ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
Μ.Δ.Ε. ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

«ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΚΤΥΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ»

Σκάρος Νικόλαος
Διπλ. Μηχανικός Οικονομίας και Διοίκησης

Ημερομηνία Εξέτασης 7 Ιουλίου 2008
Εξεταστές
Γ.Ε. Σταυρουλάκης, Καθηγητής, επιβλέπων
Η. Κοσματόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής
Α. Δουλάμης, Επίκουρος Καθηγητής

Χανιά, Ιούλιος 2008

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

1.0 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΕΣ

1.1 ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ

Για περαιτέρω πληροφορίες επικοινωνήστε με τον:

Σκάρο Μ. Νικόλαο,

Διπλωματούχο Μηχανικό Οικονομίας & Διοίκησης,

Μεταπτυχιακό φοιτητή τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Μυτιληνιοί, Πυθαγόρειο

Σάμος, τ.κ. 83101

Τηλ.: +306945806513

Διεύθυνση Ηλεκτρονικού Ταχυδρομείου: nskaros@hotmail.com

1.2 ΈΛΕΓΧΟΣ ΕΓΓΡΑΦΟΥ

Σύνταξη: Σκάρος Μ. Νικόλαος

Έγκριση:

Σταυρουλάκης Γεώργιος (επιβλέπων διατριβής),

Καθηγητής τμήματος Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης,

Πολυτεχνείου Κρήτης

Τηλ.: 28210 37418

E-mail: gestavr@dpem.tuc.gr

Δουλάμης Αναστάσιος

Επίκουρος Καθηγητής τμήματος Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης,

Πολυτεχνείου Κρήτης

Τηλ.: 28210 37430
E-mail: adoulam@dpem.tuc.gr

Κοσματόπουλος Ηλίας

Επίκουρος Καθηγητής τμήματος Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης,

Πολυτεχνείου Κρήτης

Τηλ.: 28210 37306
E-mail: kosmatop@dssl.tuc.gr

2.0 ΣΚΟΠΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρακάτω μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε με σκοπό την απόκτηση μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης.

Μέσα από ένα αριθμό προβλημάτων που επιλύθηκαν και παρουσιάζονται ο μεταπτυχιακός φοιτητής κατανόησε πως μπορεί να σχεδιάσει αλγορίθμους για βέλτιστο σχεδιασμό δυσδιάστατων κατασκευών, να καταλάβει πως λειτουργούν και τι προβλήματα επιλύουν.

3.0 ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ερευνητική εργασία που εκπονήθηκε έχει να κάνει με τον Βέλτιστο Σχεδιασμό Δικτυωτών Φορέων, όπως για παράδειγμα οι φορείς που χρησιμοποιούνται σε πλαίσια οχημάτων, με την βοήθεια της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων και αλγορίθμων Βελτιστοποίησης.

Ο Βέλτιστος Σχεδιασμός έχει να κάνει με το ελάχιστο βάρος (και συνεπώς τη μείωση του κόστους) ή με την μέγιστη ακαμψία της κατασκευής, με την αποφυγή περιοχών συχνοτήτων συντονισμού (για την αποφυγή ταλαντώσεων, κραδασμών, κόπωσης υλικού), και παράπλευρες συνθήκες που επιβάλλονται από τον περιορισμό των παραμορφώσεων (για λειτουργικούς ή άλλους λόγους), τον περιορισμό των τάσεων (αντοχή υλικού), κ.α.

Αρχικά περιγράφονται συνοπτικά οι έννοιες των πεπερασμένων στοιχείων, του βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών και των αλγορίθμων βελτιστοποίησης.

Ακολούθως συνδέουμε τις παραπάνω έννοιες και εξηγούμε το σκεπτικό με το οποίο στήθηκαν τα προγράμματά μας.

Απαραίτητο για την συνέχεια είναι ο έλεγχος του ότι αυτό που σχεδιάσαμε λειτουργεί σωστά. Συγκρίναμε λοιπόν τα αποτελέσματα τα μας, για ένα γνωστό δεδομένο πρόβλημα, με αποτελέσματα δημοσιευμένου επιστημονικού άρθρου.

Έτσι στα κεφάλαια 7, 8 και 9 αντιμετωπίζουμε και βγάζουμε αποτελέσματα για τα προβλήματα της "*ελαχιστοποίησης του βάρους δυσδιάστατου πλαισίου με περιορισμούς μετακινήσεων, τάσεων*", "*μεγιστοποίησης ακαμψίας με περιορισμό βάρους*" και "*ελαχιστοποίησης βάρους σε περίπτωση διπλής, ασύγχρονης και σε διαφορετικό σημείο εφαρμογής, φόρτισης*", αντίστοιχα.

Τέλος παραθέτουμε κάποια συμπεράσματά μας και εφαρμογές της διατριβής

4.0 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

4.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η αναλυτική λύση των εξισώσεων με τις οποίες περιγράφονται τα διάφορα τεχνικά προβλήματα είναι δυνατή μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπου οι καταπονήσεις και τα γεωμετρικά σχήματα είναι πάρα πολύ απλά. Η ανάγκη για επίλυση περισσότερο πολύπλοκων προβλημάτων , οδήγησε στην ανάπτυξη διάφορων προσεγγιστικών μεθόδων.

Μια τέτοια μέθοδος είναι η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων. Είναι μεν προσεγγιστική μέθοδος, αλλά μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα προβλήματα. Το μειονέκτημά της είναι οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, ιδίως όταν εφαρμόζεται σε σύνθετα μοντέλα.

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι μια εξέλιξη των μητρωΐκων μεθόδων που έγινε από επιστήμονες όπως ο Αργύρης Ι., ο Clough, ο Ritz και άλλοι. Οι βασικές ιδέες προήλθαν στις αρχές της δεκαετίας του 40, από εξελίξεις στην δομική ανάλυση αεροσκαφών. Αρχικά ο Hrenikoff χρησιμοποίησε τη “Μέθοδο των Δικτυωμάτων” , αργότερα Ο Turner δημιούργησαν μητρώα ακαμψίας για δικτυώματα, δοκούς και άλλα στοιχεία. Ο όρος Πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιήθηκε το 1960. Οι μαθηματικές, βέβαια, βάσεις για την σημερινή μορφή της μεθόδου μπήκαν την δεκαετία του 70.

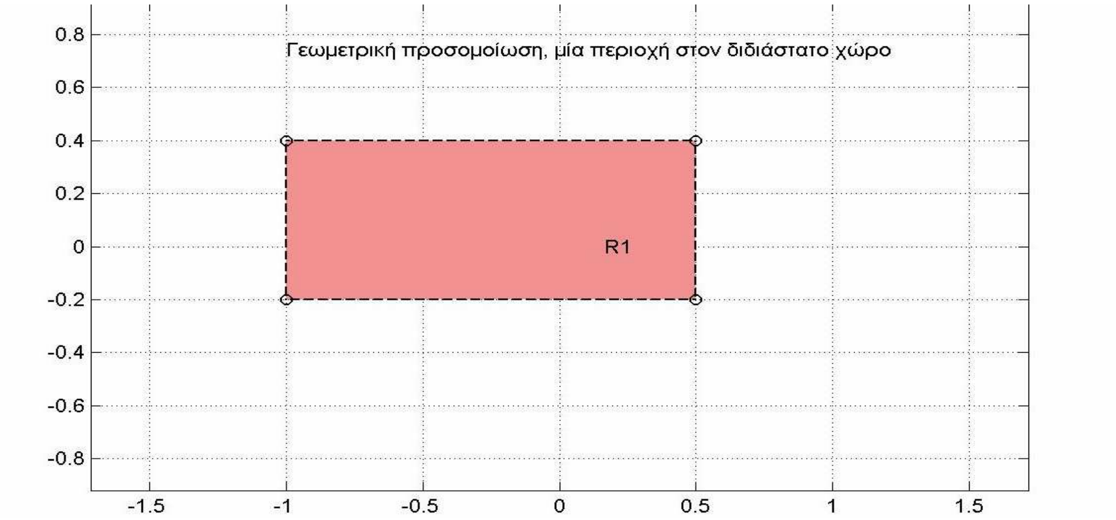
Πλέον αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για την αριθμητική επίλυση ενός μεγάλου φάσματος προβλημάτων μηχανικού. Οι εφαρμογές εκτείνονται από την παραμόρφωση και ανάλυση τάσεων σε αυτοκίνητα, αεροπλάνα, κτίρια και γέφυρες, μέχρι την ανάλυση πεδίων ροής θερμότητας, ροής υγρών, μαγνητικής ροής, κ.α. Με την εξέλιξη των υπολογιστικών συστημάτων και των συστημάτων CAD, σύνθετα προβλήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν πολύ εύκολα. Με αυτή τη μέθοδο μια πολύπλοκη περιοχή, διακριτοποιείται σε απλά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία ονομάζονται Πεπερασμένα Στοιχεία (Finite Elements). Μια διαδικασία σύνθεσης, η οποία θεωρεί φορτία και περιορισμούς, έχει ως αποτέλεσμα ένα σύνολο εξισώσεων. Η επίλυση αυτών, δίνει κατά προσέγγιση(με αρκετά μεγάλη ακρίβεια) τη συμπεριφορά του αρχικού πολύπλοκου μοντέλου. [1]

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος απαιτούνται τα εξής στάδια:

- Εισαγωγή της γεωμετρίας της κατασκευής

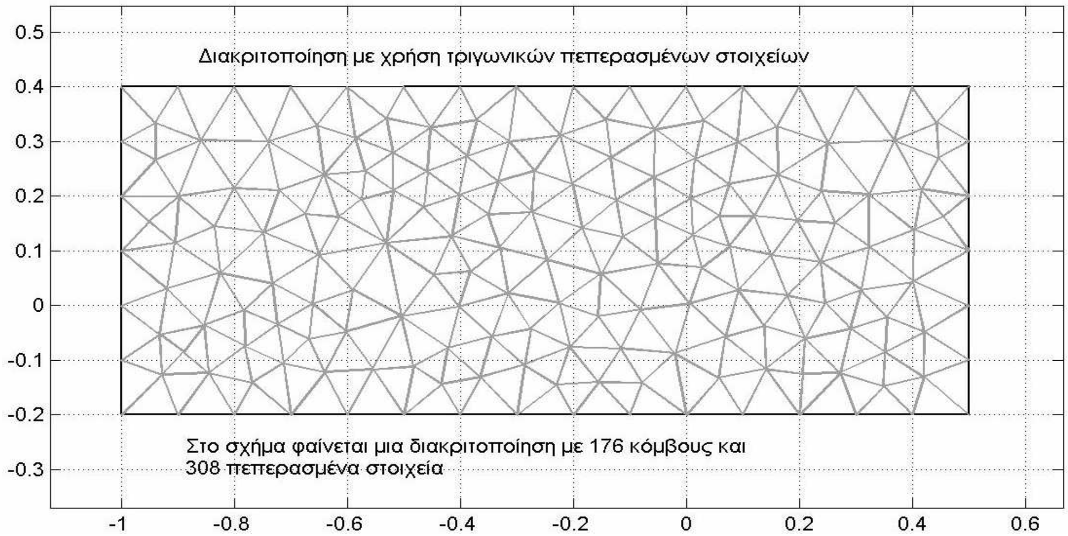
---

[1] Chandrupatla, 2002



Σχήμα 1: *Γεωμετρία κατασκευής*

- Χωρίζεται το μοντέλο σε Πεπερασμένα Στοιχεία και αφού ετοιμαστεί το πλέγμα επιλέγεται το είδος της επίλυσης με ταυτόχρονη εισαγωγή επιπλέον δεδομένων (pre processor πρόγραμμα)



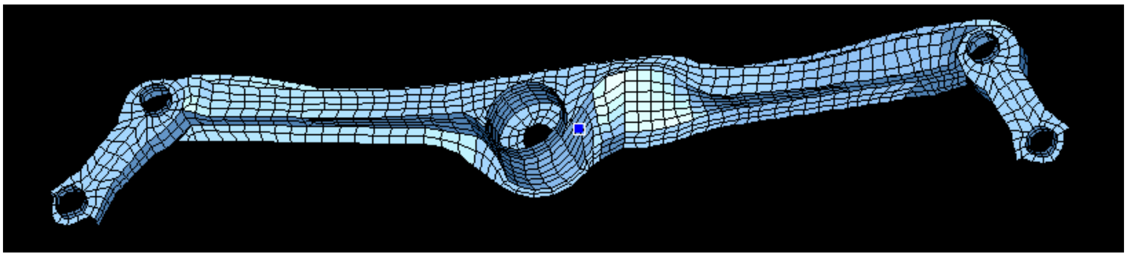
Σχήμα 2 : *Διακριτοποίηση κατασκευής*

- Γίνεται η επίλυση του προβλήματος με αριθμητικές μεθόδους (solver πρόγραμμα)

Εδώ με την βοήθεια της σχέσης $K * u = p$, επιλύουμε ένα σύνολο εξισώσεων της μορφής $u = K^{-1} * p$, όπου u η μετακίνηση κάποιου κόμβου.

- Τέλος, υπάρχει δυνατότητα να εμφανίζονται τα αποτελέσματα (post processor πρόγραμμα)

Στο σχήμα της παρακάτω εικόνας φαίνεται ένα κομμάτι από το πλαίσιο ενός οχήματος, αναλυμένο με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, έτοιμο για επίλυση. Παρατηρούμε ότι η πολύπλοκη, αρχική γεωμετρία του κομματιού, απλοποιήθηκε από πολλά μικρά, εύκολα διαχείρισιμα, γεωμετρικά σχήματα.



Σχήμα 3: *Κομμάτι από πλαίσιο οχήματος, αναλυμένο με την μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων. Πηγή:* *www.math.tu-berlin.de*

Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις της μεθόδου. Η προσέγγιση Galerkin και η προσέγγιση της Δυναμικής Ενέργειας.

4.1.1 Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στη μηχανική των στερεών, το πρόβλημά μας είναι να προσδιορίσουμε την μετατόπιση (τάσεις $\rightarrow$ παραμορφώσεις $\rightarrow$ μετατοπίσεις) ενός σώματος, που ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας. Αυτό προϋποθέτει την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Η λύση του συνόλου των εξισώσεων ορίζεται ως ακριβής λύση. Τέτοιες λύσεις υπάρχουν σε απλές γεωμετρικές μορφές και απλές συνθήκες φόρτισης. Για προβλήματα, όμως, με σύνθετες γεωμετρίες, συνοριακές συνθήκες και συνθήκες φόρτισης, η επίτευξη τέτοιων λύσεων είναι σχεδόν αδύνατη. Εδώ βρίσκουν εφαρμογή οι προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης και συνήθως εφαρμόζουν την προσέγγιση της Δυναμικής Ενέργειας, Π.

Η συνολική ενέργεια ενός ελαστικού σώματος ορίζεται ως το άθροισμα της Ενέργειας Παραμόρφωσης U και της ικανότητας παραγωγής έργου WP.

$$\Pi = U + WP \text{ ή}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{v} \sigma^{T} \varepsilon dV - \int_{v} u^{T} f dV - \int_{v} u^{T} T dS - \sum_{i} u_{i}^{T} P_{i} ,$$

Όπου V: όγκος του σώματος

S: επιφάνεια του σώματος

T: δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας

u: παραμόρφωση σημείου

f: κατανεμημένη δύναμη ανά μονάδα όγκου

P: φορτίο

σ: τάση

ε: παραμόρφωση

Από τα παραπάνω ορίζεται η αρχή της ελάχιστης Δυναμικής Ενέργειας που λέει ότι: "*από όλα τα πεδία επιτρεπτών μετακινήσεων, αυτά τα οποία αντιστοιχούν σε ισορροπία παρουσιάζουν ακρότατα ολικής Δυναμικής Ενέργειας*".[1]

4.2 ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Μια από τις κυριότερες εκφράσεις της επιστήμης του Μηχανικού είναι ο σχεδιασμός. Από τη πρώτη στιγμή που εμφανίστηκε αυτή η έννοια, στόχος της έγινε ο "*τρόπος να γίνει κάτι*" για να καλύπτει ορισμένες ανάγκες, με τα εκάστοτε διαθέσιμα μέσα.

Οι κυριότερες φάσεις του σχεδιασμού είναι:

1. η αναγνώριση της ανάγκης για σχεδιασμό (καθορισμός προβλήματος)
2. το σχέδιο δράσης
3. η συλλογή εναλλακτικών λύσεων.

Παραδοσιακά η επιλογή της καλύτερης από τη συλλογή των εναλλακτικών λύσεων, αποτελεί το κομμάτι του Βέλτιστου Σχεδιασμού[2].

Αυτό το κομμάτι μπορεί να προσεγγιστεί αν απαντήσουμε στα παρακάτω ερωτήματα.

- Πως περιγράφουμε τον διαφορετικό σχεδιασμό; (παράμετροι, μεταβλητές σχεδιασμού)
- Ποια τα κριτήρια (objective criteria) μας για την επιλογή της καλύτερης/βέλτιστης λύσης;
- Ποια τα διαθέσιμα μέσα; (περιορισμοί)

---

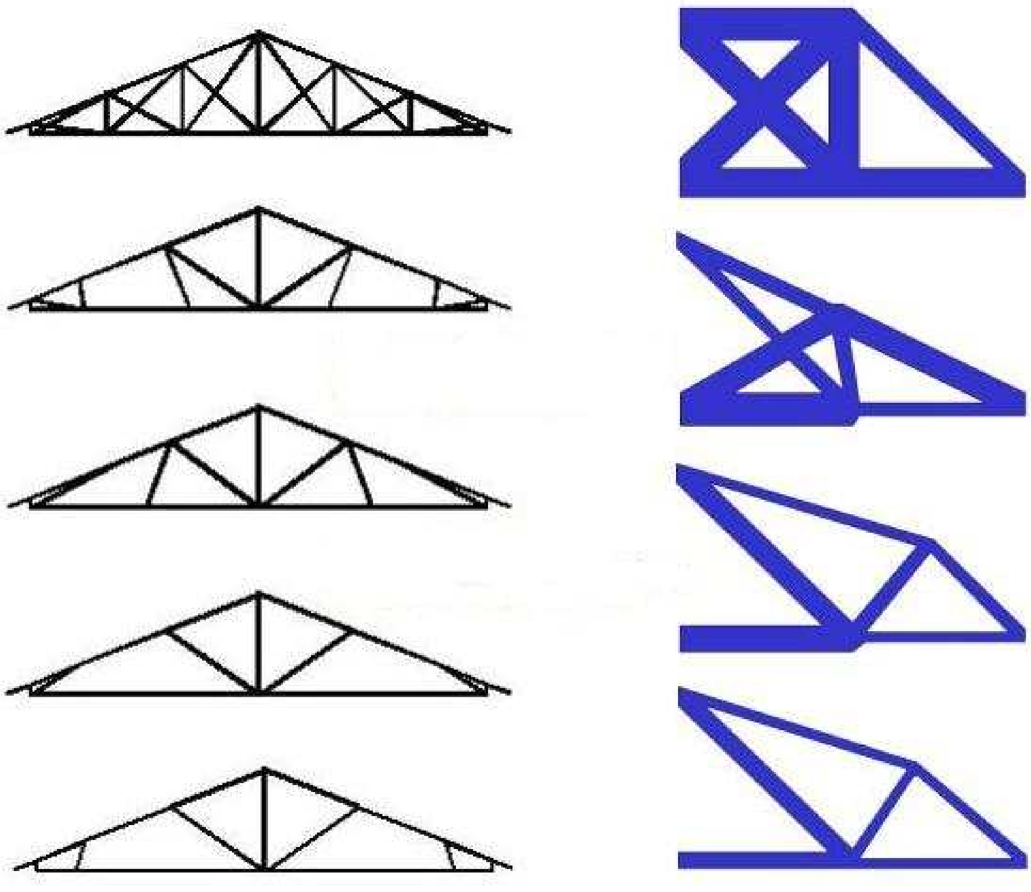
[1] Chandrupatla, Belegundu, 2002

[2] Papalambros,Wilde, 1988

4.2.1 ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Η Τοπολογική Βελτιστοποίηση αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα του μηχανικού και ορίζεται ως η βέλτιστη διανομή περιορισμένου υλικού σε μια συγκεκριμένη επιφάνεια. Ως παράδειγμα δίνεται η παρακάτω γέφυρα.

