

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ



Παπανικολάου Ευστάθιος

Εργασία που υπεβλήθη για την μερική
ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού διπλώματος στο τμήμα
Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Επιβλέπων Καθηγητής:

Μυγδαλάς Αθανάσιος

XANIA 2008

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας τη παρούσα διπλωματική εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Μαρινάκη Γιάννη για τις πολύτιμες παρατηρήσεις του και για την επίβλεψη του στη διεκπεραίωση της εργασίας καθώς και τον καθηγητή Μυγδαλά Α. για τη πολύτιμη καθοδήγηση του κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Επίσης, ευχαριστώ θερμά την οικογένειά μου για την υλική και ηθική συμπαράστασή της.

Παπανικολάου Ευστάθιος

Χανιά 2008

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	3
Κεφάλαιο 1^ο	5
1.1 Ταξινόμηση προβλημάτων αποθεμάτων	5
1.2 Ιστορική αναδρομή.....	7
1.3 Βασικές έννοιες και ορισμοί.....	8
1.4 Απόθεμα ασφαλείας	10
1.5 Κόστος εξάντλησης.....	12
1.6 Σκοπός και δομή της εργασίας.....	13
Κεφάλαιο 2^ο	15
2.1 Συστήματα σταθερού μεγέθους παραγγελιών.....	15
2.1.1 Μεταβλητή ζήτηση και σταθερή χρονική ανοχή για γνωστό κόστος εξάντλησης.....	15
2.1.2 Μεταβλητή ζήτηση και μεταβλητή χρονική για γνωστό κόστος εξάντλησης.....	22
2.3 Συστήματα σταθερού διαστήματος παραγγελιών.....	23
2.3.1 Συστήματα σταθερού διαστήματος παραγγελιών με γνωστό κόστος εξάντλησης.....	25
2.3.2 Μεταβλητή ζήτηση και μεταβλητή χρονική ανοχή.....	28
2.3.3 Άγνωστο κόστος εξάντλησης & επίπεδα εξυπηρέτησης.....	29
2.4 Ποσότητες μεμονωμένων παραγγελιών	32
2.4.1 Μεταβλητή ζήτηση , γνωστή χρονική ανοχή	33
2.4.2 Οριακή ανάλυση	34
2.4.3 Ανάλυση κόστους.....	35
Κεφάλαιο 3^ο	38
3.1 Εισαγωγικά.....	38
3.2 Διηνεκές σύστημα αποθεμάτων	39
3.2 Two-bin σύστημα αποθεμάτων	40
3.3 Περιοδικό σύστημα αποθεμάτων.....	40
3.4 Σύστημα αποθεμάτων με προαιρετική αναπλήρωση.....	42
3.5 M.R.P.....	43

Κεφάλαιο 4 ^ο	45
4.1 Προσομοίωση Monte Carlo	45
4.2 Προσομοίωση ανέλιξης poisson	47
4.2.1 Η ομογενής διαδικασία Poisson	50
Κεφάλαιο 5 ^ο	52
5.1 Προσομοίωση στοχαστικού μοντέλου με μεταβλητή ζήτηση	52
5.2 Προσομοίωση διηνεκούς αποθέματος με τη μέθοδο Monte Carlo	57
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	64
Βιβλιογραφία	68

Κ ε φ α λ α ι ο 1^ο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

1.1 Ταξινόμηση προβλημάτων αποθεμάτων

Τα προβλήματα αποθεμάτων μπορούν να ταξινομηθούν με πολλούς τρόπους. Μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με την επαναληπτικότητα της απόφασης που λαμβάνεται για τα αποθέματα , με την πηγή προμήθειας , με τη γνώση που υπάρχει για την μελλοντική ζήτηση , με τη γνώση της μελλοντικής ανοχής μεταξύ παραγγελίας και εκτέλεσης της και με τον τύπο του συστήματος αποθεμάτων. Η ταξινόμηση των προβλημάτων μπορεί να γίνει βάση των ακόλουθων υποδιαίρέσεων.

- 1) Επαναληπτικότητα
 - a) Μεμονωμένη παραγγελία
 - b) Επαναλαμβανόμενη παραγγελία
- 2) Πηγή προμήθειας
 - a) Εξωτερική πηγή
 - b) Εσωτερική πηγή
- 3) Γνώση της μελλοντικής ζήτησης
 - a) Σταθερή ζήτηση
 - b) Μεταβλητή ζήτηση
- 4) Γνώση της χρονικής ανοχής μεταξύ παραγγελίας και εκτέλεσης της
 - a) Σταθερή χρονική ανοχή
 - b) Μεταβλητή χρονική ανοχή
- 5) Συστήματα αποθεμάτων
 - a) Διηνεκές
 - b) Περιοδικό
 - c) Προγραμματισμού απαιτούμενων υλικών

Η παρούσα εργασία εστιάζεται στην κατάταξη των αποθεμάτων με βάση τη γνώση της μελλοντικής ζήτησης. Εξετάζοντας τις ιδιότητες των συστημάτων αποθεμάτων διαπιστώνεται ότι ορισμένοι παράγοντες είναι κοινοί σε όλα. Η ζήτηση, η αναπλήρωση, οι περιορισμοί και το κόστος είναι τέσσερις κοινοί παράγοντες. Η ζήτηση είναι μονάδες που αφαιρούνται από τα αποθέματα, η αναπλήρωση είναι μονάδες που προσθέτονται στα αποθέματα, το κόστος εκφράζει τις οικονομικές επιπτώσεις για τη διατήρηση ή μη των αποθεμάτων και οι περιορισμοί είναι περιστολές που επιβάλλονται στη ζήτηση και το κόστος από τη διοίκηση ή από συνθήκες του φυσικού περιβάλλοντος. Η συνηθέστερη υπόθεση για την κατανομή της ζήτησης είναι ότι η ζήτηση είναι σταθερή μέσα στο χρόνο και το σύστημα αποκαλείται προσδιοριστικό. Η ζήτηση μπορεί επίσης να έχει μια εμπειρική κατανομή μέσα στο χρόνο που δεν είναι τυποποιημένη ή μπορεί να ακολουθεί μια κάποια ειδική κατανομή, όπως κανονική Poisson ή βήτα. οπότε το σύστημα καλείται στοχαστικό. Μια άλλη υποδιαίρεση της γνώσης της μελλοντικής ζήτησης μπορεί να περιλαμβάνει τη βεβαιότητα, τον επιχειρηματικό κίνδυνο και την αβεβαιότητα. Η μορφή της ζήτησης αναφέρεται στο τρόπο που με τον οποίο αναλύσκονται τα αποθέματα. Το απόθεμα ή μέρος αυτών μπορεί να αναλύσκεται στην αρχή της περιόδου, στο τέλος, ομοιόμορφα σε όλη τη διάρκεια της περιόδου ή σύμφωνα με κάποια άλλη μορφή, π.χ. εποχιακά.

Όταν η μελλοντική ζήτηση είναι γνωστή με ακρίβεια έχουμε ένα πρόβλημα αποθεμάτων κάτω από συνθήκες βεβαιότητας. Αυτή είναι η κατάσταση που συναντάται στις γραμμές παραγωγής, όπου ο ακριβής αριθμός των απαιτούμενων ειδών υποδεικνύεται από τον σταθερό ρυθμό παραγωγής. Όταν είναι γνωστή η κατανομή των πιθανοτήτων της μελλοντικής ζήτησης έχουμε ένα πρόβλημα αποθεμάτων κάτω από συνθήκες επιχειρηματικού κινδύνου. Αυτού του είδους οι πληροφορίες, μπορεί να προέρχονται από αρχεία προηγούμενων ζητήσεων. Μια τελευταία περίπτωση θα μπορούσε να είναι η απόλυτη άγνοια της πιθανότητας σε μελλοντική χρήση. Ένα καινούριο προϊόν στα πρώτα στάδια της εισαγωγής του στην αγορά θα μπορούσε να περιγράφει σαν ένα πρόβλημα αποθεμάτων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Η Επιχειρησιακή Έρευνα ως μεθοδολογία εφαρμόστηκε αρχικά στις δραστηριότητες logistics , κατά την διάρκεια του δεύτερου παγκόσμιου πολέμου. Ομάδες επιστημόνων αντιμετώπισαν προβλήματα τα οποία δεν μπορούσαν να επιλυθούν με τις παραδοσιακές μεθόδους. Η επιτυχής εφαρμογή αρχών της Επιχειρησιακής έρευνας παράλληλα με την μαθηματική ανάπτυξη της μεθόδου Simplex για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού και η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή οδήγησαν στην καθιέρωση της Επιχειρησιακής Έρευνας ως νέου αυτόνομου γνωστικού πεδίου από τις αρχές της δεκαετίας 1950-1959.

Η πρώτη εργασία που έγινε στη μοντελοποίηση της διαχείρισης αποθεμάτων είναι του Ford Harris (1913), ο οποίος τυποποίησε ένα ντετερμινιστικό μοντέλο αποθεμάτων και απέδειξε τον τύπο για την ποσότητα οικονομικής παραγγελίας (Economic Order Quantity . E.O.Q.). Αργότερα τράβηξαν το επιστημονικό ενδιαφέρον οι έρευνες του R.H. Wilson (1934), του οποίου οι εργασίες δημοσιεύονταν για τα επόμενα δεκαπέντε χρόνια. Στις αρχές της δεκαετίας του '50 δημοσιεύτηκαν οι εργασίες των Arrow, Harris και Marschak (1951) καθώς και των Dvoretzky, Kiefer και Wolfowitz (1952 a&b), οι οποίες αποτέλεσαν τη βάση για τη μετέπειτα εξέλιξη στην μαθηματική θεωρία αποθεμάτων. Ο T.M. Whitin (1957) παρουσίασε τη σχέση μεταξύ της κλασικής οικονομικής σκέψης και θεμάτων στη διαχείριση αποθεμάτων και ήταν ένας από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με το (r , Q) μοντέλο υπό συνθήκες αβεβαιότητας, το οποίο μετέπειτα αποτέλεσε το ορόσημο για πολλά συστήματα αποθεμάτων. Ένας μεγάλος αριθμός σημαντικών επιστημόνων έστρεψαν το ενδιαφέρον τους στα μαθηματικά μοντέλα αποθεμάτων κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1950.

Οι Bellman, Glilksberg και Gross (1955) έδειξαν πώς οι μέθοδοι του δυναμικού προγραμματισμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων απλών μοντέλων αποθεμάτων με στοχαστική ζήτηση. Μία σειρά μαθηματικών μοντέλων από τους Arrow, Karlin και Scarf (1958) έδωσαν την ώθηση για μετέπειτα εργασίες στο συγκεκριμένο πεδίο.

1.3 Βασικές έννοιες και ορισμοί.

Το κόστος και τα προβλήματα στη διανομή προϊόντων καθιστούν απαγορευτικό για μια επιχείρηση τη συνεχή τοποθέτηση παραγγελιών. Για την αντιμετώπιση των παραπάνω, οι επιχειρήσεις προβλέπουν τη ζήτηση για συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα και προβαίνουν στην εξασφάλιση κατάλληλου αποθέματος που θα καλύψει τη ζήτηση αυτή. Από την άλλη πλευρά η ύπαρξη αποθέματος δημιουργεί κόστη στην επιχείρηση (λόγω δέσμευσης κεφαλαίου, πληρωμής ασφαλίσεων, έξοδα λειτουργίας αποθήκης κλπ.). Στόχος μιας επιχείρησης είναι να υπολογιστεί η κατάλληλη ποσότητα παραγγελίας που θα ελαχιστοποιήσει τα κόστη που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια δημιουργίας και διατήρησης του αποθέματος .

Όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του αποθέματος που πρέπει να διατηρούμε , λαμβάνουμε υπόψη μας τα διάφορα κόστη που σχετίζονται με το απόθεμα. Τέτοια κόστη είναι το κόστος αγοράς, το κόστος εκκίνησης παραγγελίας, το κόστος αποθήκευσης και διατήρησης και το κόστος ελλείψεων. Το κόστος εκκίνησης παραγγελίας ορίζεται ως το κόστος τοποθέτησης μιας παραγγελίας και δεν εξαρτάται από το ύψος της παραγγελίας. Περιλαμβάνει το εργατικό κόστος του τμήματος παραγγελιών, το κόστος του εγγράφου παραγγελίας, κόστος εισαγωγής δεδομένων, εγκατάσταση υποδομής παραγγελιών, αποστολής και λήψης εγγράφων κτλ. Με τον όρο κόστος αγοράς εννοούμε το κόστος αγοράς (ή παραγωγής) των προϊόντων μιας παραγγελίας. Το κόστος αυτό είναι συνάρτηση του ύψους της παραγγελίας. Στις περισσότερες εφαρμογές θεωρείται γραμμικό και υπολογίζεται από το μοναδιαίο κόστος αγοράς επί το ύψος της παραγγελίας. Το κόστος αποθήκευσης και διατήρησης των προϊόντων στην αποθήκη περιλαμβάνει τα παρακάτω επιμέρους κόστη αποθήκης :

- i) Κόστος αποθήκης. Το κόστος αυτό περιλαμβάνει τα έξοδα ενοικίασης ή συντήρησης της αποθήκης.
- ii) Κόστος ζημιών κατά την διάρκεια αποθήκευσης
- iii) Κόστος κεφαλαίου. Είναι το κόστος από το κεφάλαιο που δεσμεύεται για την αγορά των αποθεμάτων. Τα κεφάλαια αυτά θα μπορούσαν να είχαν επενδυθεί σε άλλο τμήμα της εταιρίας.
- iv) Έξοδα ασφάλισης του αποθέματος.

- v) Έξοδα καταστροφής προϊόντων που δεν μπορούν να καταναλωθούν λόγω ακαταλληλότητας
- vi) Φόροι.
- vii) Λοιπά κόστη, όπου περιλαμβάνονται εργατικά κόστη, έξοδα διοίκησης κ.τ.λ.

Το κόστος ελλείμματος παρουσιάζεται σε μια επιχείρηση όταν η ζητούμενη ποσότητα προϊόντος υπερβαίνει το διαθέσιμο απόθεμα αυτού. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις «χειρισμού» του κόστους ελλείμματος προϊόντων. Στην πρώτη περίπτωση (ικανοποίηση της παραγγελίας με υστέρηση-backlogging), η υπερβολική ζήτηση δεν χάνεται, αλλά οι πελάτες αναμένουν μέχρι την επόμενη παραλαβή του συγκεκριμένου προϊόντος. Στην περίπτωση αυτή, το κόστος ελλείμματος αντικατοπτρίζει τη διαμόρφωση μιας άσχημης εικόνας της επιχείρησης απέναντι στους πελάτες της καθώς και τη βλάβη στην αξιοπιστία της, λόγω της καθυστέρησης παραλαβής του προϊόντος. Στη δεύτερη περίπτωση (μη ικανοποίηση της παραγγελίας με υστέρηση-no backlogging), όταν υπάρξει υπερβολική ζήτηση του προϊόντος τότε οι πελάτες δεν περιμένουν μέχρι την επόμενη παραλαβή αλλά αντίθετα:

i) Η υπερβολική ζήτηση ικανοποιείται με μια έκτακτη, παραγγελία η οποία παραλαμβάνεται με κάποιο δαπανηρό μέσο, επιφέροντας επιπλέον κόστος.

ii) Η υπερβολική ζήτηση δεν ικανοποιείται καθόλου τελικά, οπότε το κόστος ελλείμματος είναι ουσιαστικά το κόστος της χαμένης εισροής εισοδήματος συν το κόστος της απώλειας καλής πίστης

Το συνολικό κόστος αποθεμάτων γενικά προκύπτει από την σχέση:

$$\begin{pmatrix} \text{Συνολικό} \\ \text{κόστος} \\ \text{αποθεμάτων} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Κόστος} \\ \text{αγοράς} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Κόστος} \\ \text{εκκίνησης} \\ \text{παραγγελίας} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Κόστος} \\ \text{αποθήκευσης} \\ \text{διατήρησης} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Κόστος} \\ \text{ελλείψεων} \end{pmatrix}$$

Οι παράγοντες που επηρεάζουν την ποσότητα αποθέματος είναι :

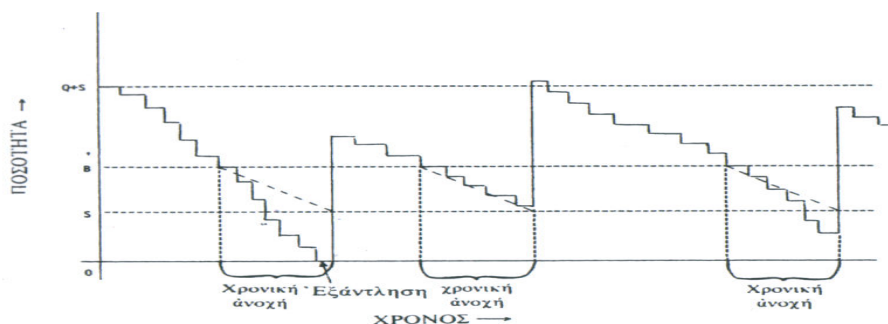
- i) Ο ρυθμός ζήτησης, που ορίζεται ως το πλήθος προϊόντων που ζητούνται προς κατανάλωση ανά χρονική μονάδα. Στα μοντέλα προσδιοριστικής ζήτησης ο ρυθμός αυτός είναι γνωστός, ενώ αντίθετα στα στοχαστικά μοντέλα ζήτησης, η ζήτηση κάθε περιόδου είναι τυχαία μεταβλητή. Η πιο απλή κατηγορία μοντέλων αναφέρεται στα μοντέλα σταθερής ζήτησης όπου ο ρυθμός ζήτησης είναι γνωστός και σταθερός.
- ii) Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ παραγγελίας και παράδοσης (lead time). Σε ορισμένα μοντέλα ο χρόνος αυτός είναι μηδενικός.

- iii) Ο κύκλος παραγγελίας, που ορίζεται το διάστημα μεταξύ δυο παραγγελιών.
- iv) Το απόθεμα ασφαλείας, που είναι το απόθεμα που διατηρείται προκειμένου να αντιμετωπισθεί υψηλότερη ζήτηση από την προβλεπόμενη κατά την διάρκεια του χρόνου μεταξύ παραγγελίας –παράδοσης
- v) Οι εκπτώσεις που δίνονται από τους κατασκευαστές στους πελάτες και είναι ανάλογες της ποσότητας παραγγελίας.

1.4 Απόθεμα ασφαλείας

Ο επιχειρηματικός κίνδυνος και η αβεβαιότητα υπεισέρχονται στην ανάλυση αποθεμάτων δια μέσου πολλών μεταβλητών , οι επικρατέστερες των οποίων είναι διακυμάνσεις στη ζήτηση και στη χρονική ανοχή. Οι διακυμάνσεις στη ζήτηση και στη χρονική ανοχή απορροφούνται με πρόβλεψη για αποθέματα ασφαλείας. Τα αποθέματα ασφαλείας είναι επιπλέον αποθέματα που διατηρούνται σαν μέτρο προφύλαξης για την περίπτωση εξάντλησης που οφείλεται σε τυχαία διατάραξη των εσωτερικών συνθηκών λειτουργίας ή του περιβάλλοντος. Χρειάζονται για να καλύψουν τη ζήτηση κατά τη διάρκεια της χρονικής ανοχής ως την αναπλήρωση σε περίπτωση που η πραγματική ζήτηση υπερβαίνει την προσδοκώμενη ζήτηση , ή η χρονική ανοχή υπερβαίνει την προσδοκώμενη ανοχή. Το απόθεμα ασφαλείας ελαττώνει το κόστος των εξαντλήσεων αλλά αυξάνει το κόστος διατηρήσεως. Το κόστος εξαντλήσεως είναι το τίμημα που θα πρέπει να υποστεί ένας οργανισμός όταν η ζήτηση ξεπερνά την προσφορά.

Στο ακόλουθο Σχήμα 1.1 απεικονίζονται τρεις κύκλοι ενός συστήματος αποθεμάτων. Στον πρώτο κύκλο η ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής είναι τόσο μεγάλη ώστε έχει σα συνέπεια μια εξάντληση. Στο δεύτερο κύκλο η ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής είναι μικρότερη από ότι αναμένεται και η αναπλήρωση γίνεται πριν χρησιμοποιηθεί το απόθεμα ασφαλείας. Στον τρίτο κύκλο η ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής είναι μεγαλύτερη από ότι αναμένεται αλλά το απόθεμα ασφαλείας επαρκεί για την απορρόφησή της.



Σχήμα 1.1 : Ρεαλιστικό μοντέλο αποθεμάτων

Καθώς αυξάνεται το μέγεθος του αποθέματος ασφαλείας ελαττώνεται η πιθανότητα μίας εξάντλησης. Σε κάποιο επίπεδο το αποθέματος ασφαλείας το κόστος αποθήκευσης επιπλέον μονάδων συν το προσδοκώμενο κόστος εξάντλησης είναι το ελάχιστο δυνατό. Αυτό το επίπεδο είναι και το άριστο και η απομάκρυνση από αυτό προς οποιαδήποτε κατεύθυνση συνεπάγεται μια καθαρή ζημία. Μια εξάντληση μπορεί να έχει σα συνέπεια μια εκκρεμή παραγγελία ή μια χαμένη πώληση. Στην περίπτωση της εκκρεμής παραγγελίας η ζήτηση του πελάτη ικανοποιείται με την παραλαβή της επόμενης παραγγελίας. Στην περίπτωση της χαμένης πώλησης η ζήτηση δεν ικανοποιείται χάνεται για πάντα. Το απόθεμα ασφαλείας μπορεί να θεωρηθεί μια αρκετά μόνιμη επένδυση σε αποθέματα. Κατά μέσο όρο των περιπτώσεων το απόθεμα ασφαλείας είναι πάντοτε διαθέσιμο. Στα προσδιοριστικά μοντέλα σταθερού μεγέθους παραγγελίας το μέσο απόθεμα είναι κατά προσέγγιση $Q/2$. Όταν διατηρείται απόθεμα ασφαλείας το κατά προσέγγιση μέσο απόθεμα γίνεται $S+Q/2$, όπου S είναι η ποσότητα του αποθέματος ασφαλείας και Q είναι η ποσότητα της παραγγελίας.

