



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ – ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕ ΘΕΜΑ:

**ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΝΗΜΕΙΑΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΜΕ
ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**



Δημήτριος Κ. Ταμβάκης

Εξεταστική Επιτροπή: Κωνσταντίνος Προβιδάκης, Καθηγητής
(Επιβλέπων)

Δημήτριος Σωτηρόπουλος, Καθηγητής

Ιωάννης Τσομπανάκης Επίκουρος

Χανιά, Νοέμβριος 2008

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΝΗΜΕΙΑΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Δημήτριος Κ. Ταμβάκης

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Προβιδάκης, Γενικό Τμήμα

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την αριθμητική προσομοίωση της δυναμικής φόρτισης μιας μνημειακής κατασκευής και πιο συγκεκριμένα μιας λιθόκτιστης, τοξωτής γέφυρας κατά τη διάρκεια ενός σεισμού. Η επίλυση του προβλήματος έγινε με τη βοήθεια του υπολογιστικού συστήματος MSC.MARC 2005 της εταιρίας Marc Analysis Corporation, το οποίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση προβλημάτων της μηχανικής. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης της δυναμικής φόρτισης που προέκυψαν, δίνουν ικανοποιητικές πληροφορίες για τα διάφορα φαινόμενα που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια ενός σεισμού, σε μια κατασκευή αυτού του είδους.

Οι πληροφορίες αυτές θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την κατανόηση της συμπεριφοράς των χρησιμοποιούμενων υλικών, της επιλεγείσης γεωμετρίας, αλλά και των τεχνικών κατασκευής που χρησιμοποιούνταν την εποχή που κατασκευάστηκε ή θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την αποκατάσταση και διατήρηση παρόμοιων κατασκευών.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ο γράφων επιθυμεί να ευχαριστήσει τον καθηγητή του Προβιδάκη Κωνσταντίνο, Καθηγητή στο Πολυτεχνείο Κρήτης, για την καθοδήγησή του στην εκπόνηση και συγγραφή της εργασίας.

Ακόμη τη Σταυρουλάκη Μαρία, Λέκτορα στο Πολυτεχνείο Κρήτης επίσης, για την πολύτιμη βοήθειά της. Τέλος την Κουκαδάκη Μαρία, για την παρότρυνσή της.

Τέλος θα ήθελα να αφιερώσω την παρούσα εργασία στους γονείς μου Κοσμά και Μαριγώ. Τους ευχαριστώ για όλα.

Περιεχόμενα

Ευρετήριο Σχημάτων	6
Εισαγωγή	10
Κεφάλαιο 1: Οι Σεισμοί και η Δυναμική Συμπεριφορά των Λιθόκτιστων Τοξωτών Κατασκευών.....	21
Γενικά.....	21
1.1 Η κίνηση των λιθοσφαιρικών πλακών.....	21
1.2 Τύποι Σεισμών	22
Ανάλογα με τον τρόπο γένεσης	22
Ανάλογα με το Βάθος	23
1.3 Σεισμικά κύματα	24
1.4 Η μέτρηση των σεισμών	26
1.5 Οι κλίμακες των σεισμών	27
1.6 Η ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΛΙΘΟΚΤΙΣΤΩΝ ΤΟΞΩΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ	30
Η δυναμική συμπεριφορά της κατασκευής	35
Ελεύθερη ταλάντωση.....	35
Ημιτονοειδής ταλάντωση.....	36
Κεφάλαιο 2: Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.....	38
Γενικά.....	38
2.1 Μεθοδολογία Εφαρμογής Της Μεθόδου Των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	43
2.1.1. Περιγραφή του προβλήματος και εισαγωγή γεωμετρίας φορέα.....	43
2.1.2. Διακριτοποίηση του φορέα	43
2.2 Τεχνολογία πεπερασμένων στοιχείων στο λογισμικό πρόγραμμα MSC.MARC 2005.....	45
2.2 Ανάλυση επαφής.....	49
2.2.1 Γενικά.....	49
2.2.2 Αριθμητικές μέθοδοι στην ανάλυση επαφής	49
Πολλαπλασιαστές Lagrange	49
Μέθοδοι ποινής.....	50
Υβριδικές και ανάμεικτες μέθοδοι.....	50
Ευθείς περιορισμοί.....	51
2.2.3 Ορισμός των προς επαφή σωμάτων.....	51

2.2.4 Κίνηση των προς επαφή σωμάτων	53
2.2.5 Ανίχνευση της επαφής	55
2.2.6 Εφαρμογή περιορισμών	57
2.2.7 Μοντελοποίηση της τριβής	60
2.3 Επιλογή τύπου πεπερασμένων στοιχείων	62
2.3.1 Γενικά.....	62
2.3.2 Τύποι στοιχείων	63
2.3.3 Τα ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία	63
2.4 Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων.....	65
2.4.1 Γενικά.....	65
2.4.2 Η μέθοδος Newton – Raphson.....	65
2.4.3 Η τροποποιημένη μέθοδος Newton – Raphson	66
Κεφάλαιο 3: Η μοντελοποίηση του προβλήματος.....	68
Γενικά.....	68
3.1 Ιστορική αναδρομή	68
3.2 Η μοντελοποίηση της κατασκευής	70
3.3 Η μοντελοποίηση της επαφής.....	73
3.4 Ορισμός συνοριακών συνθηκών.....	75
3.6 Ορισμός των ιδιοτήτων του υλικού	77
3.7 Ορισμός των συνθηκών ανάλυσης	79
Κεφάλαιο 4: Τα αποτελέσματα της ανάλυσης και η επεξεργασία τους.....	83
Γενικά.....	83
4.1 Πρώτο σενάριο (Δομικά στοιχεία τόξου: Touch, τόξο – τοιχοποιία: Glue).....	84
4.2 Δεύτερο σενάριο (Δομικά στοιχεία τόξου: Glue, τόξο – τοιχοποιία: Touch) ...	88
4.3 Τρίτο σενάριο (Δομικά στοιχεία τόξου: Touch, τόξο – τοιχοποιία: Touch)	92
4.4 Τέταρτο σενάριο (Τόξο, χωρίς Ενισχυτική Τοιχοποιία) – Ανακεφαλαίωση.....	97
4.5 Επεξεργασία Αποτελεσμάτων	99
Γενικά συμπεράσματα	107
Βιβλιογραφία	109

Ευρετήριο Σχημάτων

Εικόνα 1: Καλλιτεχνική απεικόνιση της γέφυρας του «Ουράνιου Τόξου» [12].	15
Εικόνα 2: Η πραγματική κατασκευή και το μοντέλο ενός τόξου [14].	16
Εικόνα 3: Το μοντέλο γέφυρας 2 τόξων και οι τοποθεσίες των βλαβών [15].	17
Εικόνα 4: Άποψη της προκύπτουσας παραμόρφωσης στον κάνναβο των πεπερασμένων στοιχείων [17].	18
Εικόνα 1.5: Γραφική απεικόνιση των δύο κύριων ειδών σεισμικών κυμάτων	24
Εικόνα 1.6: Γραφική απεικόνιση των επιφανειακών, σεισμικών κυμάτων.	25
Εικόνα 1.7: Παράδειγμα σειсмоγράμματος.	27
Εικόνα 1.8: Μεγέθη σεισμών και ισοδύναμη ενέργεια TNT.	29
Εικόνα 1.9: Η προς μελέτη διάταξη [21].	31
Εικόνα 1.10: Η γραμμή τάσεων κατά το πρώτο βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας και η πραγματική γραμμή τάσεων στο σημείο της κατάρρευσης[21].	33
Εικόνα 1.11: Διάγραμμα του λ προς το s/R για διαφορετικές τιμές του $\beta[21]$.	34
Εικόνα 1.12: Διάγραμμα θέσης των κενών β_i/β προς το s/R για διαφορετικές τιμές του $\beta[21]$.	34
Εικόνα 1.13: Ο μηχανισμός κατάρρευσης[21].	35
Εικόνα 1.14: Διάγραμμα ελεύθερης ταλάντωσης φ_v ως προς s/R για διαφορετικές τιμές του $\beta[21]$.	36
Εικόνα 1.15: Το πλάτος a_v ως προς την περίοδο T_a για $t_a = T_a/2$, $t_a = T_a$, $t_a \gg T_a[21]$.	37
Εικόνα 2.1: Συναρτήσεις - οροφές και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους [30].	40
Εικόνα 2.2: Παραμορφώσιμο σώμα [30].	51
Εικόνα 2.3: Διάφορα είδη γραμμών και επιφανειών για τη δημιουργία μη παραμορφώσιμων σωμάτων.	52
Εικόνα 2.4: Προσανατολισμός τομέων μη παραμορφώσιμων σωμάτων [30].	53
Εικόνα 2.5: Μη παραμορφώσιμη επιφάνεια ελεγχόμενη από ταχύτητα [30].	54
Εικόνα 2.6: Μη παραμορφώσιμη επιφάνεια ελεγχόμενη από φορτίο [30].	55
Εικόνα 2.7: Ανοχή επαφής [30].	56
Εικόνα 2.8: Δοκιμαστική μετατόπιση με εισχώρηση [30].	56
Εικόνα 2.9: Σύστημα που έχει υποστεί μετατροπή (2D) [30].	58
Εικόνα 2.10: Γωνιακές συνθήκες για εξωτερική και εσωτερική πλευρά αντίστοιχα (2D) [30].	58

Εικόνα 2.11: Γωνιακές συνθήκες για εσωτερική και εξωτερική πλευρά αντίστοιχα (3D) [30].	59
Εικόνα 2.12: Το μοντέλο τριβής Coulomb [30].	61
Εικόνα 2.13: Η πορεία σύγκλισης της μεθόδου Newton – Raphson [30].	66
Εικόνα 2.14: Η σύγκλιση της τροποποιημένης μεθόδου Newton – Raphson [30].	67
Εικόνα 3.17: Άποψη του τόξου του γεφυριού της Πλάκας.	69
Εικόνα 3.18: Άποψη του καταστρώματος του γεφυριού της Πλάκας.	70
Εικόνα 3.3: Η γεωμετρία της προς μελέτη κατασκευής και ο ορισμών των ακμών στο περιβάλλον εργασίας του Mentat.	71
Εικόνα 3.4: Άποψη του κάρναβου των πεπερασμένων στοιχείων στα οποία διακριτοποιήθηκε το αρχικό σχέδιο.	72
Εικόνα 3.5: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της εντολής <i>Renumber</i> .	73
Εικόνα 3.6: Άποψη των 23 συνολικά σωμάτων τα οποία ορίζουν την προς μελέτη κατασκευή.	74
Εικόνα 3.7: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της εντολής <i>Contact Table</i> , με έμφαση στις εντολές ορισμού και ανίχνευσης της επαφής.	75
Εικόνα 3.8: Οι συνοριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος.	76
Εικόνα 3.9: Το γράφημα των μετατοπίσεων στον x άξονα του σεισμού της Κοζάνης το 1995.	77
Εικόνα 3.10: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας του ορισμού μηχανικών ιδιοτήτων, της επιλογής <i>Material Properties</i> για το ισότροπο υλικό του τόξου.	78
Εικόνα 3.11: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας του ορισμού ιδιοτήτων εμφάνισης ρωγμών και απόσβεσης αντίστοιχα, της επιλογής <i>Material Properties</i> για το ισότροπο υλικό της ενισχυτικής τοιχοποιίας.	78
Εικόνα 3.12: Εικόνα του ορισμού διαφορετικών υλικών στην κατασκευή.	79
Εικόνα 3.13: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής <i>Loadcase (Mechanical Dynamic Transient)</i> .	80
Εικόνα 3.14: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής <i>Loadcase</i> με έμφαση στο διαφορετικό πλήθος των χρονικών βημάτων επίλυσης.	81
Εικόνα 3.15: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας του μενού <i>Job (Mechanical Dynamic Transient)</i> .	81
Εικόνα 3.16: Το στοιχείο 11 και τα αντίστοιχα σημεία ολοκλήρωσης Gauss [30].	82
Εικόνα 4.19: Οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα x για το τελευταίο βήμα	

της ανάλυσης.	84
Εικόνα 4.20: Οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα y για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.	85
Εικόνα 4.21: <i>Contact Status</i> στην επάνω αριστερή πλευρά του τόξου.	86
Εικόνα 4.22: Οι ισοδύναμες τάσεις στην κατασκευή κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.	87
Εικόνα 4.23: Η πυκνότητα της ενέργειας από τη συνολική παραμόρφωση της κατασκευής κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.	87
Εικόνα 4.24: Οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα x για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.	88
Εικόνα 4.25: Οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα y για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.	89
Εικόνα 4.26: <i>Contact Status</i> στην επάνω αριστερή πλευρά του τόξου για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.	90
Εικόνα 4.27: Οι ισοδύναμες τάσεις στην κατασκευή κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.	91
Εικόνα 4.28: Η πυκνότητα της ενέργειας από τη συνολική παραμόρφωση της κατασκευής κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.	91
Εικόνα 4.29: Οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα x κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.	93
Εικόνα 4.30: Οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα y κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.	93
Εικόνα 4.31: <i>Contact Status</i> μεταξύ των δομικών στοιχείων του τόξου και μεταξύ τόξου και τοιχοποιίας, για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.	94
Εικόνα 4.32: Οι ισοδύναμες τάσεις στην κατασκευή κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.	95
Εικόνα 4.33: Η πυκνότητα της ενέργειας από τη συνολική παραμόρφωση της κατασκευής κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.	96
Εικόνα 4.34: <i>Contact Status</i> μεταξύ των δομικών στοιχείων του τόξου για το βήμα 71 της ανάλυσης.	97
Εικόνα 4.35: Η συνισταμένη των μετακινήσεων της κατασκευής κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης (α: 1 ^ο σενάριο, β: 2 ^ο σενάριο, γ: 3 ^ο σενάριο).	98
Εικόνα 4.36(α) Το διάγραμμα του σεισμού και (β) το διάγραμμα των μετατοπίσεων στον άξονα x του κόμβου 1105.	99

Εικόνα 4.37: Συγκριτικό διάγραμμα της συνισταμένης των μετατοπίσεων για τρεις κόμβους της κατασκευής (1105, 6699 και 7691).	100
Εικόνα 4.38: Οι μετατοπίσεις των κόμβων 6699 και 7691 στον άξονα x, καθ' όλη τη διάρκεια της δυναμικής φόρτισης.	101
Εικόνα 4.39: Οι μετατοπίσεις των κόμβων 6699 και 7691 στον άξονα y, καθ' όλη τη διάρκεια της δυναμικής φόρτισης.	101
Εικόνα 4.40: Συγκριτικό διάγραμμα των μετατοπίσεων στον άξονα x των κόμβων οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων.	102
Εικόνα 4.41: Συγκριτικό διάγραμμα των μετατοπίσεων στον άξονα y των κόμβων οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων.	103
Εικόνα 4.42: Συγκριτικό διάγραμμα των κάθετων δυνάμεων επαφής των κόμβων, οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων.	104
Εικόνα 4.43: Συγκριτικό διάγραμμα των ισοδύναμων τάσεων των κόμβων, οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων.	105
Εικόνα 4.44: Συγκριτικό διάγραμμα της πυκνότητας της συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης των κόμβων, οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων.	106

Εισαγωγή

Σε ολόκληρο τον κόσμο υπάρχουν λιθόκτιστες κατασκευές οι οποίες κατασκευάστηκαν πριν από πολλούς αιώνες, αλλά και σε νεότερα χρόνια ή κατασκευάζονται ακόμη και σήμερα. Είναι πολλές οι περιπτώσεις που αυτές οι λιθόκτιστες κατασκευές αποτελούσαν ή συνεχίζουν να αποτελούν μέρος της υποδομής διαφόρων περιοχών ή της πολιτιστικής τους κληρονομιάς. Πέρα από τους διαφόρους λόγους για τους οποίους αυτές οι κατασκευές δημιουργήθηκαν, είναι αναμφισβήτητο γεγονός ότι υπάρχει ανάγκη για τη διατήρησή τους.

Συνεπώς η μελέτη και η ανάλυση αυτών των κατασκευών είναι πάντοτε επίκαιρη για την καλύτερη κατανόηση των φαινομένων που τις διέπουν, των υλικών από τα οποία φτιάχτηκαν, των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή τους και για τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρονται όταν υπόκεινται σε φορτίσεις και δη δυναμικές φορτίσεις, όπως είναι οι σεισμοί.

Στη χώρα μας αυτού του είδους οι κατασκευές ευρίσκονται διάσπαρτες σε όλες τις γεωγραφικές περιοχές και σε αυτές ανήκουν αρχαία κτίσματα, εκκλησίες διαφόρων περιόδων, φρούρια, κτίρια γενικώς κ.α. Μια ξεχωριστή κατηγορία λιθόκτιστων κατασκευών αποτελούν τα γεφύρια της Ηπείρου. Με αυτό τον χαρακτηρισμό είναι σύνηθες να αποκαλούνται όλες οι λιθόκτιστες τοξωτές γέφυρες, οι οποίες βρίσκονται σχεδόν σε όλη την ηπειρωτική Ελλάδα, αλλά και στα υπόλοιπα κράτη της Βαλκανικής χερσονήσου και της γειτονικής περιοχής.

Αυτές οι γέφυρες κατασκευάστηκαν κυρίως κατά τα Βυζαντινά χρόνια, κατά τη διάρκεια της τουρκικής κατοχής, αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα. Μια από αυτές τις κατασκευές επελέγη για να μελετηθεί στα πλαίσια της παρούσης εργασίας.

Πρόκειται για το «γεφύρι της Πλάκας», του οποίου η κατασκευή ξεκίνησε το 1863 και ενώνει τις όχθες του ποταμού Άραχθου μέσα στα διοικητικά όρια του Νομού Ιωαννίνων, στην κοινότητα Ραφταναίων, στο γεωγραφικό διαμέρισμα της Ηπείρου. Για τη μοντελοποίηση και ανάλυση της κατασκευής χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πακέτο MSC.MARC 2005 της εταιρίας Marc Analysis Corp. Το πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιεί τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση κατασκευών, και μπορεί να εκτελέσει πλήθος διαφορετικών μελετών,

στατικών, δυναμικών, θερμομηχανικών, ακουστικών κα. Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία είναι πολλά και πολλοί ερευνητές την έχουν χρησιμοποιήσει για παρόμοιες μελέτες.

Σε μία από τις έρευνες πάνω στις λιθόκτιστες τοξωτές κατασκευές [1] προτείνεται μια γενική δισδιάστατη, αναλυτική μέθοδος για τη στατική μελέτη της συνεχούς κατανομής των εσωτερικών τάσεων και μετατοπίσεων, για μια τοξωτή γέφυρα, η οποία υπόκειται σε διάφορες καταπονήσεις. Η βάση του ελαστοπλαστικού μοντέλου είναι τρεις εξισώσεις ισορροπίας, στον οριζόντιο άξονα και τρεις στον κατακόρυφο, συν την ισορροπία των ροπών αντιστοίχως για τους ίδιους άξονες. Σε αυτές προστίθενται και συνοριακές συνθήκες για την απόδοση της στήριξης της κατασκευής και την αποτροπή των μετακινήσεων στις διευθύνσεις ισορροπίας. Ακόμη εισήχθησαν οι κατάλληλες ιδιότητες του υλικού κατασκευής ούτως ώστε να προβλέπεται η δημιουργία ρωγμών και ασυνεχειών στο υλικό της κατασκευής.

Η παραπάνω θεωρεία εισήχθη σε ειδικό λογισμικό το οποίο χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή αποτελεσμάτων για δύο περιπτώσεις καταπόνησης. Εφαρμογή σημειακού κατακόρυφου φορτίου και μετατόπιση του ενός εκ των θεμελίων της γέφυρας στον οριζόντιο άξονα αντιστοίχως.

Από τα συμπεράσματα της έρευνας προκύπτει ότι το προτεινόμενο αναλυτικό μοντέλο είναι ένας συμφέρων συμβιβασμός μεταξύ των άλλων υπαρχόντων, δισδιάστατων αναλυτικών μεθόδων, οι οποίες δεν υπολογίζουν κατακόρυφα φορτία, ούτε προβλέπουν τη δημιουργία ασυνεχειών, και των τρισδιάστατων μεθόδων που χρησιμοποιούν την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, αλλά έχουν υψηλό υπολογιστικό κόστος.

Σε άλλη μελέτη [2] προτείνεται η χρήση τεχνικών συνέχειας – ασυνέχειας για την ανάλυση τοξωτών, λιθόκτιστων γεφυρών. Χρησιμοποιήθηκαν, στα πλαίσια της έρευνας, τρία διαφορετικά εργαλεία μοντελοποίησης του προβλήματος. Η ανάλυση ασυνεχούς παραμόρφωσης (DDA), ανάλυση βασισμένη σε διακριτά στοιχεία και μη – γραμμική ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων των τριών διαφορετικών μεθόδων σε ένα πειραματικό μοντέλο το οποίο αναπτύχθηκε στο Πανεπιστήμιο του Εδιμβούργου. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης έρευνας, παρουσιάστηκαν οι δυνατότητες των τριών μεθόδων επίλυσης, ενώ έγινε και ανάλυση ευαισθησίας για κατασκευή με τόξο ημικυκλικού σχήματος.

Ακόμη μία έρευνα [3] η οποία ασχολείται με τις λιθόκτιστες, τοξωτές

κατασκευές, παρουσιάζει την ανάλυση με μοντελοποίηση στην οποία υπάρχουν διεπιφάνειες τριβής μεταξύ των στοιχείων που σχηματίζουν το τόξο της κατασκευής. Η επίλυση του μοντέλου γίνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων. Η διεπιφάνειες τριβής χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της δημιουργίας ρωγμών κατά την καταπόνηση της γέφυρας, ενώ εξετάζεται η επίδραση της ενίσχυσης του τόξου με πλινθόκτιστη τοιχοποιία εκατέρωθεν του ανοίγματος. Η ανάλυση εστιάζεται στον υπολογισμό του οριακού φορτίου που μπορεί να διαχειριστεί η κατασκευή, χωρίς να αστοχήσει και στην μελέτη του μηχανισμού κατάρρευσης.

Για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων της επίλυσης, χρησιμοποιήθηκε η κλασική μέθοδος του μηχανισμού αστοχίας, η οποία χρησιμοποιεί γραμμικό προγραμματισμό. Τα αποτελέσματα της μεθόδου ήταν ικανοποιητικά για το οριακό φορτίο, ενώ και η μελέτη για τη συμβολή της ενισχυτικής τοιχοποιίας εκατέρωθεν του τόξου, επιβεβαιώθηκε από πειραματικά δεδομένα.

Σε άλλη εργασία [4] παρουσιάζεται η μελέτη μιας τυπικής, λιθόκτιστης, τοξωτής γέφυρας, με τη μέθοδο του μηχανισμού κατάρρευσης. Το φορτίο κατάρρευσης το οποίο προβλέπεται από τη συγκεκριμένη μέθοδο, εξαρτάται από την κατανομή των διαμηκών πιέσεων του εδάφους, εξωτερικά της κατασκευής. Το προφίλ της γέφυρας διαφοροποιείται σημαντικά τη στιγμή της κατάρρευσης, από το αρχικό του σχήμα.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης του μηχανισμού κατάρρευσης είναι ακριβή μόνο όταν όλες οι δυνάμεις και τα σημεία εφαρμογής τους είναι γνωστά. Οι ερευνητές μετέβαλαν τη μέθοδο περιλαμβάνοντας και έναν αλγόριθμο συσχέτισης της πίεσης με την παραμόρφωση. Τα αποτελέσματα της εργασίας επιβεβαίωσαν τη σημασία της παραμέτρου αυτής στην προσέγγιση του οριακού φορτίου κατάρρευσης της κατασκευής, ενώ το πρόβλημα της πρόβλεψης της ακριβούς παραμόρφωσης παρέμεινε ως αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

Ακόμη μία έρευνα που διεξήχθη με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων [5] για την ανάλυση λιθόκτιστης, τοξωτής γέφυρας, σε δυναμική καταπόνηση, χρησιμοποίησε διεπιφάνειες τριβής για τη μοντελοποίηση της αστοχίας μέσω της εμφάνισης ρωγμών, ενώ και σε αυτή την περίπτωση μελετήθηκε η συμβολή της ενισχυτικής τοιχοποιίας εκατέρωθεν του τόξου της γέφυρας.

Από τα συμπεράσματα της έρευνας προκύπτει ότι η συγκεκριμένη μοντελοποίηση οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα, ενώ σημαντικό ρόλο έχουν το πλήθος, η θέση και ο συντελεστής τριβής μ των διεπιφανειών επαφής των

στοιχείων του τόξου, για τη ρεαλιστική απεικόνιση των συνεπειών της δυναμικής καταπόνησης σε μια τέτοιου είδους κατασκευή.

Στα πλαίσια μιας ακόμη έρευνας [6] παρουσιάζεται μια απλοποιημένη μέθοδος για την προσέγγιση της αντισεισμικής ικανότητας των λιθόκτιστων, τοξωτών κατασκευών. Ο αλγόριθμος που προτείνεται συνδυάζει δύο απλές μεθόδους – τη γραμμική μέθοδο με χρήση πεπερασμένων στοιχείων και την οριακή ανάλυση, η οποία ακολουθεί την υπόθεση του Heyman [7] για έναν προεπιλεγμένο μηχανισμό κατάρρευσης. Πιο συγκεκριμένα, η γραμμική ανάλυση χρησιμοποιείται για την ανίχνευση ζωνών εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων στο τόξο της κατασκευής και για την ταυτοποίηση μιας πιθανής στάθμης μηχανισμών κατάρρευσης, για τον υπολογισμό των οποίων χρησιμοποιείται ο πολλαπλασιαστής αστοχίας, με τη βοήθεια ενός τυπικού προγράμματος CAD.

Η μέθοδος εφαρμόστηκε σε τρεις διαφορετικές, υπάρχουσες κατασκευές, με ικανοποιητικά αποτελέσματα στην αντισεισμική αξιολόγησή τους.

Τέλος μια ακόμη έρευνα [8] παρουσιάζει την ταξινόμηση της αποδόμησης των υλικών κατασκευής, των μηχανισμών αστοχίας ή κατάρρευσης και τις διάφορες ζημιές τις οποίες έχουν υποστεί τοξωτές, λιθόκτιστες γέφυρες στην επικράτεια της γειτονικής Τουρκίας. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης έρευνας, γίνεται συζήτηση για τις διάφορες μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί από τους αντίστοιχους κρατικούς φορείς, για την αποκατάσταση των ιστορικών, αυτών κατασκευών.

Στη συγκεκριμένη εργασία [9] αναφέρεται σε ένα πρόγραμμα το οποίο έλαβε χώρα στο Πολυτεχνείο του Αϊτχόβεν το 2001 και είχε στόχο την εκπαίδευση των υποψηφίων μηχανικών στην μελέτη λιθόκτιστων τοξωτών κατασκευών. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές εύρεσης της κατάλληλης μορφής τόξου, γραφικές τεχνικές και υπολογιστικά προγράμματα για την ανάλυση των κατασκευών. Για τον υπολογισμό των εφελκυστικών και καμπτικών φορτίων όμως, χρησιμοποιήθηκαν εφαρμογές ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία, οι οποίες ήταν οι πιο κατάλληλες για τη μελέτη των συγκεκριμένων φαινομένων.

Προς μελέτη τέθηκαν μία γέφυρα με ορθογώνιο άνοιγμα και τρεις γέφυρες με μήκος ανοίγματος 3 μέτρων και σχήμα αναλυτικής καμπύλης. Η ελαστικότητα του τόξου είχε σημαντικές επιπτώσεις στη μέτρηση και την εφαρμογή των φορτίων. Η θέση της γραμμής τάσεων προέκυψε από την παραμόρφωση των τόξων, ενώ η περιοχή επαφής και το άνοιγμα των ρωγμών ήταν πλάτους λίγων χιλιοστών. Τα τόξα κατέρρευσαν ξαφνικά και απότομα, ενώ όλες οι μορφές που τέθηκαν προς μελέτη

παρουσίασαν παρόμοια συμπεριφορά.

Σε αυτή την εργασία [10], οι ερευνητές ασχολούνται με την ανάγκη για ανάλυση ιστορικών κατασκευών, η οποία προκύπτει από τη σημασία που έχουν και την ιστορική τους αξία, η οποία οδηγεί στην έρευνα για την εξεύρεση μεθόδων και εργαλείων για τη διατήρησή τους.

Παρουσιάζονται διαφορετικές μέθοδοι για την ανάλυση δυο συγκεκριμένων τύπων ιστορικών κατασκευών, ενός λιθόκτιστου τοίχου και ενός λιθόκτιστου τόξου. Οι μέθοδοι που παρουσιάζονται είναι οι πιο συνηθισμένες υπολογιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ευρέως για την προσέγγιση της συμπεριφοράς αυτού του είδους κατασκευών, ξεκινώντας από τη ελαστική συμπεριφορά, την πλαστική συμπεριφορά και καταλήγοντας στη μη-γραμμική συμπεριφορά, η οποία θεωρείται ως η μέθοδος που μπορεί να προσομοιώσει καλύτερα τα πολύπλοκα φαινόμενα που εμφανίζονται κατά τη φόρτιση τέτοιων κατασκευών.

Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων τους, οι ερευνητές μελέτησαν και τέσσερις υφιστάμενες κατασκευές, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μη-γραμμικής συμπεριφοράς. Τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν, τους οδήγησαν στο να προτείνουν κανόνες για τη μελέτη και την ενίσχυση αυτών των κατασκευών. Συγκεκριμένα, το κύριο συμπέρασμα της εργασίας τους είναι ότι θα πρέπει να χρησιμοποιούνται τα απλούστερα δυνατά εργαλεία, για να μπορούν να διαχειριστούν και να αξιολογήσουν οι ενδιαφερόμενοι τα αποτελέσματά τους. Πιο ειδικά προτείνουν τη μοντελοποίηση δομικών μερών και όχι ολόκληρων – πολύπλοκων – κατασκευών, να μην χρησιμοποιούνται τρισδιάστατα μοντέλα ολόκληρων των κατασκευών και τέλος να μην γίνονται ελαστικοί υπολογισμοί για ιστορικές κατασκευές, διότι δεν μπορούν να περιγράψουν με πληρότητα τα φαινόμενα που τις διέπουν.

Παρακάτω παρουσιάζεται η μελέτη σε υφιστάμενη τοξωτή γέφυρα, η οποία βρίσκεται στο Λινκολνσάιρ της Αγγλίας και η οποία έχει ενισχυθεί με μια μέθοδο που προτείνουν οι ερευνητές [11]. Η μελέτη τους περιλάμβανε πειράματα με πραγματική φόρτιση, αλλά και προσομοίωση με υπολογιστικές μεθόδους σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Η υπολογιστική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν με πεπερασμένα στοιχεία και τα αποτελέσματά της σε συνδυασμό με τα πειραματικά δεδομένα, αποδείχθηκαν επαρκή όχι μόνο για την εκτίμηση της αντοχής της γέφυρας σε κατάρρευση, αλλά και στη συμπεριφορά της γέφυρας σε συνθήκες χρήσης όπως τις προκύπτουσες

παραμορφώσεις και ρωγμές που μπορεί να εμφανιστούν κάτω από κυκλικά φορτία όπως αυτά που καταπονούν μια κατασκευή αυτού του είδους η οποία χρησιμοποιείται για να στηρίξει έναν δρόμο αρκετά υψηλής κυκλοφορίας αυτοκινήτων και φορτηγών.

Σε άλλη μια εργασία [12] παρουσιάζεται η μελέτη μιας γέφυρας του 12^{ου} αιώνα η οποία κατασκευάστηκε στην Κίνα. Πρόκειται για τη γέφυρα του «Ουράνιου Τόξου», η οποία είναι μια τοξωτή γέφυρα που αποτελείται από ξύλινους φορείς, σχηματίζοντας χωροδικτύωμα. Η μελέτη έγινε με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, σε συνδυασμό με πειραματικά δεδομένα τα οποία εξήχθησαν από ένα υπό κλίμακα μοντέλο που δημιουργήθηκε για τις ανάγκες της μελέτης. Τα αποτελέσματα των υπολογιστικών μοντέλων συνέπεσαν με εκείνα του πειράματος και κατέδειξαν την ευφυία της κατασκευής που επιτρέπει την ελαχιστοποίηση των καμπτικών τάσεων και παραμορφώσεων.



Εικόνα 1: Καλλιτεχνική απεικόνιση της γέφυρας του «Ουράνιου Τόξου» [12].

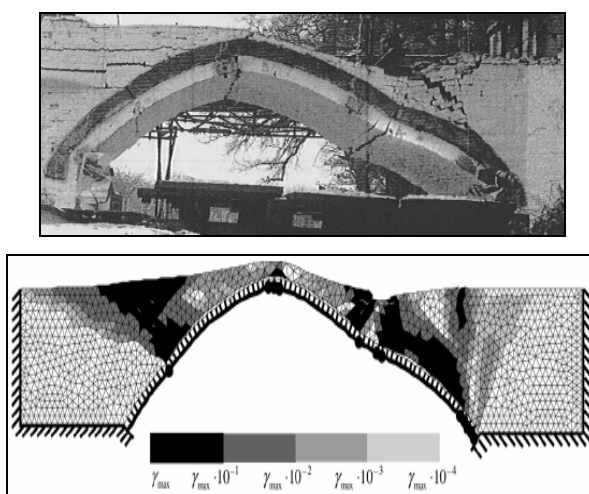
Σε άλλη εργασία [13] οι ερευνητές ασχολούνται με την αντοχή λιθόκτιστων, τοξωτών κατασκευών, τα τόξα των οποίων αποτελούνται από από πολλαπλές στρώσεις υλικών. Το συγκεκριμένο φαινόμενο που εξετάζουν οι ερευνητές, είναι η μετατόπιση των θεμελίων των τόξων και κατά συνέπεια, οι παραμορφώσεις που προκύπτουν στην κατασκευή συνολικά και οι ρωγμές ή αποκολλήσεις μεταξύ των στρώσεων των υλικών του τόξου.

Η μελέτη χρησιμοποιεί ένα υπολογιστικό μοντέλο τα αποτελέσματα του οποίου δεικνύουν τη σταδιακή απώλεια αντοχής εξαιτίας της μετατόπισης των θεμελίων και της συνεπαγόμενης ανάπτυξης ρωγμών και αποκολλήσεων στις

στρώσεις του τόξου.

Το μοντέλο χρησιμοποιεί τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και εφαρμόζεται σε μια υφιστάμενη μνημειακή κατασκευή, την «Βασιλική του San Fedele», η οποία βρίσκεται στο Κόμο της Ιταλίας και κατασκευάστηκε τον 11^ο αιώνα. Τα προαναφερθέντα αποτελέσματα συμφωνούν με την πραγματική κατάσταση στην οποία βρίσκεται σήμερα η κατασκευή.

Στην παρακάτω εργασία [14], οι ερευνητές μελετούν την αντοχή λιθοκτιστής τοξωτής γέφυρας, σε στατικό φορτίο λαμβάνοντας υπ' όψιν την επίδραση που έχει η ενισχυτική τοιχοποιία στη συμπεριφορά της κατασκευής. Δημιούργησαν δύο διαφορετικά, δισδιάστατα μοντέλα σε ηλεκτρονικό υπολογιστή – με ένα τόξο και με πολλαπλά τόξα – και χρησιμοποίησαν τα πειραματικά δεδομένα από πείραμα κατάρρευσης πραγματικής γέφυρας για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων τους.



Εικόνα 2: Η πραγματική κατασκευή και το μοντέλο ενός τόξου [14].

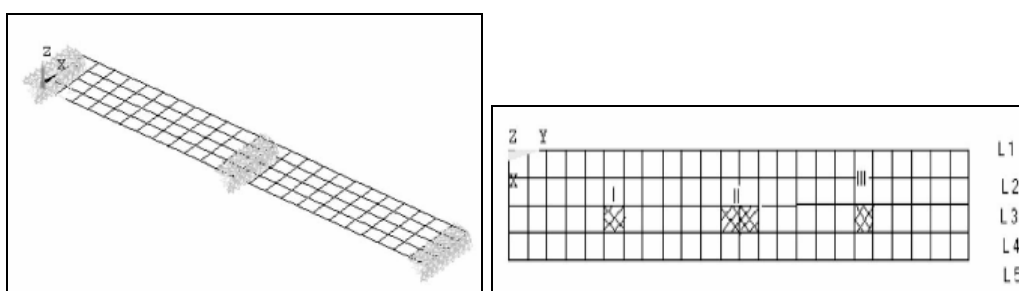
Χρησιμοποίησαν τριγωνικά στοιχεία για την ενισχυτική τοιχοποιία και γραμμικά στοιχεία δύο κόμβων για τα τόξα. Ακόμη χρησιμοποίησαν στοιχεία επαφής για την διεπιφάνεια μεταξύ τόξου – τοιχοποιίας για να ανιχνεύσουν τυχόν ασυνέχειες στην ταχύτητα των στοιχείων τόξου – τοιχοποιίας που θα υποδηλώνουν αποκολλήσεις μεταξύ τους.

Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους συμφωνούν με τα πειραματικά δεδομένα αν και οι παραδοχές που έχουν κάνει για τις εντός επιπέδου τάσεις και τις ιδανικές συνθήκες στήριξης, θεωρούν ότι χρήζουν περαιτέρω μελέτης.

Σε αυτή τη μελέτη οι ερευνητές [15], χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των

πεπερασμένων στοιχείων, προσπάθησαν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα του εντοπισμού των βλαβών σε μια γέφυρα. Με τη βοήθεια του αλγορίθμου **Lanczos** και προσαρμοζόμενης διακριτοποίησης της προς μελέτη κατασκευής, υπολόγισαν τις ιδιοσυχνότητες της γέφυρας.

Στη συνέχεια δημιουργώντας βλάβες σε συγκεκριμένα σημεία και μελετώντας τις εκάστοτε μεταβολές στο φάσμα απόκρισης της κατασκευής, δημιούργησαν μια μέθοδο εντοπισμού των βλαβών ανάλογα με το φάσμα συχνοτήτων που παρουσιάζει μια γέφυρα, την οποία θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν για τον έλεγχο, τη συντήρηση και την αποκατάσταση υπάρχοντων κατασκευών.



Εικόνα 3: Το μοντέλο γέφυρας 2 τόξων και οι τοποθεσίες των βλαβών [15].

Στην εργασία αυτή [16], οι ερευνητές μελετούν τις απροσδιοριστίες που προκύπτουν από την δομική απόκριση λιθόκτιστων γεφυρών. Ο σημαντικότερος παράγων που καθορίζει τη συμπεριφορά αυτών των κατασκευών είναι η συνύπαρξη δύο διαφορετικών υλικών, των λίθων και του συνδετικού υλικού, τα οποία έχουν διαφορετικές ιδιότητες ακαμψίας και αντοχής. Οι συγκεκριμένες απροσδιοριστίες μοντελοποιούνται κατά το σχεδιασμό του προβλήματος με ένα κριτήριο ασαφούς λογικής και η δομική απόκριση μελετάται λαμβάνοντας υπ' όψιν τη μη – γραμμική συμπεριφορά του συστήματος. Συνεπώς ο στόχος των ερευνητών ήταν να υποδείξουν τη σημασία της μη – γραμμικής ανάλυσης με χρήση ασαφούς λογικής σε τυπικά προβλήματα μηχανικής με πρακτικές ωφέλειες.

Από τα συμπεράσματα της μελέτης προκύπτει ότι η συγκεκριμένη διαδικασία είναι αποτελεσματική στον εντοπισμό των πιο επικίνδυνων σχηματισμών και των αντίστοιχων οριακών πολλαπλασιαστών κατάρρευσης που απαιτούνται για την αξιολόγηση της ασφάλειας των λιθόκτιστων γεφυρών.

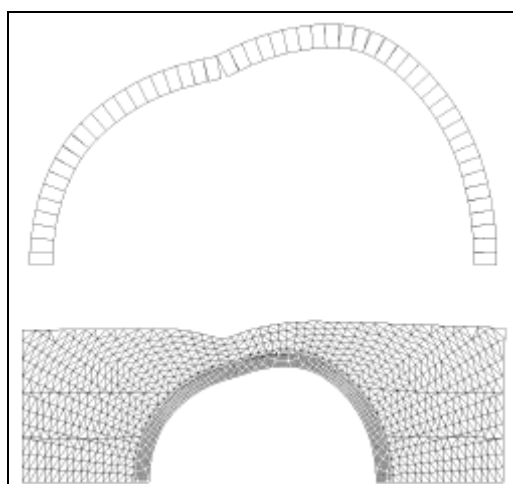
Σε άλλη εργασία [17], οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τα δεδομένα από πείραμα κατάρρευσης που διεξήχθη στο Ηνωμένο Βασίλειο από το *Ινστιτούτο Μεταφορών και*

Οδικών Ερευνών ως αναφορά για την αξιολόγηση της ικανότητας των μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων να αναπαράγουν τη συνολική συμπεριφορά των λιθόκτιστων τοξωτών κατασκευών.

Χρησιμοποίησαν δύο δισδιάστατα μοντέλα:

- Ένα απλοποιημένο στο οποίο η συμπεριφορά της ενισχυτικής τοιχοποιίας προσομοιώνεται με μη – γραμμικά ελατήρια ενεργούντα στον σε οριζόντια κατεύθυνση και
- Ένα πιο λεπτομερές μοντέλο στο οποίο η ενισχυτική τοιχοποιία έχει διακριτοποιηθεί μέσα στον κάνναβο των πεπερασμένων στοιχείων.

Στη δεύτερη περίπτωση η μη – γραμμική συμπεριφορά του εδάφους έχει προσομοιωθεί με ένα πλαστικό μοντέλο. Και στις δύο περιπτώσεις το μοντέλο που υιοθετήθηκε αποτελείται από μια διακριτή προσέγγιση, στην οποία οι ενώσεις διακριτοποιούνται αρχικά από στοιχεία διεπιφάνειας μηδενικού πάχους, και οι θεμελιώσεις με γραμμικά –ελαστικά στοιχεία άπειρου μήκους. Τα αποτελέσματα των υπολογιστικών μοντέλων συγκρίνονται με τα αποτελέσματα του πειράματος και αξιολογούνται ως επαρκή.



Εικόνα 4: Αποψη της προκύπτουσας παραμόρφωσης στον κάνναβο των πεπερασμένων στοιχείων [17].

Στην περίπτωση του απλοποιημένου μοντέλου υπάρχουν αρκετές αποκλίσεις όσον αφορά στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ του τόξου και της ενισχυτικής τοιχοποιίας και των θεμελίων και του εδάφους, αλλά λαμβάνοντας υπ' όψιν το ελάχιστο

υπολογιστικό και χρονικό κόστος, θεωρείται μια καλή προσέγγιση της πραγματικότητας. Το πιο εμπειριστατωμένο μοντέλο έδωσε αποτελέσματα πολύ κοντύτερα στα πειραματικά ειδικά όσον αφορά στη συμπεριφορά της ενισχυτικής τοιχοποιίας, το μέγιστο φορτίο κατάρρευσης και την αλληλεπίδραση της κατασκευής με το έδαφος.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση των συνδυασμένων μηχανικών φαινομένων που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της στατικής – υπό το ίδιο της το βάρος – και της δυναμικής καταπόνησης – από έναν πραγματικό σεισμό – μιας λιθόκτιστης, τοξωτής γέφυρας. Ως μοντέλο χρησιμοποιήθηκε το προαναφερθέν «γεφύρι της Πλάκας». Μεγάλο μέρος της εργασίας αφιερώθηκε στην όσο το δυνατόν καλύτερη μοντελοποίηση της κατασκευής, με τη χρήση διεπιφανειών επαφής στο τόξο για την προσομοίωση των εστιών εμφάνισης ρωγμών στο υλικό της γέφυρας.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, γίνεται μια παρουσίαση του θεωρητικού υποβάθρου των σεισμών με την κατάταξή τους αναλόγως της αιτίας που τους προκαλεί, το μέγεθός τους, το εστιακό τους βάθος κλπ. Ακόμη γίνεται αναφορά στα σεισμικά κύματα, στους τρόπους μέτρησης των σεισμών και στις διάφορες κλίμακες, σύμφωνα με τις οποίες γίνονται αυτές οι μετρήσεις.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσας εργασίας. Στο πρώτο κομμάτι γίνεται μια περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων από τη σκοπιά των μαθηματικών. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η τεχνολογία των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιεί το λογισμικό πρόγραμμα με το οποίο πραγματοποιήθηκε η ανάλυση. Γίνεται εμβάθυνση στην ανάλυση επαφής, στο μοντέλο της τριβής που χρησιμοποιήθηκε, καθώς και στο είδος των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την μοντελοποίηση του προβλήματος. Στο τελευταίο κομμάτι του κεφαλαίου παρουσιάζονται οι επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η διαδικασία μοντελοποίησης του προβλήματος. Περιγράφεται αναλυτικά η μοντελοποίηση των σωμάτων, η μοντελοποίηση της επαφής, ο ορισμός των συνοριακών συνθηκών, καθώς και η εισαγωγή στο πρόγραμμα των ιδιοτήτων του υλικού. Τέλος παρουσιάζεται ο ορισμός των συνθηκών της ανάλυσης για τη μοντελοποίηση του προβλήματος – με τρία διαφορετικά σενάρια επίλυσης και ένα τέταρτο, στο οποίο δεν συμμετέχει η ενισχυτική τοιχοποιία εκατέρωθεν του τόξου για να ελεγχθεί κατά πόσο αντέχει χωρίς αυτήν στη δυναμική καταπόνηση του σεισμού – και ο τρόπος παρουσίασης των

αποτελεσμάτων από το λογισμικό.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα αφορούν στις μετατοπίσεις της κατασκευής και ιδιαίτερα του τόξου, στους άξονες x και y , στις ισοδύναμες τάσεις που αναπτύσσονται, στο κατά πόσο υπάρχει δημιουργία ρωγμών κα. Στη συνέχεια γίνεται σχολιασμός και ανάλυση αυτών των αποτελεσμάτων.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την παρούσα εργασία και γίνεται αναφορά στους τομείς που χρήζουν περαιτέρω έρευνας.

Κεφάλαιο 1: Οι Σεισμοί και η Δυναμική Συμπεριφορά των Λιθόκτιστων Τοξωτών Κατασκευών

Γενικά

Ο **σεισμός** είναι ένα φυσικό φαινόμενο, το οποίο προκαλείται από ξαφνική απελευθέρωση μηχανικής ενέργειας από το εσωτερικό της γης με συνέπεια τη δημιουργία σεισμικών κυμάτων. Τα κύματα αυτά μεταφέρουν την ενέργεια του σεισμού και προκαλούν ταλαντώσεις και αναταράξεις του εδάφους. Άλλη μια συνέπεια των σεισμών, που προκαλείται από τη μετακίνηση των λιθοσφαιρικών πετρωμάτων κατά την εκδήλωσή τους, είναι η δημιουργία τσουνάμι στη θάλασσα όταν ο σεισμός είναι υποθαλάσσιος και η μετακίνηση μεγάλη.

Ο σεισμός μπορεί να είναι και αποτέλεσμα ανθρώπινης δραστηριότητας (όπως για παράδειγμα μιας έκρηξης ή μιας υπόγειας πυρηνικής δοκιμής). Γενικά, η λέξη "σεισμός" περιγράφει κάθε σεισμικό γεγονός -φυσικό φαινόμενο ή αποτέλεσμα ανθρώπινης δραστηριότητας- που παράγει σεισμικά κύματα τα οποία διαδίδονται στο εσωτερικό της γης. Οι περισσότεροι σεισμοί σχετίζονται με τον τεκτονικό χαρακτήρα της Γης και ονομάζονται τεκτονικοί σεισμοί.

Την πραγματική αιτία των σεισμών διαπίστωσε ο Βρετανός Τζον Μίτσελ (*John Michell*), ο οποίος θεωρείται και πατέρας της επιστήμης μελέτης των σεισμών, της Σεισμολογίας.

1.1 Η κίνηση των λιθοσφαιρικών πλακών

Η λιθόσφαιρα χωρίζεται σε επτά πολύ μεγάλες πλάκες, αλλά υπάρχει κι ένα πλήθος άλλων μικρότερων. Π.χ. στην περιοχή του Αιγαίου υπάρχουν πολλές μικρές πλάκες. Οι πλάκες επιπλέουν στην πλαστική ασθενόσφαιρα.

Τριών ειδών κινήσεις μπορούν να συμβούν στα όρια μεταξύ πλακών. Δημιουργία (επέκταση) πλάκας. Σε μεσο-ωκεάνια ρήγματα απομακρύνονται κατά μερικά cm/year και σε περιοχές αποχώρησης λιωμένα πετρώματα αναδύονται και

δημιουργούν νέο ωκεάνιο δάπεδο στις δύο πλευρές του ρήγματος. Στο όριο αυτό δημιουργίας μια μεσο-ωκεάνια ράχη (οροσειρά) την οποία αποτελεί το τελευταίο αναδυόμενο πέτρωμα. Καθώς ψύχεται το νέο πέτρωμα τα μαγνητικά του υλικά προσανατολίζονται ανάλογα με τον προσανατολισμό του μαγνητικού πεδίου την εποχή εκείνη. Καθώς το γεωμαγνητικό πεδίο αλλάζει φορά κάθε 1×10^6 έτη περιμένουμε να δούμε στρώματα (στην άκρη της ράχης) με εναλλασσόμενη μαγνήτιση.

Καταστροφή πλάκας (λόγω καταβύθισης μέρους της). Μία πλάκα γλιστρά κάτω από μία άλλη και λιώνει καθώς εισχωρεί στον μανδύα. Αυτή η περιοχή ονομάζεται ζώνη καταβύθισης και δημιουργεί μεσο-ωκεάνιες τάφρους. Όπου τα ελαφρότερα μέρη της καταβυθιζόμενης πλάκας λιώνουν αυτά ανέρχονται στην επιφάνεια και δημιουργούν ηφαίστεια. Όταν ηπειρωτικά τμήματα από αντίθετες πλάκες συμπίεζονται σε μία ζώνη καταβύθισης, επειδή είναι ελαφρότερα από το βυθιζόμενο υπόστρωμα, αναγκάζονται να καμφθούν και σχηματίζουν οροσειρές.

Κίνηση πλακών. Σε μερικά όρια οι γειτονικές πλάκες γλιστρούν μεταξύ τους χωρίς να συγκρούονται ή να αποχωρίζονται. Τα όρια αυτά όπου έχουμε μόνο οριζόντια κίνηση λέγονται ζώνες θραύσης (ή ρήγματα μετασχηματισμού). Εκεί οι σεισμοί είναι συχνό φαινόμενο λόγω της τριβής ανάμεσα στα όρια των πλακών. Εν γένει λοιπόν μία ιδανική πλάκα θα έχει μία πλευρά σε ζώνη καταβύθισης, την απέναντι σε ζώνη ανύψωσης και τις πλάγιες να γλιστρούν οριζόντια σε σχέση με τις γειτονικές.

1.2 Τύποι Σεισμών

Ανάλογα με τον τρόπο γένεσης

Τεκτονικοί

Η λιθόσφαιρα αποτελείται από πολλές πλάκες που βρίσκονται σε διαρκή κίνηση, λόγω των πιέσεων που εξασκούνται από τις περιβάλλουσες λιθосφαιρικές πλάκες ή λόγω των κινήσεων του μάγματος κάτω από αυτές. Στα όρια των πλακών δημιουργούνται εφελκυστικές ή συμπιεστικές ζώνες διάρρηξης: εφελκυστικές στα σημεία που οι πλάκες απομακρύνονται μεταξύ τους, συμπιεστικές στα σημεία που πλησιάζουν.

Τα όρια των τεκτονικών πλακών, καθώς αυτές κινούνται, τρίβονται μεταξύ τους συσσωρεύοντας ενέργεια, τασικό φορτίο. Όταν η πίεση ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή και φθάσει το όριο θραύσεως του πετρώματος του εστιακού χώρου, το αποτέλεσμα είναι η βίαιη ταλάντωση των πετρωμάτων και η απελευθέρωση της συσσωρευμένης ενέργειας.

Εγκατακρημνισιγενείς

Είναι σεισμοί συνήθως μικρού μεγέθους και τοπικού χαρακτήρα. Οφείλονται στην εγκατακρήμνιση οροφών υπογείων κοιλωμάτων (π.χ. σπηλαίων) λόγω διάβρωσης. Ορισμένες φορές έχουν παρατηρηθεί σε μετασεισμική ακολουθία ως συνεπακόλουθο άλλου τύπου σεισμών.

Ηφαιστειακοί

Οι σεισμοί που σχετίζονται με ηφαιστειακή δραστηριότητα μπορεί να είναι εξίσου καταστροφικοί, προκαλώντας σχισμές στο έδαφος, παραμόρφωση του εδάφους, και ζημιές σε κατασκευές. Ηφαιστειακός ονομάζεται ο σεισμος που είναι αποτέλεσμα αλλαγής της πίεσης στο εσωτερικό της γης, λόγω της εισροής ή εκροής μάγματος. Το σήμα τέτοιων σεισμών ονομάζεται ηφαιστειογενής δόνηση.

Ανάλογα με το Βάθος

Η ακριβής θέση στην οποία συμβαίνει ένας σεισμός ονομάζεται **εστία**. Αν η εστία θεωρηθεί ως σημείο, αυτό ονομάζεται **υπόκεντρο**. Η προβολή του υποκέντρου στην επιφάνεια της Γης ονομάζεται **επίκεντρο**. Ανάλογα με την απόσταση του υποκέντρου από την επιφάνεια της Γης (εστιακό βάθος, EB), οι σεισμοί χαρακτηρίζονται ως:

- Επιφανειακοί ή σεισμοί μικρού βάθους
- Σεισμοί ενδιάμεσου βάθους
- Σεισμοί μεγάλου βάθους

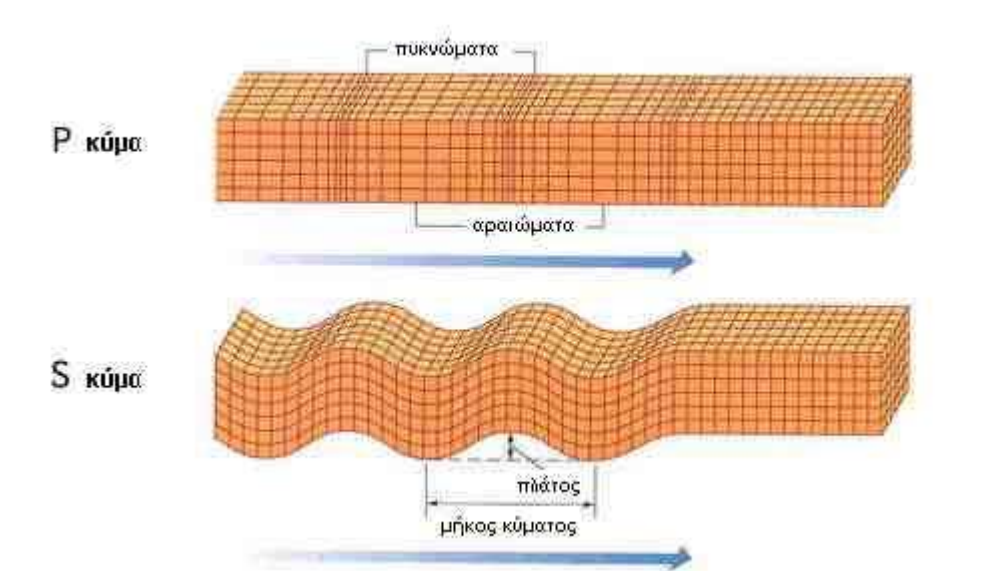
Το εστιακό βάθος είναι σημαντικό χαρακτηριστικό ενός σεισμού, ως προς τις καταστροφές που αυτός μπορεί να επιφέρει στις ανθρώπινες κατασκευές. Π.χ. ένας επιφανειακός σεισμός μεγέθους 6,5 ρίχτερ είναι καταστρεπτικότερος από ένα σεισμό ενδιάμεσου βάθους μεγέθους 6,9 ρίχτερ. Αυτό συμβαίνει για δύο κυρίως λόγους.

Πρώτον αυξάνεται η απόσταση μεταξύ εστίας και επιφανείας της Γης, επιφέροντας έτσι εξασθένηση στα σεισμικά κύματα και δεύτερον η διασπορά των σεισμικών κυμάτων είναι μεγαλύτερη.

Το μεγαλύτερο εστιακό βάθος που έχει καταγραφεί είναι περίπου 750 km και είναι το σημείο όπου ο γήινος φλοιός καταβυθίζεται στον ανώτερο μανδύα

1.3 Σεισμικά κύματα

Για να εκτιμηθούν τα αποτελέσματα των σεισμών πρέπει να καθοριστούν διάφορα στοιχεία, που χρησιμεύουν σαν βάση εκτιμήσεως. Πρώτο στοιχείο είναι η εστία του σεισμού, η υπόγεια θέση στην οποία γεννιέται ο σεισμός. Δεύτερο στοιχείο είναι το επίκεντρο του σεισμού, δηλ. η περιοχή της επιφάνειας της Γης που βρίσκεται κάθετα πάνω από την εστία. Έπειτα πρέπει να διακρίνουμε τα διάφορα σεισμικά κύματα, καθώς και τα αποτελέσματα των σεισμών (καταστροφές, πλημμύρες, πυρκαγιές, ανθρώπινα θύματα). Τα αποτελέσματα ποικίλλουν ανάλογα με τις συνθήκες (αντοχή υπεδάφους, κατασκευή σπιτιών, πυκνότητα πληθυσμού, τοπική ώρα, συνήθειες πληθυσμού).



Εικόνα 1.5: Γραφική απεικόνιση των δύο κύριων ειδών σεισμικών κυμάτων

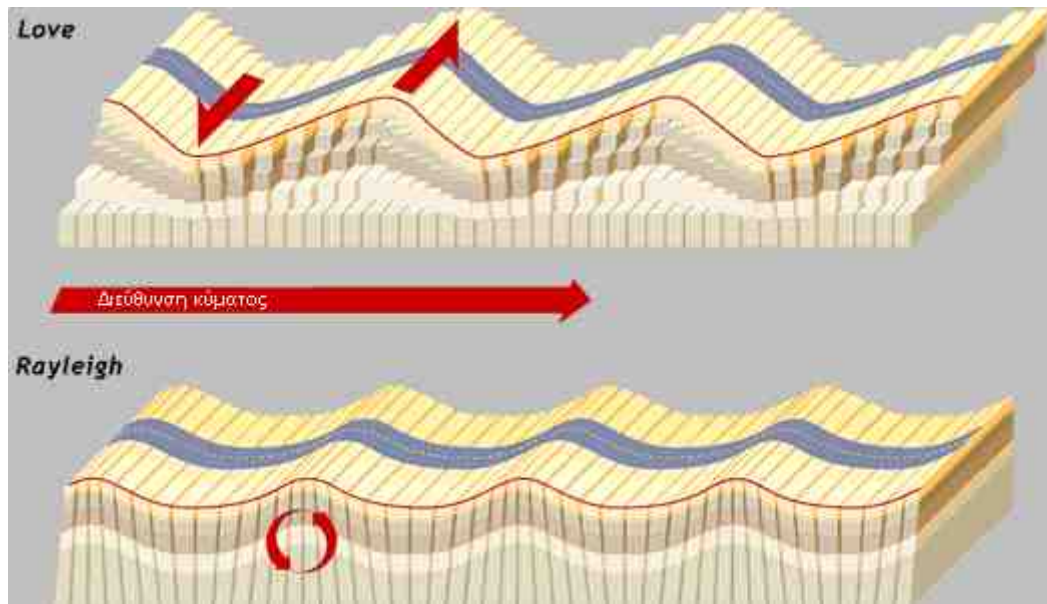
Όταν ένας σεισμός χτυπά ο πρώτος παλμός της ενέργειας, που έρχεται από το σημείο της εστίας, περιλαμβάνει τα πρωτεύοντα ή κύματα πίεσης (P - primary). Είναι διαμήκη κύματα και διατρέχουν όλη τη Γη ενώ φτάνουν πρώτα σε ένα σεισμολογικό

σταθμό. Κινούνται βραχώδη εδάφη με 6, περίπου, km/s ενώ στο νερό με το ένα τρίτο αυτής της ταχύτητας. Όταν φθάσουν στην επιφάνεια της Γης μπορούν να κινηθούν και στον αέρα, σαν ηχητικά κύματα. Ανάλογα με τη συχνότητά τους μπορούν να ακουστούν από τον άνθρωπο ή μόνο από τα ζώα.

Τα επόμενα κύματα που φτάνουν σε ένα τόπο είναι τα δευτερεύοντα (S - secondary). Δεν διαδίδονται μέσω υγρών σωμάτων (π.χ. στη θάλασσα ή στον εξωτερικό πυρήνα της Γης). Είναι πιο αργά (κινούνται με περίπου 2 km/sec), αλλά πιο ισχυρά και καταστρεπτικά από τα διαμήκη και τα ακολουθούν στο σεισμόγραμμα.

Τα κύματα P ταξιδεύουν δύο φορές γρηγορότερα από τα δευτερεύοντα (S) κύματα και αυτά είναι που φέρνουν την ισχυρή καταστρεπτική μετακίνηση του εδάφους, χαρακτηριστική των μεγάλων σεισμών. Τα κύματα S χρησιμοποιούνται παραδοσιακά για να αξιολογήσουν το μέγεθος ενός σεισμικού γεγονότος, αλλά αυτές οι πληροφορίες σταχυολογούνται μόνο μετά από το σεισμό.

Τα δύο παραπάνω κύματα διέπονται από όλες τις αρχές διάδοσης των κυμάτων (ανάκλαση, διάθλαση, αρχή του Fermat και του Huygens).



Εικόνα 1.6: Γραφική απεικόνιση των επιφανειακών, σεισμικών κυμάτων.

Τέλος, όταν η ενέργεια ενός σεισμού φθάσει στην επιφάνεια της Γης, δημιουργούνται δύο άλλοι τύποι επιφανειακών σεισμικών κυμάτων που έπονται των άλλων δύο. Το όνομά τους προέρχεται από αυτόν που τα ανακάλυψε και

δημιουργούνται όταν η εστία είναι σε μικρό βάθος.

Τα πρώτα είναι τα κύματα Love (τα ανακάλυψε ο H. Love θεωρητικά το 1911), που κατά τη διάδοσή τους τα υλικά σημεία του μέσου ταλαντώνονται οριζοντίως, καθέτως προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Δημιουργούν δηλαδή μετακινήσεις πλευρικές της επιφανείας του εδάφους. Είναι μάλιστα γραμμικώς πολωμένα.

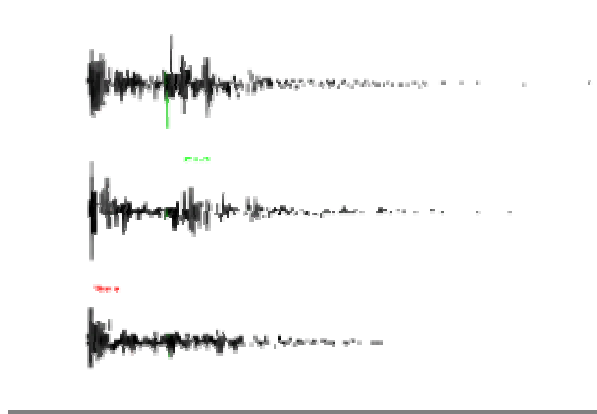
Και τα δεύτερα είναι τα κύματα Rayleigh (τα ανακάλυψε το 1887 ο Strutt Rayleigh), που κατά τη διάδοσή τους τα υλικά σημεία του μέσου κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές των οποίων οι μεγάλοι άξονες είναι κατακόρυφοι και οι μικροί παράλληλοι με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Διαδίδονται στα επιφανειακά στρώματα της Γης και για το λόγο αυτό δεν εμφανίζονται σχεδόν καθόλου σε σεισμούς με βαθύτερες εστίες.

Τα δύο τελευταία κύματα κινούνται πιο αργά από τα πρώτα (P και S) αλλά είναι πιο καταστρεπτικά, ιδιαίτερα τα κύματα Love. Ειδικά τα τελευταία είναι συχνά υπεύθυνα για την κατάρρευση των κτιρίων.

1.4 Η μέτρηση των σεισμών

Οι σεισμοί καταγράφονται από ένα σειсмоγραφικό δίκτυο. Κάθε σεισμικός σταθμός στο δίκτυο μετρά τη μετακίνηση του εδάφους στο τόπο εκείνο. Η ολίσθηση του βράχου πάνω από ένα άλλο σε ένα σεισμό απελευθερώνει ενέργεια που κάνει το έδαφος να δονείται. Αυτή η δόνηση ωθεί το πλαϊνό τμήμα του εδάφους και το αναγκάζει να δονηθεί. Έτσι συνεχίζεται να διαδίδεται η ενέργεια του σεισμικού κύματος.

Το όργανο που χρησιμοποιείται για την μέτρηση των σεισμικών δονήσεων ονομάζεται σειсмоγράφος. Η λειτουργία του σειсмоγράφου βασίζεται στην αρχή της αδράνειας. Η σεισμική δόνηση μεταβάλλει την δυνητική ενέργεια του μετρητή. Η καταγραμμένη μεταβολή ονομάζεται σειсмоγράμμα.



Εικόνα 1.7: Παράδειγμα σειсмоγράμματος.

Οι σειсмоγράφοι μπορούν να έχουν τον αδρανειακό μηχανισμό καταγραφής σε οριζόντια ή κατακόρυφη θέση. Η διάταξη του κάθετου σειсмоγράφου είναι σχεδόν όμοια με αυτή του μετρητή βαρύτητας που χρησιμοποιείται στην μέτρηση του βαρυτικού πεδίου [18].

1.5 Οι κλίμακες των σεισμών

Υπάρχουν πολλές κλίμακες και διάφορα σεισμικά μεγέθη M . Έχει δε διαπιστωθεί ότι κάθε κέντρο (σεισμολογικό ινστιτούτο) για τον ίδιο σεισμό ανακοινώνει διαφορετικό μέγεθος.

Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι να μετρηθούν οι διαφορετικές όψεις ενός σεισμού. Το μέγεθος M είναι το πιο κοινό μέτρο ενός σεισμού. Επειδή είναι μέτρο του μεγέθους της πηγής του σεισμού, είναι ο ίδιος αριθμός οπουδήποτε και να είμαστε, όπως και να τον αισθανθούμε. Η κλίμακα Richter μετρά τη μεγαλύτερη διαταραχή-κίνηση στην καταγραφή, αλλά υπάρχουν κι άλλες κλίμακες μεγέθους που μετρούν διαφορετικά μέρη του σεισμού.

Μια αύξηση του μεγέθους κατά ένα (για παράδειγμα, από 4.6 σε 5.6) αναπαριστά μια δεκαπλάσια αύξηση στο πλάτος του κύματος σε ένα σειсмоγράφο ή περίπου μια αύξηση περίπου κατά 25 φορές της ελευθερούμενης ενέργειας. Με άλλα λόγια, ένας σεισμός μεγέθους 6.7 ελευθερώνει πάνω από 700 φορές (25 επί 25) την ενέργεια ενός σεισμού 4.7.

Τα μεγέθη που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση ενός σεισμού είναι τα παρακάτω:

- ML Είναι το τοπικό μέγεθος (Magnitude Local: τοπικό μέγεθος που παρουσιάστηκε από τον Charles Richter το 1935). Η κλίμακα Richter είναι ένας μαθηματικός τύπος. Το μέγεθος ενός σεισμού καθορίζεται από το λογάριθμο του πλάτους των κυμάτων που καταγράφονται από τους σειсмоγράφους σε μια ορισμένη περίοδο. Το ML είναι αξιόπιστο, όταν υπολογίζεται από σειсмоγράφους που δεν απέχουν περισσότερο από 600 χιλιόμετρα από το επίκεντρο του σεισμού. Ισχύει μόνο για ορισμένη συχνότητα σεισμικών κυμάτων και για ορισμένη απόσταση από το επίκεντρο. Έτσι, για διαφορετικές αποστάσεις από το επίκεντρο του σεισμού οι σεισμολόγοι βασίζονται σε διαφορετικά σεισμικά κύματα για τους υπολογισμούς τους.
- Ms Είναι το μέγεθος που λαμβάνεται από τη μέτρηση των κυμάτων επιφανείας. Για παράδειγμα, αν το μέγεθος ενός σεισμού μετρήθηκε σαν 5 βαθμοί της κλίμακας Ρίχτερ (ML), μπορεί να μετρηθεί και ως 5.5 Ms. Το Ms είναι αξιόπιστο για επιφανειακούς (< 50 km βάθος) σεισμούς και για μεγάλες αποστάσεις από το επίκεντρο. Η ενέργεια που εκλύεται δίνεται σε erg από τον τύπο : $\log E = 12,24 + 1,40 M_s$.
- MB Είναι μια επέκταση της κλίμακας Richter και έτσι εκμεταλλεύεται καλύτερα το δίκτυο των σειсмоγράφων. Είναι το μέγεθος που λαμβάνεται από τη μέτρηση των πρωτευόντων P κυμάτων (Compressional Body Wave Magnitude). Είναι αξιόπιστο μέγεθος σεισμών με μεγαλύτερα εστιακά βάθη και για μεγάλες αποστάσεις από το επίκεντρο.
- Mw Όλα τα προηγούμενα μεγέθη βγαίνουν από τύπους που περιέχουν ένα συγκεκριμένο πλάτος ταλάντωσης ενός σεισμικού κύματος σε κάποια χρονική στιγμή. Το Mw, το οποίο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση μεγάλων σεισμών, υπολογίζεται από ένα πολύπλοκο τύπο και είναι πολύ αξιόπιστο.
- Md Είναι η κλίμακα μεγέθους διάρκειας.
- Mo Η κλίμακα μεγέθους σεισμικής ροπής, που θεωρείται η πιο ακριβής. Προτάθηκε το 1979 και δεν εξαρτάται από την περίοδο των σεισμικών κυμάτων αλλά από τη μέτρηση της σεισμικής ροπής.
- Me, το οποίο εκφράζει το δυναμικό καταστροφικότητας ενός σεισμού και χρησιμοποιείται για την ποσοτικοποίηση εκλυόμενης σεισμικής ενέργειας μεγάλων συμβάντων.

Από τον τύπο $\log E = 12,24 + 1,40 M_s$ προκύπτει ότι για σεισμό 5 Richter η ενέργεια που ελευθερώνεται είναι $24 \cdot 10^{19}$ erg ενώ από 6 Richter η ενέργεια είναι

$64 \cdot 10^{20}$ erg. Δηλαδή για μια αύξηση κατά 1 Richter εκλύεται ενέργεια περίπου 25 φορές περισσότερη. Σημειωτέον ότι η βόμβα που δοκιμάστηκε στα νησιά Μικίνι ήταν 10^{19} erg.

Οι σεισμοί αποδεσμεύουν ένα τεράστιο ποσό ενέργειας κι αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο μπορούν να είναι τόσο καταστρεπτικοί.

Η Εικόνα 4 παρουσιάζει σε πίνακα τα μεγέθη με το κατά προσέγγιση ποσό της ποσότητας TNT που απαιτείται για να αποδεσμεύσει το ίδιο ποσό ενέργειας.

Μέγεθος (Richter)	Κατά προσέγγιση ισοδύναμη ενέργεια TNT
4.0	1010 τόνοι
5.0	31800 τόνοι
6.0	1.010.000 τόνοι
7.0	31.800.000 τόνοι
8.0	1.010.000.000 τόνοι
9.0	31.800.000.000 τόνοι

Εικόνα 1.8: Μεγέθη σεισμών και ισοδύναμη ενέργεια TNT.

Ανάλογα με τη γεωλογία της περιοχής γίνονται διορθώσεις στα διάφορα μεγέθη. Επίσης επιλέγεται εκείνο το μέγεθος που εκφράζει με τη μεγαλύτερη ακρίβεια το σεισμικό συμβάν. Για παράδειγμα, εάν μια σεισμική εστία βρίσκεται σε μεγάλο βάθος, τότε δεν παράγονται επιφανειακά κύματα, όπως γίνεται στους πιο αβαθείς σεισμούς, και δεν θα υπολογιστεί -ή καλύτερα δεν θα ανακοινωθεί- το μέγεθος M_s , αλλά το M_L ή το M_B . Αν το επίκεντρο είναι μακριά (αρκετές εκατοντάδες χιλιόμετρα), τότε πιο αξιόπιστο μέγεθος είναι το M_B .

Αν όμως ο σεισμός είναι αρκετά μεγάλος, το μέγεθός του θα το αποδώσει το στιγμιαίο μέγεθος M_w , γιατί ενώ οι μεγάλοι σεισμοί έχουν μεγαλύτερη διάρκεια από τους μικρότερους, το M_B προσδιορίζεται από το πλάτος των P κυμάτων στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα της δόνησης. Έτσι το M_B , δεν θα αποδώσει με ακρίβεια το πραγματικό μέγεθος μεγάλων σεισμών, οι οποίοι, συνήθως, διαρκούν περισσότερο και δίνουν το πραγματικό μέγεθός τους μετά την πάροδο μερικών δευτερολέπτων.

Η ένταση από την άλλη είναι ένα μέτρο της αναταραχής και των ζημιών που προκαλούνται από το σεισμό, και αυτή η τιμή φυσικά αλλάζει από θέση σε θέση. Εξαρτάται όχι μόνο από το μέγεθος του σεισμού αλλά επίσης από την απόσταση από

το επίκεντρο του σεισμού αλλά και τη γεωλογική μορφή του τόπου.