Αρχικά φαίνεται η γέφυρα με όλα τα στοιχεία της και στο τέλος μια απλούστερη κατασκευή με ίδια ανοχή σε φορτίσεις, τάσεις, κ.α. Τα ενδιάμεσα σχήματα μας δίνουν τις ενδιάμεσες φάσεις έως ότου προσεγγίσουμε το τελικό αποτέλεσμα. Έτσι για παράδειγμα πετυχαίνουμε ελαφρότερη κατασκευή, ή κατασκευή με λιγότερη δαπάνη υλικού τις ίδιες ανοχές, σε συγκεκριμένη φόρτιση, με την αρχική/



Σχήμα 4: *Φάσεις Τοπολογικής Βελτιστοποίησης*

Η Τοπολογική Βελτιστοποίηση[1] κατασκευών διαφέρει από την απλή βελτιστοποίηση όσον αφορά την πολυπλοκότητα της. Υπάρχουν δύο πιθανά προβλήματα που δικαιολογούν αυτό το γεγονός. Το πρώτο είναι ότι τα μοντέλα από μόνα τους διαφοροποιούνται κατά τη διάρκεια της σχεδιαστικής διαδικασίας και δεύτερο είναι ότι ο αριθμός των συνδέσεων των στοιχείων αυξάνεται με μεγάλο ρυθμό καθώς αυξάνουμε του κόμβους σύνδεσης.

Ύστερα από μελέτες, τα πλαίσια με μεταλλικές δοκούς είναι τα πλέον κατάλληλα για την εφαρμογή της τοπολογικής βελτιστοποίησης.

4.3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ένας Αλγόριθμος βελτιστοποίησης αποτελεί μια αριθμητική μέθοδο για την εύρεση μια τιμής x^*, ώστε το αποτέλεσμα μιας αντικειμενικής συνάντησης $f(x)$ να είναι βέλτιστο (ελάχιστο ή μέγιστο). Πιθανό είναι να υπάρχουν και κάποιοι περιορισμοί όσον αφορά τις τιμές του x.

Η μαθηματική έκφραση αυτού είναι η παρακάτω:

$$\text{Minimize } f(x)$$

$$\text{με περιορισμούς } \begin{array}{l} h(x)=0 \\ g(x)\le 0 \end{array}$$

$$\text{με } x \in X \subseteq R^n,$$

όπου X ένα υποσύνολο του n-διάστατου χώρου R^n.

4.3.1. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ QUASI - NEWTON

Στην βελτιστοποίηση οι μέθοδοι Quasi – Newton (γνωστή και ως variable metric μέθοδος) είναι αλγόριθμοι για την εύρεση τοπικών ελάχιστων και τοπικών μέγιστων σε μια συνάρτηση. Βασίζονται στη μέθοδο του Newton, η οποία προσπαθεί να προσδιορίσει ένα στάσιμο σημείο, όπου η πρώτη παράγωγος είναι ίση με μηδέν. Αυτή η μέθοδος υποθέτει ότι μια συνάρτηση, σε μια περιοχή γύρω από το βέλτιστο, μπορεί, τοπικά, να προσεγγιστεί σαν τετραγωνική (quadratic). Έτσι με την βοήθεια της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου, μπορεί να βρεθεί το στάσιμο σημείο.

[1] Kirsch, 1993

Ας προσπαθήσουμε να περιγράψουμε την μέθοδο. Αν ένας πραγματικός αριθμός x^* είναι στάσιμο για μια συνάρτηση $f(x)$, τότε ο x^* είναι ρίζα της $f^{'}(x)$. Το ανάπτυγμα του Taylor για την $f(x)$ θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f^{'}(x)\Delta x + \frac{1}{2} f^{''}(x)\Delta x^2,$$

και επιτυγχάνει το ακρότατο όταν το Δx επιλύει την γραμμική εξίσωση,

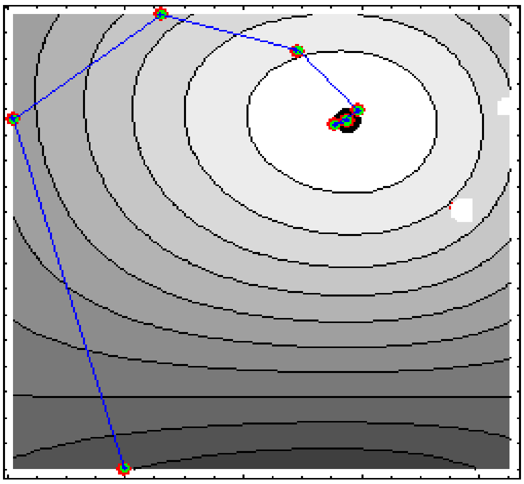
$$f^{'}(x) + f^{''}(x)\Delta x = 0$$

και η $f^{''}(x)$ είναι θετική. Γι' αυτό το λόγο, εφόσον η $f(x)$ είναι διπλά διαφορήσιμη, και η αρχική υπόθεση x_0 (τιμή από την οποία ξεκινά ο αλγόριθμος), έχει επιλεχθεί κοντά στο x^*, η ακολουθία x_n ορίζεται από τον παρακάτω τύπο,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^{'}(x_n)}{f^{''}(x_n)}, n \geq 0$$

και συγκλίνει στο x^*.

Παρακάτω φαίνεται, γραφικά, πως ο αλγόριθμος αυτός συγκλίνει στο x^*.



Σχήμα 5 : *Σύγκλιση με Quasi-Newton . Πηγή: http://documents.wolfram.com/mathematica/Built-inFunctions/AdvancedDocumentation/Optimization.html*

Αυτή η επαναληπτική ιδέα μπορεί να γενικευθεί σε πολλές διαστάσεις, αντικαθιστώντας την πρώτη παράγωγο με βαθμωτή μεταβολή (gradient), $\nabla f(x)$ και την δεύτερη παράγωγο με τον αντίστροφο του Hessian πίνακα, $Hf(x)$. Έτσι έχουμε,

$$x_{n+1} = x_n - [Hf(x_n)]^{-1} \nabla f(x_n), n \geq 0 .$$

Συνηθίζεται η μέθοδος Quasi-Newton να περιλαμβάνει ένα μικρό βήμα, μεγαλύτερο του μηδενός, αντί για $\gamma = 1$,

$$x_{n+1} = x_n - \gamma [Hf(x_n)]^{-1} \nabla f(x_n), n \geq 0 .$$

Αυτό γίνεται για να εξασφαλισθεί ότι ισχύουν οι συνθήκες Wolfe, για κάθε βήμα $x_n \to x_{n+1}$ της επανάληψης.[1]

Ο πρώτος αλγόριθμος Quasi-Newton προτάθηκε από τον Davidon W. C. Το 1959, η DFP ενημερωτική φόρμουλα (DFP updating formula). Σήμερα οι γνωστότεροι και συχνότερα χρησιμοποιούμενοι αλγόριθμοι Quasi-Newton είναι η φόρμουλα SR1 και η μέθοδος BFGS.

[1] Mordecai, 2003

5.0 ΜΟΡΦΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται με ποιο σκεπτικό στήσαμε τους κώδικές μας και πως δουλεύουν-συνεργάζονται για την επίλυση των προβλημάτων που θα αντιμετωπίσουμε παρακάτω.

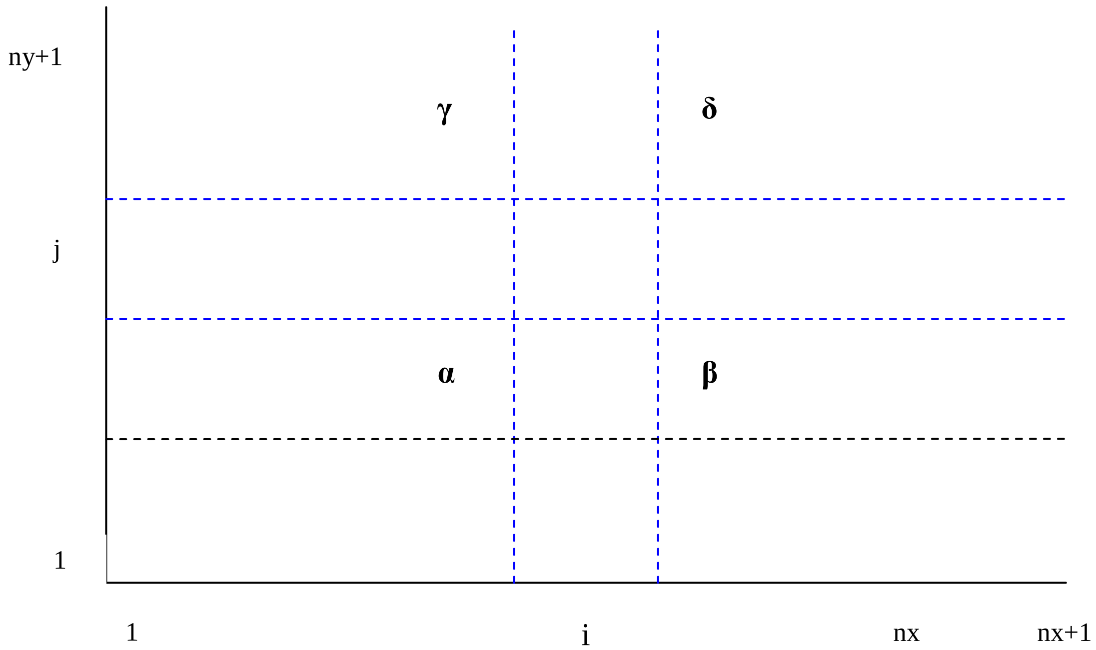
Αρχικά πρέπει να αναφέρουμε ότι οι κώδικες αναπτύχθηκαν σε περιβάλλον MATLAB 2007b.

Το γενικό σχέδιο ήταν να κατασκευάσουμε το μηχανικό πρόβλημα, να προσδιορίσουμε / προσεγγίσουμε τις συναρτήσεις στόχους και τέλος να βελτιστοποιήσουμε αυτές και τις παραμέτρους τους.

Πάνω από όλα τρέχει ένα σχετικά απλό πρόγραμμα βελτιστοποίησης, με περιορισμούς, που χρησιμοποιεί Quasi-Newton μέθοδο. Αυτό παίρνει σαν είσοδο του τιμές διατομών της κατασκευή μας και σαν έξοδο έχει τιμές διατομών που δίνουν την βέλτιστη αντικειμενική συνάρτηση , καθώς και την τιμή της.

Πίσω από αυτό σχεδιάσαμε κώδικες που , αρχικά, σχεδιάζουν δυσδιάστατα την κατασκευή μας. Στη συνέχεια εισέρχονται τα Πεπερασμένα στοιχεία και επιλύεται το σύστημα των εξισώσεων $K * u = p$.

Αξίζει σε αυτό το κομμάτι να επεκταθούμε και να εξηγήσουμε την αρίθμηση των κόμβων και ράβδων του πλαισίου μας. Η αρίθμηση των κόμβων γίνεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ξεκινάμε από τον κόμβο με αριθμό 1, που βρίσκεται στο κάτω αριστερό άκρο και κατευθυνόμαστε προς τα δεξιά. Στη συνέχεια ανεβαίνουμε μια γραμμή πάνω και συνεχίζουμε την αρίθμηση.



Σχήμα 6: *Ανοίγματα nx, ny και αρίθμηση κόμβων*

Για να γενικεύσουμε, έστω ότι έχουμε το τυχαίο τετράπλευρο που δημιουργείται από τους κόμβους α,β,γ,δ. Η αρίθμηση αυτών θα δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις, όπου,

α= (j-1)*(nx+1)+i,

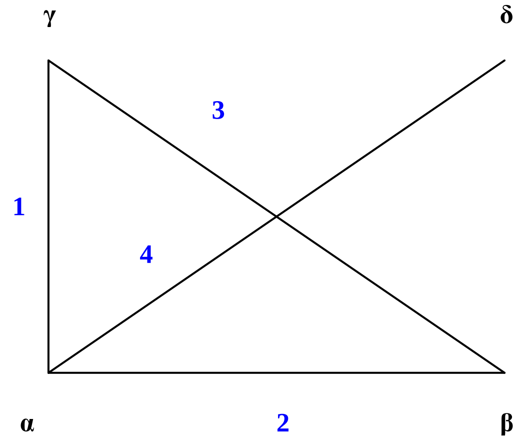
β= α+1= (j-1)*(nx+1)+i+1,

γ= j*(nx+1)+i,

δ= γ+1= j*(nx+1)+i+1,

με $1 \le i \le nx+1$ και $1 \le j \le ny+1$.

Όσον αφορά, τώρα την αρίθμηση των ράβδων που αποτελούν το πλαίσιό μας, εργαζόμαστε ως εξής στο παρακάτω σχήμα,



Σχήμα 7 : *Αρίθμηση ράβδων (λεπτομέρεια)*

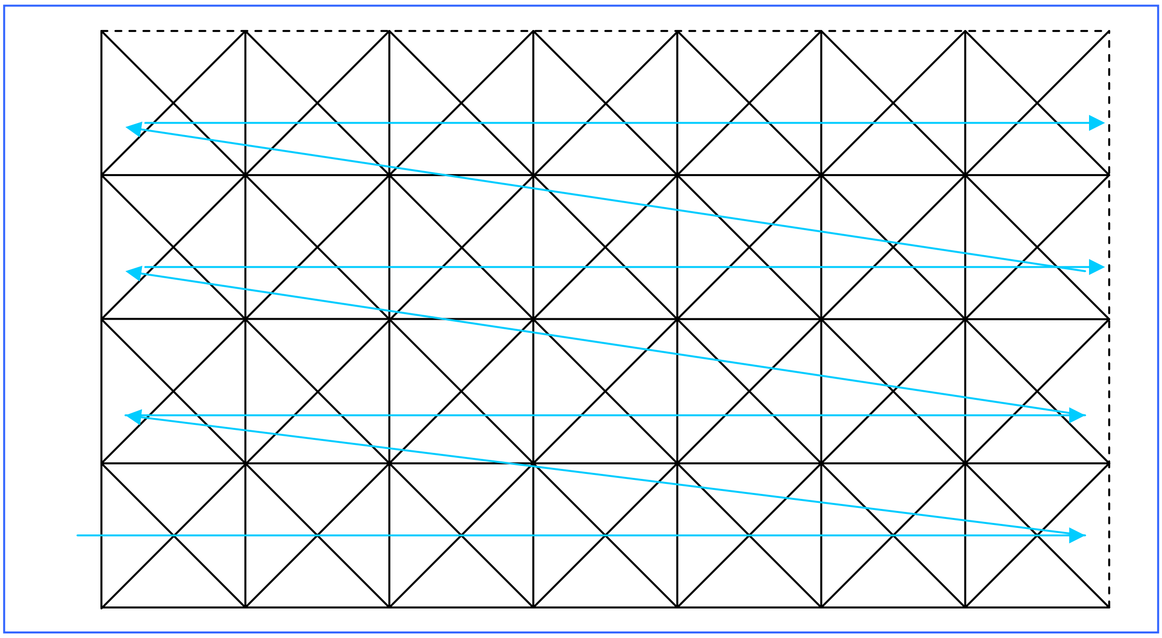
Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει την αρχή και τέλος κάθε ράβδου του παραπάνω σχήματος.

Ραβδος	**Αρχή (κόμβος)**	**Τέλος (κομβος)**
1	γ	α
2	α	β
3	γ	β
4	α	δ

Πίνακας 1 : *Συνδεσμολογία ράβδων (λεπτομέρεια)*

Στη συνέχεια χωρίζουμε το πλαίσιο μας σε τέτοια μικρά σχήματα και συνεχίζουμε την αρίθμηση προς τα δεξιά και πάνω.

Κάποια στιγμή όταν τελειώσει αυτή διαδικασία έχουμε αριθμήσει τις παρακάτω ράβδους του πλαισίου.



Σχήμα 8 :*Πλαίσιο με φορά αρίθμησης*

Παρατηρούμε ότι έως τώρα δεν έχουμε αριθμήσει τις ράβδους της δεξιάς και της πάνω πλευράς. Γι' αυτό συνεχίζουμε από εκεί που είχαμε μείνει και αριθμούμε αρχικά τις ράβδους της δεξιάς πλευράς (από κάτω προς τα πάνω) και τέλος τις ράβδους της πάνω πλευράς (από αριστερά προς τα δεξιά).

Σε αυτό το κομμάτι απλά εξηγήσαμε τον τρόπο με τον οποίο αριθμούνται οι κόμβοι και οι ράβδοι. Ευτυχώς, οι κώδικές μας τα υπολογίζουν αυτά μόνοι τους, γιατί σε μεγάλα παραδείγματα είναι αρκετά επίπονος ο υπολογισμός αυτών.

Αφού καθοριστεί η συνδεσμολογία, στη συνέχεια καθορίζονται οι συνοριακές συνθήκες στήριξης, οι παράμετροι του υλικού και θέτουμε φορτίσεις. Έτσι έχουμε προσομοιώσει μια κατασκευή μας.

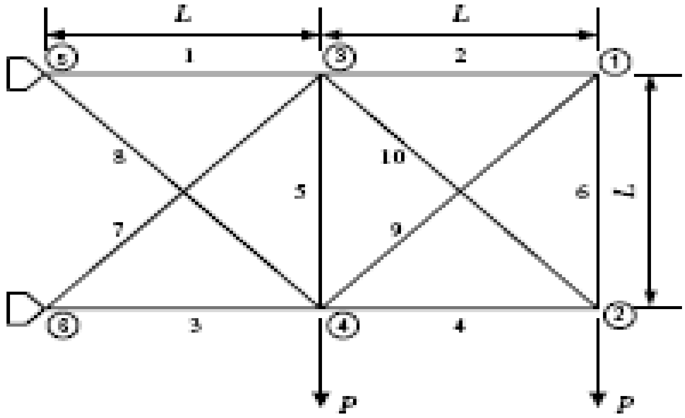
Κάθε φορά ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης επεξεργάζεται την εκάστοτε αντικειμενική συνάρτηση (συνάρτηση βάρους ή συνάρτηση δυσκαμψίας) και προσπαθεί να βγάλει τα βέλτιστα αποτελέσματα κάτω από περιορισμούς που του δίνουμε (Βέλτιστος Σχεδιασμός). Τα αποτελέσματα αυτά είναι οι τιμές των διατομών που βελτιστοποιούν κάθε φορά την αντικειμενική συνάρτηση, καθώς και γραφικά αποτελέσματα (εδώ λαμβάνει χώρα η Τοπολογική Βελτιστοποίηση).

6.0 ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΜΑΣ

Για να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτό που σχεδιάσαμε δουλεύει σωστά. Γι' αυτό λοιπόν παρακάτω συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του αλγορίθμου που υλοποιήσαμε με τα αποτελέσματα του άρθρου "Particle swarm approach for structural design optimization" των Perez P. E. και Behdinan K[1].