Δεν υπάρχει συγκεκριμένος μαθηματικός τύπος η συγκεκριμένη διαδικασία για τον καθορισμό του αποθέματος ασφαλείας. Οι υπολογισμοί των διαφόρων μεθόδων που υπάρχουν βασίζονται στη ζήτηση, στην χρονική άνοχη, και στο κόστος εξάντλησης. το απόθεμα ασφαλείας είναι απλώς η διαφορά μεταξύ του αποθέματος που υπάρχει διαθέσιμο για την περίοδο αναπλήρωσης (σημείο επανάλληψης της παραγγελίας) και της μέσης ζήτησης που δημιουργείται κατά τη διάρκεια της περιόδου αναπλήρωσης. Σαν σημείο επανάλληψης της παραγγελίας ορίζεται το ύψος του αποθέματος στο οποίο γίνεται μια παραγγελία. Υπάρχουν δύο μεθοδεύσεις που αφορούν τον τρόπο καθορισμού του αποθέματος ασφαλείας για ένα σύστημα

σταθερού μεγέθους παραγγελίας. Η πρώτη χρησιμοποιεί γνωστά κόστη εξάντλησης καθώς στις ελλείψεις μπορούν να αποδοθούν συγκεκριμένα κόστη. Η δεύτερη χρησιμοποιεί άγνωστα κόστη, όπου η διοίκηση καθορίζει ένα επίπεδο εξυπηρέτησης με βάση κάποια κατανομή πιθανοτήτων για τη δημιουργία της ζήτησης για τη δημιουργία ζήτησης κατά τη περίοδο ανοχής.

1.5 Κόστος εξάντλησης

Το κόστος εξάντλησης είναι συνήθως το δυσκολότερο εξακριβώσιμο κόστος αποθεμάτων. Το κόστος εξάντλησης μπορεί να οφείλεται σε εκκρεμείς παραγγελίες ή σε χαμένες πωλήσεις και μπορεί να εκφράζεται ανά διακοπή λειτουργίας ή σε κάποια άλλη βάση. Έχουν αναπτυχθεί τεχνικές για την εύρεση του σημείου επαναλήψεως της παραγγελίας και του αποθέματος ασφαλείας όταν το κόστος εξάντλησης είναι γνωστό και η ζήτηση και η χρονική ανοχή είναι σταθερές ή μεταβλητές.

Το κόστος εξάντλησης θα περιλαμβάνει :

- i. το κόστος εκκρεμών παραγγελιών ανά μονάδα
- ii. το κόστος εκκρεμών παραγγελιών ανά διακοπή λειτουργίας
- iii. το κόστος των χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα
- iv. το κόστος των χαμένων πωλήσεων ανά διακοπή λειτουργίας.

Όταν η ζήτηση και η χρονική ανοχή είναι μεταβλητές η μεταβολή θα πρέπει να εκφράζεται με κάποιο αριθμητικό τρόπο όπως η κατανομή συχνοτήτων. Όταν χρησιμοποιείται μια κατανομή για να περιγραφεί η ζήτηση υποτίθεται ότι δεν υπάρχουν δεν υπάρχουν τάσεις εποχικές ή κυκλικές επιδράσεις ή αν υπάρχουν έχουν εξαιρεθεί με συγκεκριμένες στατιστικές τεχνικές. Η κατανομή θα πρέπει να περιλαμβάνει μόνο τυχαίες διακυμάνσεις. Οι δυναμικές διακυμάνσεις που οφείλονται σε μη τυχαίες αιτίες μπορούν να αντιμετωπίζονται με τις κατάλληλες τεχνικές προβλέψεων.

Η συνθηθέστερη ίσως περίπτωση είναι όταν ένας οργανισμός δεν γνωρίζει το κόστος που θα έχει η εξάντληση των αποθεμάτων του. Υπό τις συνθήκες αυτές η διοίκηση καθορίζει υποκειμενικά τα επίπεδα εξυπηρέτησης από τα οποία μπορούν να υπολογίζονται τα σημεία επανάληψης των παραγγελιών. Η εκλογή ενός επιπέδου εξυπηρέτησης από τη διοίκηση υπονοεί ότι κάποιο κόστος αποδίδεται αυθαίρετα ή

έμμεσα στην τυχόν αποτυχία να παραχθεί η εξυπηρέτηση. Καθώς αυξάνει η προστασία έναντι πιθανών εξαντλήσεων αυξάνει κατακόρυφα και το επίπεδο το επίπεδο του απαιτούμενου αποθέματος ασφαλείας,. Έτσι είναι λογικό η διοίκηση να αποδέχεται ένα αριθμό εξαντλήσεων λόγου του μεγάλου κόστους που θα είχε η προσπάθεια τέλει εξάλειψής τους.

Αν ένας πελάτης παραλαμβάνει πάντοτε την παραγγελία του μόλις τη ζητήσει το επίπεδο εξυπηρέτησης είναι 100%. Οτιδήποτε λιγότερο από 100% σημαίνει κάποια ανεπάρκεια στην εξυπηρέτηση ή κάποια εξάντληση. Το επίπεδο εξυπηρέτησης και το επίπεδο εξάντλησης έχουν άθροισμα 100%. Το επίπεδο εξυπηρέτησης προσλαμβάνει διαφορετικές έννοιες ανάλογα με το πώς εκφράζεται σαν κριτήριο για τη λήψη αποφάσεων.

Τα συνηθέστερα χρησιμοποιούμενα επίπεδα εξυπηρέτησης είναι :

- i. Συχνότητα εξυπηρέτησης ανά κύκλο παραγγελιών
- ii. Συχνότητα εξυπηρέτησης ανά έτος
- iii. Ποσοστό ζητούμενων μονάδων
- iv. Ποσοστό εργασιμων ημερών

Τα σημεία επανάληψης της παραγγελίας ή τα αποθέματα ασφαλείας που υπολογίζονται με βάση τις διαφορετικές έννοιες εξυπηρέτησης θα είναι και διαφορετικά. Η επιλογή του τύπου και του επιπέδου εξυπηρέτησης υπαγορεύεται από την πολιτική της διοίκησης.

1.6 Σκοπός και δομή της εργασίας

Σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιάσει τα χαρακτηριστικά και τη συμπεριφορά των κυριότερων συστημάτων αποθεμάτων λαμβάνοντας υπόψη στοχαστική ζήτηση. Επιπλέον εξετάζεται η βελτιστοποίηση μέσω προσομοίωσης των συστημάτων αυτών στην περίπτωση μεταβλητής ζήτησης και χρονικής ανοχής λαμβάνοντας υπ' όψη και κόστη εξάντλησης.

Η εργασία οργανώνεται σε πέντε κεφάλαια, που αποτελούν και τα στάδια της εργασίας, καλύπτοντας τα εξής θέματα:

Στο δεύτερο κεφάλαιο καταγράφονται οι μέθοδοι βελτιστοποίησης αποθεμάτων για τα συστήματα σταθερού διαστήματος παραγγελιών , σταθερού μεγέθους παραγγελιών και συστήματα μεμονωμένων παραγγελιών. Τα συστήματα αυτά εξετάζονται με βάση τις παραμέτρους της ζήτησης , την οποία θεωρούμε πάντα μεταβλητή , καθώς και τη χρονική ανοχή και το κόστος εξάντλησης , τα οποία μπορεί να είναι είτε σταθερά είτε μεταβλητά. Επιπλέον καταγράφεται το μοντέλο μεμονωμένων παραγγελιών για μεταβλητή ζήτηση και γνωστή χρονική ανοχή.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση των κυριότερων κατηγοριών των συστημάτων αποθεμάτων. Παρουσιάζονται τα συστήματα διηλεκτούς αποθέματος , περιοδικού αποθέματος , προαιρετικής αναπλήρωσης και Two-bin. Για κάθε ένα από τα παραπάνω συστήματα περιγράφονται οι βασικές αρχές του και παρουσιάζεται η συμπεριφορά του.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται δύο τεχνικές στοχαστικής προσομοίωσης βάση των οποίων θα γίνει εφαρμογή στο επόμενο κεφάλαιο. Αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές αρχές προσομοίωσης Monte Carlo , η οποία περιλαμβάνει τον προσδιορισμό της κατανομής πιθανοτήτων των υπό μελέτη μεταβλητών και τη δειγματοληψία από τις κατανομές χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς για την εξασφάλιση των δεδομένων. Στη συνέχεια εξετάζεται η απαριθμήτρια στοχαστική ανάλυση poisson ενώ επιπλέον περιγράφεται η ομοιογενής ανάλυση poisson στην περίπτωση δηλαδή που η ένταση της διαδικασίας είναι σταθερή.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές με δύο τεχνικές προσομοίωσης στοχαστικού μοντέλου. Η πρώτη εφαρμογή αφορά προσομοίωση στοχαστικού μοντέλου με μεταβλητή ζήτηση. Λαμβάνοντας ως υπόθεση στοχαστική ανάλυση Poisson για τις μεταβλητές ρυθμός άφιξης πελατών , ζήτηση και χρονική ανοχή υπολογίζεται η βέλτιστη πολιτική περιοδικού αποθέματος. Στη δεύτερη εφαρμογή κάνοντας χρήση του αλγορίθμου Monte Carlo για μεταβλητή ζήτηση και χρονική ανοχή προσομοιώνεται ένα μοντέλο διηλεκτούς συστήματος αποθέματος, λαμβάνοντας υπόψη κόστη εξάντλησης.

Κεφάλαιο 2^ο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΩΝ- ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΩΝ- ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΩΝ

2.1 Συστήματα σταθερού μεγέθους παραγγελιών

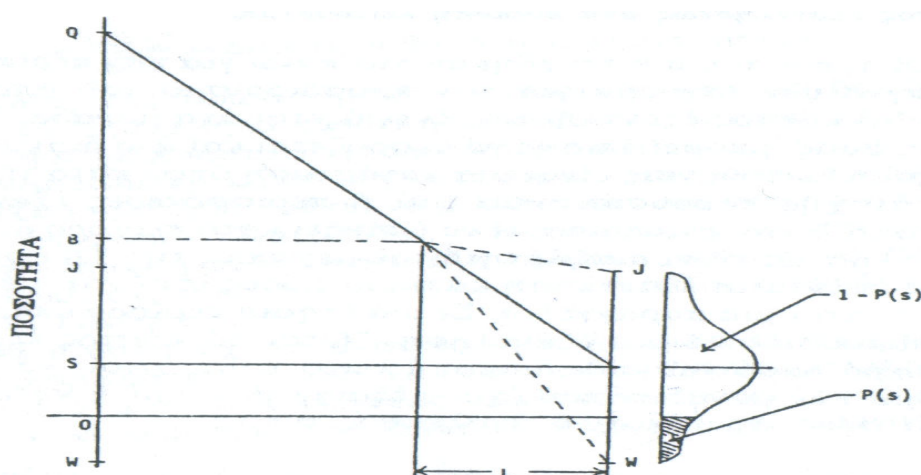
Σύμφωνα με το σύστημα σταθερού μεγέθους παραγγελίας (σύστημα Q) υπάρχει μια σταθερή ποσότητα παραγγελίας η οποία και παραγγέλλεται κάθε φορά που φτάνει στο σημείο επαναλήψεως της παραγγελίας. Το απόθεμα ασφαλείας χρειάζεται για να προστατευτεί για την περίπτωση πιθανής εξάντλησεως αφού έχει φθάσει στο σημείο επαναλήψεως της παραγγελίας και πριν τη λήψη της παραγγελίας αυτής. Αυτή η χρονική περίοδος κατά τη διάρκεια της οποίας θα μπορούσε να παρατηρηθεί κάποια εξάντληση είναι γνωστή σαν χρονική ανοχή.. Η σταθερή ποσότητα παραγγελίας (A) και το σημείο επαναλήψεως της παραγγελίας B ορίζουν απόλυτα το σύστημα σταθερού μεγέθους παραγγελίας. Στα συστήματα σταθερού μεγέθους παραγγελίας το σημείο επαναλήψεως της παραγγελίας B ορίζεται από τη μέση ζήτηση που παρατηρείται κατά την περίοδο της χρονικής ανοχής M συν το απόθεμα ασφαλείας S

2.1.1 Μεταβλητή ζήτηση και σταθερή χρονική ανοχή για γνωστό κόστος εξάντλησης

Όταν η διακύμανση της χρονικής ανοχής από τη μέση χρονική ανοχή είναι μικρή οι πιθανολογούμενες χρονικές ανοχές μπορούν να εκφρασθούν κατά προσέγγιση με μια σταθερή χρονική ανοχή. Επίσης δεσμευτικές συμφωνίες ,μπορεί να κάνουν

σχεδόν βέβαιη τη χρονική ανοχή. Με το Σχήμα 2.1 επεξηγείται η περίπτωση της μεταβλητής ζήτησης και της σταθερής χρονικής ανοχής.

Αν υπάρχουν στοιχεία για προηγούμενη κατανομή της ζήτησης, το απόθεμα ασφαλείας μπορεί να προσδιορισθεί επιλέγοντας το επίπεδο εκείνο του αποθέματος ασφαλείας που συνεπάγεται το χαμηλότερο αναμενόμενο κόστος. Ο αντικειμενικός σκοπός είναι να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα του κόστους διατήρησης του αποθέματος ασφαλείας και του κόστους εξάντλησης. Καθώς αυξάνεται το μέγεθος του αποθέματος ασφαλείας, αυξάνεται το κόστος διατήρησης αλλά ελαττώνεται το κόστος εξάντλησης. Καθώς μειώνεται το απόθεμα ασφαλείας αυξάνεται το κόστος εξάντλησης αλλά ελαττώνεται το κόστος διατήρησης. Ο κίνδυνος μιας εξάντλησης υπάρχει μόνο κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής. Στη διάρκεια του έτους υπάρχουν R/Q περίοδοι ανοχής αν σε οποιαδήποτε στιγμή δεν υπάρχουν περισσότερες της μίας εκκρεμείς παραγγελίες.. Συχνά η κατανομή της ζήτησης εκφράζεται σε κάποια χρονική βάση διάφορη της περιόδου ανοχής. Κάτω από τις συνθήκες αυτές είναι απαραίτητο να τροποποιείται η κατανομή της ζήτησης ώστε να προσδιορίζεται η ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής. Η τεχνική της τροποποίησης της ζήτησης για ποικίλης διάρκειας χρονικές περιόδους ονομάζεται περιέλιξη και θα περιγράψει στο τέλος του κεφαλαίου



Σχήμα 2.1 Μεταβλητή ζήτηση σταθερή χρονική ανοχή

$(B-S)$ = αναμενόμενη ζήτηση κατά την περίοδο ανοχής $(B-j)$ = ελάχιστη ζήτηση κατά την περίοδο ανοχής $(B-W)$ = μέγιστη ζήτηση κατά την περίοδο ανοχής B = σημείο επανάληψης της παραγγελίας Q = ποσότητα παραγγελίας L = σταθερή χρονική ανοχή

$P(s)$ = πιθανότητα να παρουσιαστεί εξάντληση $[1-P(s)]$ = πιθανότητα να μην παρουσιαστεί εξάντληση S = απόθεμα ασφαλείας

2.1.1.1 Εκρεμμείς παραγγελίες. Κόστος εξάντλησης ανά μονάδα

Στην περίπτωση εκρεμμών παραγγελιών δεν χάνονται οι πωλήσεις επειδή αν δεν υπάρχει απόθεμα ο πελάτης περιμένει την άφιξη της παραγγελίας. Το προσδοκώμενο απόθεμα ασφαλείας ορίζεται σε ως :

$$S = \int_0^{\infty} (B - M)f(M)d(M) = B - \bar{M}$$

Όπου $\bar{M}$ είναι η αναμενόμενη ζήτηση κατά την περίοδο ανοχής και ο αριθμός των εκρεμμών παραγγελιών ανά περίοδο ανοχής είναι μηδέν αν $M-B < 0$ και $M-B$ αν $M-B > 0$. Ο αναμενόμενος αριθμός εκρεμμών παραγγελιών ανά περίοδο ανοχής είναι :

$$E(M > B) = \int_0^{\infty} (M - B)f(M)d(M)$$

Για μια συνεχή κατανομή και όταν το κόστος εξάντλησης εκφράζεται ανά μονάδα η κατάλληλη μαθηματική έκφραση είναι η εξής :

Ετήσιο κόστος αποθέματος ασφαλείας = κόστος διατήρησης + κόστος εξάντλησης

$$TC_s = H(B - \bar{M}) + \frac{ARE(M > B)}{Q}$$

Όπου :

TC_s = προσδοκώμενο ετήσιο κόστος αποθέματος ασφαλείας , $B = \bar{M} + S$ = σημείο επανάληψης της παραγγελίας σε μονάδες , S = απόθεμα ασφαλείας σε μονάδες , H = κόστος διατήρησης ανά μονάδα αποθεμάτων ανά έτος , A = κόστος εκρεμμών παραγγελιών ανά μονάδα , R = μέση ετήσια ζήτηση σε μονάδες , Q = μέγεθος παρτίδας ή ποσότητα παραγγελίας σε μονάδες , M = ζήτηση κατά την περίοδο ανοχής σε μονάδες (τυχαία μεταβλητή) , $\bar{M}$ = μέση ζήτηση κατά την περίοδο ανοχής σε μονάδες , $f(M)$ = συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής , $M-B$ = μέγεθος εξαντλήσεως σε μονάδες

Υπολογίζοντας την παράγωγο του αναμενόμενου ετήσιου κόστους του αποθέματος ασφαλείας το αναφερόμενο στο σημείο επανάληψης της παραγγελίας και εξισώνοντας ο με το μηδέν προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$P(M > B) = P(s) = \frac{HQ}{AR}$$

Ο παραπάνω τύπος αποτελεί την άριστη πιθανότητα για τη δημιουργία εξάντλησης και μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε συνεχείς όσο και σε ασυνεχείς κατανομές πιθανοτήτων της ζήτησης της δημιουργουμένης κατά την περίοδο ανοχής. Η γνώση της κατανομής πιθανοτήτων επιτρέπει τον προσδιορισμό της τιμής του B που έχει το ελάχιστο αναμενόμενο ετήσιο κόστος. Όταν χρησιμοποιούνται ασυνεχείς κατανομές είναι συχνά αδύνατο να υπολογιστεί η ακριβής άριστη πιθανότητα εξάντλησης λόγω της ασυνεχούς φύσης των δεδομένων. Όταν δε μπορεί να βρεθεί η άριστη πιθανότητα εξάντλησης επιλέγεται η επόμενη μικρότερη εφικτή πιθανότητα εξάντλησης.