Οι κλίμακες έντασης, όπως είναι η τροποποιημένη κλίμακα Mercalli και η κλίμακα Rossi-Forel, μετρούν το ποσό της σεισμικής αναταραχής σε μια ιδιαίτερη θέση. Έτσι η ένταση ενός σεισμού θα μεταβάλλεται ανάλογα με το τόπο που είμαστε. Μερικές φορές οι σεισμοί αναφέρονται από τη μέγιστη ένταση που παράγουν. Οι κλίμακες μεγέθους, όπως είναι το μέγεθος Richter μετρούν το μέγεθος του σεισμού στην πηγή της. Έτσι δεν εξαρτώνται από εκεί που γίνεται η μέτρηση.

Στη σεισμολογία οι βλάβες που οφείλονται στους σεισμούς μετρώνται με τη σεισμική ένταση, η οποία είναι ένα μέτρο της αισθητότητας και των αποτελεσμάτων του σεισμού και συνδέεται με το μέγεθος με διάφορες εμπειρικές σχέσεις. Η μέτρηση της έντασης γίνεται με τη δωδεκάβαθμη κλίμακα Mercalli, της οποίας οι διαβαθμίσεις στηρίζονται στην εκτίμηση των μακροσεισμικών αποτελεσμάτων ενός σεισμού [19].

1.6 Η Δυναμική Συμπεριφορά Των Λιθόκτιστων Τοξωτών Κατασκευών

Η ανάλυση λίθινων τόξων γίνεται συνήθως αναφερώμενη στο μοντέλο του Heyman, το οποίο αφορά τόξα φτιαγμένα από σφηνόληθους. Το οριακό πεδίο στο επίπεδο $M-N$ (καμπτική ροπή και ακτινική δύναμη) της παραλληλόγραμης διατομής μεταξύ δύο σφηνόλιθων δίνεται από τις δύο ευθείες που ξεκινούν από την αρχή:

$$M = \pm Ns/2$$

όπου το s είναι το πάχος του τόξου. Η τριβή μεταξύ των σφινόλιθων θεωρείται αρκετά υψηλή για να μην επιτρέπει την αστοχία λόγω ολίσθησης.

Η κατάρρευση του τόξου προκύπτει όταν δημιουργηθούν ρωγμές που θα γίνουν κενά τα οποία θα μετατρέψουν το τόξο σε αρθρωτό μηχανισμό. Με άλλα λόγια αν βρεθεί μια γραμμή τάσεων που βρίσκεται εντός της κατασκευής και αντιπροσωπεύει μια κατάσταση ισορροπίας για το τόξο, υπό την επίδραση των εξωτερικών φορτίων και η οποία επιτρέπει τη δημιουργία κενών ικανών να το μετατρέψουν σε αρθρωτό μηχανισμό, τότε η κατασκευή είναι στα όρια της κατάρρευσης.

Η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς άκαμπτων σωμάτων ξεκίνησε από μια διάσημη εργασία του [20] πάνω στην δυναμική συμπεριφορά ενός πέτρινου μπλοκ.

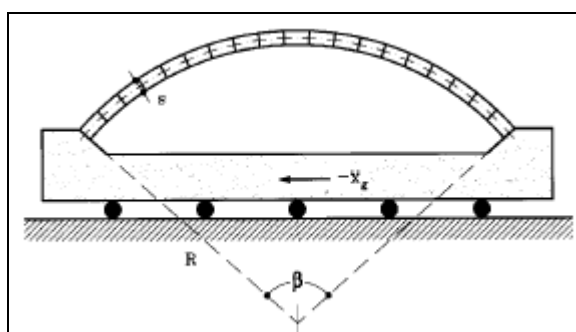
Οι ιδέες του χρησιμοποιήθηκαν και αναπτύχθηκαν από διάφορους ερευνητές για να περιγράψουν την απόκριση άκαμπτων σωμάτων σε σεισμική διέγερση [21]. Μεγάλη βιβλιογραφία πάνω στο θέμα έχει παραχθεί από τους Augusti and Sinopoli [22]. Ακόμη, σχετική με το θέμα της σεισμικής απόκρισης άκαμπτων μπλόκ, συνεισφορά έχουν κάνει και οι Tso και Wong [23], Heyman [24] και Hogan [25].

Σήμερα η μη – γραμμική ανάλυση λιθόκτιστων τοξωτών κατασκευών μπορεί να γίνει με τη βοήθεια αλγορίθμων πεπερασμένων στοιχείων σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Όμως για την έρευνα των βασικών πτυχών της δυναμικής συμπεριφοράς των λιθόκτιστων τόξων, είναι χρήσιμο να γίνεται χρήση του μοντέλου του Heyman, για την πρωταρχική ανάλυση.

Η δυναμική συμπεριφορά αυτού του είδους των κατασκευών είναι πολύπλοκη, εξαιτίας της μη – γραμμικής συμπεριφοράς τους. Συνεπώς είναι ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα από θεωρητικής πλευράς, αλλά μελετάται και για τεχνικούς λόγους. Μεταξύ αυτών είναι η αξιολόγηση της δυναμικής απόκρισης μνημειακών κατασκευών και από αυτήν η ένταση των εδαφικών επιταχύνσεων προηγούμενων σεισμών [26].

Η ανάλυση γίνεται σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα στο οποίο γίνεται η εφαρμογή των μετακινήσεων, διεξάγεται η στατική ανάλυση για να υπολογιστεί ο μηχανισμός κατάρρευσης και η ο αντίστοιχος συντελεστής οριζόντιας επιτάχυνσης. Στο δεύτερο βήμα αναλύεται η δομική συμπεριφορά του μηχανισμού τεσσάρων αρθρώσεων.

Θεωρείται το κυκλικό τόξο της παρακάτω εικόνας με γωνία β και πάχος s . Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια γραμμή τάσεων εντός του τόξου σε ισορροπία με το φορτίο του ίδιου βάρους της κατασκευής.



Εικόνα 1.9: Η προς μελέτη διάταξη [21].

Η βάση του τόξου υπόκειται σε οριζόντια επιτάχυνση: $-x_g = -\lambda g$, όπου το g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Σε αυτές τις συνθήκες το τόξο υπόκειται στην κατακόρυφη φόρτιση από το ίδιο του το βάρος και στην οριζόντια φόρτιση λόγω των αδρανειακών δυνάμεων εξαιτίας της επιτάχυνσης. Σύμφωνα με το θεώρημα ασφαλείας, η κατασκευή είναι ασφαλής, εάν η γραμμή τάσεων που δημιουργούν τα παραπάνω φορτία, βρίσκεται εντός της κατασκευής.

Το θεώρημα της μοναδικότητας μπορεί να περιγραφεί ως εξής: εάν η απόλυτη τιμή της επιτάχυνσης και συνεπώς τα αδρανειακά φορτία, αυξηθούν έως την τιμή της κατάρρευσης, ενόσω το κατακόρυφο φορτίο παραμένει σταθερό, η τιμή της επιτάχυνσης στο σημείο της κατάρρευσης είναι μοναδική. Η γραμμή των τάσεων αλλάζει και δημιουργούνται τουλάχιστον τέσσερις αρθρώσεις. Στο σημείο της κατάρρευσης η γραμμή των τάσεων διέρχεται από τα σημεία των αρθρώσεων και αν η άρθρωση βρίσκεται εντός της διατομής του τόξου, θα πρέπει να είναι εφαπτομένη με το προφίλ του τόξου.

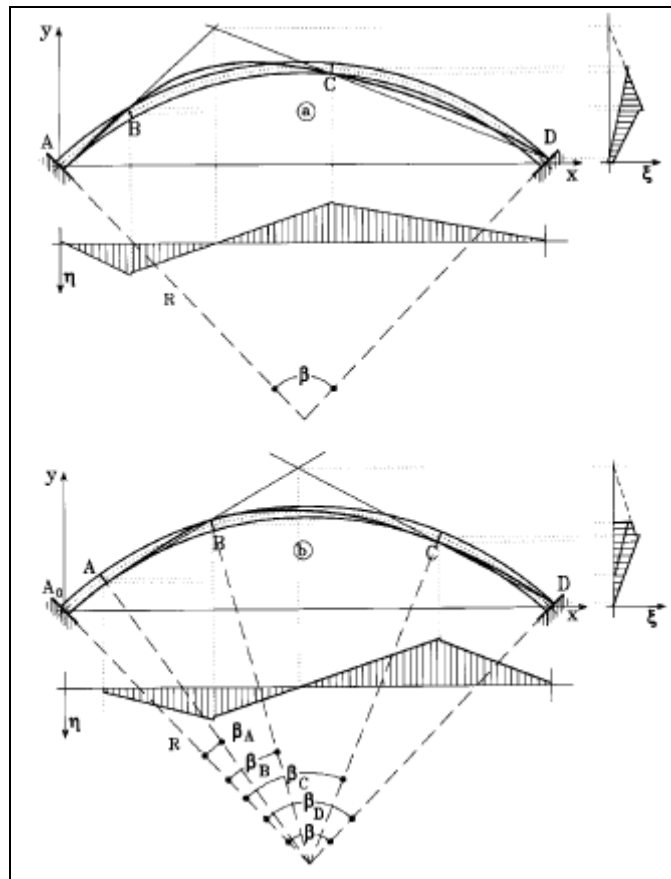
Ο μηχανισμός κατάρρευσης και ο αντίστοιχος συντελεστής μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας μια επαναληπτική διαδικασία [27], η οποία μπορεί να εκκινήσει δίνοντας έναν πρώτο μηχανισμό και τα αντίστοιχα διαγράμματα των των συνισταμένων της ταχύτητας (βλέπε Εικόνα 6(α)). Η εξίσωση της ισορροπίας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$P_v + \lambda * P_h = 0$$

όπου το P_v και το P_h είναι οι δυνάμεις εξαιτίας των κατακόρυφων και οριζόντιων φορτίων αντίστοιχα.

$$P_v = \int_0^L m(x) \cdot g \cdot \eta \, dx, \quad P_h = \int_0^L m(x) \cdot g \cdot \xi \, dx$$

Στις παραπάνω εξισώσεις το m είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους του τόξου, ενώ τα η και ξ είναι οι κατακόρυφες και οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας αντιστοίχως. Είναι προφανές ότι τα κατακόρυφα φορτία έχουν αποσβεστικό χαρακτήρα.



Εικόνα 1.10: Η γραμμή τάσεων κατά το πρώτο βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας και η πραγματική γραμμή τάσεων στο σημείο της κατάρρευσης[21].

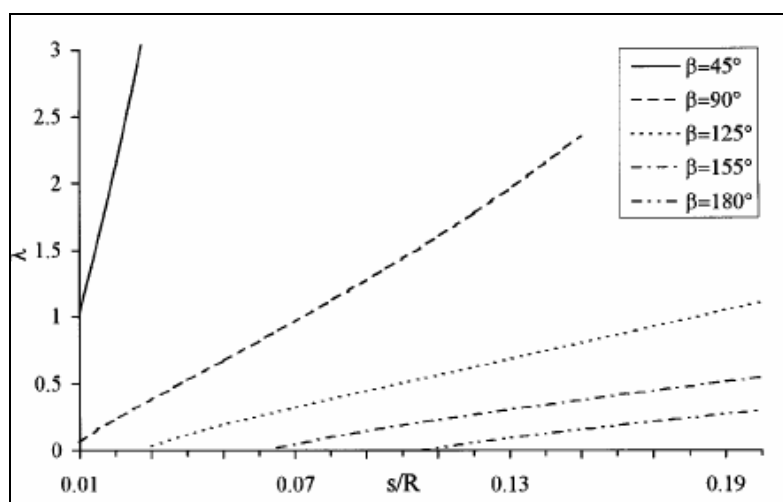
Τέλος από τα παραπάνω προκύπτει και ο συντελεστής της επιτάχυνσης:

$$\lambda = - \frac{\int_0^L m \cdot g \cdot \eta \, dx}{\int_0^L m \cdot g \cdot \zeta \, dx}$$

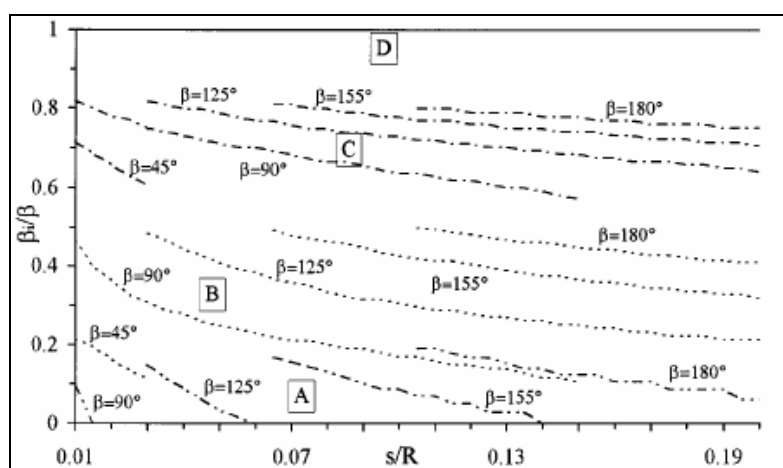
Από το λ μπορεί να βρεθεί το φορτίο που επιδρά στην κατασκευή και από εκεί να καθοριστούν οι αντιδράσεις και το πολύγωνο που περνά από τις υποτειθέμενες αρθρώσεις. Η τιμή του λ είναι ο συντελεστής κατάρρευσης για την επιτάχυνση, εαν το πολύγωνο που περνά από τις αρθρώσεις βρίσκεται οπουδήποτε εντός του τόξου. Αν δεν είναι, στο επόμενο βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας θα πρέπει να μετακινηθούν οι αρθρώσεις στις θέσεις όπου η απόσταση μεταξύ του πολυγώνου και του προφίλ του τόξου, είναι μέγιστη (βλέπε Εικόνα 6(b)).

Στην Εικόνα 7 παρουσιάζεται το διάγραμμα του συντελεστή κατάρρευσης για

την οριζόντια επιτάχυνση λ προς το s/R για διαφορετικές τιμές του β . Όπως φαίνεται το λ αυξάνει γραμμικά ως προς το s/R για κάθε β . Εξάλλου το λ γίνεται πολύ μεγάλο όταν το β μειώνεται. Αυτό το φαινόμενο εγγνύεται ότι κατά την ταλάντωση της κατασκευής, κάθε δοκός συμπεριφέρεται σαν άκαμπτο σώμα και δεν δημιουργούνται αρθρωτοί υπομηχανισμοί. Για την ακρίβεια κάθε δοκός είναι ένα τόξο με μικρό β και συνεπώς χρειάζονται πολύ μεγάλες τιμές του λ για να την μετατρέψουν σε αρθρωτό μηχανισμό.



Εικόνα 1.11: Διάγραμμα του λ προς το s/R για διαφορετικές τιμές του β [21].



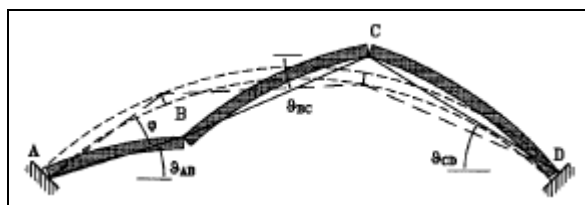
Εικόνα 1.12: Διάγραμμα θέσης των κενών β_i/β προς το s/R για διαφορετικές τιμές του β [21].

Τέλος στην Εικόνα 9 παρουσιάζεται το διάγραμμα θέσης των κενών β_i/β προς το s/R για διαφορετικές τιμές του β . Σε κυκλικά τόξα το κενό D εμφανίζεται πάντοτε στη δεξιά άρθρωση, ενώ το κενό Α μπορεί και να μην εμφανιστεί στην αριστερή

άρθρωση.

Η δυναμική συμπεριφορά της κατασκευής

Εάν η τιμή της επιτάχυνσης είναι μεγαλύτερη από την οριακή τιμή που υπολογίστηκε παραπάνω, τότε η κατασκευή μετατρέπεται σε έναν αρθρωτό μηχανισμό όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Η δυναμική της συμπεριφορά επηρεάζεται κυρίως από την απόσβεση που δημιουργούν οι συγκρούσεις στα σημεία των κενών όταν το τόξο περνά από την φυσική του διάταξη.



Εικόνα 1.13: Ο μηχανισμός κατάρρευσης[21].

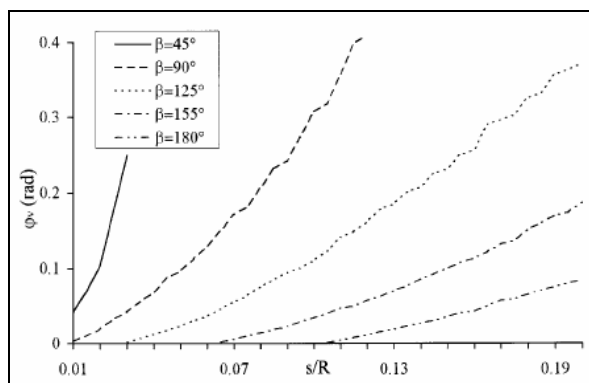
Παρακάτω γίνεται εστίαση στο πρώτο μισό της περιόδου ταλάντωσης, μέχρι την πρώτη επιστροφή της κατασκευής στη φυσική της διάταξη και η απόσβεση δεν λαμβάνεται υπ' όψιν. Η εξίσωση της κίνησης του συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας [28], επιλύεται αριθμητικά θεωρώντας την περιστροφή φ του σκέλους AB σαν Λανγκρανζιανή συντεταγμένη (βλέπε Εικόνα 9).

Ένα κυκλικό τόξο με $\beta=125^\circ$ και $s/R=0,06$ έχει οριστεί το οποίο θεωρείται ότι αποτελείται από μεγάλο αριθμό σφηνολίθων. Κενά δημιουργούνται στις στηρίξεις A και D και σε θέσεις -15° και $+34^\circ$ από την κλείδα του τόξου, όταν η οριζόντια επιτάχυνση είναι $0,263g$.

Ελεύθερη ταλάντωση

Εκκινώντας την ανάλυση της ελεύθερης ταλάντωσης ενός λιθόκτιστου τόξου, θεωρούνται αρχικές συνθήκες $\varphi(0)=\varphi_0$ και $\varphi'(0)=0$. Εάν το φ_0 είναι μεγαλύτερο από μια τιμή φ_v , τότε το τόξο θα καταρρεύσει. Εάν το $\varphi_0 < \varphi_v$, τότε θα επιστρέψει στη φυσική του διάταξη, όπου η οριακή τιμή φ_v αντιστοιχεί σε μια μέγιστη δυναμικής

ενέργειας. Για $\varphi_0 = \varphi_v$, η ισορροπία είναι ασταθής και το τόξο θα παραμείνει σε αυτή τη διάταξη επ' άπειρον, δεδομένου ότι δεν θα υπάρξουν άλλες διαταραχές.

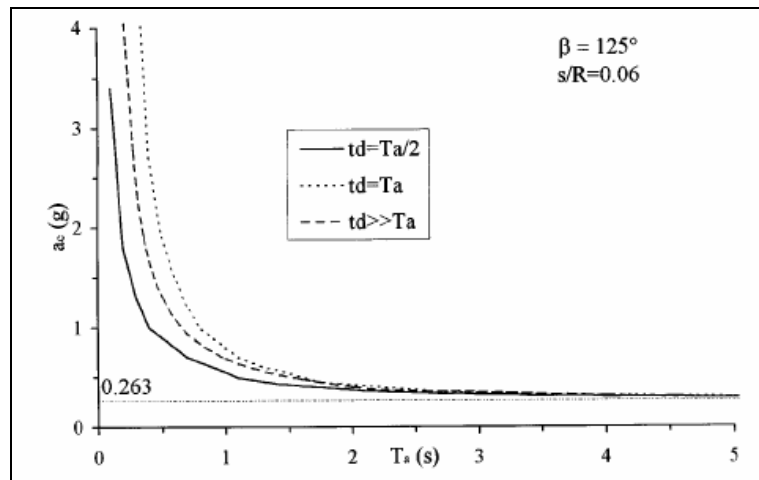


Εικόνα 1.14: Διάγραμμα ελεύθερης ταλάντωσης φ_v ως προς s/R για διαφορετικές τιμές του $\beta/21]$.

Στο διάγραμμα της Εικόνας 10, φαίνεται ότι το φ_v αυξάνει με το s/R και μειώνεται με το β . Τέλος για την αναλυόμενη κατασκευή το $\varphi_v = 0,0385$ rad.

Ημιτονοειδής ταλάντωση

Θεωρείται το ίδιο τόξο ότι διεγείρεται από μια ημιτονοειδή επιτάχυνση στα θεμέλιά του $a \sin(2\pi/T_a)t$, με $0 \leq t \leq t_a$ και συχνότητα $1/T_a$ και πλάτος a . Στο διάγραμμα της Εικόνας 11, το πλάτος a_v παρουσιάζεται ως προς την περίοδο T_a για δύο περιπτώσεις του πρώτου τεταρτημορίου ημιτονοειδούς επιτάχυνσης και μιας πλήρους περιόδου. Προφανώς, η δεύτερη καμπύλη παρουσιάζει τιμές μεγαλύτερες από την πρώτη. Η ελάχιστη τιμή 0,263g για την οποία η κατασκευή μετατρέπεται σε αρθρωτό μηχανισμό, συμπίπτει με την οριακή τιμή κατάρρευσης a_v μόνο για υψηλές τιμές περιόδου T_a και για τις τρεις περιπτώσεις, ενώ αυξάνει όταν μειώνεται η περίοδος.



Εικόνα 1.15: Το πλάτος a_n ως προς την περίοδο T_a για $t_d = T_a/2$, $t_d = T_a$, $t_d \gg T_a$ [21].

Κεφάλαιο 2: Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Γενικά

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια από τις πιο δυναμικές διαδικασίες για την αριθμητική προσεγγιστική επίλυση ποσοτικών προβλημάτων στην επιστήμη της Μηχανικής. Η πρώτη δημοσίευση που έγινε για τη μέθοδο αυτή ήταν του μαθηματικού Courant. Πέρασε όμως απαρατήρητη, γιατί η εφαρμογή της είχε μεγάλο φόρτο μαθηματικών πράξεων. Με την εφεύρεση των ηλεκτρονικών υπολογιστών όμως, πέρασε στην πρώτη γραμμή της έρευνας και η εξέλιξή της ήταν ραγδαία.

Ο Strang [29] μας λέει ότι το πρώτο βήμα ήταν η τροποποίηση των αρχών των ελαχίστων. Επειδή ήταν εύκολο να δει κανείς πώς «διακριτοποιείται» μια διαφορική εξίσωση, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών είχε την πρωτοπορία. Αυτό που δεν είχε γίνει αντιληπτό πλήρως ήταν ότι ακόμη και οι πεπερασμένες διαφορές γίνονται απίστευτα πολύπλοκες σε πραγματικά προβλήματα Τεχνικής, όπως οι τάσεις σε ένα αεροπλάνο ή οι φυσικές συχνότητες του ανθρωπίνου εγκεφάλου. Η πραγματική δυσκολία δεν έγκειται στην επίλυση των εξισώσεων, αλλά στην διατύπωσή τους. Για μια ασύμμετρη περιοχή χρειαζόμαστε ασύμμετρο πλέγμα, αποτελούμενο από τρίγωνα, τετράπλευρα, τετράεδρα ή εξαέδρα, και κατόπιν χρειαζόμαστε έναν συστηματικό τρόπο προσέγγισης των υποκειμένων φυσικών νόμων. Με άλλα λόγια, ο υπολογιστής πρέπει να βοηθήσει όχι μόνο στη λύση του διακριτού προβλήματος, αλλά και στη διατύπωσή του.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μπόρεσε να εκμεταλλευτεί τη δύναμη του υπολογιστή στο να κατασκευάσει μια διακριτή προσέγγιση, να τη λύσει και να παραθέσει αποτελέσματα, περισσότερο από κάθε άλλη τεχνική στην επιστημονική υπολογιστική. Το κλειδί είναι να διατηρήσουμε την απλότητα της βασικής ιδέας και ας είναι οι εφαρμογές πολύπλοκες.

Για να εξηγήσει τη μέθοδο, ο Strang ξεκινάει από την κλασική αρχή των Rayleigh - Ritz που λέει ότι η λύση της $Ax = b$ ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της $P(x) = (1/2)x^T Ax - x^T b$ και κατόπιν εισάγει τη νέα ιδέα των πεπερασμένων στοιχείων.

Εργάζεται με την ίδια διαφορική εξίσωση $-u'' = f(x)$ και τις ίδιες συνοριακές συνθήκες $u(0) = u(1) = 0$ των πεπερασμένων διαφορών. Το πρόβλημα, ομολογουμένως, είναι «απείρων διαστάσεων», το b έχει αντικατασταθεί από τη συνάρτηση f και ο πίνακας A από τον τελεστή $-d^2/dx^2$. Προχωρά ανάλογα και καταγράφει την τετραγωνική μορφή της οποίας ζητείται η ελαχιστοποίηση, αντικαθιστώντας εσωτερικά γινόμενα με ολοκληρώματα

$$P(u) = (1/2)u^T A u - u^T b = (1/2) \int_0^1 u(x)(-u''(x))dx - \int_0^1 u(x)f(x)dx. \quad (2.1-1)$$

Η παράσταση αυτή πρέπει να ελαχιστοποιηθεί, ως προς όλες τις συναρτήσεις u που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες και η συνάρτηση που δίνει το ελάχιστο θα είναι η λύση u . Η διαφορική εξίσωση μετατράπηκε σε αρχή ελαχίστου και απομένει να ολοκληρώσουμε κατά μέρη:

$$\int_0^1 u(-u'')dx = \int_0^1 (u')^2 dx - [uu']_{x=0}^{x=1} \quad \text{άρα} \quad P(u) = (1/2) \int_0^1 (u')^2 dx - \int_0^1 u f dx.$$

Ο όρος uu' είναι μηδέν και στα δύο άκρα, διότι το ίδιο συμβαίνει με την u . Επίσης ο τετραγωνικός όρος $\int (u')^2$ είναι συμμετρικός, όπως η $x^T A x$, καθώς επίσης και θετικός, άρα εξασφαλίζουμε ένα ελάχιστο.

Πώς βρίσκεται αυτό το ελάχιστο; Ο ακριβής υπολογισμός είναι ισοδύναμος με την ακριβή λύση της διαφορικής εξίσωσης και το πρόβλημα αυτό είναι απείρων διαστάσεων. Η αρχή των Rayleigh - Ritz παράγει ένα n -διάστατο πρόβλημα, διαλέγοντας n μόνο δοκιμαστικές συναρτήσεις $u = V_1, \dots, u = V_n$, αποδεχόμενη όλους τους συνδυασμούς $V = y_1 V_1(x) + \dots + y_n V_n(x)$ και υπολογίζοντας τον ειδικό συνδυασμό U που ελαχιστοποιεί την $P(V)$. Η ιδέα είναι να ελαχιστοποιήσουμε υπεράνω ενός υποχώρου, αντί υπεράνω όλων των δυνατών u και η συνάρτηση που δίνει το ελάχιστο είναι η U , αντί της u , ελπίζοντας ότι αυτές οι δύο θα είναι κοντά η μία στην άλλη.

Αντικαθιστώντας την u με την V , η τετραγωνική μορφή γίνεται

$$P(V) = (1/2) \int_0^1 (y_1 V_1' + \dots + y_n V_n')^2 dx - \int_0^1 (y_1 V_1 + \dots + y_n V_n) f dx. \quad (2.1-2)$$

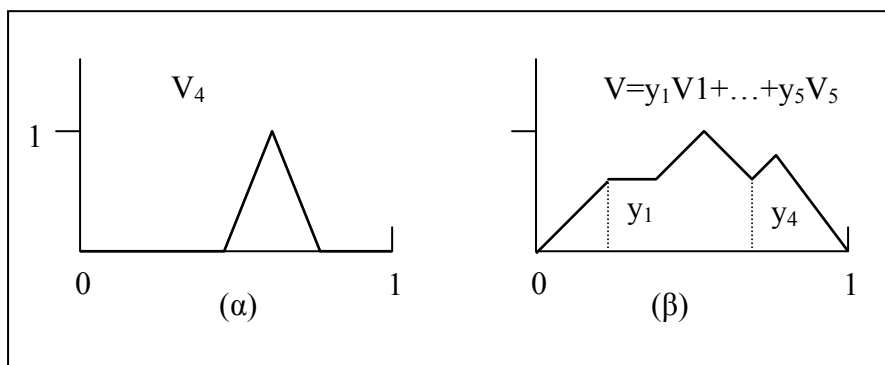
Οι V επελέγησαν εκ των προτέρων και οι άγνωστοι είναι τα $y_1, \dots, y_n$. Εάν βάλουμε αυτά τα βάρη σε ένα διάνυσμα y , τότε η $P(V) = (1/2)y^T A y - y^T b$ αναγνωρίζεται ακριβώς σαν μια από τις οικείες τετραγωνικές μορφές. Τα στοιχεία A_{ij} του πίνακα είναι $\int V_i' V_j' dx =$ συντελεστής του $y_i y_j$ και οι συνιστώσες b_i είναι $\int V_i f dx =$ συντελεστές των y_i . Τώρα μπορεί να βρεθεί το ελάχιστο της $(1/2)y^T A y - y^T b$, πράγμα ισοδύναμο με τη λύση της $A y = b$. Τα βήματα λοιπόν της μεθόδου των Rayleigh- Ritz

είναι (i) διάλεξε δοκιμαστικές συναρτήσεις (ii) υπολόγισε τους συντελεστές A_{ij} και b_j (iii) λύσε την $Ay = b$ και (iv) γράψε την προσεγγιστική λύση $U = y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$.

Τα πάντα εξαρτώνται από το βήμα (i). Εκτός κι αν οι συναρτήσεις V_j είναι εξαιρετικά απλές, τα άλλα βήματα θα είναι, στην πραγματικότητα ακατόρθωτα. Εάν επίσης δεν υπάρχει συνδυασμός των V κοντά στην πραγματική λύση u , τα βήματα θα είναι άχρηστα. Το πρόβλημα είναι να συνδυαστούν και τα δύο, δυνατότητα υπολογισμού και ακρίβεια, και η ιδέα κλειδί που χάρισε την επιτυχία στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, ήταν η χρήση τμηματικά πολυωνυμικών συναρτήσεων ως δοκιμαστικών συναρτήσεων V .

Το απλούστερο και περισσότερο χρησιμοποιούμενο στοιχείο είναι τμηματικά γραμμικό. Αρχικά τοποθετούνται κόμβοι στα σημεία $x_1 = h, x_2 = 2h, \dots, x_n = nh$, όπως ακριβώς και στις πεπερασμένες διαφορές. Στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_n + 1 = 1$, οι συνοριακές απαιτούν από κάθε V να είναι μηδέν. Τότε η V_j είναι η «συνάρτηση - οροφή» που ισούται με 1 στον κόμβο x_j και μηδέν σε όλους τους άλλους κόμβους (βλ. Εικόνα 2.1α), άρα είναι συγκεντρωμένη σε ένα μικρό διάστημα γύρω από τον κόμβο της και μηδενίζεται παντού αλλού. Ο κάθε συνδυασμός $y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$ θα πρέπει να έχει την τιμή y_j στον κόμβο j , διότι όλες οι άλλες V είναι μηδέν. Έτσι το γράφημά της σχεδιάζεται εύκολα (βλ. Εικόνα 2.1β).

Αυτά συμπληρώνουν το βήμα (i). Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές $A_{ij} = \int V_i' V_j' dx$ του «πίνακα ακαμψίας» A . Η κλίση V_j' ισούται με $1/h$ στο μικρό διάστημα αριστερά του x_j και $-1/h$ στο διάστημα δεξιά του. Το ίδιο ισχύει και για την V_i' κοντά στον κόμβο της x_i και εφ'όσον αυτά τα «διπλά διαστήματα» δεν τέμνονται, το γινόμενο $V_i' V_j'$ είναι ταυτοτικά μηδέν. Τα διαστήματα τέμνονται μόνο όταν



Εικόνα 2.1: Συναρτήσεις - οροφές και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους [30].

$$i = j \quad \text{και} \quad \int V_i' V_j' dx = \int \left(\frac{1}{h}\right)^2 + \int \left(\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{2}{h},$$

ή

$$i = j \pm 1 \quad \text{και} \quad \int V_i' V_j' dx = \int \left(\frac{1}{h}\right) \int \left(-\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h}.$$

Συνεπώς ο πίνακας ακαμψίας είναι, στην πραγματικότητα, τριδιαγώνιος:

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αυτό μοιάζει με τις πεπερασμένες διαφορές και οδήγησε σε χιλιάδες συζητήσεις για τη σχέση μεταξύ των δύο μεθόδων. Πιο πολύπλοκα πεπερασμένα στοιχεία – πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού, που ορίζονται σε τρίγωνα ή τετράπλευρα, για μερικές διαφορικές εξισώσεις – παράγουν επίσης αραιούς πίνακες A . Τα πεπερασμένα στοιχεία μπορούν να θεωρηθούν ως ένα συστηματικός τρόπος κατασκευής εξισώσεων διαφορών ακριβείας για ασύμμετρα πλέγματα, οπότε τα πεπερασμένα στοιχεία βρίσκονται στην «τομή» των μεθόδων Rayleigh- Ritz και πεπερασμένων διαφορών. Το ουσιαστικό είναι η απλότητα αυτών των τμηματικά πολυωνυμικών συναρτήσεων, λόγω της οποίας οι κλίσεις τους σε κάθε υποδιάστημα είναι εύκολο να βρεθούν και να ολοκληρωθούν.

Οι συνιστώσες b_j στην δεξιά πλευρά είναι διαφορετικές. Αντί για τη μεμονωμένη τιμή της f στο x_j , όπως στις πεπερασμένες διαφορές, είναι τώρα μια μέση τιμή της f γύρω από το σημείο: $b_j = \int V_j f dx$. Κατόπιν, στο βήμα (iii) λύνουμε το τριδιαγώνιο σύστημα $Ay = b$, που δίνει τους συντελεστές της δοκιμαστικής, ελαχιστοποιούσας συνάρτησης $U = y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$. Τέλος, συνδέοντας όλα αυτά τα ύψη y_j με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουμε μια εικόνα της προσεγγιστικής λύσης U .

Η ιδέα των Rayleigh - Ritz – η ελαχιστοποίηση υπεράνω μιας οικογένειας συναρτήσεων V , πεπερασμένων διαστάσεων, αντί για όλες τις δυνατές u – είναι χρήσιμη τόσο στις εξισώσεις σταθεράς καταστάσεως όσο και στα προβλήματα ιδιοτιμών. Αυτή τη φορά ελαχιστοποιείται το πηλίκο Rayleigh. Το πραγματικό του ελάχιστο είναι η θεμελιώδης συχνότητα λ_1 και το κατά προσέγγιση ελάχιστο Λ_1 θα

αυξηθεί όταν περιορίσουμε την οικογένεια των δοκιμαστικών συναρτήσεων από τις u στις V . Και πάλι το διακριτό πρόβλημα μπορεί να διευθετηθεί. Η αρχή πράγματι εφαρμόζεται, μόνο που θα πρέπει οι συναρτήσεις V_j να υπολογίζονται εύκολα. Έτσι το βήμα που έγινε τα τελευταία 30 χρόνια ήταν τελείως φυσιολογικό και αναπόφευκτο: να εφαρμοστούν οι νέες ιδέες των πεπερασμένων στοιχείων σ' αυτή την από μακρού καθιερωθείσα μεταβολική μορφή του προβλήματος των ιδιοτιμών.

Το καλύτερο παράδειγμα κατά τον Strang είναι το απλούστερο:

$$-u'' = \lambda u, \quad \mu \varepsilon \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Το πρώτο ιδιοδιάνυσμά του είναι $u = \sin \pi x$, με ιδιοτιμή $\lambda_1 = \pi^2$. Η συνάρτηση $u = \sin \pi x$ δίνει το ελάχιστο στο αντίστοιχο πηλίκο Rayleigh

$$R(u) = \frac{u^T [-d^2/dx^2] u}{u^T u} = \frac{\int_0^1 u(-u'') dx}{\int_0^1 u^2 dx} = \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}.$$

Από φυσική άποψη, αυτό είναι το πηλίκο της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια, που ισορροπούν για το ιδιοδιάνυσμα. Κανονικά αυτό το ιδιοδιάνυσμα θα ήταν άγνωστο και για να το προσεγγισθεί θα έπρεπε να παρθούν μόνο υποψήφιες συναρτήσεις $V = y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$:

$$R(u) = \frac{\int_0^1 (y_1 V_1' + \dots + y_n V_n')^2 dx}{\int_0^1 (y_1 V_1 + \dots + y_n V_n)^2 dx} = \frac{y^T Ay}{y^T My}.$$

Αντιμετωπίζεται τώρα το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του $y^T Ay / y^T My$. Εάν ο πίνακας M ήταν ο ταυτοτικός, αυτό θα οδηγούσε στο συνηθισμένο πρόβλημα ιδιοτιμών $Ay = \lambda y$. Όμως ο πίνακας M θα είναι τριδιαγώνιος και αυτή ακριβώς η κατάσταση είναι που οδηγεί στο γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών. Η ελάχιστη τιμή Λ_1 θα είναι η μικρότερη ιδιοτιμή της $Ay = \lambda My$ και θα είναι κοντά στο π^2 . Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα y θα δίνει μια προσέγγιση της ιδιοσυνάρτησης: $U = y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$. Όπως και στο στατικό πρόβλημα, η μέθοδος μπορεί να συνοψισθεί σε τέσσερα βήματα: (i) διάλεξε τα V_j , (ii) υπολόγισε τους A και M , (iii) λύσε το $Ay = \lambda My$, (iii) τύπωσε το Λ_1 και την U .