6.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΔΕΚΑ ΡΑΒΔΩΝ

Το άρθρο αυτό παρουσιάζει αποτελέσματα εφαρμογής αλγορίθμων βέλτιστου σχεδιασμού πλαισίου με δέκα ράβδους, συνδεδεμένους όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 9 : *Πλαίσιο δέκα ράβδων με φορτίσεις. Πηγή Perez & Behdinan, 2006*

Επιλύθηκε με αρκετούς αλγορίθμους με σκοπό τη ελαχιστοποίηση του βάρους του, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.

Αυτές είναι,

1. επιτρεπτή Τάση κυμαίνεται από +25000 psi (εφελκυσμός) έως -25000 psi (θλίψη).
2. επιτρεπτή μετακίνηση των κόμβων κυμαίνεται από -2 σε +2 in.
3. πυκνότητα του υλικού κατασκευής είναι 0.1 lb/in^3.
4. ο συντελεστής Young E, είναι $10^4 ksi$
5. δυο φορτίσεις προς τα κάτω στους κόμβους 2 και 4, με μέτρο $100kip$

Τα αποτελέσματα του άρθρου παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

---

[1] Perez P. E., Behdinan K, 2006

Η αρίθμηση 1 έως 10 μας δίνει τις διατομές των δέκα ράβδων που πλαισίου και η τελευταία γραμμή μας δίνει το ελάχιστο βάρος.

Table 1
Optimization results for the 10-bar truss

Truss area	PSO best	PSO worst	Gellatly and Berke [30]	Schimit and Miura [29]	Ghasemi et al. [37]	Schimit and Farshi [34]	Dobbs and Nelson [31]
01	33.500	33.500	31.350	30.570	25.730	33.432	30.500
02	0.100	0.100	0.100	0.369	0.109	0.100	0.100
03	22.766	33.500	20.030	23.970	24.850	24.260	23.290
04	14.417	13.304	15.600	14.730	16.350	14.260	15.428
05	0.100	0.100	0.140	0.100	0.106	0.100	0.100
06	0.100	0.100	0.240	0.364	0.109	0.100	0.210
07	7.534	6.8263	8.350	8.547	8.700	8.388	7.649
08	20.467	18.935	22.210	21.110	21.410	20.740	20.980
09	20.392	18.814	22.060	20.770	22.300	19.690	21.818
10	0.100	0.100	0.100	0.320	0.122	0.100	0.100
Weight	5024.21	5176.27	5112.00	5107.30	5095.65	5089.00	5080.00

Table 2
Optimization results for the 10-bar truss (continuation)

Truss area	Rizzi [32]	Haug and Arora [39]	Haftka and Grdal [40]	Adeli and Kamal [35]	El-Sayed and Jang [36]	Galante [38]	Memari and Fuladgar [33]
01	30.731	30.031	30.520	31.28	32.966	30.440	30.561
02	0.100	0.100	0.100	0.10	0.100	0.100	0.100
03	23.934	23.274	23.200	24.65	22.799	21.790	27.946
04	14.733	15.286	15.220	15.39	14.146	14.260	13.619
05	0.100	0.100	0.100	0.10	0.100	0.100	0.100
06	0.100	0.557	0.551	0.10	0.739	0.451	0.100
07	8.542	7.468	7.457	7.90	6.381	7.628	7.907
08	20.954	21.198	21.040	21.53	20.912	21.630	19.345
09	21.836	21.618	21.530	19.07	20.978	21.360	19.273
10	0.100	0.100	0.100	0.10	0.100	0.100	0.100
Weight	5061.60	5060.920	5060.80	5052.00	5013.24	4987.00	4981.1

Πίνακας 2*: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης πλαισίου δέκα ράβδων, Πηγή Perez & Behdinan, 2006*

6.2 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΠΟΥ ΥΛΟΠΟΙΗΘΗΚΕ

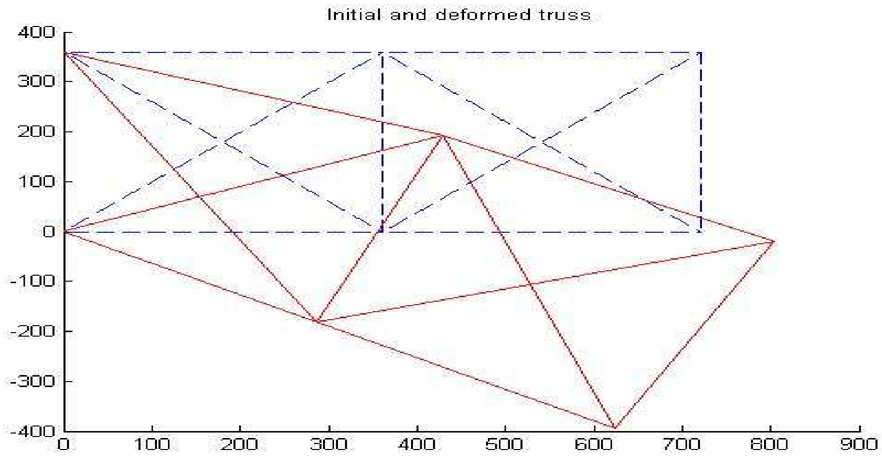
Στη συνέχεια επεξεργαστήκαμε τα παραπάνω δεδομένα με το αλγόριθμο που αναπτύξαμε και τα αποτελέσματα που μας έδωσε, ύστερα από 26 επαναλήψεις, είναι τα παρακάτω:

Optimization Results for the 10-bar truss	
Truss area	**Παρούσα Διατριβή**
01	30.509
02	0.100
03	22.147
04	15.050
05	0.100
06	1.015
07	5.816
08	21.882
09	22.130
10	0.100
Βάρος	4885.10

Πίνακας 3*: Αποτελέσματα της βελτιστοποίησης διατριβής μας στο" πρόβλημα των 10 ράβδων"*

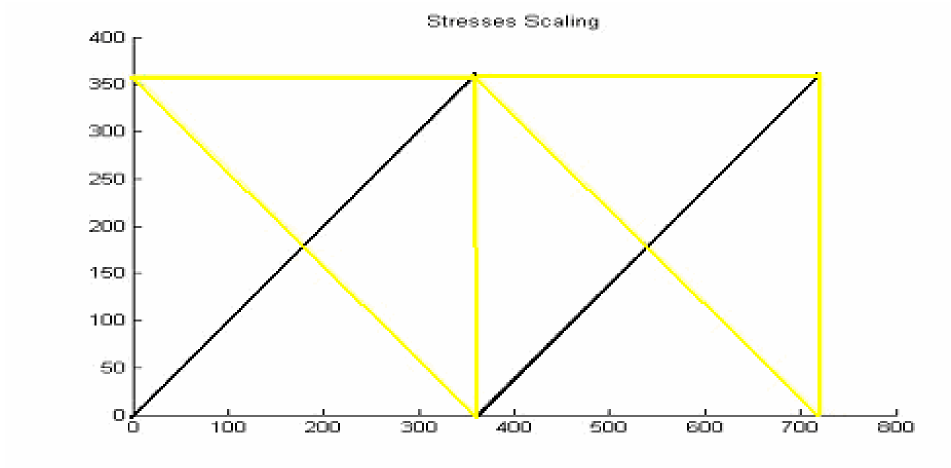
Πρέπει να σημειωθεί ότι η αρίθμηση ράβδων που βγάζει κώδικας μας, σε matlab, είναι διαφορετικός από αυτόν του *Πίνακα 1* , αλλά στον *Πίνακα 2*, η αρίθμηση, τελικά, τροποποιήθηκε και συμπίπτει.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια γραφικά αποτελέσματα.



Σχήμα 10: *Δικτύωμα Πριν και Μετά τις φορτίσεις (κεφ. 6)*

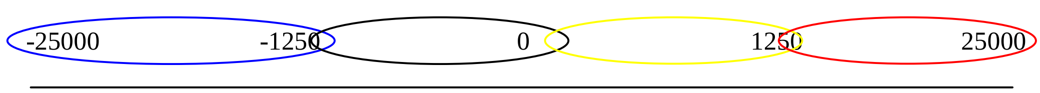
Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται το δικτύωμα πριν (μπλε) και μετά (κόκκινο) τη φόρτιση.



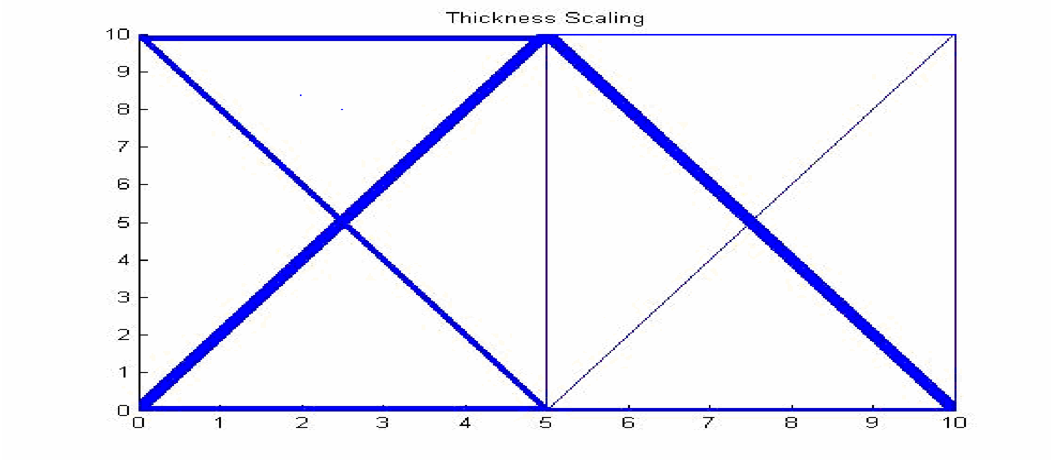
Σχήμα 11: *Τάσεις λόγω της εφαρμογής φορτίσεων (κεφ. 6)*

Στο δεύτερο σχήμα παρουσιάζονται χρωματικά οι τάσεις στις ράβδους του δικτυώματος λόγω των φορτίσεων, σύμφωνα με την παρακάτω κλίμακα,

Stresses Scaling



Σχήμα 12 : *Χρωματική κλίμακα τάσεων(κεφ. 6)*



Σχήμα 13 : *Βελτιστοποιημένες διατομές ράβδων(κεφ. 6)*

Στο τρίτο μας σχήμα παρατηρούμε τις διατομές κάθε ράβδου, για να επιτύχουμε το ελάχιστο βάρος, υπό τις προϋποθέσεις του προβλήματός μας.

6.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τέλος συγκρίναμε το βελτιστοποιημένο βάρος του δικτυώματος με τον μ.ο., την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των υπολοίπων αλγορίθμων βελτιστοποίησης με τον δικό μας.

Compare of Optimum Weights				
Βέλτιστο βάρος παρούσας διατριβής	**Μέσος όρος**	**Διαφορά από τον μέσο όρο**	**Μέγιστο βάρος**	**Ελάχιστο βάρος**
4885.10	5064.35	3.53%	5176.27	4981.10

Πίνακας 4 : *Συγκριτικά Αποτελέσματα συνάρτησης βάρους για το "πρόβλημα των 10 ράβδων"*

Παρατηρούμε, τελικά, ότι ο αλγόριθμός δουλεύει σωστά, αφού προσεγγίζει με εξαιρετική ακρίβεια τα υπόλοιπα αποτελέσματα του άρθρου και μάλιστα σχεδίασε την ελαφρότερη κατασκευή με διαφορά από τον μέσο όρο των υπολοίπων είναι της τάξης του 3.53%.

7.0 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΒΑΡΟΥΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

7.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το πρώτο πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους μια κατασκευής, με άμεσο αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση του κόστους, Εφ' όσον, ελαφρότερη κατασκευή, σημαίνει λιγότερη σπατάλη υλικού, συνεπώς αυτό μεταφράζεται σε μικρότερο κόστος.

7.2 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Η μαθηματική έκφραση του παραπάνω προβλήματος είναι η παρακάτω:

$$\min \quad W = \sum_{i=1}^{nelements} \rho * x_i * l_i,$$

$$K(x_i) * U = p$$

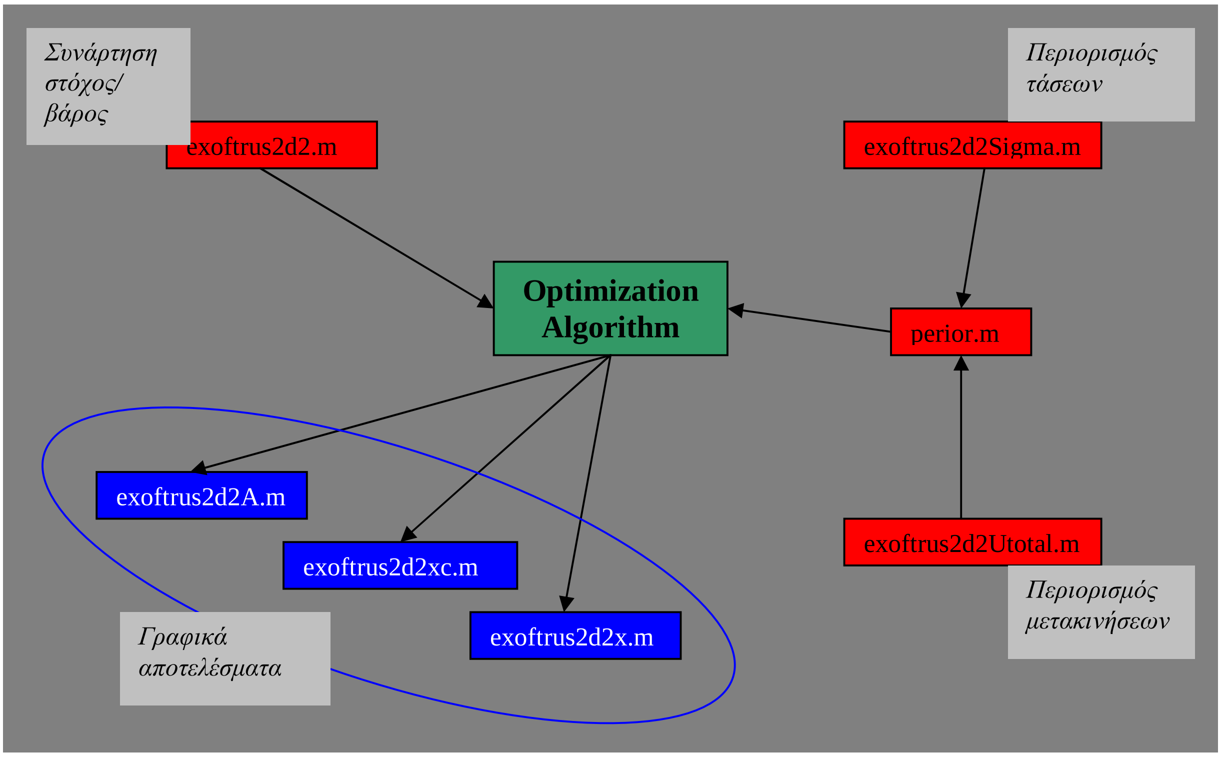
$$\text{st} \quad \begin{array}{l} Sigma_{\min} \le Sigma \le Sigma_{\max}, \\ U_{\min} \le U \le U_{\max} \end{array}$$

$$\text{με} \quad x_{\min} \le x_i \le x_{\max}.$$

Ο στόχος μας είναι να σχεδιάσουμε την πιο ελαφριά κατασκευή με περιορισμό τάσεων +10 ή – 5 μονάδες και διατομή που δεν θα είναι μικρότερη από 0.1 μονάδες. Η πυκνότητα του υλικού κατασκευής είναι 0.1 lb/in^3, ο συντελεστής Young, E, είναι 10^4.

Για την υλοποίηση του παραπάνω προβλήματος αναπτύξαμε τα υποπρογράμματα ,exoftrus2d2.m, exoftrus2d2Sigma.m, exoftrus2d2Utotal.m, perior.m, καθώς και την υπορουτίνα truss2d.m που βρίσκονται στο CD (*ΚΩΔΙΚΕΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7*).

Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησής μας παίρνει την αντικειμενική συνάρτηση func1 (συνάρτηση βάρους), το Sigma, το Utotal από τα τρία πρώτα, αντίστοιχα και βελτιστοποιεί την func1 αφού λάβει τους περιορισμούς του τέταρτου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 14 : *Λειτουργία-Συνεργασία προγραμμάτων μας (κεφ.7)*

Ο αλγόριθμος που σχεδιάσαμε είναι ο παρακάτω:

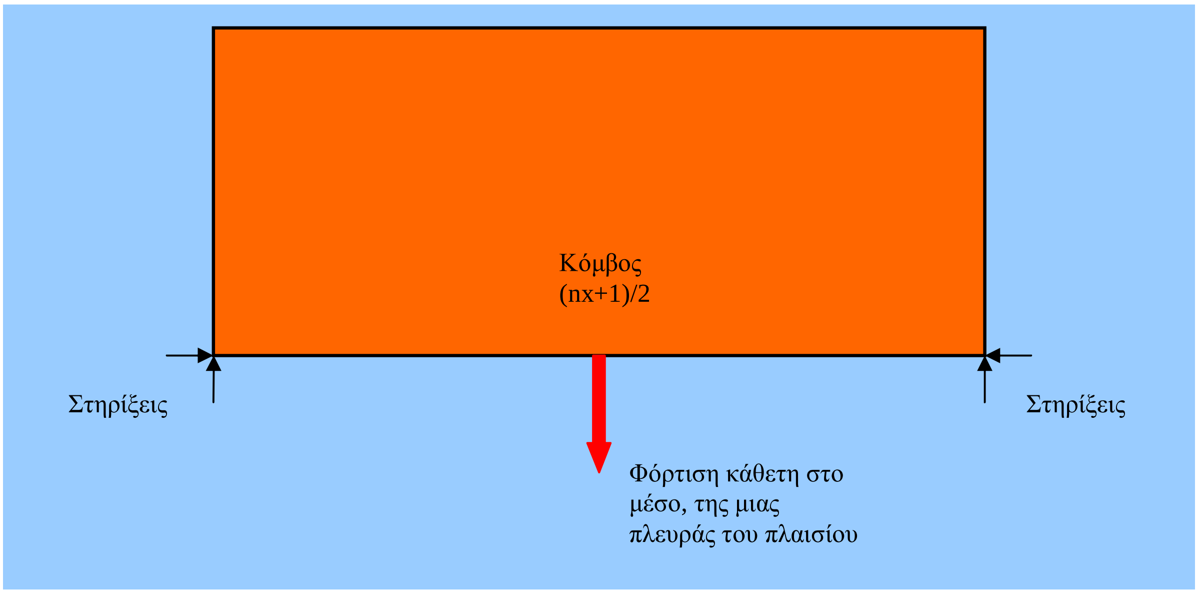
```
%%Algorithmos Veltistopoiisis
 nx=…;
 ny=…;
 nelements = (nx*ny)*4+ny+nx;
 x0=ones(nelements,1);
 %Oria pou mporei na kinithoun oi times tou A
 lb=[0.1*ones(nelements,1)];
 ub=[];
 options =optimset('LargeScale', 'off');
[x,fval,exitflag,output]=fmincon(@exoftrus2d2,x0,[],[],[],[],lb,ub,@perior,optio
ns);
-----------------------------------------------------------
```

Όπου nx,ny είναι ο αριθμός της υποδιαίρεσης του μήκους κάθε πλευράς του πλαισίου μας. Ο συνολικός αριθμός των ράβδων (nelements) καθώς και τα υπόλοιπα δεδομένα (αριθμός κόμβων, κ.α.) υπολογίζονται αυτόματα στο πρόγραμμά μας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι θέσαμε περιορισμούς στις τιμές των διατομών των ράβδων σε 0.1 μονάδες, (lb). Δεν μπορεί να υπάρξει μη-θετική διατομή.