2.1.1.2 Εκρεμμείς παραγγελίες. Κόστος εξάντλησης ανά διακοπή λειτουργίας

Μια διακοπή λειτουργίας είναι μια κατάσταση όπου κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής παρουσιάζονται μία ή περισσότερες εξαντλήσεις. Μόνο μια διακοπή λειτουργίας μπορεί να υπάρξει κατά περίοδο ανοχής και το κόστος εξαντλήσεως είναι ανεξάρτητο του μεγέθους της. Οι φορές που ένας οργανισμός υφίστανται εξάντληση ισούνται σε αριθμό με τις φορές που δίνεται μια παραγγελία. Σε μια ετήσια περίοδο υπάρχουν R/Q ευκαιρίες να παρουσιαστεί μια εξάντληση. Όταν το κόστος εξαντλήσεως είναι ένα σταθερό ποσό για κάθε διακοπή λειτουργίας χωρίς να επηρεάζεται από τον αριθμό των μονάδων που έχουν εξαντληθεί και η κατανομή της ζήτησης είναι συνεχής ισχύει ο ακόλουθος τύπος :

Ετήσιο κόστος αποθέματος ασφαλείας = κόστος διατήρησης + κόστος εξάντλησης

$$TC_s = SH + G \frac{R}{Q} \int_B^{\infty} f(M) d(M) = H(B - \bar{M}) + \frac{GPR(M > B)}{Q}$$

Όπου :

$B \mid S * \bar{M}$ = σημείο επανάληψης παραγγελίας σε μονάδες

TC_s , Q , S , H , R , $f(M)$, $\bar{M}$ όπως ορίστηκαν προηγούμενα

Αν υπολογίσουμε την παράγωγο του αναμενόμενου ετήσιου κόστους του αποθέματος ασφαλείας που αναφέρεται στο σημείο επανάληψης της παραγγελίας και το εξισώσουμε με μηδέν προκύπτει η σχέση

$$f(B) = \frac{HQ}{GR}$$

Η άριστη πιθανότητα μιας εξάντλησης μπορεί να βρεθεί πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με την τυπική απόκλιση σ οπότε προκύπτει η άριστη πιθανότητα εξάντλησης :

$$P(M > B) = P(s) = \frac{\sigma HQ}{GR}$$

Στην περίπτωση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής η άριστη πιθανότητα για τη δημιουργία εξαντλήσεως δεν βρίσκεται από τον παραπάνω τύπο επειδή η $f(B)$ υφίσταται μια μεταβολή κλίμακας όταν μετασχηματίζεται στην τυποποιημένη κανονική κατανομή. Η τυποποιημένη κανονική απόκλιση Z από την άριστη πιθανότητα εξαντλήσεως βρίσκεται από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής αν είναι γνωστή ή $\sigma f(B)$. Όταν η άριστη πιθανότητα μιας εξάντλησης βρίσκεται μεταξύ δυο ακεραίων τιμών επιλέγεται ο ακέραιος που δίνει τη χαμηλότερη πιθανότητα μιας εξάντλησης.. Αν η ζήτηση ακολουθεί κανονική κατανομή το άριστο απόθεμα ασφαλείας προσδιορίζεται από τον πίνακα κανονικής κατανομής και τους τύπους :

$$Z = \frac{B - \bar{M}}{\sigma} = \frac{S}{\sigma_D \sqrt{L}} \text{ και } S = Z_\sigma = Z_{s_D} \sqrt{L}$$

όπου :

Z = τυποποιημένη κανονική απόκλιση , $B = \bar{D} - L + S$ = σημείο επανάληψης παραγγελίας σε μονάδες , $\bar{M} = \bar{D} - L$ = μέση ζήτηση κατά την περίοδο ανοχής , σ = τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά την περίοδο ανοχής , L = περίοδος ανοχής , S = απόθεμα ασφαλείας σε μονάδες , σ_D = τυπική απόκλιση ζήτησης για μια χρονική περίοδο διάφορη της περιόδου ανοχής

2.1.1.3 Χαμένες πωλήσεις . Κόστος εξάντλησης ανά μονάδα

Στην περίπτωση των χαμένων πωλήσεων όλες οι εξαντλήσεις (ελλείψεις) χάνονται και δεν ανακτώνται. Ο μέσος αριθμός των ετήσιων κύκλων δεν είναι R/Q αλλά είναι $R/(Q + tR)$, όπου t είναι η μέση χρονική διάρκεια ανά κύκλο όπου το σύστημα αντιμετωπίζει μια εξάντληση. Συνήθως το t είναι ένα μικρό κλάσμα της συνολικής διάρκειας του κύκλου και θα υποθέσουμε ότι ο μέσος αριθμός ετήσιων

κύκλων είναι R/Q . Η μόνη διαφορά μεταξύ της περίπτωσης των χαμένων πωλήσεων και της περίπτωσης των εκρεμμένων παραγγελιών είναι η έκφραση του αποθέματος ασφαλείας. Η προσδοκώμενη ποσότητα του υπάρχοντος κατά της στιγμή άφιξης μιας νέας παραγγελίας αποθέματος δίνεται από το τύπο :

$$S = \int_0^{\infty} (B - M)f(M)dM = B - \bar{M}$$

Αλλά επειδή το απόθεμα ασφαλείας είναι μηδέν ,οπότε $M \geq B$ η παραπάνω έκφραση διαμορφώνεται σε :

$$S = B - m + \int_B^{\infty} (M - B)f(M)dM$$

Στην περίπτωση των χαμένων παραγγελιών δεν χάνονται οι πωλήσεις , το απόθεμα ασφαλείας ήταν απλώς $B - \bar{M}$ ή το σημείο επανάληψης της παραγγελίας μείον η ζήτηση κατά την περίοδο ανοχής. Στην περίπτωση των χαμένων πωλήσεων το απόθεμα ασφαλείας είναι μεγαλύτερο από $B - \bar{M}$ κατά τον αναμενόμενο αριθμό των χαμένων πωλήσεων για κάθε κύκλο.. Ο αναμενόμενος αριθμός χαμένων πωλήσεων ανά κύκλο είναι ο ίδιος ακριβώς με τον αναμενόμενο αριθμό εκκρεμών παραγγελιών ανά κύκλο στην προηγούμενη ανάλυση. Ο αναμενόμενος αριθμός χαμένων πωλήσεων ανά περίοδο ανοχής είναι :

$$E(M > B) = \int_B^{\infty} (M - B)f(M)dM$$

Η μαθηματική έκφραση για μια συνεχή κατανομή με κόστος εξαντλήσεως εκφραζόμενο ανά μονάδα είναι η εξής :

Ετήσιο κόστος αποθέματος ασφαλείας = κόστος διατήρησης + κόστος εξάντλησης

$$TCs = H(B - \bar{M}) + \left(\frac{AR}{Q} + H\right)E(M > B)$$

Από τον παραπάνω τύπο προκύπτει παραγωγίζοντας και εξισώνοντας με το μηδέν η βέλτιστη πιθανότητα μιας εξάντλησης $P(m > B)$

$$P(M > B) = P(s) = \frac{HQ}{AR + HQ}$$

Μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε ασυνεχείς όσο και σε συνεχείς κατανομές πιθανοτήτων για τη δημιουργία ζήτησης κατά την περίοδο ανοχής. Η γνώση της κατανομής των πιθανοτήτων επιτρέπει τον προσδιορισμό της τιμής του B που έχει το ελάχιστο κόστος.

2.1.1.4 Χαμένες πωλήσεις Κόστος εξάντλησης ανά διακοπή λειτουργίας

Η μαθηματική έκφραση για μια συνεχή κατανομή με κόστος εξαντλήσεως εκφραζόμενο ανά διακοπή λειτουργίας είναι :

$$TCs = SH + \frac{GR}{Q} \int_B^{\infty} f(M) dM \rightarrow TCs = H(B - \bar{M}) + HE(M > B) + \frac{GRQ(M > B)}{Q}$$

Όπου G είναι το κόστος των χαμένων πωλήσεων ανά διακοπή λειτουργίας . Ελαχιστοποιώντας την παραπάνω έκφραση προκύπτει :

$$\frac{dTCs}{dB} = 0 = H - HP(M > B) - \frac{GR}{Q} f(B) \rightarrow f(B) = \frac{HQ[1 - P(M > B)]}{GR}$$

Επειδή $R(\sigma) = \sigma f(B)$ η παραπάνω έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί για να δώσει την βέλτιστη πιθανότητα εξάντλησης η οποία είναι :

$$P(M > B) = P(s) = \frac{\sigma HQ}{GR + \sigma HQ}$$

Στην περίπτωση τυποποιημένης κανονικής κατανομής η βέλτιστη πιθανότητα εξάντλησης δεν βρίσκεται από τον παραπάνω τύπο επειδή η $f(B)$ υφίσταται μια μεταβολή κλίμακας όταν μετατρέπεται στην τυποποιημένη κανονική κατανομή. Για να βρεθεί η βέλτιστη λύση σε μια κανονική κατανομή επιλύουμε κατ'επανάληψη την ακόλουθη σχέση για να βρεθεί το βέλτιστο απόθεμα ασφαλείας .

$$f(B) = \frac{HQ}{GR} [1 - P(s)]$$

Συνήθως η πιθανότητα εξάντλησης είναι μικρότερη από 0,20 και έτσι μπορεί να καταρτισθεί ένας πίνακας που θα συγκλίνει με ταχύτητα. Υποθέτοντας μια πιθανότητα εξάντλησης προσδιορίζεται ένα απόθεμα τόσο απευθείας όσο και από την $f(B)$, όταν τα δύο αποτελέσματα είναι ίσα έχει βρεθεί το άριστο απόθεμα ασφαλείας.

2.1.2 Μεταβλητή ζήτηση και μεταβλητή χρονική για γνωστό κόστος εξάντλησης

Όταν τόσο η ζήτηση όσο και η χρονική ανοχή είναι μεταβλητές οι περιπλοκές του προβλήματος αυξάνονται. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να αναπτυχθεί μια σύνθετη κατανομή πιθανοτήτων της ζήτησης της περιόδου αναπλήρωσης. Το εύρος της σύνθετης κατανομής πιθανοτήτων εκτείνεται από το επίπεδο το οριζόμενο από το γινόμενο της μικρότερης ζήτησης και της συντομότερης περιόδου ανοχής ως το επίπεδο το οριζόμενο από το γινόμενο της μεγαλύτερης ζήτησης και μεγαλύτερης περιόδου ανοχής. Αυτή η σύνθετη κατανομή πιθανοτήτων χρησιμοποιείται έπειτα με τους τύπους για τη ζήτηση της περιόδου ανοχής. Αντικειμενικός σκοπός είναι να βρεθεί το σημείο επανάληψης της παραγγελίας με το μικρότερο αναμενόμενο κόστος.

Στην πράξη είναι σπάνιο να υπάρχει μια περίπτωση που η χρονική ανοχή είναι γνωστή με ακρίβεια. Οι παράγοντες που καθορίζουν τη χρονική ανοχή υπόκεινται σε τυχαίες διακυμάνσεις γι' αυτό και η χρονική ανοχή περιγράφεται καλύτερα με κατανομή πιθανοτήτων παρ' ότι με ένα συγκεκριμένο υπολογισμό. Στην περίπτωση που υπάρχει ταυτόχρονα αβεβαιότητα τόσο για τη ζήτηση όσο και για τη χρονική ανοχή μπορεί να αναπτυχθεί μια σύνθετη κατανομή πιθανοτήτων που δίνει τις πιθανότητες για διάφορους συνδυασμούς επιπέδου ζήτησης και διάρκειας χρονικής ανοχής. Ότ' αν οι κατανομές της ζήτησης και της χρονικής ανοχής είναι ανεξάρτητες η διακύμανση της ζήτησης κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής δίνεται από τον τύπο :

$$\sigma^2 = \bar{L}\sigma_D^2 + \bar{D}^2\sigma_L^2$$

όπου :

L- = μέση διάρκεια της περιόδου ανοχής σε ημέρες , D- = μέση ημερήσια ζήτηση , σ_D = τυπική απόκλιση της κατανομής της ζήτησης , σ_L = τυπική απόκλιση της κατανομής της χρονικής ανοχής , D- L- = μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής

Αν οι κατανομές της ζήτησης και της χρονικής ανοχής δεν είναι ανεξάρτητες η διακύμανση της ζήτησης κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής δίνεται από τον τύπο:

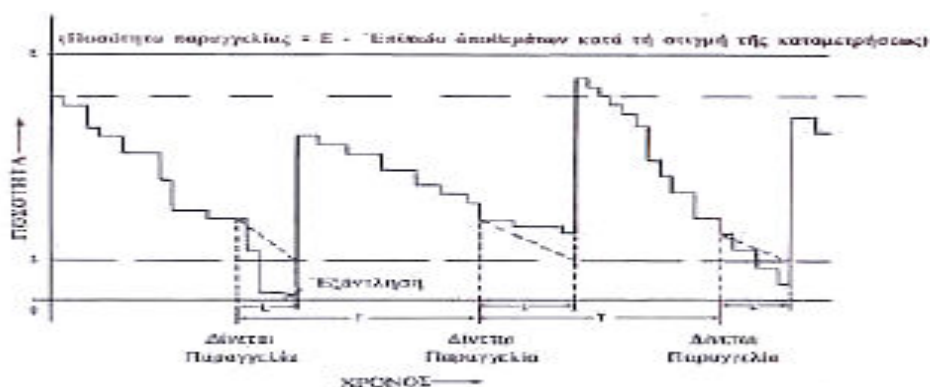
$$\sigma^2 = \bar{L}^2\sigma_D^2 + \bar{D}^2\sigma_L^2 + \sigma_D\sigma_L$$

Αν δεν επιθυμεί κανείς να χρησιμοποιήσει την αναλυτική μεθόδευση των σύνθετων πιθανοτήτων μπορεί να καταφύγει στην εξίσου κατάλληλη μεθόδευση της προσομοίωσης Monte Carlo. Η μέθοδος Monte Carlo δίνει μια κατά προσέγγιση λύση στο πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη δειγματοληψία από μια τυχαία διαδικασία (ανέλιξη). Η προσομοίωση Monte Carlo θα περιγράφει σε επόμενο κεφάλαιο.

2.3 Συστήματα σταθερού διαστήματος παραγγελιών

Στα συστήματα σταθερού διαστήματος μεταξύ παραγγελιών υπάρχει μια σταθερή περίοδος παραγγελίας και ένα μεταβλητό μέγεθος παραγγελίας. Το διάστημα μεταξύ παραγγελιών T και η προκαθορισμένη συνολική ποσότητα E ορίζουν απόλυτα το σύστημα σταθερού διαστήματος παραγγελιών. Το απόθεμα ασφαλείας χρειάζεται τόσο για την περίοδο ανοχής όσο και για το διάστημα μεταξύ παραγγελιών. Αυτό συμβαίνει επειδή στα συστήματα που βασίζονται στον παράγοντα χρόνο η εξάντληση που παρουσιάζεται σε κάποια δεδομένη περίοδο αυξάνει την πιθανότητα να παρουσιαστούν εξαντλήσεις και σε επόμενες περιόδους. Αυτή η αλληλεπίδραση μεταξύ της παραγγελίας που δίνεται σε μια περίοδο και των επομένων περιόδων σταθμίζεται κατά προσέγγιση υπολογίζοντας το απόθεμα ασφαλείας που χρειάζεται τόσο για την περίοδο ανοχής όσο και για το διάστημα μεταξύ παραγγελιών. Από τη στιγμή που δίνεται μια παραγγελία κατά το χρόνο t δεν μπορεί να δοθεί μια άλλη παραγγελία πριν από το χρόνο $t+T$ και αυτή η δεύτερη παραγγελία δεν θα εκτελεστεί μέχρις ότου περάσει η περίοδος ανοχής κατά το χρόνο $t+T+L$. Επομένως η προστασία που δίνει το απόθεμα ασφαλείας χρειάζεται για την περίοδο ανοχής L και για το διάστημα μεταξύ των παραγγελιών T .

Στα πραγματικά συστήματα αποθεμάτων όπως αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2 η ροή της ζήτησης είναι ασυνεχής και ακανόνιστη. Στον πρώτο κύκλο, η ζήτηση είναι τόσο μεγάλη που έχει ως συνέπεια μια εξάντληση (κατά τη διάρκεια του πρώτου διαστήματος μεταξύ παραγγελιών T). Στο δεύτερο κύκλο, η ζήτηση είναι μικρότερη από την αναμενόμενη και τα αποθέματα δεν πέφτουν ποτέ στο επίπεδο ασφαλείας (κατά τη διάρκεια του δεύτερου διαστήματος μεταξύ παραγγελιών T). Η αρχή του τρίτου κύκλου που απεικονίζεται στο σχήμα δείχνει μια ζήτηση μεγαλύτερη από την αναμενόμενη πράγμα που κάνει αναγκαία τη διάθεση ενός μέρους του αποθέματος.



Σχήμα 2.2 Πραγματικό περιοδικό μοντέλο αποθεμάτων

Αν η περίοδος ανοχής για την αναπλήρωση είναι L , προϊόντα που παραγγέλλονται κατά το χρόνο t θα φτάσουν στο σύστημα κατά το χρόνο $t+L$. Τα προϊόντα της επόμενης παραγγελίας θα φτάσουν στο σύστημα κατά το χρόνο $t+T+L$. Μόνο αν η ζήτηση κατά την περίοδο $L+T$ υπερβαίνει το E θα παρουσιαστεί κάποια εξάντληση μεταξύ $t+L$ και $t+T+L$. Επομένως όλες οι τυχόν εξαντλήσεις θα πρέπει να παρουσιάζονται μεταξύ των χρόνων $t+L$ και $t+T+L$. Το αναμενόμενο ετήσιο κόστος του συστήματος σταθερού διαστήματος μεταξύ παραγγελιών κάποιου μεμονωμένου είδους με σταθερή χρονική ανοχή είναι :

Αναμενόμενο ετήσιο κόστος = κόστος αγοράς + κόστος διατήρησης + κόστος παραγγελίας + κόστος εξάντλησης

$$TC = RP + mcH\left[E - \left(\frac{RT}{2} + RL\right)\right] + mA \int_E^{\infty} (M - E)f(M)dM$$

Όπου :

TC = ετήσιο κόστος, R = μέση ετήσια ζήτηση σε μονάδες, $m = 1/T$ = αριθμός παραγγελιών ετησίως, P = τιμή μονάδας, C = κόστος παραγγελίας και καταμετρήσεως των αποθεμάτων ανά παραγγελία, H = κόστος διατήρησης ανά μονάδα ετησίως, E = μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων σε μονάδες, T = διάστημα μεταξύ παραγγελιών σε έτη, L = χρονική ανοχή σε έτη, A = κόστος εξάντλησης, M = ζήτηση κατά τη διάρκεια του διαστήματος μεταξύ παραγγελιών και της περιόδου ανοχής (τυχαία μεταβλητή), $M^- = RT+RL$ = μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια του διαστήματος μεταξύ παραγγελιών, $f(M)$ = συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τη δημιουργία ζήτησης κατά τη διάρκεια του διαστήματος μεταξύ παραγγελιών και της περιόδου ανοχής

$$E(M > E) = \int_E^{\infty} (M - E)f(M)dM$$

Αφού δοθεί μια παραγγελία κατά το χρόνο T η κατάσταση των αποθεμάτων (υπάρχοντα και υπό παραγγελία) είναι E . Το αναμενόμενο καθαρό απόθεμα μετά την άφιξη της παραγγελίας είναι $E-RL$. Το αναμενόμενο καθαρό απόθεμα μόλις πριν από την άφιξη της επόμενης παραγγελίας είναι $E-RL-RT$. Ο μέσο απόθεμα κατά τη διάρκεια του διαστήματος μεταξύ παραγγελιών είναι το μισό του αρχικού αποθέματος :

$$\text{Μέσο απόθεμα} = \frac{1}{2} [(E-RL)+(E-RL-RT)] = E - (RT/2 + RT)$$

Σαν πρώτη προσέγγιση αφού βρεθεί το οικονομικό διάστημα μεταξύ παραγγελιών ,μπορεί να υπολογισθεί το μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων E . Σύμφωνα με την προσδιοριστική υπόθεση το οικονομικό διάστημα μεταξύ παραγγελιών T είναι ανεξάρτητο του μέγιστου επιπέδου αποθεμάτων E . Στην παρούσα ανάλυση των συστημάτων σταθερού διαστήματος παραγγελίας υποθέτουμε ότι οι δημιουργημένες εξαντλήσεις αφορούν μικρές ποσότητες και ότι οι εκκρεμείς παραγγελίες ικανοποιούνται απόλυτα , μόλις παραληφθούν τα παραγγελθέντα προϊόντα. Το κόστος μιας εξάντλησης θα υποτεθεί ανεξάρτητο της διάρκειας της . Το οικονομικό διάστημα μεταξύ παραγγελιών θα είναι ανεξάρτητο του μέγιστου επιπέδου αποθεμάτων .

2.3.1 Συστήματα σταθερού διαστήματος παραγγελιών με γνωστό κόστος εξάντλησης

Το κόστος εξάντλησης μπορεί να εκφράζεται ανά μονάδα ή ανά διακοπή λειτουργίας. Όταν εκφράζεται ανά μονάδα , το κόστος εξάντληση δηλώνει τη ζημία που προκύπτει από κάθε μονάδα μη ικανοποιούμενης ζήτησης. Όταν εκφράζεται ανά διακοπή λειτουργίας το κόστος εξάντλησης είναι σταθερό ανεξάρτητα από τον αριθμό των εξαντλημένων μονάδων

2.3.1.1 Εκκρεμείς παραγγελίες. Κόστος εξάντλησης ανά μονάδα

Όταν υπάρχουν εκκρεμείς παραγγελίες μπορεί να υποτεθεί ότι το απόθεμα ασφαλείας θα διατηρείται διαρκώς. Η μαθηματική έκφραση σε αυτή την περίπτωση είναι :

$$\text{Ετήσιο κόστος αποθέματος ασφαλείας} = \text{κόστος διατήρησης} + \text{κόστος εξάντλησης}$$

$$TC_s = H(E - \bar{M}) + mA \int_E^{\infty} (M - E) f(M) d(M)$$

Όπου : TCS = αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθέματος ασφαλείας , $S = E - \bar{M}$ = απόθεμα ασφαλείας , H = κόστος διατήρησης ανά μονάδα ετησίως , A = κόστος εξάντλησης ανά μονάδα , M = ζήτηση δημιουργούμενη κατά τη διάρκεια του διαστήματος περιόδου μεταξύ παραγγελιών και της περιόδου ανοχής , $\bar{M}$ = μέση ζήτηση δημιουργούμενη κατά τη διάρκεια του διαστήματος περιόδου μεταξύ παραγγελιών και της περιόδου ανοχής E = μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων , m = αριθμός παραγγελιών ετησίως

Η βέλτιστη πιθανότητα για τη δημιουργία εξάντλησης προκύπτει ως εξής :

$$\frac{dTC_s}{dE} = 0 = H - mA P(M > E) \rightarrow p(M > E) = P(s) = \frac{H}{mA} = \frac{HT}{A}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του μέγιστου επιπέδου αποθεμάτων με το μικρότερο κόστος τόσο σε συνεχείς όσο και σε ασυνεχείς κατανομές. Όταν χρησιμοποιούνται ασυνεχείς κατανομές συχνά δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί η ακριβής πιθανότητα λόγω της ασυνεχούς φύσης των δεδομένων. Όταν συμβαίνει αυτό επιλέγεται η δεύτερη μικρότερη εφικτή πιθανότητα εξάντλησης. Δεν θα υπάρχει λύση αν $H/mA > 1$, αλλά αυτό δεν μπορεί να συμβεί αν όπως έχουμε υποθέσει οι εξαντλήσεις παρουσιάζονται σε μη-συχνά χρονικά διαστήματα. Καθώς ο δείκτης πλησιάζει το 1 θα παρουσιαστούν όλο και περισσότερες εξαντλήσεις. Ένας δείκτης ίσος με 1 συνεπάγεται ότι η πιθανότητα εξάντλησης είναι 1 και ότι δεν θα πρέπει να διατηρούνται αποθέματα.