2.1 Μεθοδολογία Εφαρμογής Της Μεθόδου Των Πεπερασμένων Στοιχείων

2.1.1. Περιγραφή του προβλήματος και εισαγωγή γεωμετρίας φορέα

Το βασικό στοιχείο για την επίλυση ενός προβλήματος είναι ο ακριβής ορισμός του. Άρα πρώτα πρέπει να εντοπιστεί το πρόβλημα, να καθοριστούν οι παράμετροι του, τα σταθερά στοιχεία που αποτελούν τα δεδομένα του προβλήματος καθώς και τα ζητούμενα που αποτελούν τις άγνωστες μεταβλητές.

Μετά πρέπει να δημιουργηθεί το γεωμετρικό μοντέλο της κατασκευής. Για να γίνει αυτό απαιτείται η περιγραφή των χαρακτηριστικών σημείων της, ορισμός δηλαδή των καμπυλών που καθορίζουν τα όρια της (γραμμικό μοντέλο) και η δημιουργία των επιφανειών του φορέα (επιφανειακό μοντέλο), από τα οποία συντίθεται ο όγκος της κατασκευής (χωρικό μοντέλο).

2.1.2. Διακριτοποίηση του φορέα

Η υποδιαίρεση ενός σώματος σε πεπερασμένα στοιχεία είναι μια διαδικασία κατά την οποία κρίνεται η ικανότητα ενός μηχανικού να αποφασίσει για τον αριθμό, το σχήμα, το μέγεθος και τη διάταξη των στοιχείων που θα χρησιμοποιήσει έτσι ώστε το σώμα να αναπαρασταθεί όσο το δυνατόν με μεγαλύτερη ακρίβεια. Ο αριθμός των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν είναι καθοριστικός. Ο αρχικός σκοπός είναι η διακεκριμενοποίηση να γίνεται κατά τέτοιο τρόπο που το σώμα να διαιρείται σε αρκετά μικρά στοιχεία ώστε να μπορεί να προσεγγίσει όσο το δυνατόν καλύτερα την πραγματικότητα. Από την άλλη πλευρά όμως πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ότι όσο καλύτερη υποδιαίρεση γίνεται τόσο μεγαλύτερος κόπος απαιτείται αλλά υπάρχει και η πιθανότητα δημιουργίας ενός δύσχρηστου υπολογιστικού μοντέλου.

Η διακριτοποίηση είναι η διαδικασία μετατροπής ενός φυσικού προβλήματος σε διακριτά γεωμετρικά δεδομένα με σκοπό την ανάλυση. Αφορά τη διαίρεση του φορέα σε τμήματα με πεπερασμένο αριθμό και μέγεθος στοιχείων τα οποία

ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία (finite element). Ανάλογα με τις δυνατότητες παραμόρφωσης που προσδίδονται στα στοιχεία και τις μορφές τους, χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες όπως στοιχεία ράβδου, δοκού, επίπεδα τριγωνικά ή τετραγωνικά, στερεά όπως τετραπλευρικά κ.λ.π. Επομένως η επιλογή του τύπου των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν βασίζεται στην δυνατότητα τους να περιγράψουν την μηχανική συμπεριφορά της κατασκευής με καλύτερη ακρίβεια.

Ο ορισμός των στοιχείων γίνεται αρχικά με την τοποθέτηση των κόμβων (nodes). Σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν οι βαθμοί ελευθερίας (degrees of freedom) του κόμβου μέσω των οποίων ορίζεται η δυνατότητα του κόμβου να μετακινηθεί ή να περιστραφεί. Σε κάθε κόμβο στοιχείου αντιστοιχεί επίσης και ένας αριθμός κομβικών παραμέτρων οι οποίες αποτελούν τις γενικευμένες μετατοπίσεις (οι μετατοπίσεις και οι παράγωγοί τους). Οι παραμορφώσεις σ' ένα στοιχείο συνδέονται με τις μετατοπίσεις. Οι μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του στοιχείου εκφράζονται συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων με τη βοήθεια κάποιας συνάρτησης παρεμβολής ή συνάρτησης μορφής. Συνήθως γι' αυτή την παρεμβολή χρησιμοποιούνται πολυώνυμα. Μια διακριτοποίηση είναι ένα πλέγμα κόμβων και στοιχείων.

Στη διακριτοποίηση περιλαμβάνονται η τοποθέτηση γεωμετρικού συστήματος συντεταγμένων καθώς και η ομαδοποίηση των κόμβων στα στοιχεία. Στο πρόγραμμα MSC MARC 2005, που χρησιμοποιείται στη συγκεκριμένη εργασία, για να γίνει η διακριτοποίηση, οι κόμβοι πρέπει να ανήκουν σε γεωμετρικό σύστημα συντεταγμένων και να συνδέονται με ένα στοιχείο. Τα στοιχεία λοιπόν περιγράφονται ως εξής: βάζοντας τον αριθμό τους, τον τύπο τους και των αριθμό των κόμβων που περικλείουν κάθε στοιχείο εισάγοντας τις φυσικές συντεταγμένες των κόμβων.

Οι πιο φανερές θέσεις για τους κόμβους ή για τις κομβικές γραμμές και τα κομβικά επίπεδα είναι οι θέσεις όπου λαμβάνουν χώρα σημαντικές μεταβολές στη γεωμετρία, τη φόρτιση και στις ιδιότητες του υλικού. Όπως φαίνεται και στο παράδειγμα του σχήματος 3.3.2.1α κρίνεται απαραίτητη η ύπαρξη ενός κόμβου στη θέση που εφαρμόζεται ένα συγκεντρωμένο φορτίο για να μπορεί να αναπαρασταθεί με τα πεπερασμένα στοιχεία κατάλληλα η εξωτερική φόρτιση (με αυτόν τον τρόπο εξωτερικό φορτίο και κομβικό φορτίο συμπίπτουν). Επιπλέον στην περιοχή του σημείου εμφανίζονται έντονες τάσεις και επομένως ένας πυκνότερος κανάβος με κέντρο το σημείο εφαρμογής του φορτίου είναι αναγκαίος. Κόμβοι όμως πρέπει να προβλέπονται και στις περιοχές εκείνες όπου υπάρχει απότομη μεταβολή του

κατανεμημένου φορτίου για τους ανάλογους λόγους.

Αντίστοιχα στις περιοχές εκείνες που έχουμε ασυνέχειες στη γεωμετρία θα πρέπει να προβλέπονται κομβικές γραμμές (οι γραμμές εκείνες που συνδέουν δύο οποιουσδήποτε κόμβους) ώστε όλα τα στοιχεία να έχουν σταθερό πάχος. Επίσης κομβικές γραμμές ή κομβικά επίπεδα πρέπει να προβλέπονται στις περιοχές εκείνες που διαχωρίζονται δύο υλικά με διαφορετικές ιδιότητες.

Η διακριτοποίηση του φορέα μιας κατασκευής πρέπει να γίνεται προσεκτικά έτσι ώστε να περιγράψει, όσο το δυνατό πιο πιστά την πραγματική κατασκευή και τις γεωμετρικές ιδιότητες του φορέα. Ο αριθμός των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν είναι καθοριστικός στην αξιοπιστία του μοντέλου. Για το σκοπό αυτό πραγματοποιούνται διαδοχικές επιλύσεις με διαδοχική πύκνωση του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων ελέγχοντας την σύγκλιση ή απόκλιση των αποτελεσμάτων για τον εντοπισμό του τελικού μοντέλου που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση.

2.2 Τεχνολογία πεπερασμένων στοιχείων στο λογισμικό πρόγραμμα MSC.MARC 2005

Στην παρούσα εργασία, για να γίνει η μελέτη του σύνθετου θερμό- μηχανικού προβλήματος της πέδησης, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πακέτο ηλεκτρονικού υπολογιστή MSC.MARC 2005. Το Mentat είναι το περιβάλλον στο οποίο γίνεται ο σχεδιασμός και γενικότερα η μοντελοποίηση του προβλήματος, ενώ το Marc είναι το λογισμικό πρόγραμμα που εφαρμόζει την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση του προβλήματος.

Το MSC.MARC 2005 αναπτύχθηκε στη βάση της μεθόδου μετατόπισης [30]. Η μεθοδολογία ακαμψίας που χρησιμοποιεί αναθέτει σχέσεις δύναμης – μετατόπισης μέσα από την ακαμψία του συστήματος. Η σχέση δύναμης – μετατόπισης για ένα γραμμικό, στατικό πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως

$$Ku = f. \quad (2.2-1)$$

όπου K είναι ο πίνακας ακαμψίας του συστήματος, u είναι η κομβική μετατόπιση και f είναι το διάνυσμα της δύναμης. Υποθέτοντας ότι έχουν αποδοθεί στην κατασκευή συνοριακές συνθήκες, όσον αφορά στις δυνάμεις και τις μετατοπίσεις η εξίσωση (2.2-

1) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.2-2)$$

όπου u_1 είναι το άγνωστο διάνυσμα μετατόπισης, f_1 είναι το δοσμένο διάνυσμα δύναμης, u_2 είναι το δοσμένο διάνυσμα μετατόπισης και f_2 είναι το διάνυσμα της δύναμης αντίδρασης. Αφού επιλυθεί η εξίσωση (2.2-2) ως προς u , τότε οι τάσεις σε κάθε στοιχείο μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση διατμητικής τάσης – παραμόρφωσης που όσον αφορά στην παραμόρφωση του κόμβου ενός στοιχείου είναι:

$$\varepsilon_{el} = \beta u_{el}. \quad (2.2-3)$$

Οι ορθές τάσεις σε ένα στοιχείο υπολογίζονται από τη σχέση διατμητικών – ορθών τάσεων ως:

$$\sigma_{el} = L \varepsilon_{el}. \quad (2.2-4)$$

όπου σ_{el} και $L \varepsilon_{el}$ είναι ορθές και διατμητικές τάσεις αντίστοιχα και u_{el} είναι το διάνυσμα της παραμόρφωσης που αφορά στα κομβικά σημεία του στοιχείου. Τα β και L είναι συντελεστές διατμητικής τάσης – παραμόρφωσης και ορθής – διατμητικής τάσης αντιστοίχως.

Για δυναμικά προβλήματα η συνεισφορά των μαζών και των αποσβέσεων θα πρέπει να περιληφθεί στο σύστημα. Η εξίσωση που περιγράφει ένα γραμμικό, δυναμικό πρόβλημα είναι:

$$M \ddot{u} + D \dot{u} + K u = f. \quad (2.2-5)$$

όπου M είναι ο πίνακας μάζας του συστήματος, D είναι ο πίνακας απόσβεσης, η εξίσωση (2.2-6) είναι το διάνυσμα της επιτάχυνσης και u είναι το διάνυσμα της ταχύτητας. Η εξίσωση που περιγράφει ένα αναπόσβεστο δυναμικό σύστημα είναι:

$$M \ddot{u} + K u = f. \quad (2.2-6)$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν άλλες διαδικασίες είναι παρόμοιες. Για παράδειγμα η εξίσωση που περιγράφει την ανάλυση του μεταβολικού προβλήματος μετάδοσης θερμότητας είναι:

$$C \dot{T} + H T = Q. \quad (2.2-7)$$

όπου C είναι ο πίνακας θερμικής ικανότητας, H είναι ο πίνακας θερμικής αγωγιμότητας, Q είναι το διάνυσμα ροής της θερμότητας και T είναι το διάνυσμα της

κομβικής θερμοκρασίας. Η εξίσωση (2.2-7) απλοποιείται για το πρόβλημα σταθερής κατάστασης και γίνεται:

$$HT = Q. \quad (2.2-8)$$

Είναι προφανές ότι η εξίσωση που περιγράφει τη μεταφορά θερμότητας σε ένα πρόβλημα σταθερής κατάστασης (2.2-8) και η εξίσωση της στατικής (2.2-1) παίρνουν την ίδια μορφή.

Η εξίσωση που περιγράφει το θερμό – μηχανικό πρόβλημα έχει ως εξής:

$$M \ddot{u} + D(T) \dot{u} + K(T)u = f. \quad (2.2-9)$$

$$C(T) \dot{T} + H(T)T = Q + Q'. \quad (2.2-10)$$

Στις εξισώσεις (2.2-9) και (2.2-10) ο πίνακας απόσβεσης D , ο πίνακας ακαμψίας K , ο πίνακας θερμικής ικανότητας C και ο πίνακας θερμικής αγωγιμότητας H είναι όλοι εξαρτώμενοι από τη θερμοκρασία. Το Q' είναι η εσωτερική θερμότητα που αναπτύσσεται λόγω ανελαστικής παραμόρφωσης. Η ζεύξη του προβλήματος μετάδοσης της θερμότητας και του μηχανικού προβλήματος γίνεται μέσω των εξαρτώμενων από τη θερμοκρασία μηχανικών ιδιοτήτων και της εσωτερικά αναπτυσσόμενης θερμότητας. Εάν πραγματοποιηθεί μια ανανεωμένη *Λαγκρανζιανή* ανάλυση, τα K και H εξαρτώνται από προηγούμενες παραμορφώσεις.

Οι εξισώσεις που περιγράφονται παραπάνω είναι είτε αλγεβρικές εξισώσεις είτε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Η μεταβλητή του χρόνου είναι συνεχής για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Για την απλοποίηση των διαφορικών εξισώσεων και την μετατροπή τους σε αλγεβρικές χρησιμοποιείται μια διαδικασία ολοκλήρωσης (για παράδειγμα *Newmark-Beta*, *Houbolt*, ή *κεντρικών διαφορών* για δυναμικά προβλήματα, και *προς τα πίσω διαφοράς* για προβλήματα μετάδοσης θερμότητας). Η τελική μορφή των σχέσεων που περιγράφουν όλες τις διαδικασίες ανάλυσης ενός προβλήματος, είναι συνεπώς, ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων.

Παραπάνω παρουσιάστηκαν πίνακες συστήματος οι οποίοι συναρμολογήθηκαν από πίνακες στοιχείων μέσα στο σύστημα. Για παράδειγμα, ο πίνακας ακαμψίας του συστήματος, εκφράζεται ως άθροισμα των πινάκων ακαμψίας των στοιχείων του συστήματος:

$$K = \sum_{i=1}^N K_i^{el}. \quad (2.2-11)$$

όπου το N είναι το πλήθος των στοιχείων που αποτελούν το σύστημα. Όπως είδαμε

και στην προηγούμενη παράγραφο, ο πίνακας ακαμψίας του συστήματος είναι ένας συμμετρικός ταινιοειδής πίνακας. Όταν χρησιμοποιείται επίλυση στοιχείο προς στοιχείο, δεν σχηματίζεται ποτέ ο συνολικός πίνακας ακαμψίας του συστήματος. Ο πίνακας ακαμψίας ενός στοιχείου μπορεί να εκφραστεί ως:

$$K^{el} = \int_{V^{el}} \beta^T L \beta dV^{el} . \quad (2.2-12)$$

όπου V^{el} είναι ο όγκος του στοιχείου, β^* είναι ο συντελεστής διατμητικής τάσης – παραμόρφωσης και L είναι ο συντελεστής ορθών – διατμητικών τάσεων.

$$\varepsilon = \beta u . \quad (2.2-13)$$

$$\sigma = L \varepsilon . \quad (2.2-14)$$

Ο πίνακας της μάζας μπορεί να εκφραστεί ως:

$$M^{el} = \int_{V^{el}} N^T \rho N dV . \quad (2.2-15)$$

Η ολοκλήρωση στην εξίσωση (2.2-12) γίνεται αριθμητικά στο MSC.MARC 2005 και εξαρτάται από την επιλογή των σημείων ολοκλήρωσης. Ο πίνακας ακαμψίας στοιχείου μπορεί να ολοκληρωθεί πλήρως ή μερικώς, ενώ ο πίνακας μάζας ολοκληρώνεται πάντοτε πλήρως.

Στην εξίσωση (2.2-1) το διάνυσμα δύναμης f στον κόμβο περιλαμβάνει τη συνεισφορά πολλών ειδών φορτίσεων.

$$f = f_{point} + f_{surface} + f_{body} + f^* . \quad (2.2-16)$$

όπου το f_{point} είναι διάνυσμα σημειακού φορτίου, το $f_{surface}$ είναι διάνυσμα φορτίου κατανεμημένου σε επιφάνεια και το f_{body} είναι διάνυσμα φορτίου κατανεμημένου σε όγκο. Το f^* αναφέρεται σε άλλου είδους φορτίσεις όπως θερμικές και άλλες. Οι σημειακές φορτίσεις σχετίζονται άμεσα με τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων και έτσι μπορούν να προστεθούν απ' ευθείας στο διάνυσμα δύναμης του κόμβου. Για τα κατανεμημένα φορτία $f_{surface}$ και f_{body} πρέπει να υπολογισθούν τα ισοδύναμα διανύσματα κομβικού φορτίου για να προστεθούν στο διάνυσμα δύναμης του κόμβου. Στο MSC.MARC 2005 αυτός ο υπολογισμός γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση του κατανεμημένου φορτίου στην επιφάνεια ή τον όγκο στον οποίο εφαρμόζεται και μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$f_{surface} = \int_A N^T \rho dA . \quad (2.2-17)$$

* Σημείωση: Ο πίνακας β εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του στοιχείου

$$f_{body} = \int_V N^T \rho dV . \quad (2.2-18)$$

όπου ρ είναι η πίεση.

2.2 Ανάλυση επαφής

2.2.1 Γενικά

Η προσομοίωση πολλών φυσικών προβλημάτων απαιτεί την ικανότητα μοντελοποίησης του φαινομένου της επαφής. Αυτό περιλαμβάνει μεταξύ άλλων, την ανάλυση ανοχών συναρμολόγησης, την ανάλυση ελαστικών και την ανάλυση διαφόρων κατασκευαστικών διαδικασιών όπως η σφυρηλασία, η ολκή και άλλων. Η ανάλυση της συμπεριφοράς της επαφής είναι πολύπλοκη, εξαιτίας της ανάγκης για ακριβή παρακολούθηση της κίνησης πολλαπλών γεωμετρικών σωμάτων και της κίνησης που προκύπτει από την αλληλεπίδρασή τους μετά την εμφάνιση της επαφής. Αυτό περιλαμβάνει την απεικόνιση της τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ επιφανειών και τη μετάδοση θερμότητας μεταξύ σωμάτων, όταν είναι απαραίτητο. Ο αριθμητικός στόχος είναι να ανιχνευθεί η κίνηση των σωμάτων, να εφαρμοσθεί περιορισμός μη – διείσδυσης και να εφαρμοστούν κατάλληλες συνοριακές συνθήκες για την προσομοίωση της τριβικής συμπεριφοράς και της μετάδοσης θερμότητας. Διάφορες διαδικασίες έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση αυτών των προβλημάτων, όπως οι *λαγκρανζιανές μέθοδοι*, οι *μέθοδοι ποινής*, οι *ευθείς περιορισμοί* και άλλες. Επιπροσθέτως, η προσομοίωση επαφής συχνά απαιτεί τη χρήση ειδικών στοιχείων ανοχής. Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα κυριότερα μέρη της ανάλυσης επαφής [30].

2.2.2 Αριθμητικές μέθοδοι στην ανάλυση επαφής

Πολλαπλασιαστές Lagrange

Στην ανάλυση επαφής, ουσιαστικά λύνεται ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης

υπό περιορισμόν, ο οποίος είναι ο περιορισμός μη διείσδυσης. Η τεχνική των *πολλαπλασιαστών Lagrange* είναι η πιο κοινή διαδικασία για την εφαρμογή μαθηματικών περιορισμών σε ένα σύστημα. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο, αν οι περιορισμοί γραφούν με ακρίβεια, δεν θα προκύψει διείσδυση. Δυστυχώς οι *πολλαπλασιαστές Lagrange* οδηγούν σε υπολογιστικές δυσκολίες, διότι η εφαρμογή τους έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός μη – θετικά ορισμένου συστήματος. Αυτό απαιτεί πρόσθετες λειτουργίες για την εξασφάλιση μιας ακριβούς και σταθερής λύσης, με αποτέλεσμα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους. Άλλο ένα πρόβλημα με αυτή τη μέθοδο είναι ότι δεν υπάρχει μάζα στο βαθμό ελευθερίας του *πολλαπλασιαστή Lagrange*. Αυτό οδηγεί στη δημιουργία ενός γενικού πίνακα μάζας ο οποίος δεν είναι δυνατόν να αντιστραφεί. Αυτό οδηγεί στην ανικανότητα της μεθόδου να εφαρμοστεί σε δυναμικά προβλήματα.

Μέθοδοι ποινής

Η *μέθοδος ποινής* είναι μία εναλλακτική διαδικασία για την εφαρμογή των περιορισμών της επαφής. Περιορίζει την κίνηση των σωμάτων εφαρμόζοντας μια ποινή στο μέγεθος της διείσδυσης που προκύπτει μεταξύ τους. Η προσέγγιση της ποινής μπορεί να θεωρηθεί ως ανάλογη ενός μη γραμμικού ελατηρίου μεταξύ των σωμάτων. Η μέθοδος αυτή είναι σχετικά εύκολο να εφαρμοστεί και χρησιμοποιείται ευρέως στην ανάλυση δυναμικών προβλημάτων, αν και μπορεί να οδηγήσει σε ένα πολύ δύσκαμπτο πίνακα όταν πρόκειται για επαφή μεταξύ μη παραμορφώσιμων σωμάτων.

Υβριδικές και ανάμεικτες μέθοδοι

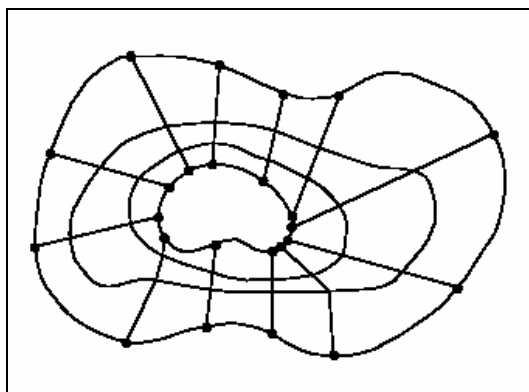
Στην *υβριδική μέθοδο* το στοιχείο επαφής προέρχεται από μια συνδυασμένη ενεργειακή αρχή μέσω της εφαρμογής της συνέχειας της επιφάνειας επαφής ως περιορισμού και θεωρώντας της δυνάμεις της επαφής ως πρόσθετα στοιχεία. Οι *ανάμεικτες μέθοδοι* χρησιμοποιούνται για την υπερπήδηση των δυσκολιών της μεθόδου *Lagrange*.

Ευθείς περιορισμοί

Άλλη μία μέθοδος για την επίλυση του προβλήματος της επαφής είναι η μέθοδος των *ευθέων περιορισμών*. Σε αυτή τη διαδικασία, παρακολουθείται η κίνηση των σωμάτων και μόλις προκύψει επαφή, εφαρμόζονται ευθείς περιορισμοί στην κίνηση μέσω των συνοριακών συνθηκών – τόσο κινηματικοί περιορισμοί στους μετασχηματισμένους βαθμούς ελευθερίας, όσο και στις κομβικές δυνάμεις. Αυτή η μέθοδος μπορεί να είναι πολύ ακριβής εάν το πρόγραμμα μπορεί να προβλέψει τότε ακριβώς θα προκύψει η επαφή και δεν χρειάζεται ειδικά στοιχεία ανοχής.

2.2.3 Ορισμός των προς επαφή σωμάτων

Υπάρχουν δύο είδη σωμάτων στην ανάλυση επαφής – παραμορφώσιμα και μη παραμορφώσιμα. Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 2.2 τα παραμορφώσιμα σώματα αποτελούνται από ένα σύνολο πεπερασμένων στοιχείων.



Εικόνα 2.2: Παραμορφώσιμο σώμα [30].

Αυτό το σώμα έχει τρία σημεία κλειδιά:

1. Τα πεπερασμένα στοιχεία από τα οποία αποτελείται.
2. Τους κόμβους που βρίσκονται στην εξωτερική του επιφάνεια και μπορούν να έρθουν σε επαφή με άλλα σώματα ή με το ίδιο. Αυτοί οι κόμβοι θεωρούνται εν δυνάμει κόμβοι επαφής.

3. Τις ακμές (2D) ή τις έδρες (3D) που περιγράφουν την εξωτερική του επιφάνεια με την οποία ένας κόμβος ή ένα άλλο σώμα μπορεί να έρθει σε επαφή. Αυτές οι ακμές / έδρες θεωρούνται εν δυνάμει τομείς επαφής.

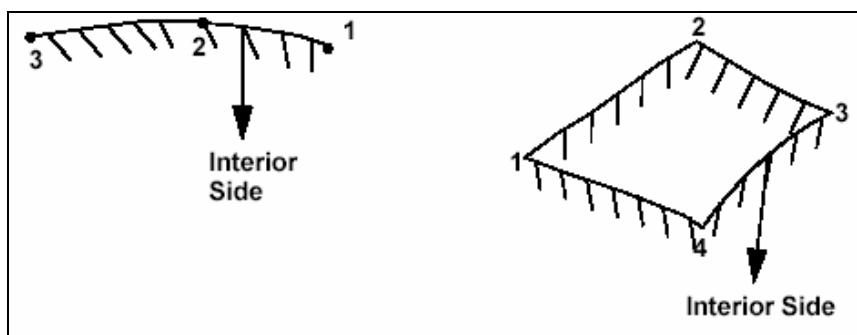
Είναι σημαντικό ότι αυτό το σώμα μπορεί να είναι πολλαπλώς ενωμένο (δηλ. να περιέχει οπές). Είναι ακόμη δυνατόν να αποτελείται τόσο από τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία, όσο και από τετράπλευρα, αν είναι δισδιάστατο και από τετράεδρα και εξαέδρα πεπερασμένα στοιχεία αν είναι τρισδιάστατο. Ακόμη είναι διαθέσιμα για ανάλυση επαφής, στοιχεία ράβδοι και στοιχεία κελύφη.

Τα μη παραμορφώσιμα σώματα αποτελούνται από γραμμές όταν είναι δισδιάστατα και από επιφάνειες όταν είναι τρισδιάστατα. Μπορούν ακόμη να αποτελούνται από ειδικά, «θερμικά» πεπερασμένα στοιχεία όταν πρόκειται για θερμό-μηχανική ανάλυση. Το πιο σημαντικό σημείο των μη παραμορφώσιμων σωμάτων είναι αυτό που δηλώνει και το όνομά τους, ότι δηλαδή δεν παραμορφώνονται. Τα μη παραμορφώσιμα σώματα μπορούν να έρθουν σε επαφή με παραμορφώσιμα σώματα, αλλά δεν μπορούν να έρθουν σε επαφή με άλλα μη παραμορφώσιμα σώματα. Μπορούν να δημιουργηθούν με τη βοήθεια κάποιου συστήματος CAD και να περάσουν στο MSC.MARC 2005 μέσα από το σχεδιαστικό κομμάτι του λογισμικού συστήματος, το Mentat, ή να δημιουργηθούν απευθείας χρησιμοποιώντας το Mentat. Υπάρχουν διάφοροι τύποι γραμμών και επιφανειών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν όπως φαίνεται και στην Εικόνα 2.3.

2D	3D
line	4-node patch
circular arc	ruled surface
spline	surface of revolution
NURB	Bezier
	poly-surface
	cylinder
	sphere
	NURB
	trimmed NURB

Εικόνα 2.3: Διάφορα είδη γραμμών και επιφανειών για τη δημιουργία μη παραμορφώσιμων σωμάτων.

Όλες αυτές οι γεωμετρικές οντότητες μπορούν να προσεγγισθούν με δύο τρόπους, είτε τμηματικά είτε αναλυτικά. Όταν θεωρούνται τμηματικά, διαιρούνται σε ευθύγραμμα τμήματα – οι γραμμές – και σε επίπεδα οι επιφάνειες. Ελέγχοντας την πυκνότητα της διαίρεσης μπορεί να ρυθμιστεί η ακρίβεια αυτής της προσέγγισης. Όταν προσεγγίζονται αναλυτικά βελτιώνεται η ακρίβεια της αναπαράστασης. Άλλο ένα σημαντικό σημείο κατά τον καθορισμό της γεωμετρίας των μη παραμορφώσιμων σωμάτων είναι ο ορισμός της εσωτερικής και της εξωτερικής τους πλευράς. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού καθώς ακολουθείται μια γραμμή στις δύο διαστάσεις και καθώς ακολουθείται ένα κομμάτι επιφανείας στις τρεις διαστάσεις.



Εικόνα 2.4: Προσανατολισμός τομέων μη παραμορφώσιμων σωμάτων [30].

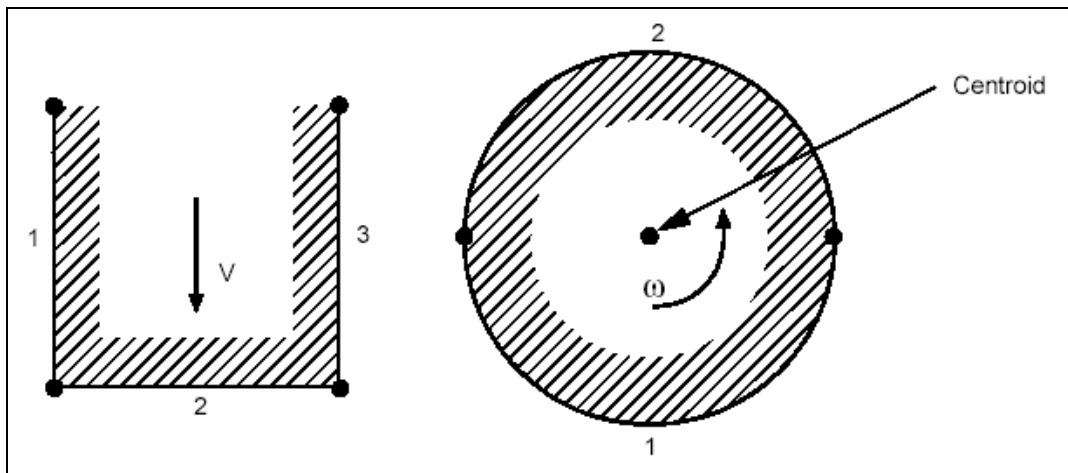
2.2.4 Κίνηση των προς επαφή σωμάτων

Η κίνηση των παραμορφώσιμων σωμάτων καθορίζεται συμβατικά από την εφαρμογή μετακινήσεων, δυνάμεων και κατανεμημένων φορτίων σε αυτά. Είναι προτιμότερο να μην εφαρμόζονται μετακινήσεις ή σημειακά φορτία σε κόμβους οι οποίοι μπορεί να έλθουν σε επαφή με άλλα μη παραμορφώσιμα σώματα. Αν είναι απαραίτητος ο καθορισμός μιας μετακίνησης είναι καλύτερο να δημιουργηθεί ένα νέο μη παραμορφώσιμο σώμα και να εφαρμοστεί η κίνηση σε αυτό. Οι επιφάνειες συμμετρίας αντιμετωπίζονται σαν να είναι ειδικά σώματα τα οποία έχουν την ιδιότητα να μην εμφανίζουν τριβή και οι κόμβοι τους να μην διαχωρίζονται.

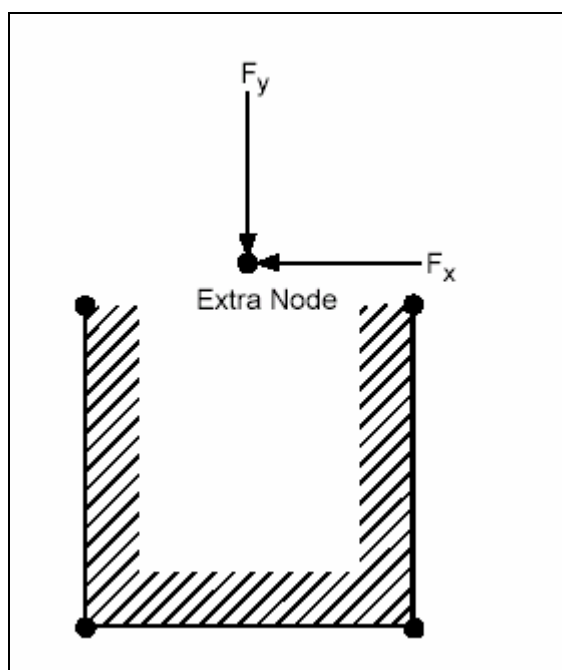
Υπάρχουν τρεις τρόποι να καθοριστεί η κίνηση μη παραμορφώσιμων επιφανειών:

- Καθορισμένη ταχύτητα.
- Καθορισμένη θέση.
- Καθορισμένο φορτίο.

Σχετιζόμενο με ένα μη παραμορφώσιμο σώμα, είναι ένα σημείο το οποίο ονομάζεται κέντρο περιστροφής (centroid). Όταν επιλέγεται μια από τις δύο πρώτες μεθόδους, καθορίζεται η μεταφορική κίνηση και η περιστροφική κίνηση αυτού του σημείου, γύρω από έναν άξονα ο οποίος περνάει από αυτό το σημείο (βλ. Εικόνα 2.5). Η διεύθυνση του άξονα αυτού, μπορεί να καθοριστεί για τρισδιάστατα προβλήματα, ενώ για προβλήματα στις δύο διαστάσεις ο άξονας περιστροφής είναι μια γραμμή παράλληλη με το επίπεδο. Όταν χρησιμοποιούνται μη παραμορφώσιμα σώματα, ελεγχόμενα από φορτία, ένας πρόσθετος κόμβος σχετίζεται με κάθε μη παραμορφώσιμο σώμα (βλ. Εικόνα 2.6). Έτσι το φορτίο μεταφέρεται στους κόμβους που έρχονται σε επαφή με την μη παραμορφώσιμη επιφάνεια.



Εικόνα 2.5: Μη παραμορφώσιμη επιφάνεια ελεγχόμενη από ταχύτητα [30].



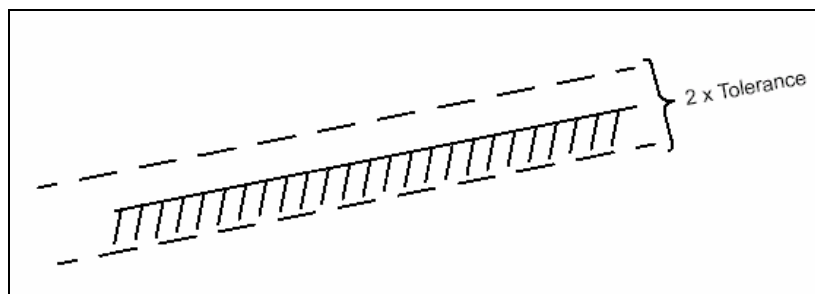
Εικόνα 2.6: Μη παραμορφώσιμη επιφάνεια ελεγχόμενη από φορτίο [30].

2.2.5 Ανίχνευση της επαφής

Κατά τη βηματική διαδικασία επίλυσης, κάθε προς επαφή κόμβος, ελέγχεται αρχικά για να διαπιστωθεί αν βρίσκεται κοντά σε έναν τομέα επαφής. Οι τομείς επαφής είναι είτε ακμές άλλων δισδιάστατων παραμορφώσιμων σωμάτων, είτε έδρες άλλων τρισδιάστατων σωμάτων, είτε τομείς μη παραμορφώσιμων σωμάτων. Εξ ορισμού κάθε κόμβος, θα μπορούσε να έρθει σε επαφή με οποιονδήποτε άλλον τομέα, περιλαμβανομένων και τομέων που ανήκουν στο ίδιο σώμα με τον κόμβο. Αυτό επιτρέπει σε ένα σώμα να έρθει σε επαφή με τον εαυτό του. Για την απλοποίηση των υπολογισμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί η επιλογή του **πίνακα επαφής**, για να καθοριστεί αν ένα συγκεκριμένο σώμα μπορεί ή όχι να έρθει σε επαφή με τον εαυτό του.