Εφαρμόζουμε φόρτιση στον κόμβο (nx+2)/2 , κάθε φορά, κάθετη με κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο 50 μονάδες.

Ως πρότυπη κατασκευή χρησιμοποιούμε ένα δυσδιάστατο πλαίσιο, το οποίο το φορτίζουμε με μονόπλευρη δύναμη και δουλεύουμε πάνω σε αυτό, όπως φαίνεται παρακάτω.

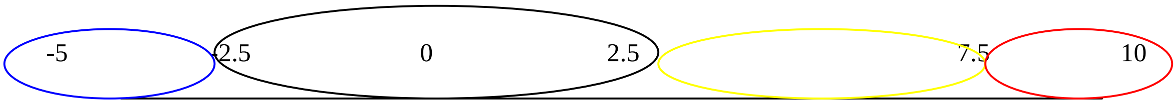


Σχήμα 15 : *Πλαίσιο φόρτισης (κεφ. 7)*

Αφού υπολογιστούν οι βέλτιστες διατομές των ράβδων και με την βοήθεια των υποπρογραμμάτων exoftrus2d2x.m, exoftrus2d2xc.m, exoftrus2d2A.m, παρατηρούμε γραφικά τα αποτελέσματα της φόρτισης του πλαισίου μας, τις τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους (με καθορισμένη χρωματική κλίμακα), καθώς και το πάχος που έχουν οι ράβδοι (με καθορισμένη κλίμακα).

Η χρωματική κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε για τις τάσεις είναι η παρακάτω.

Stresses Scaling



Σχήμα 16*: Χρωματική κλίμακα τάσεων(κεφ. 7)*

Φαίνεται η διαβάθμιση των τάσεων του πλαισίου μας. Ειδικά από -5 έως 0, έχουμε θλίψη και από 0 έως 10 εφελκυσμό. Το όριο της θλίψης είναι μικρότερο από το όριο για εφελκυσμό γιατί πολύ ευκολότερα μια κατασκευή λυγίζει και οδηγούμαστε σε καταστάσεις δύσκολα προβλέψιμες, παρά σπάει.
Οι όταν οι τάσεις σχεδιάζονται με μαύρο χρώμα, αυτό αποτελεί πολύ καλό αποτέλεσμα για την ακαμψία της κατασκευής μας. Με τάσεις στο χρώμα μπλε ή κίτρινο σχετικά καλό αποτέλεσμα και τέλος με τάση στο χρώμα κόκκινο, άσχημο αποτέλεσμα.

Η δε κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε για το πάχος των ράβδων είναι η παρακάτω.
Για διατομή μικρότερη των Alpha_min+2*L/30 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 1,
για διατομή μικρότερη των Alpha_min+2*L/6 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 2,
για διατομή μικρότερη των Alpha_min+3*L/5 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 3,
για διατομή μικρότερη των Alpha_min+4*L/5 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 7,
αλλιώς σχεδίασε με LineWidth = 9.
Όπου L= Alpha_max-Alpha_min με Alpha_max, Alpha_min να καθορίζονται από εμάς. Π.χ. στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε Alpha_max=1.5 και Alpha_min=0.1

7.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρακάτω, αρχικά, παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα για πλαίσιο με nx=2 και ny=1.

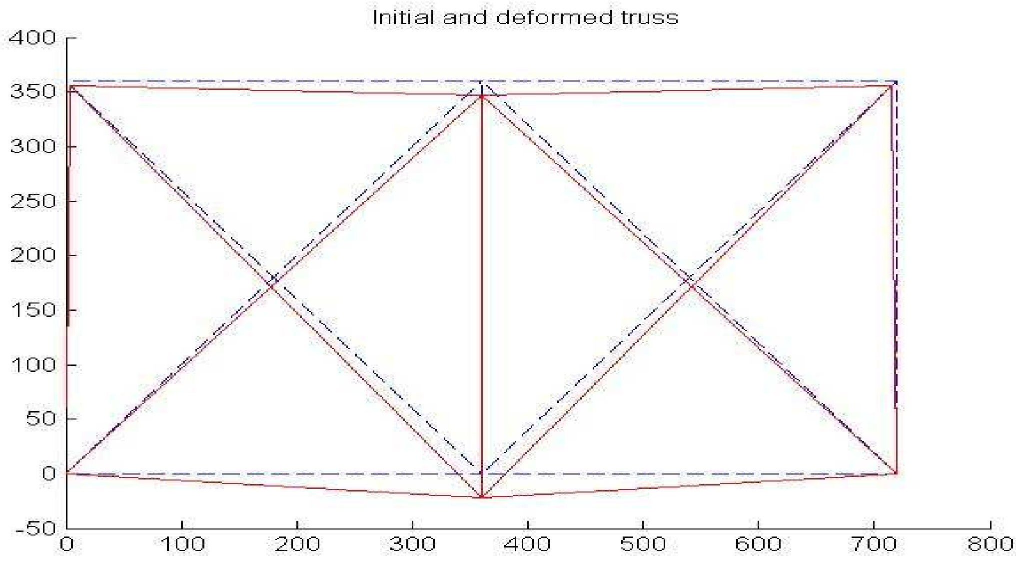
Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους και οι διατομές τους, μετά την βελτιστοποίηση.

Ράβδος	**Sigma** (μονάδες)	**Διατομή** (μονάδες)
1	-3.78	0.10
2	0.00	0.10
3	5.69	0.10
4	-5.00	6.95
5	10.00	4.91
6	0.00	0.10
7	-5.00	6.95
8	5.69	0.10
9	-3.78	0.10
10	-4.25	0.10
11	-4.25	0.10
Βελτιστο βάρος *(μονάδες)*		*857.67*

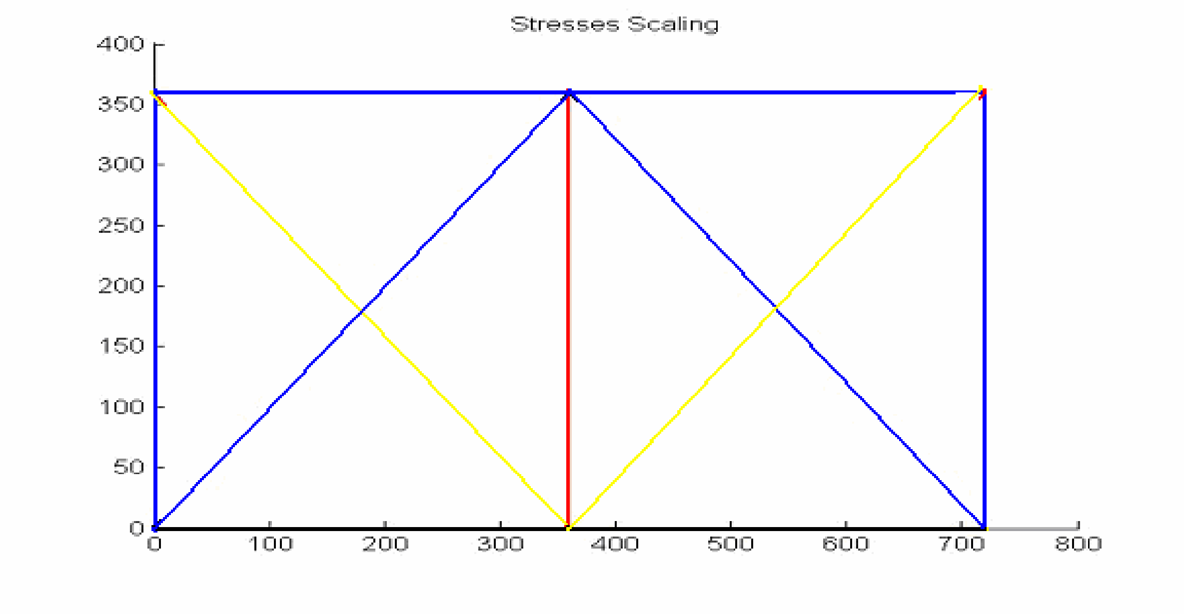
Πίνακας 5 : Αποτελέσματα τάσεων και βέλτιστων διατομών (κεφ. 7)

Παρατηρούμε ότι και οι διατομές και οι τάσεις ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέσαμε.

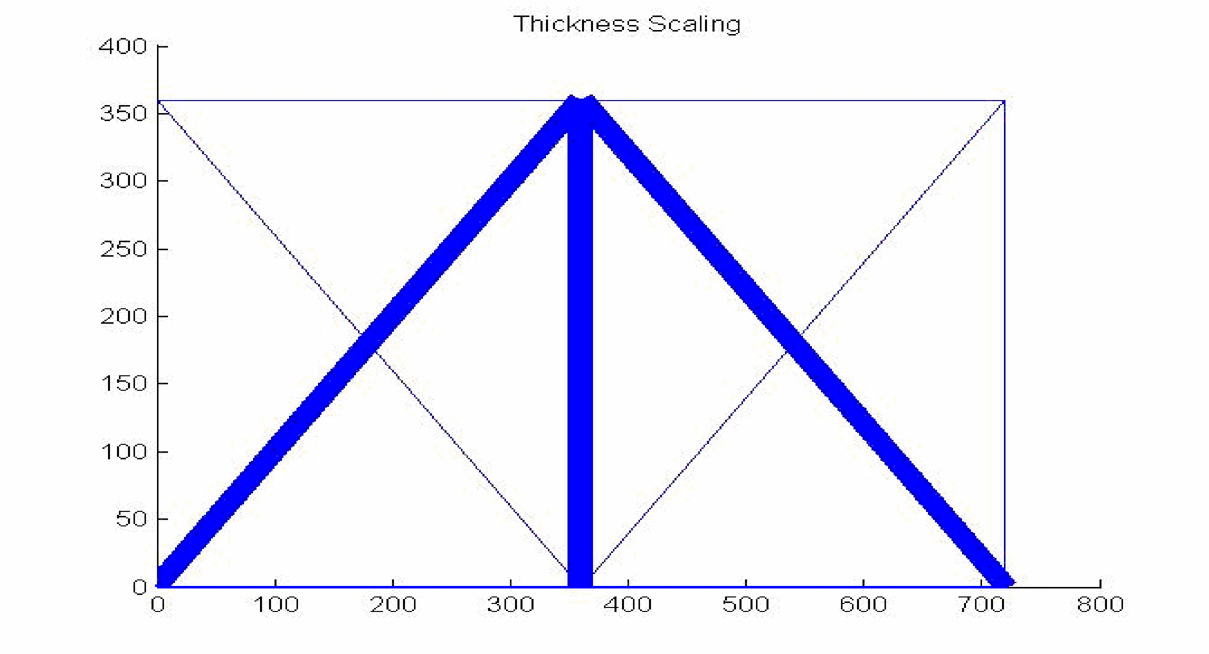
Ακολούθως έχουμε τα κάτωθι διαγράμματα. Το πρώτο γράφημα παρουσιάζει τις μετακινήσεις των ράβδων λόγω της εφαρμογής της δύναμης. Το δεύτερο γράφημα παρουσιάζει τις τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους. Το τρίτο γράφημα παρουσιάζει το πλαίσιό μας με τις διατομές των ράβδων που προήλθαν από την βελτιστοποίηση.



Σχήμα 17: *Μετατόπιση κόμβων πριν και μετά τη φόρτιση (κεφ. 7)*



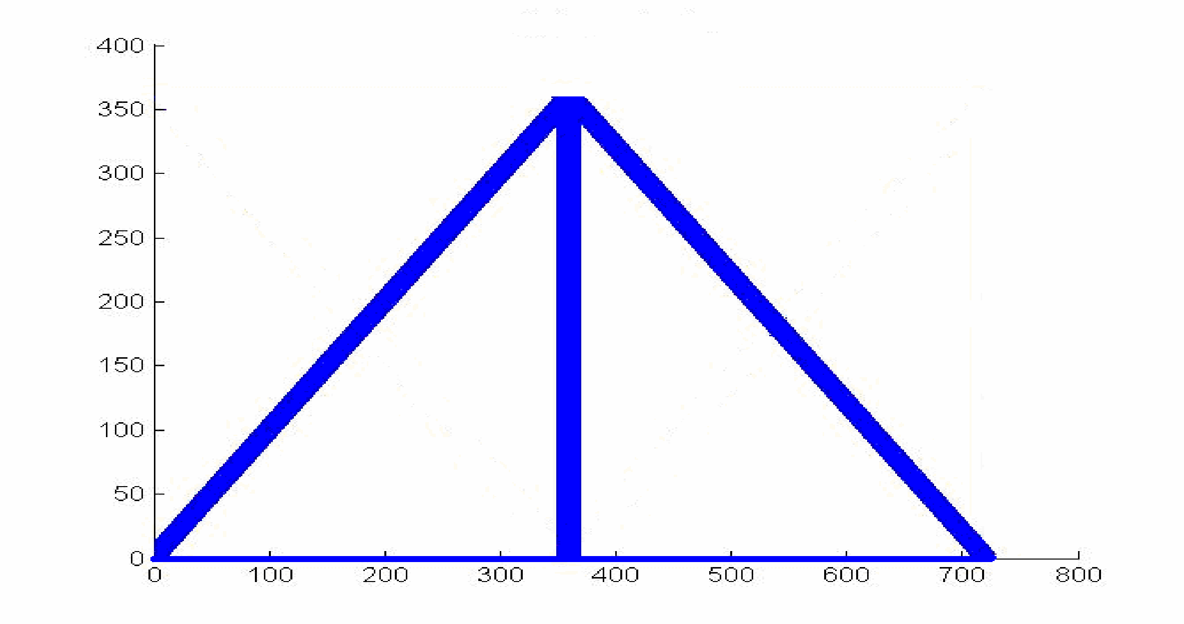
Σχήμα 18: *Τάσεις (κεφ. 7)*



Σχήμα 19: *Βέλτιστο πάχος διατομών (κεφ. 7)*

Παρατηρούμε ότι οι κόμβοι 2 και 5 παρουσιάζουν την μεγαλύτερη μετακίνηση. Στο τελευταίο σχήμα παρατηρούμε που μπορεί να γίνει οικονομία υλικού. Φαίνεται ποιοι ράβδοι πρέπει να έχουν μεγάλο πάχος, γιατί δέχονται τις μεγαλύτερες τάσεις από την φόρτιση και ποιοι ράβδοι παραμένουν σχεδόν ανενεργοί, άρα μπορούμε να τους αποφύγουμε.

Τελικά μπορεί να κατασκευαστεί το πλαίσιο του παρακάτω σχήματος, που προσεγγίζει κατά πολύ μεγάλο βαθμό τη συμπεριφορά του αρχικού μου με μικρότερο κόστος κατασκευής όμως, λόγω οικονομίας υλικού.



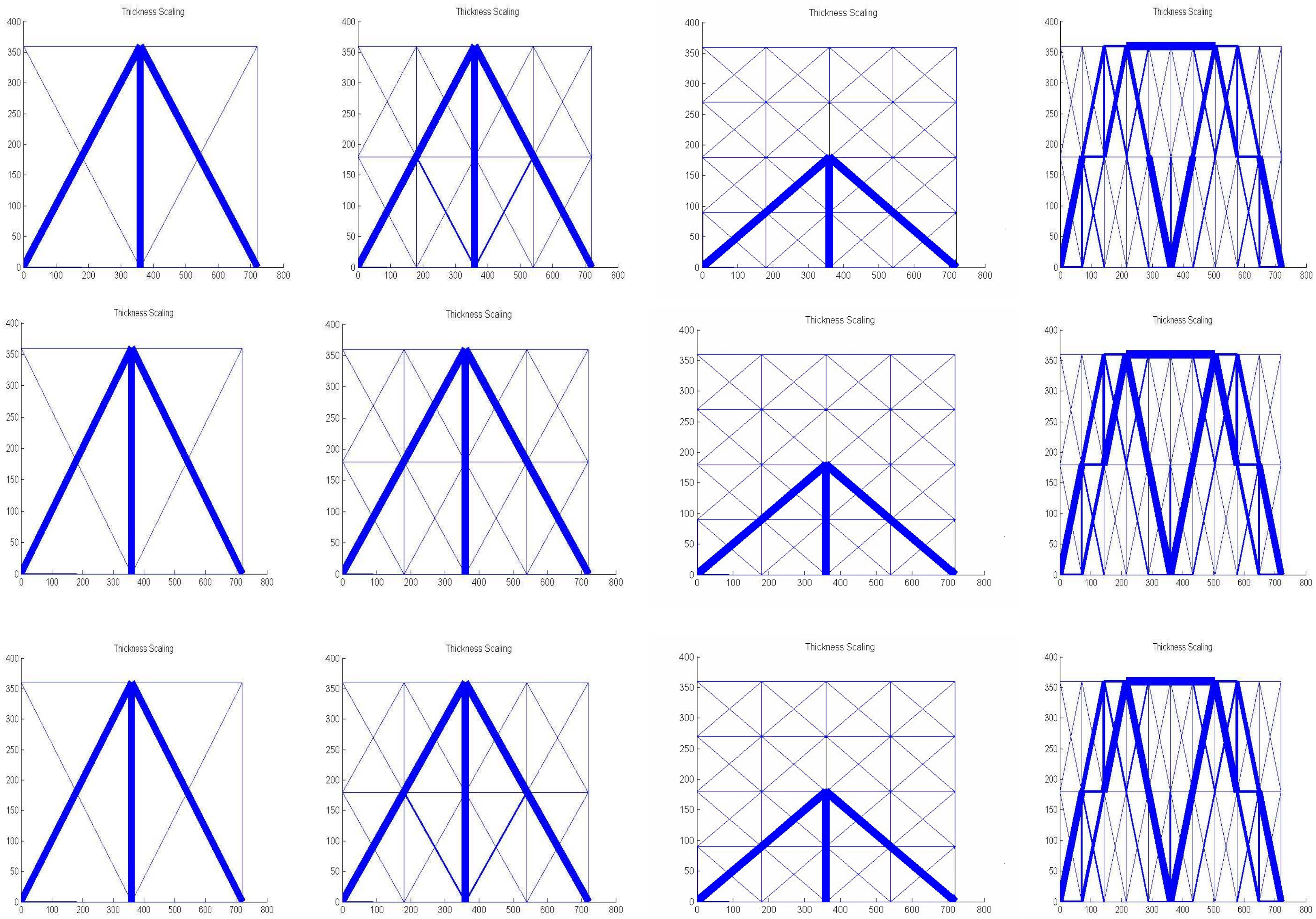
Σχήμα 20: *Τελική μορφή, με την βοήθεια της Τοπολογικής Βελτιστοποίησης (κεφ. 7)*

Αυτό το τελευταίο είναι το πιο σημαντικό κομμάτι της δουλειάς μας και αποτελεί την τοπολογική βελτιστοποίηση. Με αυτή πετυχαίνουμε οικονομία υλικού, χωρίς να αλλάξουμε την συμπεριφορά της κατασκευής μας σε καθορισμένες συνθήκες. Το όφελος, ειδικά σε μεγάλες κατασκευές, είναι πολύ μεγάλο. Υπάρχουν και άλλα περιθώρια για οικονομικότερη-ελαφρότερη κατασκευή βέβαια και αυτό εξαρτάται από το τι συντελεστή ασφάλειας δίνει ο σχεδιαστής στην κατασκευή του.

