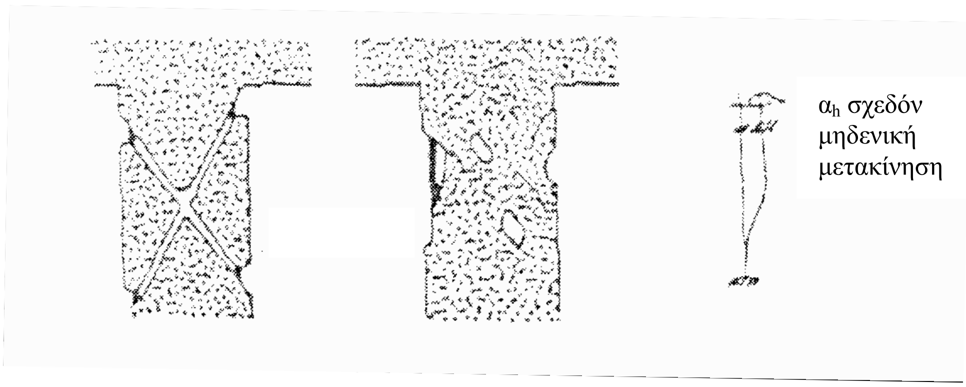
Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζονται τυπικές εικόνες βλάβης κόμβων δοκών-υποστυλωμάτων.



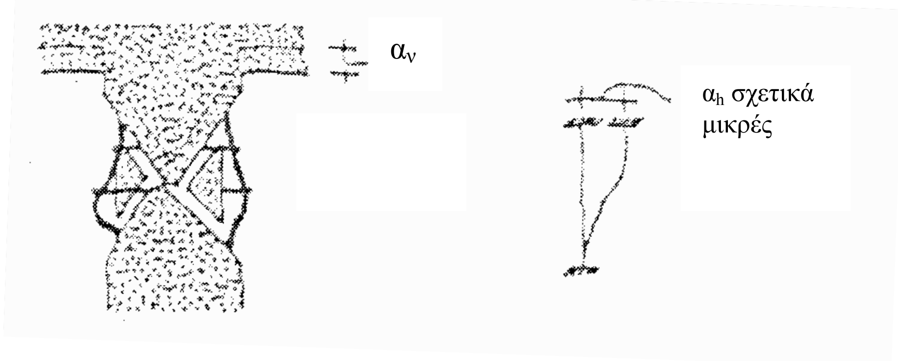
Βαθμός βλάβης A



Βαθμός Βλάβης B



Βαθμός Βλάβης C



Βαθμός Βλάβης D

Σχήμα 2.1 Βαθμοί βλάβης για υποστυλώματα (Υ.ΠΕ.ΧΩ.ΔΕ. Ο.Α.Σ.Π, 2001).

Μία τέτοια κατάταξη χρησιμεύει για τον προσδιορισμό των περιθωρίων ασφαλείας αφενός και για την επιλογή της κατάλληλης μεθόδου επισκευής ή ενίσχυσης αφετέρου (Δρίτσος, 2001).

Η απόφαση για την κρίσιμη επιλογή, μεταξύ επισκευής, ενίσχυσης και κατεδάφισης/ανακατασκευής είναι αποτέλεσμα μιας σύνθετης διαδικασίας που μπορεί να αναζητηθεί αλλού. Όμως, για κατασκευές που έχουν υποστεί βλάβες από έναν ισχυρό σεισμό, ανεξάρτητα από το παραπάνω αποτέλεσμα, η εικόνα των βλαβών αποτελεί αδιάψευστο στοιχείο της σεισμικής ικανότητας που επηρεάζει ιδιαίτερα την απόφαση. Σύμφωνα με την επικρατούσα άποψη :

- σε κατασκευές με μικρές βλάβες τοπικού χαρακτήρα, η επέμβαση περιορίζεται στην επισκευή.
- σε κατασκευές με εκτεταμένες ή βαριές βλάβες, δηλαδή βλάβες γενικού χαρακτήρα, η επέμβαση περιλαμβάνει και την ενίσχυση της κατασκευής.

Βαθμός βλάβης A

Μεμονωμένες οριζόντιες ρωγμές με πλάτος λιγότερο από 1-2mm, με την προϋπόθεση ότι ένας απλός υπολογισμός έχει αποδείξει ότι αυτές οι ρωγμές δεν οφείλονται σε ανεπάρκεια της διατομής σε κάμψη, αλλά μάλλον σε τοπικές αδυναμίες όπως π.χ. αρμοί διακοπής εργασίας, επίδραση της εν επαφή τοιχοπλήρωσης, ανεπαρκής αγκύρωση οπλισμών, κ.λ.π..

Βαθμός βλάβης B

Αρκετές πλατιές καμπτικές ρωγμές ή μεμονωμένες λοξές διατμητικές ρωγμές με πλάτος μικρότερο από 0.5mm, υπό τον όρο ότι δεν παρατηρούνται εναπομένουσες μετακινήσεις.

Βαθμός βλάβης C

Χιαστί λοξές διατμητικές ρωγμές ή έντονη τοπική σύνθλιψη και αποδιοργάνωση του σκυροδέματος, υπό τον όρο ότι δεν παρατηρούνται άξιες λόγου εναπομένουσες μετακινήσεις. Ρηγματώσεις στους κόμβους θεωρούνται ως βαθμός βλάβης C.

Βαθμός βλάβης D

Πλήρης αποδιοργάνωση του σκυροδέματος στην περιοχή βλάβης, λυγισμός των διαμήκων ράβδων, διαρροή ή θραύση των συνδετήρων της περιοχής, ασυνέχεια στην περιοχή χωρίς κατάρρευση του υποστυλώματος. Προϋποτίθεται επίσης ότι οι εναπομένουσες μετακινήσεις που παρατηρούνται (οριζόντιες και κατακόρυφες) και ιδιαίτερα οι κατακόρυφες είναι σχετικά μικρές. Σοβαρή αποδιοργάνωση στους κόμβους θεωρείται ως βαθμός βλάβης D.

Βαθμός βλάβης E

- Πλήρης κατάρρευση του υποστυλώματος.

2.3 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

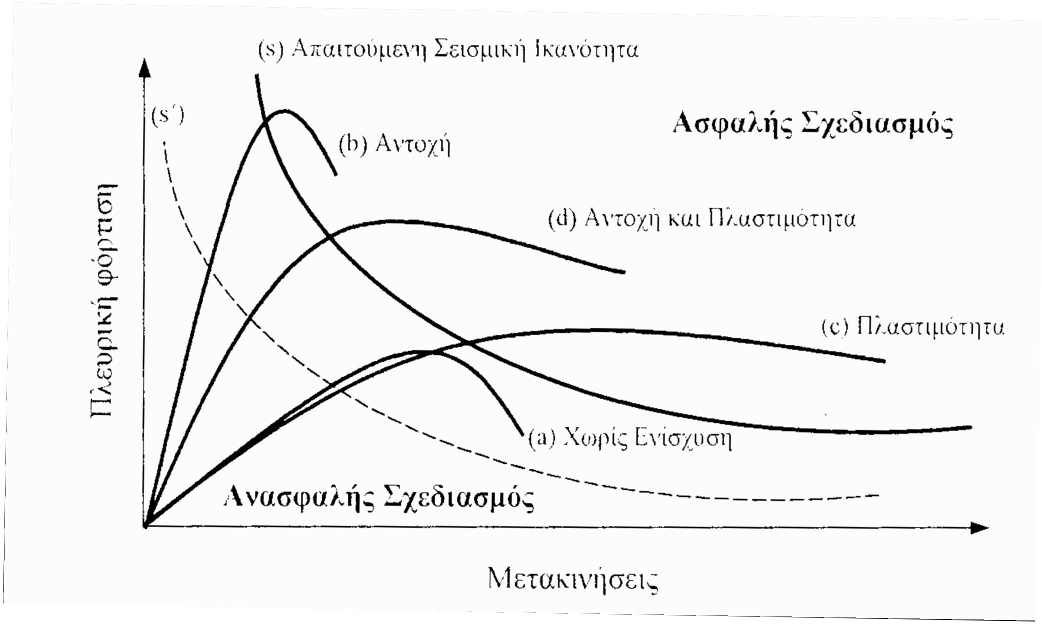
Η σεισμική δράση είναι ουσιαστικά μία εξωτερικά επιβεβλημένη δυναμική μετακίνηση που εισάγει στην κατασκευή μία ποσότητα κινητικής ενέργειας. Η ενέργεια αυτή κατά την ταλάντωση της κατασκευής, μετατρέπεται από κινητική, σε ενέργεια παραμόρφωσης και αντίστροφα. Μπορεί επομένως να υποτεθεί ότι το μέγεθος της μέγιστης ενέργειας παραμόρφωσης που μπορεί να αναπτυχθεί σε μία κατασκευή, αποτελεί ένα μέτρο της σεισμικής της αντίστασης (Δρίτσος, 2001).

Με βάση τα παραπάνω μία καμπύλη υπερβολικής μορφής (s) έχει χαραχθεί στο σχήμα 2.3 και αναπαριστά την απαιτούμενη σεισμική ικανότητα της κατασκευής. Δηλαδή μία κατασκευή θεωρείται ασφαλής μόνο εφόσον η καμπύλη που αναπαριστά τη συμπεριφορά της, επεκτείνεται στην περιοχή πάνω από την καμπύλη (s), που απεικονίζει τον ασφαλή σχεδιασμό. Διαφορετικά απαιτείται ενίσχυση της κατασκευής (Δρίτσος, 1995).

Μπορεί, λοιπόν, να επιλεχθεί μία ασφαλή λύση ενίσχυσης της κατασκευής, είτε αυξάνοντας την αντοχή και τη δυσκαμψία της, είτε αυξάνοντας την ικανότητά της για μεγάλες ανελαστικές παραμορφώσεις (Δρίτσος, 2001).

Διακρίνονται τέσσερις στρατηγικές αντισεισμικής ενίσχυσης ανάλογα με την επιδιωκόμενη σεισμική συμπεριφορά της κατασκευής.

- Αύξηση δυσκαμψίας και αντοχής της κατασκευής
- Αύξηση πλαστιμότητας της κατασκευής
- Αύξηση δυσκαμψίας, αντοχής και πλαστιμότητας της κατασκευής
- Μείωση εισαγόμενης σεισμικής δράσης στην κατασκευή (π.χ. σεισμική μόνωση)



Σχήμα 2.2 : Στρατηγικές ενίσχυσης κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα (Δρίτσος, 2001).

Στο σχήμα 2.2 παρουσιάζονται ποιοτικά διαγράμματα πλευρικών δυνάμεων-μετακινήσεων, για τις τρεις βασικές στρατηγικές που αντιστοιχούν σε τρεις κατηγορίες μεθόδων αντισεισμικής ενίσχυσης. Η καμπύλη (a) αναπαριστά τη συμπεριφορά της κατασκευής πριν την ενίσχυση. Η καμπύλη (b) αναπαριστά τη συμπεριφορά της κατασκευής μετά την ενίσχυση της, όταν επιτυγχάνεται η αύξηση της πλευρικής αντίστασης και της δυσκαμψίας του φορέα. Η καμπύλη (c) αναπαριστά τη συμπεριφορά της κατασκευής μετά την ενίσχυσή της, όταν επιτυγχάνεται η αύξηση της πλαστιμότητας του φορέα. Η καμπύλη (d) αναπαριστά τη συμπεριφορά της κατασκευής μετά την ενίσχυσή της, όταν συγχρόνως επιτυγχάνεται η αύξηση της πλευρικής αντίστασης, της δυσκαμψίας και της πλαστιμότητας του φορέα. Η καμπύλη (s΄) αναπαριστά την απαιτούμενη σεισμική ικανότητα της κατασκευής μετά την ενίσχυσή της, όταν επιτυγχάνεται μείωση της εισαγόμενης σεισμικής έντασης του φορέα (Δρίτσος, 2001).

Η επιλογή της καταλληλότερης μεθόδου και της επιμέρους κατασκευαστικής τεχνικής που θα ακολουθηθεί δεν είναι πάντα εύκολη. Θα πρέπει να αξιολογηθούν όλες οι εναλλακτικές διαδικασίες λαμβάνοντας υπόψη τις τοπικές συνθήκες του έργου, νομικούς, πολεοδομικούς ή άλλους τυχόν περιορισμούς, το κόστος και τη διάρκεια της επέμβασης, το μέγεθος της όχλησης και τη διαθεσιμότητα κατάλληλου εξειδικευμένου προσωπικού.

2.4 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΑΣΦΑΛΕΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Στο σχεδιασμό νέων κατασκευών, όπως είναι γνωστό, η πιθανότητα μεταβολής της αντοχής των υλικών κατά την παραγωγή τους και στη εξέλιξη του χρόνου λαμβάνεται υπόψη συντηρητικά. Είναι προφανές ότι δεν θα μπορούσε να γίνει διαφορετικά, αφού η μελέτη προηγείται της κατασκευής του έργου και βασίζεται σε προβλεπόμενες αντοχές (Δρίτσος, 2001).

Έτσι η θλιπτική αντοχή σχεδιασμού του σκυροδέματος f_{cd} προκύπτει από τη χαρακτηριστική αντοχή f_{ck} διαιρεμένη με ένα συντελεστή ασφαλείας, που στο Κανονισμό Σκυροδέματος (ΥΠΕΧΩΔΕ, 1995) είναι 1.50, ενώ η εφελκυστική αντοχή αγνοείται στον έλεγχο κάμψης.

Στο χάλυβα επιλέγεται από τους κανονισμούς ένας μικρότερος συντελεστής ασφαλείας που στον Κανονισμό Σκυροδέματος (ΥΠΕΧΩΔΕ, 1995) λαμβάνεται 1.15.

Για τα νέα υλικά που προστίθενται με τις επεμβάσεις, ο EC8-Part 1.4 (1995) προτείνει γενικώς αυξημένους συντελεστές ασφαλείας, σε σύγκριση με αυτούς που προβλέπονται για τις νέες κατασκευές, επειδή η αβεβαιότητα επιτυχίας των επιδιωκόμενων είναι μεγαλύτερη. Η αβεβαιότητα αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι εργασίες των επισκευών και των ενισχύσεων γίνονται συχνά κάτω από δύσκολες συνθήκες πρόσβασης ποιοτικού ελέγχου και επίβλεψης.

Για το έγχυτο και το εκτοξευόμενο σκυρόδεμα, εάν δεν είναι εύκολο να εκτιμηθούν από το μελετητή οι νέοι αναθεωρημένοι συντελεστές γ_c', μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι πίνακες 2.1 και 2.2

Πίνακας 2.1 : Τιμές γ_c'/γ_c για έγχυτο σκυρόδεμα (Δρίτσος, 2001).

Επίπεδο ποιοτικού ελέγχου και επίβλεψης	Πρόσθετο πάχος			
	<100 mm		≥ 100 mm	
	δυσκολία εργασίας		δυσκολία εργασίας	
	μεγάλη	κανονική	μεγάλη	κανονική
υψηλό	1.2	1.1	1.0	1.0
μέτριο	1.3	1.2	1.1	1.0

Πίνακας 2.2 : Τιμές γ_c'/γ_c για εκτοξευόμενο σκυρόδεμα (ξηρό ή υγρό) (Δρίτσος, 2001).

Επίπεδο ποιοτικού ελέγχου και επίβλεψης	δυσκολία εργασίας	
	μεγάλη	κανονική
υψηλό	1.3	1.2
μέτριο	1.4	1.3

Για τα σύνθετα υλικά από ινοπλισμένα πολυμερή (FRPs) που χρησιμοποιούνται με επικόλληση σε στοιχεία σκυροδέματος θα μπορούσε να τεθεί $\gamma_s'=1.2$.

2.5 ΔΙΟΡΘΩΤΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ

Τα επισκευασμένα/ενισχυμένα στοιχεία από οπλισμένο σκυρόδεμα (Ο.Σ.) είναι στην πραγματικότητα πολυφασικά στοιχεία. Αποτελούνται από το αρχικό στοιχείο Ο.Σ. της υπάρχουσας κατασκευής και νέα στοιχεία που συνδέονται με το αρχικό με διάφορες τεχνικές και τεχνολογίες. Θα ήταν επομένως λογικό, να ακολουθηθούν για τη διαστασιολόγησή τους διαδικασίες σύνθετων μελών. Όμως οι σχετικές τεκμηριωμένες, επιστημονικές γνώσεις για το θέμα είναι λίγες και δεν είναι εύκολο να αξιοποιηθούν πρακτικά. Αυτός είναι ο λόγος που για τη λύση του προβλήματος επιλέγεται μια διαδικασία με αναγωγή στις μεθόδους διαστασιολόγησης μονολιθικών στοιχείων οπλισμένου σκυροδέματος (Δρίτσος, 2001).

Για τη μεταφορά των πραγματικών χαρακτηριστικών απόκρισης του σύνθετου στοιχείου στα αντίστοιχα ενός στοιχείου θεωρούμενου μονολιθικού, χρησιμοποιούνται διορθωτικοί συντελεστές προσομοιώματος (k) που συχνά ονομάζονται και συντελεστές μονολιθικότητας και ορίζονται ως εξής:

- Για τη δυσκαμψία:

$$k_k = \frac{\text{Δυσκαμψία Πραγματικού Σύνθετου Στοιχείου}}{\text{Δυσκαμψία Μονολιθικού Στοιχείου}}$$

- Για την αντοχή:

$$k_r = \frac{\text{Αντοχή Πραγματικού Σύνθετου Στοιχείου}}{\text{Αντοχή Μονολιθικού Στοιχείου}}$$

Επειδή οι διεπιφάνειες και οι ασυνέχειες μεταξύ παλαιών και νέων υλικών μειώνουν τη δυσκαμψία και την αντοχή των στοιχείων, θα ισχύει προφανώς:

$$k_k \leq 1.0 \quad \text{και} \quad k_r \leq 1.0$$

Τις περισσότερες φορές η επίδραση των ασυνεχειών είναι εντονότερη στη δυσκαμψία, γι' αυτό συνήθως $k_k \leq k_r$

Ο προσδιορισμός αξιόπιστων τιμών για τους διορθωτικούς συντελεστές προσομοιώματος είναι από τα κρίσιμα θέματα στον τομέα του ανασχεδιασμού. Απαιτούνται εκτεταμένες πειραματικές δοκιμές για να προκύψουν τα πραγματικά χαρακτηριστικά δυσκαμψίας και αντοχής των επισκευασμένων/ενισχυμένων στοιχείων που στη συνέχεια θα συγκριθούν με τα χαρακτηριστικά των αντίστοιχων μονολιθικών στοιχείων. Είναι ως εκ τούτου προφανές ότι τα αποτελέσματα έχουν ισχύ σε πρακτικές εφαρμογές, μόνο εφόσον η επέμβαση γίνει στην πράξη με τον ίδιο τρόπο που εκτελέστηκε και στο εργαστήριο. Επομένως, στην πράξη θα απαιτηθεί η κρίση του μηχανικού, επειδή για πολλές περιπτώσεις τα πειραματικά δεδομένα είναι ελάχιστα.

Για επεμβάσσεις επισκευής ρωγμών με ρητινενέσεις, επειδή φαίνεται ότι μπορεί να επιτευχθεί μονολιθικότητα, λαμβάνεται:

$$k_k = k_r = 1.0$$

εφόσον:
α) τηρηθούν σχολαστικά οι συστάσεις και προδιαγραφές για τα υλικά και τις τεχνικές,
β) οι βλάβες είναι ελαφριές (μικρές ρωγμές) και
γ) εφόσον δεν υπάρχει στατική ανεπάρκεια στη διατομή.

Επίσης για ενισχύσεις με επικολλητά στοιχεία από χάλυβα ή ινοπλισμένα πολυμερή (FRPs) μπορεί να θεωρηθεί $k_k = k_r = 1.0$.

2.6 ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΕΠΕΜΒΑΣΕΩΝ ΡΩΓΜΩΝ

2.6.1 Γενικά

Η επιλογή της κατάλληλης λύσης για την επισκευή ή την ενίσχυση μιας κατασκευής από Ο.Σ. προϋποθέτει ότι ο μηχανικός γνωρίζει καλά τα υλικά και τις τεχνικές που διατίθενται για τέτοιου είδους επεμβάσεις (Δρίτσος, 2001).

Συχνά απαιτείται να χρησιμοποιηθούν νέα υλικά και νέες τεχνολογίες σε συνδυασμό με τροποποιημένα υλικά. Επειδή συχνά τα παραπάνω υλικά και τεχνολογίες εφαρμόζονται κάτω από ειδικές συνθήκες, χρειάζεται να διασφαλιστεί ένα σύστημα ποιοτικού ελέγχου σε επίπεδο σημαντικά υψηλότερο από αυτό που εφαρμόζεται στις νέες κατασκευές. Επιπλέον, θα πρέπει να αντιμετωπιστούν νέα κρίσιμα θέματα που ανακύπτουν, όπως αυτό της διασφάλισης της συνεργασίας των παλαιών και νέων υλικών.

Τα διάφορα υλικά που χρησιμοποιούνται συχνότερα στις επεμβάσεις των κατασκευών Ο.Σ. είναι:

- Ειδικοί τύποι σκυροδέματος
- Πολυμερικές κόλλες
- Επισκευαστικά κονιάματα
- Επικολλητά φύλλα από χάλυβα ή ινοπλισμένα πολυμερή (FRPs)
- Διατμητικοί σύνδεσμοι-Αγκύρια
- Αγκυρώσεις και συγκολλήσεις νέων ράβδων οπλισμού

Στην παρούσα εργασία θα γίνει εκτενέστερη αναφορά στα ινοπλισμένα πολυμερή καθώς αυτά προσεγγίζουν το πρόβλημα της εργασία αυτής.