2.3.1.2 Εκρεμείς παραγγελίες. Κόστος εξάντλησης ανά διακοπή λειτουργίας

Όταν το κόστος εξάντλησης εκφράζεται ανά διακοπή λειτουργίας υποτίθεται σταθερό ανεξάρτητα από το μέγεθος της εξάντλησης. Το κόστος της εξάντλησης είναι ένα σταθερό ποσό αν δεν υπάρχουν προς διάθεση μια ή περισσότερες μονάδες.

Η μαθηματική έκφραση είναι η εξής :

Ετήσιο κόστος αποθέματος = κόστος διατήρησης + κόστος εξάντλησης

$$TC_s = H(E - \bar{M}) + mG \int_E^{\infty} f(M) dM$$

όπου το G εκφράζει το κόστος εξάντλησης ανά διακοπή λειτουργίας. Η βέλτιστη πιθανότητα για τη δημιουργία μιας εξάντλησης προκύπτει ως εξής

$$\frac{dTC_s}{dE} = 0 = H - mGf(E) \rightarrow f(E) = \frac{H}{mE} \text{ και } P(s) = \sigma f(E) = \frac{\sigma H}{mG}$$

Στην περίπτωση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής η βέλτιστη πιθανότητα εξάντλησης δεν βρίσκεται από τον παραπάνω τύπο επειδή η $f(E)$ υφίσταται μια μεταβολή κλίμακας όταν μετατρέπεται στην τυποποιημένη κανονική κατανομή, όμως η τυποποιημένη απόκλιση Z που αντιστοιχεί στη βέλτιστη πιθανότητα εξάντλησης μπορεί να βρεθεί απευθείας από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής αν είναι γνωστή η $\sigma f(E)$. Στην περίπτωση αυτή πιθανότητες μεγαλύτερες της μονάδας δεν έχουν νόημα.

2.3.1.3 Χαμένες πωλήσεις. Κόστος εξάντλησης ανά μονάδα

Όταν χάνονται πωλήσεις το μέγεθος των αποθεμάτων μετά την παραλαβή οποιασδήποτε παραγγελίας είναι μεγαλύτερο επειδή δεν ελαττώνεται αμέσως με την εκτέλεση των υφιστάμενων παραγγελιών. Συνεπώς το απόθεμα ασφαλείας είναι ελαφρά μεγαλύτερο από ότι στην περίπτωση των εκρεμμών παραγγελιών και υπολογίζεται ως εξής :

$$S = E - \overline{M} \int_E^{\infty} (M - E) f(M) dM$$

Στην παραπάνω έκφραση αγνοείται η επίδραση των χαμένων πωλήσεων κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής και θεωρείται ότι χάνονται πωλήσεις μόνο μεταξύ του χρόνου άφιξης μιας παραγγελίας και του χρόνου άφιξης της επόμενης παραγγελίας. Εφόσον το σύστημα αντιμετωπίζει εξαντλήσεις, πράγμα που συμβαίνει κατά μέσο όρο ένα μικρό ποσοστό του χρόνου, η υπόθεση αυτή είναι λογική ακόμη και όταν εκκρεμούν περισσότερες της μίας παραγγελίες. Το ετήσιο κόστος αποθέματος ασφαλείας υπολογίζεται ως εξής :

Ετήσιο κόστος αποθέματος ασφαλείας = κόστος διατήρησης + κόστος εξάντλησης

$$TC_s = H(E - \overline{M}) + (H + mAP) \int_E^{\infty} (M - E) f(M) dM$$

Η βέλτιστη πιθανότητα για τη δημιουργία εξάντληση υπολογίζεται ως εξής :

$$\frac{dTCs}{dE} = 0 = H - (H - mA)P(M > E) \rightarrow P(M > E) = P(s) = \frac{H}{H + mA}$$

2.3.1.4 Χαμένες πωλήσεις. Κόστος εξάντλησης ανά διακοπή λειτουργίας

Στην περίπτωση που χάνονται πωλήσεις και το κόστος εξάντληση εκφράζεται ανά διακοπή λειτουργίας η κατάλληλη μαθηματική έκφραση είναι η ακόλουθη :

Ετήσιο κόστος αποθέματος ασφαλείας = κόστος διατήρησης + κόστος εξάντλησης

$$TCs = H(E - M) + H \int_E^{\infty} (M - E)f(M)dM + mG \int_E^{\infty} f(M)dM$$

Η βέλτιστη πιθανότητα για τη δημιουργία μιας εξάντλησης υπολογίζεται ως εξής :

$$\frac{dTCs}{dE} = 0 = H - HP(M > E) - mGf(E) \quad \text{και} \quad f(E) = \frac{HF(E)}{mG} = \frac{H[1 - P(s)]}{mG}$$

$$P(M > E) = P(s) = \sigma f(E) = \frac{\sigma H[1 - P(s)]}{mG} \quad \text{και} \quad P(s) = \frac{\sigma H}{mG + \sigma H}$$

Ο παραπάνω τύπος δεν δίνει την πιθανότητα εξάντλησης στην περίπτωση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής επειδή η f(E) υφίσταται μια μεταβολή κλίμακας όταν μετατρέπεται στην τυποποιημένη κανονική κατανομή. Η εξίσωση:

$$f(E) = \frac{H[1 - P(s)]}{mG}$$

μπορεί να λυθεί επανειλημμένα για να βρεθεί το άριστο απόθεμα ασφαλείας για την κανονική κατανομή. Συνήθως η πιθανότητα εξάντλησης είναι μικρότερη από 0,20 και έτσι μπορεί να καταρτισθεί ένας πίνακας που θα συγκλίνει με ταχύτητα. Υποθέτοντας μια πιθανότητα εξάντλησης προσδιορίζεται ένα απόθεμα ασφαλείας Χρησιμοποιώντας την υποτιθέμενη πιθανότητα εξάντλησης υπολογίζεται ένα απόθεμα ασφαλείας από την f(E) , όταν τα δύο αποτελέσματα είναι ίσα έχει βρεθεί το άριστο απόθεμα ασφαλείας.

2.3.2 Μεταβλητή ζήτηση και μεταβλητή χρονική ανοχή

Όταν η χρονική ανοχή είναι επίσης μεταβλητή το πρόβλημα γίνεται πιο περίπλοκο. Αν υποθεθεί ότι η ζήτηση και η χρονική ανοχή έχουν κανονική κατανομή και ότι η μία είναι ανεξάρτητη της άλλης χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι τύποι για την εύρεση του μέγιστου επιπέδου αποθεμάτων και το αποθέματος ασφαλείας .

$$E = \bar{M} + S + \bar{M} + Z_{\sigma} \quad \text{και} \quad \sigma = \sqrt{(T - \bar{L})\sigma_D^2 + \bar{D}^2 \sigma_{T+L}^2}$$

όπου :

$\bar{L}$ = μέση διάρκεια της περιόδου ανοχής σε ημέρες , $\bar{D}$ = μέση ημερήσια ζήτηση , σ_D = τυπική απόκλιση της κατανομής της ζήτησης , σ_{T+L} = τυπική απόκλιση του διαστήματος μεταξύ παραγγελιών και της περιόδου ανοχής σε ημέρες , σ = τυπική απόκλιση της ζήτησης που δημιουργείται κατά τη διάρκεια του διαστήματος μεταξύ παραγγελιών και της περιόδου ανοχής. , T = διάστημα μεταξύ παραγγελιών σε ημέρες , Z = σταθερή κανονική απόκλιση , S = απόθεμα ασφαλείας , E = μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων , $\bar{M} = \bar{D}(T + L)$ = μέση ζήτηση ου δημιουργείται κατά τη διάρκεια του διαστήματος μεταξύ παραγγελιών και της περιόδου ανοχής.

Για την εύρεση της σταθερής κανονικής απόκλισης (Z) είναι απαραίτητο να υπολογιστεί η πιθανότητα για τη δημιουργία μίας εξάντλησης. Η πιθανότητα αυτή υπολογίζεται με την κατάλληλη κατάταξη του προβλήματος στην περίπτωση των εκρεμμένων παραγγελιών ή των χαμένων πωλήσεων, με κόστος εξάντλησης εκφραζόμενο ανά μονάδα ή ανά διακοπή λειτουργίας.

2.3.3 Άγνωστο κόστος εξάντλησης & επίπεδα εξυπηρέτησης

Πολύ συχνά ένας οργανισμός δε γνωρίζει το κόστος που συνεπάγονται οι εξαντλήσεις των αποθεμάτων του. Όταν συμβαίνει αυτό χρησιμοποιείται ένα επίπεδο εξυπηρέτησης από το οποίο μπορεί να υπολογιστεί το μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων. Η πολική του να μην αντιμετωπίζονται ποτέ εξαντλήσεις είναι αντιοικονομική εδώ ισχύει η οικονομική αρχή των φθινουσών αποδόσεων. Κάθε συμπληρωματική μονάδα αποθέματος ασφαλείας ελαττώνει κατά ένα μικρότερο ποσοστό την πιθανότητα εξάντλησης. Οι περισσότεροι οργανισμοί δέχονται ένα ποσοστό εξαντλήσεων λόγω του εξαιρετικά υψηλού κόστους που συνεπάγεται η προσπάθεια της πλήρους εξάλειψής του. Το απόθεμα ασφαλείας θα πρέπει να βασίζεται στη μεταβλητότητα που παρουσιάζει η ζήτηση κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης χρονικής περιόδου

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.5 αν το κόστος εξάντλησης είναι άγνωστο , η διοίκηση μπορεί να καθορίσει επίπεδα εξυπηρέτησης που δείχνουν την ικανότητά της να ικανοποιήσει από τα υπάρχοντα αποθέματα τη ζήτηση των πελατών. Το επίπεδο εξυπηρέτησης χρησιμοποιείται ευρέως επειδή είναι δύσκολο να προσδιορισθεί το κόστος εξάντλησης. Τα συνηθέστερα είδη επιπέδων εξυπηρέτησης είναι, η συχνότητα εξυπηρέτησης ανά κύκλο παραγγελιών, η συχνότητα εξυπηρέτησης ανά έτος, το ποσοστό ζητούμενων μονάδων και το ποσοστό εργάσιμων ημερών.

2.3.3.1 Εξυπηρέτηση ανά κύκλο παραγγελίας

Ένα επίπεδο εξυπηρέτησης που βασίζεται στη συχνότητα της εξυπηρέτησης ανά κύκλο παραγγελίας θα δείξει την πιθανότητα που υπάρχει να μην εξαντληθούν τα αποθέματα κατά τη διάρκεια της περιόδου αναπλήρωσης (χρονικής ανοχής). Με αυτή τη μεθόδευση δεν απασχολούμαστε με το πόσο μεγάλη είναι η έλλειψη αλλά με το πόσο συχνά μπορεί να παρουσιαστεί κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής (κύκλος παραγγελίας). Το επίπεδο εξυπηρέτησης εκφράζεται σαν το ποσοστό των κύκλων αναπλήρωσης όπου δεν παρατηρείται εξάντληση του αποθέματος :

$$\text{Ποσοστό επιπέδου εξυπηρέτησης ανά κύκλο} = 1 - P(M > W) = 1 - P(s)$$

Το $P(s)$ εκφράζει το ποσοστό του επιπέδου εξυπηρέτησης ανα κύκλο παραγγελίας ή την πιθανότητα ότι θα παρουσιαστεί μια τουλάχιστον εξάντληση ενώ θα αναμένεται η παράδοση της παραγγελίας από τον προμηθευτή. Είναι επίσης ένας δείκτης του ποσοστού των περιόδων ανοχής κατά τη διάρκεια του οποίου η ζήτηση θα υπερβεί το σημείο επανάληψης της παραγγελίας. Στη μεθόδευση αυτή αγνοείται εντελώς το μέγεθος της εξάντλησης. Με το απόθεμα ασφαλείας να προσδιορίζεται ως :

$$S = E_a - \bar{M} = E_a - (RT + RL)$$

όπου :

$M = B$ = ζήτηση κατά της διάρκεια της περιόδου ανοχής όταν υπάρχει ένα αποδεκτό επίπεδο εξυπηρέτησης εκφραζόμενη σε μονάδες .

$\bar{M}$ = μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου ανοχής

L = σταθερή χρονική ανοχή σε ημέρες

D- = μέση ημερήσια ζήτηση

2.3.3.2 Εξυπηρέτηση ανά έτος

Ένα επίπεδο εξυπηρέτησης που βασίζεται στη συχνότητα της εξυπηρέτησης ανά έτος επιτρέπει την ομοιόμορφη αντιμετώπιση διαφορετικών προϊόντων. Όταν το επίπεδο της εξυπηρέτησης βασίζεται στον κύκλο της παραγγελίας οι συχνότητες των εξαντλήσεων διαφορετικών προϊόντων δεν είναι συγκρίσιμες, επειδή κάθε προϊόν μπορεί να έχει μια διαφορετική ανοχή. Το ποσοστό του επιπέδου εξυπηρέτησης ανά έτος βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας το ποσοστό του επιπέδου εξάντλησης ανά κύκλο παραγγελίας με τον ετήσιο αριθμό των κύκλων παραγγελίας (R/Q) και αφαιρώντας το γινόμενο από το 1.

Ποσοστό του επιπέδου εξυπηρέτησης ανά έτος = $1 - (RP(M>B) / Q)$

Το ποσοστό του επιπέδου εξάντλησης ανά κύκλο παραγγελίας βρίσκεται ως εξής από το ποσοστό του επιπέδου εξάντλησης :

$$P(M>B) = Q / R = Q/R [1 - (\text{ποσοστό του επιπέδου εξάντλησης ανά έτος})]$$

2.3.3.3 Ποσοστό ζητούμενων μονάδων

Το επίπεδο εξυπηρέτησης σαν ποσοστό των ζητούμενων μονάδων μπορεί να ορισθεί ως εξής :

Επίπεδο εξάντλησης σαν ποσοστό ζητούμενων μονάδων =
αριθμός ελλειπουσών μονάδων / συνολικός αριθμός ζητούμενων μονάδων

Ο αναμενόμενος αριθμός εξαντλήσεων κατά τη διάρκεια ενός κύκλου παραγγελίας διατυπώνεται ως :

$$E(M > E) = \int_E^{\infty} (M - E) f(M) d(M)$$

Το επίπεδο εξάντλησης σαν ποσοστό ζητούμενων μονάδων ορίζεται ως : $\frac{E(M > E)}{TR}$

Για την τυποποιημένη κανονική κατανομή ο αναμενόμενος αριθμός εξαντλήσεων κατά τη διάρκεια ενός κύκλου παραγγελίας ισούται με τη μερική αναμενόμενη τιμή

$E(Z)$ επί την τυπική απόκλιση : $E(M>B)=\sigma \cdot E(Z)$ από όπου προκύπτει για την κανονική κατανομή : Επίπεδο εξαντλήσεως σαν ποσοστό ζητούμενων μονάδων = $\sigma \cdot E(Z) / Q$ Όταν είναι γνωστό το ποσοστό του επιπέδου εξάντλησης η τυπική απόκλιση της δημιουργούμενης κατά την περίοδο ανοχής ζήτησης και η ποσότητα της παραγγελίας μπορεί να προσδιορισθεί η μερική αναμενόμενη τιμή $E(Z)$. Από τον πίνακα της κανονικής κατανομής υπολογίζεται το σημείο επανάληψης της παραγγελίας από τον τύπο :

$$B = \bar{M} + Z_{\sigma}$$

2.3.3.4 Ποσοστό εργασιμων ημερών

Ένα άλλο μέτρο των εξαντλήσεων ή των ελλείψεων αποθεμάτων είναι η διάρκεια της περιόδου όπου υπάρχει έλλειψη. Μια εξάντληση μπορεί να ορισθεί με το ποσοστό των εργασιμων ημερών στο οποίο παρατηρείται. Αυτό μας οδηγεί σε μια πολιτική εξυπηρετήσεως που βασίζεται στη χρονική διάρκεια της εξαντλήσεως και διατυπώνεται ως εξής : Επίπεδο εξυπηρετήσεως σαν ποσοστό εργασιμων = αριθμός εργασιμων ημερών χωρίς εξάντληση / συνολικός αριθμός εργασιμων ημερών. Αν ένα είδος δεν υπάρχει στην αποθήκη (είναι εξαντλημένο) το 10% του χρόνου , μπορεί λογικά να υποτεθεί ότι στο 10% του χρόνου δεν ικανοποιείται η ζήτηση. Το επίπεδο εξυπηρέτησης επομένως που βασίζεται στο ποσοστό των ζητούμενων ποσοτήτων .

2.4 Ποσότητες μεμονωμένων παραγγελιών

Το μοντέλο μεμονωμένης παραγγελίας αφορά τον προγραμματισμό και τον έλεγχο ειδών που περιλαμβάνονται στα αποθέματα και που αγοράζονται μόνο μια φορά κατά τη διάρκεια κάποιας χρονικής περιόδου ή που μπορούν να παραχθούν μόνο σε ένα κύκλο παραγωγής. Το μοντέλο της ποσότητας μεμονωμένης παραγγελίας έχει εφαρμογή όταν (1) υπάρχει ζήτηση για κάποιο είδος σε σχετικά σπάνια χρονικά διαστήματα ή (2) υπάρχει αβέβαιη ζήτηση για ένα είδος με μικρή διάρκεια ζωής σε σχετικά συχνά χρονικά διαστήματα.

Για να προσδιοριστεί η βέλτιστη ποσότητα μιας μεμονωμένης παραγγελίας είναι απαραίτητο να εξισορροπηθούν δυο αντίθετα ποσά κόστους. Στη συγκεκριμένη

περίπτωση το κόστος παραγγελίας είναι ασήμαντο, επειδή θα δοθεί μόνο μια παραγγελία που θα έχει ένα αφ'άπαξ κόστος. Το κόστος διατήρησης δεν είναι σημαντικό, επειδή δεν υπάρχει συνεχής ζήτηση για το προϊόν. Τα δύο σχετικά ποσά κόστους για την περίπτωση της μεμονωμένης παραγγελίας είναι το κόστος απαρχαίωσης και το κόστος ευκαιρίας. Το κόστος απαρχαίωσης αντιμετωπίζεται όταν δεν πουληθεί όλο το απόθεμα. Το κόστος ευκαιρίας περιλαμβάνει το κέρδος που χάνεται από πιθανές πωλήσεις όταν η ζήτηση είναι μεγαλύτερη της προσφοράς. Αν η ζήτηση ξεπερνά τη ποσότητα της μεμονωμένης παραγγελίας δεν υπάρχει κόστος ευκαιρίας αλλά μόνο κόστος απαρχαίωσης.

2.4.1 Μεταβλητή ζήτηση , γνωστή χρονική ανοχή

Όταν η ζήτηση είναι μεταβλητή και η χρονική ανοχή είναι γνωστή το πρόβλημα της μονωμένης παραγγελίας έγκειται στην εξακρίβωση του μεγέθους παραγγελίας. Αν η ζήτηση δεν είναι γνωστή αλλά υπάρχει μια κατανομή πιθανοτήτων για τη δημιουργία της επιλέγεται το μέγεθος παραγγελίας που συνεπάγεται το μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος ή τη μικρότερη αναμενόμενη ζημία. Η πιθανότητα ότι η ζήτηση θα είναι μικρότερη ή ίση με την ποσότητα της μεμονωμένης παραγγελίας όταν ακολουθεί μια ασυνεχή κατανομή είναι η εξής :

$$P(M \leq Q) = \sum_{M=0}^Q P(M) = 1 - \sum_{M=Q+1}^{M \max} P(M)$$

όπου :

R = ποσότητα μεμονωμένης παραγγελίας σε μονάδες , M = ζήτηση σε μονάδες (τυχαία μεταβλητή) , P(M) = πιθανότητα δημιουργίας ζήτησης M μονάδων , Mmax = μέγιστη ζήτηση σε μονάδες

Η πιθανότητα ότι η ζήτηση θα υπερβεί την ποσότητα της μεμονωμένης παραγγελίας όταν ακολουθεί μια ασυνεχή κατανομή είναι η εξής :

$$P(M > Q) = \sum_{M=Q+1}^{M \max} P(M) = 1 - \sum_{M=0}^Q P(M)$$

Η διαδικασία για τον υπολογισμό της αναμενόμενης αξίας κάθε ασυνεχούς στρατηγικής ζήτησης Q_i είναι η εξής :

$$E(Q_i) = P(M_0)F(Q_i M_0) + P(M_1)F(Q_i M_1) + \dots + P(M_n)F(Q_i M_n) = \sum_{j=0}^n P(M_j)F(Q_i M_j)$$

= προσδοκώμενη αξία στρατηγικής

όπου $F(Q_i M_j)$ είναι η έκβαση της στρατηγικής ζήτησης (Q_i) όταν η πραγματική ζήτηση είναι (M_j). Ο προσδιορισμός των διαφόρων αποτελεσμάτων μπορεί να πάρει δύο μορφές ανάλογα με το εάν η παραγγελλόμενη ποσότητα (Q_i) είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από το επίπεδο της ζήτησης (M_j). Όταν τα αποτελέσματα εκφράζονται σαν κέρδος ή όφελος ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις.

$$\begin{aligned} F(Q_i M_j) &= Q_i J & Q_i \leq M_j & \text{περίπτωση ελλειπών αποθεμάτων} \\ F(Q_i M_j) &= M_j J - (Q_i - M_j) l & Q_i > M_j & \text{περίπτωση πλεοναζόντων αποθεμάτων} \end{aligned}$$

όπου :

J = κέρδος ή όφελος ανά μονάδα , l = ζημιά από τη διάθεση – μη χρησιμοποιηθείς μονάδων , Q_i = ποσότητα μονωμένης παραγγελίας i μονάδων , M_j = επίπεδο ζήτησης j μονάδων , $Q_i - M_j$ = αριθμός πλεοναζουσών μονάδων

Όταν τα αποτελέσματα ισχύουν σαν κόστος ή ζημιά ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις :

$$\begin{aligned} F(Q_i M_j) &= Q_i P & Q_i \geq M_j & \text{περίπτωση υπερπαραγωγής} \\ F(Q_i M_j) &= Q_i P - (M_j - Q_i) A & Q_i < M_j & \text{περίπτωση ελλειπών παραγωγής} \end{aligned}$$

όπου :

P = κόστος μονάδας, A = κόστος εξαντλήσεως ανά μονάδα , $M_j - Q_i$ = μέγεθος εξαντλήσεως σε μονάδες.