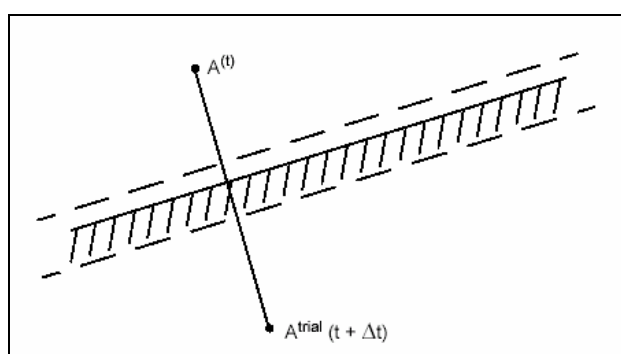
Εξαιτίας της πιθανής ύπαρξης μεγάλου αριθμού κόμβων και τομέων, έχουν αναπτυχθεί επαρκείς αλγόριθμοι για την επίλυση αυτών των διαδικασιών. Ένας αλγόριθμος περικλείοντος κουτιού χρησιμοποιείται, για να ξεκαθαριστεί γρήγορα αν ένας κόμβος βρίσκεται κοντά σε έναν τομέα επαφής. Αν ο κόμβος περάσει μέσα στο κουτί, τότε χρησιμοποιούνται πιο ενδελεχείς τεχνικές για τον καθορισμό της ακριβούς κατάστασης του κόμβου.

Κατά τη διαδικασία της επαφής, ένας κόμβος είναι σχετικά δύσκολο να έρθει ακριβώς σε επαφή με μια επιφάνεια. Γι' αυτό το λόγο μια ανοχή επαφής σχετίζεται με κάθε επιφάνεια (βλ. Εικόνα 2.7).



Εικόνα 2.7: Ανοχή επαφής [30].

Αν ένας κόμβος βρεθεί μέσα στην ανοχή επαφής, τότε θεωρείται ότι έρχεται σε επαφή με τον συγκεκριμένο τομέα. Η ανοχή επαφής υπολογίζεται από το πρόγραμμα, ως μικρότερη από το 5% της πλευράς του μικρότερου πεπερασμένου στοιχείου. Είναι ακόμη δυνατόν να καθοριστεί κατά βούληση η ανοχή επαφής από τον χρήστη του προγράμματος. Κατά τη διάρκεια ενός βήματος επίλυσης, αν ένας κόμβος A κινηθεί από το $A^{(t)}$ στο $A^{(trial)}(t + \Delta t)$ όπου $A^{(trial)}(t + \Delta t)$ είναι μέσα στην ανοχή επαφής, τότε ο κόμβος θεωρείται ότι έχει εισχωρήσει στην επιφάνεια. Σε αυτήν την περίπτωση το βήμα είτε διαιρείται σε υπό – βήματα, είτε μειώνεται σε μέγεθος (βλ. Εικόνα 2.8).



Εικόνα 2.8: Δοκιμαστική μετατόπιση με εισχώρηση [30].

Το μέγεθος της ανοχής επαφής έχει καθοριστική σημασία για το υπολογιστικό κόστος και την ακρίβεια της λύσης. Αν η ανοχή επαφής είναι πολύ μικρή, τότε η ανίχνευση της επαφής καθίσταται δύσκολη με αποτέλεσμα το υψηλότερο

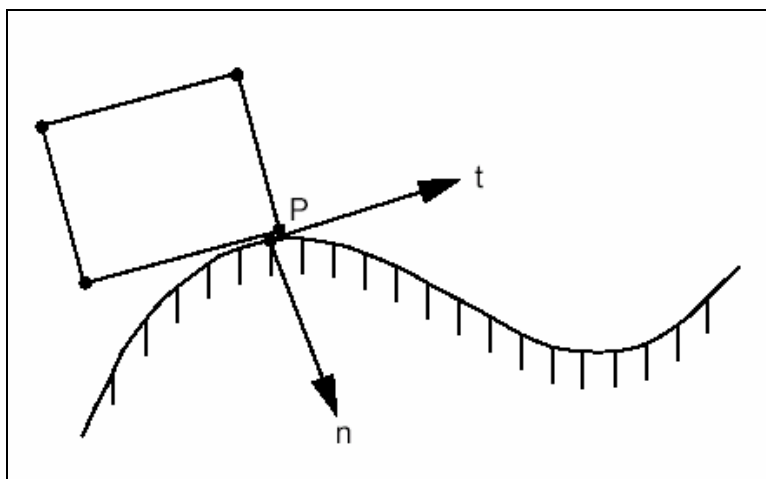
υπολογιστικό κόστος. Ακόμη, πολλοί κόμβοι, μπορεί να θεωρηθούν ότι εισχωρούν, με αποτέλεσμα να αυξηθεί η διαίρεση των βημάτων επίλυσης αυξάνοντας το υπολογιστικό κόστος. Αν η ανοχή επαφής είναι πολύ μεγάλη, τότε κάποιοι κόμβοι θεωρείται ότι έρχονται σε επαφή πρόωρα, με αποτέλεσμα την απώλεια της ακρίβειας. Επιπροσθέτως, κάποιοι κόμβοι μπορεί να «εισχωρήσουν» στην επιφάνεια σε μεγάλο βαθμό.

2.2.6 Εφαρμογή περιορισμών

Για την επαφή μεταξύ ενός παραμορφώσιμου σώματος και μιας μη παραμορφώσιμης επιφάνειας, ο περιορισμός που σχετίζεται με τη μη διείσδυση, επιτυγχάνεται με τη μετατροπή των βαθμών ελευθερίας του προς επαφή κόμβου και την εφαρμογή μιας συνοριακής συνθήκης για την κάθετη μετατόπιση. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε την επίλυση του παρακάτω συστήματος:

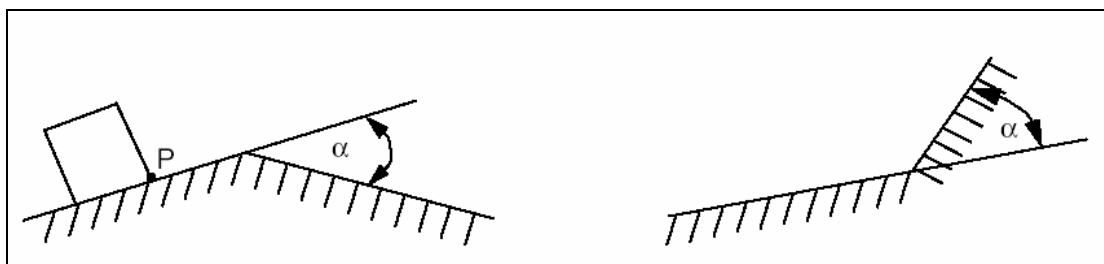
$$\begin{bmatrix} K_{\hat{a}\hat{a}} & K_{\hat{a}b} \\ K_{b\hat{a}} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\hat{a}} \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{\hat{a}} \\ f_b \end{Bmatrix}.$$

όπου το $\hat{a}$ αναπαριστά τους κόμβους σε επαφή, οι οποίοι έχουν τοπική μετατροπή και το $\hat{b}$ αναπαριστά τους κόμβους που δεν εφάπτονται πουθενά και έτσι δεν έχουν υποστεί καμία μετατροπή. Στους κόμβους που έχουν υποστεί μετατροπή, η μετατόπιση στην κάθετη διεύθυνση περιορίζεται έτσι ώστε το $\delta_{\hat{a}n}$ να είναι ίσο με τη βηματική, κάθετη μετατόπιση του μη παραμορφώσιμου σώματος στο σημείο επαφής (βλ. Εικόνα 2.9).



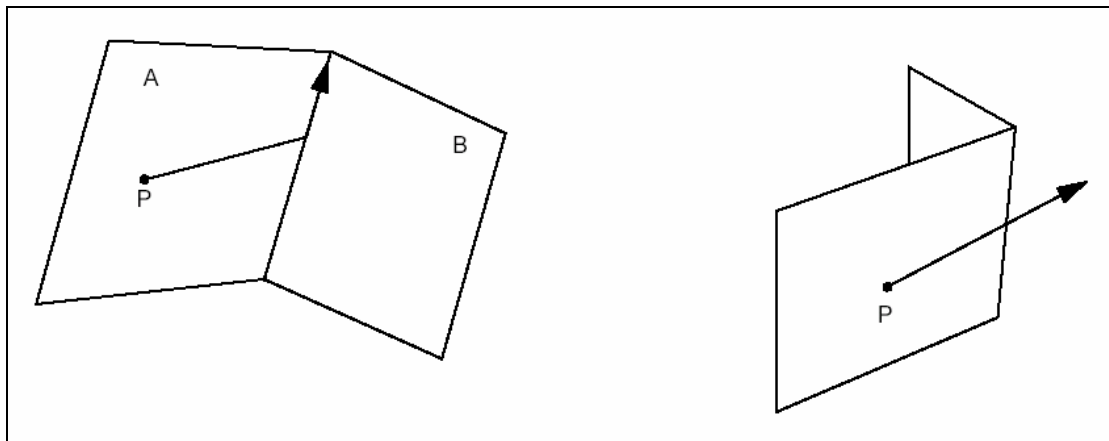
Εικόνα 2.9: Σύστημα που έχει υποστεί μετατροπή (2D) [30].

Καθώς ένα μη παραμορφώσιμο σώμα, μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια τμηματικά γραμμική ή σαν μια αναλυτική (NURB) επιφάνεια, χρησιμοποιούνται δύο διαδικασίες. Για τμηματικά γραμμικές αναπαραστάσεις, η κάθετη μετατόπιση είναι συνεχής μέχρι ο κόμβος P να συναντήσει μια γωνία μεταξύ δύο τομέων όπως φαίνεται στο Εικόνα 2.3.6.2. Κατά τη διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας μπορεί να προκύψει μία από τις τρεις παρακάτω καταστάσεις. Αν η γωνία α είναι μικρή ($-\alpha_{\text{smooth}} < \alpha < \alpha_{\text{smooth}}$), τότε ο κόμβος P περνά στον επόμενο τομέα. Σε αυτή την περίπτωση η κάθετη μετατόπιση επαναπροσδιορίζεται με βάση το νέο τομέα. Αν η γωνία α είναι μεγάλη ($\alpha > \alpha_{\text{smooth}}$ ή $\alpha < -\alpha_{\text{smooth}}$), τότε ο κόμβος διακόπτει την επαφή με την επιφάνεια αν βρίσκεται στην εξωτερική πλευρά της γωνίας ή κολλάει στην επιφάνεια αν βρίσκεται στην εσωτερική πλευρά της γωνίας. Η τιμή της α_{smooth} είναι σημαντική για τον έλεγχο του υπολογιστικού κόστους. Μια μεγάλη τιμή για την α_{smooth} μειώνει το κόστος, αλλά μπορεί να οδηγήσει σε ανακρίβειες. Η προκαθορισμένες τιμές του προγράμματος είναι 8,625 μοίρες για δισδιάστατη ανάλυση και 20 μοίρες για τρισδιάστατη.



Εικόνα 2.10: Γωνιακές συνθήκες για εξωτερική και εσωτερική πλευρά αντίστοιχα (2D) [30].

Στις τρεις διαστάσεις οι γωνιακές συνθήκες είναι περισσότερο πολύπλοκες. Ένας κόμβος (P) σε επαφή με έναν επίπεδο τομέα A, γλιστράει ελεύθερα μέχρι να συναντήσει την τομή μεταξύ δύο τομέων. Αν βρίσκεται στην εσωτερική πλευρά, τότε προσπαθεί αρχικά να κινηθεί πάνω στην τομή, πριν περάσει στον τομέα B (βλ. Εικόνα 2.11). Αυτή είναι και η φυσική ακολουθία της κίνησης (προς τη μικρότερη ενεργειακή κατάσταση). Αυτές οι γωνιακές συνθήκες ισχύουν και στην περίπτωση της ανάλυσης επαφής μεταξύ παραμορφώσιμων σωμάτων. Εξαιτίας του γεγονότος ότι τα σώματα αλλάζουν συνεχώς Εικόνα, οι γωνιακές συνθήκες επαναπροσδιορίζονται συνεχώς.



Εικόνα 2.11: Γωνιακές συνθήκες για εσωτερική και εξωτερική πλευρά αντίστοιχα (3D) [30].

Όταν ένα μη παραμορφώσιμο σώμα αναπαρίσταται σαν αναλυτική επιφάνεια, η κάθετη μετατόπιση επαναπροσδιορίζεται σε κάθε επανάληψη με βάση τη θέση του κόμβου κάθε στιγμή. Αυτό οδηγεί σε μια ακριβέστερη λύση, αλλά έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος εξαιτίας της αναπαράστασης NURB.

Όταν ένας κόμβος ενός παραμορφώσιμου σώματος έρθει σε επαφή με ένα άλλο παραμορφώσιμο σώμα, αυτομάτως εφαρμόζεται ένας περιορισμός πολλαπλών σημείων. Γνωρίζοντας τις εξωτερικές ακμές (2D) ή τις εξωτερικές πλευρές (3D) των άλλων παραμορφώσιμων σωμάτων, σχηματίζεται ένα σύνολο περιορισμών. Για διδιάστατη ανάλυση περιορίζονται τρεις κόμβοι – δύο από την ακμή και ο εφαπτόμενος κόμβος. Στις τρεις διαστάσεις ο αριθμός των περιοριζόμενων κόμβων

είναι πέντε – τέσσερις από τον επίπεδο τομέα και ο εφαπτόμενος κόμβος. Η εξίσωση των περιορισμών είναι τέτοια ώστε ο εφαπτόμενος κόμβος να μπορεί να γλιστρήσει πάνω στον τομέα υποκείμενος στις εκάστοτε συνθήκες τριβής. Αυτό οδηγεί σε μια μη ομογενή, μη γραμμική εξίσωση περιορισμών.

Κατά τη διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας, ένας κόμβος μπορεί να γλιστρήσει από έναν τομέα σε έναν άλλο, αλλάζοντας κάθε φορά τους κόμβους που σχετίζονται με τον περιορισμό.

2.2.7 Μοντελοποίηση της τριβής

Η τριβή είναι ένα πολύπλοκο φυσικό φαινόμενο που περιλαμβάνει τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας στην οποία εμφανίζεται όπως την τραχύτητα, τη θερμοκρασία, την ορθή τάση και τη σχετική ταχύτητα. Η κατανόηση της φυσικής της τριβής συνεχίζει να είναι ένα θέμα για συνεχή επιστημονική έρευνα. Συνεπώς η αριθμητική μοντελοποίηση του φαινομένου έχει απλοποιηθεί σε δύο ιδανικά μοντέλα.

Το πιο δημοφιλές μοντέλο είναι το μοντέλο τριβής **Coulomb**. Αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται στις περισσότερες εφαρμογές, εκτός από εφαρμογές μορφοποίησης όγκου, όπως είναι η σφυρηλασία. Το μοντέλο **Coulomb** ορίζεται ως:

$$\sigma_{fr} \leq -\mu \sigma_n \cdot t.$$

όπου

σ_n είναι η ορθή τάση.

σ_{fr} είναι η εφαπτομένη τάση (τάση τριβής).

μ είναι ο συντελεστής τριβής.

t είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην κατεύθυνση της σχετικής ταχύτητας.

$$t = \frac{V_r}{|V_r|}.$$

όπου V_r είναι η σχετική ταχύτητα ολίσθησης.

Συχνά το μοντέλο Coulomb γράφεται σε σχέση με τις δυνάμεις:

$$f_t \leq -\mu f_n \cdot t.$$

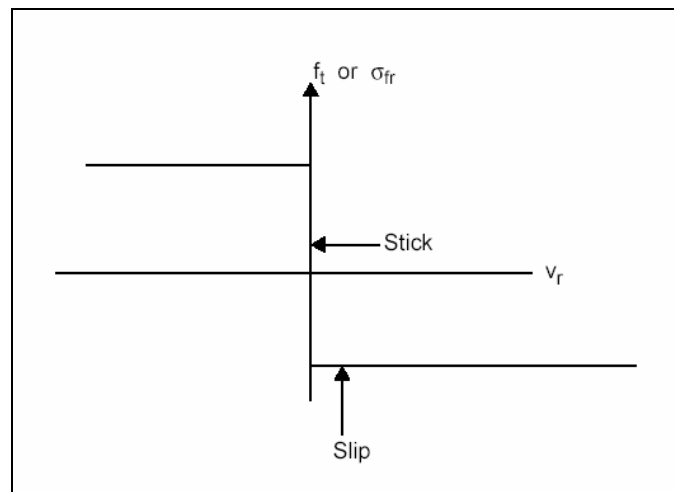
όπου

f_t είναι η εφαπτομένη δύναμη.

f_n είναι η κάθετη αντίδραση.

Αρκετά συχνά σε προβλήματα επαφής, δημιουργούνται ουδέτερες γραμμές. Αυτό σημαίνει ότι επάνω σε μια επιφάνεια επαφής, υλικό ρέει προς μια κατεύθυνση σε ένα κομμάτι της επιφάνειας και προς την αντίθετη κατεύθυνση σε ένα άλλο κομμάτι της επιφάνειας. Αυτές οι ουδέτερες γραμμές δεν είναι γνωστές, εκ των προτέρων, συνήθως.

Για μια δεδομένη κάθετη τάση, η τάση της τριβής έχει συμπεριφορά βηματικής συνάρτησης με βάση την τιμή του v_r ή την τιμή του Δu (βλ. Εικόνα 2.12).



Εικόνα 2.12: Το μοντέλο τριβής Coulomb [30].

Αυτή η ασυνέχεια στην τιμή του σ_{fr} μπορεί να οδηγήσει σε αριθμητικές δυσκολίες έτσι χρησιμοποιείται ένα διαφοροποιημένο μοντέλο τριβής **Coulomb**.

$$\sigma_{fr} \leq -\mu\sigma_n \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{V_r}{RVCNST}\right) \cdot t.$$

Στην πραγματικότητα το $RVCNST$ είναι η τιμή της σχετικής ταχύτητας των δύο σωμάτων όταν ολισθαίνουν μεταξύ τους. Η τιμή του $RVCNST$ είναι σημαντική για τον καθορισμό της ακρίβειας του μαθηματικού μοντέλου όσον αφορά στην αναπαράσταση της βηματικής συνάρτησης. Μεγάλη τιμή του $RVCNST$ συνεπάγεται μείωση της τιμής της τριβής που αναπτύσσεται, ενώ μικρή τιμή του $RVCNST$ οδηγεί σε δυσκολία της επαναληπτικής μεθόδου να συγκλίνει. Συνίσταται η τιμή του $RVCNST$ να είναι μεταξύ του 1% και 10% της πραγματικής σχετικής ταχύτητας V_r . Εξαιτίας αυτής της διαδικασίας ομαλοποίησης, ένας κόμβος που βρίσκεται σε επαφή, πάντοτε θα εμφανίζει ένα ποσό ολίσθησης. Εκτός των αριθμητικών λόγων, αυτό το

μοντέλο «αένανης ολίσθησης» έχει και βάση στη φυσική. Οι Oden και Pires έδειξαν ότι για τα μέταλλα υπάρχει μια ελαστο – πλαστική παραμόρφωση σε μικροσκοπικό επίπεδο (ονομαζόμενη «ψυχρή συγκόλληση»), η οποία οδηγεί σε μη τοπική, μη γραμμική τριβική συμπεριφορά.

Ένας ειδικός τύπος μοντέλου τριβής είναι η επιλογή **συγκόλλησης**, η οποία θεωρεί ότι δεν υφίσταται σχετική, εφαπτομενική κίνηση μεταξύ των επαπτόμενων σωμάτων. Η **συγκολλημένη** κίνηση ενεργοποιείται από την επιλογή του πίνακα επαφής. Μια συνηθισμένη εφαρμογή επαφής είναι η ένωση δυο διαφορετικών πλεγμάτων πεπερασμένων στοιχείων. Σε αυτή την περίπτωση, καθορίζοντας μια υπερβολικά μεγάλη δύναμη διαχωρισμού και εφαρμόζοντας την επιλογή της **συγκόλλησης**, γράφονται αυτομάτως οι εξισώσεις των περιορισμών για τα δύο πλέγματα των πεπερασμένων στοιχείων.

2.3 Επιλογή τύπου πεπερασμένων στοιχείων

2.3.1 Γενικά

Το λογισμικό πρόγραμμα MSC.MARC 2005 επιτρέπει την επαφή σχεδόν με κάθε διαθέσιμο τύπο πεπερασμένου στοιχείου, αλλά η χρήση συγκεκριμένων στοιχείων έχει συνέπειες στη διαδικασία της ανάλυσης. Η ανάλυση επαφής μπορεί να διεξαχθεί με όλους τους τύπους των δομικών, σε σειρά πεπερασμένων στοιχείων, εκτός από εκείνα που είναι συμμετρικά εκ περιστροφής με στρέψη. Η μοντελοποίηση της τριβής περιλαμβάνεται σε όλα αυτά τα στοιχεία, εκτός από εκείνα που είναι ημί – άπειρα. Υψηλότερης τάξης ισοπαραμετρικού Εικόνατος συναρτήσεις έχουν αναγωγικές συναρτήσεις οι οποίες οδηγούν στις ισοδύναμες δυνάμεις που εμφανίζονται μεταξύ των γωνιακών και των κεντρικών κόμβων των στοιχείων. Καθώς αυτό επηρεάζει καταλυτικά την ανίχνευση της τριβής, αλλά και το διαχωρισμό των σωμάτων που ήλθαν σε επαφή, έχει εφαρμοσθεί μια διαδικασία για την αποφυγή αυτού του προβλήματος. Στις εξωτερικές επιφάνειες οι κεντρικοί κόμβοι περιορίζονται σε σχέση με τους γωνιακούς αυτομάτως. Συνεπώς, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την γραμμική μεταβολή της μετατόπισης σε αυτές τις επιφάνειες. Τα

υπόλοιπα στοιχεία στο εσωτερικό μέρος του σώματος συμπεριφέρονται με το συμβατικό τρόπο της υψηλότερης τάξης.

Σε αρκετές αναλύσεις μεθόδων κατασκευής, τα χαμηλότερης τάξης πεπερασμένα στοιχεία συμπεριφέρονται καλύτερα, εξαιτίας της ικανότητάς τους να αναπαριστούν μεγάλες παραμορφώσεις, και άρα συνίστανται για τέτοιου είδους εφαρμογές.

2.3.2 Τύποι στοιχείων

Η επιλογή του είδους των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν βασίζεται σε διάφορα κριτήρια μεταξύ των οποίων είναι:

- Η διάσταση του προβλήματος αν είναι δισδιάστατο ή τρισδιάστατο
- Η γεωμετρία της κατασκευής
- Το είδος του υλικού
- Το είδος και ο τρόπος της φόρτισης
- Ο τρόπος επίλυσης
- Το είδος των επιθυμητών αποτελεσμάτων

Οι οικογένειες στοιχείων που βασίζονται στα τριγωνικά, ορθογωνικά και τετραεδρικά στοιχεία εν γένει δεν μπορούν να παραστήσουν ικανοποιητικά τα όρια ενός σώματος. Δηλαδή οι συντεταγμένες των στοιχείων μπορούν να μετασχηματιστούν σε νέα συστήματα στον καρτεσιανό χώρο (στοιχεία μονοδιάστατα, δισδιάστατα ή τρισδιάστατα απεικονίζονται σε παράγωγες μορφές στον καρτεσιανό χώρο). Ισοπαραμετρικά στοιχεία είναι αυτά που ο αριθμός των κόμβων σε κάθε πλευρά του στοιχείου που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των συντεταγμένων συμπίπτει με τον αριθμό των κόμβων που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των μετακινήσεων. Τα ισοπαραμετρικά στοιχεία συχνά μειώνουν την ταχύτητα σύγκλισης.

2.3.3 Τα ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία

Η ισοπαραμετρική διατύπωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή

πολλών χρησίων στοιχείων (Στεφανουδάκης, 2004). Ο ισοπαραμετρικός τύπος κάνει δυνατή τη δημιουργία στοιχείων τα οποία δεν είναι ορθογώνια αλλά έχουν καμπύλες πλευρές. Αυτές οι μορφές των στοιχείων είναι πολύ χρήσιμες για τη διακριτοποίηση και την αναπαραγωγή κυρτών επιφανειών. Η οικογένεια των ισοπαραμετρικών στοιχείων περιλαμβάνει στοιχεία επίπεδα, στερεά, πλάκες και κελύφη για την επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων.

Η αρχή στην οποία στηρίζεται η προτεινόμενη μεθοδολογία βασίζεται στη θεώρηση κατ' αρχάς, μιας απεικόνισης ένα προς ένα μεταξύ των καμπυλόγραμμων και των καρτεσιανών συντεταγμένων. Έχοντας αυτή την απεικόνιση είναι δυνατόν να καταγραφούν σε τοπικά συστήματα οι συναρτήσεις Εικόνατος και στη συνέχεια με κατάλληλους μετασχηματισμούς να θεμελιωθούν οι ιδιότητες του στοιχείου βάσει των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Όμως για να πάρουμε τις τελικές εξισώσεις ισορροπίας του σώματος θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η αντίστροφη απεικόνιση, εφ' όσον οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στον καρτεσιανό χώρο.

Στον τύπο των ισοπαραμετρικών στοιχείων πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι τοπικές συντεταγμένες (σύστημα ξ, η, ζ). Τα διαστήματα εκφράζονται αρχικά στα τοπικά συστήματα συντεταγμένων και στη συνέχεια καθορίζονται και στο ολικό. Για να γίνει αυτή η μετατροπή πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας J που ονομάζεται «Ιακωβιανός» πίνακας.

Για να είναι ένα στοιχείο ισοπαραμετρικό θα πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες. Με τον όρο ισοπαραμετρικό εννοείται «ίδιες παράμετροι», που σημαίνει ότι επειδή οι μετατοπίσεις αλλά και οι συντεταγμένες εξαρτώνται από τον βαθμό των κόμβων θα πρέπει οι πίνακες N και $\tilde{N}$ να είναι ίδιοι για να είναι ένα στοιχείο ισοπαραμετρικό. Οι N και $\tilde{N}$ δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

1. ο βαθμός ελευθερίας του κόμβου $\{d\}$ καθορίζει τη μετατόπιση $[u \ v \ w]$ ενός σημείου στο στοιχείο η οποία δίνεται από τον πίνακα $[u \ v \ w]^T = [N] \{d\}$.
2. οι συντεταγμένες του κόμβου $\{c\}$ καθορίζουν τις συντεταγμένες $[x \ y \ z]$ ενός σημείου στο στοιχείο με τον πίνακα $[x \ y \ z]^T = [\tilde{N}] \{c\}$.

Οι πίνακες N και $\tilde{N}$ είναι συναρτήσεις των ξ, η και ζ . Αν ο N είναι μεγαλύτερου βαθμού από ότι ο $\tilde{N}$ τότε το στοιχείο ονομάζεται υποπαραμετρικό, αλλά αν ο N είναι μικρότερου βαθμού από τον $\tilde{N}$ τότε το στοιχείο λέγεται υπερπαραμετρικό.

2.4 Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων

2.4.1 Γενικά

Η διακριτοποίηση και στη συνέχεια η επίλυση συστημάτων τα οποία παρουσιάζουν μη γραμμική συμπεριφορά, απαιτεί την αναπαράστασή τους από ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για το οποίο πρέπει να βρεθεί λύση. Συνήθως η επίλυση ενός τέτοιου συστήματος είναι αδύνατον να γίνει με αναλυτικό τρόπο, γι' αυτό και έχουν προταθεί διάφορες επαναληπτικές, αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης, οι οποίες έχουν την ικανότητα να συγκλίνουν σε μια αποδεκτή προσέγγιση της λύσης.

2.4.2 Η μέθοδος Newton – Raphson

Η βάση της μεθόδου **Newton – Raphson** στην ανάλυση δομικών προβλημάτων, είναι ότι πρέπει να ικανοποιείται η ισορροπία του συστήματος. Αρχικά θεωρούμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$K(u)\delta u = F - R(u). \quad (2.5.2-1)$$

όπου το u είναι το διάνυσμα της κομβικής μετατόπισης, το F είναι το διάνυσμα του εξωτερικού, κομβικού φορτίου, το R είναι το διάνυσμα της εσωτερικής, κομβικής αντίδρασης σε αυτό το φορτίο και το K αναπαριστά τον εφαπτόμενο πίνακα ακαμψίας. Το διάνυσμα της εσωτερικής κομβικής αντίδρασης προκύπτει από τις εσωτερικές τάσεις ως εξής:

$$R = \sum_{elem} \int_V \beta^T \sigma dV.$$

Σε αυτό το σύστημα εξισώσεων το R και το K είναι συναρτήσεις του u . Σε πολλές περιπτώσεις, και το F είναι συνάρτηση του u . Η μορφή των εξισώσεων επιτρέπει την επίλυσή τους με τη μέθοδο **Newton – Raphson**.

Θεωρώντας ότι η τελευταία προσέγγιση είναι η δu^i , όπου ο εκθέτης (i) είναι ο αύξων αριθμός της επανάληψης, η εξίσωση (2.5.2-1) μπορεί να γραφεί ως εξής:

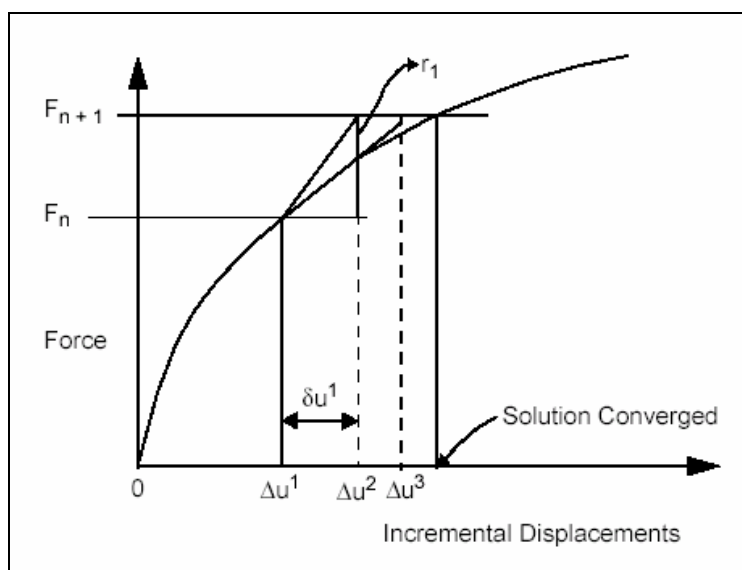
$$K(u_{n+1}^{i-1})\delta u = F - R(u_{n+1}^{i-1}).$$

Αυτή η εξίσωση λύνεται ως προς δu^i και η επόμενη λύση προκύπτει από:

$$\Delta u^i = \Delta u^{i-1} + \delta u^i \text{ και } u_{n+1}^i = u_{n+1}^{i-1} + \delta u^i.$$

Η επίλυση αυτής της εξίσωσης ολοκληρώνει μια επανάληψη και η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί. Ο δείκτης n εννοεί τον αύξοντα αριθμό του βήματος και παρουσιάζει την κατάσταση $t = n$.

Η μέθοδος **Newton – Raphson** είναι η προεπιλεγμένη μέθοδος που χρησιμοποιεί το MSC.MARC 2005 για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων. Παρουσιάζει καλά αποτελέσματα για τα περισσότερα προβλήματα (βλ. Εικόνα 2.13), αλλά έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος για πολύπλοκες τρισδιάστατες αναλύσεις.



Εικόνα 2.13: Η πορεία σύγκλισης της μεθόδου **Newton – Raphson** [30].

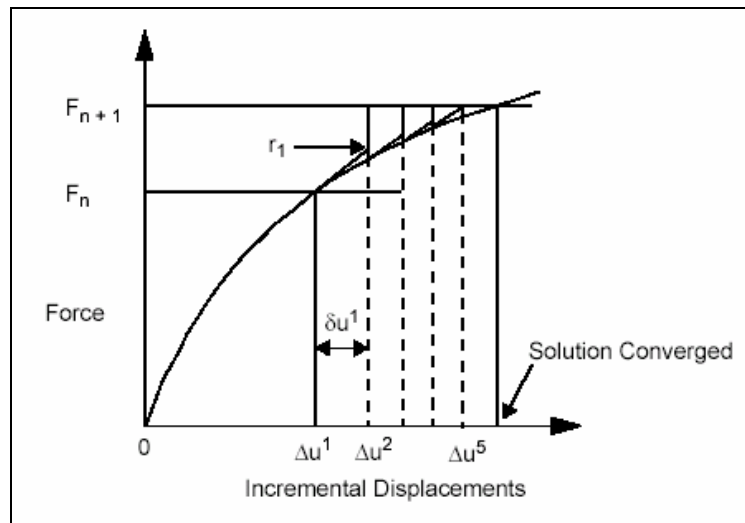
2.4.3 Η τροποποιημένη μέθοδος **Newton – Raphson**

Η τροποποιημένη μέθοδος **Newton – Raphson** μοιάζει με την ολοκληρωμένη μέθοδο **Newton – Raphson**, με τη διαφορά ότι δεν δημιουργεί από την αρχή τον πίνακα ακαμψίας σε κάθε επανάληψη.

$$K(u^0)\delta u^i = F - R(u^{i-1}).$$

Η διαδικασία έχει μικρό υπολογιστικό κόστος, διότι ο εφαπτόμενος πίνακας ακαμψίας δημιουργείται και αποσυντίθεται μια φορά στην αρχή. Από εκεί κι ύστερα, κάθε επανάληψη απαιτεί τη δημιουργία της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης μόνο, και μια απλή προς τα πίσω αντικατάσταση στη διαδικασία της επίλυσης. Η σύγκλιση όμως, είναι γραμμική και υπάρχει πιθανότητα να χρειαστούν πολλές επαναλήψεις ή

και να μην συγκλίνει η μέθοδος τελικά.



Εικόνα 2.14: Η σύγκλιση της τροποποιημένης μεθόδου Newton – Raphson [30].

Αν προκύψει μη γραμμική συμπεριφορά εξαιτίας επαφής ή εξαιτίας του υλικού που μελετάται, δεν είναι δυνατόν να αποφευχθεί η δημιουργία του πίνακα ακαμψίας ξανά. Συνεπώς η μέθοδος έχει αποτέλεσμα σε μεγάλης κλίμακας, αλλά ελαφράς μη γραμμικότητας προβλήματα. Όταν καλείται ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης, δεν είναι δυνατή η απλή, προς τα πίσω αντικατάσταση, καθιστώντας τη μέθοδο αναποτελεσματική. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να χρησιμοποιείται η ολοκληρωμένη μέθοδος **Newton – Raphson**.

Κεφάλαιο 3: Η μοντελοποίηση του προβλήματος

Γενικά

Η μελέτη των πολύπλοκων μηχανικών φαινομένων που προκύπτουν κατά τη διαδικασία της δυναμικής καταπόνησης ιστορικών κατασκευών, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια σεισμών, έχει γίνει αντικείμενο πολυάριθμων ερευνών τόσο σε πανεπιστημιακό όσο και σε κρατικό επίπεδο. Η συμπεριφορά των τριβόμενων επιφανειών, η αντοχή των υλικών στη δυναμική καταπόνηση και οι ιδιότητες, γενικότερα των κατασκευών που έχουν αντέξει στη διάρκεια των ετών, είναι μερικά από τα πολλά σημεία, στα οποία έχει εστιαστεί η επιστημονική έρευνα.

Η παρούσα εργασία έχει ως σκοπό, τη μελέτη της συμπεριφοράς μιας πραγματικής, ιστορικής κατασκευής, κατά την καταπόνησή της από έναν πραγματικό σεισμό τα δεδομένα του οποίου (γράφημα μετατοπίσεων στον άξονα x) χρησιμοποιήθηκαν για την πιστότερη απεικόνιση των πραγματικών συνθηκών, στις οποίες ευρίσκεται η προς μελέτη γέφυρα. Για την πληρέστερη μελέτη των διαφόρων φαινομένων που ανακύπτουν κατά τη διάρκεια του σεισμού, εκτελέστηκαν τέσσερα διαφορετικά σενάρια επίλυσης. Από τα αποτελέσματα των επιλύσεων προέκυψαν χρήσιμα αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4.

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται η διαδικασία μοντελοποίησης του προβλήματος και αναλύονται οι λόγοι για τους οποίους ακολουθήθηκε η συγκεκριμένη διαδικασία με τις αντίστοιχες επιλογές.

3.1 Ιστορική αναδρομή

Η προς μελέτη ιστορική κατασκευή είναι μια μονότοξη, λιθόκτιστη γέφυρα η οποία ενώνει δύο όχθες του ποταμού Άραχθου, μέσα στα διοικητικά όρια του Νομού Ιωαννίνων, στην κοινότητα Ραφταναίων, τοποθεσία Πλάκα – από την οποία έχει πάρει και το όνομά της ως «Γεφύρι της Πλάκας» - κοντά στα όρια με το Νομό Άρτης. Είναι το μεγαλύτερο μονότοξο γεφύρι της Ηπείρου με άνοιγμα τόξου στα 40 μέτρα

και μέγιστο ύψος τα 20 μέτρα.



Εικόνα 3.16: Αποψη του τόξου του γεφυριού της Πλάκας.