Στη συνέχεια, για να υπάρξει σύγκριση εφαρμόσαμε τον αλγόριθμο για αρκετά παραδείγματα στην περίπτωση που έχω μόνο περιορισμό τάσεων (+10 και –5 μονάδες), στην περίπτωση που έχω μόνο περιορισμό μετακινήσεων (+ ή – 2 μονάδες) και τέλος στην περίπτωση που έχω και τους δύο περιορισμούς. Τα αποτελέσματα που λάβαμε είναι τα παρακάτω,

Ελαχιστοποίηση βάρους πλαισίου										
		Με περιορισμό τάσεων			Με περιορισμό Μετακινήσεων			Με περιορισμούς τάσεων & μετακινήσεων		
nx	**ny**	**Βέλτιστο βάρος**	**βήματα**	**Χρόνος (min.)**	**Βέλτιστο βάρος**	**βήματα**	**Χρόνος (min.)**	**Βέλτιστο βάρος**	**βήματα**	**χρόνος (min.)**
2	**1**	857.67	7	0.1	288.25	10	0.1	857.67	7	0.1
2	**2**	995.39	9	0.1	316.12	10	0.1	995.39	9	0.1
4	**2**	877.09	11	1	306.46	31	1	877.09	11	1
4	**4**	1030.80	17	3	352.08	33	2	1030.80	17	3
6	**4**	915.27	21	7	320.67	55	7	915.27	21	7
6	**6**	1065.00	26	25	546.34	92	20	1065.00	26	25
10	**1**	1731.10	14	2	1391.0	88	3	1731.10	14	2
10	**2**	1059.40	17	5	493.29	85	9	1059.40	17	5
10	**10**	1132.60	32	-	311.66	99	-	1132.60	32	-

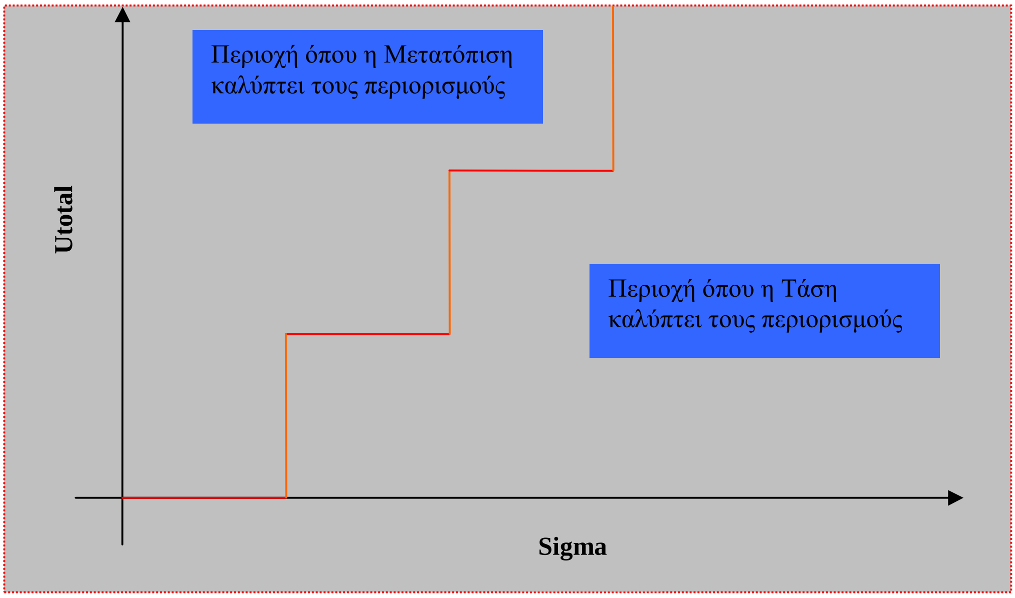
Πίνακας 6: *Αποτελέσματα Ελαχιστοποίησης βάρους για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις περιορισμών*



Σχήμα 21: *Κατασκευές με διαφορετική διακριτοποίηση, βελτιστοποιημένες ως προς το βάρος, υπό διαφορετικούς περιορισμούς*

Αρχικά παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα με περιορισμό τάσεων και τα αποτελέσματα με περιορισμό τάσεων και μετακινήσεων είναι τα ίδια. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σχεδόν πάντα ο ένας περιορισμός καλύπτει τον άλλο. Αυτό δεν σημαίνει όμως ότι μπορούμε να παραλείψουμε κάποιον περιορισμό, γιατί συναντάμε περιπτώσεις κατά τις οποίες δεν μπορούμε να προβλέψουμε ποιος περιορισμός θα "κυριαρχίσει".

Έγιναν αρκετές δοκιμές με αλλαγές στα μεγέθη των περιορισμών και αποτέλεσμα ήταν πάντα, ο ένας περιορισμός να καλύπτει τον άλλο. Το παρακάτω γράφημα μας βοηθάει να καταλάβουμε το λόγο για το οποίο συμβαίνει αυτό. Να σημειωθεί ότι τα Sigma και Utotal αναφέρονται σε απόλυτες τιμές.



Σχήμα 22: *Διάγραμμα περιορισμών Τάσεων-Μετακινήσεων*

Από το σχήμα φαίνεται ότι υπάρχει ένα "σύνορο" για τους περιορισμούς Τάσεων και Μετακινήσεων. Αν ξεπεραστεί αυτό από τη μια ή από την άλλη πλευρά, τότε ο ένας περιορισμός καλύπτει τον άλλον. Για να γίνει περισσότερο κατανοητό και οι τάση και η μετατοπιση έχουν άμεσο αποτέλεσμα στην διατομή μιας ράβδους. Θέτοντας λοιπόν και τους δύο περιορισμούς μόνο ο ένας θα μπορεί να παράγει μια περισσότερο "ισχυρή" ανισοτική σχέση από τον άλλο. Για παράδειγμα η σχέση $-5 \leq x \leq 10$ είναι ισχυρότερη από την $-10 \leq x \leq 15$, αν θα πρέπει να ισχύσουν και οι δύο ταυτόχρονα.

Παρατηρούμε επίσης, ότι καθώς αυξάνει η διακριτοποίηση της κατασκευής αυξάνει και το βάρος της. Εξαίρεση αποτελεί, βέβαια η δομή με nx=10 και ny=1, και γενικά οι δομές με nx πολύ μικρότερο από το ny. Π.χ. $nx \geq 6$ και ny=1, δηλαδή κατασκευές με πολλά περισσότερα ανοίγματα στον άξονα x. Σε αυτές τις περιπτώσεις παρατηρούμε περισσότερο έντονη μεταβολή του βάρους.

Τέλος παρατηρούμε ότι οι χρόνοι προσομοίωσης δεν είναι απαγορευτικοί, εκτός από αρκετά μεγάλες κατασκευές με $nx \geq 9$ και $ny \geq 9$, που για να ολοκληρωθούν χρειάζονται αρκετές ώρες, έως ημέρες.

8.0 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΓΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΒΑΡΟΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

8.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Κάνουμε ένα βήμα παρακάτω και τώρα με δεδομένο βάρος θα φτιάξουμε την πιο δύσκαμπτη κατασκευή.

8.2 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Η μαθηματική έκφραση του νέου αυτού προβλήματος είναι η παρακάτω:

$$\min \quad F = \sum_{j=1}^{nnodes} U_j * F_j ,$$

$$K(x_i) * U_j = p$$

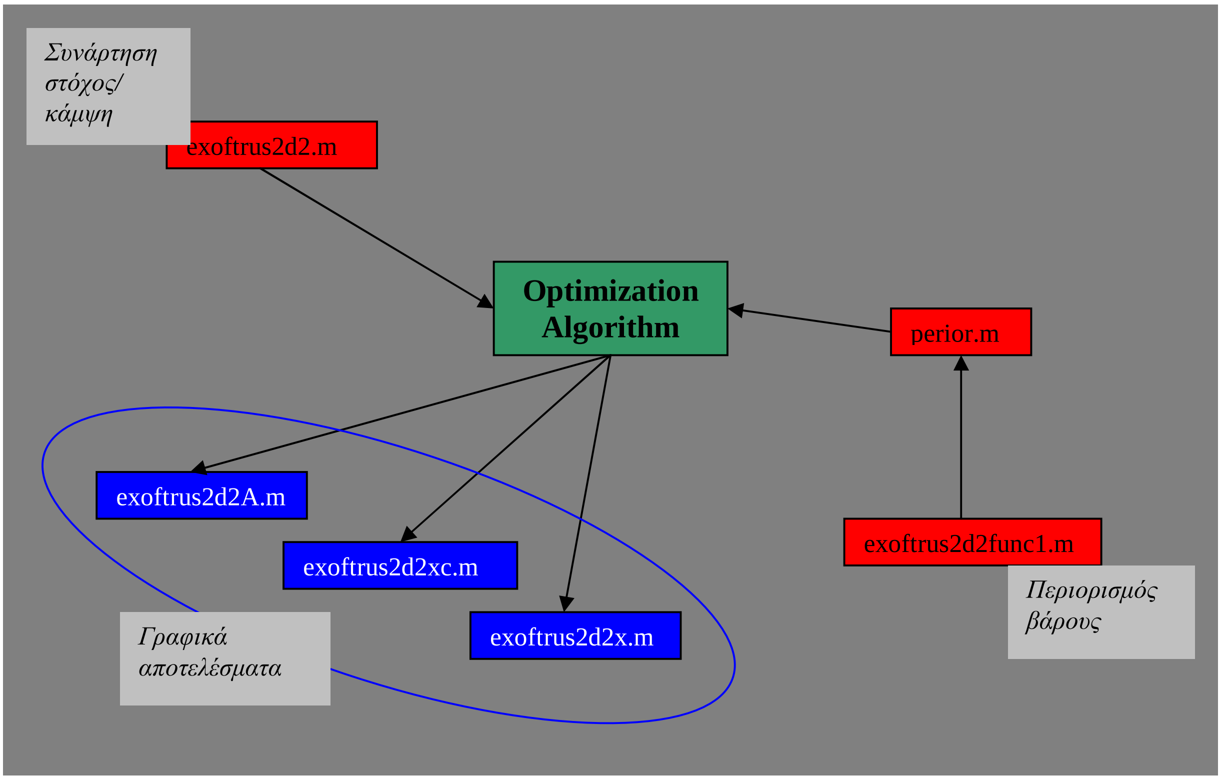
$$\text{st } W \leq W_{\max},$$

$$\text{με} \quad x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max} .$$

Ο στόχος μας είναι να σχεδιάσουμε την πιο άκαμπτη κατασκευή με περιορισμό βάρους και διατομή που δεν θα είναι μικρότερη από 0.1 μονάδες. Η πυκνότητα του υλικού κατασκευής είναι 0.1 lb/in^3, ο συντελεστής Young E, είναι 10^4

Για την υλοποίηση του παραπάνω προβλήματος αναπτύξαμε τα υποπρογράμματα ,exoftrus2d2.m, exoftrus2d2func1.m, perior.m, καθώς και την υπορουτίνα truss2d.m που βρίσκονται στο CD (*ΚΩΔΙΚΕΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8*).

Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησής μας παίρνει την αντικειμενική συνάρτηση func2 (συνάρτηση κάμψης), το βάρος από τα δύο πρώτα, αντίστοιχα και βελτιστοποιεί την func2 αφού λάβει τους περιορισμούς του τρίτου, όπως φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 23 : Λειτουργία-Συνεργασία προγραμμάτων μας(κεφ. 8)

Ο αλγόριθμος που σχεδιάσαμε, όπως και στο προηγούμενο κεφέλαιο, είναι ο παρακάτω:

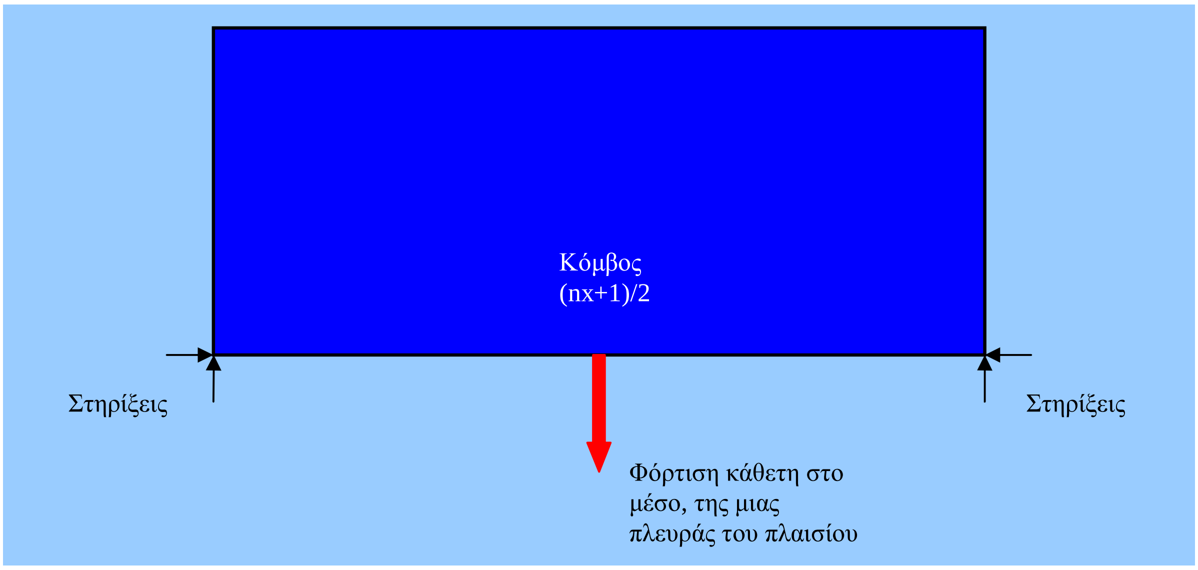
```
%%Algorithmos Veltistopoiisis
 nx=…;
 ny=…;
 nelements = (nx*ny)*4+ny+nx;
 x0=ones(nelements,1);
 %Oria pou mporei na kinithoun oi times tou A
 lb=[0.1*ones(nelements,1)];
 ub=[101*ones(nelements,1)];
 options =optimset('LargeScale', 'off');
[x,fval,exitflag,output]=fmincon(@exoftrus2d2,x0,[],[],[],[],lb,ub,@perior,optio
ns);
--------------------------------------------------------------------
```

Όπου nx, ny είναι ο αριθμός της υποδιαίρεσης του μήκους κάθε πλευράς του πλαισίου μας. Ο συνολικός αριθμός των ράβδων (nelements) καθώς και τα υπόλοιπα δεδομένα (αριθμός κόμβων, κ.α.) υπολογίζονται αυτόματα στο πρόγραμμά μας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι θέσαμε περιορισμούς στις τιμές των διατομών των ράβδων από 0.1 μονάδες, έως 101 μονάδες(lb, ub). Δεν μπορεί να υπάρξει μη-θετική διατομή.

Εφαρμόζουμε φόρτιση στον κόμβο (nx+2)/2 , κάθε φορά, κάθετη με κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο 50 μονάδες.

Όπως και πριν ως πρότυπη κατασκευή χρησιμοποιούμε ένα δυσδιάστατο πλαίσιο, το οποίο το φορτίζουμε με μονόπλευρη δύναμη και δουλεύουμε πάνω σε αυτό.

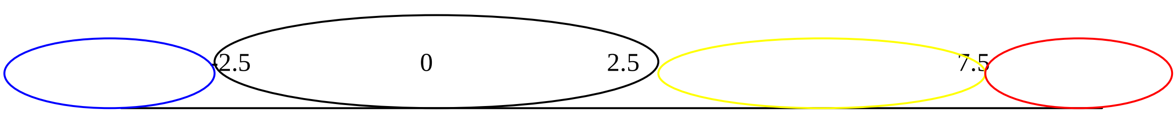


Σχήμα 24 : Πλαίσιο φόρτισης (κεφ. 8)

Αφού υπολογιστούν οι βέλτιστες διατομές των ράβδων και με την βοήθεια των υποπρογραμμάτων exoftrus2d2x.m, exoftrus2d2xc.m, exoftrus2d2A.m, παρατηρούμε γραφικά τα αποτελέσματα της φόρτισης του πλαισίου μας, τις τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους (με καθορισμένη χρωματική κλίμακα), καθώς και το πάχος που έχουν οι ράβδοι (με καθορισμένη κλίμακα).

Η χρωματική κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε για τις τάσεις είναι η παρακάτω.

Stresses Scaling



Σχήμα 25: Χρωματική κλίμακα τάσεων(κεφ. 8)

Φαίνεται η διαβάθμιση των τάσεων του πλαισίου μας. Ειδικά από $-\infty$ έως 0, έχουμε θλίψη και από 0 έως $+\infty$ εφελκυσμό.

Οι όταν οι τάσεις σχεδιάζονται με μαύρο χρώμα, αυτό αποτελεί πολύ καλό αποτέλεσμα για την ακαμψία της κατασκευής μας. Με τάσεις στο χρώμα μπλε ή κίτρινο σχετικά καλό αποτέλεσμα και τέλος με τάση στο χρώμα κόκκινο, άσχημο αποτέλεσμα.

Η δε κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε για το πάχος των ράβδων είναι η παρακάτω.
Για διατομή μικρότερη των Alpha_min+2*L/30 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 1,
για διατομή μικρότερη των Alpha_min+2*L/6 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 2,
για διατομή μικρότερη των Alpha_min+3*L/5 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 3,
για διατομή μικρότερη των Alpha_min+4*L/5 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 7,
αλλιώς σχεδίασε με LineWidth = 9.
Όπου L= Alpha_max-Alpha_min με Alpha_max, Alpha_min να καθορίζονται από εμάς. Π.χ. στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε Alpha_max=1.5 και Alpha_min=0.1

8.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα για πλαίσιο με nx=2 και ny=1.

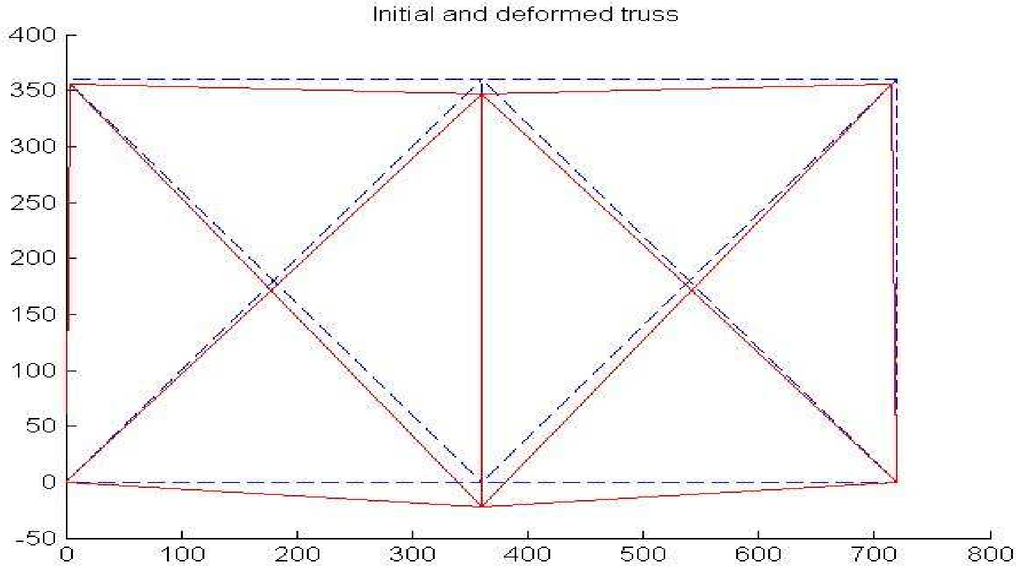
Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους και οι διατομές τους, μετά την βελτιστοποίηση, με περιορισμό βάρους 1000 μονάδες.