Όταν τόσο η ζήτηση όσο και η χρονική ανοχή είναι μεταβλητές το πρόβλημα είναι πιο περίπλοκο. Επειδή κατά τη διάρκεια της χρονικής ανοχής δε χρησιμοποιείται κανένα προϊόν μια καθυστέρηση στην παράδοση θα μπορούσε να έχει ως συνέπεια να χάνεται η ζήτηση. Η ζήτηση και η χρονική ανοχή μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν ανεξάρτητες μεταβλητές. Η ζήτηση μπορεί να προσδιοριστεί ανεξάρτητα από την χρονική ανοχή , όπως στην περίπτωση της μεταβλητής ζήτησης και σταθερής χρονικής ανοχής. Η χρονική ανοχή μπορεί να καθοριστεί στο μέγιστο επίπεδο της ή σε κάποιο αποδεκτό επίπεδο εξυπηρέτησης.

2.4.2 Οριακή ανάλυση

Για να επιλυθεί το πρόβλημα της μεμονωμένης παραγγελίας όταν η ζήτηση είναι μεταβλητή μπορεί να χρησιμοποιηθεί η οριακή ανάλυση. Όταν οι μήτρες των αποτελεσμάτων είναι μεγάλες η οριακή ανάλυση είναι από υπολογιστική άποψη

αποδοτικότερη από τη μέθοδο της αναμενόμενης αξίας. Όταν περιλαμβάνεται στα αποθέματα μια επιπλέον μονάδα υπάρχουν δύο πιθανές εκδοχές . Είτε αυτή η επιπλέον μονάδα θα ζητηθεί είτε όχι, και το άθροισμα των δύο πιθανοτήτων θα πρέπει να ισούται με τη μονάδα. Οι επιπλέον μονάδες θα πρέπει να αποθεματοποιούνται μόνο εφόσον το αναμενόμενο οριακό κόστος συν την αναμενόμενη οριακή ελάττωση του κόστους εξαντλήσεως είναι μεγαλύτερο από την αναμενόμενη οριακή ζημία. Η αναμενόμενη οριακή ελάττωση του κόστους εξαντλήσεως προστίθεται στο αναμενόμενο οριακό κέρδος επειδή η αποθεματοποίηση μιας επιπλέον μονάδας θα αυξήσει το αναμενόμενο κέρδος αν η μονάδα ζητηθεί. Η οριακή επιπλέον μονάδα θα πρέπει να περιλαμβάνεται στα αποθέματα εφόσον

$$P(MP) + p(A) - (1-p)ML \geq 0 \quad \rightarrow \quad p \geq ML / (MP + ML + A)$$

όπου :

p = πιθανότητα να πουληθεί μία ή περισσότερες επιπλέον μονάδες, MP = οριακό κέρδος , ML = οριακή ζημία , A = κόστος εξαντλήσεως ανά μονάδα , pA = αναμενόμενη οριακή ελάττωση κόστους εξαντλήσεως , $p(MP)$ = αναμενόμενο οριακό κέρδος , $(1-p) ML$ = αναμενόμενη οριακή ζημία

Το γράμμα p αντιπροσωπεύει την minimum πιθανότητα να πουληθεί τουλάχιστον μια επιπλέον μονάδα που απαιτείται για να δικαιολογηθεί η αποθεματοποίηση τόση επιπλέον μονάδας. Οι επιπλέον μονάδες θα πρέπει να αποθεματοποιούνται μόνο εφόσον η πιθανότητα να πουληθεί μια επιπλέον μονάδα είναι ίση ή μεγαλύτερη του p . Στις περιπτώσεις μεμονωμένης παραγγελίας συχνά η επιπλέον ζήτηση δεν έχει αντίστοιχο κόστος εξάντλησης ,στην περίπτωση αυτή το κόστος εξάντλησης ανά μονάδα (A) υποτίθεται ότι είναι μηδέν.

2.4.3 Ανάλυση κόστους

Όταν τα είδη προορίζονται για εσωτερική χρήση από την οποία δημιουργούνται έσοδα , η επιλογή του μεγέθους η επιλογή του μεγέθους της μεμονωμένης παραγγελίας βασίζεται στο μικρότερο αναμενόμενο κόστος. Τα συστατικά του κόστους είναι το κόστος παραγγελίας , το κόστος αγοράς , το κόστος εξαντλήσεως και η υπολειμματική αξία. Ο ακόλουθος τύπος προσδιορίζει το αναμενόμενο κόστος μιας μεμονωμένης παραγγελίας σε περίπτωση συνεχούς κατανομής :

Αναμενόμενο κόστος = κόστος παραγγελίας + κόστος αγοράς + αναμενόμενο κόστος εξάντλησεως – αναμενόμενη υπολειμματική αξία

$$EC = C + PQ + A \int_{M=Q}^{\infty} (M - Q)f(M)d(M) - V \int_0^Q (q - M)f(M)d(M)$$

όπου :

C = κόστος παραγγελίας ανά παραγγελία ή κόστος εκκινήσεως , P = κόστος μονάδας
Q = ποσότητα μεμονωμένης παραγγελίας , A = κόστος εξάντλησης ανά μονάδα , M = ζήτηση σε μονάδες (τυχαία μεταβλητή) , M-Q = μέγεθος εξάντλησης σε μονάδες ,
f(M) = συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τη δημιουργία της ζήτησης , V = υπολειμματική αξία ανά μονάδα

Για να προσδιορίσουμε το min αναμενόμενου κόστους σε περίπτωση συνεχούς κατανομής υπολογίζουμε την βέλτιστη πιθανότητα εξάντλησης ως εξής :

$$dEC / DQ = P - AP(s) - V[1 - P(s)] = 0 , P(s) = (P - V) / (A - V) = P(M > Q) \text{ b;}$$

Παρατηρούμε ότι αν το κόστος αγοράς είναι ίσο ή μεγαλύτερο από το κόστος εξάντλησης η επιθυμητή πιθανότητα για τη δημιουργία της εξάντλησης είναι κάτω του 1. Υπό αυτές τις συνθήκες δεν θα πρέπει να δίνονται παραγγελίες μέχρι να υπάρξει κάποια γνωστή ζήτηση. Επίσης αν ένα είδος δεν έχει υπολειμματική αξία η βέλτιστη πιθανότητα για τη δημιουργία εξάντλησεως είναι $P(s) = P/A$. Σε περίπτωση ασυνεχών κατανομών όπου η βέλτιστη πιθανότητα για τη δημιουργία εξάντλησης δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια , επιλέγεται το επίπεδο αποθεμάτων με την αμέσως χαμηλότερη πιθανότητα. Η έκφραση $1 - P(s)$ είναι το επίπεδο της εξυπηρέτησης και η έκφραση $P(s)$ είναι η πιθανότητα εξάντλησης. Επομένως αν η ζήτηση για το είδος έχει κανονική κατανομή με ένα γνωστό μέσο M και μια τυπική απόκλιση σ , η ποσότητα της μεμονωμένης παραγγελίας με το χαμηλότερο αναμενόμενο κόστος προσδιορίζεται ως εξής :

$$Q_0 = \bar{M} + Z_{\sigma}$$

όπου Z είναι η τυποποιημένη κανονική απόκλιση που αντιστοιχεί σε μια πιθανότητα εξάντλησης $P(s)$ στον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Τα μοντέλα μεμονωμένων παραγγελιών αποκαλούνται στατικά μοντέλα αποθεμάτων σε αντιδιαστολή με τα μοντέλα επαναλαμβανόμενων παραγγελιών τα οποία αποκαλούνται δυναμικά μοντέλα αποθεμάτων. Το στατικό μοντέλο ή μοντέλο

μιας χρονικής περιόδου έχει εφαρμογή όταν λαμβάνεται μια και μοναδική απόφαση για τη δημιουργία αποθεμάτων σε αναμονή της δημιουργίας κάποιας ζήτησης. Είναι πιο ευαίσθητο μοντέλο σε σφάλματα που ενδέχεται να γίνουν κατά τις προβλέψεις επειδή δεν υπάρχει η ευκαιρία να επαναληφθεί μια παραγγελία ή να μεταβληθεί η αρχική.

Κεφάλαιο 3^ο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

3.1 Εισαγωγικά

Ένα σύστημα ελέγχου αποθεμάτων είναι μια συντονισμένη σειρά κανόνων που σκοπό έχουν να δίνουν απαντήσεις στα ερωτήματα (α) πότε θα πρέπει να δίνονται οι παραγγελίες και (β) ποιες θα πρέπει να είναι οι ποσότητες των παραγγελιών. Ένα αποτελεσματικό σύστημα περιλαμβάνει τα ακόλουθα :

- i) Θα εξασφαλίζει ότι υπάρχουν επαρκείς ποσότητες έτοιμων προϊόντων και πρώτων υλών.
- ii) Θα εντοπίζει τα πλεονάζοντα είδη και τα είδη με μεγάλη και μικρή κυκλοφοριακή ταχύτητα
- iii) Θα ενημερώνει τη διοίκηση με ακριβείς ,περιεκτικές και έγκαιρες αναφορές.

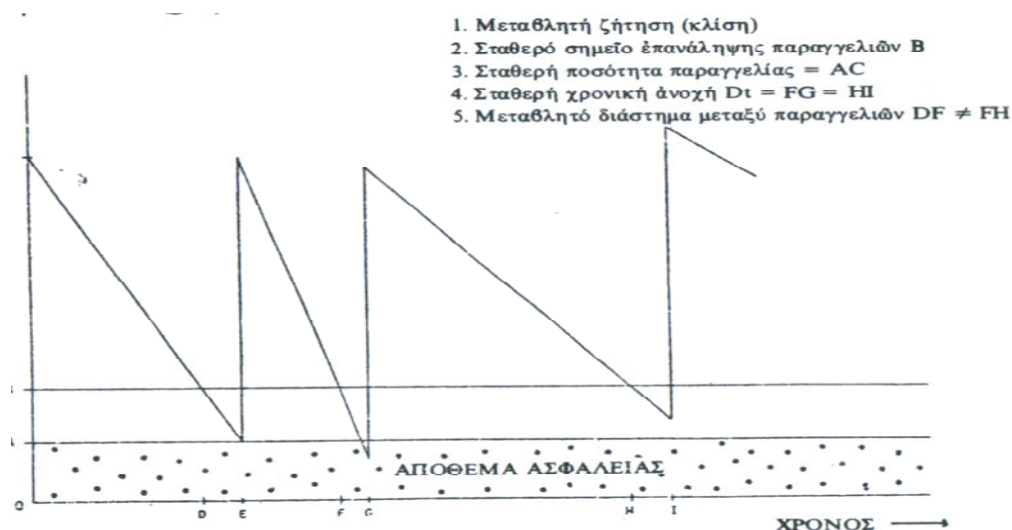
Ένα περιεκτικό σύστημα αποθεμάτων δεν περιλαμβάνει μόνο ποσοτικά μοντέλα αποθεμάτων. Θα πρέπει να εξετάζονται όλες οι πλευρές του συστήματος και μόνο το μοντέλο αποθεμάτων. Συγκεκριμένα θα πρέπει να εξετάζονται τα εξής πεδία :

- i) Η ανάπτυξη πρόβλεψης ζήτησης και η αντιμετώπιση σφαλμάτων που γίνονται στις προβλέψεις.
- ii) Η επιλογή μοντέλων αποθεμάτων
- iii) Η μέτρηση του κόστους των αποθεμάτων (παραγγελίας , διατήρησης , εξάντλησης
- iv) Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την καταγραφή και καταμέτρηση των ειδών
- v) Οι μέθοδοι παραλαβής ,διακίνησης, αποθήκευσης και παράδοσης των ειδών

- vi) Οι μέθοδοι πληροφόρησης που χρησιμοποιούνται για να αναφέρονται οι παρεκκλίσεις.

3.2 Διηνεκές σύστημα αποθεμάτων

Ένα διηνεκές σύστημα κρατά στοιχεία για την υπάρχουσα ποσότητα αποθεμάτων και τα αναπληρώνει όταν πέσουν κάτω από κάποιο ορισμένο επίπεδο. Το σύστημα βασίζεται στις έννοιες της οικονομικής ποσότητας παραγγελίας και του σημείου επανάλληψης παραγγελίας. Πρόκειται για ένα σύστημα στο οποίο το σημείο επανάλληψης παραγγελίας και η ποσότητα της παραγγελίας είναι σταθερά, η περίοδος ανασκόπησης και ο ρυθμός ζήτησης είναι μεταβλητά και η χρονική άνοχη μπορεί να είναι είτε σταθερή είτε μεταβλητή. Το Σχήμα 3.1 περιγράφει τη συμπεριφορά του διηνεκούς συστήματος για ένα μεμονωμένο είδος. Το μέσο απόθεμα ισούται με το απόθεμα ασφαλείας συν το μισό της ποσότητας παραγγελίας (μέσο απόθεμα = $S + Q/2$)



Σχήμα 3.1 Διηνεκές σύστημα αποθεμάτων

Στο διηνεκές σύστημα κάθε φορά που μία μονάδα αποσύρεται από τα αποθέματα αυτή η αφαίρεση καταγράφεται και η κατάσταση των αποθεμάτων συγκρίνεται με το σημείο παραγγελίας. Αν τα αποθέματα έχουν πέσει στο σημείο επανάλληψης της παραγγελίας ή χαμηλότερα από αυτό ετοιμάζεται μια παραγγελία για ένα σταθερό αριθμό μονάδων. Αν τα αποθέματα είναι πάνω από το σημείο επανάλληψης της παραγγελίας δεν γίνεται καμία ενέργεια.

Το διηνεκές σύστημα ορίζεται απόλυτα από το μέγεθος της παραγγελίας και το χαμηλότερο εκείνο επίπεδο αποθεμάτων που δίνει το σύνθημα για να δοθεί μια παραγγελία. Το κύριο μειονέκτημα το διηνεκούς συστήματος είναι ότι απαιτεί διηνεκή έλεγχο των υπαρχόντων αποθεμάτων. Επειδή δε μια παραγγελία μπορεί να δοθεί σε οποιαδήποτε στιγμή χάνονται τα οικονομικά οφέλη που θα προέκυπταν από τη συγχώνευση διάφορων ειδών σε μια παραγγελία που θα δινόταν σε ένα προμηθευτή. Τα συστήματα σταθερού μεγέθους παραγγελίας απαιτούν συνεχή ανασκόπηση ή παρατήρηση των επιπέδων των αποθεμάτων. Αντικειμενικός σκοπός είναι να γίνεται όσο το δυνατόν γρηγορότερα τότε θα φτάσουν τα αποθέματα στο σημείο επανάληψης της παραγγελίας. Η ανασκόπηση μπορεί να συνίσταται στη ανάλυση διηνεκών στοιχείων για τα αποθέματα καθώς αυτά συγκεντρώνονται και καταχωρούνται ή την οπτική παρατήρηση των ίδιων των αποθεμάτων όταν αυτά όταν αυτά φτάνουν στο σημείο επανάληψης της παραγγελίας. (το σύστημα two-bin βασίζεται ακριβώς στη φυσική αναγνώριση χωρίς όλα τα επιπλέον στοιχεία) Το σύστημα σταθερού μεγέθους παραγγελίας με διηνεκή αρχεία αποθεμάτων είναι εξαιρετικό για είδη με υψηλό κόστος που χρειάζονται στενό έλεγχο. Το κόστος διατήρησης ενός διηνεκούς συστήματος αρχείων μπορεί να ξεπεράσει κατά πολύ τα πλεονεκτήματα που θα εξασφαλισθούν από αυτό.

3.2 Two-bin σύστημα αποθεμάτων

Το two-bin είναι ένα σύστημα σταθερού μεγέθους παραγγελίας με διακριτικό χαρακτηριστικό του two-bin είναι η απουσία ενός διηνεκούς αρχείου αποθεμάτων. Δεν απαιτείται να τηρούνται στοιχεία για κάθε απόσυρση αποθεμάτων ενώ το σημείο επανάληψης της παραγγελίας προσδιορίζεται με οπτική παρατήρηση. Όταν έχει εξαντληθεί το απόθεμα one-bin δίνεται μια παραγγελία και στη συνέχεια η ζήτηση καλύπτεται από second –bin. Το σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμη και με one –bin. Το two-bin σύστημα είναι το καταλληλότερο για είδη με μικρή αξία ,αρκετά σταθερή χρήση και μικρή χρονική ανοχή.

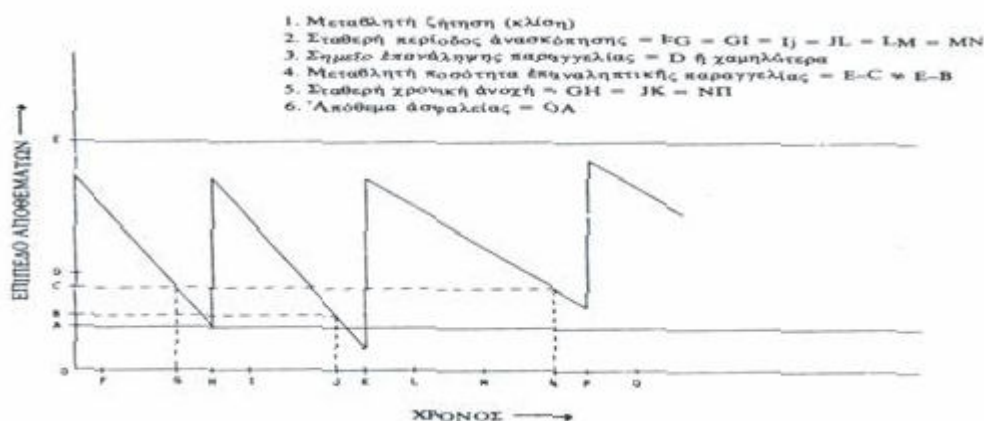
3.3 Περιοδικό σύστημα αποθεμάτων

Στο περιοδικό σύστημα η προς παραγγελία ποσότητα δεν είναι σταθερή και μεταβάλλεται ανάλογα με τις μεταβολές που παρατηρούνται στο ρυθμό τη ζήτησης.

περίοδος της παραγγελίας είναι σταθερή απαιτεί ένα απόθεμα ασφαλείας για προστασία απέναντι σε διακυμάνσεις της ζήτησης που δημιουργείται τόσο κατά την περίοδο ανασκόπησης όσο και κατά την περίοδο ανοχής. Αυτό σημαίνει ότι το περιοδικό σύστημα απαιτεί ένα μεγαλύτερο απόθεμα ασφαλείας από κάποιο δεδομένο είδος από ότι θα απαιτούσε το διηνεκές σύστημα. Αυτό το επιπλέον απόθεμα έχει σα συνέπεια να στοιχίζει λιγότερο ένα άριστο διηνεκές από ότι ένα άριστο περιοδικό σύστημα αν και αυτή η διαφορά κόστους μπορεί να αντισταθμιστεί από την οικονομία που επιτυγχάνεται με τη συγχώνευση πολλών μεμονωμένων παραγγελιών σε μια.