Το 1863 ο Δημ. Αρβανιτογιάννης από τα Πράμαντα προσέφερε 30.000 γρόσια για την κατασκευή του γεφυριού. Όμως στα εγκαίνια αυτού του έργου το γεφύρι σωριάστηκε, μπροστά στα έκπληκτα μάτια των παρευρισκομένων. Το 1866 χτίστηκε το γεφύρι που υπάρχει και σήμερα, με έξοδα των Ιωάννη Λούλη από την Αετορράχη, Αναγνώστη Λύτρα και Ιωάννη Ρήγκα από τα Πράμαντα του Αναγνώστη Μάρου από τους Μελισσουργούς, των κοινοτήτων Πραμάντων και Μελισσουργών, ενώ η κοινότητα Αγνάντων προσέφερε την ξυλεία για τις σκαλωσιές του οικοδομήματος. Επίσης, γειτονικές κοινότητες προσέφεραν χρηματικά ποσά και προσωπική εργασία.

Για το χτίσιμο του γεφυριού υπάρχει η παράδοση ότι στέριωσαν άνθρωπο στα θεμέλιά του. Άλλοι ισχυρίζονταν ότι έβαλαν έναν Τούρκο κι άλλοι μια επιληπτική κοπέλα από το χωριό Μονολίθι. Το 1881 ο Άραχθος έγινε το σύνορο μεταξύ Ελλάδας και Τουρκίας και δίπλα από το γεφύρι της Πλάκας, από την νότια πλευρά, κατασκευάστηκε υποτελωνείο, ενώ και οι Τούρκοι κατασκεύασαν φυλάκιο κοντά στο γεφύρι.



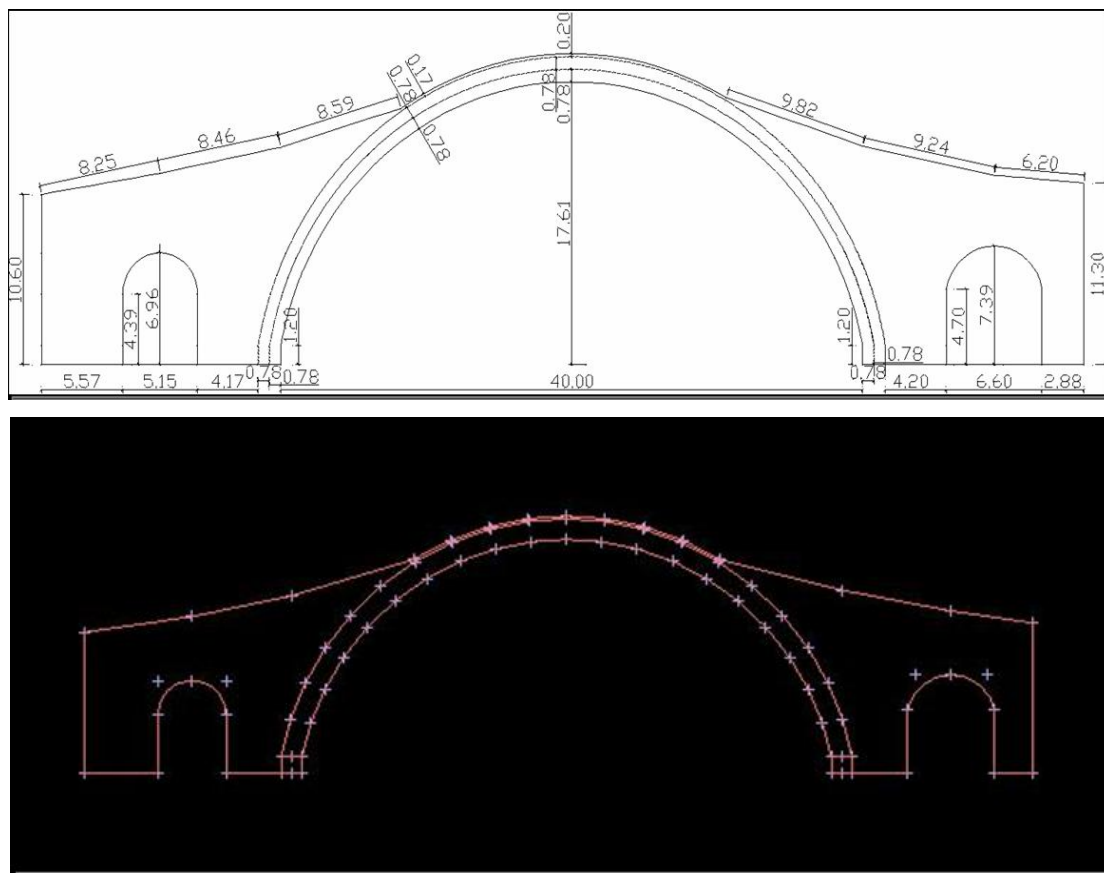
Εικόνα 3.17: Άποψη του καταστρώματος του γεφυριού της Πλάκας.

Στο χάνι που βρίσκεται κοντά στο γεφύρι το Φεβρουάριο του 1942 ήρθαν σε συνεννόηση οι αντάρτικες οργανώσεις ΕΑΜ και ΕΔΕΣ και υπέγραψαν συμφωνία κατάπαυσης των εχθροπραξιών.

3.2 Η μοντελοποίηση της κατασκευής

Η μελέτη του προβλήματος πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και για την υλοποίησή της χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πακέτο ηλεκτρονικού υπολογιστή MSC.MARC 2005 της εταιρίας Marc Analysis Research Corporation. Το Mentat είναι το κομμάτι του λογισμικού που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση του προβλήματος, ενώ το Marc είναι που αναλαμβάνει την επίλυσή του, μέσω των επαναληπτικών αλγορίθμων επίλυσης που διαθέτει.

Η διαδικασία της μοντελοποίησης της γέφυρας στο περιβάλλον εργασίας του Mentat, άρχισε με το σχεδιασμό των ακμών που ορίζουν το σχήμα του τόξου της, το σχήμα της ενισχυτικής τοιχοποιίας εκατέρωθεν του τόξου και των αντίστοιχων ανακουφιστικών αψιδωτών οπών. Ακολουθήθηκε η υφιστάμενη γεωμετρία της κατασκευής με τη συνέχεια της ενισχυτικής τοιχοποιίας στο επάνω μέρος του τόξου της γέφυρας σε κλίμακα 1:1, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



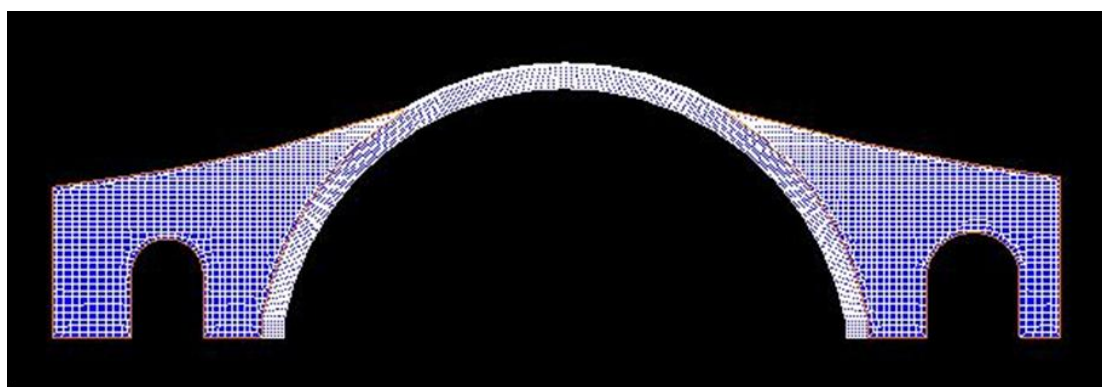
Εικόνα 3.3: Η γεωμετρία της προς μελέτη κατασκευής και ο ορισμών των ακμών στο περιβάλλον εργασίας του Mentat.

Για την αναπαραγωγή του σχήματος της γέφυρας χρησιμοποιήθηκαν ογδόντα (80) ακμές. Στη συνέχεια, με τη χρησιμοποίηση της εντολής *Automesh* έγινε ο χωρισμός σε πεπερασμένα στοιχεία, όσον αφορά στην ενισχυτική τοιχοποιία εκατέρωθεν και πάνω από το τόξο. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε έχει ως εξής. Αφού σχεδιάστηκαν όλες οι ακμές που ορίζουν τη γεωμετρία της τοιχοποιίας και της εξωτερικής πλευράς του τόξου, από το μενού *Automesh* έγινε η επιλογή *2D Planar Meshing*. Σε αυτή την επιλογή είναι δυνατόν να δημιουργηθεί αυτομάτως ένα σύνολο δισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, μεταβλητής πυκνότητας, αν αυτό κρίνεται απαραίτητο, το οποίο θα ορίζεται από ένα σύνολο ακμών, το οποίο με τη σειρά του ορίζει μια – απαραίτητως – κλειστή γεωμετρία. Η πυκνότητα του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων ορίζεται από το χρήστη και είναι πολύ σημαντική παράμετρος όσον αφορά στην ακρίβεια της μεθόδου. Η επιλογή της αυτόματης

δημιουργίας του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων δεν έγινε τυχαία. Ήταν απαραίτητη λόγω της πολύπλοκης γεωμετρίας της ενισχυτικής τοιχοποιίας, η οποία κατέστησε αδύνατο το διαχωρισμό της σε πεπερασμένα στοιχεία με άλλο τρόπο.

Για τη μοντελοποίηση του τόξου ακολουθήθηκε διαφορετική διαδικασία. Αρχικά σχεδιάστηκαν οι δύο χορδές που ορίζουν την εξωτερική και την εσωτερική περιφέρειά του. Στη συνέχεια ορίστηκαν από της δύο αυτές χορδές, είκοσι δύο (22) επίπεδες επιφάνειες, η οποίες με την εντολή *Convert* μετετράπησαν σε ισάριθμα σύνολα δισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Και πάλι η πυκνότητα της διακριτοποίησης ορίζεται από το χρήστη. Η παραπάνω διαδικασία είναι η πιο συνηθισμένη όταν πρόκειται να διακριτοποιηθεί μια σχετικά απλή επίπεδη γεωμετρία. Ο λόγος για τον οποίο έγινε ο χωρισμός σε ένα τέτοιο πλήθος ξεχωριστών επιφανειών αντί μίας και ενιαίας επιφάνειας, είναι ότι αυτές οι επιφάνειες και τα πεπερασμένα στοιχεία στα οποία μετατραπήκαν, θα αποτελέσουν τα δομικά στοιχεία του τόξου. Οι διεπιφάνειες μεταξύ των δομικών στοιχείων χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της δημιουργίας ρωγμών, η διάδοση των οποίων οδηγεί στη δημιουργία κενών τα οποία είναι δυνατόν, τελικά, να οδηγήσουν ακόμη και στην κατάρρευση της κατασκευής.

Το αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας φαίνεται στην Εικόνα 3.4. Στη συγκεκριμένη εικόνα παρατηρείται και ο διαφορετικός βαθμός πυκνότητας του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων, ο οποίος μεγαλώνει στα σημεία υψηλού ενδιαφέροντος, τα οποία είναι το τόξο και η διεπιφάνειά του με την ενισχυτική τοιχοποιία.



Εικόνα 3.4: Άποψη του κάνναβου των πεπερασμένων στοιχείων στα οποία διακριτοποιήθηκε το αρχικό σχέδιο.

Συνολικά ο κάρναβος αποτελείται από 4.832 ισοπαραμετρικά, τετράπλευρα πεπερασμένα στοιχεία τα οποία ορίζονται από 5.794 κόμβους. Ο λόγος για τον οποίο επελέγη η δισδιάστατη μοντελοποίηση της κατασκευής, είναι η συμμετρία της ως προς το επιλεγμένο επίπεδο εντός του οποίου δρουν και όλες οι τάσεις, η οποία οδηγεί στην παραδοχή ότι οι παραμορφώσεις στον κάθετο του επιλεγμένου επιπέδου άξονα, είναι αμελητέες.

Τέλος, για τη βελτιστοποίηση της διαδικασίας επίλυσης, όταν τελειώσει η μοντελοποίηση των σωμάτων, είναι απαραίτητη η εκτέλεση της εντολής *Renumber*, η οποία έχει σκοπό την απαρίθμηση και σωστή καταχώρηση των πεπερασμένων στοιχείων και των κόμβων που τα αποτελούν. Έτσι εξασφαλίζεται ο σωστός προσανατολισμός και η ακριβής σύνδεση των στοιχείων που συμμετέχουν στην ανάλυση (βλ. Σχήμα 3.5).

RENUMBER	
START	1
INCREMENT	1
NODES	10300
NODES DIRECTED	
ELEMENTS	4692
ELEMS DIRECTED	
POINTS	96
CURVES	0
SURFACES	6
SOLIDS	0
ALL	

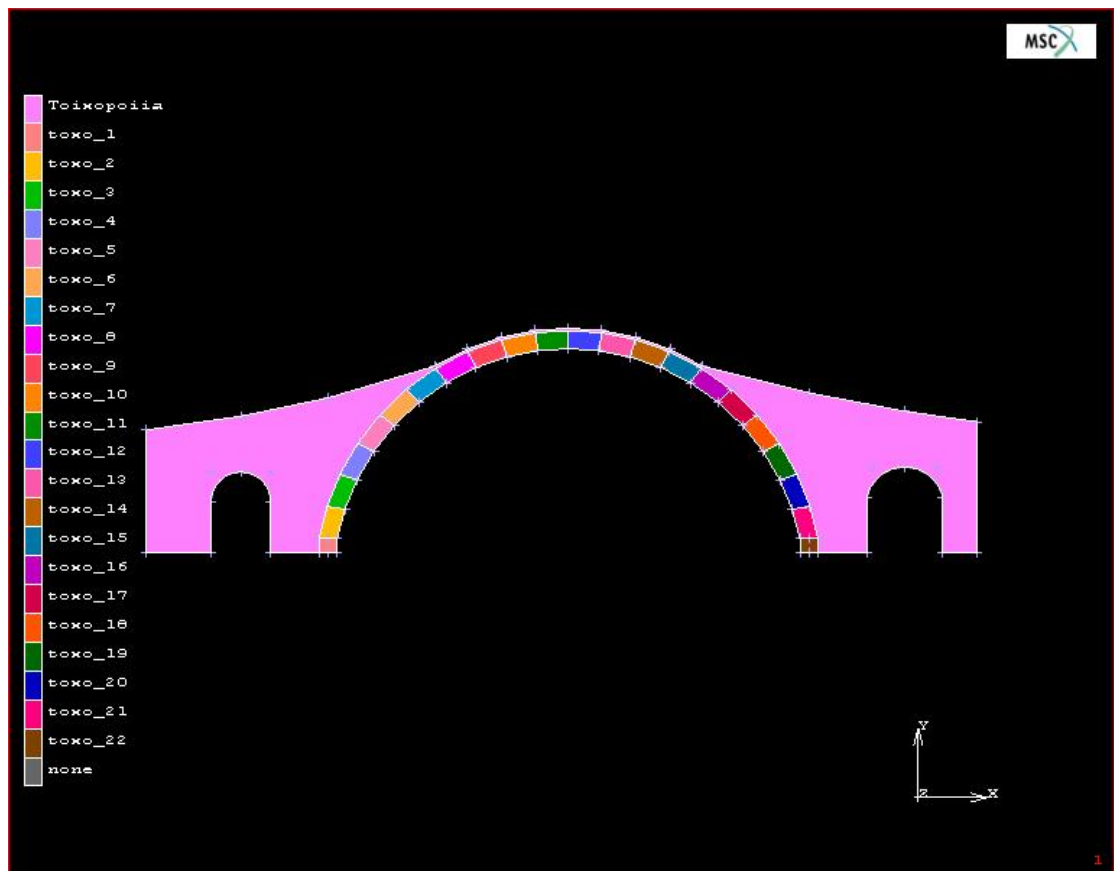
Εικόνα 3.5: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της εντολής *Renumber*.

3.3 Η μοντελοποίηση της επαφής

Για τη μελέτη ενός δυναμικού, μηχανικού προβλήματος, στο οποίο εντάσσονται σώματα τα οποία ευρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους, με τη βοήθεια του λογισμικού MSC.MARC 2005, είναι απαραίτητος ο καθορισμός των συνθηκών της επαφής μεταξύ των διαφόρων σωμάτων που λαμβάνουν μέρος στην ανάλυση.

Αρχικά πρέπει να οριστούν τα προς επαφή σώματα μέσα από την εντολή *Contact Bodies*. Εν προκειμένω τα δομικά στοιχεία του τόξου της γέφυρας και η ενισχυτική τοιχοποιία εκατέρωθεν και πάνω από αυτό. Τα δομικά στοιχεία του τόξου ορίζονται ως ξεχωριστά σώματα για τους λόγους που εξηγήθηκαν παραπάνω, ενώ η

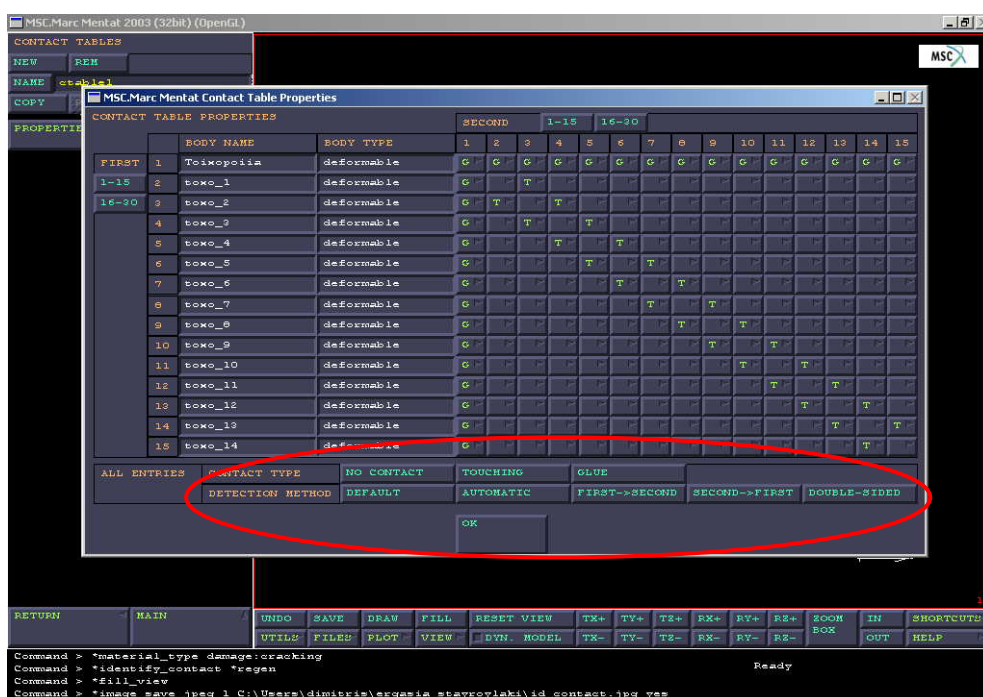
τοιχοποιία ορίζεται ως ενιαίο σώμα (βλέπε Εικόνα 3.6). Όλα θεωρούνται παραμορφώσιμα με συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$.



Εικόνα 3.6: Άποψη των 23 συνολικά σωμάτων τα οποία ορίζουν την προς μελέτη κατασκευή.

Στη συνέχεια, από την εντολή *Contact Table*, γίνεται ο ορισμός για το ποια σώματα θα έρθουν σε επαφή με ποια και υπό ποιες συνθήκες. Αναλόγως με το σενάριο που θα εκτελεστεί κάθε φορά, οι επιλογές διαφέρουν. Εν προκειμένω, στο πρώτο σενάριο, ορίζεται ότι τα δομικά στοιχεία του τόξου μπορούν να έρθουν σε επαφή σύμφωνα με τη ρύθμιση *Touch*. Αυτό σημαίνει ότι είναι δυνατόν να αναπτυχθεί τριβή μεταξύ τους με συντελεστή $\mu = 0,5$, όπως έχει ορισθεί παραπάνω. Το τόξο με την τοιχοποιία σε αυτή την περίπτωση θεωρείται ότι έρχονται σε επαφή σύμφωνα με τη ρύθμιση *Glue*. Αυτό σημαίνει ότι είναι μονίμως σε επαφή μεταξύ τους και δεν μπορεί να αναπτυχθεί σχετική ταχύτητα ανάμεσα τους. Δηλαδή, ουσιαστικά ορίζουμε ότι αναπτύσσεται τριβή με συντελεστή $\mu = \infty$. Αναλόγως ορίζονται οι συνθήκες της επαφής των σωμάτων και για τα υπόλοιπα σενάρια. Στο δεύτερο θεωρείται ότι τα δομικά στοιχεία του τόξου έρχονται σε επαφή σύμφωνα με

τη ρύθμιση *Glue* μεταξύ τους, ενώ με την τοιχοποιία έρχονται σε επαφή σύμφωνα με τη ρύθμιση *Touch*. Στο τρίτο σενάριο ορίζουμε ότι όλα τα σώματα έρχονται σε επαφή μεταξύ τους σύμφωνα με τη ρύθμιση *Touch*. Τέλος στο σενάριο που εκτελείται για τη διερεύνηση της συμμετοχής της ενισχυτικής τοιχοποιίας στη αντοχή της κατασκευής στα δυναμικά φορτία, ορίζουμε ότι τα δομικά στοιχεία του τόξου έρχονται σε επαφή σύμφωνα με τη ρύθμιση *Touch*. Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζεται μια άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της εντολής *Contact Table*.



Εικόνα 3.7: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της εντολής *Contact Table*, με έμφαση στις εντολές ορισμού και ανίχνευσης της επαφής.

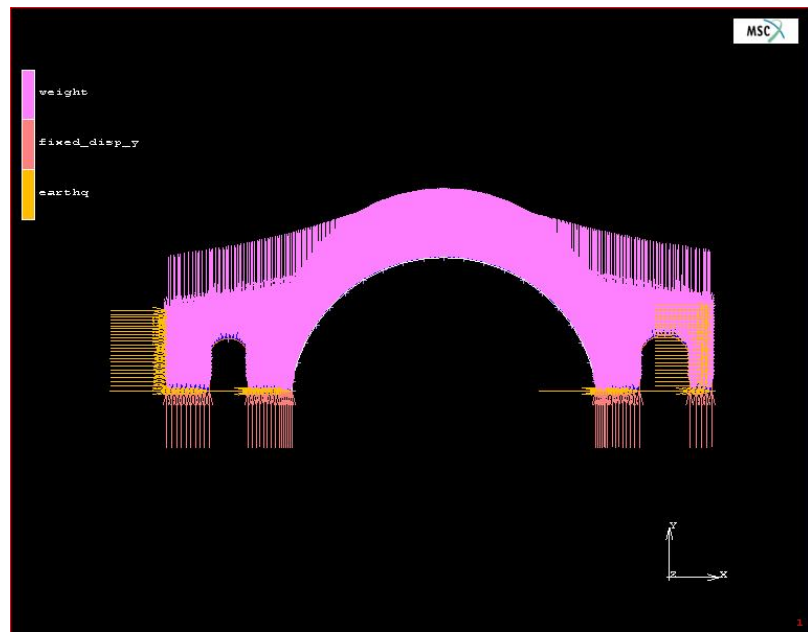
Τέλος, για να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος, από την επιλογή *Contact Table* ορίζουμε ότι κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος, η ανίχνευση της επαφής, από το λογισμικό πρόγραμμα, θα γίνεται με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά αναλόγως το εκτελούμενο σενάριο.

3.4 Ορισμός συνοριακών συνθηκών

Σε κάθε ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, είναι απαραίτητος ο καθορισμός των συνοριακών συνθηκών που επικρατούν και ορίζουν

τις στηρίξεις των σωμάτων και τα διάφορα εξωτερικά φορτία που επιδρούν σε αυτά. Στη συγκεκριμένη μελέτη οι συνοριακές συνθήκες αφορούν στη στήριξη της κατασκευής, στο βάρος της και στην εφαρμογή του δυναμικού φορτίου του σεισμού. Από το μενού *Boundary Conditions* του προγράμματος έγινε η επιλογή *Fixed Displacement* για να οριστεί η στήριξη της κατασκευής. Πιο συγκεκριμένα, ορίστηκε ότι η κατασκευή δεν μπορεί να μετακινηθεί κατά τον άξονα y , μιας και στηρίζεται στο έδαφος. Ακόμη, από το ίδιο μενού και στην επιλογή *Gravity Load* ορίστηκε το βάρος της κατασκευής. Ουσιαστικά με αυτή τη διαδικασία ορίζεται η επιτάχυνση της βαρύτητας και το πρόγραμμα υπολογίζει το βάρος της κατασκευής σύμφωνα με την πυκνότητα των υλικών που έχουμε ορίσει όπως θα δειχθεί παρακάτω.

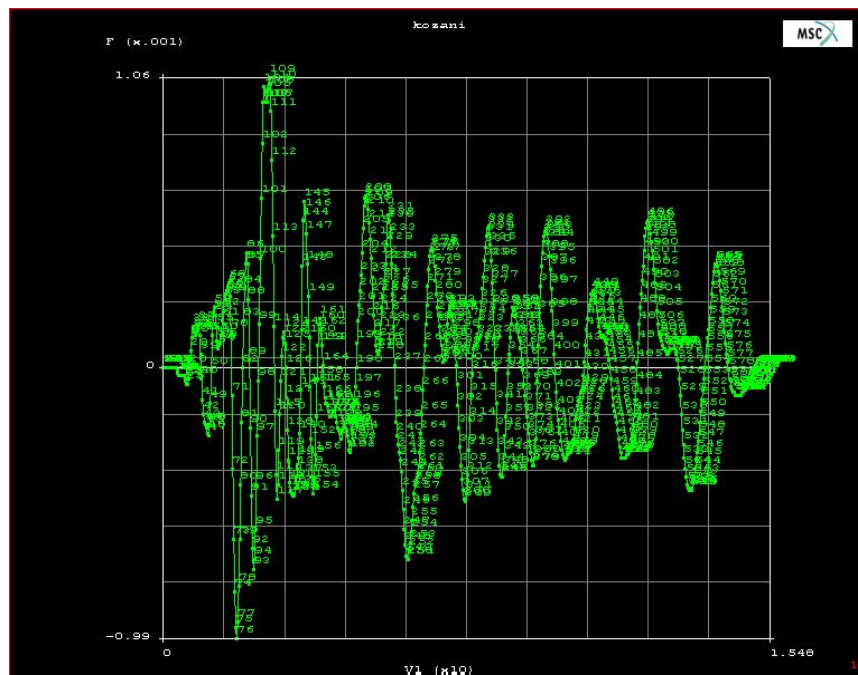
Τέλος για την επιβολή της δυναμικής καταπόνησης επελέγη από το ίδιο μενού *Fixed Displacement* μέσω του οποίου εισήχθη το γράφημα των μετατοπίσεων στον x άξονα του σεισμού. Αυτή και η πρώτη συνθήκη της στήριξης επιβλήθηκαν στους κόμβους της κατασκευής οι οποίοι έρχονται σε επαφή με το έδαφος, ενώ το βάρος επιβλήθηκε σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία της κατασκευής, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.8.



Εικόνα 3.8: Οι συνοριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος.

Πρόκειται για το γράφημα των μετατοπίσεων στον άξονα x (βλέπε Εικόνα 3.9) του σεισμού που συνέβη στη Δυτική Μακεδονία και πιο συγκεκριμένα στην

περιοχή της Κοζάνης στις 15 Μαΐου του 1995 με επίκεντρο την τεχνητή λίμνη Πολυφύτου και ένταση 6,6 βαθμών της κλίμακας Ρίχτερ.

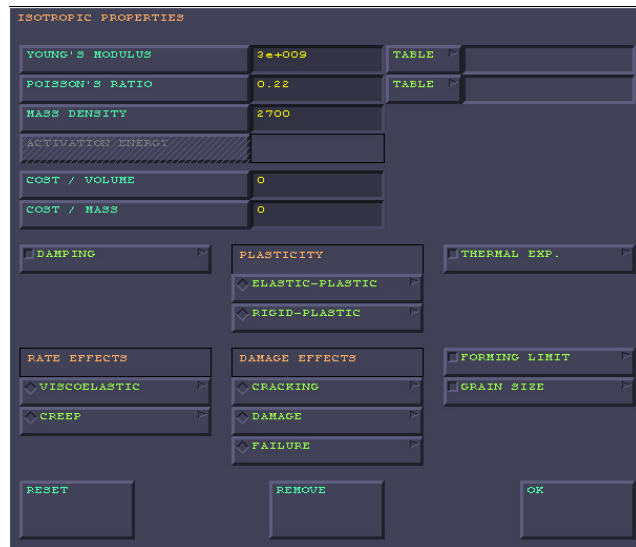


Εικόνα 3.9: Το γράφημα των μετατοπίσεων στον x άξονα του σεισμού της Κοζάνης το 1995.

3.6 Ορισμός των ιδιοτήτων του υλικού

Όπως είναι φυσικό, για να αποδώσει αποτελέσματα μια ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, θα πρέπει να έχουν οριστεί οι μηχανικές ιδιότητες των υλικών που απαρτίζουν τα προς μελέτη σώματα. Συνεπώς από το μενού *Material Properties* (βλέπε Εικόνα 3.10) επελέγη ο ορισμός ισότροπου υλικού με τις ακόλουθες ιδιότητες για το υλικό του τόξου:

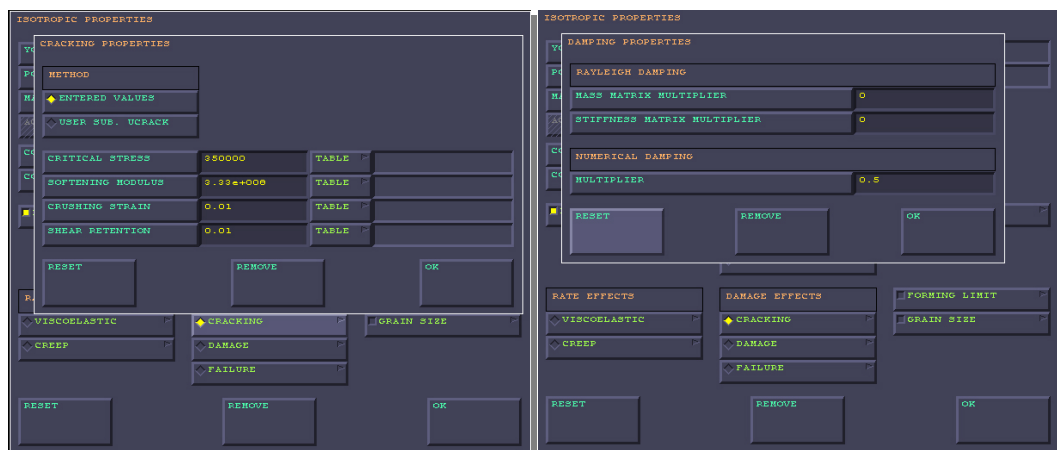
- Τόξο
 - $E = 3.0 \text{ Gpa}$
 - $\nu = 0.22$
 - $\text{density} = 2700 \text{ Kg/m}^3$



Εικόνα 3.10: Αποψη του περιβάλλοντος εργασίας του ορισμού μηχανικών ιδιοτήτων, της επιλογής *Material Properties* για το ισότροπο υλικό του τόξου.

Από το μενού *Material Properties* επελέγη ο ορισμός ισότροπου υλικού με τις ακόλουθες ιδιότητες για το υλικό της ενισχυτικής τοιχοποιίας:

- Τοιχοποιία
 - $E = 30 \text{ MPa}$
 - $\nu = 0.22$
 - $\text{density} = 2700 \text{ Kg/m}^3$



Εικόνα 3.11: Αποψη του περιβάλλοντος εργασίας του ορισμού ιδιοτήτων εμφάνισης ρωγμών και απόσβεσης αντίστοιχα, της επιλογής *Material Properties* για το ισότροπο υλικό της ενισχυτικής τοιχοποιίας.

Εκτός όμως από αυτές τις ιδιότητες έπρεπε να εισαχθούν επιπλέον στοιχεία

για το υλικό της τοιχοποιίας που αφορούν στην εμφάνιση ρωγμών και στις ιδιότητες απόσβεσης, τις οποίες εμφανίζει το συγκεκριμένο υλικό όπως φαίνεται στην εικόνα 3.11. Τέλος τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας για την απόδοση διαφορετικών ιδιοτήτων στα υλικά της κατασκευής, παρουσιάζονται στην παρακάτω εικόνα.

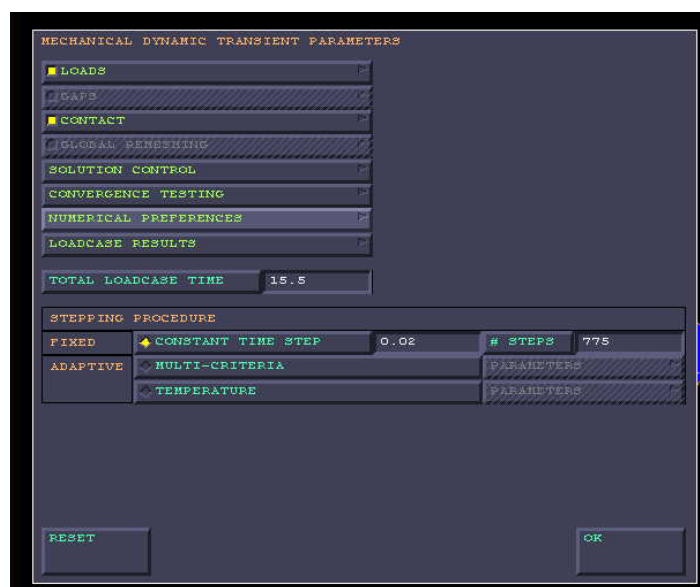


Εικόνα 3.12: Εικόνα του ορισμού διαφορετικών υλικών στην κατασκευή.

3.7 Ορισμός των συνθηκών ανάλυσης

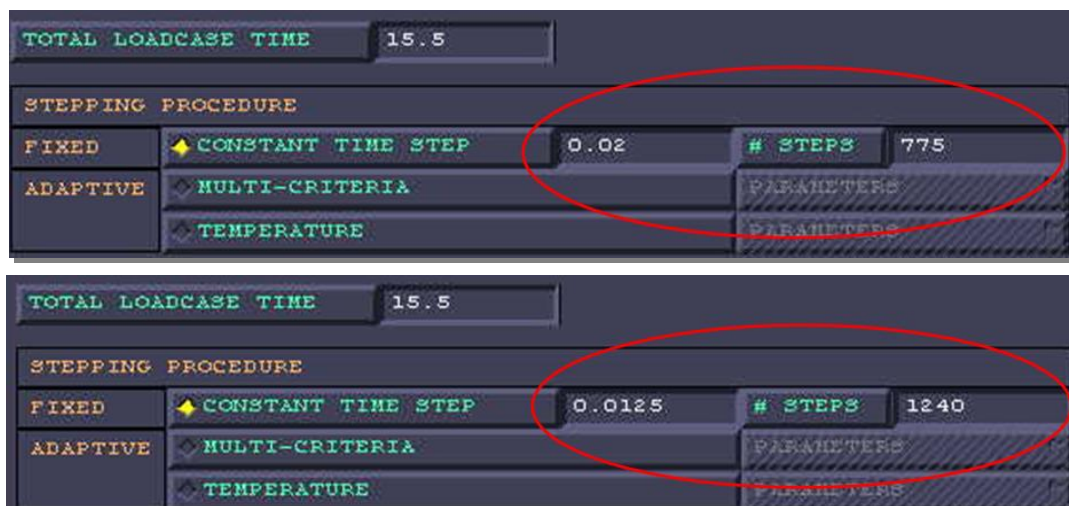
Σε αυτό το κομμάτι της μοντελοποίησης του προβλήματος, πραγματοποιείται η συγκέντρωση και καταχώριση όλων των παραμέτρων που έχουν καθοριστεί παραπάνω, σε μορφή που μπορεί να διαχειριστεί το λογισμικό του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Επιλέγεται ο τύπος του προς επίλυση προβλήματος, η διαδικασία επίλυσης, ορίζονται οι παράμετροι της επαναληπτικής διαδικασίας, καθορίζεται ο τύπος των πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν και τέλος, καθορίζονται οι παράμετροι για τις οποίες θα ανακτηθούν αποτελέσματα, καθώς και η συχνότητα ανάκτησης αυτών των αποτελεσμάτων.

Ο τύπος του προβλήματος επιλέγεται μέσα από το μενού *Loadcase* και καθορίστηκε ως μηχανικό, δυναμικό, μεταβατικό πρόβλημα επαφής (βλέπε Εικόνα 3.13).



Εικόνα 3.13: Αποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής *Loadcase (Mechanical Dynamic Transient)*.

Η διαδικασία επίλυσης είναι η ολοκληρωμένη μέθοδος *Newton – Raphson*. Η χρονική διάρκεια της προσομοίωσης ορίστηκε στα 15,5 δευτερόλεπτα, σύμφωνα με τα δεδομένα του σεισμού και χωρίστηκε σε 775 προκαθορισμένα χρονικά βήματα των 0,02 δευτερολέπτων για το πρώτο και το τέταρτο σενάριο και σε 1240 προκαθορισμένα χρονικά βήματα των 0,0125 δευτερολέπτων για το δεύτερο και το τρίτο σενάριο (βλέπε Εικόνα 3.14). Ο συγκεκριμένος διαχωρισμός έγινε για την προσαρμογή των υπολογιστικών απαιτήσεων του προβλήματος στις δυνατότητες του ηλεκτρονικού υπολογιστή που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυσή του.