Τα σύνθετα υλικά που εφαρμόζονται συνήθως στο πεδίο των ενισχύσεων είναι α) τύπου ελάσματος (ινών άνθρακα σε εποξειδική μήτρα) πάχους 1.0-1.5 mm και πλάτους αρκετών χιλιοστομέτρων (π.χ. 50-100mm) ή β) τύπου υφάσματος (ινών άνθρακα ή γυαλιού, και σπανιότερα αραμιδίου), πάχους 0.1-0.5mm. Τα ελάσματα επικολλώνται στην επιφάνεια σκυροδέματος μέσω εποξειδικής ρητίνης δύο συστατικών, ενώ τα υφάσματα εμποτίζονται με εποξειδική ρητίνη επί τόπου. Τα διαθέσιμα συστήματα ενισχύσεων συνθέτων υλικών στην Ελληνική αγορά σήμερα είναι αρκετά. Στα περισσότερα εξ αυτών οι ίνες χαρακτηρίζονται από τις ίδιες ή παρόμοιες ιδιότητες, ενώ οι ρητίνες ποικίλλουν μεταξύ των διαφόρων προμηθευτών. Κάθε σύστημα συνοδεύεται (ή θα πρέπει να συνοδεύεται), εκτός από πλήρη κατάλογο των ιδιοτήτων που ενδιαφέρουν τους μηχανικούς-μελετητές, και από λεπτομερείς οδηγίες εφαρμογής (Τριανταφύλλου Χ. Α., 2003).

Η χρήση επικολλητών φύλλων, από χάλυβα ή ινοπλισμένα πολυμερή (FRP), για την ενίσχυση στοιχείων από οπλισμένο σκυρόδεμα, είναι σήμερα μια πολύ δημοφιλής τεχνική λόγω της ευκολίας εφαρμογής της.

Η επιλογή του τύπου, της μορφής και της μεθόδου εφαρμογής των συνθέτων υλικών εξαρτώνται κάθε φορά από πολλούς παράγοντες όπως: η γεωμετρία και οι διαστάσεις των προς ενίσχυση στοιχείων, το είδος της εντατικής τους καταπόνησης, οι περιβαλλοντικές συνθήκες (π.χ. σε θερμοκρασίες κάτω των 10°C, περίπου, η σκλήρυνση των ρητινών είναι δύσκολη), η εμπειρία του μηχανικού και του διατιθέμενου εργατοτεχνικού προσωπικού και, τέλος, ο προϋπολογισμός της επέμβασης. Βεβαίως, εκτός από την προσεκτική επιλογή των συνθέτων υλικών και την επιμελημένη εφαρμογή τους, ένας παράγοντας που καθορίζει αν η επέμβαση θα είναι επιτυχής, είναι η αντοχή και η ποιότητα του υποστρώματος (σκυρόδεμα) στο οποίο θα γίνει η επικόλληση. Πολύ χαμηλή εφελκυστική αντοχή ή επιφάνεια τραχεία, γεμάτη με σκόνη, λάδια κ.τ.λ. δεν θα εξασφαλίσουν καλή ποιότητα δεσμού μεταξύ σκυροδέματος-συνθέτων υλικών, με αποτέλεσμα την πρόωρη αστοχία του οπλισμού ενίσχυσης (Δρίτσος, 2001).

Ο παραδοσιακός τρόπος εφαρμογής της τεχνικής είναι με χρήση χαλύβδινων ελασμάτων. Σήμερα, έχει αρχίσει να εφαρμόζεται ανταγωνιστικά η χρήση φύλλων από ινοπλισμένα πολυμερή.

2.6.2 Χαλύβδινα επικολλητά ελάσματα

Η χρήση χαλύβδινων ελασμάτων που επικολλώνται στην εξωτερική επιφάνεια δομικών στοιχείων από οπλισμένο σκυρόδεμα είναι μια τεχνική ενίσχυσης πολύ πρακτική, που στοχεύει στη συμπλήρωση του ελλείμματος του προϋπάρχοντος οπλισμού, με νέους οπλισμούς. Η μέθοδος χρησιμοποιείται κυρίως για την αύξηση της καμπτικής αντοχής δοκών και πλακών ή της διατμητικής αντοχής δοκών. Τα χαλύβδινα ελάσματα επικολλώνται, χρησιμοποιώντας κάποια κατάλληλη κόλλα, σε επίπεδο παράλληλο προς αυτό του προϋπάρχοντος ανεπαρκούς οπλισμού. Έτσι είτε τοποθετούνται στο εφελκυστικό πέλμα των στοιχείων (ενίσχυση σε κάμψη), είτε τοποθετούνται στις παρειές των δοκών (ενίσχυση σε διάτμηση). Επίσης μεταλλικά ελάσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και με τη μορφή κλειστών μανδυών για την ενίσχυση υποστυλωμάτων με τη τεχνική της περίσφιγξης (Δρίτσος, 2001).

Τα τελευταία 30 χρόνια η τεχνική εφαρμόστηκε ευρύτατα σε περιπτώσεις ενίσχυσης του εφελκυόμενου πέλματος καταστρωμάτων γεφυρών. Οι πρώτες εφαρμογές έγιναν στην Γαλλία και στη Ν .Αφρική στα μέσα της δεκαετίας του 1960.

Συνήθως χρησιμοποιούνται λεπτά χαλύβδινα ελάσματα πάχους 1-1.5 mm με όριο διαρροής που κυμαίνεται από 240 έως 400 MPa. Τα ελάσματα επικολλούνται σε μία ή περισσότερες στρώσεις σε συνεχή σύνδεση χρησιμοποιώντας ειδική κόλλα που συνήθως είναι εποξειδική. Συνίσταται η χρησιμοποίηση κόλλας με πλάστιμη συμπεριφορά για καλύτερη κατανομή των τάσεων στην περιοχή αγκύρωσης

Η ευκολία εφαρμογής της τεχνικής σε συνδυασμό με την ελάχιστη όχληση που προκαλείται στην χρήση του δομήματος και το χαμηλό κόστος αποτελούν τα βασικά πλεονεκτήματα της μεθόδου.

Κύριο μειονέκτημα της τεχνικής είναι η ευκολία διάβρωσης του χάλυβα που συχνά διαπιστώνεται εντονότερη στην εσωτερική επιφάνεια των ελασμάτων. Απαιτείται ως εκ τούτου συνεχής συντήρηση που τελικά αυξάνει το κόστος.

2.6.3 **Φύλλα από ινοπλισμένα πολυμερή** (FRPs)

Η χρήση φύλλων από ινοπλισμένα πολυμερή (ΙΟΠ)-Fiber Reinforced Polymers (FRPs) αποτελεί σήμερα την πλέον σύγχρονη τεχνική στον τομέα της ενίσχυσης των κατασκευών. Ουσιαστικά, είναι η εξέλιξη της τεχνικής των χαλύβδινων επικολλητών ελασμάτων αντιμετωπίζοντας επιτυχώς τις αδυναμίες αυτής της τεχνικής. Έχουν πολύ μικρό βάρος και εξαιρετικά υψηλή αντοχή, διατίθενται σε μεγάλα μήκη και δεν είναι ευαίσθητα σε διάβρωση (Δρίτσος, 2001).

Εξάλλου η εφαρμογή της τεχνικής είναι απλούστατη και ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση της εργασίας ελάχιστος, υπερέχοντας ακόμα και στα αντίστοιχα θετικά χαρακτηριστικά της τεχνικής των χαλύβδινων επικολλητών ελασμάτων. Έτσι η εφαρμογή της τεχνικής έχει επεκταθεί και σε περιπτώσεις όπου η τεχνική των επικολλητών ελασμάτων είναι περιορισμένη. Ως τέτοιες περιπτώσεις μπορούν να αναφερθούν οι ενισχύσεις υποστυλωμάτων με μανδύα και οι ενισχύσεις κόμβων δοκών-υποστυλωμάτων.

Ως κύριο μειονέκτημα της τεχνικής θα πρέπει να αναφερθεί το ιδιαίτερα υψηλό κόστος του υλικού που όμως μειώνεται σταδιακά λόγω της αύξησης της ζήτησης και κατά συνέπεια αύξηση της παραγωγής αυτού του είδους των υλικών.

Τα ινοπλισμένα πολυμερή είναι στην πραγματικότητα σύνθετα υλικά που αποτελούνται από ίνες υψηλής εφελκυστικής αντοχής εμποτισμένες με θερμοσκληρυνόμενη κόλλα, της οποίας τα χαρακτηριστικά δεν είναι ευαίσθητα σε θερμοκρασίες κάτω των 80^0 C. Οι συνήθεις τύποι ινών είναι από γυαλί ή αραμίδη (κέβλαρ) ή από άνθρακα με πολύ μικρή διάμετρο της τάξης των 5-25μm.

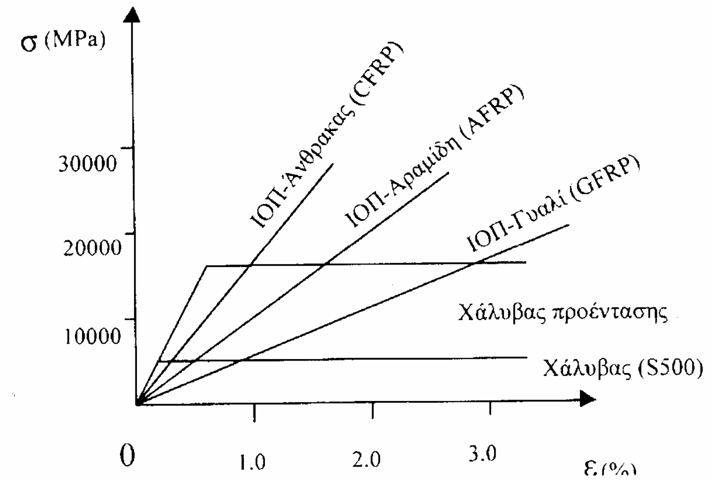
Η διαδικασία επικόλλησης των ινοπλισμένων φύλλων πολυμερών συνήθως συνιστάται από τους προμηθευτές. Τα χαρακτηριστικά των ινοπλισμένων πολυμερών εξαρτώνται κυρίως από την κατ' όγκο περιεκτικότητα τους σε ίνες.

Στον Πίνακα 2.3 παρουσιάζονται τυπικές τιμές για το μέτρο ελαστικότητας και τη παραμόρφωση αστοχίας των σύνθετων υλικών .

Πίνακας 2.3: Τυπικές τιμές μέτρου ελαστικότητας και παραμορφώσεως αστοχίας συνθέτων υλικών και χάλυβα (Δρίτσος, 2001).

Υλικό	**Μέτρο Ελαστικότητας** [GPa]	**Παραμόρφωση αστοχίας** [%]
Σύνθετο υλικό με ίνες γυαλιού (GFRP)	50	3%
Σύνθετο υλικό με ίνες αραμιδίου (AFRP)	65 - 120	2-3 %
Σύνθετο υλικό με ίνες άνθρακα (CFRP)	35-190	1-1.5 %
Χάλυβας	200	10%

Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζονται τυπικές καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων για σύνθετα υλικά μαζί με την αντίστοιχη καμπύλη για χάλυβα, όπου φαίνεται ότι, τα σύνθετα υλικά συμπεριφέρονται πλήρως ελαστικά, μέχρι την αστοχία τους.



Σχήμα 2.3: Σχέσεις τάσης-παραμόρφωσης για σύνθετα υλικά σε εφελκυσμό (Δρίτσος, 2001).

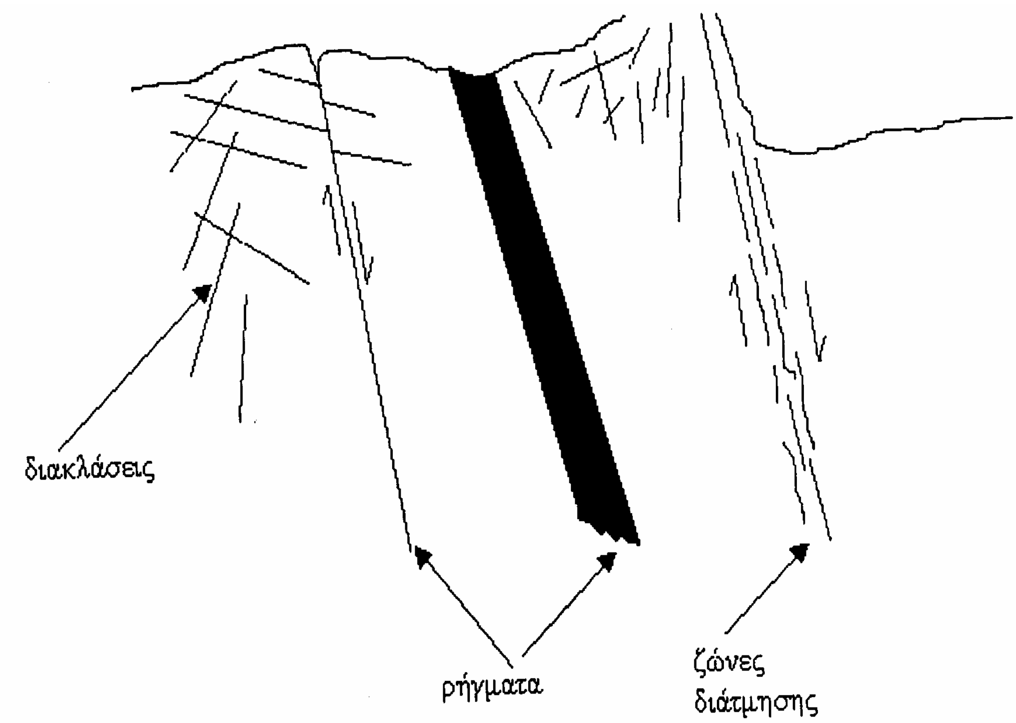
3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΗΧΑΝΙΚΗ

Το παρόν κεφάλαιο είναι απόσπασμα από τις σημειώσεις του κ. Γ. Εξαδάκτυλου (Εξαδάκτυλος, 2001), τον οποίο και ευχαριστώ.

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο σχεδιασμό δομικών στοιχείων ή κατασκευών, ένα σημαντικό βήμα είναι η ταυτοποίηση του πιο πιθανού τρόπου αστοχίας και η εφαρμογή κατάλληλου κριτηρίου αστοχίας. Θραύση ορίζεται ως «ο σχηματισμός νέων επιφανειών στο υλικό» και αποτελεί τρόπο εκδήλωσης αστοχίας μιας κατασκευής.

Στο πιο βασικό επίπεδο (μικροσκοπικό), το κύριο χαρακτηριστικό της ρηγμάτωσης είναι η θραύση των ατομικών δεσμών του στερεού. Όμως στο μακροσκοπικό επίπεδο, ως ρηγμάτωση μπορεί να χαρακτηρισθεί η θραύση μιας κατασκευής σε δύο ή περισσότερα τμήματα, λόγω διάδοσης ρωγμών σε αυτό (Σχ. 3.1).



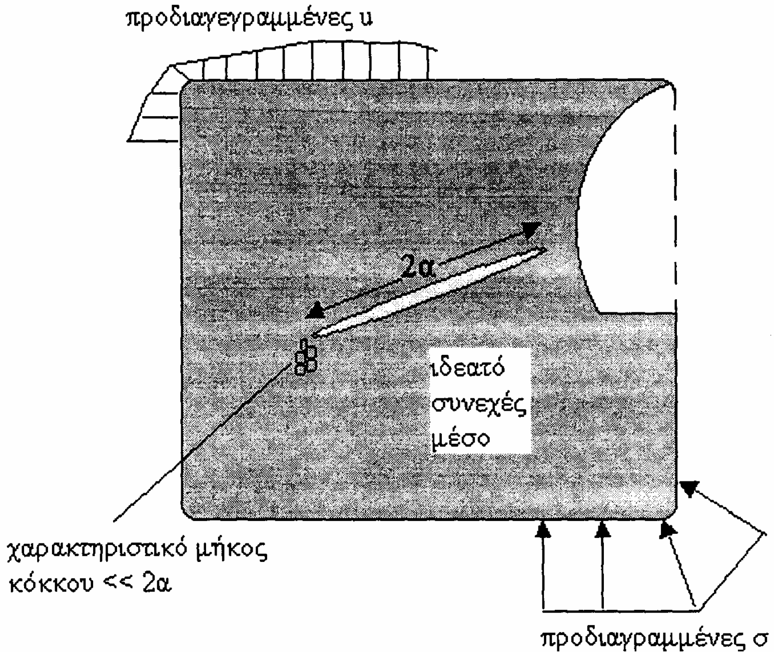
Σχ. 3.1 Ασυνέχειες του πετρώματος σε διάφορες κλίμακες.

Στο ενδιάμεσο επίπεδο, το μεσοσκοσκοπικό, η θραύση εκδηλώνεται με την μορφή της εκκίνησης διάδοσης (ή επέκτασης) και της συνένωσης μικρο-ανοιγμάτων, λ.χ. πόρων και ρωγμών εντός των κόκκων και στα σύνορα των κόκκων του γεωϋλικού.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, κατά την μελέτη της θραύσης των υλικών-στην ιδεατή περίπτωση-πρέπει να θεωρηθούν διαφορετικοί παράγοντες, όπως τα διάφορα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στο μικροσκοπικό επίπεδο και σε διαφορετικές κλίμακες, όπως επίσης και τα μακροσκοπικά δεδομένα που αφορούν τον τρόπο εξωτερικής φόρτισης, περιβαλλοντικούς παράγοντες και την γεωμετρία του στερεού σώματος. Λόγω της πολύ μεγάλης πολυπλοκότητας των φαινομένων θραύσης, δεν έχει διατυπωθεί μια ενοποιημένη θεωρία που να περιγράφει ικανοποιητικά όλα τα σχετικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα σε όλες τις κλίμακες. Αυτό που γίνεται σήμερα είναι ότι διατυπώνονται θεωρίες που αντιμετωπίζουν τα προβλήματα θραύσης των υλικών, είτε από την μικροσκοπική ή ατομική σκοπιά, είτε από την μακροσκοπική ή την σκοπιά του συνεχούς μέσου.

Κατά τις συνήθεις τεχνικές εφαρμογές τα φαινόμενα θραύσης αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια μακροσκοπικών θεωριών, όπως η μηχανική του συνεχούς μέσου και η κλασική θερμοδυναμική. Κατά την μακροσκοπική αντιμετώπιση, θεωρείται ότι το μέσο είναι συνεχές και διασχίζεται από μια ρωγμή ή πεπερασμένο αριθμό ρωγμών (περιοχές λύσης της συνέχειας) και ότι αυτές οι ρωγμές είναι πολύ μεγαλύτερες από την μικροδομή του υλικού (Σχ. 3.2). Τελευταίως έχει γίνει κατανοητό ότι δεν μπορεί να αγνοηθεί η επίδραση της μικροδομής των υλικών (λ.χ. κοκκώδη και κρυσταλλικά υλικά, στρωσιγενή υλικά κ.λ.π.) στα φαινόμενα θραύσης (Exadaktylos, 1998).

Συμπερασματικά μπορεί να ειπωθεί ότι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς στερεών σωμάτων που διασχίζονται από ρωγμές υπό την επίδραση στατικής ή δυναμικής μηχανικής φόρτισης και ενδεχομένως άλλων περιβαλλοντικών παραγόντων (λ.χ. θερμοκρασία, πίεση πόρων, χημικές μεταβολές) αναφέρεται ως «Θραυστομηχανική» (Fracture Mechanics).

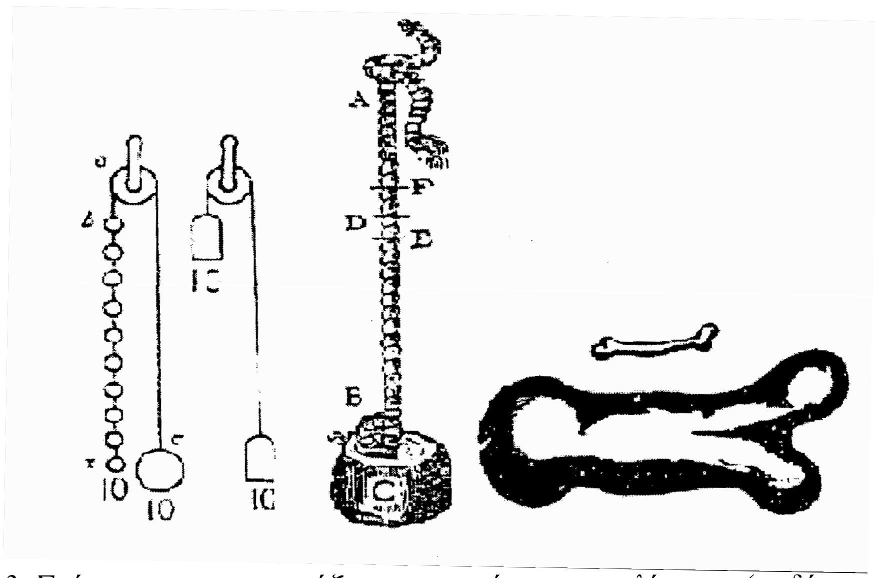


Σχ. 3.2. Η παραδοχή του συνεχούς μέσου με ρωγμές και υπόγεια ανοίγματα.