Ράβδος	**Sigma** (μονάδες)	**Διατομή** (μονάδες)
1	-3.21	0.10
2	0.00	0.10
3	4.83	0.10
4	-5.68	6.57
5	5.86	8.41
6	0.00	0.10
7	-5.68	6.53
8	4.83	0.10
9	-3.21	0.10
10	3.61	0.10
11	-3.61	0.10
Βέλτιστη ακαμψία *(μονάδες)*		*329.90*

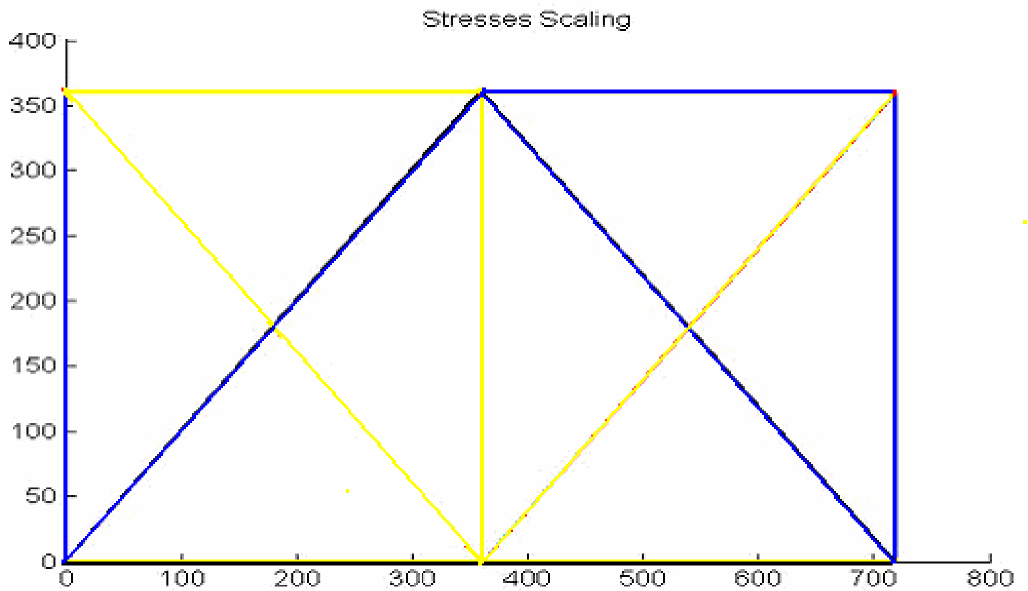
Πίνακας 7 *: Αποτελέσματα τάσεων και βέλτιστων διατομών (κεφ. 8)*

Παρατηρούμε ότι οι διατομές ικανοποιούν τους περιορισμούς μας.

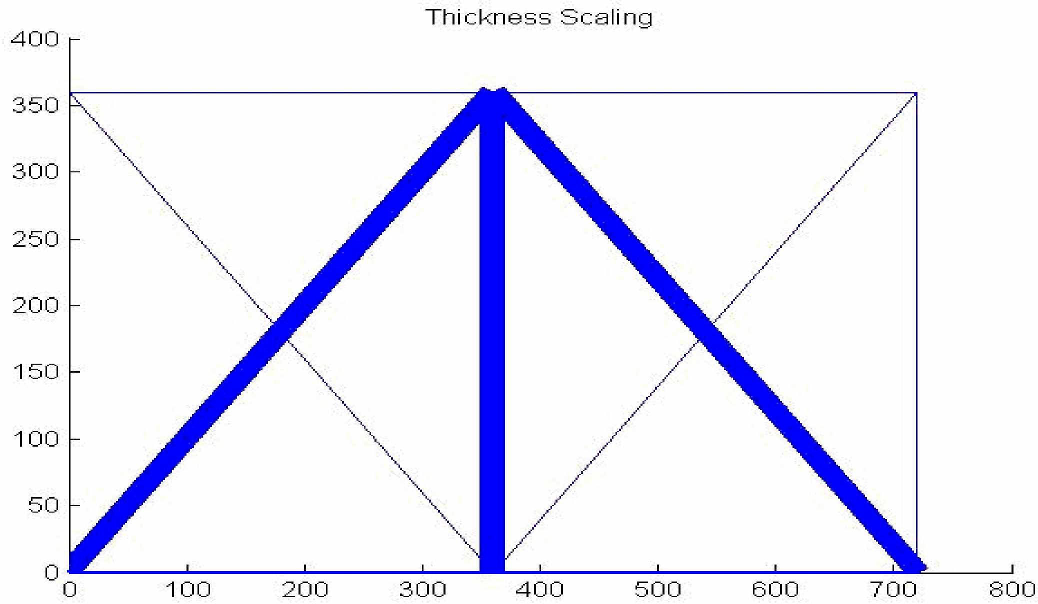
Ακολούθως έχουμε τα κάτωθι διαγράμματα. Το πρώτο γράφημα παρουσιάζει τις μετακινήσεις των ράβδων λόγω της εφαρμογής της δύναμης. Το δεύτερο γράφημα παρουσιάζει τις τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους. Το τρίτο γράφημα παρουσιάζει το πλαίσιό μας με τις διατομές των ράβδων που προήλθαν από την βελτιστοποίηση.



Σχήμα 26*: Μετατόπιση κόμβων πριν και μετά τη φόρτιση (κεφ. 8)*



Σχήμα 27: Τάσεις(κεφ. 8)

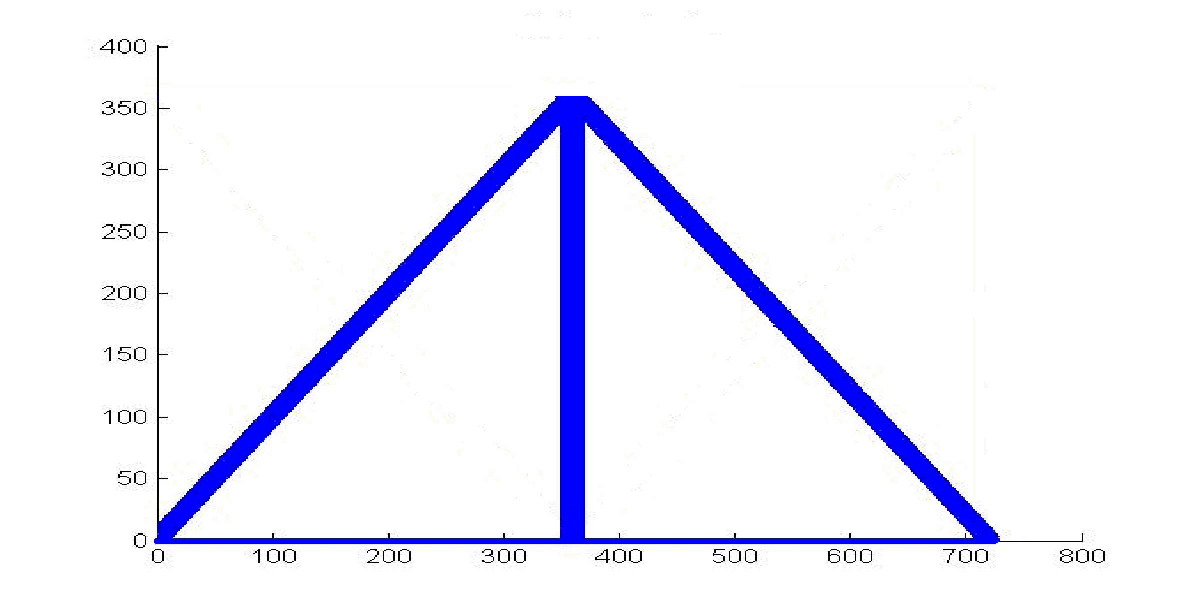


Σχήμα 28: Βέλτιστο πάχος διατομών(κεφ. 8)

Παρατηρούμε ότι οι μετακινήσεις των κόμβων είναι μικρές, στο χαρακτηριστικό παράδειγμά μας, γεγονός το οποίο, κύρια, οφείλεται στη σχετικά μικρή φόρτιση του πλαισίου μας.

Στο τελευταίο σχήμα παρατηρούμε που μπορεί να γίνει οικονομία υλικού. Φαίνεται ποιοι ράβδοι πρέπει να έχουν μεγάλο πάχος, γιατί δέχονται τις μεγαλύτερες τάσεις από την φόρτιση και ποιοι ράβδοι παραμένουν σχεδόν ανενεργοί, άρα μπορούμε να τους αποφύγουμε.

Τελικά μπορεί να κατασκευαστεί το πλαίσιο του παρακάτω σχήματος, που προσεγγίζει κατά πολύ μεγάλο βαθμό τη συμπεριφορά του αρχικού μου με μικρότερο κόστος κατασκευής όμως, λόγω οικονομίας υλικού.



Σχήμα 29: Τελική μορφή, με την βοήθεια της Τοπολογικής Βελτιστοποίησης (κεφ. 8)

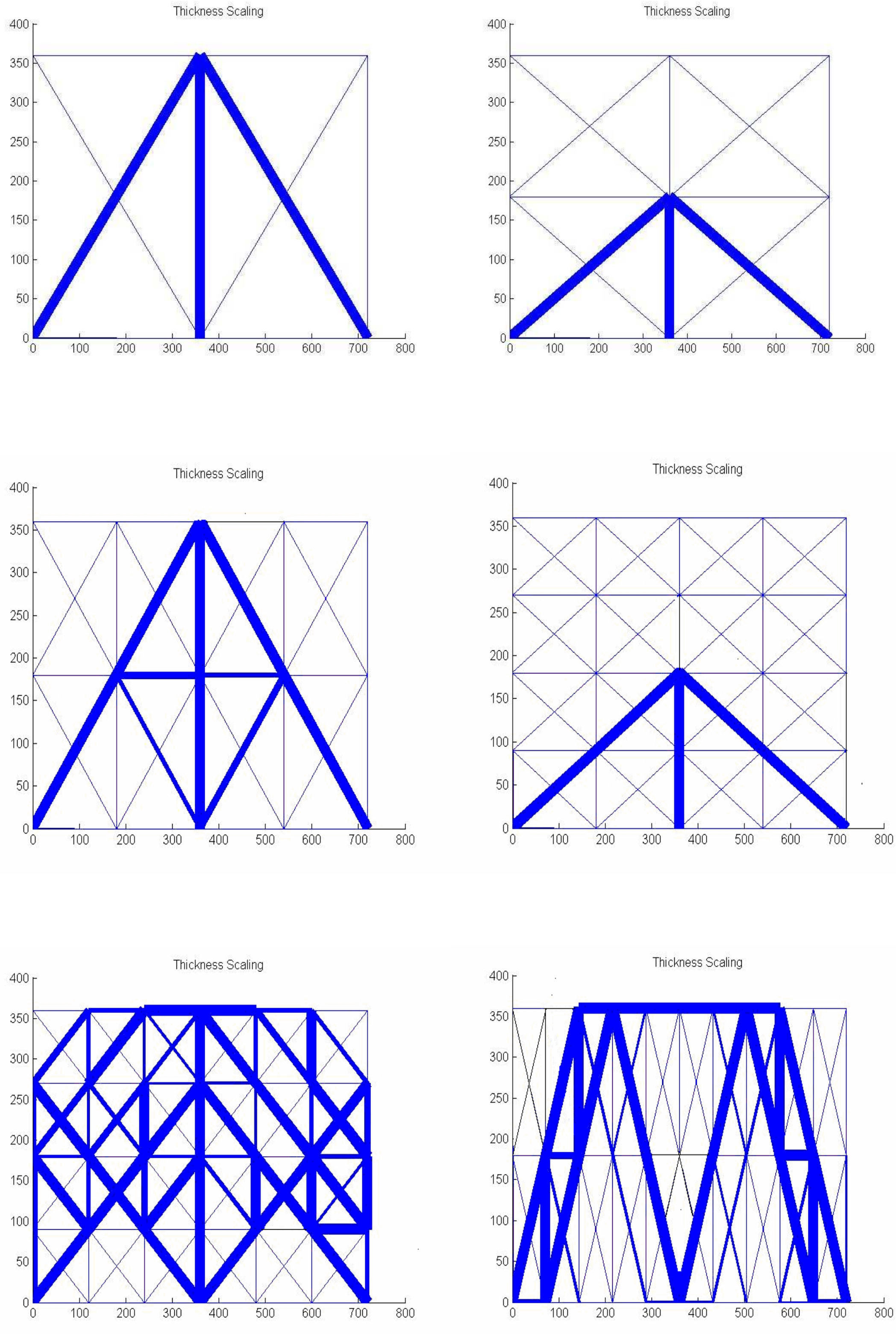
Στη συνέχεια, για να υπάρξει σύγκριση εφαρμόσαμε τον αλγόριθμο για αρκετά παραδείγματα. Τα αποτελέσματα που λάβαμε παρουσιάζονται παρακάτω.

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε, ότι καθώς αυξάνει η διακριτοποίηση της κατασκευής μειώνεται και η ακαμψία της (ελαχιστοποιούμε συνάρτηση κάμψης). Ειδική περίπτωση αποτελεί η δομή με nx=2 και ny=10, και γενικά οι δομές με nx πολύ μεγαλύτερο από το ny. Π.χ. $nx \leq 2$ και $ny \geq 9$, δηλαδή κατασκευές με πολλά περισσότερα ανοίγματα στον άξονα y. Σε αυτές τις περιπτώσεις παρατηρούμε σημαντική αύξηση της κάμψης.

Τέλος παρατηρούμε ότι οι χρόνοι προσομοίωσης δεν είναι απαγορευτικοί, εκτός από αρκετά μεγάλες κατασκευές με $nx \geq 9$ και $ny \geq 9$, που για να ολοκληρωθούν χρειάζονται αρκετές ώρες, έως ημέρες.

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης κάμψης πλαισίου, με περιορισμό βάρους				
nx	**ny**	**Βέλτιστη κάμψη**	**βήματα**	**χρόνος**
2	1	329.9 (exflg=5)	8	0.1
2	2	621.3 (exflg=5)	9	0.1
2	10	15,299.0 (exflg=0)	96	6
4	2	1,194.3 (exflg=0)	93	1.5
4	4	1,781.6 (exflg=0)	96	4
6	4	2,269.6 (exflg=0)	97	7
6	6	4,961.7 (exflg=0)	96	14
10	2	3,068.1 (exflg=0)	95	5

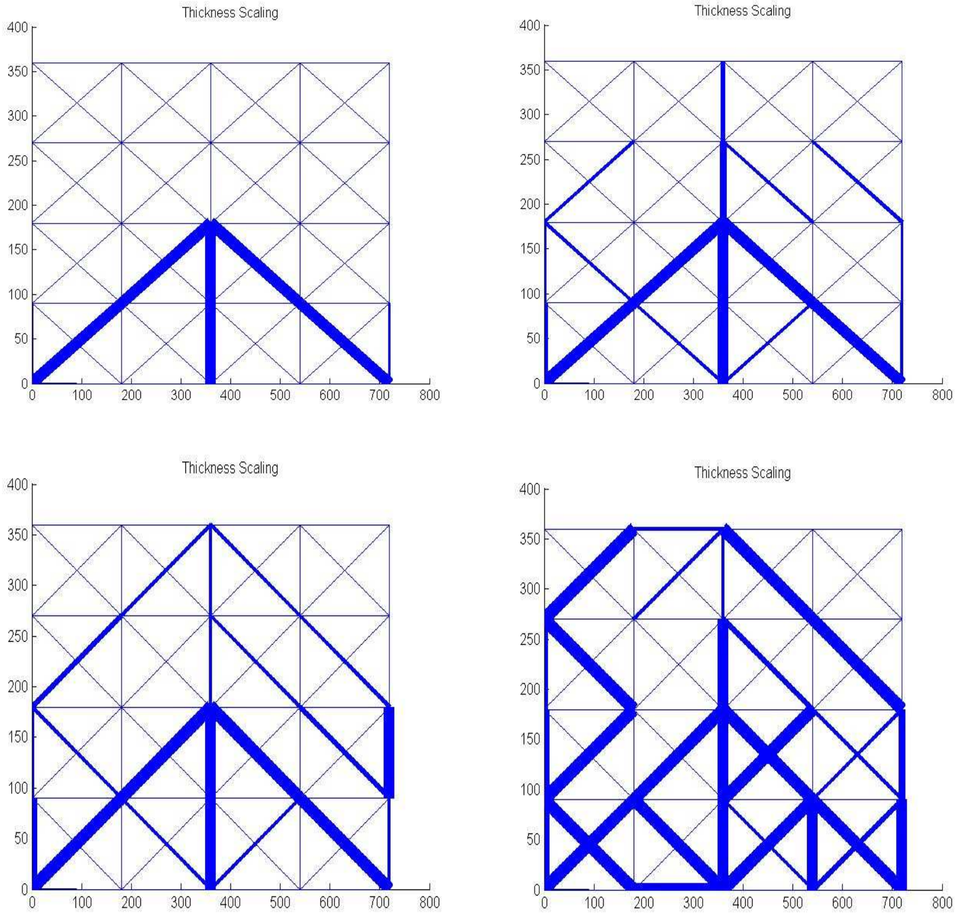
Πίνακας 8*: Συγκριτικά Αποτελέσματα συνάρτησης βάρους*



Σχήμα 30 : *Πλαίσια με διαφορετική διακριτοποίηση, βελτιστοποιημένες ως προς την κάμψη*

Αξίζει να προσθέσουμε την παρατήρηση, ότι καθώς χαλαρώναμε τον περιορισμό βάρους, δηλαδή αυξάναμε το διαθέσιμο υλικό μας παρατηρήσαμε την κατασκευή μας να "χτίζεται", όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

Ξεκινήσαμε με βάρος 600 μονάδων και το χαλαρώσαμε σταδιακά σε 1200 μονάδες, 1400 μονάδες και 2000 μονάδες, αντίστοιχα.



Σχήμα 31*: "Χτίσιμο" της κατασκευής μας, με σταδιακή χαλάρωση βάρους*

Καθώς αυξάνουμε τις μονάδες του βάρους θα καταλήγουμε σε δύσκαμπτες, βαριές κατασκευές. Η αύξηση αυτή θα σταματήσει όταν όλες οι διατομές των ράβδων χτυπήσουν το πάνω όριο που έχουμε θέσει (101 μονάδες).

9.0 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΒΑΡΟΥΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ (ΔΥΟ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ)

9.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το τελευταίο πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε, είναι, πάλι, η ελαχιστοποίηση του βάρους μιας κατασκευής, με άμεσο αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση του κόστους, αλλά με τη διαφορά, από το 7^{o} κεφάλαιο, ότι εδώ θα δώσουμε τελικά αποτελέσματα, έχοντας υπόψη δυο διαφορετικές (σε σημείο εφαρμογής και ασύγχρονες) φορτίσεις.