3.4 Σύστημα αποθεμάτων με προαιρετική αναπλήρωση

Το σύστημα αποθεμάτων με προαιρετική αναπλήρωση το οποίο αποκαλείται επίσης σύστημα ελαχίστου-μεγίστου αποτελεί ένα συνδυασμό διηνεκούς και περιοδικού συστήματος. Τα επίπεδα των αποθεμάτων ανασκοπούνται σε τακτά διαστήματα αλλά δεν δίνονται παραγγελίες πριν τα επίπεδα πέσουν σε κάποιο προκαθορισμένο σημείο επανάλληψης των παραγγελιών. Το Σχήμα 3.3 περιγράφει τη συμπεριφορά του συστήματος προαιρετικής αναπλήρωσης για ένα μεμονωμένο είδος. Για κάθε είδος καθορίζεται ένα μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων. Αν κατά την ημερομηνία της ανασκόπησης το επίπεδο των αποθεμάτων είναι πάνω από ο επίπεδο παραγγελίας δεν δίνεται νέα παραγγελία, αν είναι στο σημείο επανάλληψης της παραγγελίας ή και κάτω από αυτό, δίνεται μια νέα παραγγελία. Η ποσότητα της παραγγελίας ισούται με το μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων μείον το επίπεδο αποθεμάτων κατά την περίοδο ανασκόπησης.



Σχήμα 3.3 Σύστημα αποθεμάτων με προαιρετική αναπλήρωση

Το σύστημα προαιρετικής αναπλήρωσης συνήθως αναφέρεται σαν σύστημα (s,S) όπου s είναι το σημείο επανάληψης της παραγγελίας και S είναι το μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων. Το σύστημα ορίζεται από τρεις παραμέτρους : T= διάρκεια της περιόδου ανασκόπησης , E = μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων , s = σημείο επανάληψης της παραγγελίας. . Το σύστημα αυτό επιτρέπει να δίνονται παραγγελίες σε αποδοτικές ποσότητες οπότε ελαττώνεται το κόστος που δημιουργούν οι συχνές παραγγελίες μικρών ποσοτήτων. Δίνονται λιγότερες παραγγελίες αλλά μεγαλύτερες από ότι στο περιοδικό σύστημα και έτσι το κόστος παραγγελιών είναι χαμηλότερο. Όταν η περίοδος αναπλήρωσης είναι τόσο μεγάλη ώστε σχεδόν σε κάθε ανασκόπηση να πρέπει να δίνεται και μια παραγγελία το σύστημα προαιρετικής αναπλήρωσης δεν διακρίνεται από το περιοδικό σύστημα αποθεμάτων.

Το σύστημα προαιρετικής αναπλήρωσης μπορεί να απαιτήσει ουσιαστικά αποθέματα ασφαλείας. Αν το επίπεδο των αποθεμάτων κατά τη στιγμή της ανασκόπησης είναι ελάχιστο πάνω από το σημείο επανάληψης της παραγγελίας απαιτείται κάλυψη για δύο διαστήματα μεταξύ παραγγελιών συν την περίοδο ανοχής. Η διάρκεια της περιόδου ανασκόπησης καθορίζεται με διαδικασίες κατάλληλες για περιοδικά συστήματα.. Το σημείο επανάληψης της παραγγελίας θα συνίσταται από το απόθεμα ασφαλείας και την αναμενόμενη ζήτηση κατά τη διάρκεια της χρονικής ανοχής και της περιόδου ανασκόπησης. Τι απόθεμα ασφαλείας s καθορίζεται με ανάλυση της διακύμανσης της ζήτησης που δημιουργείται κατά την περίοδο ανοχής L συν την περίοδο ανασκόπησης.

3.5 M.R.P

Το σύστημα αποθεμάτων με προγραμματισμό των απαιτούμενων υλικών (Material Requirement Planning-MRP) χρησιμοποιείται εκτεταμένα στις περιπτώσεις προγραμματισμένης παραγωγής. Όταν πρόκειται για είδη που αποτελούν πρώτες ύλες ή συστατικά άλλων τελικών προϊόντων τα επίπεδα αποθεμάτων καθορίζονται ανάλογα με τις απαιτήσεις που υπαγορεύονται από το τελικό προϊόν. Το MRP είναι ένα σύστημα εξαγόμενης ποσότητας παραγγελίας. Αυτό το σύστημα λειτουργεί ξεκινώντας από τις προγραμματισμένες ημερομηνίες ολοκλήρωσης των τελικών προϊόντων ή των βασικών επιμέρους συστατικών τους και πηγαίνοντας προς τα πίσω για να προσδιορίσει τις ημερομηνίες παράδοσης και τις ποσότητες εξαρτημάτων και

υλικών που θα πρέπει να παραγγελθούν. Το σύστημα δουλεύει και όταν μια συγκεκριμένη ζήτηση για ένα τελικό προϊόν είναι προκαταβολικά γνωστή και η ζήτηση για ένα είδος είναι εξαρτημένη με τρόπο που να μπορεί να προβλεφθεί από τη ζήτηση για άλλα είδη.

Κεφάλαιο 4^ο

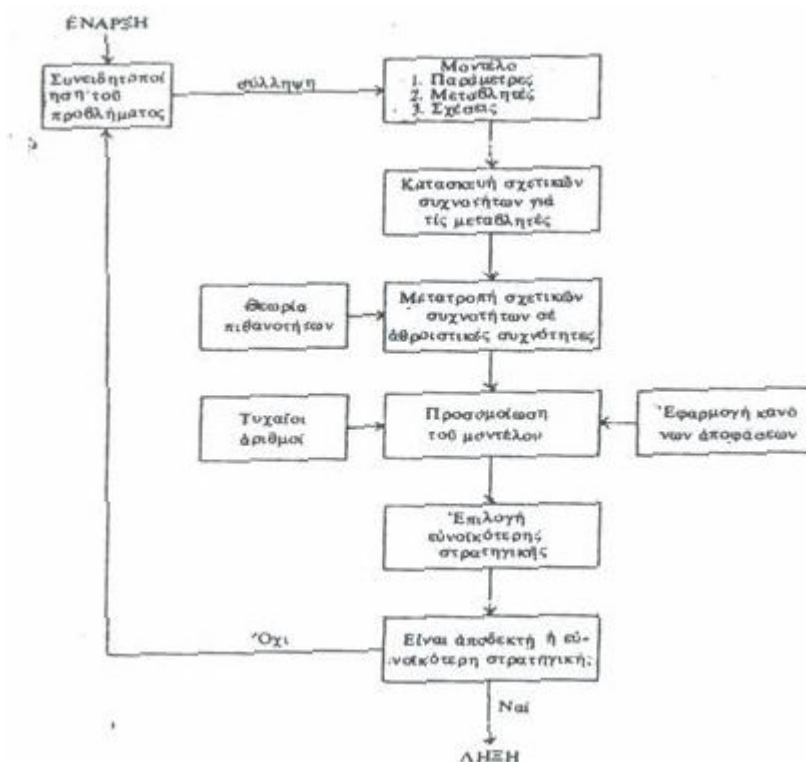
ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

4.1 Προσομοίωση Monte Carlo

Τα μοντέλα προσομοίωσης μπορούν να υποδιαιρεθούν σε δύο βασικές κατηγορίες, σε στοχαστικά και μη στοχαστικά. Τα μη στοχαστικά μοντέλα έχουν ιδιότητες που μπορούν να εκφραστούν με σαφήνεια και οι αναμενόμενες τιμές των μεταβλητών είναι οι εισροές. Μη στοχαστικά είναι συνήθως τα διοικητικά παιχνίδια προσομοίωσης. Η κλασσική μεθόδευση των δυναμικών συστημάτων είναι επίσης μη στοχαστική και χρησιμοποιεί τις εξισώσεις σαν πλαίσιο κατασκευής του μοντέλου. Η κλασσική μεθόδευση είναι μη στοχαστική επειδή δεν περιλαμβάνει κατανομές πιθανοτήτων, οι μεταβλητές πρέπει να είναι συνεχείς και οι σχέσεις μεταξύ μεταβλητών πρέπει να είναι σταθερές χρονικά. Αντίθετα στα στοχαστικά μοντέλα υπάρχουν βασικές μεταβλητές οι οποίες ορίζονται από κατανομές πιθανοτήτων και όχι από αναμενόμενες τιμές μεταβλητών. Οι μεταβλητές δεν χρειάζεται να είναι συνεχής και οι σχέσεις μεταξύ τους μπορεί να μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Οι επιχειρησιακές καταστάσεις στην πραγματικότητα είναι στοχαστικές.

Η προσομοίωση Monte Carlo περιλαμβάνει τον προσδιορισμό της κατανομής πιθανοτήτων των υπό μελέτη μεταβλητών και τη δειγματοληψία από τις κατανομές χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς για την εξασφάλιση των δεδομένων. Είναι ένας τύπος στοχαστικής προσομοίωσης που βρίσκει κατά προσέγγιση τη λύση κάποιου προβλήματος με δειγματοληψία από κάποια τυχαία διαδικασία. Μια σειρά τυχαίων αριθμών χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη διαχρονική κίνηση κάθε τυχαίας μεταβλητής. Οι τυχαίοι αριθμοί επιφέρουν την πραγματοποίηση μιας τεχνητής αλλά ρεαλιστικής σειράς συμβάντων.

Μια γενική μεθόδευση της επίλυσης προβλημάτων με προσομοίωση Monte Carlo απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1 Η προσομοίωση Monte Carlo δημιουργεί ένα στοχαστικό μοντέλο μιας πραγματικής κατάστασης και έπειτα κάνει δειγματοληπτικά πειράματα πάνω στο μοντέλο αυτό.



Σχήμα 4.1 Προσομοίωση Monte Carlo

Τα κυριότερα βήματα στην προσομοίωση Monte Carlo είναι τα εξής :

1. Ορισμένες βασικές μεταβλητές του προβλήματος θα πρέπει να έχουν γνωστές κατανομές πιθανοτήτων. Οι κατανομές θα πρέπει να είναι γνωστές , αλλά δεν χρειάζεται κάποια συγκεκριμένη μαθηματική διατύπωσή τους.
2. Μετατροπή των κατανομών των πιθανοτήτων σε αθροιστικές κατανομές πιθανοτήτων. Αυτό απαιτείται για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση της συμπεριφοράς τυχαίοι αριθμοί. Η αθροιστική κατανομή πιθανότητας εξασφαλίζει ότι μόνο μια τιμή της μεταβλητής θα συνδεθεί με κάποιο τυχαίο αριθμό.
3. Λαμβάνονται τυχαία δείγματα από τις αθροιστικές κατανομές πιθανοτήτων για να προσδιορισθούν οι συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν σε κάθε επανάληψη της προσομοίωσης. Ο ευκολότερος τρόπος δειγματοληψίας είναι η χρησιμοποίηση ενός πίνακα τυχαίων αριθμών. Οι τυχαίοι αριθμοί χρησιμοποιούνται με τις αθροιστικές κατανομές πιθανοτήτων για την εύρεση των συγκεκριμένων τιμών των μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν σε κάθε επανάληψη. Η σειρά των επιλεγμένων τυχαίως

αριθμών θα αντιπροσωπεύει τον τύπο της απόκλισης που αναμένεται να αντιμετωπιστεί.

4. Προσομοίωση της υπό ανάλυση λειτουργίας στον αναγκαίο αριθμό επαναλήψεων. Ο κατάλληλος αριθμός επαναλήψεων προσδιορίζεται κατά τον ίδιο τρόπο που προσδιορίζεται και το κατάλληλο μέγεθος ενός δείγματος σε ένα πείραμα στην πραγματικότητα. Οι συνήθεις στατιστικοί έλεγχοι σημαντικότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξακριβωθεί αν είναι αρκετά μεγάλο το μέγεθος του δείγματος.

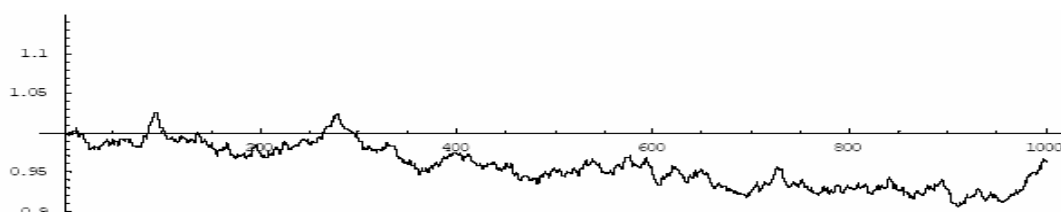
Τα πάντα εξαρτώνται από την επιλογή των κατανομών συχνότητας εκτός αν υπάρχει κάποια εξασφάλιση ότι έχουν επιλεγεί καλά, τότε ολόκληρη η προσομοίωση είναι περιττή. Οι κατανομές μπορούν να βρεθούν από προηγούμενα πραγματικά στοιχεία ή με πειραματισμό ή να καθοριστούν εκ των προτέρων σε κάποια υποκειμενική βάση. Οι τυχαίοι αριθμοί είναι αριθμοί ίσως μακροπρόθεσμης συχνότητας. Στερούνται απόλυτα προβλεπτικότητας, και κάθε αριθμός έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Ο τυχαίος χαρακτήρας των επιλεγέντων αριθμών μπορεί να επιλεγεί με ένα έλεγχο $X^2(n)$. Η σειρά των τυχαίων αριθμών μπορεί να βρεθεί από ένα έντυπο πίνακα ή από κάποια εντολή ``Random``. Στην τελευταία περίπτωση, οι υπολογισθέντες αριθμοί είναι ``ψευδοτυχαίοι αριθμοί``. Η προσομοίωση Mont Carlo έχει πολλές πρακτικές χρήσεις, όπως προβλήματα γραμμών αναμονής όπου οι γνωστές κατανομές για τους ρυθμούς άφιξης και εξυπηρέτησης είναι ανεπαρκείς, προβλήματα αποθεμάτων και συγκεκριμένα προσδιορισμού σημείων επανάληψης των παραγγελιών και ποσοτήτων αναπλήρωσης, προβλήματα αντικατάστασης εξοπλισμού κ.λ.π.

4.2 Προσομοίωση ανέλιξης poisson

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία (μετρήσιμη) απεικόνιση από τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ στο σύνολο D των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το R^+ και τιμές στο R . Και αυτό γιατί αν τελικά πραγματοποιηθεί το στοιχειώδες ενδεχόμενο ω του Ω , τότε η ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}(\omega) = \{X(t, \omega), t \geq 0\}$ μας δείχνει την τιμή της «ποσότητας» X σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$, δηλαδή πρόκειται για μία συνάρτηση από τον R^+ στον R (κατά αντιστοιχία με τα τυχαία διανύσματα, οι στοχαστικές ανελιξεις θα μπορούσαν να λέγονται και τυχαίες συναρτήσεις). Είναι

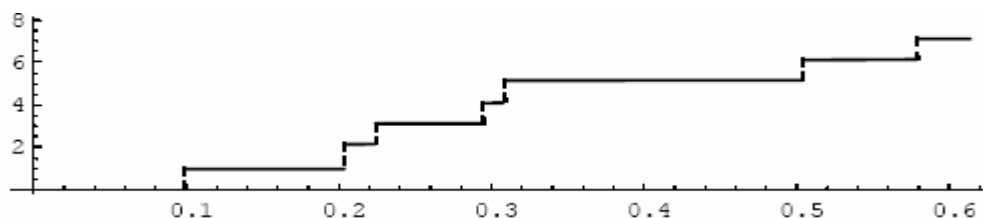
προφανές ότι οι $X(t)$, $t \geq 0$ είναι τυχαίες μεταβλητές που, εκτός ειδικών περιπτώσεων, είναι εξαρτημένες.

Παράδειγμα αν η $\{X(t), t \geq 0\}$ περιγράφει την εξέλιξη μιας τιμής στο χρόνο, τότε μια πραγματοποίησή της, $\{X(t, \omega), t \geq 0\}$ (για συγκεκριμένο ω) μπορεί να έχει τη μορφή (το γράφημα περιορίζεται στο χρονικό διάστημα $[0, 1000]$):



Σχήμα 4.2 Γράφημα Α ανάλιξη poisson

Σε ένα άλλο παράδειγμα, η $\{X(t), t \geq 0\}$ μπορεί να περιγράφει το πλήθος των πελατών που έχουν εισέλθει σε ένα κατάστημα κατά τη διάρκεια του χρόνου. Σε αυτή την περίπτωση μια πραγματοποίησή της $\{X(t, \omega), t \geq 0\}$ μπορεί να έχει τη μορφή (το γράφημα περιορίζεται στο χρονικό διάστημα $[0, 0.6]$)



Σχήμα 4.3 Γράφημα Β ανάλιξη poisson

Η $\{X(t, \omega), t \geq 0\}$ **Σχήμα 4.3** μπορεί να θεωρηθεί ως μία απεικόνιση από το $\mathbb{R}^+$ στο $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ η οποία μάλιστα είναι σταθερή κατά διαστήματα και παρουσιάζει άλματα σε κάποια σημεία (σημεία αφίξεων πελατών).

Στοχαστικές ανελίξεις όπως αυτή του προηγούμενου παραδείγματος $\{N(t), t \geq 0\}$ καλούνται απαριθμήτριες στοχαστικές ανελίξεις (counting processes) διότι η $N(t)$ απαριθμεί το πλήθος των «συμβάντων» που συνέβησαν μέχρι και τον χρόνο t . Η απλούστερη απαριθμήτρια ανάλιξη την οποία και θα προσπαθήσουμε να προσομοιώσουμε είναι η γνωστή ως ανάλιξη Poisson

Μια απαριθμήτρια στοχαστική ανάλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$ καλείται ανάλιξη Poisson στο $[0, \infty)$ με συνάρτηση έντασης $\lambda(t)$, $t \geq 0$, αν $N(0) = 0$ και σε κάθε απειροστό χρονικό

διάστημα $(t, t+dt]$ μπορεί να συμβεί ένα γεγονός με πιθανότητα $\lambda(t)dt$, ανεξάρτητα από το παρελθόν. Αυστηρότερα, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\Pr(N(t+h) - N(t) = k \mid N(s), 0 \leq s \leq t) = \begin{cases} 1 - \lambda(t)h + o(h), & k = 0 \\ \lambda(t)h + o(h), & k = 1 \\ o(h), & k \geq 2 \end{cases}$$

όπου με $o(h)$ συμβολίζουμε μία συνάρτηση $f(h)$ του h με την ιδιότητα $f(h)/h \rightarrow 0$ όταν $h \rightarrow 0$ (δηλ. η f τείνει στο 0 “πιο γρήγορα” από την συνάρτηση $g(h) = h$, π.χ. οι συναρτήσεις $h^2, h^{5/4} - 2h^3$ είναι $o(h)$). Συνήθως, το t συμβολίζει χρόνο ή χώρο και το $N(t)$ εκφράζει πλήθος κάποιων συμβάντων που μελετάμε στο χρονικό (ή χωρικό) διάστημα $[0, t]$. Προφανώς, όταν η ένταση $\lambda(t)$ της διαδικασίας είναι «μεγάλη» σε ένα διάστημα, τότε αναμένεται να πραγματοποιηθούν περισσότερα συμβάντα στο διάστημα αυτό.

Από τις παραπάνω υποθέσεις για την $N(t)$ αποδεικνύεται σχετικά εύκολα ότι οι προσαυξήσεις της διαδικασίας είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο που εξαρτάται από την ένταση της διαδικασίας στο εκάστοτε διάστημα. Συγκεκριμένα

$$\Pr(N(t+x) - N(t) = n) = e^{-\int_t^{t+x} \lambda(s) ds} \frac{\left(\int_t^{t+x} \lambda(s) ds \right)^n}{n!}, n = 0, 1, \dots$$

και οι τ.μ. $N(t_1 + s_1) - N(t_1), N(t_2 + s_2) - N(t_2)$ είναι ανεξάρτητες όταν τα διαστήματα $(t_1, t_1 + s_1)$ και $(t_2, t_2 + s_2)$ είναι ξένα

Εξετάζοντας από μια άλλη σκοπιά το παραπάνω μοντέλο, μια διαδικασία Poisson μπορεί επίσης να ενταχθεί στις λεγόμενες σημειακές διαδικασίες (point processes) οι οποίες είναι μετρήσιμες απεικονίσεις από ένα χώρο πιθανότητας σε ένα χώρο που περιέχει σημειακά μέτρα (point measures). Όπως π.χ. μία τυχαία μεταβλητή είναι μία μετρήσιμη απεικόνιση από έναν χώρο πιθανότητας στον R , έτσι και μία σημειακή διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως απεικόνιση από έναν χώρο πιθανότητας σε ένα σύνολο που περιέχει ως στοιχεία *σύνολα σημείων* (π.χ. $\{x_i, i=1, 2, \dots\}$) ενός ευκλείδειου χώρου R_k (τα οποία αναπαριστούμε ως σημειακά μέτρα m με $m(A) = \text{card}\{i: x_i \in A\}$). Με αυτό τον τρόπο, μία διαδικασία Poisson N όπως την ορίσαμε παραπάνω (στο $[0, \infty)$) είναι ένα *τυχαίο σημειακό μέτρο* στον χώρο $[0, \infty)$ και το $N(t)$ είναι στην ουσία το μέτρο $N([0, t])$ του συνόλου $[0, t]$ (το οποίο ισούται με το πλήθος των ατόμων-συμβάντων που περιέχει το $[0, t]$). Στα πλαίσια της παραπάνω θεωρίας που

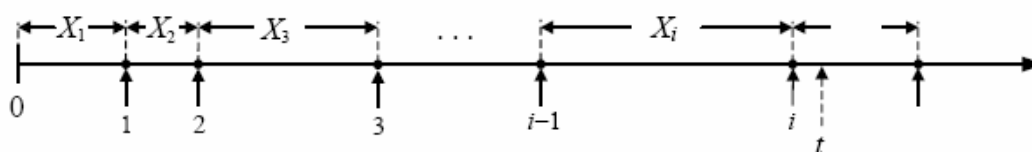
περιγράψαμε με πολύ αδρές γραμμές, η διαδικασία Poisson μπορεί να γενικευτεί και να θεωρηθεί επί οποιουδήποτε υποσυνόλου ενός ευκλείδειου χώρου R^k . Στη συνέχεια όμως για λόγους απλότητας θα αρκεστούμε στην μελέτη της προσομοίωσης μιας διαδικασίας Poisson επί του $[0, \infty)$ και μάλιστα θα ξεκινήσουμε με την ομογενή διαδικασία Poisson.