3.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Από αρχαιοτάτων χρόνων, ήταν γνωστό ότι η παρουσία εγκοπών ή ρωγμών διευκόλυνε πολύ την θραύση ξύλων, μαρμάρων, πολύτιμων λίθων κ.λπ. Με την πρόοδο που έλαβε χώρα του τρεις τελευταίους αιώνες η μεταλλουργία, η χρήση του ξύλου και των πετρωμάτων ως δομικών στοιχείων σε κατασκευές αντικαταστάθηκε σε σημαντικό βαθμό από μέταλλα και κράματα. Αν και φαινομενικά οι κατασκευές αυτές είχαν σχεδιαστεί με υψηλούς συντελεστές ασφαλείας, εντούτοις δεν ήταν λίγες οι περιπτώσεις εκείνες απρόσμενων αστοχιών. Μερικά απ' αυτά τα ατυχήματα που έλαβαν χώρα πριν τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο και που ήταν αποτέλεσμα καταστροφικών αστοχιών κρίσιμων συνιστωσών μεγάλων κατασκευών και μεταφορικών μέσων ή μηχανημάτων που σχετίζονταν με την παραγωγή ενέργειας, προκάλεσαν σημαντικές απώλειες ανθρωπίνων ζωών και ευρύτατες φθορές σε ιδιοκτησίες. Μια λεπτομερής αναφορά τέτοιων καταστροφικών ατυχημάτων σε δεξαμενές αποθηκεύσεως πετρελαίου, λέβητες υψηλών πιέσεων, ρότορες τουρμπίνων -γεννητριών, ατμολέβητες, αγωγούς, γέφυρες, σιδηροτροχιές κλπ. έγινε το1998 από τον Liebowitz, H.

Οι πρώτες θεωρίες αντοχής των υλικών βασιζόντουσαν στο κριτήριο της μέγιστης τάσεως του Rankine. Όμως το "φαινόμενο κλίμακας", που παίζει σημαντικό ρόλο στη θραύση, ήταν γνωστό πριν από την εισαγωγή της έννοιας της «τάσεως». Σε ένα από τα εικονογραφημένα βιβλία του ο Leonardo da Vinci περιγράφει τα πειράματα του επί της θραύσης σιδηρών συρμάτων και πως το απαιτούμενο βάρος για την θραύση αυτών αυξάνεται καθώς το μήκος των συρμάτων υποδιπλασιάζεται σε διαδοχικές δοκιμές.



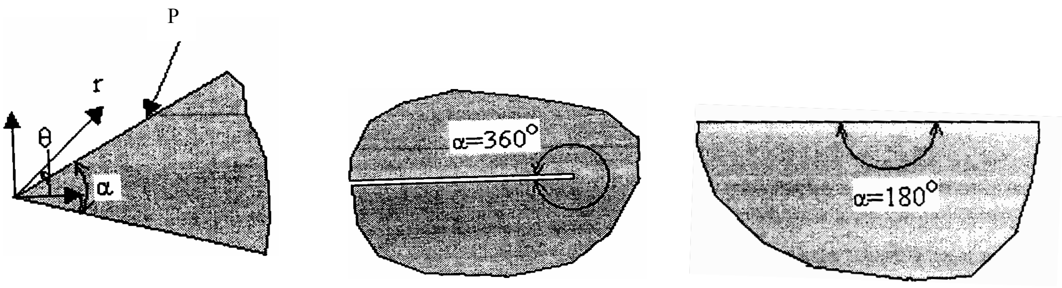
Σχ. 3.3. Σχήματα που παρουσιάζουν το φαινόμενο της κλίμακος (τα δύο πρώτα είναι τουLeonardo da Vinci, το τρίτο και το τέταρτο του Galileo Galilei).

Το 1858 ο Karmarsch προτείνει εμπειρική σχέση, για τη φέρουσα ικανότητα μεταλλικών συρμάτων, της μορφής

$$\sigma_u = A + \frac{B}{d} \tag{3.1}$$

όπου A, B είναι σταθερές, d η διάμετρος του σύρματος και σ_u η τάση αστοχίας. Παρόμοια σχέση επιβεβαιώθηκε αργότερα από τα πειράματα του Griffith το 1920 σε υαλονήματα. Οι πρώτες μελέτες των Wohler το 1860 και Kommers το 1912 σε πειράματα κόπωσης, κατέδειξαν επίσης ότι η αντοχή εξαρτάται και από την ποιότητα της επιφάνειας των δοκιμίων και ειδικά από επιφανειακές εγκοπές. Αυτά τα πειραματικά αποτελέσματα, έδειξαν ότι η λείανση και στίλβωση των δοκιμίων αυξάνει την αντοχή κατά 20 έως 50%.

Αυτές οι εμπειρικές παράμετροι A, B, τράβηξαν το ενδιαφέρον του Griffith για την αντοχή των υλικών. Όμως πριν αναφερθεί η θεμελιώδης συνεισφορά του Griffith, αξίζει να σημειωθεί η εργασία του Weighardt που παρουσιάστηκε το 1907 που είναι εξόχως σημαντική απ' την πλευρά των στερεών σωμάτων. Σε ένα αξιοσημείωτο άρθρο, αλλά μη ευρέως γνωστό, ο Wieghardt διετύπωσε τη λύση της γραμμικής ελαστικής σφήνας, που υποβάλλεται σε σημειακή φόρτιση P σε μια από τις ακμές της και την ειδική περίπτωση του προβλήματος της ρωγμής (Σχ. 3.4).



Σχ. 3.4. Το πρόβλημα της ελαστικής σφήνας.

Η λύση αυτή περιλαμβάνει με αρκετή λεπτομέρεια την ασυμπτωτική συμπεριφορά του τασικού πεδίου στην κορυφή της σφήνας και την ειδική περίπτωση του προβλήματος της ρωγμής. Αυτή θα πρέπει να είναι και η πρώτη λύση, που αναγνωρίζει την ιδιομορφία του τύπου $\sigma \propto r^{-\rho}$ της τάσης (r είναι η απόσταση απ' την κορυφή της σφήνας), καθώς επίσης και την εξάρτηση του εκθέτη ρ από την γωνία της σφήνας και από την συμμετρία της φόρτισης. Στην ειδική περίπτωση που η γωνία της σφήνας γίνεται 360^0 λαμβάνεται η γεωμετρία της ρωγμής και ο πρώτος όρος του αναπτύγματος των τάσεων είναι της μορφής $1/\sqrt{r}$ πολλαπλασιασμένος με κατάλληλη συνάρτηση που δίνει την γωνιακή κατανομή του όρου αυτού. Με βάση τα παραπάνω ο Wieghardt διετύπωσε τα παρακάτω ερωτήματα:

"*...Με δεδομένες τις παραμέτρους αντοχής του ελαστικού μέσου, ποιο είναι το μέγεθος της δύναμης P που είναι αναγκαίο για την θραύση του υλικού και ποιο σημείο και κατεύθυνση εκκινήσει και θα διαδοθεί η ρωγμή; ...*"

Αφού ο Wieghardt δέχθηκε την εφαρμογή του κριτηρίου μέγιστης τάσης έφθασε στο εξής παράδοξο: ενώ η θεωρία προβλέπει άπειρη τάση στην αιχμή της ρωγμής για αυθαίρετα μικρή δύναμη P, εντούτοις τα πειραματικά δεδομένα δίδουν πεπερασμένη τιμή της φόρτισης P. Για την αντιμετώπιση αυτού του παραδόξου ο Wieghardt διετύπωσε ότι:

"*....Εφόσον σε ένα ελαστικό υλικό η θραύση δεν εκκινεί σ' ένα μοναδικό αλλά σε μια μικρή περιοχή, τότε στο κριτήριο θραύσης δεν θα λάβουμε υπόψη μας την μέγιστη τάση ή τροπή, άλλα το ολοκλήρωμα αυτών σε μια μικρή περιοχή. Εφόσον οι ιδιόμορφες τάσεις είναι ολοκληρώσιμες τότε η συνιστώσα των θα είναι πεπερασμένη ποσότητα...* ".

Συνεπώς μ' αυτήν την παραδοχή ουσιαστικά παρέκαμψε το πρώτο ερώτημα και απάντησε στο δεύτερο σκέλος του δεύτερου ερωτήματος, ότι δηλαδή η θραύση θα εκκινήσει απ' την αιχμή της ρωγμής. Κατόπιν προχώρησε στην διερεύνηση του προβλήματος της γωνίας με την οποία θα διαδοθεί η ρωγμή με βάση το κριτήριο της μέγιστης διατμητικής τάσης ή της μέγιστης εφελκυστικής τάσης. Άρα ο Wieghardt ουσιαστικά πρότεινε ότι το κριτήριο θραύσης θα αφορά την σύγκριση της μέσης τάσης σε "μικρή περιοχή" πέριξ της αιχμής με την θεωρητική αντοχή του στερεού που δίδεται από τη σχέση:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma}{c}} \tag{3.2}$$

όπου: Ε = μέτρο του Young [FL^{-2}], γ = επιφανειακή ενέργεια [FL^{-1}] και c είναι η παράμετρος του πλέγματος [L]. Σημειώνεται ότι ο πιο λεπτομερής υπολογισμός της θεωρητικής αντοχής των στερεών δίνει:

$$\sigma_c = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{13}\right)E \tag{3.3}$$

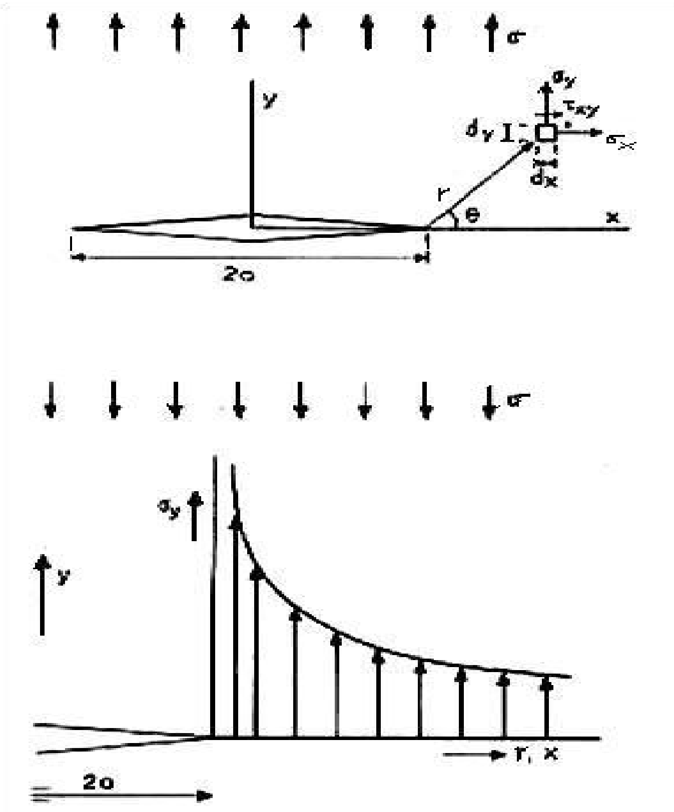
Το 1920, ο A. A. Griffith (Griffith 1920) δημοσίευσε τη θεωρία περί διαδόσεως ρωγμών. Η θεωρία αυτή προέβλεπε ότι μια προϋπάρχουσα ρωγμή θα διαδοθεί αν ταπεινωνόταν η συνολική ενέργεια του ρηγματωμένου σώματος υπό δεδομένες συνθήκες εξωτερικής φόρτισης. Η ανάλυση των τάσεων που έγινε από τον Griffith για τον υπολογισμό της αποθηκευμένης ελαστικής ενέργειας από το ρηγματωμένο σώμα βασίσθηκε στη δημοσιευμένη το 1913 εργασία του Inglis (1913) που αφορούσε το πρόβλημα μικρής ελλειπτικής οπής σε πλάκα που υποβάλλεται σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Ο Griffith έκανε πρώτος την παραδοχή ότι προϋπάρχουν ρωγμές στο υλικό, οι οποίες είναι μεγάλες συγκριτικά με τις ατομικές και μοριακές αποστάσεις. Η βασική αρχή που διετύπωσε στη θεωρία του ο Griffith, ήταν ότι τα στερεά σώματα κατέχουν επιφανειακή ενέργεια όπως και τα ρευστά και για να διαδοθεί μια ρωγμή (ή για να αυξηθεί η επιφανειακή της ενέργεια) η αντίστοιχη επιφανειακή ενέργεια πρέπει να αποδοθεί από την εξωτερικά προσδιδόμενη ενέργεια ή από την εκροή της επιφανειακής ενέργειας του στερεού σώματος. Χρησιμοποιώντας την λύση του Inglis, ο Griffith, υπολόγισε την αύξηση της ενέργειας παραμόρφωσης και με βάση το ισοζύγιο ενέργειας υπολόγισε την τάση θραύσης ως εξής:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma E^*}{\pi\alpha}} \tag{3.4}$$

οπου Ε*=Ε το μέτρο Young για συνθήκες επιπέδου εντάσεως και Ε* =Ε/(1- ν2)[FL^{-2}] για συνθήκες επιπέδου παραμορφώσεως και α το μισό του μήκους της ρωγμής [L]. Μια από τις μεγαλύτερες συνεισφορές του Irwin στη Θραυστομηχανική, είναι ότι κατέδειξε τον καθολικό χαρακτήρα των ασυμπτωτικών πεδίων των τάσεων και των μετατοπίσεων στην γειτονιά της αιχμής της ρωγμής σε ένα γραμμικό ελαστικό στερεό. Ο Irwin ,το 1962, έδειξε ότι για μικρή ακτινική απόσταση r απ' την αιχμή της ρωγμής ισχύει η σχέση:

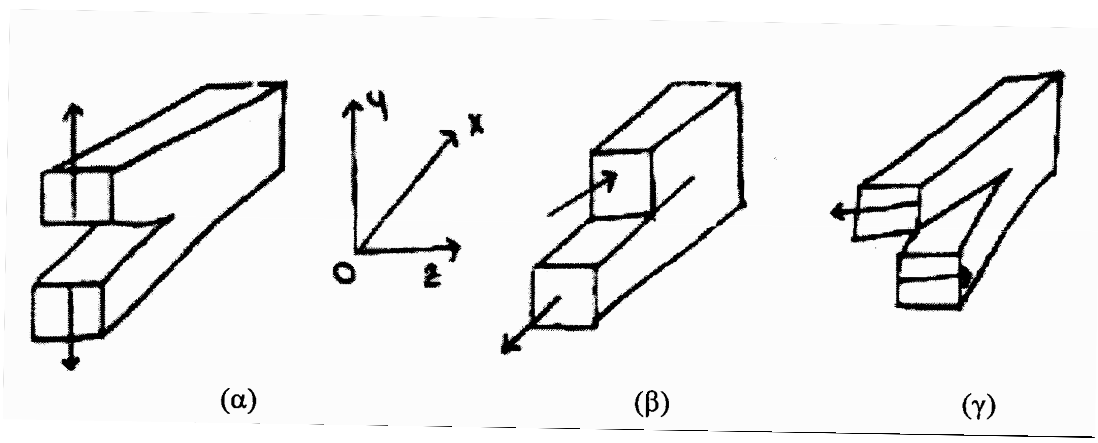
$$\sigma_{ij} = \left(\frac{K}{\sqrt{2\pi\, r}}\right) f_{ij} \tag{3.5}$$

όπου f_{ij} είναι αδιάστατες συναρτήσεις της γωνίας θ του πολικού συστήματος συντεταγμένων Orθ, οι οποίες είχαν βρεθεί προηγουμένως από τους Weighardt, Westergaard και Sneddon για δεδομένες γεωμετρίες ρωγμών και συνθήκες φόρτισης, και r είναι η ακτινική απόσταση του σημείου από την αιχμή της ρωγμής (Σχ. 3.5). Ο Irwin απεκάλεσε τον συντελεστή K, «*Συντελεστή εντάσεως των Τάσεων*».



Σχ. 3.5. Κατανομή της ορθής κατακόρυφης τάσης στην περιοχή της αιχμής της ρωγμής που εφελκύεται στο άπειρο (Broek, 1974)

<u>Τρόποι φορτίσεως, ρωγμών:</u> Τα εντατικά πεδία των αιχμών των ρωγμών μπορούν να υποδιαιρεθούν σε τρεις βασικούς τύπους με καθέναν από αυτούς να συναρτάται με ένα τοπικό τύπο παραμόρφωσης όπως στο Σχ. 3.6.



Σχ. 3.6. Οι βασικοί τρόποι παραμόρφωσης των χειλέων των ρωγμών. (α) Τύπος Ι, (β) τύπος ΙΙ και (γ) τύπος ΙΙΙ

Οι τρόποι αυτοί είναι:

(α) ο «ανοικτός» τύπος (εφελκυσμός) (τύπος I) που είναι συμμετρικός ως προς τα επίπεδα xOy και xOz κατά τον οποίο ισχύει η κάτωθι σχέση στη επιφάνεια της ρωγμής,

$$u_x = u_z = 0 \tag{3.6}$$

(β) ο τύπος της «ολίσθησης» των χειλών της ρωγμής (τύπος II) που είναι συμμετρικός ως προς το επίπεδο xOy και αντι-συμμετρικός ως προς το xOz και στον οποίο ισχύει προς το επίπεδο xOz και στον οποίο ισχύει η κάτωθι σχέση στην επιφάνεια της ρωγμής,

$$u_y = u_z = 0 \tag{3.7}$$

(γ) ο τύπος του «ψαλιδισμού» ή αντι-επίπεδης ολίσθησης (τύπος III) των χειλών της ρωγμής που είναι αντι-συμμετρικός ως προς τα επίπεδα xOy και xOz και στον οποίο ισχύει η κάτωθι σχέση στο επίπεδο της ρωγμής

$$u_x = u_y = 0 \tag{3.8}$$

Οι συντελεστές εντάσεως των τάσεων που αντιστοιχούν στους παραπάνω τύπους ρωγμών I, II και III συμβολίζονται με K_I, K_{II},και K_{III} αντίστοιχα.

Αν και ο Smekal σε μια σειρά άρθρων μεταξύ του 1922 και 1935 παρατήρησε ότι εκτός από τις προϋπάρχουσες ρωγμές πρέπει να δοθεί και ιδιαίτερη προσοχή στις ανομοιογένειες που εμπεριέχουν τα υλικά, εντούτοις δεν υπάρχει ένδειξη ότι η ανάπτυξη μετά από το 1934 της θεωρίας εξαρθρώσεων (dislocation theory) εξάσκησε σημαντική επιρροή στην ανάπτυξη της θραυστομηχανικής, εκτός κατά την τελευταία 20-ετία σε έρευνες που αφορούν περί αιχμών των ρωγμών. Ο Weibull παρουσίασε την στατιστική θεωρία της θραύσεως το 1939 καταδεικνύοντας το φαινόμενο κλίμακας των ψαθυρών υλικών λόγω παρουσίας ετερογενειών σε αυτά. Κατόπιν το 1944 οι Zener και Holloman συσχέτισαν την θεωρία διαδόσεως ρωγμών του Griffith με την ψαθυρή θραύση αν ελαστικών υλικών. Επίσης ο Orowan το 1949 παρατήρησε συντεταγμένη πλαστική παραμόρφωση στις επιφάνειες υλικών που είχαν αστοχήσει με ψαθυρό τρόπο. Κατόπιν το 1958 ο Irwin παρατήρησε ότι στη διατήρηση της ενέργειας τύπου Griffith, πρέπει να ληφθεί υπ' όψη και το έργο της πλαστικής παραμόρφωσης (παραμορφωσιακή ενέργεια που αποθηκεύεται στο σώμα = επιφανειακή ενέργεια συν το έργο της πλαστικής παραμόρφωσης). Η ίδια άποψη διατυπώθηκε και από τον Orowan, ο οποίος κατέδειξε ότι αν τροποποιηθεί η συνθήκη αστοχίας του Griffith έτσι ώστε να λαμβάνεται υπ’ όψη το πλαστικό έργο, τότε είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την πρόβλεψη της ψαθυρής θραύσης.

Ο Irwin το 1955 πρότεινε και το 1957 απέδειξε ότι η ενεργειακή προσέγγιση είναι ισοδύναμη με αυτήν της εντάσεως της τάσης σύμφωνα με την οποία συμβαίνει θραύση όταν λάβει χώρα κρίσιμη διανομή τάσεων που είναι χαρακτηριστική του υλικού. Έως το 1959 η αρχή των Griffith-Irwin της μηχανικής των οξειών ρωγμών είχε γίνει γνωστή ευρέως γνώστη και η ASTM (American Society for Testing and Materials) δημιούργησε ειδική επιτροπή για την αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων θραύσεων.

Αναγνωρίσθηκε επίσης το γεγονός ότι για την πειραματική μελέτη τέτοιων προβλημάτων έπρεπε να σχεδιαστούν δοκίμια με τεχνητές ρωγμές. Έτσι ακολούθησε η εκτέλεση πειραμάτων προσδιορισμού της θραυστικής στιβαρότητας σε συνθήκες επίπεδης παραμορφώσης. Κατά την περίοδο από το 1956 έως σήμερα ερευνητές όπως ο Hill, Allan and Southwell, Lee, Neaber, Halt, Dugdale, McClintock και άλλοι διετύπωσαν αναλυτικές μεθόδους για την μελέτη του εντατικοπαραμορφωσιακού πεδίου στη γειτονιά οξειών εγκοπών. Η εργασία των τριών τελευταίων ερευνητών επεκτάθηκε ώστε να περιλαμβάνει και ρωγμές. Οι συνθήκες για την δυναμική διαδιδόμενων ρωγμών διατυπώθηκαν σε πρώτη φάση το 1948 από τον Mott.

Ανακεφαλαιώνοντας, η ιστορία της Θραυστομηχανικής επιδεικνύει ανάπτυξη και στη θεωρία και στα πειράματα. Η θεωρητική ανάπτυξη της Θραυστομηχανικής, βασίστηκε πάνω στη γραμμική ελαστικότητα των απειροστών τροπών. Αυτή η προσέγγιση επιβεβαιώνεται από τις πειραματικές μετρήσεις. Δύο δεκαετίες πριν έχουν γίνει και θεωρητικές αναλύσεις της πλαστικής ζώνης πλησίον της αιχμής της ρωγμής.