9.2 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Η μαθηματική έκφραση του παραπάνω προβλήματος είναι η παρακάτω:

$$\min \quad func1 = rho * x_i * l$$

$$\text{st} \quad \begin{array}{l} -5 \le Sigma \le 10, \\ -2 \le Utotal \le 2 \end{array}$$

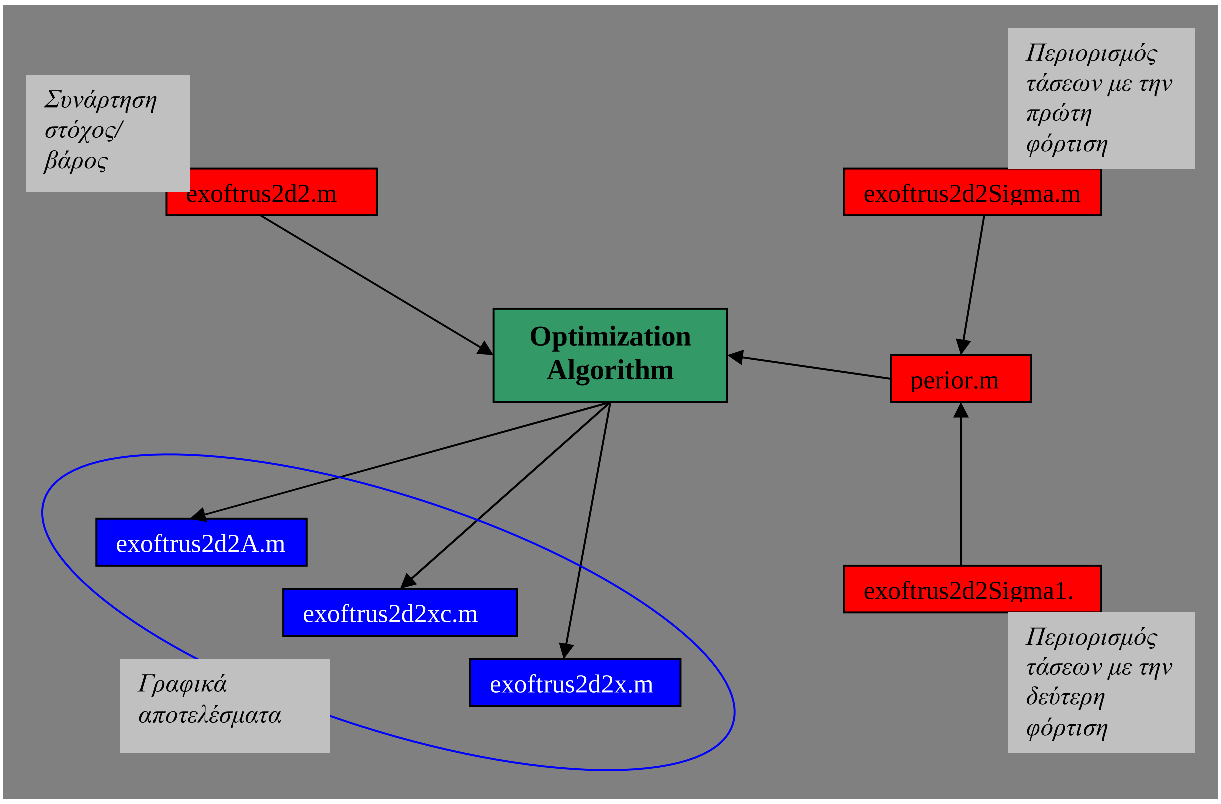
$$1 \le x_i \le 101$$

και εφαρμόζεται δύο φορές, για δύο διαφορετικές φορτίσεις ως προς το σημείο εφαρμογής τους, βγάζοντας στο τέλος συνθετικά αποτελέσματα.

Όπως και στο Κεφ. 7, τρέχουμε με το ίδιο τρόπο τον αλγόριθμο βελτιστοποίησής μας, με τη διαφορά ότι τώρα εξάγουμε αποτελέσματα με δυο υποπρογράμματα για τις διαφορετικές φορτίσεις. Τη μία φορά τρέχουμε το υποπρόγραμμα exoftrus2d2Sigma.m και την άλλη το exoftrus2d2Sigma1.m και εξάγουμε δύο αποτελέσματα για τις τάσεις που επηρεάζονται άμεσα από την αλλαγή στις φορτίσεις.

Άρα εισέρχονται και στους περιορισμούς δύο διαφορετικές τάσεις *Sigma* και *Sigma1*, που πρέπει να λάβουμε υπόψη.

Σε αυτή την περίπτωση σε αντίθεση με το το Κεφ. 7 δεν θέτουμε περιορισμούς μετακινήσεων.



Σχήμα 32 : Λειτουργία-Συνεργασία προγραμμάτων μας (κεφ. 9)

Ο αλγόριθμος που σχεδιάσαμε, όπως και στα προηγούμενο κεφάλαια, είναι ο παρακάτω:

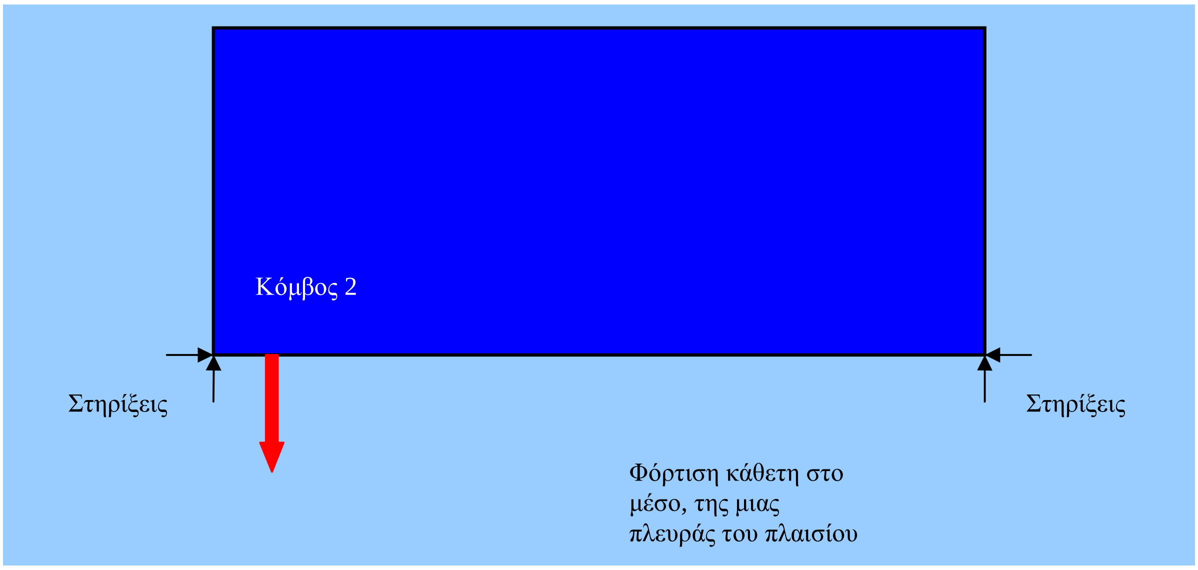
```
------------------------------------------------------------------------------------------------------------
%%Algorithmos Veltistopoiisis
 nx=…;
 ny=…;
 nelements = (nx*ny)*4+ny+nx;
 x0=ones(nelements,1);
 %Oria pou mporei na kinithoun oi times tou A
 lb=[ones(nelements,1)];
 ub=[];
 options =optimset('LargeScale', 'off');
[x,fval,exitflag,output]=fmincon(@exoftrus2d2,x0,[],[],[],[],lb,ub,@perior,optio
ns);
--------------------------------------------------------------------
```

Όπου nx, ny είναι ο αριθμός της υποδιαίρεσης του μήκους κάθε πλευράς του πλαισίου μας. Ο συνολικός αριθμός των ράβδων (nelements) καθώς και τα υπόλοιπα δεδομένα (αριθμός κόμβων, κ.α.) υπολογίζονται αυτόματα στο πρόγραμμά μας.

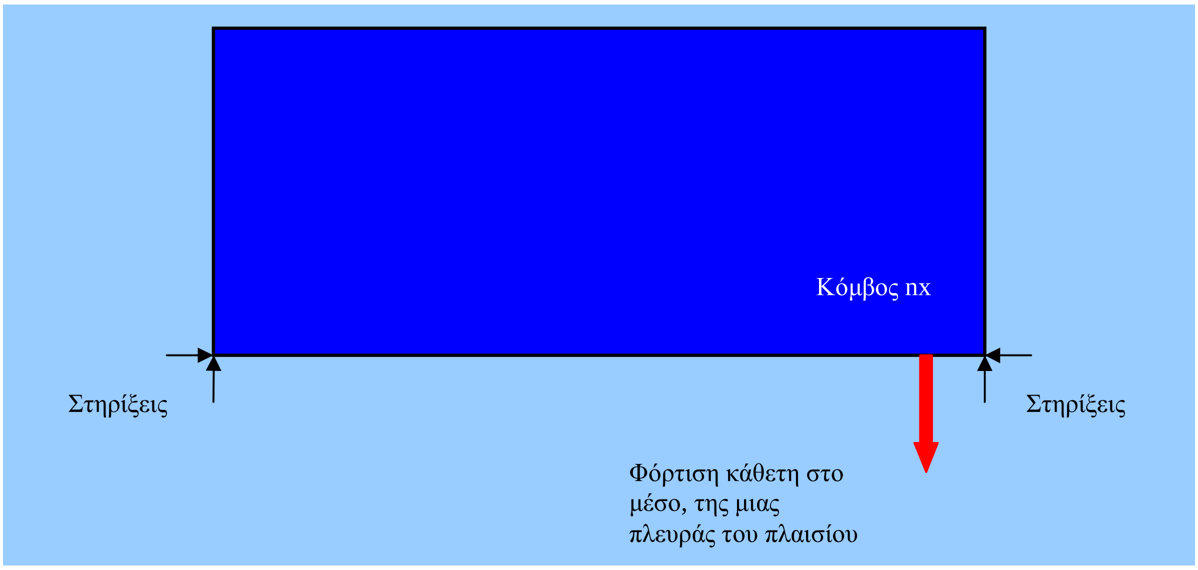
Αξίζει να σημειωθεί ότι θέσαμε περιορισμούς στις τιμές των διατομών των ράβδων 0.1 μονάδες (lb). Δεν μπορεί να υπάρξει μη-θετική διατομή.

Εφαρμόζουμε φόρτιση στους κόμβους 1 και nx , ξεχωριστά, κάθετη δύναμη με κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο 50 μονάδες.

Ως πρότυπη κατασκευή, για άλλη μια φορά, χρησιμοποιούμε ένα δυσδιάστατο πλαίσιο, το οποίο το φορτίζουμε, δύο φορές με μονόπλευρη, διαφορετική, δύναμη και δουλεύουμε πάνω σε αυτό.



Σχήμα 33 : Φόρτιση στον κόμβο 2

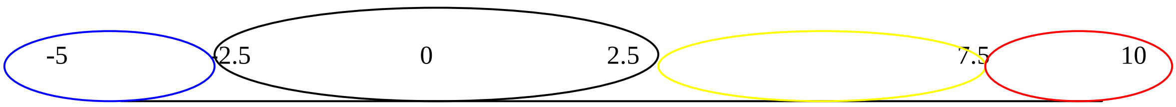


Σχήμα 34 :Φόρτιση στον κόμβο nx

Αφού υπολογιστούν οι βέλτιστες διατομές των ράβδων και με την βοήθεια των υποπρογραμμάτων exoftrus2d2x.m, exoftrus2d2xc.m, exoftrus2d2A.m, παρατηρούμε γραφικά τα αποτελέσματα της φόρτισης του πλαισίου μας, τις τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους (με καθορισμένη χρωματική κλίμακα), καθώς και το πάχος που έχουν οι ράβδοι (με καθορισμένη κλίμακα).

Η χρωματική κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε για τις τάσεις είναι η παρακάτω.

Stresses Scaling



Σχήμα 35: Χρωματική κλίμακα τάσεων (κεφ. 9)

Φαίνεται η διαβάθμιση των τάσεων του πλαισίου μας. Ειδικά από -5 έως 0, έχουμε θλίψη και από 0 έως 10 εφελκυσμό. Το όριο της θλίψης είναι μικρότερο από το όριο για εφελκυσμό γιατί πολύ ευκολότερα μια κατασκευή λυγίζει και οδηγούμαστε σε καταστάσεις δύσκολα προβλέψιμες, παρά σπάει.
Οι όταν οι τάσεις σχεδιάζονται με μαύρο χρώμα, αυτό αποτελεί πολύ καλό αποτέλεσμα για την ακαμψία της κατασκευής μας. Με τάσεις στο χρώμα μπλε ή κίτρινο σχετικά καλό αποτέλεσμα και τέλος με τάση στο χρώμα κόκκινο, άσχημο αποτέλεσμα.

Η δε κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε για το πάχος των ράβδων είναι η παρακάτω.
Για διατομή μικρότερη των Alpha_min+2*L/30 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 1,
για διατομή μικρότερη των Alpha_min+2*L/6 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 2,
για διατομή μικρότερη των Alpha_min+3*L/5 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 3,
για διατομή μικρότερη των Alpha_min+4*L/5 μονάδων, σχεδίασε με LineWidth = 7,
αλλιώς σχεδίασε με LineWidth = 9.
Όπου L= Alpha_max-Alpha_min με Alpha_max, Alpha_min να καθορίζονται από εμάς. Π.χ. στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε Alpha_max=1.5 και Alpha_min=0.1

9.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα για πλαίσιο με nx=4 και ny=1.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους και οι διατομές τους, μετά την βελτιστοποίηση.

Ράβδος	**Διατομή** (φορτ. στον 2)	**Διατομή** (φορτ. στον nx)	**Διατομή** (διπλή φόρτ.)
1	1.35	0.18	0.16
2	0.12	0.70	1.24
3	0.69	0.10	0.10
4	6.33	2.39	8.20
5	3.12	1.06	3.67
6	0.10	0.10	0.10
7	0.10	0.10	0.10
8	1.23	2.38	2.70
9	0.10	0.10	0.10
10	0.10	0.10	0.10
11	2.38	1.23	2.70
12	0.10	0.10	0.10
13	1.06	3.12	3.67
14	0.70	0.12	1.24
15	2.39	6.33	8.20
16	0.10	0.69	0.10
17	0.18	1.35	0.16
18	0.33	0.10	0.10
19	1.84	0.67	3.74
20	0.67	1.84	3.74
21	0.10	0.33	0.10
Βέλτιστο βάρος	*858.42*	*858.42*	*1251.60*

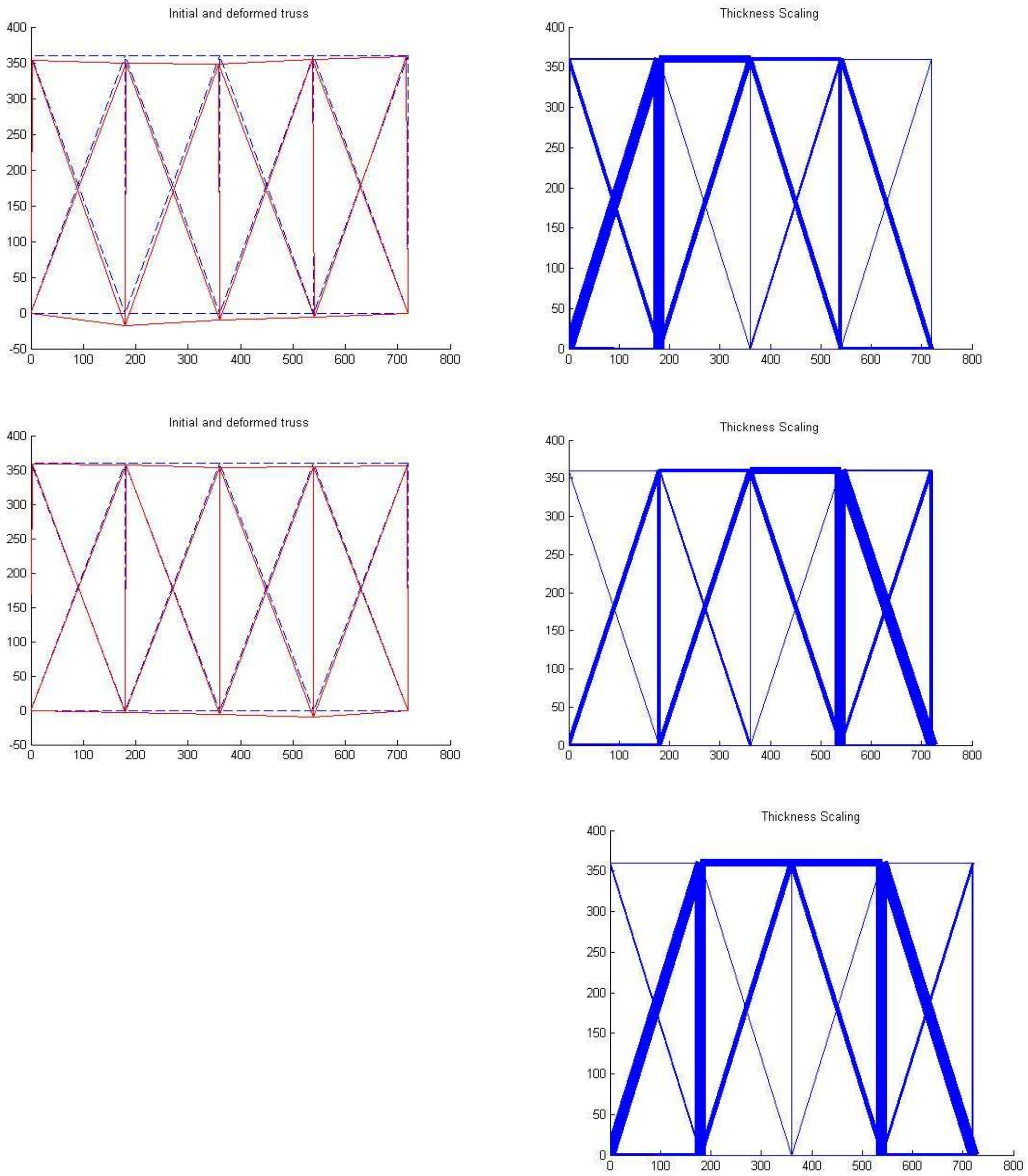
Πίνακας 9 *: Βέλτιστες διατομές για φόρτιση στους κόμβους 2, nx, διπλή φόρτιση*

Ράβδος	**Τάση** (φορτ. στον 2)	**Τάση** (φορτ. στον nx)	**Τάση** (διπλή φόρτ.)
1	-5.00	-5.00	-1.17
2	10.00	-5.00	-5.00
3	10.00	9.27	2.14
4	-5.00	-5.00	-1.67
5	10.00	10.00	3.24
6	-0.66	-4.33	-0.98
7	-5.00	9.78	4.35
8	10.00	-5.00	-5.00
9	-4.33	-4.33	-3.37
10	-4.33	-0.66	1.23
11	-5.00	10.00	5.13
12	9.78	-5.00	-0.58
13	10.00	10.00	10.00
14	-5.00	10.00	4.75
15	-5.00	-5.00	-5.00
16	9.27	10.00	9.13
17	-5.00	-5.00	-5.00
18	-5.00	-2.25	-0.95
19	-5.00	-5.00	-1.72
20	-5.00	-5.00	-5.00
21	-2.25	-5.00	-4.08

Πίνακας 10*: Τάσεις για φόρτιση στους κόμβους 2, nx, διπλή φόρτιση*

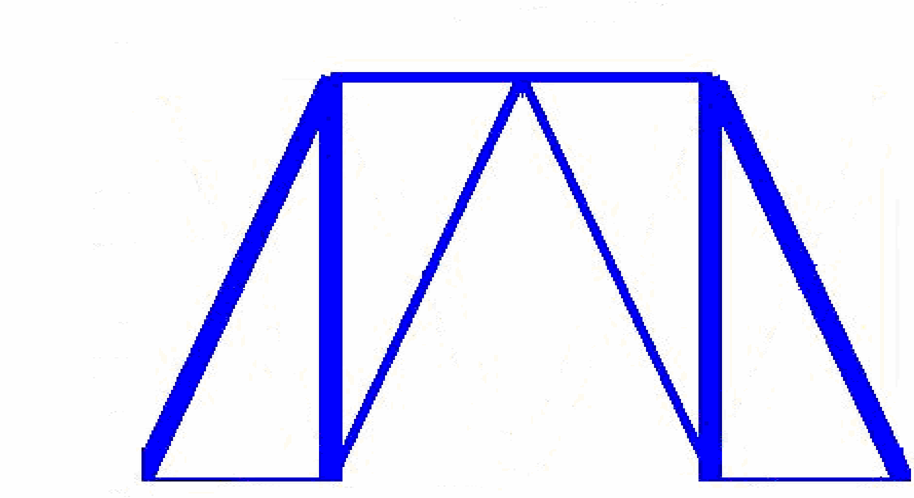
Παρατηρούμε ότι οι διατομές έχουν αυξηθεί σημαντικά στην περίπτωση της διπλής φόρτισης και τελικά φτάνουμε σε μια διαφορά βάρους της τάξης του 31.4 % . Ακόμη παρατηρούμε ότι και οι διατομές, και οι τάσεις ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέσαμε.