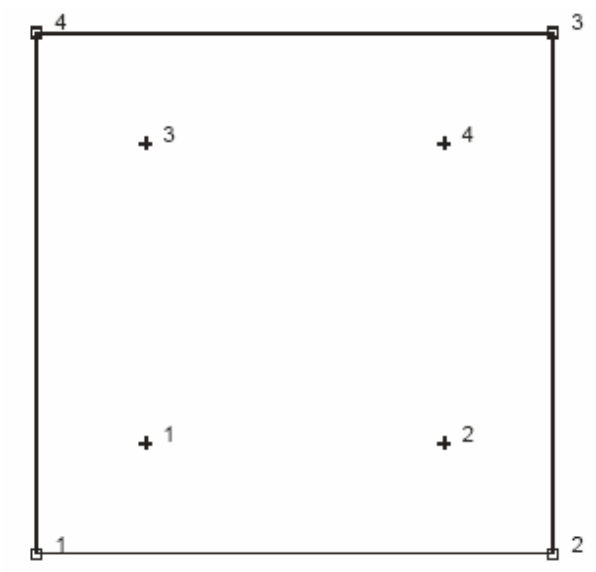
Εικόνα 3.14: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής *Loadcase* με έμφαση στο διαφορετικό πλήθος των χρονικών βημάτων επίλυσης.

Στη συνέχεια στο μενού *Job* εισάγουμε όλα τα παραπάνω δεδομένα και επιλέγουμε επιπροσθέτως, το είδος της τριβής, τον τύπο των πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και τα εξαγόμενα αποτελέσματα που θα προκύψουν μετά το πέρας της επαναληπτικής διαδικασίας επίλυσης (βλ. Εικόνα 3.15).



Εικόνα 3.15: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας του μενού *Job* (*Mechanical Dynamic Transient*).

Το είδος της τριβής που επελέγη είναι *Coulomb*, ενώ ο τύπος των πεπερασμένων στοιχείων είναι ο 11 [] από τη βιβλιοθήκη πεπερασμένων στοιχείων του λογισμικού. Αυτά είναι δισδιάστατα, τετράπλευρα, ισοπαραμετρικά στοιχεία τεσσάρων κόμβων όπως παρουσιάζονται στο στην Εικόνα 3.16.



Εικόνα 3.16: Το στοιχείο 11 και τα αντίστοιχα σημεία ολοκλήρωσης Gauss [30].

Τα δεδομένα για τα οποία ορίστηκε να εξαχθούν αποτελέσματα, ήταν μεταξύ άλλων οι δυνάμεις αντίδρασης, οι ισοδύναμες τάσεις, η μέση τιμή των κάθετων τάσεων, η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης, η κάθετη δύναμη επαφής και η δύναμη τριβής. Όλα αυτά τα δεδομένα μαζί με τα προεπιλεγμένα αποτελέσματα τα οποία εξάγει το λογισμικό μετά την επιτυχή επίλυση του προβλήματος, συγκροτούν ένα νέο αρχείο, το οποίο αποθηκεύεται αυτομάτως από το λογισμικό πρόγραμμα στο σκληρό δίσκο του ηλεκτρονικού υπολογιστή και μπορεί να υποστεί επεξεργασία μέσω του μενού *Results*. Ακόμη το πρόγραμμα παρέχει στο χρήστη τη δυνατότητα να εξάγει αριθμητικά δεδομένα για συγκεκριμένους κόμβους που θα επιλέξει ούτως ώστε να τα εισάγει σε οποιοδήποτε λογισμικό επεξεργασίας δεδομένων για να διεξάγει συγκριτικές αναλύσεις, να δημιουργήσει γραφήματα ή ό,τι άλλο θεωρεί χρήσιμο για να καταλήξει σε χρήσιμα συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 4: Τα αποτελέσματα της ανάλυσης και η επεξεργασία τους

Γενικά

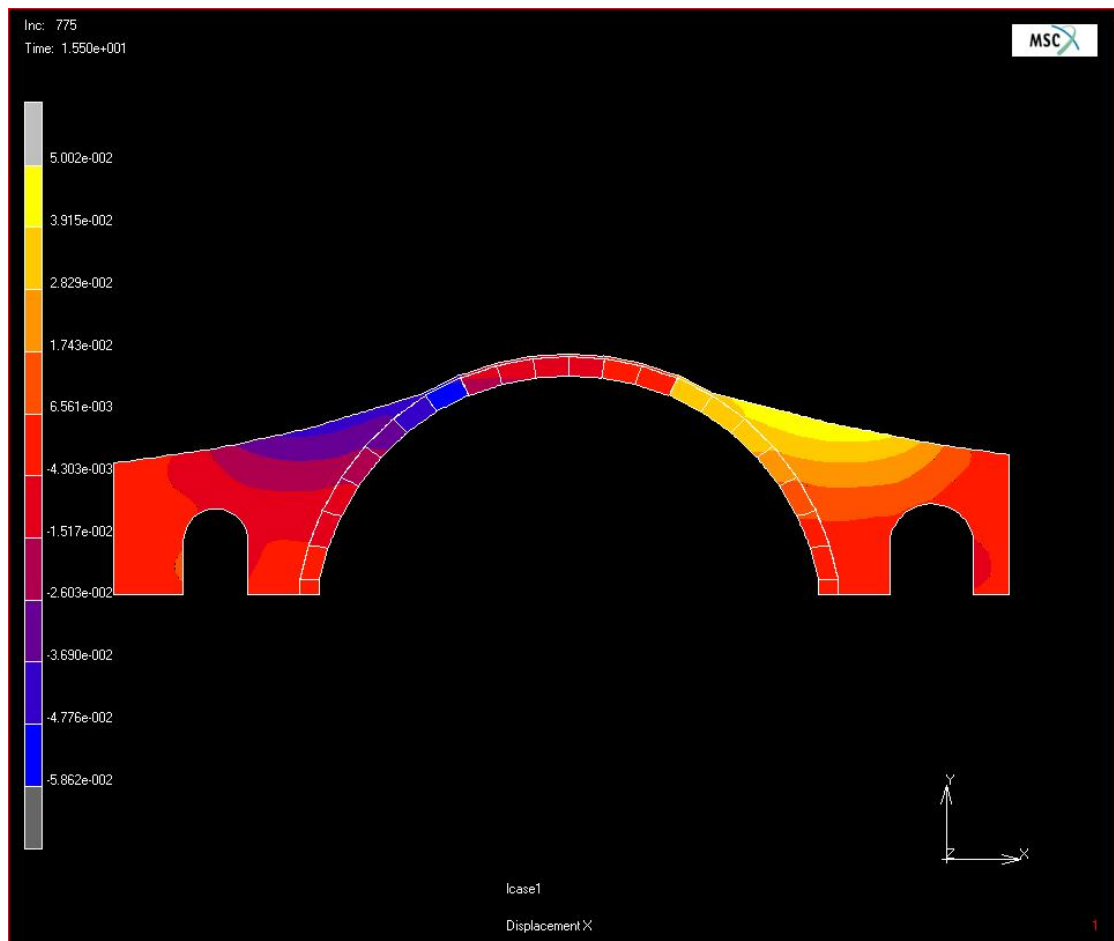
Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται γραφικά τα αποτελέσματα της επίλυσης των τεσσάρων σεναρίων, όπως προέκυψαν μετά το πέρας της προσομοίωσης, με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Το λογισμικό πακέτο *MSC.MARC 2005* χρησιμοποιεί χρωματικές κλίμακες για την απεικόνιση των διακυμάνσεων των τιμών, για τις οποίες ζητείται κάθε φορά να παρουσιαστούν αποτελέσματα. Ακόμη τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν για κάθε κόμβο, σε κάθε βήμα της ανάλυσης, υπάρχει η δυνατότητα να ανακτηθούν και να εισαχθούν σε οποιοδήποτε πρόγραμμα ανάλυσης δεδομένων για περαιτέρω επεξεργασία.

Συγκεκριμένα, στη συνέχεια θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα για τα διαφορετικά σενάρια ξεχωριστά, όπως απεικονίζονται από το πρόγραμμα με χρωματικές κλίμακες, σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, αναλόγως με το κάθε αποτέλεσμα και με κύριο σκοπό την ανάδειξη ενδιαφερόντων φαινομένων και την καλύτερη κατανόησή τους.

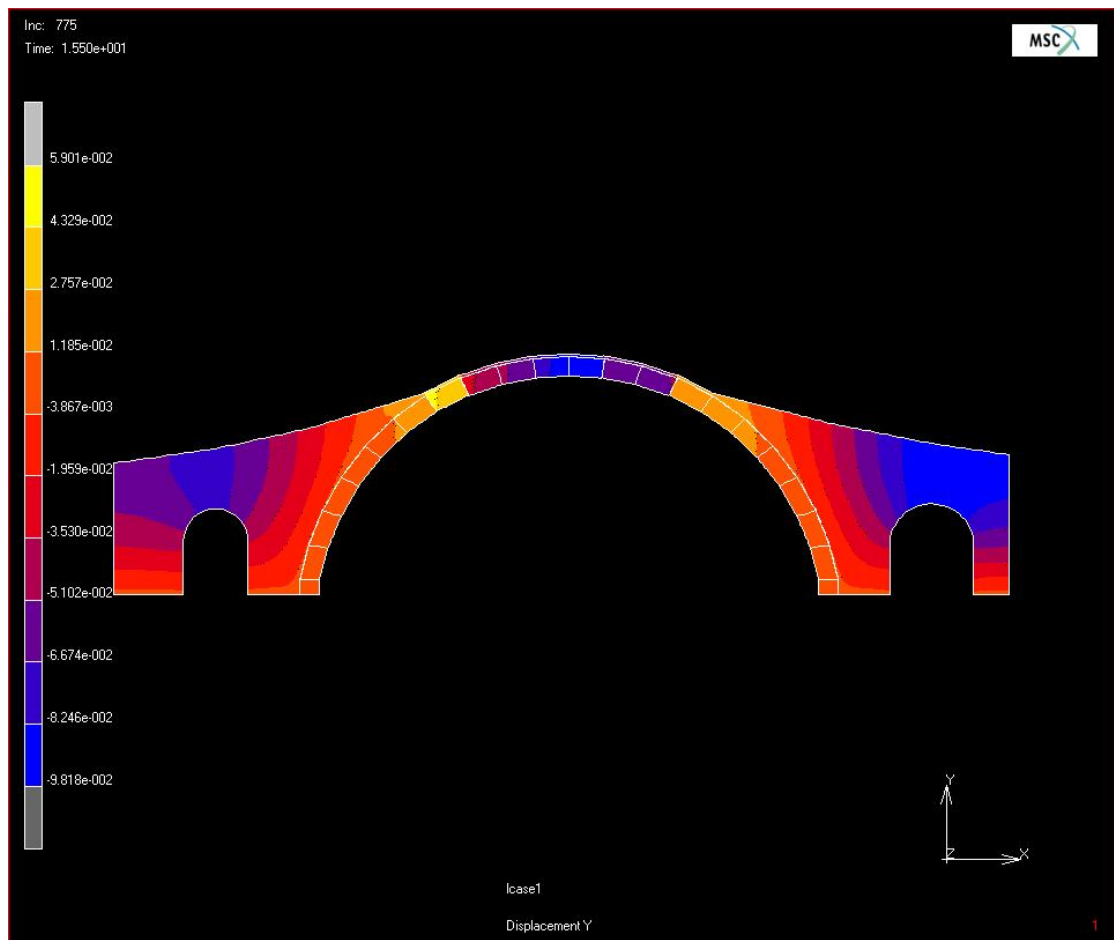
Ακόμη θα παρουσιαστούν γραφήματα που έχουν προκύψει από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του λογισμικού προγράμματος *Excel* της *Microsoft*.

4.1 Πρώτο σενάριο (Δομικά στοιχεία τόξου: Touch, τόξο – τοιχοποιία: Glue)

Αρχικά παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα x και στον άξονα y, όπως τις αντιλαμβάνεται το λογισμικό πρόγραμμα και τις αποδίδει γραφικά με χρωματικές κλίμακες, για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.

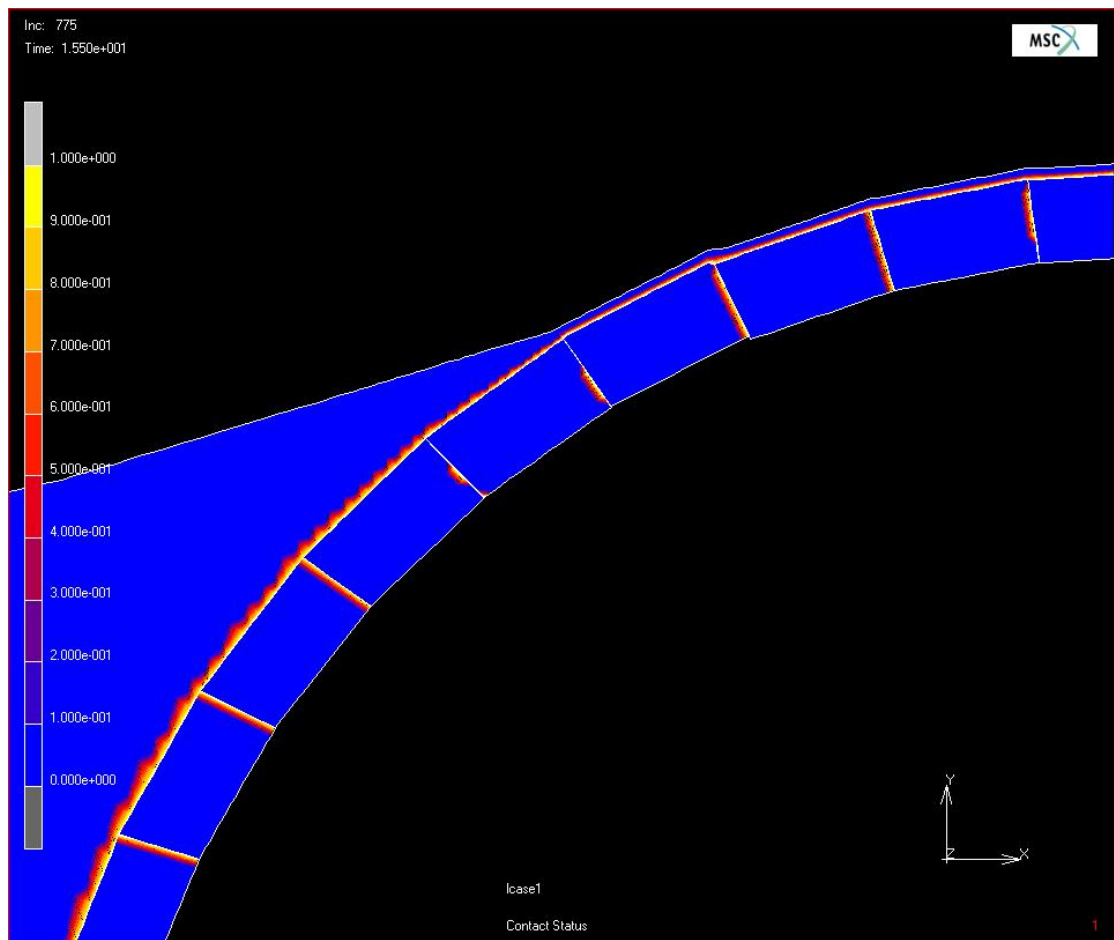


Εικόνα 4.18: Οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα x για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.



Εικόνα 4.19: Οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα y για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.

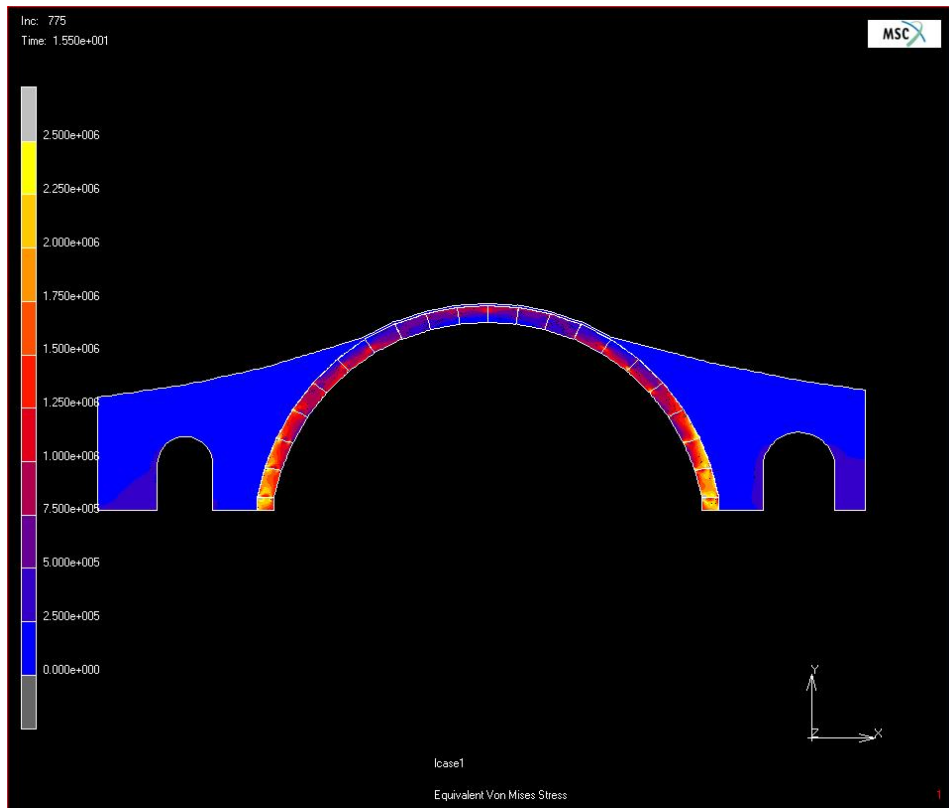
Στην Εικόνα 4.1 παρατηρείται ότι το τόξο έχει υποστεί αξιόλογη παραμόρφωση, ιδιαίτερα στα σημεία όπου συναντά την ενισχυτική τοιχοποιία εκατέρωθεν της κορυφής του. Παρατηρείται όμως επίσης ότι η τοιχοποιία έχει παραλάβει και έχει διαχειριστεί αυτές τις μετατοπίσεις με αποτέλεσμα η κατασκευή να μην αστοχήσει. Παρατηρείται επίσης και στις δύο εικόνες ότι τα δομικά στοιχεία του τόξου έχουν μετακινηθεί από τις αρχικές τους θέσεις και το ένα σε σχέση με το άλλο. Αυτό φαίνεται εντονότερα στην Εικόνα 4.2, όπου εμφανίζονται στην αριστερή, επάνω πλευρά του τόξου, δύο διαδοχικά στοιχεία να έχουν μετακινηθεί το ένα προς τα επάνω και το άλλο προς τα κάτω. Αντίστοιχα και στην δεξιά, επάνω πλευρά του τόξου. Αυτό το γεγονός υποδεικνύει ότι στα συγκεκριμένα σημεία θα μπορούσε να εμφανίζεται η δημιουργία ρωγμών. Αυτό φαίνεται καθαρά και στην επόμενη εικόνα η οποία εστιάζει στην επάνω αριστερή πλευρά του τόξου εμφανίζοντας την κατάσταση της επαφής (*Contact Status*) μεταξύ των σωμάτων.



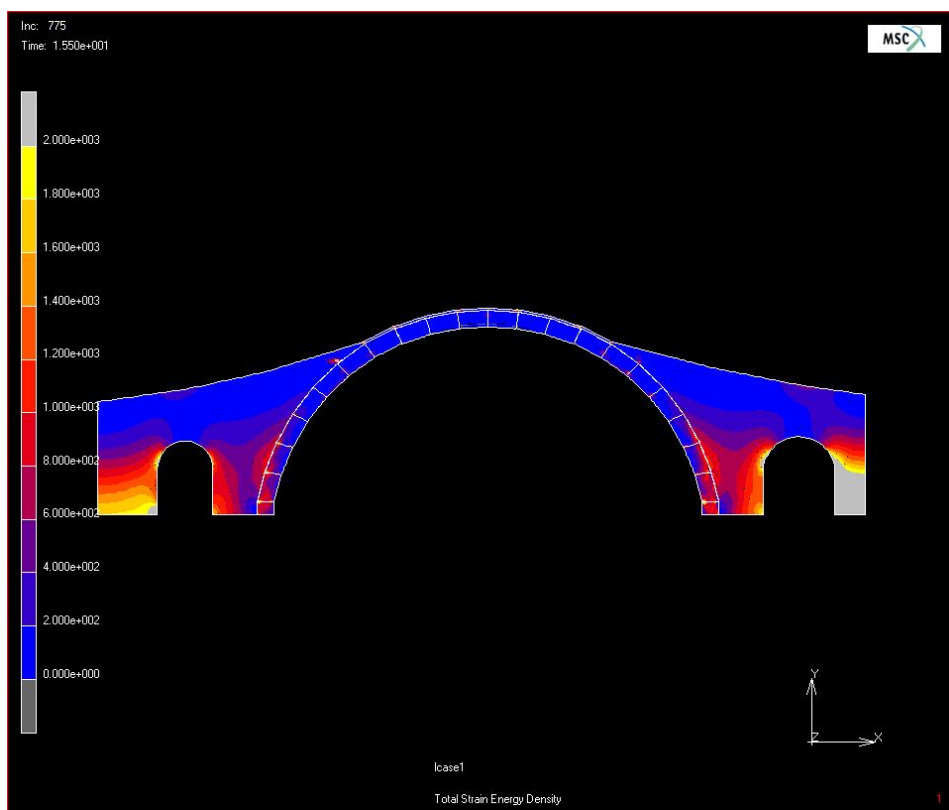
Εικόνα 4.20: *Contact Status* στην επάνω αριστερή πλευρά του τόξου.

Τέλος στις δύο πρώτες εικόνες παρατηρείται ότι στις εξωτερικές τις πλευρές η τοιχοποιία εμφανίζει ουσιαστικά ελάχιστη παραμόρφωση, η οποία οφείλεται στο στατικό φορτίο του ίδιου του βάρους της.

Στην Εικόνα 4.4 παρουσιάζονται οι ισοδύναμες τάσεις στην κατασκευή κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης, ενώ στην Εικόνα 4.5 παρουσιάζεται η πυκνότητα της ενέργειας από τη συνολική παραμόρφωση της κατασκευής. Σε αυτές τις δύο εικόνες παρατηρείται η ικανότητα των τοξοτών κατασκευών να συγκεντρώνουν τις τάσεις στις βάσεις του τόξου. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιείται η συγκεκριμένη γεωμετρία για την κατασκευή γεφυρών και άλλων παρόμοιων κατασκευών, οι οποίες συνδέουν σημεία με μεγάλη απόσταση μεταξύ τους. Έτσι παρατηρείται ότι οι τάσεις είναι συγκεντρωμένες στη βάση του τόξου και στα σημεία όπου εμφανίζονται οι ρωγμές, ενώ η ενέργεια παραμόρφωσης είναι πυκνότερη στα ίδια σημεία. Η μόνη διαφορά είναι ότι η ενέργεια παραμόρφωσης πυκνώνει και στις βάσεις της τοιχοποιίας εξαιτίας του στατικού της φορτίου.



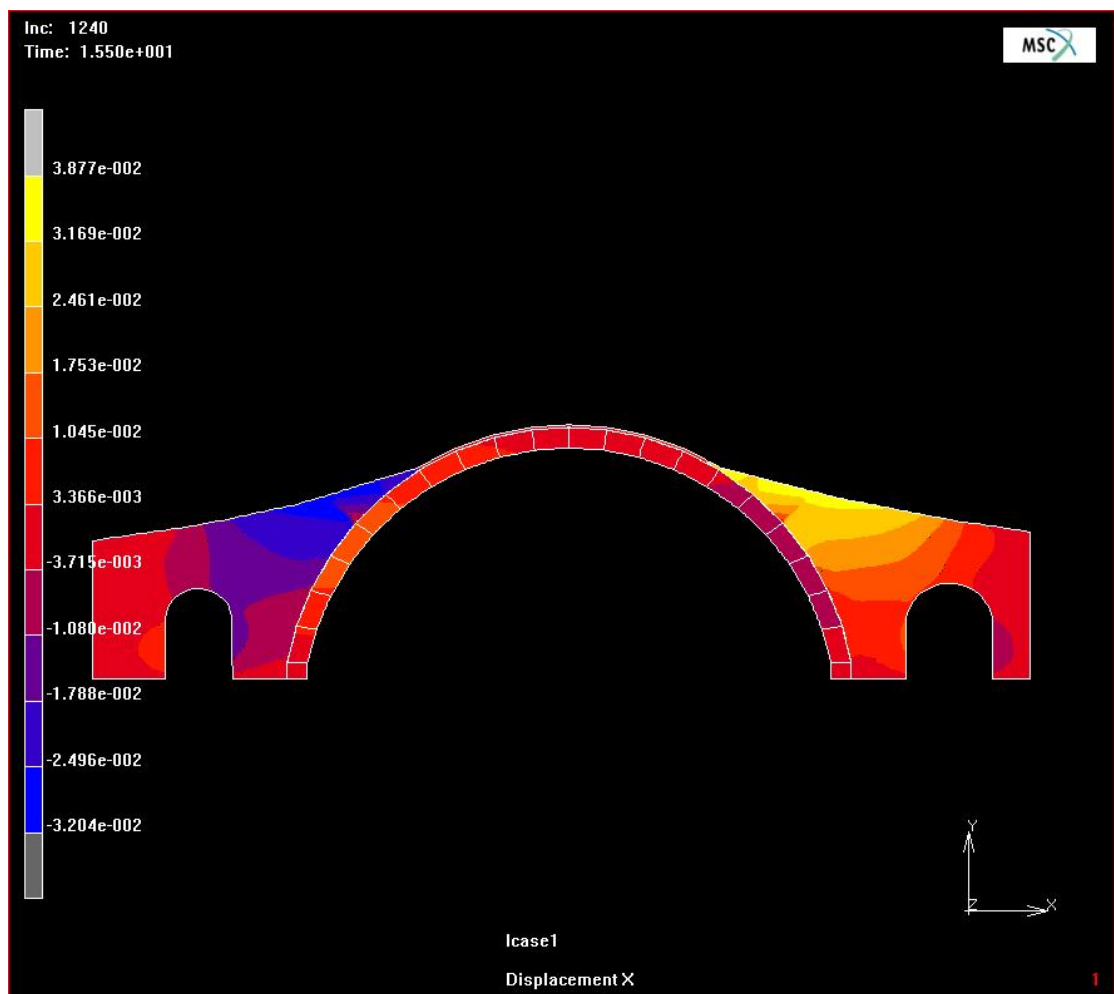
Εικόνα 4.21: Οι ισοδύναμες τάσεις στην κατασκευή κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.



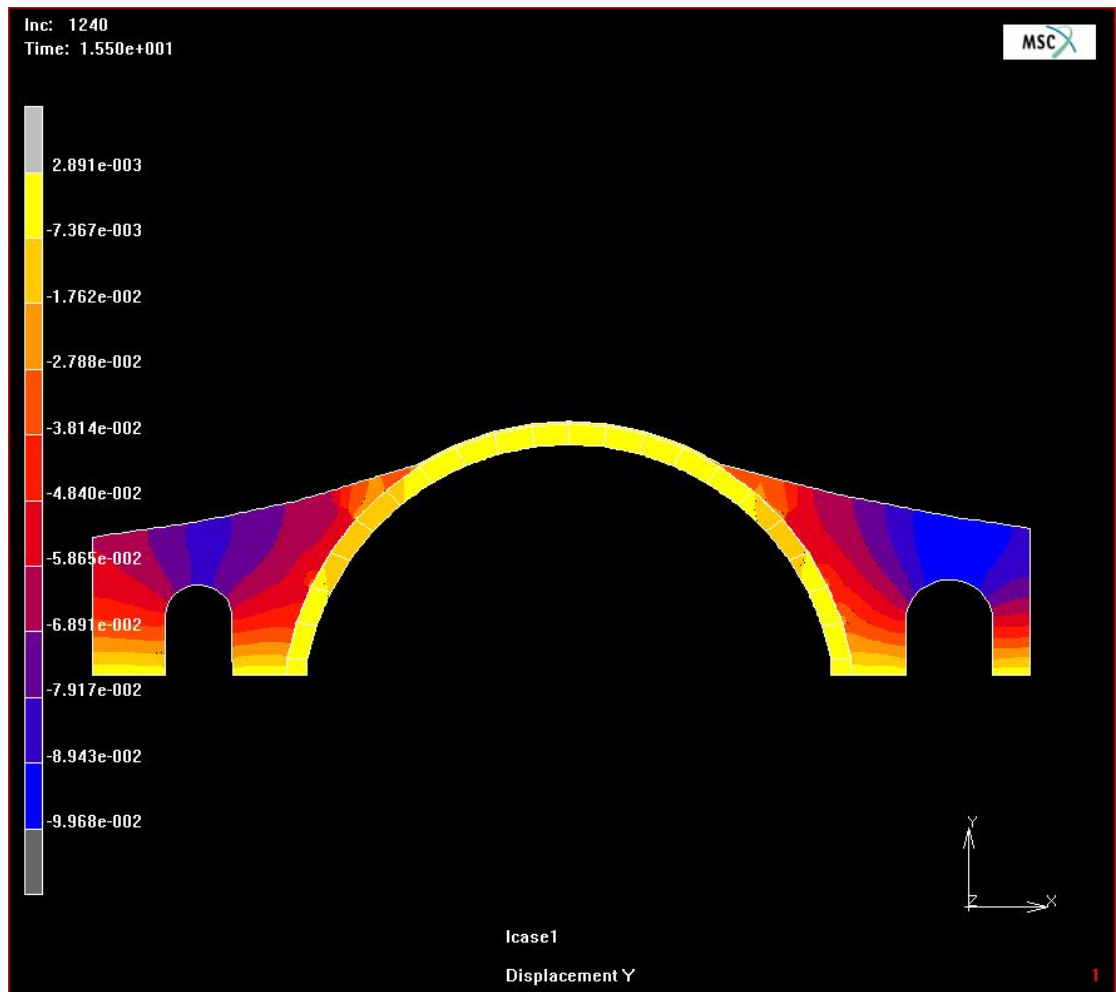
Εικόνα 4.22: Η πυκνότητα της ενέργειας από τη συνολική παραμόρφωση της κατασκευής κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.

4.2 Δεύτερο σενάριο (Δομικά στοιχεία τόξου: *Glue*, τόξο – τοιχοποιία: *Touch*)

Αρχικά και σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα x και στον άξονα y, όπως τις αντιλαμβάνεται το λογισμικό πρόγραμμα και τις αποδίδει γραφικά με χρωματικές κλίμακες, για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.

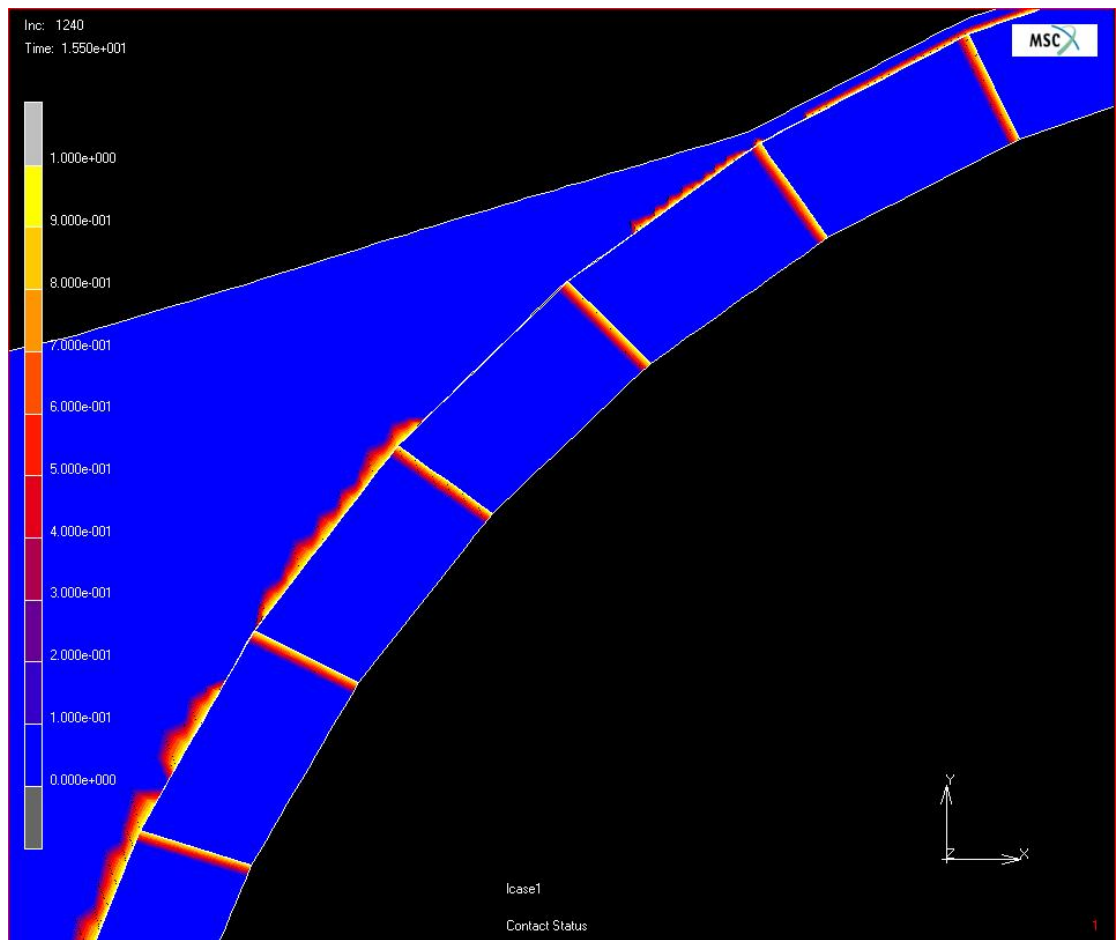


Εικόνα 4.23: Οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα x για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.



Εικόνα 4.24: Οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα y για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.

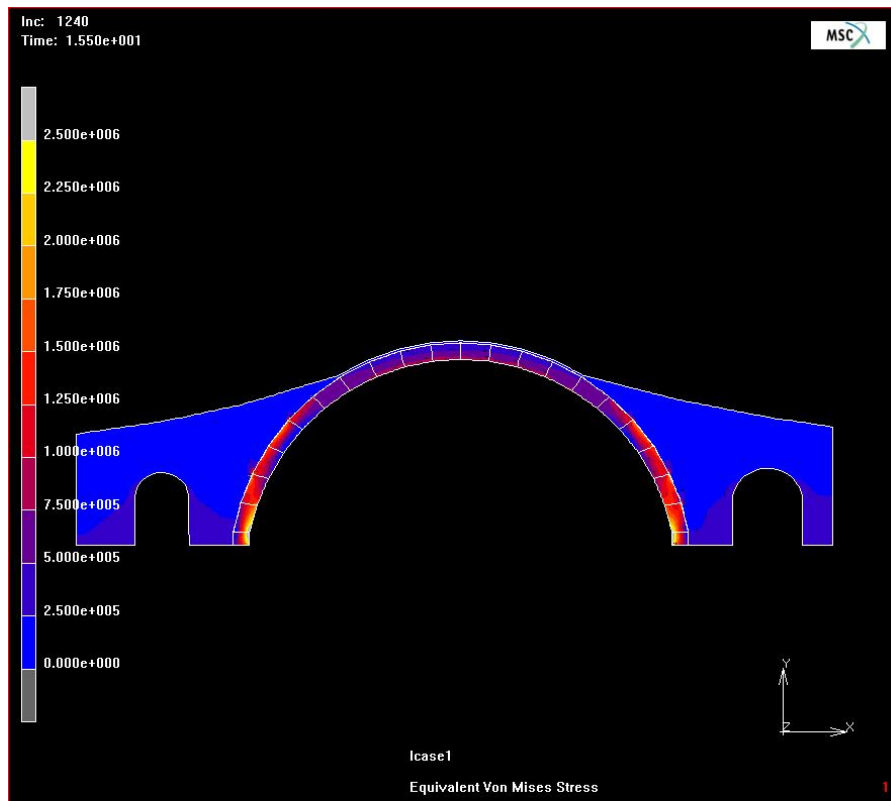
Στην Εικόνα 4.6 και στην Εικόνα 4.7 παρατηρείται ότι το τόξο δεν έχει υποστεί σημαντικές παραμορφώσεις. Αυτό με την έννοια ότι δεν επιτρέπεται η σχετική μετατόπιση των δομικών του στοιχείων, από τους περιορισμούς που έχουν τεθεί στις συνθήκες της μεταξύ τους επαφής. Σαν σύνολο όμως, έχει υποστεί παραμόρφωση. Η τοιχοποιία όμως φαίνεται να έχει μετατοπιστεί τόσο από το στατικό της φορτίο, όσο και από την υποστήριξη των μικρο-μετατοπίσεων του τόξου. Αυτό εμφανίζεται καλύτερα στην επόμενη εικόνα.