Φιλοσοφία και σκοπός: Η βασική φιλοσοφία της Θραυστομηχανικής βρίσκεται στην παραδοχή ότι το ελαστικό πεδίο τάσεων στη γειτονιά της αιχμής της ρωγμής ελέγχει τη συμπεριφορά της. Η επίδραση αυτού του ελαστικού πεδίου τάσεων μπορεί να μετρηθεί με τον συντελεστή εντάσεως των τάσεων, που συμβολίζεται με K, ή εναλλακτικά από τον ρυθμό εκροής της ενέργειας παραμόρφωσης g που, για ισότροπο υλικό με ρωγμή, ορίζεται από τη σχέση

$$g = \frac{K_I^2(1-\nu)}{2G} + \frac{K_{II}^2(1-\nu)}{2G} + \frac{K_{III}^2}{2G} \tag{3.9}$$

Η κατανόηση αυτών των ποσοτήτων και η σχέση τους είναι βασική για αυτή την κατανόηση αυτής της προσέγγισης. Επιπροσθέτως, γίνεται η παραδοχή ότι από όλες τις ρωγμές σε μια κατασκευή ή δοκίμιο, μόνο μια ρωγμή παίζει κρίσιμο ρόλο στην αστοχία. Με άλλα λόγια, ο μηχανισμός που απαιτεί την συνένωση μικρο-ρωγμών σε μακρορωγμή δεν περιλαμβάνεται στη μαθηματική μοντελοποίηση που ακολουθεί. Αυτό γίνεται διότι είναι επιθυμητή η σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα σε προ-ρηγματωμένα δοκίμια ή κατασκευές με μια τεχνητή ρωγμή και γιατί σε πραγματικές εφαρμογές αστοχίας κατασκευών, αυτή (δηλαδή η αστοχία) εκδηλώνεται με μια μόνο ρωγμή. Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι η ανάλυση που ακολουθεί είναι ακριβής μόνο για ψαθυρή θραύση που εκκινεί από οξεία ρωγμή με αιχμηρά άκρα.

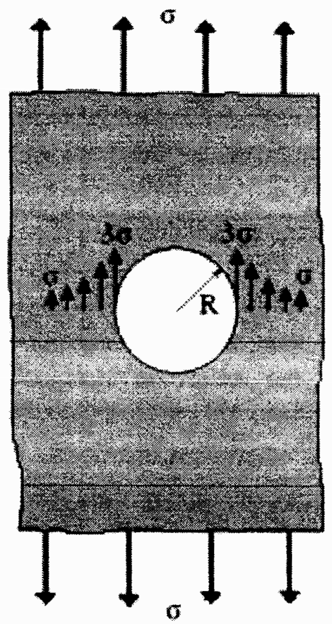
3.3 "ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ" ΚΑΙ "ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ"

Στην προσέγγιση της "Αντοχής των Υλικών", δίδεται η γεωμετρία της κατασκευής η οποία υποτίθεται δεν έχει καμία ατέλεια για την οποία ζητείται να προσδιορισθεί η φέρουσα ικανότητα της. Ένας τρόπος για να γίνει αυτός ο υπολογισμός, είναι να βρεθεί η σχέση του εξωτερικού φορτίου με την μέγιστη τάση που αναπτύσσεται εντός της κατασκευής. Κατόπιν εφαρμόζοντας ένα κριτήριο αστοχίας τύπου Rankine, συγκρίνεται η μέγιστη αυτή τάση με την αντοχή του υλικού (τάση διαρροής ή τάση θραύσης).

Ένας παραδεκτός σχεδιασμός είναι αυτός που δίνει μέγιστη τάση μικρότερη από την αντοχή του υλικού, η οποία μειώνεται ανάλογα με τον συντελεστή ασφάλειας. Η σύγκριση αυτής της προσέγγισης με την αντίστοιχη που ακολουθείται στη Θραυστομηχανική μπορεί να γίνει με την βοήθεια του παραδείγματος του Σχ.3.3.

Στην απλή "κατασκευή" του Σχ. 3.9α ένα κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου 2R, υποβάλλεται σε μονοαξονικό εφελκυστικό εντατικό πεδίο σ. Όπως φαίνεται στο Σχ. 3.9 η μέγιστη εφελκυστική τάση, δρα στο σύνορο του ανοίγματος και σχετίζεται με την εξωτερική τάση με την απλή σχέση:

$$\sigma_{max}=3\sigma \tag{3.10}$$



Σχ. 3.9. Κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου 2R υποβάλλεται σε εφελκυστική τάση σ

Μπορεί να θεωρηθεί ότι το άνοιγμα δεν θα αστοχήσει, αν η μέγιστη τάση δεν υπερβεί την αντοχή του πετρώματος σ_Y, η οποία απομειώνεται κατάλληλα με συντελεστή ασφάλειας S που λαμβάνει υπ' όψη την μεταβλητότητα της αντοχής του πετρώματος ή μεγαλύτερα φορτία λειτουργίας:

$$\sigma_{\max} \le \frac{\sigma_Y}{S} \Leftrightarrow \sigma \le \frac{\sigma_Y}{3\sigma} \quad (3.11)$$

Αν ικανοποιείται η ανωτέρω ανίσωση τότε η κατασκευή θα είναι ασφαλής, τουλάχιστον από την άποψη της προσέγγισης της Αντοχής των Υλικών.

Κατόπιν θεωρείται ότι το πέτρωμα, διασχίζεται από ρωγμές και ότι μια τέτοια ρωγμή βρίσκεται εκεί που αναμένεται να εκδηλωθεί η μέγιστη τάση, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.9β. Η κρίσιμη μηχανική παράμετρος ρηγματωμένων σωμάτων είναι ο "Συντελεστής Εντάσεως των Τάσεων". Αυτή η παράμετρος που συμβολίζεται με K, μπορεί να προσδιορισθεί από κατάλληλη μαθηματική ανάλυση, παρόμοια με αυτή που ορίζεται για τον υπολογισμό των τάσεων σε άρρηκτη κατασκευή. Για ρωγμή πολύ μικρότερη από την ακτίνα του ανοίγματος ($\alpha \ll R$) η ανάλυση της ρηγματωμένης σήραγγας του Σχ. 3.10 δίνει:

$$K_I = 3.365\sigma\sqrt{\pi\alpha} \quad (3.12)$$

Το βασικότερο κριτήριο αστοχίας στα πλαίσια της Θραυστομηχανικής διατυπώνεται ως εξής:

$$K_I \le \frac{K_{IC}}{S} \quad (3.13)$$

όπου, K_{IC} είναι ιδιότητα του υλικού και ονομάζεται «Θραυστική Στιβαρότητα σε Συνθήκη

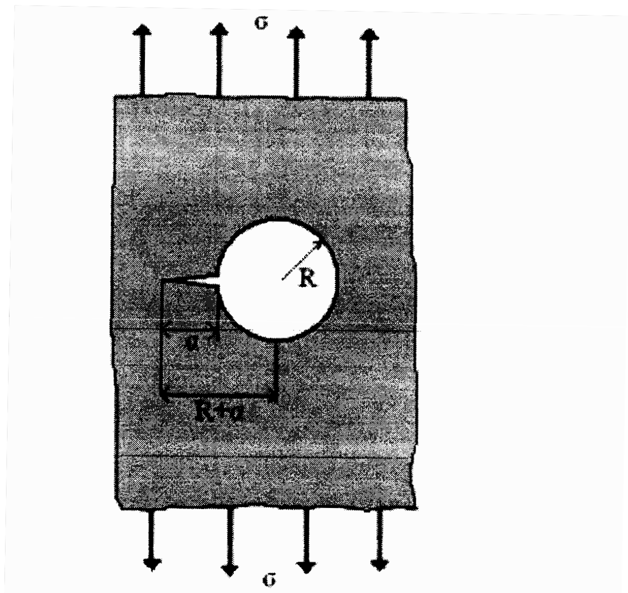
Επίπεδης Παραμόρφωσης», η οποία απομειώνεται κατάλληλα, όπως και στην περίπτωση της αντοχής των υλικών, με τον συντελεστή ασφάλειας S. Άρα η ανίσωση που δίνει το ασφαλές φορτίο λειτουργίας της σήραγγας λαμβάνει τη μορφή:

$$\sigma < \frac{K_{IC}}{3.365 S\sqrt{\pi\alpha}}, \quad (a << R) \tag{3.14}$$

Η σύγκριση των σχέσεων (3.11) και (3.14) είναι ενδεικτική της διαφοράς των θεωριών της Αντοχής των Υλικών και της Θραυστομηχανικής. Ήτοι, και οι δύο σχέσεις περιέχουν μια παράμετρο ενδεικτικής αντοχής του υλικού -είτε την τάση διαρροής ή την θραυστική στιβαρότητα- αλλά χαρακτηρίζονται από μια βασική διαφορά: κατά την θραυστομηχανική προσέγγιση, εισάγεται μια νέα δομική παράμετρος που είναι το μέγεθος της ρωγμής α. Στην Θραυστομηχανική λοιπόν, το μέγεθος της είναι θεμελιώδης δομική παράμετρος. Είναι η θεώρηση αυτής της παραμέτρου που διαχωρίζει την "Αντοχή των Υλικών" από την "Θραυστομηχανική".

Κατά την τελευταία προσέγγιση είναι δυνατόν να διατυπωθούν δύο ερωτήματα, ήτοι:

- Ποιο είναι το μέγιστο μήκος προϋπάρχουσας ρωγμής *α* έτσι ώστε η τάση αστοχίας να μην είναι μικρότερη από προκαθορισμένη μέγιστη τάση λειτουργίας;
- Ποια είναι η επίδραση του μήκους προϋπάρχουσας ρωγμής επί της αντοχής του δομικού στοιχείου;



Σχ. 3.10 Κυκλικό άνοιγμα με ρωγμή στο σύνορο του.

4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΑ ΣΩΜΑΤΑ ΜΕ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΌ ΚΑΛΥΜΜΑ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

4.1.1 Γενικά

Η επίπεδη ελαστικότητα είναι αντικείμενο μελέτης στην ευρύτερη περιοχή της «Μηχανικής των Στερεών Σωμάτων». Η μελέτη και επίλυση προβλημάτων που άπτονται του αντικειμένου αυτού, οδήγησαν στην διατύπωση της θεωρίας «Επίπεδης Ελαστικότητας». Οι βάσεις της θεωρίας της επίπεδης ελαστικότητας τοποθετήθηκαν ένα αιώνα πριν από ερευνητές όπως ο Airy (πραγματικό δυναμικό τάσης, 1862), Maxwell (διαρμονική εξίσωση για την τασική συνάρτηση Airy, 1868), Goursat (επίλυση της διαρμονικής εξίσωσης, 1898), Mitchell (τάσεις ανεξάρτητες των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού, 1899), Kolosov (μιγαδικές εκφράσεις της λύσης της διαρμονικής εξίσωσης, 1909), Marguerre (διαρμονική εξίσωση του δυναμικού των μετατοπίσεων, 1933), και Muskhelishvili (ολοκληρώματα Cauchy και τεχνικές συμμόρφου μετασχηματισμού, 1934) μεταξύ πολλών άλλων.

Το αντικείμενο μελέτης της επίπεδης ελαστικότητας, συνίσταται στον προσδιορισμό και την μαθηματική περιγραφή του πεδίου κατανομής των τάσεων και των μετατοπίσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό ενός επίπεδου ελαστικού ισότροπου και συνεχούς σώματος λόγω εξωτερικών δυνάμεων τις οποίες δέχεται το σώμα αυτό. Η Θραυστομηχανική, επεκτείνει την Θεωρία Ελαστικότητας, σε επίπεδα σώματα τα οποία περιλαμβάνουν δομές διαταραχής της συνέχειας τους όπως είναι οπές και ρωγμές. Δίνοντας έμφαση στον υπολογισμό της κατανομής των τάσεων σε περιοχές κοντά και κατά μήκος των συνόρων των δομών αυτών και ποσοτικοποίηση της έντασης του τασικού πεδίου με τον υπολογισμό του κατάλληλου συντελεστή έντασης των τάσεων, στοχεύοντας παράλληλα στην ανάπτυξη κριτηρίων αστοχίας του υλικού, τα οποία λαμβάνουν υπ΄ όψη τον συντελεστή αυτό.

4.1.2 Διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων της επίπεδης εντατικής ανάλυσης

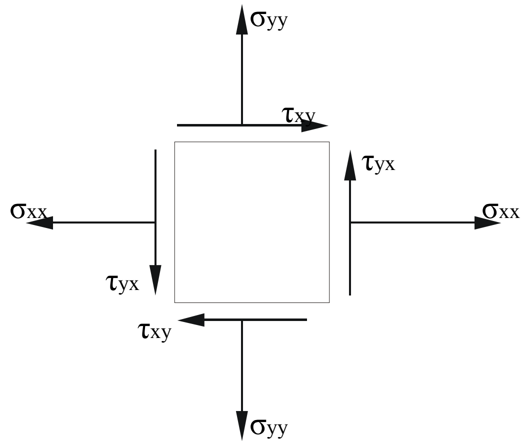
Ο υπολογισμός της κατανομής τάσεων σε ένα συνεχές ελαστικό μέσο που βρίσκεται υπό την επίδραση εξωτερικής φόρτισης, ανήκει στην κατηγορία των «Προβλημάτων Πεδίου» (*Field Problems*). Το αποτέλεσμα της επίλυσης αυτών των προβλημάτων, είναι ο προσδιορισμός μιας ή περισσοτέρων συναρτήσεων πεδίου, οι οποίες προκύπτουν ως λύσεις μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης ή συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων. Οι εξισώσεις αυτές είναι αποτέλεσμα συνδυασμού φυσικών νόμων ισορροπίας ή διατήρησης ενός ή περισσοτέρων φυσικών μεγεθών και καταστατικών νόμων που συνδέουν τη βαθμίδα των συναρτήσεων πεδίου με τα μεγέθη αυτά, τα οποία εκφράζονται επίσης ως συναρτήσεις πεδίου.

Στην περίπτωση της Επίπεδης Εντατικής Ανάλυσης σε ένα συνεχές ελαστικό μέσο, η Διαφορική Εξίσωση πεδίου, προκύπτει από τον συνδυασμό των παρακάτω νόμων:

1) Νόμος Ισορροπίας Δυνάμεων: ο οποίος εξασφαλίζει την στατική ισορροπία του σώματος

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

όπου σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy}, τ_{yx} είναι οι συνιστώσες των ορθών και διατμητικών τάσεων που εξασκούνται σε οποιοδήποτε υλικό σημείο του συνεχούς μέσου με τον προσανατολισμό που δίνει το ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 4.1: *Συνιστώσες ορθών και διατμητικών τάσεων που δρουν σε ένα υλικό σημείο συνεχούς ελαστικού μέσου.*

Για τις διατμητικές συνιστώσες τάσεων τ_{xy} και τ_{yx} ισχύει ότι $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ ώστε να μην αναπτύσσονται ροπές στροφής μέσα στο υλικό (ισορροπία ροπών).

2) Νόμος Συνέχειας ή Συμβατότητας των Τροπών: ο οποίος εξασφαλίζει την συνέχεια του υλικού και διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}=0 \tag{4.2}$$

3) Ο καταστατικός νόμος ισότροπης ελαστικότητας του *Hooke* σε δύο διαστάσεις και υπό συνθήκες επίπεδης τάσης ο οποίος συνδέει τις τροπές με τις τάσεις:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}-\nu\sigma_{yy}}{E} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}-\nu\sigma_{xx}}{E} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{(1+\nu)\tau_{\mathrm{xy}}}{\mathrm{E}} \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Παραγωγίζοντας τη πρώτη εκ των εξισώσεων (4.1) ως προς x και τη δεύτερη ως προς y και αθροίζοντας αυτές προκύπτει η ακόλουθη τροποποιημένη εξίσωση ισορροπίας τάσεων:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}=0 \tag{4.4}$$

Με αντικατάσταση των εξισώσεων (4.3) στην (4.2) και σε συνδυασμό με την (4.4) προκύπτει η τελική διαφορική εξίσωση συμβατότητας τροπών:

$$\nabla^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=0 \tag{4.5}$$

Η παραπάνω αποτελεί και την τελική διαφορική εξίσωση πεδίου, η επίλυση της οποίας δίνει ως λύση το πεδίο των τάσεων που αναπτύσσεται εντός του υλικού.

4.2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

4.2.1 Συναρτήσεις πεδίου και μιγαδικά δυναμικά

Η επίλυση της εξίσωσης (4.5), αποτελεί πρόβλημα πεδίου σε δύο διαστάσεις (δηλαδή στο επίπεδο O-xy) το ζητούμενο του οποίου, είναι ο υπολογισμός συνεχών και ολομορφικών συναρτήσεων ορισμένων στο πεδίο του xy επίπεδου που καταλαμβάνει ένα επίπεδο ελαστικό σώμα, οι οποίες ονομάζονται «Συναρτήσεις Πεδίου» και δίνουν σε κάθε σημείο αυτού τις τάσεις και μετατοπίσεις.

Πρώτος ο Airy το 1862, πρότεινε μια τέτοια συνάρτηση πεδίου U, η οποία είναι γνωστή ως «Τασική Συνάρτηση του Airy» ή ως «Πραγματικό Δυναμικό Τάσης». Η συνάρτηση αυτή ορίσθηκε από τον Airy έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

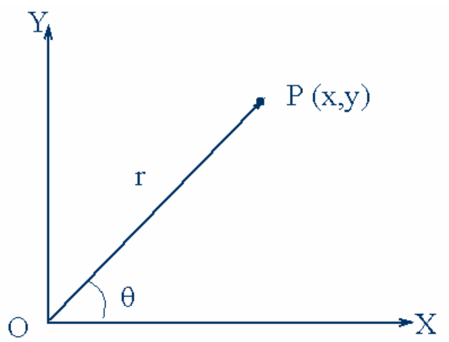
$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \tag{4.6}$$

Οπότε συνεπεία των παραπάνω σχέσεων, η εξίσωση (3.5) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\nabla^4 U = 0 \tag{4.7}$$

η οποία καλείται «Διαρμονική Εξίσωση της Συνάρτησης του Airy» και διατυπώθηκε από τον Maxwell το 1868, για να λυθεί για πρώτη φορά τριάντα χρόνια αργότερα από τον Goursat (1898).

Το 1909 ο Kolosov διατύπωσε μιγαδικές εκφράσεις των λύσεων της διαρμονικής εξίσωσης χρησιμοποιώντας για πρώτη φορά την έννοια των μιγαδικών δυναμικών $\phi(z)$ και $\psi(z)$ και των παραγώγων τους $\Phi(z) = \phi'(z) = \dfrac{d\phi}{dz}$ και $\Psi(z) = \psi'(z) = \dfrac{d\psi}{dz}$. Όπου z είναι η μιγαδική ανεξάρτητη μεταβλητή, που περιγράφει την θέση ενός οποιουδήποτε σημείου στο επίπεδο και ορίζεται από τον μετασχηματισμό $z = x + iy$, για Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ή την ταυτότητα του Euler $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ για πολικό σύστημα συντεταγμένων (βλ. Σχήμα 4.2)



Σχήμα 4.2: Διάνυσμα θέσης ενός οποιουδήποτε σημείου επί του μιγαδικού επιπέδου.