4.2.1 Η ομογενής διαδικασία Poisson

Στην περίπτωση που η ένταση της διαδικασίας είναι σταθερή, δηλαδή $\lambda(t) = \lambda$, τότε η αντίστοιχη διαδικασία καλείται *ομογενής διαδικασία Poisson*. Σε κάθε απειροστό διάστημα μήκους h η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός συμβάντος είναι σταθερή. Επίσης ισχύει ότι :

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}, n = 0, 1, \dots$$

δηλαδή οι προσανξήσεις της διαδικασίας σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους s ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο λs . Επιπλέον, όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο, οι ενδιάμεσοι χρόνοι (ή διαστήματα) μεταξύ διαδοχικών συμβάντων είναι ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Με βάση αυτή την τελευταία παρατήρηση, θα επιχειρήσουμε να προσομοιώσουμε μία διαδικασία Poisson σε ένα διάστημα $[0, t_0]$. Έστω λοιπόν $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες τ.μ. από την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Η τ.μ. X_i μπορεί να θεωρηθεί ως ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ του $i-1$ και του i διαδοχικού συμβάντος.



Σχήμα 4.4 Γράφημα ομογενούς ανέλιξης poisson

Η διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ καθορίζεται από τους διαδοχικούς χρόνους πραγματοποίησης συμβάντων, δηλαδή τους χρόνους $X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3, \dots$ Επομένως μπορούμε να προσομοιώσουμε ένα τμήμα μίας ομογενούς διαδικασίας Poisson $\{N(t), t \in [0, t_0]\}$ αν παράγουμε τυχαίους αριθμούς $X_1, X_2, \dots \sim \text{Exp}(\lambda)$ και καταγράψουμε τους διαδοχικούς χρόνους συμβάντων $S_1, S_2, \dots, S_{N(t_0)}$ στο διάστημα $[0, t_0]$

$$S_j = \sum_{i=1}^j X_i, j \geq 1 : S_j \leq t_0$$

Ο σχετικός αλγόριθμος είναι ο ακόλουθος:

Βήμα 1 : Θέτουμε $t = 0$, $N = 0$

Βήμα 2 : Παράγουμε $U \sim U(0,1)$ και θέτουμε $X = -\frac{1}{\lambda} \ln U$

Βήμα 3 : Θέτουμε $t = t + X$ και εάν $t > t_0$ σταματάμε. Διαφορετικά συνεχίζουμε στο 4

Βήμα 4 : Θέτουμε $N = N + 1$ και $S(N) = t$

Βήμα 5 : Επιστρέφουμε στο 2

Πίνακας 4.1 Αλγόριθμος προσομοίωσης ανέλιξης Poisson

Στον παραπάνω αλγόριθμο, η μεταβλητή t εκφράζει το χρόνο και η N εκφράζει το πλήθος των συμβάντων έως το χρόνο t ($N(t)$). Η τελευταία τιμή της N είναι ίση με το $N(t_0)$ και οι τιμές $S(1), S(2), \dots, S(N(t_0))$ που καταγράφονται είναι οι διαδοχικοί χρόνοι των συμβάντων.

Κεφάλαιο 5^ο

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

5.1 Προσομοίωση στοχαστικού μοντέλου με μεταβλητή ζήτηση

Θεωρούμε ότι σε ένα κατάστημα εισέρχονται πελάτες που ζητούν ένα προϊόν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson έντασης λ , ενώ ο κάθε πελάτης ζητάει ποσότητα D του προϊόντος όπου D είναι τ.μ. με σ.κ. m . Για να είναι σε θέση να καλύψει τη ζήτηση, το κατάστημα διαθέτει μία ποσότητα του προϊόντος I (Inventory) και όποτε η ποσότητα αυτή πέσει κάτω από ένα όριο(s), παραγγέλνει νέα ποσότητα του προϊόντος. Θεωρούμε ότι το κατάστημα εφαρμόζει μία πολιτική (s,S), δηλαδή όταν η διαθέσιμη ποσότητα ``Inventory`` στο κατάστημα πέσει κάτω από s , τότε γίνεται παραγγελία ποσότητας $S - \text{``Inventory``}$ ώστε να ανέλθει η ποσότητα στο επίπεδο S με $s < S$. Η παραγγελία ποσότητας ``Order`` από το κατάστημα έχει κόστος $c(\text{Order})$ και φθάνει στο κατάστημα μετά από χρόνο L . Επίσης, η αποθήκευση του προϊόντος στο κατάστημα έχει κόστος h ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου. Θεωρούμε τέλος ότι όταν ένας πελάτης ζητήσει ποσότητα μεγαλύτερη από την διαθέσιμη στο κατάστημα, τότε αγοράζει μόνο την διαθέσιμη ποσότητα και για την υπόλοιπη ποσότητα αυτή δεν χάνεται αλλά θα ικανοποιηθεί όταν στο κατάστημα παραδοθεί η ποσότητα ``Order``. Για κάθε μία μονάδα ζήτησης που δεν ικανοποιείται υπολογίζεται ένα κόστος εξάντλησης ``A``. Σε ένα τέτοιο μοντέλο συνήθως είναι γνωστές οι ποσότητες:

- λ : ο ρυθμός άφιξης πελατών
- m : η κατανομή της ποσότητας του προϊόντος που ζητά ένας πελάτης
- L : ο χρόνος παράδοσης , χρονική ανοχή ,στο κατάστημα μιας παραγγελίας με ρυθμό άφιξης p , θεωρώντας κατανομή poisson

- **c(order)**: η συνάρτηση κόστους που αντιστοιχεί σε παραγγελία ποσότητας ``order``
- **h**: το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα προϊόντος
- **A**: το κόστος εξάντλησης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα προϊόντος

ενώ οι ζητούμενες ποσότητες είναι :

- **s**: το όριο s του διαθέσιμου προϊόντος κάτω από το οποίο γίνεται παραγγελία νέας ποσότητας
- **S**: η μέγιστη ποσότητα του προϊόντος που αποθηκεύεται στο κατάστημα

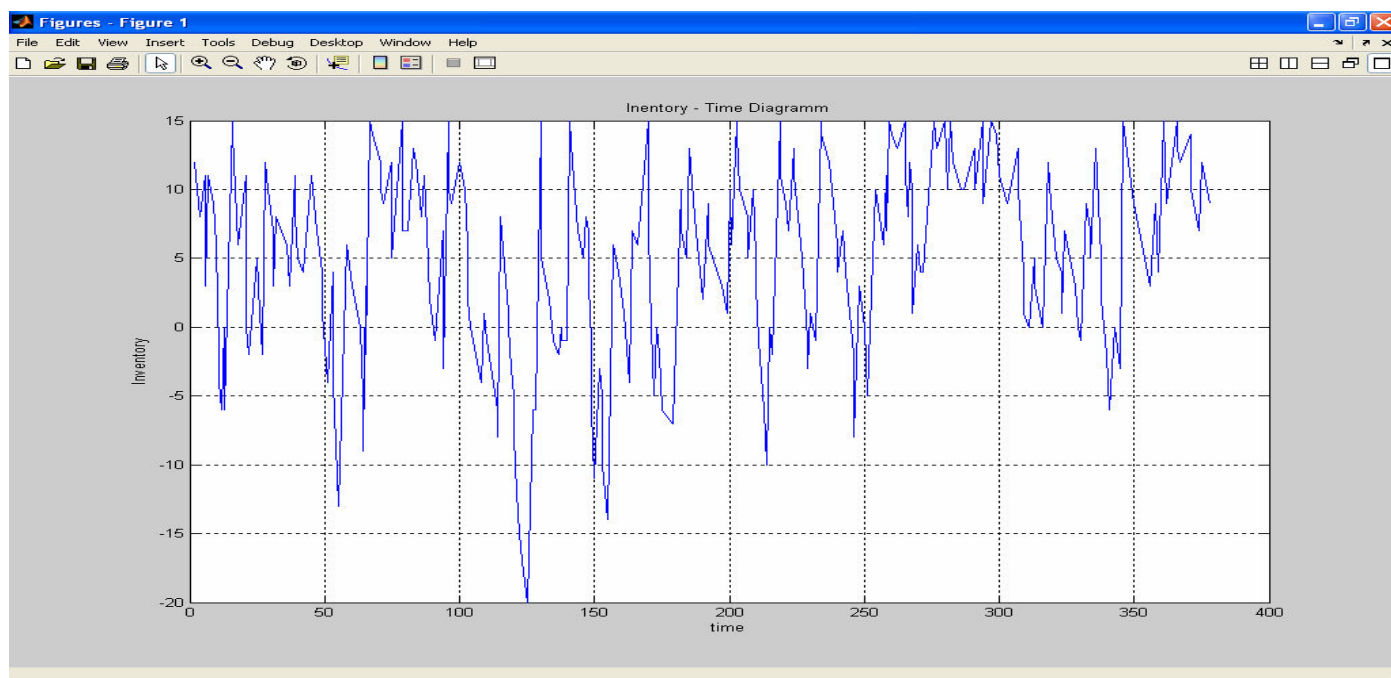
Οι ποσότητες s, S χαρακτηρίζουν την πολιτική αποθεμάτων του καταστήματος και θα πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος του αποθέματος. Προσομοιώνοντας ένα τέτοιο σύστημα στο χρόνο χρησιμοποιούμε τις εξής μεταβλητές :

- **t**: ο χρόνος άφιξης του i πελάτη (το σύστημα εξετάζεται βηματικά μόνο σε στιγμές αφίξεων πελατών
- **X**: ο χρόνος μέχρι την άφιξη του επόμενου πελάτη , θεωρώντας κατανομή poisson
- **Demand**: η ποσότητα του προϊόντος που ζητά ο πελάτης που μόλις έφτασε , θεωρώντας κατανομή poisson
- **Profit**: Το κόστος του αποθέματος έως το χρόνο t
- **Inventory**: Το απόθεμα της εταιρείας τον χρόνο t
- **NextDelivery** (``ND``) : χρόνος παράδοσης της τελευταίας παραγγελίας
- **Order**: η ποσότητα του προϊόντος που έχει παραγγείλει η εταιρεία
- **Inventorylist** : Μία λίστα που καταγράφει τις στιγμές της αλλαγής της διαθέσιμης ποσότητας Inventory καθώς και την ποσότητα Inventory της εταιρείας. Η μεταβλητή αυτή δεν είναι απαραίτητη για την προσομοίωση του συστήματος ,αλλά καταγράφεται για να εξετάσουμε πως εξελίχτηκε στο χρόνο η ποσότητα Inventory.

Θεωρούμε ότι οι μεταβλητές X,Demand , L ακολουθούν κατανομές Poisson και για αρχικές συνθήκες $S = 15$ και $s = 3$ εκτελούμε τον ακόλουθο αλγόριθμο από τον οποίο προκύπτει ότι για την πολιτική $(s,S) = (3,15)$: $[t, \text{COST}, \text{COST} / t] = [378, 42157, 111.5265]$ Παρατηρούμε ότι το σύστημα όπως αρχικά ορίσαμε προσομοιώθηκε για άφιξη 200 πελατών ($n=200$) για το χρονικό διάστημα $[0, 378]$ το συνολικό κόστος

αποθέματος είναι 42157 € και το μέσο κόστος αποθέματος προέκυψε 111.5265 €. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το σύστημα εξετάζεται μόνο σε στιγμές άφιξης πελατών και ο χρόνος t κάνει «άλματα» μήκους X . Συνεπώς, κάθε φορά που ο χρόνος ανανεώνεται (δηλαδή σε κάθε επανάληψη) εξετάζουμε αν χρειάζεται να γίνει νέα παραγγελία ή αν έχει καταφθάσει προηγούμενη παραγγελία από το εργοστάσιο

Για να αναπαραστήσουμε γραφικά την εξέλιξη της ποσότητας του προϊόντος στο κατάστημα μπορούμε να ζητήσουμε το γράφημα των σημείων της λίστας Inventorylist (βλ Πίνακα Π.1 ή Πίνακα 5.2)όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε στο λογισμικό Mat lab και παρουσιάζεται στον Πίνακα Π.1 του παραρτήματος :



Σχήμα 5.1 : Διακύμανση αποθέματος

Αν εκτελεστεί ο παραπάνω αλγόριθμος (χωρίς την κατασκευή της λίστας Inventorylist η οποία τώρα δεν χρειάζεται) για $S = 2, 3, \dots, 15$ και για $s = 1, 2, \dots, S-1$. Για κάθε ζεύγος (s, S) καταγράφουμε την εκτίμηση του μέσου κόστους αποθέματος ανά μονάδα χρόνου (χρησιμοποιούμε προσομοίωση για 20.000 πελάτες) στη λίστα COSTTABLE. Οπότε θα πρέπει να βρούμε για ποια τιμή του S , και ανάλογα του s ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος αποθέματος ανά μονάδα χρόνου.

Συνεπώς έχουμε τον Πίνακα 5.2 που δίνει τις εκτιμήσεις του αναμενόμενου καθαρού κέρδους ανά μονάδα χρόνου για διάφορες τιμές των s, S

s/S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		443.79	400.63	357.67	315.03	275.34	246.58	219.38	195.67	179.68	164.22	155.23	143.52	132.06	128.20
2			401.35	358.51	315.77	276.43	245.49	217.33	193.47	177.17	159.39	149.28	138.07	127.57	121.92
3				358.76	315.45	278.21	245.30	216.32	192.28	173.00	156.88	145.42	133.56	123.46	117.26
4					316.87	278.18	245.53	216.10	190.40	171.04	155.22	141.41	129.27	119.73	113.01
5						278.98	245.73	216.28	189.89	169.37	152.57	138.74	126.33	116.65	109.70
6							246.87	216.27	189.59	168.33	150.62	136.80	123.91	114.08	106.99
7								216.89	189.69	167.85	150.00	135.21	122.22	111.91	104.81
8									189.97	167.49	149.43	134.27	120.82	110.42	102.67
9										167.55	149.22	133.67	119.96	109.19	101.08
10											148.99	133.24	119.14	108.23	100.00
11												133.05	118.56	107.70	99.07
12													118.37	107.11	98.49
13														106.89	97.90
14															97.47

Πίνακας 5.2 : Mean Cost – S - s

Φαίνεται ότι η βέλτιστη πολιτική αποθεμάτων για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων είναι κοντά στην $(s, S) = (14, 15)$.

Τα στοιχεία του Πίνακα 5.2 προκύπτουν από τον αλγόριθμο , όπως αυτός υλοποιήθηκε με χρήση του λογισμικού Matlab και παρουσιάζεται ακολούθως στον Πίνακα 5.3

```

l= 2; m=3; h=2; c=15; A = 60; p = 4; S=13 ; s=1; t=0 ; ND = 0 ; i=1;
order = 0;
k=1 ; j =1 ;

for S=2:15
INVENTORY = S ;
cost= h* S ;
for s=1:S-1

for i=1:20000
x= poissrnd(l,1) ;
Demand = poissrnd(m,1);

if (t < ND) & (ND <= t + x)
    if (INVENTORY >= 0 )
cost = cost + (ND - t)*h*INVENTORY + ((t+x) - ND ) *h*(INVENTORY + order) ;
INVENTORY = INVENTORY + order;
    end
    if INVENTORY < 0
cost = cost + (ND - t)*A*abs(INVENTORY) + ((t+x) - ND ) *h*(INVENTORY + order) ;
INVENTORY = INVENTORY + order;
    end

end

if (INVENTORY > 0)& (~(t < ND) & (ND <= t + x)))
    cost = cost + INVENTORY*h*x
end
if (INVENTORY <=0) & (~(t < ND) & (ND <= t + x)))
cost= cost + A* abs(INVENTORY)*x
end

INVENTORY = INVENTORY - Demand

t=t+x

if (INVENTORY <= s) & (ND <= t)
    L= poissrnd(p,1);
    ND= t+L;
    order = S - INVENTORY;
    cost = cost + c*order ;
end
end

COSTTABLE(k,j) =s ;
COSTTABLE(k,j+1) = S
COSTTABLE(k,j+2) = cost /t ;

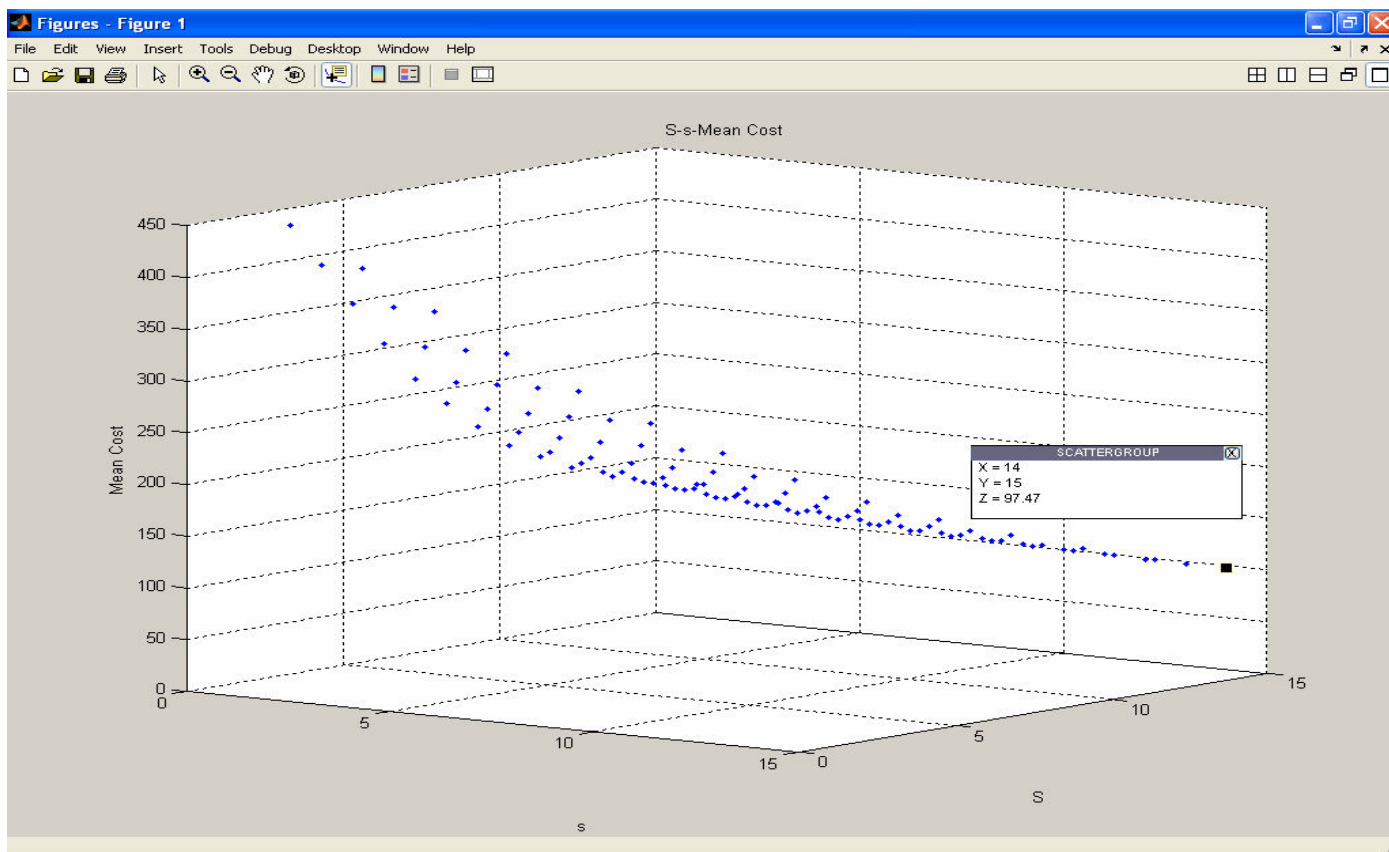
k=k+1 ;

end
t= 0 ;
ND= 0 ;
cost = 0;
end

sAxis = COSTTABLE(:,1);
SAxis = COSTTABLE(:,2);
CostAxis = COSTTABLE(:,3);
scatter3(sAxis,SAxis,CostAxis,10,'filled');

```


Εάν επιθυμούμε να δούμε πιο παραστατικά πως κυμαίνεται το μέσο κέρδος για διάφορες τιμές των (s,S) μπορούμε να κατασκευάσουμε το παρακάτω γράφημα **Σχήμα 5.2** που μας δίνει μια εικόνα της διασποράς του μέσου κόστους αποθέματος για κάθε ζεύγος τιμών (s,S) .



Σχήμα 5.2 : Διασπορά Μέσου κόστους για κάθε (s,S)

Προφανώς μπορούμε να τροποποιήσουμε όπως επιθυμούμε τα παραπάνω συστήματα π.χ. θεωρώντας διαφορετικές κατανομές για τους ενδιάμεσους χρόνους ,τη ζήτηση κάθε πελάτη και τη χρονική ανοχή.