Ακολούθως έχουμε τα κάτωθι διαγράμματα. Η πρώτη σειρά παρουσιάζει φόρτιση στον κόμβο 2 και οι διατομές μετά την εφαρμογή της βελτιστοποίησης. Η δεύτερη σειρά παρουσιάζει φόρτιση στον κόμβο nx και οι διατομές μετά την εφαρμογή της βελτιστοποίησης. Η τρίτη σειρά παρουσιάζει φόρτιση στον κόμβο 2 και στον nx και οι διατομές μετά την εφαρμογή της βελτιστοποίησης.



Σχήμα 36: *Μετακινήσεις και βέλτιστες διατομές για φόρτιση στον κόμβο 2*, nx *και διπλή φόρτιση*, *αντίστοιχα*

Τελικά από τα παραπάνω, μέσω της τοπολογικής βελτιστοποίησης μπορούμε να κατασκευάσουμε το παρακάτω πλαίσιο που θα δείχνει ανοχή σε δυνάμεις 50 μονάδων, κάθετες προς τα κάτω, που εφαρμόζονται στους κόμβους 2 και nx. Το σημαντικό που επιτυγχάνουμε είναι ελαφρότερη κατασκευή.



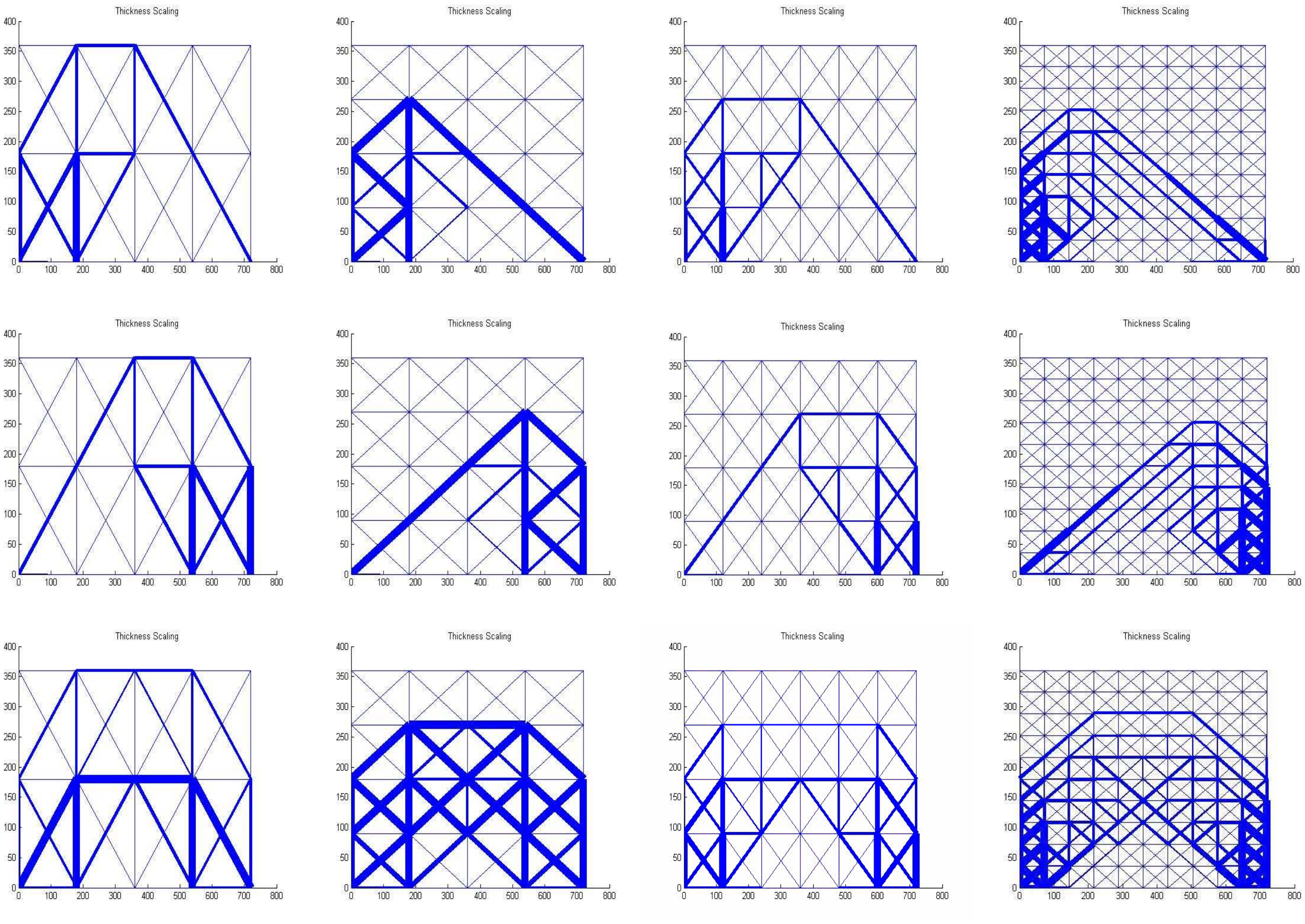
Σχήμα 37: *Τελική μορφή, με την βοήθεια της Τοπολογικής Βελτιστοποίησης (κεφ. 9)*

Παρακάτω παρουσιάζονται περισσότερα αποτελέσματα για την διπλή φόρτιση. Έχουμε επιπλέον σπατάλη υλικού από τη μία, αλλά ανθεκτική κατασκευή σε δύο περιπτώσεις φόρτισης από την άλλη.

Όσον αφορά τα γραφήματα, στην πρώτη γραμμή φαίνεται η βέλτιστη κατασκευή για φόρτιση στον κόμβο 2, στη δεύτερη γραμμή για φόρτιση στον κόμβο nx και στην τελευταία γραμμή για φόρτιση και στους δύο κόμβους.

Βελτιστοποίηση συνάρτησης βάρους με περιορισμούς τάσεων										
		Φόρτιση στον κόμβο 2			Φόρτιση στον κόμβο nx			Διπλή φόρτιση		
nx	**ny**	**Βέλτιστο βάρος**	**βήματα**	**Χρόνος (min.)**	**Βέλτιστο βάρος**	**βήματα**	**Χρόνος (min.)**	**Βέλτιστο βάρος**	**βήματα**	**χρόνος (min.)**
4	**1**	858.42	13	0.1	858.42	13	0.1	1251.80	11	0.1
4	**2**	720.28	9	0.5	720.28	9	0.5	1170.01	23	1
4	**4**	830.65	19	1.5	830.65	19	1.5	1287.30	17	2
6	**4**	643.64	14	2	643.64	14	2	1019.30	31	10
6	**6**	720.62	22	4	720.62	22	4	1049.00	40	45
10	**2**	576.77	48	5	576.77	48	5	898.44	16	5
10	**10**	624.80	33	100	624.80	33	100	911.08	-	1440

Πίνακας 11: *Αποτελέσματα Ελαχιστοποίησης βάρους για φόρτιση στους κόμβους 2, nx, διπλή φόρτιση*



Σχήμα 38: Αποτελέσματα των δύο διαφορετικών φορτίσεων, καθώς η σύνθεσή τους

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε τα αντίθετα αποτελέσματα από το Κεφ. 7, δηλαδή καθώς αυξάνει η διακριτοποίηση της κατασκευής μειώνεται το βάρος της. Αυτό ισχύει και στις δύο περιπτώσεις της μονής και της διπλής φόρτισης.

Επίσης, ο πίνακας μας δείχνει, ότι αν λάβουμε υπόψη μας και τις δύο φορτίσεις σχεδιάζουμε μια πιο βαριά κατασκευή, περίπου 30-35 % , όπως ήταν αναμενόμενο.

Τέλος παρατηρούμε ότι οι χρόνοι προσομοίωσης δεν είναι απαγορευτικοί για προσομοίωση μεγάλων πλαισίων.

10.0 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ολοκληρώνοντας θα θέλαμε τα τονίσουμε χρησιμότητα της διατριβής. Σχεδιάσαμε έναν εξαιρετικά ευέλικτο κώδικα που μπορεί να βρει εφαρμογές σε πολλούς κλάδους του κατασκευαστικού τομέα. Στην αρχή αυτού σχεδιάζουμε την κατασκευή, πάνω στην οποία θέλουμε να δουλέψουμε. Αυτό το σχεδιαστικό κομμάτι είναι έτσι φτιαγμένο, ώστε με πολύ μικρή προσπάθεια να μπορούμε να σχεδιάσουμε από γέφυρες, έως πλαίσια οχημάτων, αεροσκαφών, κ.α., σε δύο διαστάσεις πάντα.

Το πρώτο κομμάτι που επιλύσαμε, κυρίως, βρίσκει εφαρμογή σε περιπτώσεις που έχουμε περιορισμένους πόρους και προσπαθούμε να φτιάξουμε την πιο άκαμπτη κατασκευή. Πάρα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον μηχανικό, αφού, κατά ένα πολύ μεγάλο ποσοστό, οι διαγωνισμοί των έργων κερδίζονται με το “ποιος θα φτιάξει το βέλτιστο, με το μικρότερο κόστος”.

Παρομοίως το δεύτερο κομμάτι που επιλύσαμε βρίσκει τις ίδιες εφαρμογές, με τη διαφορά ότι πρέπει να φτιάξουμε την πιο άκαμπτη κατασκευή με δεδομένο κόστος. Ειδικά αυτό είναι ιδανικό εργαλείο σε περιπτώσεις όπου έχει οριστεί ένα ορισμένο ποσό από τον ιδιοκτήτη του έργου, εξ’ αρχής.

Το τελευταίο κομμάτι πάνω στο οποίο δουλέψαμε βρίσκει εφαρμογή σε περιοχές όπου δεν έχω ελεγχόμενη φόρτιση. Δηλαδή μπορεί φόρτιση να τεθεί σε διάφορα γνωστά σημεία της κατασκευής μας, χωρίς να μπορεί να υπάρξει πρόβλεψη γι’ αυτό. Σε αυτή την περίπτωση είμαστε υποχρεωμένοι να εξασφαλίσουμε ότι η κατασκευή μας θα αντέξει κάτω από διαφορετικές συνθήκες, έχοντας υπ’ όψη μας και την ελαχιστοποίηση του κόστους της. Η πιο γνωστή εφαρμογή αυτού είναι στα crash-test των οχημάτων. Εκεί για να εξασφαλίσουμε την μέγιστη ασφάλεια της καμπίνας των επιβατών, λαμβάνουμε υπόψη ότι το όχημα μπορεί να δεχθεί φορτίσεις (κρούση $\rightarrow$μεταβολή ορμής $\rightarrow$δύναμη, εφ’ όσον $\frac{\Delta P}{\Delta t}=F$) σε πολλά σημεία.

Τέλος, όσο παράξενο και αν ακούγεται, ο κώδικάς μας μπορεί να βγάλει αποτελέσματα, με πολύ μικρή τροποποίηση, ακόμη και για περιπτώσεις θερμικής φόρτισης κατασκευών (διαστολές μετάλλων από πυρκαγιές σε γέφυρες, κ.α.). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την απλή υπόθεση ότι μια θερμική φόρτιση, σε ένα στοιχείο της κατασκευής μας, ισοδυναμεί με δύο αντίθετες σε φορά δυνάμεις διαστολής.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Σε αυτό το σημείο θα εξηγήσουμε πως δουλεύουν τα διάφορα κομμάτια του κώδικα για την τελική βελτιστοποίηση.

```
%% automatic preparation
% length and number of segments in x direction
lx = 10; nx = 3;
% length and number of segments in y direction
ly = 10; ny = 3;
```

Σε αυτό το κομμάτι δίνουμε το μήκος και το πλάτος της κατασκευής μας, καθώς και από πόσα ανοίγματα αποτελείται το καθένα. Για παράδειγμα εδώ έχουμε μήκος και πλάτος 10 μονάδες και το καθένα από αυτά είναι διαιρεμένο σε 3 ίσα τμήματα.

```
%% number of nodes
nnodes = (nx+1)*(ny+1);
%% nodes
xnode=zeros(nnodes,1);
ynode=zeros(nnodes,1);
iel=0;
for i = 1:nx+1
    for j = 1:ny+1
        iel=(j-1)*(nx+1)+i;
        xnode(iel)=(lx/nx)*(i-1);
        ynode(iel)=(ly/ny)*(j-1);
    end
end
```

Σε αυτό το σημείο, αρχικά, υπολογίζεται ο αριθμός των κόμβων του πλαισίου μας. Στη συνέχεια δείχνουμε πως πρέπει να τοποθετηθούν οι κόμβοι στο εσωτερικό του και η σειρά αρίθμισης.

```
%% number of elements
nelements = (nx*ny)*4+ny+nx;
%% connectivity of elements
cnct = zeros(nelements,2);
jel=0;
for ii=1:nx
    for jj=1:ny
        jel=((jj-1)*nx+(ii-1))*4;
         cnct(jel+1,1) = jj*(nx+1)+ii;
         cnct(jel+1,2) = (jj-1)*(nx+1)+ii;
         cnct(jel+2,1) = (jj-1)*(nx+1)+ii;
         cnct(jel+2,2) = (jj-1)*(nx+1)+ii+1;
         cnct(jel+3,1) = jj*(nx+1)+ii;
         cnct(jel+3,2) = (jj-1)*(nx+1)+ii+1;
         cnct(jel+4,1) = (jj-1)*(nx+1)+ii;
         cnct(jel+4,2) = jj*(nx+1)+ii+1;

    end
end
jel=nx*ny*4;
for jj = 1:ny
        jel= jel+1;
         cnct(jel,1) = (nx+1)*jj;
         cnct(jel,2) = (nx+1)*(jj+1);
end

jel=nx*ny*4+ny;
for ii = 1:nx
       jel=jel+1;
         cnct(jel,1) = ny*(nx+1)+ii;
         cnct(jel,2) = ny*(nx+1)+ii+1;
end
```

Εδώ υπολογίζουμε τον αριθμό των στοιχείων που ενώνουν τους κόμβους, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται.

```
%% loading
% number of loads
nuload = 1;
% number of node, x - y loadings
loads = zeros(nuload,3);
loads(1,1) = (nx+2)/2;
loads(1,2) = 0;
loads(1,3) = -1000;
```

Δίνουμε των αριθμό των φορτίσεων, το σημείο εφαρμογής τους, την κατεύθυνσή τους και το μέτρο τους.

```
%% boundary conditions
% number of boundary conditions
nubcs = 2;
% number of node, x - y displs (code 1 = 0, code 0 = free)
bcs = zeros(nubcs,3);
bcs(1,1) = 1;
bcs(1,2) = 1;
bcs(1,3) = 1;
bcs(2,1) = nx+1;
bcs(2,2) = 1;
bcs(2,3) = 1;
```

Δίνουμε τον αριθμό των συνοριακών συνθηκών (στηρίξεις), το σημείο εφαρμογής και το είδος της στήριξης.

```
%% solving the system of equations
Utotal=Ktotal\Ftotal;
```

Εδώ επιλύεται το σύστημα των εξισώσεών μας.

```
%% calculation of optimization functions
%func1 = 0;
func2 = 0;
rho = 1;
for i=1:nelements
    % for element i
    % first node number cnct(i,1)
    iarxis = cnct(i,1);
    itelous = cnct(i,2);
% first node coordinates xnode(cnct(i,1)), ynode(cnct(i,1))
    P1 = [ xnode(cnct(i,1)), ynode(cnct(i,1)) ];
    P2 = [ xnode(cnct(i,2)), ynode(cnct(i,2)) ];
  l = norm(P2-P1);
alpha = atan2(P2(2)-P1(2),P2(1)-P1(1));
lamb1 = [-cos(alpha) -sin(alpha) cos(alpha) sin(alpha)];
%
displnodes    =    [    Utotal(2*(iarxis-1)+1)    Utotal(2*(iarxis-1)+2)
Utotal(2*(itelous-1)+1) Utotal(2*(itelous-1)+2) ]';
sigma(i) = (E(i)/l)*lamb1*displnodes;
force(i) = sigma(i)*A(i);
%func1 = func1+rho*A(i)*l;
for j=1:2*nnodes
    func2=func2+Utotal(j)*Ftotal(j);
    %for maximization
    %func2 = -func2;
end
end
func2
%func1
```

Σε αυτό το σημείο δίνουμε τις συναρτήσεις ως προς βελτιστοποίηση. Ακόμη εδώ υπολογίζονται και άλλα μεγέθη, όπως οι τάσεις.

```
%% printing the solution
%
newplot
 hold on
for i=1:nelements
 x = [xnode(cnct(i,1)) xnode(cnct(i,2)) ];
 y = [ynode(cnct(i,1)) ynode(cnct(i,2)) ];
 ...
 plot(x,y,'...',...)
end
 title('...')
 hold off
```

Σε αυτό το σημείο λαμβάνουμε τα γραφικά αποτελέσματα (διατομές, τάσεις, παραμορφώσεις)

```
%% Routina Periorismwn
function [c, ceq] = confun(A)
nx = 3;
ny = 3;
nelements = (nx*ny)*4+ny+nx;
numbofvariables = (nx*ny)*4+ny+nx;
c = zeros(nelements,1);
ceq = zeros(nelements,1);
Sigma= zeros(nelements,1);

% Nonlinear inequality constraints

    [sigma] = exoftrus2d2sigma(A);
    A;
    sigma;
    % gia periorismous sigma <= 10 kai -5 <= sigma
    c = [sigma-10 ; -sigma-5]

% Nonlinear equality constraints
```

```
ceq = [];
c;
end
```

Είναι το σημείο που θέτουμε τους περιορισμούς μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Chandrupatla, Tirupathi R. and Belegundu, Ashok D., "*Introduction to Finite Elements in Engineering*",3rd edition, Prentice Hall, 2002

Kirsch U., "*Structural Optimization, Fundamentals and Applications*", Springer-Verlag, …

Mordecai A., "*Nonlinear Programming: Analysis and Methods*", Dover Publishing, 2003

Nocedal J. and Wright S. J., "*Numerical Oprimization*", Springer-Verlag., 1999

Papalambros P., Wilde D., "*Principles of Optimal Design, Modeling and Computation*", Cambridge University Press, 1988

Perez R.E., Behdinan K., "*Particle swarm approach for structural design optimization*", Toronto, 2006

Ιστοσελίδες

http://www.math.tu-berlin.de

http://documents.wolfram.com/mathematica/BuildingFunctions/AdvancedDocumentation/Optimization.html