Οι λύσεις που δόθηκαν από τον Kolosov είχαν πολυωνυμική μορφή και αφορούσαν συνεχή και ισότροπα ελαστικά μέσα. Οι λύσεις αυτές αδυνατούσαν όμως να περιγράψουν, το εντατικό πεδίο γύρω από οπές ακανόνιστου σχήματος ή ρωγμές ή ακόμα και κατά μήκος συνόρου αλλαγής ελαστικών ιδιοτήτων του μέσου. Το πρόβλημα αυτό, αντιμετωπίσθηκε από τον Muskhelishvili, οποίος εξέφρασε τα μιγαδικά δυναμικά ως επικαμπύλια ολοκληρώματα Cauchy συναρτήσεων πυκνότητας τάσεων κατά μήκος οποιουδήποτε συνόρου ιδιομορφίας του υλικού και υπολόγισε τα ολοκληρώματα αυτά με τεχνικές σύμμορφων μετασχηματισμών. Παρόλα αυτά, τόσο οι λύσεις του Kolosov όσο και αυτές του Muskhelishvili συγκλίνουν σε ταυτοτικές σχέσεις που συνδέουν τα μιγαδικά δυναμικά με τις τάσεις και τις μετατοπίσεις και οι οποίες θεμελιώνουν τον ενιαίο χαρακτήρα της θεωρίας ελαστικότητας. Η σχέσεις αυτές δίνονται από της ακόλουθες εκφράσεις:
για τις τάσεις σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2\left(\phi'(\mathrm{z})+\overline{\phi'}(\bar{\mathrm{z}})\right)=4\mathrm{Re}\,\phi'(\mathrm{z})\\
&\sigma_{xx}-\sigma_{yy}+2i\tau_{xy}=2\left(\bar{z}\phi''(\mathrm{z})+\psi'(\mathrm{z})\right)\\
&\sigma_{yy}+i\tau_{xy}=\phi'(\mathrm{z})+\overline{\phi'}(\bar{\mathrm{z}})+[\bar{\mathrm{z}}\phi''(\mathrm{z})+\psi'(\mathrm{z})]
\end{aligned}\right\}\tag{4.8}$$

τις μετατοπίσεις σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

$$\mathrm{u}+\mathrm{iv}=\frac{\kappa}{2\mu}(\phi(\mathrm{z})\text{ - }\mathrm{z}\overline{\phi'}(\bar{\mathrm{z}})\text{ - }\overline{\psi}(\bar{\mathrm{z}}))\tag{4.9}$$

τις τάσεις σε πολικό σύστημα συντεταγμένων

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}=2\left(\phi'(\mathrm{z})+\overline{\phi'}(\bar{\mathrm{z}})\right)=4\mathrm{Re}\,\phi'(\mathrm{z})\\
&\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}+2i\tau_{r\theta}=2e^{i\theta}\left(\bar{z}\phi''(\mathrm{z})+\psi'(\mathrm{z})\right)\\
&\sigma_{rr}+i\tau_{r\theta}=\phi'(\mathrm{z})+\overline{\phi'}(\bar{\mathrm{z}})-e^{i\theta}[\bar{\mathrm{z}}\phi''(\mathrm{z})+\psi'(\mathrm{z})]
\end{aligned}\right\}\tag{4.10}$$

τις μετατοπίσεις σε πολικό σύστημα συντεταγμένων

$$\mathrm{u_r}+\mathrm{iu}_\theta=\frac{\kappa}{2\mu}\mathrm{e}^{\text{-i}\theta}(\phi(\mathrm{z})\text{ - }\mathrm{z}\overline{\phi'}(\bar{\mathrm{z}})\text{ - }\overline{\psi}(\bar{\mathrm{z}}))\tag{4.11}$$

όπου: u, v είναι οι μετατοπίσεις κατά την έννοια των αξόνων Ox και Oy αντίστοιχα, κ είναι η σταθερά του *Muskhelishvili* και μ είναι το μέτρο διάτμησης του ελαστικού υλικού. Οι δύο αυτές παράμετροι συνδέονται άμεσα με τις ελαστικές ιδιότητες του μέσου (δηλ. του μέτρου ελαστικότητας *E* και του λόγου του *Poisson ν*) μέσω των ακολούθων σχέσεων για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (p*lane strain*) και συνθήκες επίπεδης τάσης (p*lane stress*):

$$\left.\begin{aligned}
&\kappa=3-4\nu\ \ (\text{plane strain})\text{ ή }\kappa=\frac{3\text{ - }\nu}{1+\nu}\,(\text{plane stress})\\
&\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}
\end{aligned}\right\}\tag{4.12}$$

4.2.2 Ανασκόπηση των βασικών μεθόδων επίλυσης του προβλήματος της επίπεδης ελαστικότητας

Ο Teodorescu το1964 έδωσε μια γενική ανασκόπηση των βασικών μαθηματικών τεχνικών επίλυσης του προβλήματος της επίπεδης ελαστικότητας που αναπτύχθηκαν από το 1860 εως και σήμερα. Οι τεχνικές αυτές κατατάσσονται στις παρακάτω κατηγορίες:

I. Υπολογιστικές μέθοδοι

1 - Στοιχειώδη διαρμονικά πολυώνυμα
2 - Η U σε μορφή Fourier
3 - Μιγαδικές συναρτήσεις
4 - Προσεγγιστικές μέθοδοι με τη χρήση υπολογιστού (πεπερασμένα στοιχεία, συνοριακά στοιχεία, διακριτά στοιχεία κ.λπ.)

<u>Α. Ημι – αντίστροφες μέθοδοι</u>

i. Έμμεση – Παραδοχή για την U και ικανοποίηση Συνοριακών Συνθηκών (συντομογρ.Σ.Σ). Λ.χ. η U μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και να εκτιμηθούν τους συντελεστές έτσι ώστε η U να ικανοποιεί τις Σ.Σ.
ii. Άμεση – Παραδοχή για την U που ικανοποιεί μερικές συνθήκες του μονού ή ζυγού της μεταβλητής (λ.χ. ανάλυση με σειρές Fourier) και προσδιορισμός παραμέτρων από τις συνοριακές συνθήκες.

<u>Β. Αναλυτικές μέθοδοι</u>

i. Ακριβείς – Κλειστής μορφής, συναρτήσεις δυναμικών πραγματικές ή μιγαδικές

ii. Προσεγγιστικές –
- a) Άπειρες σειρές που ικανοποιούν U και τις Σ.Σ. ακριβώς
- b) Άπειρες σειρές που ικανοποιούν U και τις Σ.Σ. προσεγγιστικά
- c) Μέθοδοι των μεταβολών (variation methods) όπου διακρίνονται δύο περιπτώσεις:
  - c1) Βασική εξίσωση (governing equation): Ακριβώς
    Συνοριακές συνθήκες : Προσεγγιστικά
  - c2) Το αντίστροφο
- d) Μέθοδοι τελεστών: 1) Μετασχηματισμοί Fourier
  2) Μετασχηματισμοί Laplace
  3) Μετασχηματισμοί Mellin
  4) Μετασχηματισμοί Wiener – Hopf, κ.λπ
- e) Πεπερασμένες διαφορές (finite differences)
- f) Μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (boundary elements)
- g) Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite elements)

II. Πειραματικές μέθοδοι

1) Ανάλογα (analogues)
2) Φωτοελαστικότητα
3) Ψαθυρά επικαλύμματα (brittle coatings)

4.2.3 Συνοριακές συνθήκες και τρόποι διατύπωσής τους

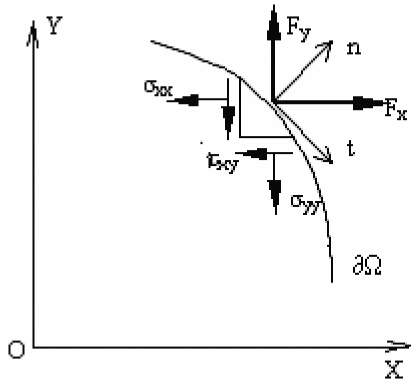
Το πρόβλημα της επίπεδης ελαστικότητας, είναι στην ουσία ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. Στα προβλήματα πεδίου αυτού του είδους, η οποιαδήποτε μαθηματική λύση (αναλυτική ή προσεγγιστική) βασίζεται στην επαλήθευση των συνοριακών συνθηκών οι οποίες είναι γνωστές από την διατύπωση του προβλήματος και σε συνδυασμό με τις ελαστικές ιδιότητες του πεδίου (οι οποίες επίσης είναι γνωστές) αναπαράγουν την λύση σε όλο το πεδίο επίλυσης με επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας και γραμμικής ελαστικότητας.

Ανάλογα με τον τρόπο διατύπωσης των συνοριακών συνθηκών, τα προβλήματα συνοριακών τιμών διακρίνονται σε τρεις βασικές κατηγορίες:

i. 1ο Θεμελιώδες πρόβλημα: δίνονται οι τάσεις σε τμήμα του συνόρου. Οι συνοριακές συνθήκες που δίνονται με τον τρόπο αυτό ονομάζονται «Φυσικές Συνοριακές Συνθήκες» ή «Τύπου Neumann». Οι συνθήκες αυτές μπορεί να μην δίνονται άμεσα υπό την μορφή τάσεων άλλα έμμεσα ως συνιστώσες της συνισταμένης φόρτισης επί του τμήματος συνόρου $\partial\Omega$ που προκύπτει ως το συνοριακό ολοκλήρωμα των τάσεων που ενεργούν επί του τμήματος αυτού:

$$f(x,y)=i\int_{\partial\Omega}(\sigma_{xx}n_x+i\sigma_{yy}n_y)dt=\varphi(z)+z\overline{\varphi'}(\overline{z})+\overline{\psi}(\overline{z})=i(F_x+iF_y)+C \qquad (4.13)$$

όπου F_x και F_y είναι οι συνιστώσες της συνισταμένης φόρτισης που εξασκείται επί του συνόρου $\partial\Omega$, t είναι η εφαπτομενική μεταβλητή θέσεως στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται επί του συνόρου $\partial\Omega$ και C είναι σταθερά ολοκλήρωσης (βλ και Σχήμα 4.3).



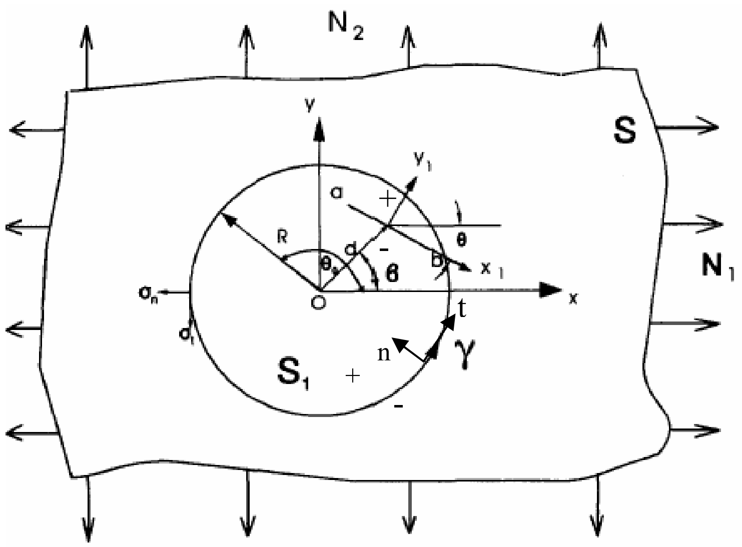
Σχήμα 4.3: Συνοριακές συνθήκες τάσεων όπως διατυπώνονται από την εξίσωση (4.13)

ii. 2ο Θεμελιώδες πρόβλημα: δίνονται οι μετατοπίσεις σε τμήμα του συνόρου. Οι συνθήκες αυτές, ονομάζονται «Γεωμετρικές Συνοριακές Συνθήκες» ή «Τύπου Dirichlet» και αφορούν τη συνολική μετατόπιση των σημείων ενός τμήματος συνόρου που δίνεται απ' ευθείας από την εξίσωση (4.9) ή την εξίσωση (4.11).

iii 3ο Θεμελιώδες πρόβλημα: μικτό (δίνονται τάσεις και μετατοπίσεις) σε τμήμα συνόρου. Οι συνοριακές συνθήκες σε αυτή την περίπτωση χαρακτηρίζονται ως «Μικτές Συνοριακές Συνθήκες» και δίδονται για το ίδιο τμήμα συνόρου με συνδυαστική διατύπωση των εξισώσεων (4.9) ή (4.11) και (4.13).

4.3 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΠΟΥ ΦΕΡΕΙ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΡΩΓΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΑΛΥΠΤΕΤΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΜΕ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΟ ΚΥΚΛΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ

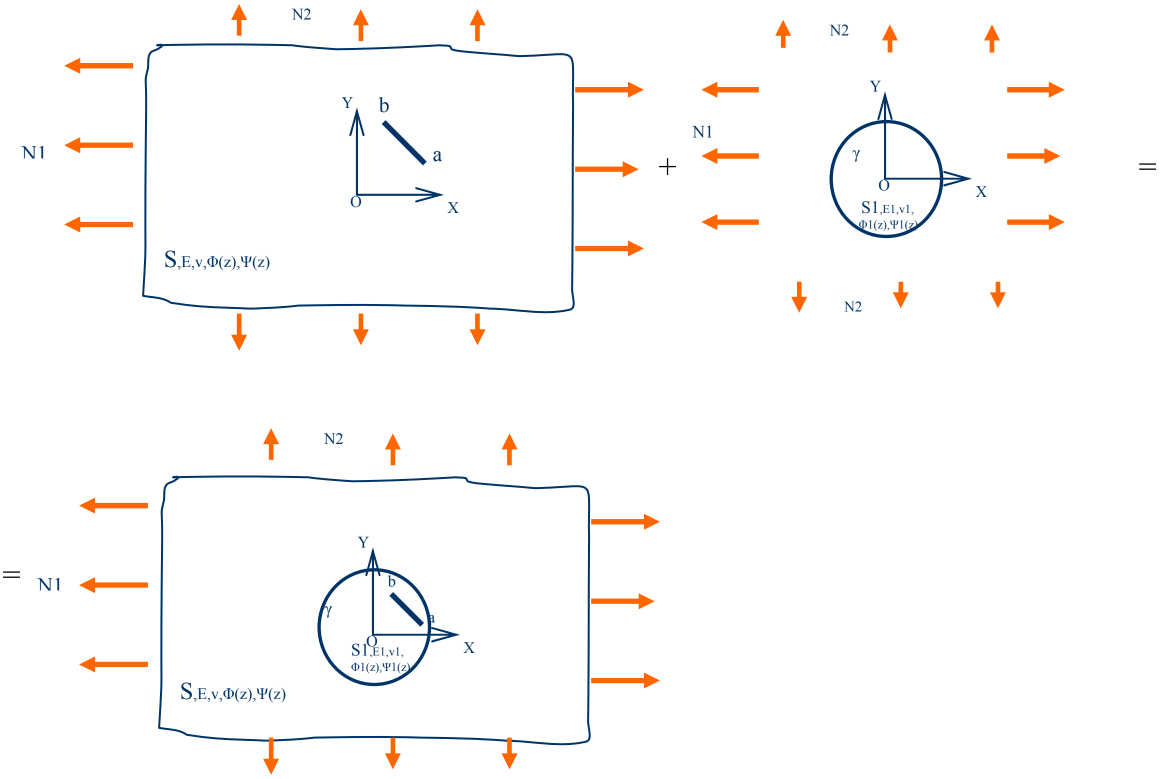
Στο πρόβλημα που εξετάζεται στην παρούσα εργασία, θεωρείται μια ελαστική πλάκα η οποία φέρει ρωγμή πεπερασμένου μήκους και μικρού πάχους, που καλύπτεται εξ' ολοκλήρου από κυκλικό ελαστικό κάλυμμα του οποίου οι μηχανικές ιδιότητες διαφέρουν από αυτές της πλάκας. Το όλο σύστημα (πλάκα, ρωγμή και κάλυμμα) υπόκειται σε επίπεδη διαξονική φόρτιση με μία οριζόντια συνιστώσα N_1 και κατακόρυφη N_2. Οι τάσεις N_1 και N_2 αποτελούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος οι οποίες θεωρούνται σε άπειρη απόσταση από το κέντρο της πλάκας για να μην υπάρχει αλληλεπίδραση. Τέλος, είναι δεδομένες και οι ελαστικές σταθερές τόσο της πλάκας όσο και του καλύμματος. Η σχηματική απεικόνιση του εν λόγω μοντέλου, δίδεται από το ακόλουθο σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4: *Ελαστική ρηγματωμένη πλάκα με κυκλικό ενισχυτικό κάλυμμα που υπόκειται σε επίπεδη εντατική φόρτιση και το καθολικό σύστημα αναφοράς xOy καθώς επίσης και το τοπικό σύστημα αναφοράς της ρωγμής $x_1O_1y_1$.*

Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται και ο προσανατολισμός τοπικών συστημάτων αναφοράς, τα οποία ορίζονται για κάθε σύνορο ξεχωριστά (κατά μήκος των συνόρων της ρωγμής ℓ, και του περιγράμματος του καλύμματος γ, αντίστοιχα) με το θετικό πρόσημο (+) να αντιστοιχεί στη πλευρά που δείχνει το ορθό τοπικό μοναδιαίο διάνυσμα n για το περίγραμμα γ ή ο άξονας y_1 για ρωγμή και το αρνητικό (-) να αντιστοιχεί στην ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση.

Για την επίλυση του προβλήματος, χρησιμοποιείται η θεωρία των μιγαδικών δυναμικών, η οποία εφαρμόζεται για τον υπολογισμό των τάσεων και μετατοπίσεων κατά μήκος της ρωγμής και κατά μήκος του περιγράμματος του καλύμματος (στο σχήμα εμφανίζεται σαν σύνορο γ). Απώτερος στόχος της μελέτης του συγκεκριμένου προβλήματος είναι, ο υπολογισμός του συντελεστή έντασης των τάσεων στα άκρα της ρωγμής, ο οποίος αποτελεί στην ουσία ένα ποσοτικό κριτήριο για την μέτρηση της έντασης του πεδίου τάσεων στα σημεία αυτά και ο τρόπος που αυτός επηρεάζεται λόγω τις παρουσίας του ενισχυτικού καλύμματος. Το εντατικό πεδίο που αναπτύσσεται στην περιοχή επικάλυψης πλάκας-ενισχυτικού καλύμματος, είναι αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης μεταξύ των εντατικών πεδίων που αναπτύσσονται στην πλάκα και στο κάλυμμα ξεχωριστά. Η μαθηματική περιγραφή των πεδίων αυτών, γίνεται με συναρτήσεις μιγαδικών δυναμικών που ορίζονται ξεχωριστά για το κάθε υλικό, ενώ η σύνθεση των δύο εντατικών πεδίων στην περιοχή επικάλυψης γίνεται εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης.



Σχήμα 4.5: Σύνθεση των επιμέρους εντατικών πεδίων πλάκας και καλύμματος σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης

Η λύση βασίζεται στην εφαρμογή μικτού τύπου συνοριακών συνθηκών, κατά μήκος της ρωγμής και του περιγράμματος του καλύμματος, οι οποίες εκφράζουν στην ουσία την ταυτόχρονη ισορροπία τάσεων και μονοσήμαντου των μετατοπίσεων κατά μήκος των συνόρων αυτών. Οι μαθηματικές εκφράσεις των συνθηκών ισορροπίας τάσεων και μονοσήμαντου των μετατοπίσεων, διατυπώνονται υπό την μορφή μιγαδικών δυναμικών τα οποία στην συνέχεια εκφράζονται ως συνοριακά ολοκληρώματα Cauchy (κατά την θεωρία του *Muskhelishvili*), για να προκύψει τελικά ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων. Οι εξισώσεις αυτές, λαμβάνουν αλγεβρική μορφή, καθώς τα ολοκληρώματα υπολογίζονται προσεγγιστικά μέσω πολυωνύμων παρεμβολής *Lobatto-Chebychev* επί ενός καννάβου προκαθορισμένου αριθμού σημείων αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά μήκος της ρωγμής και του συνόρου γ. Αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων του οποίου η λύση δίνει τις τιμές πυκνότητας τάσεων στα σημεία αριθμητικής ολοκλήρωσης, συναρτήσει των οποίων υπολογίζεται και ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων στα άκρα της ρωγμής (τα οποία ανήκουν στο κάνναβο των σημείων ολοκλήρωσης) για τους τύπους επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης ρωγμής I και II, (στο συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρείται ότι δεν ενεργούν τάσεις κατά την τρίτη διάσταση ώστε να δικαιολογείται παραμόρφωση τύπου III της ρωγμής).

Κατά μήκος των χειλιών τις ρωγμής τα εξωτερικά φορτία q* συνδέονται με τις υφιστάμενες τάσεις μέσω της σχέσης:

$$\left(\sigma_n^{\pm} - i\sigma_t^{\pm}\right) = q^*(z) \tag{4.14}$$

όπου τα σύμβολα n και t υποδηλώνουν την ορθή και εφαπτομενική συνιστώσα, ενώ τα πρόσημα + και – υποδηλώνουν τον προσανατολισμό τον τάσεων σε σχέση με το τοπικό συστημα αναφορά τις ρωγμής

Στο περίγραμμα του καλύμματος ισχύουν συνθήκες συνέχειας τάσεων και μετατοπίσεων που εκφράζονται με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\left(u_1(z) + i\,v_1(z)\right) = \dfrac{d}{dz}\left(u(z) + i\,v(z)\right) \\ \left[\sigma_n^{(1)} + i\sigma_t^{(1)}\right] = -\left[\sigma_n + i\sigma_t\right] = \mathrm{f}^*(z), \ \mathrm{z} \in \gamma \end{cases} \tag{4.15}$$

το *f**(z) εκφράζει τα διανύσματα δεσμών που ενεργούν κατά μήκος του περιγράμματος του καλύμματος που είναι ουσιαστικά οι αντιδράσεις στις εξωτερικές φορτίσεις και δεν μπορούν να οριστούν εκ των προτέρων.

Τα μιγαδικά δυναμικά *Kolosov - Muskhelishvili* $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ που περιγράφουν το εντατικό πεδίο σε ρηγματωμένη πλάκα με ενίσχυση μπορούν να ορισθούν από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \Phi_0(z) = \Phi(z) + \Gamma \\ \Psi_0(z) = \Psi(z) + \Gamma', \end{cases} \tag{4.16}$$

όπου: z = x + iy, $\Gamma = 1/4\,(N_1 + N_2)$, $\Gamma' = -1/2(N_1 - N_2)$ και N_1, N_2 είναι οι κύριες τάσεις που δρουν κατά την έννοια των αξόνων Ox και Oy, αντίστοιχα.

Καθώς η Φ(z) είναι ολομορφική σε ολόκληρο το επίπεδο εκτός από το περίγραμμα γ και κατά μήκος της ρωγμής ℓ, μπορεί να καθοριστεί ως άθροισμα των ολοκληρωμάτων Cauchy ως εξής:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\sigma_n + i\sigma_t}{\tau - z}d\tau, \ \ \mathrm{z} \in \mathrm{S} \tag{4.17}$$

όπου φ *(τ)* είναι μια συνάρτηση που εκφράζει την πυκνότητα τάσεων του ολοκληρώματος Cauchy κατά μήκος ρωγμής ℓ και *τ* είναι η διατρέχουσα συντεταγμένη κατά μήκος της καμπύλης ολοκλήρωσης (κατά μήκος της ρωγμής ℓ και της περιφέρειας συνόρου καλύμματος γ). Ως S ορίζεται η περιοχή του επιπέδου η οποία έχει τις ελαστικές ιδιότητες της ελαστικής πλάκας και S_1 η περιοχή του επίπεδου με ελαστικές ιδιότητες ενισχυτικού καλύματος (βλ. Σχ. 4.4). Για το κάλυμμα, η μιγαδική συνάρτηση τάσης θα δίνεται από την σχέση:

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint\frac{G(\tau)}{\tau - z}d\tau & z \in S_1 \\ 0 & , \ z \notin S_1 \end{cases} \tag{4.18}$$

όπου:

$$G(z)=\mathrm{f}_1(z)+\mathrm{f}_2(z)+i\{-\mathrm{f}_3(z)+\mathrm{f}_4(z)\}$$
$$4\,\mathrm{f}_1(z)=\sigma_n(z)=\sigma_r$$
$$4\,\mathrm{f}_2(z)=\sigma_s(z)=\sigma_\vartheta$$
$$(1+\kappa_1)\mathrm{f}_3(z)=\sigma_t(z)=\tau_{r\vartheta}$$
$$\mathrm{f}_4(z)=\frac{2\mu_1}{1+\kappa_1}\frac{\partial u_\vartheta(z)}{\partial r}$$

$$2\mu_1\frac{d}{dt}(u+i\,v)=-\frac{4\nu}{1+\nu_1}\mathrm{f}_1(z)+\frac{4\nu}{1+\nu_1}\mathrm{f}_2(z)+2i(1+\kappa_1)\mathrm{f}_3(z)-i(1+\kappa_1)\mathrm{f}_4(z),$$

όπου η *G(z)* είναι μια συνάρτηση πυκνότητας τάσεων κατά μήκος του περιγράμματος του μπαλώματος *γ*.