5.2 Προσομοίωση διηνεκούς αποθέματος με τη μέθοδο Monte Carlo

Το διηνεκές σύστημα αποθεμάτων είναι ένα σύστημα στο οποίο το σημείο επανάληψης της παραγγελίας και η ποσότητα της παραγγελίας είναι σταθερά, η περίοδος ανασκόπησης και ο ρυθμός ζήτησης είναι μεταβλητά και η χρονική ανοχή μπορεί να είναι είτε σταθερή είτε μεταβλητή. Για την εφαρμογή που θα αναπτυχθεί στη συνέχεια θεωρούμε ότι η ζήτηση και η χρονική ανοχή είναι μεταβλητές

ακολουθώντας κατανομή poisson. Στο διηνεκές σύστημα θεωρούμε ότι αν τα αποθέματα έχουν πέσει στο σημείο επανάληψης της παραγγελίας , s , ή χαμηλότερα από αυτό ετοιμάζεται μια παραγγελία για σταθερό αριθμό μονάδων , S . Αν τα αποθέματα είναι πάνω από το σημείο επανάληψης της παραγγελίας δεν γίνεται καμία ενέργεια. Το διηνεκές σύστημα ορίζεται απόλυτα από το μέγεθος της παραγγελίας (S) και το χαμηλό εκείνο επίπεδο αποθεμάτων (s) που προκαλεί μια νέα παραγγελία.

Για την εφαρμογή που θα αναπτυχθεί θεωρούμε ότι στόχος είναι να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος αποθεμάτων ενός συγκεκριμένου είδους με μεταβλητή ζήτηση , σε μονάδες εβδομαδιαίως και μεταβλητή χρονική ανοχή. Θεωρούμε ότι είναι γνωστό το σχετικό με τα αποθέματα κόστος καθώς και στοιχεία της ζήτησης και της χρονικής ανοχής , όπως η ποσότητα της ζήτησης , η χρονική ανοχή και οι συχνότητα αυτών. Για την παρούσα εφαρμογή θα θεωρήσουμε ότι η ζήτηση και η χρονική ανοχή ακολουθούν μια διαδικασία Poisson έντασης λ και p αντίστοιχα και θα δημιουργηθούν από τη συνάρτηση random. Να σημειωθεί ότι η ανάπτυξη της εφαρμογής θα γίνει με χρήση του λογισμικού Mat lab.

Για την ανάπτυξη του μοντέλου θεωρούμε ως γνωστές τις ποσότητες :

- **c**: το μοναδιαίο κόστος παραγγελίας
- **h**: το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα προϊόντος
- **A**: το κόστος εξάντλησης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα προϊόντος
- Η **χρονική ανοχή** είναι μεταβλητή και ακολουθεί κατανομή poisson έντασης λ
- Η **ζήτηση** είναι μεταβλητή και ακολουθεί κατανομή poisson έντασης λ

Στόχος είναι να προσδιοριστούν οι ζητούμενες ποσότητες (**s,S**) για τις οποίες που θα ελαχιστοποιήσουν το κόστος αποθέματος. Ως χρονική περίοδο θεωρούμε μια εβδομάδα , συνεπώς ορίζουμε ως :

- **s**: το όριο s του διαθέσιμου προϊόντος κάτω από το οποίο γίνεται παραγγελία νέας ποσότητας
- **S**: η ποσότητα παραγγελίας όταν το απόθεμα στο τέλος της περιόδου πέφτει κάτω από το επίπεδο s .

Το πρόγραμμα προσομοίωση θα δημιουργηθεί με τις ακόλουθες υποθέσεις :

- i. Το κόστος διατήρησης προσδιορίζεται από τον αριθμό των μονάδων που βρίσκονται στο απόθεμα στο τέλος κάθε εβδομάδας

- ii. Αν η ζήτηση για το είδος υπερβεί το υπάρχων υπόλοιπο , ο πελάτης θα αποδεχθεί τη διαθέσιμη ποσότητα παρ'ότι επιθυμεί μια μεγαλύτερη
- iii. Αν η ζήτηση για το είδος δεν ικανοποιηθεί μέσα στη δεδομένη εβδομάδα χάνεται και δεν επανακτάται κατά τις επόμενες εβδομάδες.
- iv. Το κόστος εξάντλησης είναι ένα μέγιστο ποσό ``Α`` ανεξάρτητα από την ποσότητα της ζήτησης που δεν ικανοποιείται .
- v. Όλες οι παραγγελίες για επιπλέον μονάδες παραλαμβάνονται στην αρχή της εβδομάδας
- vi. Αν οι μονάδες που περιλαμβάνονται στο υπόλοιπο μαζί με τις μονάδες που έχουν παραγγελθεί (αλλά όχι παραληφθεί) υπερβούν το σημείο επανάληψης της παραγγελίας, δεν θα δοθεί καινούρια παραγγελία για επιπλέον μονάδες. Αν οι μονάδες που περιλαμβάνονται στο υπόλοιπο μαζί με τις μονάδες που έχουν παραγγελθεί (αλλά όχι παραληφθεί) είναι λιγότερες από το σημείο επανάληψης της παραγγελίας θα δοθεί μια καινούρια παραγγελία για επιπλέον μονάδες.

Θεωρούμε αρχικά ότι η ζήτηση και η χρονική ανοχή ακολουθούν κατανομή poisson έντασης λ και p αντίστοιχα. Για κάθε μία από αυτές τις παραμέτρους , ζήτηση και χρονική ανοχή, σχηματίζεται ένας πίνακας ``a`` και `` b`` στον οποίο μετασχηματίζονται οι γνωστές κατανομές πιθανοτήτων , poisson στη συγκεκριμένη εφαρμογή , σε αθροιστικές κατανομές πιθανοτήτων. Η αθροιστική κατανομή πιθανότητας εξασφαλίζει ότι μόνο μια τιμή της μεταβλητής θα συνδεθεί με κάποιο τυχαίο αριθμό. Με βάση τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε με χρήση του λογισμικού Matlab και παρουσιάζεται στον Πίνακα Π.2 του παραρτήματος προκύπτουν οι Πίνακες 6.1 και 6.2.

Πίνακας ``a``, βάση κατανομής poisson με $\lambda = 25$			
ΖΗΤΗΣΗ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
0	27	14.8352	14.8352
1	38	20.8791	35.7143
2	26	14.2857	50
3	22	12.0879	62.0879
4	31	17.033	79.1209
5	19	10.4396	89.5604
6	19	10.4396	100

Πίνακας 6.1 : Μεταβλητή ζήτηση

Πίνακας ``b``, βάση κατανομής poisson με $\lambda = 29$			
ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΝΟΧΗ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
1	28	24.7788	24.7788
2	27	23.8938	48.6726
3	32	28.3186	76.9912
4	26	23.0088	100

Πίνακας 6.2 : Μεταβλητή χρονική ανοχή.

Στη συνέχεια εξετάσουμε τη λειτουργία της προσομοίωσης για την πολιτική $(s,S) = (3,8)$ την οποία θεωρούμε ότι έχει εφαρμόζει η εταιρεία. Θεωρούμε ότι η προσομοίωση ξεκινά με ένα αρχικό υπόλοιπο ίσο με $S = 8$. Μια τιμή ζήτησης για την πρώτη περίοδο υιοθετείται από τους τυχαίους αριθμούς με αναφορά στην αθροιστική κατανομή συχνότητας της ζήτησης, όπως αυτή έχει υπολογιστεί από τον Πίνακα 6.1. Αυτή η πλασματική τιμή ζήτησης αφαιρείται από το υπόλοιπο των 8 μονάδων της προηγούμενης περιόδου και βρίσκεται το υπόλοιπο του τέλους της περιόδου. Στο τέλος κάθε περιόδου (επανάληψης), οι καταστάσεις των αποθεμάτων (υπάρχον απόθεμα συν παραγγελθέν απόθεμα) συγκρίνεται με το σημείο επανάληψης της παραγγελίας. Αν έχουμε φτάσει ή υπερβεί το σημείο επανάληψης της παραγγελίας, υπολογίζεται μια τιμή χρονικής ανοχής από τους τυχαίους αριθμούς με αναφορά στην αθροιστική κατανομή συχνότητας της χρονικής ανοχής, βλ Πίνακα 6.2, και δίνεται μια παραγγελία. Αν δεν έχουμε φτάσει ή υπερβεί το σημείο επανάληψης της παραγγελίας δεν δίνεται νέα παραγγελία. Επειδή έχει εκπνέσει μια περίοδος (επανάληψη) προστίθεται μια μονάδα στον αριθμό των περιόδων και αφαιρείται μια μονάδα από όλες τις υπόλοιπες τιμές της χρονικής ανοχής. Με την έναρξη της νέας περιόδου όλες οι παραγγελίες που έχουν προγραμματιστεί για παράδοση προστίθενται στο υπόλοιπο που υπάρχει από την προηγούμενη περίοδο και η ίδια διαδικασία εξακολουθεί για τον προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων που είναι 25. Στο τέλος κάθε προσομοιούμενης χρονικής περιόδου προστίθεται το κατάλληλο κόστος αποθεμάτων. Το μέσο κόστος για όλη την προσομοίωση βρίσκεται προσθέτοντας όλα τα ποσοστά κόστους αποθεμάτων και διαιρώντας το άθροισμα με τον αριθμό των προσομοιούμενων χρονικών περιόδων. Με βάση την περιγραφή των σταδίων ανάπτυξης του παραπάνω αλγορίθμου και για 25 προσομοιούμενες χρονικές περιόδους για την πολιτική $(s,S) = (3,8)$ υπολογίζεται μέσο κόστος αποθέματος $C_{3,8} = 14,64 \text{ €}$. Στον Πίνακα Π.3 του παραρτήματος παρουσιάζεται ο αλγόριθμος με χρήση

του λογισμικού Mat lab για τον υπολογισμό του $C_{3,8}$. Αναλυτικά η προσομοίωση για 25 περιόδους για την πολιτική $C_{3,8}$ παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.4

Προσ/νη Εβδομάδα	Τυχαίοι Αριθμοί		Προσομοιούμενη Δραστηριότητα				Προσομοιούμενο Κόστος		
	Ζήτηση	Παράδοση	Ζήτηση	Χρόνος Παραγγελίας	Παραλ/νες Μονάδες	Υπόλοιπο	Κόστος Διατήρησης	Κόστος Παραγγελίας	Κόστος Εξάντλησης
						8			
1	23	16	1	0	0	7	14	0	0
2	27	26	1	0	0	6	12	0	0
3	26	22	1	0	0	5	10	0	0
4	26	31	1	0	0	4	8	0	0
5	26	19	1	1	0	3	6	15	0
6	38	14	2	0	8	9	18	0	0
7	33	20	2	0	0	7	14	0	0
8	9	19	0	0	0	7	14	0	0
9	29	22	1	0	0	6	12	0	0
10	24	14	1	0	0	5	10	0	0
11	31	24	1	0	0	4	8	0	0
12	24	18	1	1	0	3	6	15	0
13	20	19	1	0	8	10	20	0	0
14	27	26	1	0	0	9	18	0	0
15	35	33	2	0	0	7	14	0	0
16	27	16	1	0	0	6	12	0	0
17	30	20	1	0	0	5	10	0	0
18	37	17	2	1	0	3	6	15	0
19	27	12	1	0	8	10	20	0	0
20	36	18	2	0	0	8	16	0	0
21	25	20	1	0	0	7	14	0	0
22	34	18	2	0	0	5	10	0	0
23	20	22	1	0	0	4	8	0	0
24	30	21	1	1	0	3	6	15	0
25	31	30	1	0	8	10	20	0	0
Σύνολο							306	60	0

Πίνακας 6.4 : Προσομοίωση πολιτικής $C_{3,8}$ για 25 περιόδους.

Προκειμένου να προσδιοριστεί η βέλτιστη πολιτική (s,S) , για κάθε $S \in [1,15]$ και $s \in [0,S-1]$ θα δημιουργηθεί ένας πίνακας όπου για κάθε πολιτική (s,S) θα αναφέρεται το μέσο κόστος αποθέματος. Από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης στον Πίνακα 6.3 παρατηρούμε ότι για $(s,S) = (1,5)$ εμφανίζεται η μικρότερη τιμή του μέσου κόστους $C_{s,S}$ αποθέματος υποδεικνύοντας την πολιτική αυτή ως βέλτιστη.

s/S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	117.6	21.52	20.24	15.56	15.52	15.24	17.52	14.6	15.12	19.04	23.92	22.96	25.92	13.92	32.72
1	0	13.36	11.8	12.08	10.68	12.16	12.28	15.24	16.28	15.68	20.72	22.96	24.48	27.36	16.28
2	0	0	12.08	11.96	12.72	14.44	14	19.12	17.72	13.72	20	22.4	24.48	28.48	31.28
3	0	0	0	14.8	16.08	15.28	17.96	17.24	21.2	21.88	22.36	24.32	26.56	28.48	32.48
4	0	0	0	0	16.88	17	20.72	19.44	17.72	23.48	18.24	19.52	28.64	30.72	32.48
5	0	0	0	0	0	21.92	22.4	24.88	27.68	24.28	26.36	27.8	27.16	32.96	34.88
6	0	0	0	0	0	0	23.52	24.24	28.4	29.68	29.4	31.04	24.48	31.32	37.28
7	0	0	0	0	0	0	0	30	27.08	29.88	32.04	33.56	35.92	32.44	28.88
8	0	0	0	0	0	0	0	0	34.16	36.08	35.28	34.84	28.64	40.8	36.68
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37.68	37.92	35.68	40.08	39.16	45.68
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	39.08	40.28	41.12	45.28	34.88
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44.72	42.92	46.4	50.48
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44.04	48.64	51.68
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50.88	54.08
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56.48

Πίνακας 6.3 : Αποτελέσματα προσομοίωσης (s,S)

```

clear
s=3; S= 8; c = 15 ; l= 25 ; p=29; n = 25 ; h=2 ; A= 60 ;

a(:,1)= [0:6] ;
a(:,2) = poissrnd(l,1,7) ;
a(:,3) = ( a(:,2)/ sum(a(:,2)))*100)
a(1,4) = a(1,3)

for i =1: 6
    a(i+1,4) =a (i,4) + a(i+1,3)
end

b(:,1)= [1:4] ;
b(:,2) = poissrnd(p,1,4) ;
b(:,3) = ( b(:,2)/ sum(b(:,2)))*100) ;
b(1,4) = b(1,3);

for i =1: 3
    b(i+1,4) = b(i,4) + b(i+1,3);
end

tt(:,1) = [ 1 :n ] ;
tt(:,2)= poissrnd(28,1,n) ;
tt(:,3) = poissrnd(20,1,n) ;

end

for S=1:15

for s=0:S-1

for j = 1:n
    for i = 1 : 7
        if a(i,4) >= tt(j,2)
            tt(j,4)= a(i,1)
            break
        end
    end
end
end

```

```

tt(1,7) = S - tt(1,4)

    if (S - tt(1,4)) > s
    tt(1,5)=0
    else
    for i=1:4
        if b(i,4)>= tt(1,3)
            tt(1,5) = b(i,1)
            tt(j,9) = c
            tt(tt(1,5)+1,6) = S
            break
        end
    end
end
end

for j = 2:n
    if ((tt(j-1,7) - tt(j,4))+ tt(j,6)) > s
    tt(j,5)=0
    tt(j,7) = tt(j-1,7) - tt(j,4) + tt(j,6)

    else

    for i=1:4
        if b(i,4) >= tt(j,3)
            tt(j,5) = b(i,1)
            tt(j,9) = c
            if (tt(j,5)+j) >= n
                break
            else
                tt(tt(j,5)+j,6) = tt(tt(j,5)+j,6)+ S
                tt(j,7) = tt(j-1,7) - tt(j,4) + tt(j,6)
                break
            end
        end
    end
end
end
end

for j =1:n
    if tt(j,7) >0
        tt(j,8) = h* tt(j,7)
        tt(j,10)= 0
    else
        tt(j,8)= 0
        tt(j,10) = A* abs(tt(j,7))
    end

end

costtable(s+1,S)=((sum(tt(:,8))+ sum(tt(:,9)) +sum(tt(:,10)))) /n
tt(:,4:10) =0 ;
end

end

```

Πίνακας 6.4 : Αλγόριθμος προσομοίωσης Monte Carlo για (s,S) με S=1:15 , s = S:S-1

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ


```

l= 2; m=3; h=2; c=15; A = 60; p = 4; S=15; s=13; t=0 ; ND = 0 ; i=1;
cost = h* S;
INVENTORY = S;
Order = 0;
k=1; j =1;

for i=1:200
x= poissrnd(l,1) ;
Demand = poissrnd(m,1);

if (t < ND) & (ND <= t + x)
    if (INVENTORY >= 0 )
cost = cost + (ND - t)*h*INVENTORY + ((t+x) - ND )*h*(INVENTORY + order) ;
INVENTORY = INVENTORY + order;
    end
    if INVENTORY < 0
cost = cost + (ND - t)*A*abs(INVENTORY) + ((t+x) - ND)*h*(INVENTORY + order) ;
INVENTORY = INVENTORY + order;
    end

    INVENTORYlist(j,k) = ND;
    NDlist(j,1) = ND;
    INVENTORYlist(j,k+1) = INVENTORY;
    j=j+1;

end

if (INVENTORY > 0)& (~((t < ND) & (ND <= t + x)))
    cost = cost + INVENTORY*h*x
end
if (INVENTORY <=0) & (~((t < ND) & (ND <= t + x)))
    cost= cost + A* abs(INVENTORY)*x
end

INVENTORY = INVENTORY - Demand

t=t+x

INVENTORYlist(j,k) = t; .
INVENTORYlist(j,k+1) = INVENTORY;
    j=j+1 ;

if (INVENTORY <= s) & (ND <= t)    L= poissrnd(p,1);
    ND= t+L;
    order = S - INVENTORY;
    cost = cost + c*order
end
end
disp (t)
disp(cost)
disp(cost/t)

for i =1: 200
    v = INVENTORYlist(:,1);
    o = INVENTORYlist(:,2);
    plot(v,o);
    grid on ;
hold on
end
clear

```

Πίνακας Π.1. : Προσομοίωση στοχαστικού μοντέλου με μεταβλητή ζήτησης πολιτικής (s,S) = (3,15)

```
a(:,1)= [0:6] ;  
a(:,2) = poissrnd(1,1,7) ;  
a(:,3) = ( a(:,2) / sum(a(:,2)) *100)  
a(1,4) = a(1,3)  
  
for i =1: 6  
    a(i+1,4) =a (i,4) + a(i+1,3)  
end  
  
b(:,1)= [1:4] ;  
b(:,2) = poissrnd(p,1,4) ;  
b(:,3) = ( b(:,2) / sum(b(:,2)) *100) ;  
b(1,4) = b(1,3);  
  
for i =1: 3  
    b(i+1,4) = b(i,4) + b(i+1,3);  
end
```

Πίνακας Π.2. : Υπολογισμός πινάκων Ζήτησης και Χρονικής Ανοχής με αθροιστικές πιθανότητες

```

clear
s=3; S= 8; c = 15 ; l= 25 ; p=29; n = 25 ; h=2 ; A= 60 ;

a(:,1)= [0:6] ;
a(:,2) = poissrnd(1,1,7) ;
a(:,3) = ( a(:,2) / sum(a(:,2)) *100)
a(1,4) = a(1,3)

for i =1: 6
    a(i+1,4) =a (i,4) + a(i+1,3)
end

b(:,1)= [1:4] ;
b(:,2) = poissrnd(p,1,4) ;
b(:,3) = ( b(:,2) / sum(b(:,2)) *100) ;
b(1,4) = b(1,3);

for i =1: 3
    b(i+1,4) = b(i,4) + b(i+1,3);
end

tt(:,1) = [ 1 :n ] ;
tt(:,2)= poissrnd(28,1,n) ;
tt(:,3) = poissrnd(20,1,n) ;

for j = 1:n
    for i = 1 : 7
        if a(i,4) >= tt(j,2)
            tt(j,4)= a(i,1)
            break
        end
    end
end

end

tt(1,7) = S - tt(1,4)

if (S - tt(1,4)) > s
    tt(1,5)=0
else
    for i=1:4
        if b(i,4)>= tt(1,3)
            tt(1,5) = b(i,1)
            tt(j,9) = c
            tt(tt(1,5)+1,6) = S
            break
        end
    end
end
end
end

```

Πίνακας Π.3. : Αλγόριθμος Monte Carlo για πολιτική $(s,S) = (3,8)$

Β ι β λ ι ο γ ρ α φ ι α

Pichard J. tersine (1979), 'Διαχείριση υλικών και αποθεμάτων '

Lynwood A. Johnson Douglas C. Montgomery (1974), 'Operations Research in Production Planning Scheduling and Inventory Control'

Amanda J. Schmitt (2008), 'Inventory Systems with Stochastic Demand and Supply : Properties and Approximations'

Jeremy F. Shapiro (2001), 'Modeling the supply chain'

Herbert Kotzab - Stefan Seuring – Martin Muller – Gerald Reiner. (2005), 'Reaserch Methodologies in Supply Chain Management'

www.unipi.gr/faculty/mbouts/sim/Simulation.htm

` Μέθοδοι προσομοίωσης και υπολογιστικές στατιστικές τεχνικές

www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ss06/markov/skript_engl/node24.htm

` Monte Carlo simulation`

<http://users.uoa.gr/~aeconom/GRProdModINotes01.pdf>

` Σημειώσεις Θεωρίας Αποθεμάτων`