Οι οριακές τιμές (για $z\rightarrow\tau$) των μιγαδικών συναρτήσεων Φ και Φ_1 κατά τον *Plemelj* δίδονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{2}\varphi(\mathrm{z})+\frac{1}{2\pi i}\int_\ell\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\sigma_n+i\sigma_t}{\tau-z}d\tau\,,$$
$$\Phi^-(z)=-\frac{1}{2}\varphi(\mathrm{z})+\frac{1}{2\pi i}\int_\ell\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\sigma_n+i\sigma_t}{\tau-z}d\tau \qquad (4.19)$$

με

$$\varphi(\mathrm{z})=\begin{cases}\varphi(\mathrm{z}) & z\in\ell\\ 0 & z\in\gamma\end{cases}$$

$$\Phi_1^+(\mathrm{z})=G(\mathrm{z})$$
$$\Phi_1^-(\mathrm{z})=0,\quad \mathrm{z}\in\gamma \qquad (4.20)$$

Με βάση των καθορισμό των οριακών τιμών των μιγαδικών δυναμικών τάσεων Φ και Φ_1, μπορούν να διατυπωθούν συναρτήσει αυτών οι συνοριακές τάσεων τόσο κατά μήκος της ρωγμής όσο και στο περίγραμμα γ.

Κατά μήκος της ρωγμής θα πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη συνοριακή συνθήκη τάσεων:

$$\sigma_n^+-i\sigma_t^+=\Phi_0^+(\mathrm{z})+\overline{\Phi}_0^+(\mathrm{z})+\frac{dz}{d\overline{z}}\left[\overline{z}\Phi_0^{+\,\prime}(\mathrm{z})+\Psi_0^+(\mathrm{z})\right]$$
$$\sigma_n^--i\sigma_t^-=\Phi_0^-(\mathrm{z})+\overline{\Phi}_0^-(\mathrm{z})+\frac{dz}{d\overline{z}}\left[\overline{z}\Phi_0^{-\,\prime}(\mathrm{z})+\Psi_0^-(\mathrm{z})\right] \qquad (4.21)$$

όπου: $\Phi'\cong d\Phi/dz$ και η περισπωμένη δηλώνει τον συζυγή μιγαδικό.

Με προσθαφαίρεση του παραπάνω ζεύγους εξισώσεων κατά μέλη προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις οριακών τιμών της Φ:

$$\left[\Phi^+(\mathrm{z})-\Phi^-(\mathrm{z})\right]+\left[\overline{\Phi}^+(\overline{\mathrm{z}})-\overline{\Phi}^-(\overline{\mathrm{z}})\right]+\frac{dz}{d\overline{z}}\left[\overline{\mathrm{z}}(\Phi^{+\prime}(\mathrm{z})-\Phi^{-\prime}(\mathrm{z}))+\Psi^+(\mathrm{z})-\Psi^-(\mathrm{z})\right]=q_1(\mathrm{z})$$
$$\left[\Phi^+(\mathrm{z})+\Phi^-(\mathrm{z})\right]+\left[\overline{\Phi}^+(\overline{\mathrm{z}})+\overline{\Phi}^-(\overline{\mathrm{z}})\right]+\frac{dt}{d\overline{z}}\left[\overline{z}(\Phi^{+\prime}(\mathrm{z})+\Phi^{-\prime}(\mathrm{z}))+\Psi^+(\mathrm{z})+\Psi^-(\mathrm{z})\right]=q_2(\mathrm{z})$$
(4.22α)

με z ∈ ℓ και: $$\begin{cases} q_1(z) = \sigma_n^+ - \sigma_n^- - i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-) \\ q_2(z) = \sigma_n^+ + \sigma_n^- - i(\sigma_t^+ + \sigma_t^-) - 2\Gamma - 2\overline{\Gamma} - 2\dfrac{dz}{d\bar{z}}\Gamma' \end{cases} \tag{4.22β}$$

αντίστοιχη συνθήκη τάσεων για το κάλυμμα κατά μήκος του περιγράμματος του γ δίνεται απο την παρακάτω εξίσωση οριακών τιμών για την Φ_1:

$$\left[\Phi_1^+(z) - \Phi_1^-(z)\right] - \kappa_1\left[\overline{\Phi_1^+}(\bar{z}) - \overline{\Phi_1^-}(\bar{z})\right] + \frac{dz}{d\bar{z}}\left\{\bar{z}\left[\Phi_1^{+'}(z) - \Phi_1^{-'}(z)\right] + \left[\Psi_1^+(z) - \Psi_1^-(z)\right]\right\}$$
$$= -2\mu_1\frac{d}{d\bar{z}}\left[u(z) - i\nu(z)\right] \equiv \bar{q}_1(\bar{z}),\ z \in \gamma \tag{4.23}$$

όπου μ_1 και κ_1 είναι το μέτρο διάτμησης και η σταθερά *Muskhelishvili* του καλύμματος αντίστοιχα.

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (4.22α) και (4.23) ως προς $\left[\Psi^+(z) - \Psi^-(z)\right]$και κατ' αντιστοιχία με τις σχέσεις οριακών τιμών (4.19) υπολογίζεται η συνάρτηση μιγαδικού δυναμικού Ψ ως εξής:

$$\Psi(z) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\int_\ell \frac{\overline{\varphi}(\bar{\tau})}{\tau - z}d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_\ell \frac{\bar{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau - z)^2}d\tau\right]$$
$$+\left[\frac{\kappa}{2\pi i(1+\kappa)}\oint_\gamma \frac{\sigma_n - i\sigma_t}{\tau - z}d\tau - \frac{1}{2\pi i(1+\kappa)}\oint_\gamma \frac{\bar{\tau}(\sigma_n + i\sigma_t)}{(\tau - z)^2}d\tau\right],\ z \in S, \tag{4.24}$$

ομοίως για την Ψ_1 προκύπτει:

$$\Psi_1(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_\gamma \dfrac{2\mu_1\dfrac{d}{d\bar{\tau}}\left(u(\tau) - i\nu(\tau)\right)}{\tau - z}d\bar{\tau} + \\ +\dfrac{\kappa_1}{2\pi i}\displaystyle\oint_\gamma \dfrac{\overline{G}(\bar{\tau})}{\tau - z}d\bar{\tau} - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_\gamma \dfrac{\bar{\tau}G(\tau)}{(\tau - z)^2 d\tau} &, \quad z \in S_1 \\ 0 &, \quad z \notin S_1 \end{cases} \tag{4.25}$$

Συνδυάζοντας τις εκφράσεις οριακών τιμών του *Plemelj* με τις εξισώσεις συνοριακών συνθηκών (4.22α) και (4.23) προκύπτουν οι ακόλουθες ολοκληρωτικές εξισώσεις οι οποίες εκφράζουν συνοριακές μικτού τύπου:

I) Κατά μήκος του περιγράμματος γ και στην πλευρά του καλύμματος:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{G(\tau)}{\tau - z}d\tau + \frac{\kappa_1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{G}(\bar{\tau})}{\bar{\tau} - \bar{z}}d\bar{\tau} - \frac{dz}{d\bar{z}}\left[-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sigma_n - i\sigma_t}{\tau - z}d\bar{\tau}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{G}(\bar{\tau})}{\tau - z}d\bar{\tau} + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\bar{\tau} - \bar{z}}{(\tau - z)^2}G(\tau)d\tau\right] \tag{4.26}$$
$$+2\mu_1\frac{d}{d\bar{z}}(u + i\nu) = 0,\ \ z \in \gamma$$

II) Κατά μήκος του περιγράμματος γ και στην πλευρά της πλάκας:

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma}\frac{f^{*}(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{\kappa}{\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{f^{*}}(\overline{\tau})}{\overline{\tau}-\overline{z}}d\overline{\tau}+\frac{dz}{d\overline{z}}\left[-\frac{\kappa}{\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{f^{*}}(\overline{\tau})}{\tau-z}d\overline{\tau}+\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{\tau}-\overline{z}}{(\tau-z)^{2}}f^{*}(\tau)d\tau\right]$$
$$+R(1+\kappa)\left[\frac{1}{\pi i}\int_{\ell}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{\kappa}{\pi i}\int_{\ell}\frac{\overline{\varphi}(\overline{\tau})}{\overline{\tau}-\overline{z}}d\overline{\tau}-\frac{dz}{d\overline{z}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{\ell}\frac{\overline{\varphi}(\overline{\tau})}{\tau-z}d\overline{\tau}+\frac{1}{\pi i}\int_{\ell}\frac{\overline{\tau}-\overline{z}}{(\tau-z)^{2}}\varphi(\tau)d\tau\right]\right]$$
$$+\frac{\mu}{2\mu_{1}}R(1+\kappa)\left[-\frac{4\nu}{1+\nu_{1}}f_{1}+\frac{4\nu}{1+\nu_{1}}f_{2}+2i(1+\kappa_{1})f_{3}-i(1+\kappa_{1})f_{4}\right]$$
$$=2R(1+\kappa)\left(-\Gamma+\kappa\overline{\Gamma}-\frac{dz}{d\overline{z}}\Gamma'\right),\qquad z\in\gamma \tag{4.27}$$

όπου R είναι η ακτίνα του καλύμματος. Έπίσης κατά μήκος του περιγράμματος γ ισχύει και η συνθήκη της μηδενικής συνισταμένης δύναμης:

$$\oint_{\gamma} f^{*}(z)dz=0,\ \ z\in\gamma \tag{4.28}$$

III) Κατά μήκος της ρωγμής θα ισχύει:

$$\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f^{*}(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{f^{*}}(\overline{\tau})}{\overline{\tau}-\overline{z}}d\overline{\tau}+\frac{dz}{d\overline{z}}\left[-\frac{\kappa}{\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{f^{*}}(\overline{\tau})}{\tau-z}d\overline{\tau}+\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{\tau}-\overline{z}}{(\tau-z)^{2}}f^{*}(\tau)d\tau\right]$$
$$+R(1+\kappa)\left[\frac{1}{\pi i}\int_{\ell}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{\ell}\frac{\overline{\varphi}(\overline{\tau})}{\overline{\tau}-\overline{z}}d\overline{\tau}-\frac{dz}{d\overline{z}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{\ell}\frac{\overline{\varphi}(\overline{\tau})}{\tau-z}d\overline{\tau}+\frac{1}{\pi i}\int_{\ell}\frac{\overline{\tau}-\overline{z}}{(\tau-z)^{2}}\varphi(\tau)d\tau\right]\right]$$
$$=-2R(1+\kappa)\left[\Gamma+\overline{\Gamma}+\frac{dz}{d\overline{z}}\Gamma'\right],\ \mathrm{z}\in\ell \tag{4.29}$$

και

$$\int_{\ell}\varphi(z)dz=\frac{1}{1+\kappa}\int_{\ell}q_{1}(z)dz,\ \ z\in\ell \tag{4.30}$$

επειδή όμως κατά μήκος της ρωγμής ισχύει η συνθήκη ισορροπίας των τάσεων ($\sigma_n^+=\sigma_n^-$ και $\sigma_t^+=\sigma_t^-$ και από την (4.22β) $q_1(z)=0$) η παραπάνω εξίσωση λαμβάνει την μορφή:

$$\int_{\ell}\varphi(z)dz=0,\ \ z\in\ell \tag{4.31}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας φ μπορεί να εκφραστεί με μια σχέση τις μορφής

$$\varphi(\mathrm{z})=\frac{\mathrm{ig}^{*}(\mathrm{z})}{\sqrt{(\mathrm{b-z})(\alpha-z)}} \tag{4.32}$$

Η συνάρτηση g^* είναι μιγαδική δηλαδή:

$$g^{*}(\mathrm{z})=\mathrm{g}_{1}(\mathrm{z})+\mathrm{ig}_{2}(\mathrm{z}) \tag{4.33}$$

Κατά συνέπεια η συνθήκη ισορροπίας τάσεων κατά μήκος της ρωγμής λαμβάνει την τελική μορφής:

$$\int_{\ell} i\frac{1}{\sqrt{(b-z)(\alpha-z)}}\left(g_{1}(z)+ig_{2}(z)\right)dz=0,\ \ z\in\ell \tag{4.34}$$

Το σύστημα των ολοκληρωματικών εξισώσεων (4.26), (4.27), (4.28), (4.29) και (3.34) αποτελεί το τελικό σύστημα εξισώσεων, η λύση του οποίου οδηγεί στον υπολογισμό των συνιστωσών των συναρτήσεων πυκνότητας τάσεων f^*, g^*, f_1, f_2, f_3 και f_4 κατά μήκος της ρωγμής και κατά μήκος του περιγράμματος γ.

Τέλος ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων στα άκρα της ρωγμής για παραμορφοσίακη κατάσταση τύπου Ι και ΙΙ δίνεται από της σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
K_{I,i} &= -\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\left(\cos\frac{(\psi+\theta)}{2}g_1(i)+\sin\frac{(\psi+\theta)}{2}g_2(i)\right),\\
K_{II,i} &= -\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\left(\sin\frac{(\psi+\theta)}{2}g_1(i)-\cos\frac{(\psi+\theta)}{2}g_2(i)\right),\quad (i=a,b),
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

όπου: $\psi = \arg(b\text{-}\alpha)$, $\rho = |b-\alpha|$, ενώ b και α, είναι οι μιγαδικές συντεταγμένες θέσης των άκρων τις ρωγμής.

4.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

4.4.1 Αριθμητική ολοκλήρωση

Η αριθμητική ολοκλήρωση έχει ως αποτέλεσμα την διακριτοποίηση των ολοκληρωτικών εξισώσεων για τις συνοριακές συνθήκες που περιγράφονται στην προηγούμενη παράγραφο επί ενός κανάβου προεπιλεγμένων σημείων. Τα σημεία αυτά ολοκλήρωσης επιλέγονται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να δίνουν ένα δίκτυο σημείων κοντά στις περιοχές ενδιαφέροντος (όπως είναι τα άκρα της ρωγμής και το σύνορο ενισχυτικού καλύμματος-πλάκας) το οποίο να μπορεί να δώσει την απαιτούμενη πληροφορία με κατάλληλη παρεμβολή σε συγκεκριμένα σημεία ενδιαφέροντος.

Η διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης, βασίζεται στην προσέγγιση των συναρτήσεων που ολοκληρώνονται με μορφή πολυωνυμικών εκφράσεων. Κατά τον τρόπο αυτό η εντατική συνάρτηση *G(t),* που αντιστοιχεί στο πεδίο των μιγαδικών δυναμικών στην περιοχή του ενισχυτικού καλύμματος, προσεγγίζεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
G(\mathrm{z}) &\approx \frac{1}{2\mathrm{n}+1}\sum_{j=1}^{2n+1}G(\tau_{\mathrm{j}})\left(\frac{1}{\tau_{\mathrm{j}}}\right)^{-n}\left[1-\left(\frac{z}{\tau_j}\right)^{2n+1}\right]\left[1-\left(\frac{z}{\tau_j}\right)\right]^{-1} =\\
&= \frac{1}{2\mathrm{n}+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\frac{\sin\left((2\mathrm{n}+1)\dfrac{\theta_0-\theta_j}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta_0-\theta_j}{2}\right)}G(\tau_{\mathrm{j}})\\
\tau_{\mathrm{j}} &= e^{i\frac{2\pi j}{2n+1}}
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

Με βάση τις παραπάνω εκφράσεις πολυωνυμικής προσέγγισης, τα συνοριακά ολοκληρώματα της *G* λαμβάνουν την μορφή:

$$\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma}\frac{G(\tau)}{\tau - \mathrm{t}}d\tau \approx \frac{1}{2n+1}\sum_{\mathrm{j=-n}}^{\mathrm{n}} G(\tau_{\mathrm{j}})\left[1+\frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\mathrm{n}(\theta_0 - \theta_{\mathrm{j}})}{2}\right)\sin\left(\frac{(\mathrm{n}+1)(\theta_0 - \theta_{\mathrm{j}})}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\theta_0 - \theta_{\mathrm{j}})}{2}\right)}\right] \tag{4.37}$$

και

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} G(\tau)\mathrm{d}\tau \approx \frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1} G(\tau_{\mathrm{j}}) \tag{4.38}$$

Με ανάλογο τρόπο, προκύπτουν και οι αριθμητικές προσεγγίσεις των ολοκληρωμάτων της εντατικής συνάρτησης f^*:

$$\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f^*(\tau)}{\tau - \mathrm{z}}d\tau \approx \frac{1}{2n+1}\sum_{\mathrm{j}=-n}^{\mathrm{n}} f^*(\tau_{\mathrm{j}})\left[1+\frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\mathrm{n}(\theta_0 - \theta_{\mathrm{j}})}{2}\right)\sin\left(\frac{(\mathrm{n}+1)(\theta_0 - \theta_{\mathrm{j}})}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\theta_0 - \theta_{\mathrm{j}})}{2}\right)}\right] \tag{4.39}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f^*(\tau)\mathrm{d}\tau \approx \frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1} f^*(\tau_{\mathrm{j}}) \tag{4.40}$$

Τέλος, οι συνιστώσες τη συνάρτησης πυκνότητας τάσεων g^*, κατά μήκος της ρωγμής, μπορούν να αναπτυχθούν με πολυώνυμα *Chebychev,* των οποίων η αριθμητική ολοκλήρωση, σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων, γίνεται σύμφωνα με την ακόλουθη μέθοδο *Lobatto – Chebychev*:

$$\begin{gathered} I = \int_{1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\frac{g_i(z)}{z-x_r}dz = \frac{\pi}{2n}\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j\frac{g_i(z_j)}{z_j - x_r},\ (i=1{,}2), \\ \lambda_1 = \lambda_{2n+1} = 1,\ \lambda_j = \frac{1}{2}(j = 2{,}3{,}...{,}2n), \end{gathered} \tag{4.41}$$

Τα σημεία x_r, αποτελούν ρίζες των πολυωνύμων *Chebyshev* $T_{2n}(x)$, ενώ n είναι ο αριθμός των σημείων παρεμβολής και ολοκλήρωσης που λαμβάνονται εκατέρωθεν του κέντρου συμμετρίας του συνόρου ολοκλήρωσης.

Χωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των σχέσεων (Ι), (ΙΙ) και (ΙΙΙ) που αποδείχθηκαν προηγουμένως, και λαμβάνοντας υπόψη τις κατά προσέγγιση σχέσεις (4.36) εως (4.40), καθώς επίσης και τον αριθμητικό τύπο ολοκλήρωσης (4.41) διατυπώνεται το ακόλουθο σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

(a) Στο ενισχυτικό κάλυμμα (περιοχή S1):

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[-\left(1+\kappa_1\right)-6\cos(\theta_0^{(k)}-\theta_j)-\frac{4\nu_1}{1+\nu_1}\frac{\sin\frac{(2n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\frac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}\right]f_1(z_j)$$
$$+\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[\left(3+\kappa_1\right)-6\cos(\theta_0^{(k)}-\theta_j)-\frac{4}{1+\nu_1}\frac{\sin\frac{(2n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\frac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}\right]f_2(z_j)$$
$$+\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[4\frac{\sin\frac{n(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}\sin\frac{(n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\frac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}-2(2+\kappa_1)\sin(\theta_0^{(k)}-\theta_j)\right]f_3(z_j) \tag{4.42}$$
$$+\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[2(\kappa_1-1)\frac{\sin\frac{n(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}\sin\frac{(n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\frac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}+2\sin(\theta_0^{(k)}-\theta_j)\right]f_4(z_j)=0$$

και

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[-6\sin\left(\theta_0^{(k)}-\theta_j\right)+2(3+\kappa_1)\frac{\sin\frac{n(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}\sin\frac{(n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\frac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}\right]f_1(z_j)$$
$$+\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[2\,sin\left(\theta_0^{(k)}-\theta_j\right)+2(\kappa_1-1)\frac{sin\frac{n(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}sin\frac{(n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{sin\frac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}\right]f_2(z_j)$$
$$+\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[2(1+\kappa_1)\frac{\sin\frac{(2n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\frac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}+2(2+\kappa_1)\cos(\theta_0^{(k)}-\theta j)\right]f_3(z_j) \tag{4.43}$$
$$+\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[-(1+\kappa_1)\frac{\sin\frac{(2n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\frac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}-2\cos(\theta_0^{(k)}-\theta j)+(1+\kappa_1)\right]f_4(z_j)=0$$

(b) Στην πλάκα (περιοχή S):

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[-8\kappa\cos(\theta_0^{(k)}-\theta_j)-8R(1+\kappa)\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\nu_1}{1+\nu_1}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\dfrac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}\right]f_1(z_j)$$

$$+2R(1+\kappa)\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\nu_1}{1+\nu_1}\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}\left[\frac{\sin\dfrac{(2n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\dfrac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}\right]f_2(z_j)$$

$$-(1+\kappa)\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[2\kappa\sin(\theta_0^{(k)}-\theta_j)-4\frac{\sin\dfrac{n(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}\sin\dfrac{(n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\dfrac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}\right]f_3(z_j)$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j k_{11}(\theta_0^{(k)},x_j)g_1(x_j)+\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j k_{12}(\theta_0^{(k)},x_j)g_2(x_j)$$

$$=(1+\kappa)\left[\frac{\kappa-1}{2}(N_1+N_2)-\cos 2\theta_0^{(k)}(N_1-N_2)\right] \tag{4.44}$$

και:

$$-\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[16\frac{\sin\dfrac{n(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}\sin\dfrac{(n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\dfrac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}8\kappa\sin(\theta_0^{(k)}-\theta_j)\right]f_1(z_j)$$

$$+\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[+4R(1+\kappa)(1+\kappa_1)\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\dfrac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}2\kappa(1+\kappa_1)\cos(\theta_0^{(k)}-\theta_j)\right]f_3(z_j)$$

$$-2R(1+\kappa)(1+\kappa_1)\frac{\mu}{\mu_1}\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)(\theta_0^{(k)}-\theta j)}{2}}{\sin\dfrac{(\theta_0^{(k)}-\theta_j)}{2}}f_4(t_j)+\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j k_{21}(\theta_0^{(k)},x_j)g_1(x_j)$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j k_{22}(\theta_0^{(k)},x_j)g_2(x_j)=-(1+\kappa)(N_1-N_2)\sin 2\theta_0^{(k)} \tag{4.45}$$

(c) Στην ρωγμή:

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}k_{31}(\theta_j,\xi_r)f_1(t_j)+\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}k_{32}(\theta_j,\xi_r)f_2(t_j)+R(1+\kappa)\left[-\frac{2\sin\theta}{2n}\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j\frac{g_1(x_j)}{x_j-\xi_r}\right.$$
$$\left.+\frac{2\cos\theta}{2n}\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j\frac{g_2(x_j)}{x_j-\xi_r}\right]=-R(1+\kappa)\left[(N_1+N_2)-(N_1-N_2)\cos 2\theta\right]$$
$$\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}k_{41}(\theta_j,\xi_r)f_1(t_j)+\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}k_{42}(\theta_j,\xi_r)f_2(t_j)+R(1+\kappa)\left[+\frac{2\cos\theta}{2n}\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j\frac{g_1(x_j)}{x_j-\xi_r}\right.$$
$$\left.+\frac{2\cos\theta}{2n}\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j\frac{g_2(x_j)}{x_j-\xi_r}\right]=R(1+\kappa)(N_1-N_2)\sin 2\theta,$$
$$\int_{-1}^{1}g_1(x)(1-x^2)^{-1/2}dx=0,\quad \int_{-1}^{1}g_2(x)(1-x^2)^{-1/2}dx=0 \qquad (4.46)$$

όπου:

$$k_{11}(\theta_0,x)=\frac{R(1+\kappa)}{\ell}\left[(1-\kappa)\frac{A_{12}\cos\theta-A_{11}\sin\theta}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)}-\frac{A_{11}\sin(2\theta_0-\theta)+A_{12}\cos(2\theta_0-\theta)}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)}\right.$$
$$\left.-\frac{(A_{11}^3-3A_{12}^2A_{11})\sin(2\theta_0-3\theta)-(A_{12}^3-3A_{11}^2A_{12})\cos(2\theta_0-3\theta)}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)^2}\right],$$
$$k_{12}(\theta_0,x)=\frac{R(1+\kappa)}{\ell}\left[(1-\kappa)\frac{A_{11}\cos\theta-A_{12}\sin\theta}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)}-\frac{A_{12}\sin(2\theta_0-\theta)+A_{11}\cos(2\theta_0-\theta)}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{(A_{13}^3-3A_{11}^2A_{12})\sin(2\theta_0-3\theta)-(A_{11}^3-3A_{12}^2A_{11})\cos(2\theta_0-3\theta)}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)^2}\right],$$
$$k_{21}(\theta_0,x)=\frac{R(1+\kappa)}{\ell}\left[-(1+\kappa)\frac{A_{11}\cos\theta-A_{12}\sin\theta}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)}-\frac{A_{12}\sin(2\theta_0-\theta)-A_{11}\cos(2\theta_0-\theta)}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{(A_{11}^3-3A_{12}^2A_{11})\sin(2\theta_0-3\theta)+(A_{12}^3-3A_{11}^2A_{12})\sin(2\theta_0-3\theta)}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)^2}\right],$$
$$k_{22}(\theta_0,x)=\frac{R(1+\kappa)}{\ell}\left[-(1+\kappa)\frac{A_{11}\sin\theta-A_{12}\cos\theta}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)}+\frac{A_{11}\sin(2\theta_0-\theta)+A_{12}\cos(2\theta_0-\theta)}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{(A_{12}^3-3A_{11}^2A_{12})\cos(2\theta_0-3\theta)-(A_{11}^3-3A_{12}^2A_{11})\sin(2\theta_0-3\theta)}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)^2}\right],$$
$$A_{11}+iA_{12}=\left[x+\frac{d}{\ell}\cos(\beta-\theta)-\frac{R}{\ell}\cos(\theta_0-\theta)\right]+i\left[-\frac{d}{\ell}\sin(\beta-\theta)+\frac{R}{\ell}\sin(\theta_0-\theta)\right],$$
$$k_{31}(\theta_j,\xi_r)=\left[\frac{4A_{21}+2\kappa\left[A_{21}\cos 2(\theta-\theta_j)-A_{22}\sin(\theta-\theta_j)\right]}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)}\right.$$
$$\left.+2\frac{(A_{21}^3-3A_{22}^2A_{21})\cos 2(\theta-\theta_j)+(A_{22}^3-3A_{21}^2A_{22})\sin(\theta-\theta_j)}{\left(A_{11}^2+A_{12}^2\right)^2}\right],$$

$$k_{32}(\theta_j,\xi_r)=\left[\frac{-4A_{22}+2\kappa\left[A_{21}\sin 2(\theta-\theta_j)+A_{22}\cos(\theta-\theta_j)\right]}{\left(\mathrm{A}_{11}^2+\mathrm{A}_{12}^2\right)}\right.$$

$$\left.-2\frac{(A_{21}^3-3A_{22}^2A_{21})\sin 2(\theta-\theta_j)-(A_{22}^3-3A_{21}^2A_{22})\cos 2(\theta-\theta_j)}{\left(\mathrm{A}_{11}^2+\mathrm{A}_{12}^2\right)^2}\right],$$

$$k_{41}(\theta_j,\xi_r)=2\left[\kappa\frac{\left[A_{21}\sin 2(\theta-\theta_j)+A_{22}\cos 2(\theta-\theta_j)\right]}{\left(\mathrm{A}_{11}^2+\mathrm{A}_{12}^2\right)}\right.$$

$$\left.+2\frac{(A_{21}^3-3A_{22}^2A_{21})\sin 2(\theta-\theta_j)-(A_{22}^3-3A_{21}^2A_{22})\cos 2(\theta-\theta_j)}{\left(\mathrm{A}_{11}^2+\mathrm{A}_{12}^2\right)^2}\right],$$

$$k_{42}(\theta_j,\xi_r)=2\left[\kappa\frac{\left[A_{22}\sin 2(\theta-\theta_j)-A_{21}\cos 2(\theta-\theta_j)\right]}{\left(\mathrm{A}_{11}^2+\mathrm{A}_{12}^2\right)}\right.$$

$$\left.+2\frac{(A_{21}^3-3A_{22}^2A_{21})\cos 2(\theta-\theta_j)+(A_{22}^3-3A_{21}^2A_{22})\sin 2(\theta-\theta_j)}{\left(\mathrm{A}_{11}^2+\mathrm{A}_{12}^2\right)^2}\right],$$

$$A_{21}+iA_{22}=\left[1-\frac{\ell}{R}\xi_r\cos(\theta-\theta_0)-\frac{d}{R}\cos(\beta-\theta_0)\right]-i\left[-\frac{\ell}{R}\sin(\theta-\theta_0)+\frac{d}{R}\sin(\beta-\theta_0)\right]$$

Οι πολικές γωνίες (ως προς το κεντρικό σύστημα αναφοράς) των σημείων ολοκλήρωσης θ_j και των σημείων πύκνωσης του κανάβου θ_0 επί του κλειστού συνόρου γ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\theta_j=\frac{2\pi j}{2n+1},\quad \mathrm{j}=1,...,2\mathrm{n}+1 \qquad \text{και}$$

$$\theta_0^{(\mathrm{k})}=\frac{(2k-1)\pi}{2n+1},\ \mathrm{k}=1,...,2\mathrm{n}+1$$

ενώ τα σημεία ολοκλήρωσης κατά μήκος της ρωγμής ξ_r υπολογίζονται από την σχέση:

$$\xi_r=\cos\left(\frac{(2\mathrm{r}-1)\pi}{4\mathrm{n}}\right),\quad \mathrm{r}=1,...2\mathrm{n}$$

4.4.2 Κατασκευή υπολογιστικού κώδικα Fortran 77

Οι παραπάνω ιδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις καταλήγουν σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τις τιμές των εντατικών συναρτήσεων f^*, f_1, f_2, f_3, f_4, g_1 και g_2 επί του κανάβου συμπτωτικών σημείων που προέκυψε από τα σημεία ολοκλήρωσης και την πύκνωσή τους. Ο αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος γραμμικών εξισώσεων, προγραμματίσθηκε σε κώδικα Fortran 77, δημιουργώντας έτσι ένα υπολογιστικό μοντέλο, το οποίο αποδίδει ως λύση το πεδίο τιμών των f^*, f_1, f_2, f_3, f_4, g_1 και g_2, καθώς και τις τιμές των συντελεστών συγκέντρωσης τάσεων K_{I} και K_{II} στα άκρα τις ρωγμής α και b όπως αυτοί υπολογίζονται από τις σχέσεις (4.35). Το πρόγραμμα ως δεδομένα εισόδου δέχεται μια σειρά από παραμέτρους, οι οποίες καταγράφονται σε αρχείο εισόδου τύπου ASCII με κωδική ονομασία stampIN με την εξής σειρά γραμμών εγγραφής (records):

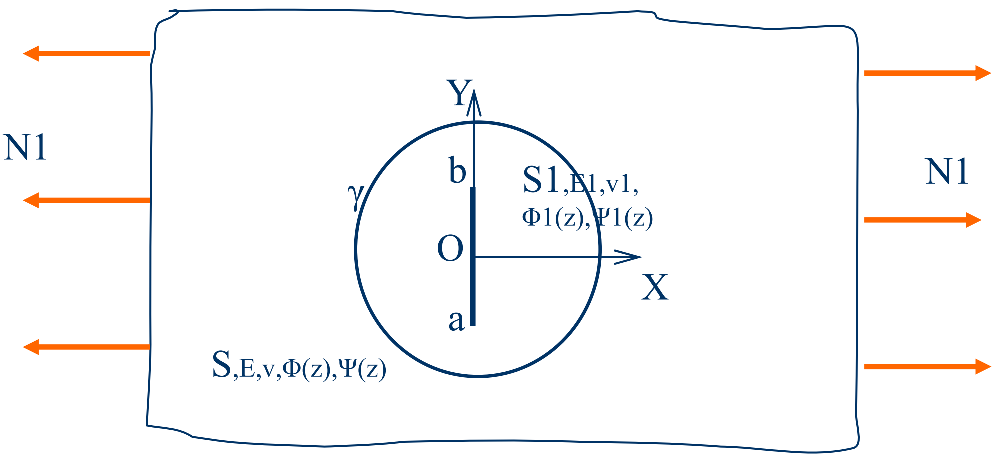
1. Ένας χαρακτηριστικός ακέραιος αριθμός K που παίρνει τις τιμές 1 ή 2 ανάλογα με το αν η ανάλυση που θα εκτελεστεί θα πρέπει να γίνει υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (*plane strain*) ή επίπεδη τάσης (*plane stress*) αντίστοιχα.
2. Ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης.
3. Το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος *Poisson* v για την ελαστική πλάκα.
4. Το μέτρο ελαστικότητας E_1 και ο λόγος *Poisson* v_1 για το κυκλικό ελαστικό ενισχυτικό κάλυμμα.
5. Η ακτίνα καμπυλότητας R του ενισχυτικού ελαστικού καλύμματος, το ημίσιο μήκος ρωγμής $\rho/2$, και η απόσταση d του κέντρου της ρωγμής από το κέντρο του καθολικού συστήματος αναφοράς.
6. Οι γωνία προσανατολισμού του άξονα της ρωγμής θ και η πολική γωνία θέσης β του κέντρου συμμετρίας της ρωγμής, μετρημένες ως προς το κεντρικό σύστημα αναφοράς σε ακτίνια (βλ. Σχήμα-3).
7. Η οριζόντια εξωτερική φόρτιση N_1 και η κατακόρυφη εξωτερική φόρτιση N_2 εκφρασμένες σε μονάδες τάσης ($N/m^2=Pa$), που ασκούνται στο εξωτερικό όριο της πλάκας και σε άπειρη απόσταση από το κέντρο αυτής και αποτελούν τις γενικές φυσικές συνοριακές συνθήκες (ή τύπου Neumann) του προβλήματος.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν μετά την εκτέλεση του προγράμματος, καταγράφονται σε δύο αρχεία εξόδου ASCII με κωδικές ονομασίες stamp.dat και stampOUT. Στο πρώτο από τα δύο αυτά αρχεία περιέχεται το πεδίο τιμών των εντατικών συναρτήσεων στα σημεία του κάναβου αριθμητικής προσέγγισης. Στο δεύτερο αρχείο εξόδου η καταγραφή ξεκινά με την εκτύπωση των δεδομένων εισόδου, συνοδευόμενα από κατάλληλα σχόλια που αφορούν τις συνθήκες ανάλυσης (επίπεδη τάση ή επίπεδη παραμόρφωση) ή την ταυτότητα της παραμέτρου που εκτυπώνεται με προκαθορισμένες προδιαγραφές εκτύπωσης (FORMAT εκτύπωσης). Στην συνέχεια αποδίδεται η λύση του προβλήματος με την μορφή που είναι καταχωρημένη και στο αρχείο *stamp.dat* και το αρχείο καταλήγει σε δύο γραμμές καταγραφής εκ των οποίων η πρώτη περιέχει τις τιμές των συντελεστών K_{I} και K_{II} για το άκρο α της ρωγμής και η δεύτερη τις αντίστοιχες τιμές των K_{I} και K_{II} για το άκρο *b,*όπως αυτές προκύπτουν από τις σχέσεις (4.35). Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι η ανάλυση αφορά ρωγμή της οποίας τα άκρα ισαπέχουν από το κέντρο του καθολικού συστήματος αναφοράς και κατά συνέπεια η απόσταση d μεταξύ τουκέντρου αναφοράς O και του κέντρου της ρωγμής. Έτσι, δίδεται μια σταθερή σχέση μεταξύ της γωνίας προσανατολισμού του άξονα αυτού ψ με την πολική γωνία θέσεως του κέντρου συμμετρίας της ρωγμής β η οποία εκφράζεται από την σχέση:

$$\psi = \beta + \pi/2 \tag{4.47}$$

4.4.3 Αριθμητικά παραδείγματα

Οι υπολογιστικές δοκιμές που εκτελούνται στην παρούσα μελέτη, αφορούν επίπεδη ελαστική πλάκα που φέρει κατακόρυφη ρωγμή με το κέντρο συμμετρίας της να βρίσκεται επί του y – άξονα και κατά συνέπεια ο άξονας της ρωγμής συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας της πλάκας Oy (βλ. Σχ. 4.6) Το μήκος της ρωγμής και η απόσταση d δίνονται κανονικοποιημένα ως προς την ακτίνα R του κυκλικού ενισχυτικού καλύμματος, κάτι που σημαίνει ότι στα δεδομένα εισόδου τίθεται $R=1$ και η τιμές που δίνονται για το ημίσιο μήκος της ρωγμής και για την απόσταση d θα πρέπει να πληρούν τις συνθήκες $0 \leq \rho/2 \leq R$ και $0 \leq d \leq R$. Επίσης λόγω του προσανατολισμού της ρωγμής, θα ισχύει $\beta = \pi/2$ και $\theta = \pi/2$ και από τη σχέση (4.47) $\psi = \pi$.



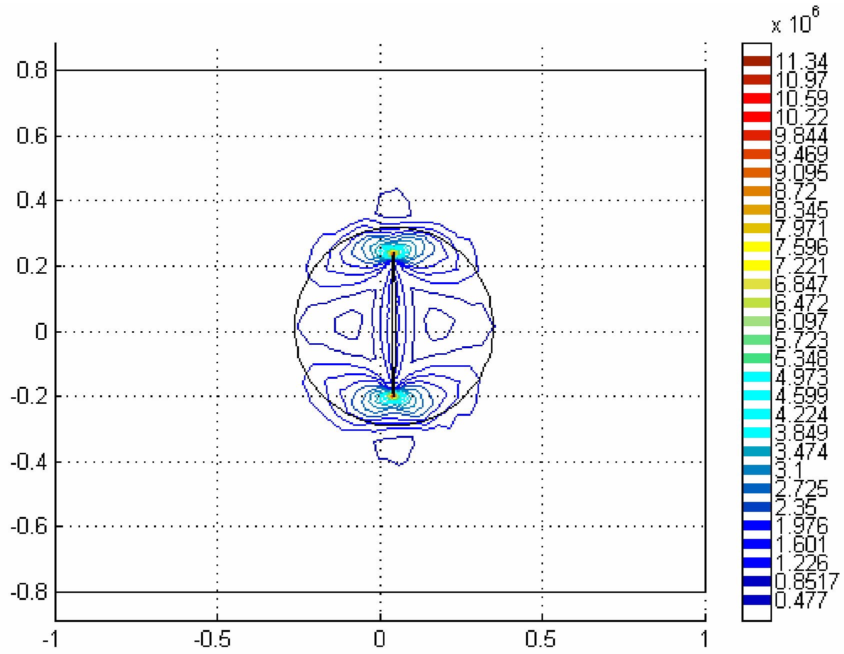
Σχήμα 4.6: Επίπεδη ελαστική πλάκα με κατακόρυφη ρωγμή και ενισχυτικό κάλυμμα που υποβάλλεται σε οριζόντιο εφελκυσμό

Με βάση τις παραπάνω γεωμετρικές παραμέτρους και για δεδομένες συνθήκες φόρτισης και ελαστικών ιδιοτήτων της πλάκας, εκτελέσθηκαν τρεις ομάδες αριθμητικών δοκιμών με σκοπό τη διερεύνηση της επίδρασης που έχουν στον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων οι παρακάτω παράμετροι:

1. Ο λόγος των μέτρων ελαστικότητας καλύμματος και πλάκας E_1/E, και ο λόγος *Poisson* v_1 του καλύμματος, για δεδομένο μήκος ρωγμής της οποίας το κέντρο συμμετρίας συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας της πλάκας (πρώτη ομάδα δοκιμών).
2. Το μήκος της ρωγμής για δεδομένες ελαστικές ιδιότητες ενισχυτικού καλύμματος θεωρώντας ότι ταυτίζονται τα κέντρα συμμετρίας πλάκας-καλύμματος και ρωγμής (δεύτερη ομάδα δοκιμών).
3. Η απόσταση μεταξύ των κέντρων συμμετρίας πλάκας-καλύμματος και ρωγμής για δεδομένες ελαστικές παραμέτρους πλάκας και καλύμματος και δεδομένο μήκος ρωγμής (τρίτη ομάδα δοκιμών).

Όλες οι δοκιμές, πραγματοποιήθηκαν υπό συνθήκες οριζόντιας εφελκυστικής φόρτισης ($N_2 = 0$) *με* $N_1 = 10^6\ N/m^2$ *(1MPa).*

Στο σχήμα 4.7 παρουσιάζεται η τυπική μορφή του πεδίου τάσεων με την μορφή ισοτασικών καμπυλών για το μοντέλο του σχήματος 4.6.



Σχήμα 4.7: Πεδίο ισοτασικών καμπυλών που προκύπτει ως λύση του μοντέλου που απεικονίζεται στο σχήμα 4.6

Από το σχήμα 4.7, γίνεται σαφές ότι το ενδιαφέρον ως προς την ένταση των τάσεων εστιάζεται στα άκρα τις ρωγμής, λόγω της έντονης συγκέντρωσης τους σ' αυτά. Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων στην ουσία χρησιμεύει ως μέτρο της έντασης των τάσεων στα άκρα της ρωγμής, οι οποίες, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, τείνουν στο να απειρισθούν γεγονός που καθιστά δύσκολη την μέτρηση τους. Ο τρόπος με τον οποίο φορτίζεται η πλάκα, προκαλεί παραμορφωσιακή κατάσταση τύπου Ι και για τον λόγο αυτό διερευνάται ο συντελεστής K_I.

Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την πρώτη δοκιμή παρατηρείται ότι, ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων (K_I) στα άκρα της ρωγμής, για δεδομένο λόγο *Poisson* (v_1) του καλύμματος, λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή όταν τα μέτρα ελαστικότητας πλάκας και καλύμματος ταυτίζονται. Μειώνεται δε σχεδόν εκθετικά, όσο αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας του καλύμματος. Επίσης ο λόγος *Poisson* (v_1) του καλύμματος φαίνεται να ενισχύει τη συγκέντρωση τάσεων (βλ. Διάγραμμα 4.1).

Τα αποτελέσματα της δεύτερης δοκιμής δείχνουν ότι, όσο το μήκος της ρωγμής προσεγγίζει το μέγεθος του ενισχυτικού καλύμματος, τόσο αυξάνεται ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων (K_I), μέχρι να λάβει μια μέγιστη οριακή τιμή, πέραν της οποίας επιπλέον αύξηση του μήκους της ρωγμής προκαλεί μείωση του (βλ. Διάγραμμα 4.2).

Τέλος από τα αποτελέσματα της τρίτης δοκιμής παρατηρείται ότι, ο συντελεστής κατανομής τάσεων (K_I) διαφοροποιείται για τα δύο άκρα της ρωγμής όταν τα δύο κέντρα μάζας (ρωγμής και πλάκας) παύουν να ταυτίζονται. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται μείωση του K_I στο άκρο που απομακρύνεται από το όριο του καλύμματος με αντίστοιχη αύξηση του K_I στο αντίθετο άκρο το οποίο πλησιάζει στο όριο του καλύμματος (βλ. Διάγραμμα 4.3).

Στον πίνακα δίνονται οι σταθερές και μεταβλητές παράμετροι των τριών ομάδων δοκιμών.

Πίνακας 4.1: Πίνακας σταθερών και μεταβλητών παραμέτρων των αριθμητικών δοκιμών

Πρώτη ομάδα δοκιμών

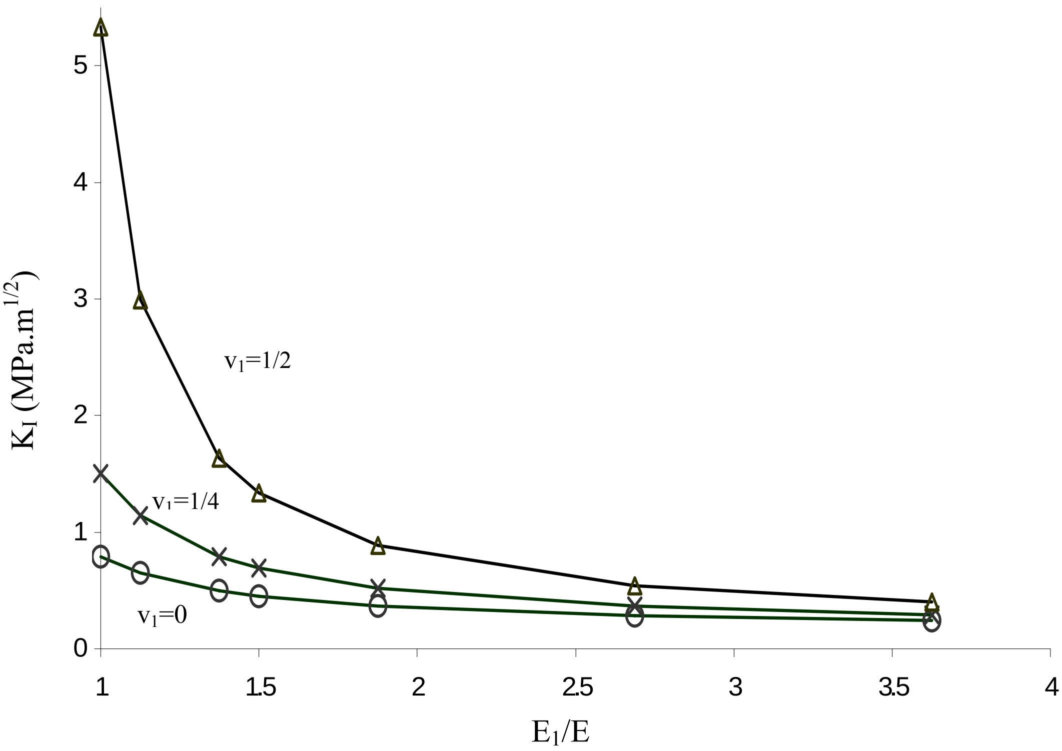
$\boldsymbol{v_1}$	*0.0*	*0.25*	*0.5*
E	$3x10^9\ N/m^2$*(3 GPa)*	$3x10^9\ N/m^2$*(3 GPa)*	$3x10^9\ N/m^2$*(3 GPa)*
v	*0.25*	*0.25*	*0.25*
Εύρος τιμών $\boldsymbol{E_1/E}$	*1 – 3.62*	*1 – 3.62*	*1 – 3.62*
d	*0.0*	*0.0*	*0.0*
ρ/2	0.2	0.2	0.2

Δεύτερη ομάδα δοκιμών

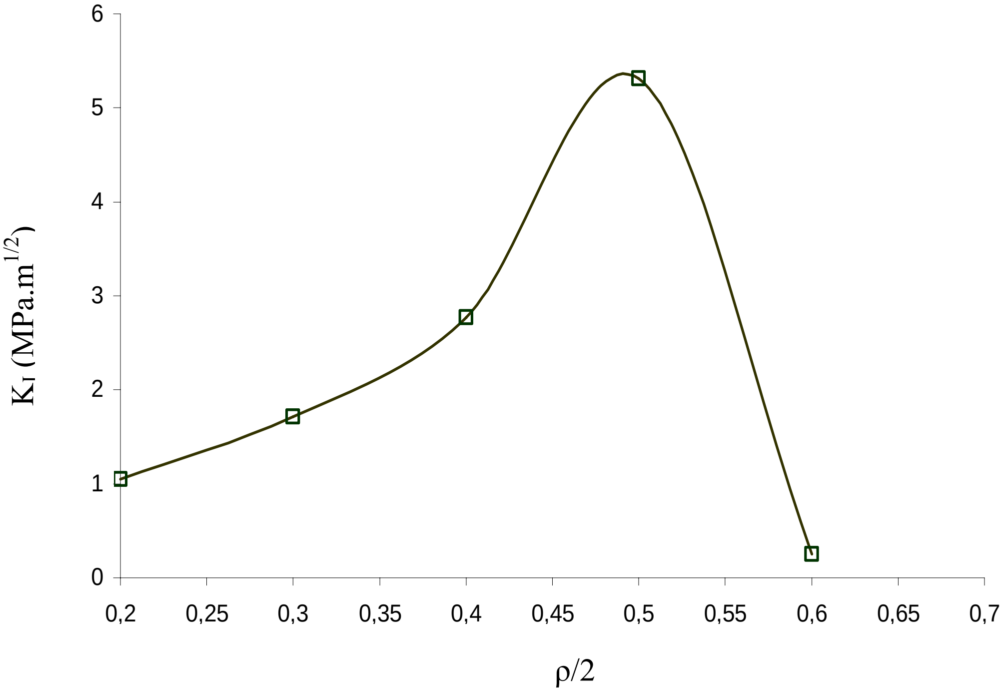
$\boldsymbol{v_1}$	*0.25*
E	$3x10^9\ N/m^2$*(3 GPa)*
v	*0.25*
$\boldsymbol{E_1}$	$3.5x10^9 N/m^2$*(3.5GPa)*
d	*0.0*
Εύρος τιμών ρ/2	*0.2 – 0.6*

Τρίτη ομάδα δοκιμών

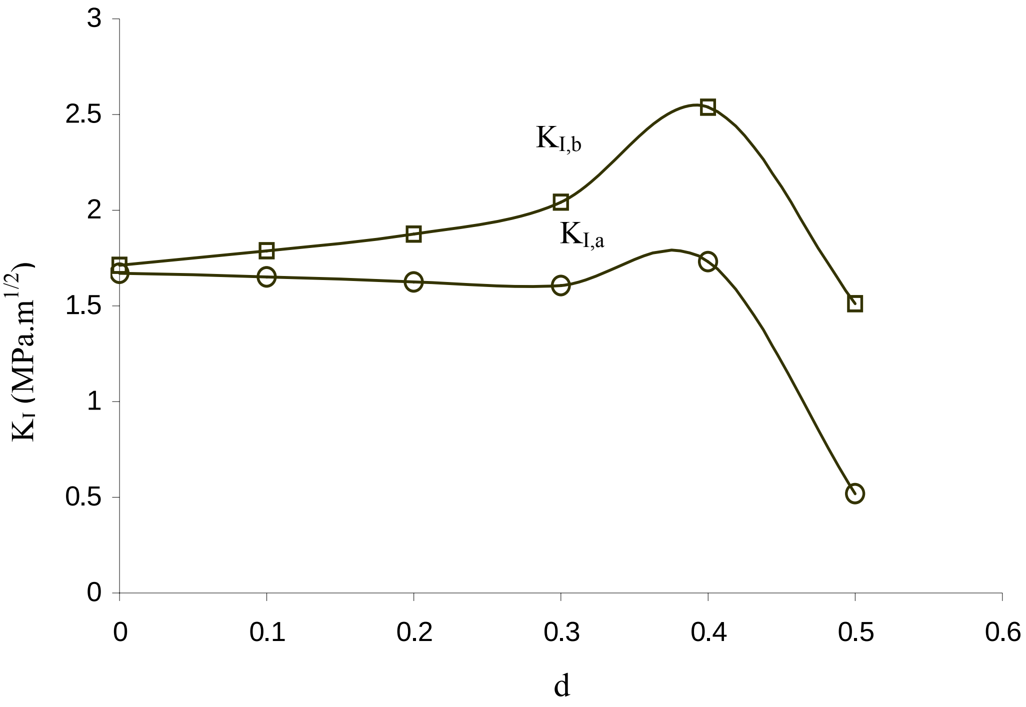
$\boldsymbol{v_1}$	*0.25*
E	$3x10^9\ N/m^2$*(3 GPa)*
v	*0.25*
$\boldsymbol{E_1}$	$3.5x10^9 N/m^2$*(3.5GPa)*
Εύρος τιμών d	*0.0 – 0.5*
ρ/2	*0.3*



Διάγραμμα 4.1: Επίδραση του λόγου των μέτρων ελαστικότητας στο συντελεστή έντασης των τάσεων για διάφορες τιμές του λόγου Poisson του καλύμματος



Διάγραμμα 4.2: Εξάρτηση του συντελεστή έντασης των τάσεων από το σχετικό μήκος της ρωγμής



Διάγραμμα 4.3: Επίδραση της εκκεντρότητας της ρωγμής στους συντελεστές έντασης των τάσεων στις δύο αιχμές της

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

5.1 ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Στόχος της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής, ήταν εξ' αρχής να δοθεί μια σαφής εικόνα για τον ρόλο της θεωρίας της Θραυστομηχανικής στη μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με την ελαστική συμπεριφορά των ρηγματωμένων σωμάτων.

Δεδομένου ότι η αστοχία των δομικών υλικών υπό συνθήκες οποιασδήποτε φόρτισης, προϋποθέτει, ανάπτυξη ρωγμών οι οποίες δημιουργούνται λόγω ατελειών στη δομή τους, η Θραυστομηχανική εστιάζει το ενδιαφέρον της στα σημεία αδυναμίας του υλικού τα οποία είναι οι περιοχές κοντά στα άκρα των ρωγμών υπολογίζοντας εκεί τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων. Ο συντελεστής αυτός αποτελεί ουσιαστικά ένα μέτρο της έντασης των τάσεων που αναπτύσσονται, στα άκρα των ρωγμών, οι οποίες δεν είναι μετρήσιμες, λαμβάνουν εξαιρετικά μεγάλες τιμές και θεωρητικά τείνουν στο άπειρο. Συνεπώς, ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων αποτελεί ένα ποσοτικό κριτήριο αστοχίας του υλικού.

Η παρούσα εργασία ξεκινά με μια όσο το δυνατόν συνοπτική παρουσίαση των προβλημάτων δημιουργίας ρωγμών σε τεχνικές κατασκευές και τους τρόπους αντιμετώπισής τους, με έμφαση στις μεθόδους χρήσης ενισχυτικών επιφανειακών καλυμμάτων. Στη συνέχεια γίνεται, μια ιστορική αναδρομή, στις αρχές θεμελίωσης της θεωρίας της Θραυστομηχανικής και στους ερευνητές που συνέβαλαν σε αυτήν. Ακολουθεί η ανάπτυξη μιας μεθοδολογίας μελέτης και σχεδιασμού της ενίσχυσης ενός επίπεδου ρηγματωμένου σώματος με επικόλληση ενισχυτικού καλύμματος. Έγινε η μαθηματική ανάλυση του προβλήματος μιας επίπεδης ελαστικής πλάκας, που φέρει ευθύγραμμη ρωγμή πεπερασμένου μήκους και μικρού πάχους, επί της οποίας τοποθετείται κυκλικό ελαστικό κάλυμμα ενίσχυσης και διερευνάται η επίδραση του καλύμματος αυτού στην τιμή του συντελεστή συγκέντρωσης των τάσεων. Η διερεύνηση αφορά ευθύγραμμη ρωγμή σε επίπεδη ελαστική πλάκα, με κυκλικό ενισχυτικό ελαστικό κάλυμμα ή οποία υπόκειται σε μονοαξονικό εφελκυστικό πεδίο τάσεων (βλ. σχ. 4.6). Εξετάζεται η επίδραση α) των ελαστικών ιδιοτήτων του ενισχυτικού καλύμματος στον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων στα άκρα της ρωγμής, β) το μήκος της ρωγμής και γ) η εκκεντρότητά της ως προς το κάλυμμα.

5.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

Από την ανάλυση που προηγήθηκε προκύπτει ότι, ο υπολογισμός του πεδίου τάσεων σε ένα επίπεδο ρηγματωμένο ελαστικό και συνεχές μέσο που φέρει ενισχυτικό κάλυμμα, ανάγεται σε επίλυση ενός προβλήματος μικτών συνοριακών τιμών για τις περιοχές συγκέντρωσης τάσεων που ερευνήθηκαν. Οι περιοχές συγκέντρωσης τάσεων που ερευνήθηκαν, είναι η περιοχή κατά μήκος των ορίων της ρωγμής και το σύνορο καλύμματος-πλάκας. Προκειμένου να διατυπωθούν οι μικτού τύπου συνοριακές συνθήκες στις παραπάνω περιοχές που εκφράζουν την ισορροπία τάσεων και μετατοπίσεων, χρησιμοποιήθηκε η μαθηματική διατύπωση της επίπεδης θεωρίας ελαστικότητας, υπό την μορφή συναρτήσεων μιγαδικών δυναμικών. Λόγω τις ιδιομορφίας που παρουσιάζουν τα μιγαδικά δυναμικά, στις περιοχές αυτές, οι εξισώσεις των μικτών συνοριακών συνθηκών, λαμβάνουν τη μορφή ολοκληρωτικών εκφράσεων. Οι εκφράσεις αυτές περιέχουν, ιδιόμορφα συνοριακά ολοκληρώματα *Cauchy*, τα οποία προσεγγίζονται αριθμητικά με την μορφή πολυωνύμων, για να καταλήξουν τελικά στη μορφή ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Το γραμμικό αυτό σύστημα εξισώσεων δίνει ως λύση τις τιμές χαρακτηριστικών εντατικών συναρτήσεων πεδίου σε κάναβο προεπιλεγμένων σημείων αριθμητικής ολοκλήρωσης στις εξεταζόμενες περιοχές συγκέντρωσης τάσεων. Από τις υπολογιστικές δοκιμές που έγιναν, προέκυψε ότι η ένταση του πεδίου των τάσεων που αναπτύσσεται γύρω από την ρωγμή, εξαρτάται τόσο από τις ελαστικές ιδιότητες του ενισχυτικού καλύμματος, όσο και από το μήκος της ρωγμής και την απόσταση των άκρων της από το σύνορο καλύμματος-πλάκας. Πιο συγκεκριμένα ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων στα άκρα της ρωγμής μειώνεται α) όταν μειώνεται ο λόγος *Poisson* του καλύμματος και β) όταν αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας του καλύμματος. Επίσης, μείωση του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων στα άκρα της ρωγμής παρατηρείται όσο μειώνεται το μήκος της και όσο αυξάνονται οι αποστάσεις των άκρων της από το όριο του καλύμματος.

5.3 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ

Περαιτέρω διερεύνηση του θέματος μπορεί να γίνει, με την ανάπτυξη κατάλληλων κριτηρίων αστοχίας, τα οποία θα βασίζονται στον υπολογισμό μιας οριακής τιμής του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων η οποία θα συγκρίνεται με την υφιστάμενη τιμή αυτού που θα υπολογίζεται συσχετιζόμενη με τις υφιστάμενες συνθήκες φόρτισης, έτσι ώστε να είναι εφικτός ο υπολογισμός ενός συντελεστή ασφάλειας.

Επίσης το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφεται στην παρούσα διατριβή, μπορεί να επεκταθεί σε ένα πολυπλοκότερο μοντέλο, το οποίο θα περιλαμβάνει περισσότερες ρωγμές σε συνδυασμό με ενισχυτικά καλύμματα και ευθύγραμμα και καμπυλόγραμμα ελάσματα μικρού πάχους και πεπερασμένου μήκους (Εξαδάκτυλος 1996), προκειμένου να μελετηθεί και η αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφόρων δομικών στοιχείων (ρωγμές, ελάσματα καλύμματα) στο εντατικό πεδίο και του συντελεστή συγκέντρωσης των τάσεων. Μερικά παραδείγματα είναι, υλικά ενισχυμένα με ίνες, ενισχυμένες λεπτές λαμαρίνες κατασκευών (π.χ. στα αεροσκάφη, τα πλοία κ.λ.π.), ενισχυμένο σκυρόδεμα κ.λ.π.

Πειραματική διερεύνηση του υπολογιστικού μοντέλου μπορεί να γίνει με την εργαστηριακή μέτρηση των τάσεων που ασκούνται κατά μήκος του περιγράμματος του μπαλώματος και σύγκρισή τους με τις τιμές που προκύπτουν από το υπολογιστικό μοντέλο της παρούσας εργασίας.

Μία περαιτέρω διερεύνηση του θέματος θα ήταν σκόπιμο να γίνει για την περίπτωση ανισότροπου ελαστικού ενισχυτικού καλύμματος με ελλειπτικό, ορθογωνικό ή οβάλ σχήμα, ή ακόμα και για ανισότροπη ελαστική πλάκα με πολλαπλές ρωγμές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Εξαδάκτυλος Γ. (2001). «Εισαγωγή στη Θεωρία Ελαστικότητας και στη Θραυστομηχανική», Τμήμα Ορυκτών Πόρων , Πολυτεχνείο Κρήτης.
2. Δρίτσος Η. Σ. (1995) «Επισκευές και ενισχύσεις κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα.
3. Δρίτσος Η. Σ. (2001) «Επισκευές και ενισχύσεις κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα.
4. Τριανταφύλλου Χ. Α. (2003) «Ενισχύσεις κατασκευών οπλισμένου σκυροδέματος με σύνθετα υλικά (Ινοπλισμένα πολυμερή)», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα.
5. Υ.ΠΕ.ΧΩ.ΔΕ. Ο.Α.Σ.Π. (2001) «Συστάσεις για προσεισμικές και μετασεισμικές επεμβάσεις σε κτίρια», Αθήνα.
6. Barzokas D., Exadaktylos G., Anastaselos G., (1996) “The Effect of Stringers and Patches on the Stress Intensities Around Cracks in Plates”, Engineering Fracture Mechanics Vol.55, No.6, pp.935-955.
7. Broek, D., (1974). Elementary Engineering Fracture Mechanics. Noordhoff International Publishing.
8. Broek, D., (1982). Elementary Engineering Fracture Mechanics. Martinus-Nijhoff, 3rd Revision, Ed. 1982.
9. Exadaktylos, G., (1998). Gradient elasticity with surface energy: Mode-I crack problem Int. J. Solids Structures Vol. 35, Nos 5-6, pp. 421-456.
10. Griffith, A.A., (1920). The phenomena of rupture and f1ow of solids. Philosophical Transactions Roy. Soc. (London) Series A, Vol. 221, ρρ. 163 -198.
11. Goursat, E. (1898). Sur I’equation ΔΔu=0, Bull. De la Soc. Math. De France, Vol.26, p.236.
12. Inglis, C.E., (1913). Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Transactions, Inst,. Naval Architects, Vol.60.
13. Irwin, G.R. (1948). Fracture dynamics fracturing of metals. Am. Soc. of Metals, Cleveland, ρρ. 147-166.
14. Irwin, G.R. (1955). Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminium alloys. VRL Dept. 4763 Proc. 1955 Sagamore Conference on Ordinance Materials, Vol. II, Syracuse Univ. Press, Syracuse, N.Y. 1956.
15. Irwin, G .R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of the crack. J. Αρρl. Mech., Vol. 24, ρ. 361.
16. Irwin, G.R. (1962). Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, Series E, Vol. 84, Dec. 1962, ρρ. 651 -654.
17. Kolosov, G.V. (1909). On an Application of Complex Function Theory to a Plane problem of the Mathematical Teory of Elasticity, Yuriev.
18. Liebowitz, H. (1998). Fracture. Vol. V, Academy Press.
19. Muskhelishvili N. I. (1943) “Singular Integral Equations: Bounolars Problems of Functions Theory and their Applications to Mathematical Physics”, Tifflis USSR.
20. Muskhelishvili N. I., (1965) “Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity”, Noordhoff, Groningen.
21. Novozhilov V.V. “Theory of Elasticity” Trans. J. K. Lusher, Pergamon Press, 1961 Int. J Solids Structures Vol. 35, Nos 5-6, pp. 421-456. Transactions, Inst. NavalArchitects, Vol. 60.
22. Orowan E. (1949), Fracture and Strength of Solids, Report on Progress in Physics, Physics Soc., London, Vol. 12, pp. 185-232.
23. Parker, A.P., (1981).The Mechanics of Fatigue and Fracture. F&N Spon. Methuen, NY.