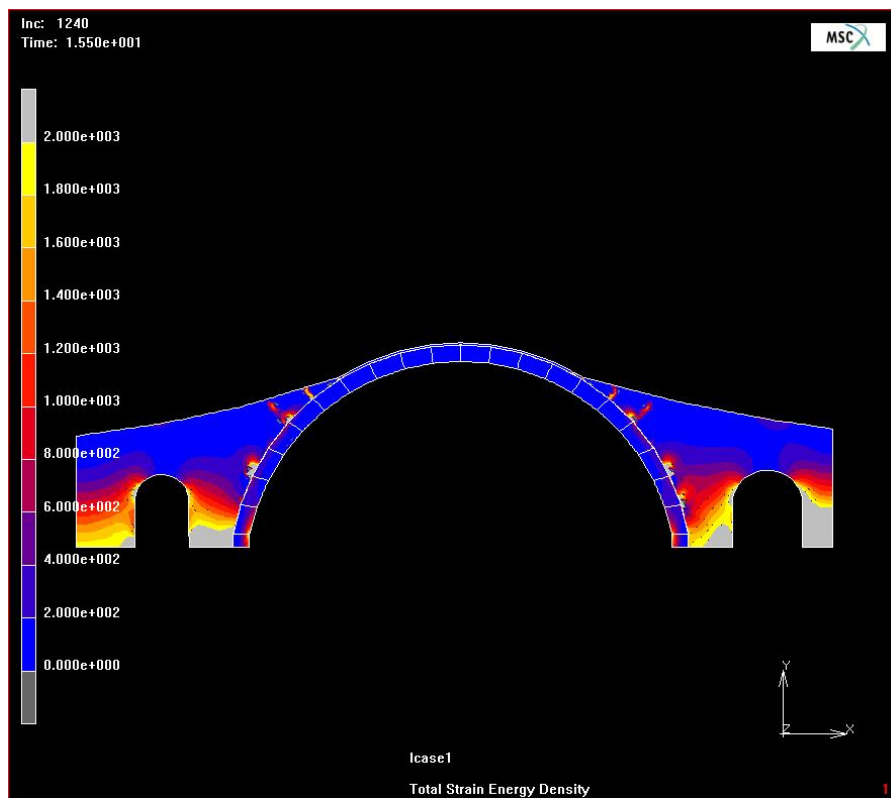
Εικόνα 4.25: *Contact Status* στην επάνω αριστερή πλευρά του τόξου για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.

Στην Εικόνα 4.8 παρατηρείται ότι στα σημεία που στο προηγούμενο σενάριο υπήρχαν εστίες εμφάνισης ρωγμών, τώρα εμφανίζονται αποκολλήσεις μεταξύ τόξου και ενισχυτικής τοιχοποιίας. Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι ο μηχανισμός καταπόνησης της κατασκευής είναι ο ίδιος και στις δύο περιπτώσεις. Απλώς κάνοντας πιο άκαμπτο το τόξο στο δεύτερο σενάριο μεταφέρθηκε η καταπόνηση στην τοιχοποιία.

Στις Εικόνες 4.9 και 4.10 παρουσιάζονται οι ισοδύναμες τάσεις στην κατασκευή κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης και η πυκνότητα της ενέργειας από τη συνολική παραμόρφωση της κατασκευής.



Εικόνα 4.26: Οι ισοδύναμες τάσεις στην κατασκευή κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.



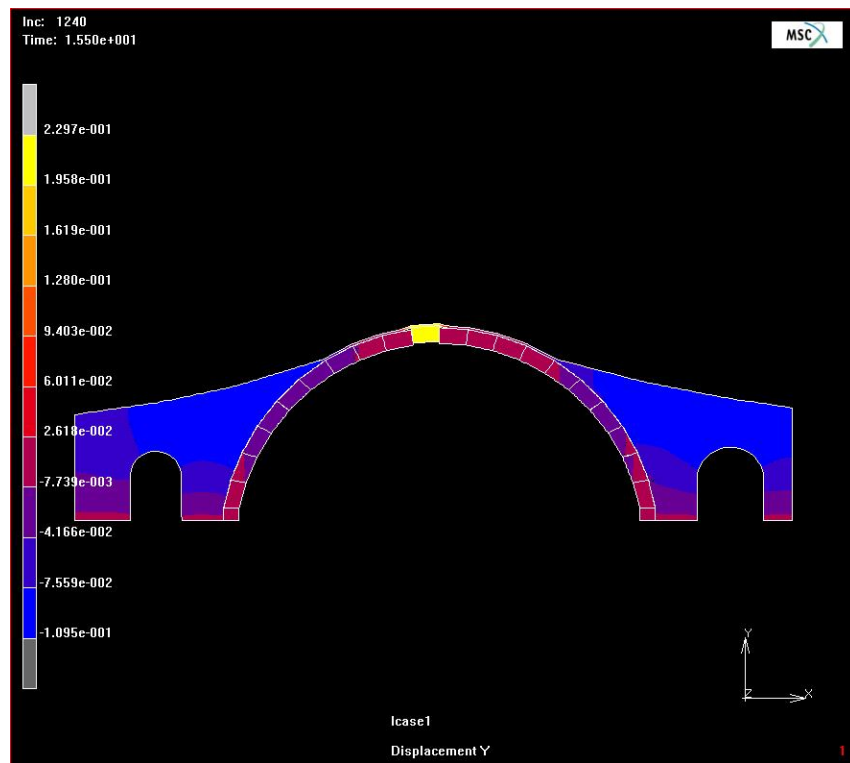
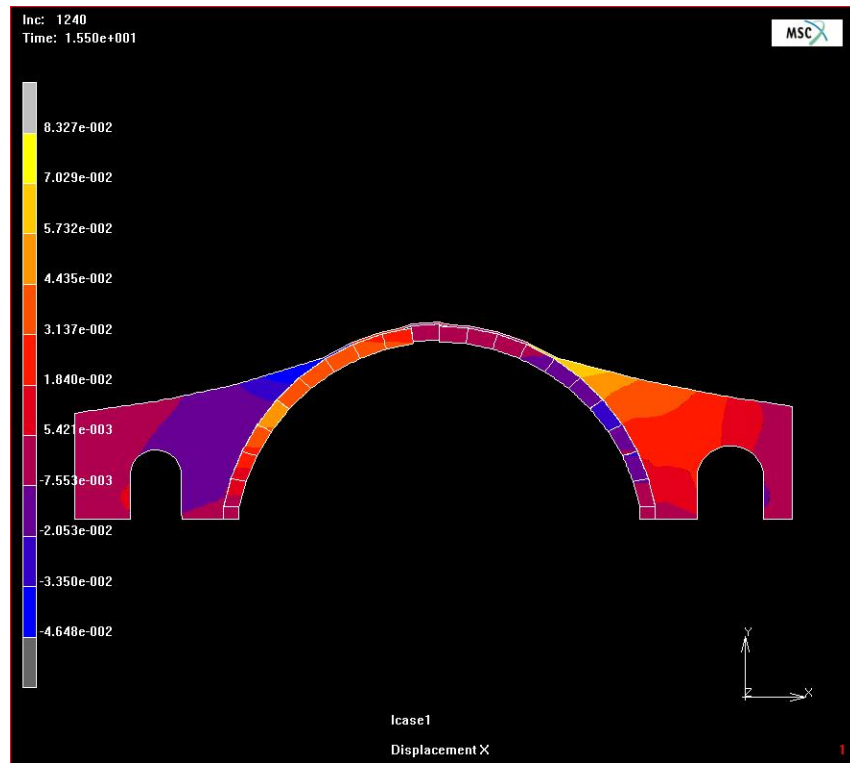
Εικόνα 4.27: Η πυκνότητα της ενέργειας από τη συνολική παραμόρφωση της κατασκευής κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.

Στις παραπάνω εικόνες παρατηρούνται ομοιότητες, όπως και κάποιες έντονες διαφοροποιήσεις σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του πρώτου σεναρίου. Όσον αφορά στις ισοδύναμες τάσεις, πέρα από τη συγκέντρωσή τους στη βάση του τόξου, εμφανίζεται διαφορετική κατανομή τους στην περιφέρειά του. Αν θεωρηθεί μια γραμμή η οποία περνάει από το μέσον της διατομής του τόξου, οι τάσεις για τα ίδια σημεία βρίσκονται στη μία περίπτωση πάνω από αυτή τη γραμμή και στην άλλη περίπτωση, κάτω από τη γραμμή, και αντίστροφα. Αυτό υποδεικνύει ότι αλλάζοντας τα δεδομένα αλλάζει και ο τρόπος που φορτίζεται το τόξο.

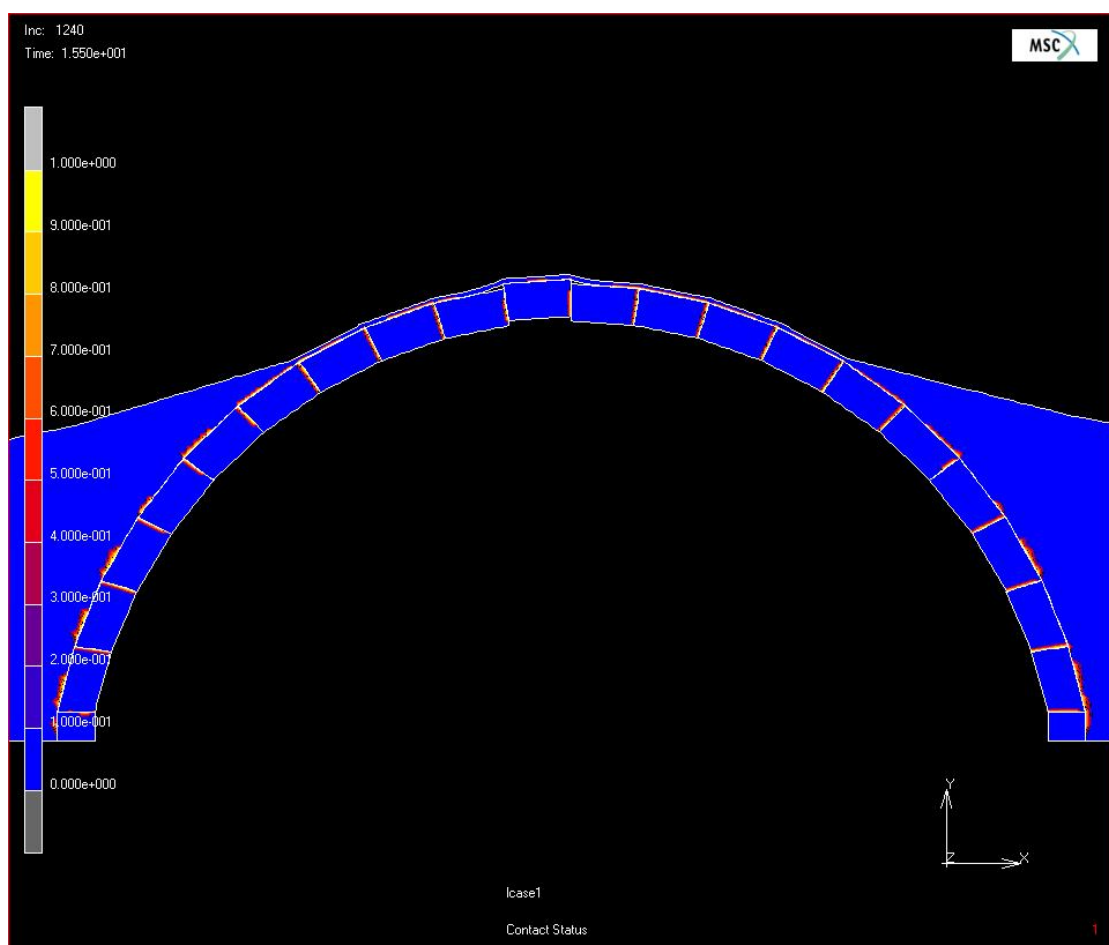
Άλλη μια σημαντική διαφοροποίηση υπάρχει στην Εικόνα 4.10 σε σχέση με την αντίστοιχη εικόνα του πρώτου σεναρίου. Εμφανίζεται μεγάλη πύκνωση της ενέργειας παραμόρφωσης στα σημεία όπου η ενισχυτική τοιχοποιία αποκολλάται από το τόξο. Αυτό όμως ήταν αναμενόμενο, μιας και στο πρώτο σενάριο οι περιορισμοί της επαφής δεν επέτρεπαν να συμβεί κάτι τέτοιο.

4.3 Τρίτο σενάριο (Δομικά στοιχεία τόξου: Touch, τόξο – τοιχοποιία: Touch)

Και σε αυτή την περίπτωση, αρχικά στην Εικόνα 4.11 παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα x και στην Εικόνα 4.12 παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις της κατασκευής στον άξονα y , όπως τις αντιλαμβάνεται το λογισμικό πρόγραμμα και τις αποδίδει γραφικά με χρωματικές κλίμακες, για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.



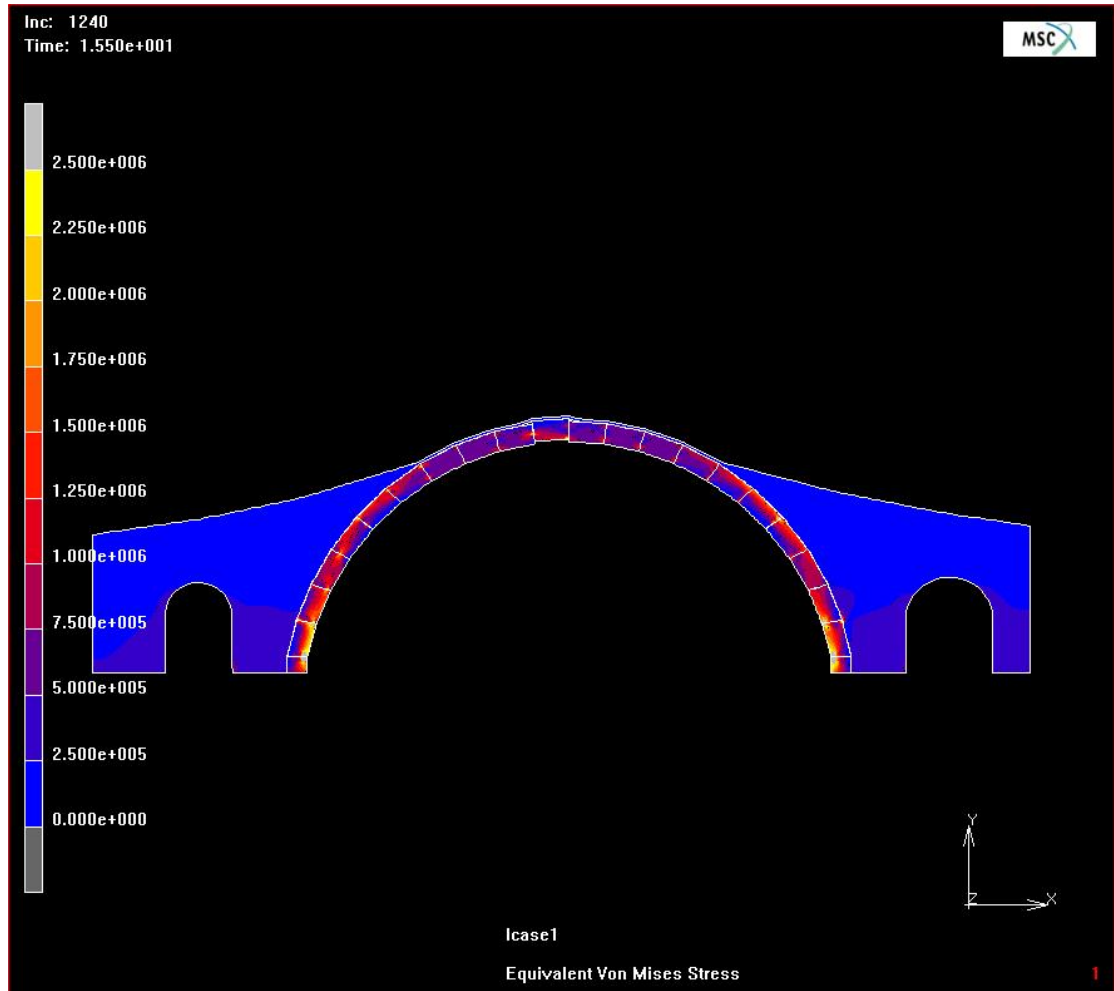
Στην Εικόνα 4.11 παρατηρείται ότι γενικά η κατασκευή έχει υποστεί αρκετές παραμορφώσεις στον x άξονα, οι οποίες σε κάποιες περιπτώσεις φτάνουν και τα 8cm. Ακόμη είναι εμφανής η σχετική μετατόπιση που εμφανίζουν τα δομικά στοιχεία του τόξου στον ίδιο άξονα. Εμφανέστερη όμως είναι στην Εικόνα 4.12 όπου η κλείδα του τόξου έχει μετατοπιστεί κατά 22cm. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει έντονη εμφάνιση ρωγμών στο τόξο της γέφυρας οι οποίες την φέρνουν στα όρια της κατάρρευσης, μιας και τόσο έντονη παραμόρφωση στο συγκεκριμένο σημείο είναι πολύ κρίσιμη. Ακόμη η ενισχυτική τοιχοποιία υπόκειται και αυτή σε παραμορφώσεις πέρα από αυτές που οφείλονται στο στατικό φορτίο του βάρους της, λόγω της υποστήριξης του τόξου.



Εικόνα 4.30: *Contact Status* μεταξύ των δομικών στοιχείων του τόξου και μεταξύ τόξου και τοιχοποιίας, για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης.

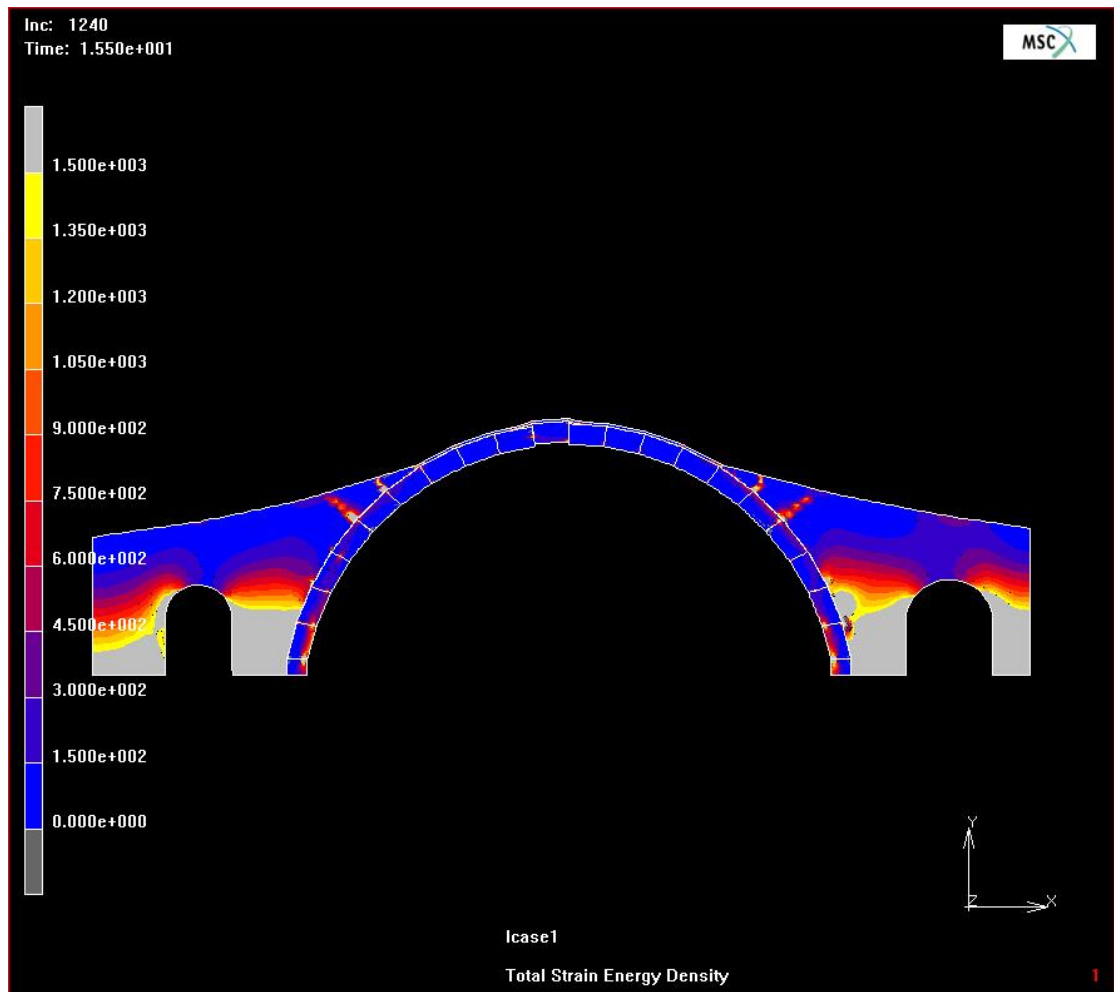
Στην παραπάνω εικόνα είναι εμφανές ότι η επαφή έχει χαθεί σε αρκετά σημεία μεταξύ τόξου και τοιχοποιίας, με εντονότερο το σημείο της κλείδας του τόξου. Όσον αφορά στα δομικά στοιχεία του τόξου, είναι εμφανές ότι και κάποια από

αυτά έχουν χάσει την πλήρη επαφή με τα γειτονικά τους, ενώ η κλείδα είναι προφανές ότι έχει χάσει την επαφή της με τα εκατέρωθεν στοιχεία, στο κάτω μέρος της, ακόμη και χωρίς την επισήμανση του *Contact Status*.



Εικόνα 4.31: Οι ισοδύναμες τάσεις στην κατασκευή κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.

Στην Εικόνα 4.14 παρουσιάζονται οι ισοδύναμες τάσεις στην κατασκευή κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης. Μπορεί να ειπωθεί ότι αυτό που παρουσιάζεται σε αυτή την εικόνα είναι ένας συνδυασμός των αντίστοιχων εικόνων από τα δύο πρώτα σενάρια. Δηλαδή, έντονη συγκέντρωση των τάσεων στη βάση του τόξου, αλλά και εμφάνιση τάσεων στα σημεία όπου παρατηρούνται εστίες εμφάνισης ρωγμών ή και κενών, όπως στην περίπτωση της κλείδας.

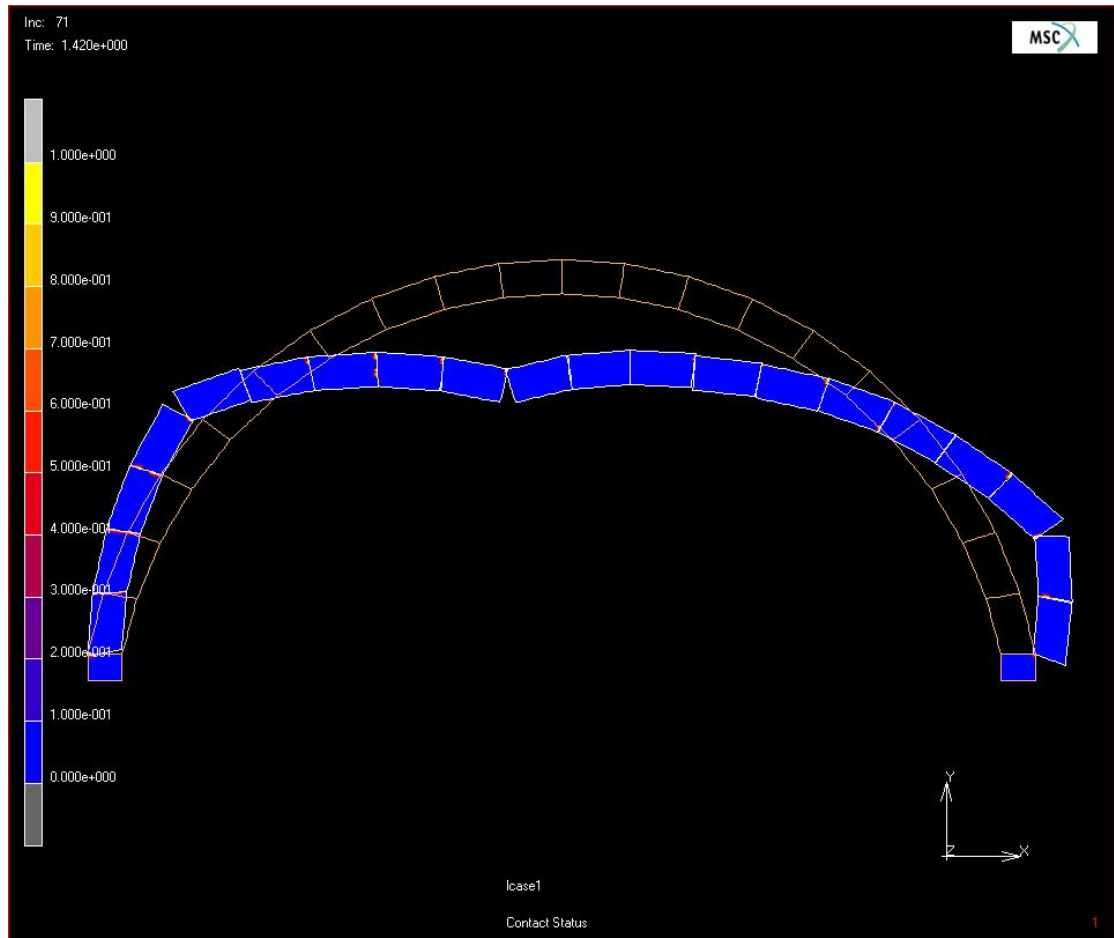


Εικόνα 4.32: Η πυκνότητα της ενέργειας από τη συνολική παραμόρφωση της κατασκευής κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης.

Και στην παραπάνω εικόνα όπου παρουσιάζεται η πυκνότητα της ενέργειας από τη συνολική παραμόρφωση της κατασκευής κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης, μπορεί να ειπωθεί ότι εμφανίζεται ένας συνδυασμός των αντίστοιχων εικόνων των δύο πρώτων σεναρίων. Έτσι η ενέργεια της παραμόρφωσης πυκνώνει στα σημεία εμφάνισης αποκολλήσεων μεταξύ τόξου και ενισχυτικής τοιχοποιίας, αλλά και στη βάση της τοιχοποιίας από την παραμόρφωση λόγω του στατικού φορτίου του βάρους της κατασκευής.

4.4 Τέταρτο σενάριο (Τόξο, χωρίς Ενισχυτική Τοιχοποιία) – Ανακεφαλαίωση

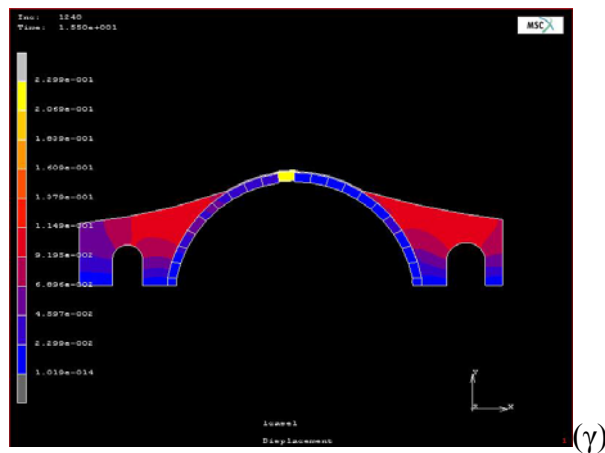
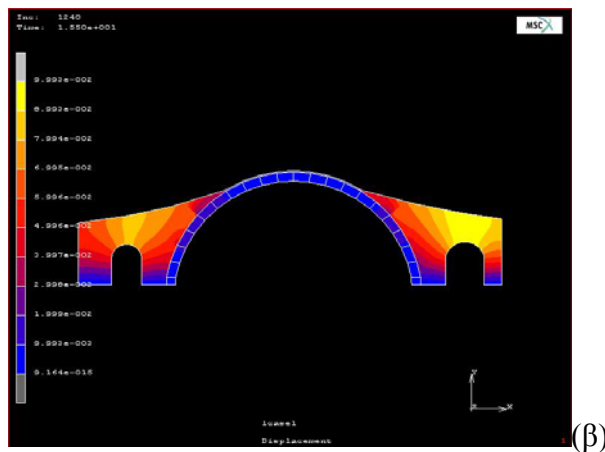
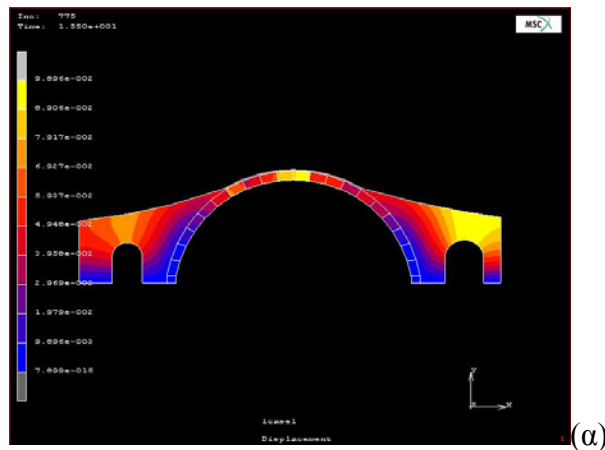
Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την επίλυση του τέταρτου σεναρίου. Σε αυτή την περίπτωση, η επίλυση έδειξε ότι το τόξο καταρρέει χωρίς την υποστήριξη της ενισχυτικής τοιχοποιίας (βλέπε Εικόνα 4.16).



Εικόνα 4.33: *Contact Status* μεταξύ των δομικών στοιχείων του τόξου για το βήμα 71 της ανάλυσης.

Η Εικόνα 4.16 παρουσιάζει το τόξο υπό την επίδραση της δυναμικής καταπόνησης του σεισμού, μετά από 1,42sec. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι χωρίς την εκατέρωθεν ενισχυτική τοιχοποιία, το τόξο καταρρέει και μάλιστα σχεδόν αμέσως μόλις υπάρξει η παραμικρή καταπόνηση. Ένα ακόμη ενδιαφέρον σημείο της παραπάνω εικόνας είναι ότι το τόξο αστοχεί σε τέσσερα σημεία και όχι παντού ταυτόχρονα.

Ανακεφαλαιώνοντας την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, παρακάτω παρουσιάζεται για τα τρία πρώτα σενάρια που επιλύθηκαν για το συγκεκριμένο πρόβλημα, η συνισταμένη των μετακινήσεων της κατασκευής κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης. Είναι εμφανής η διαφορετική συμπεριφορά της κατασκευής αναλόγως των συνθηκών.

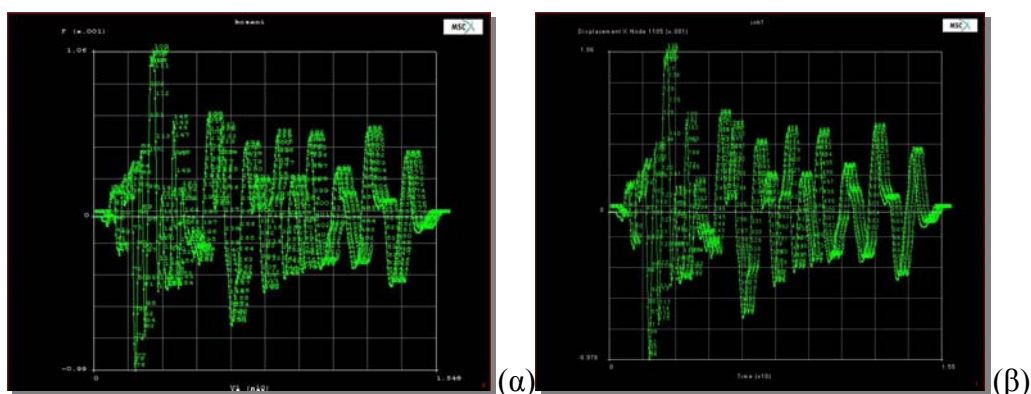


Εικόνα 4.34: Η συνισταμένη των μετακινήσεων της κατασκευής κατά το τελευταίο βήμα της επίλυσης (α: 1^ο σενάριο, β: 2^ο σενάριο, γ: 3^ο σενάριο).

Παρατηρείται λοιπόν, ότι στα δυο σενάρια όπου η συνθήκη της επαφής επιτρέπει τη ανάπτυξη σχετικής ταχύτητας μεταξύ των δομικών στοιχείων του τόξου, υπάρχει μετατόπιση και συνεπάγεται ότι υπό τη δεδομένη δυναμική καταπόνηση, θα υπάρξει δημιουργία ρωγμών, οι οποίες στο τελευταίο σενάριο είναι έντονες στο σημείο της κλείδας του τόξου, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι εκεί μπορεί και να αστοχήσει η κατασκευή.

4.5 Επεξεργασία Αποτελεσμάτων

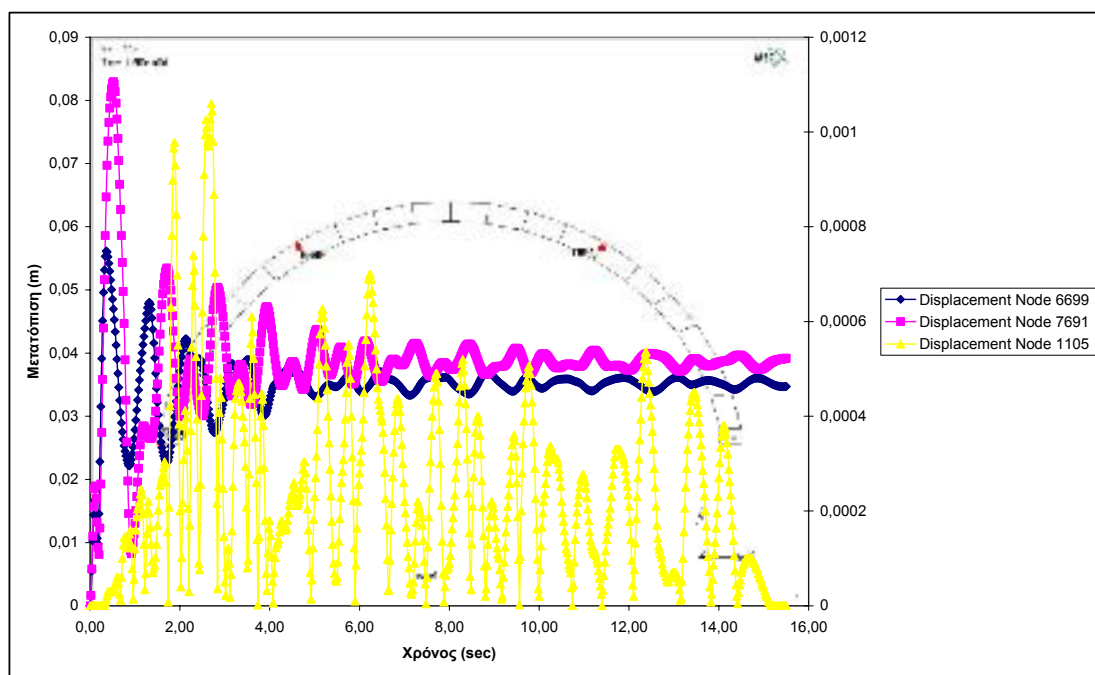
Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια ενδιαφέροντα διαγράμματα, τα οποία προέκυψαν από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων της επίλυσης, των τριών πρώτων σεναρίων του υπό μελέτη προβλήματος. Αυτά τα διαγράμματα αφορούν σε συγκεκριμένους κόμβους της κατασκευής και στην τιμή διαφόρων παραμέτρων τους καθ' όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης. Πρώτα απ' όλα παρουσιάζονται δύο διαγράμματα. Το πρώτο είναι το διάγραμμα του σεισμού, όπως ακριβώς εισήχθη στις παραμέτρους του προβλήματος και αναφέρθηκε και στο τρίτο κεφάλαιο της παρούσης εργασίας. Δεύτερο είναι το διάγραμμα των μετατοπίσεων στον άξονα x του κόμβου 1105, ο οποίος ευρίσκεται στην κάτω, αριστερή βάση της κατασκευής, για το πρώτο σενάριο επίλυσης.



Εικόνα 4.35(α) Το διάγραμμα του σεισμού και (β) το διάγραμμα των μετατοπίσεων στον άξονα x του κόμβου 1105.

Από τη σύγκριση των δύο διαγραμμάτων, η οποία γίνεται για την επαλήθευση της ορθότητας της προσομοίωσης, προκύπτει ότι η εφαρμογή της δυναμικής καταπόνησης έγινε επιτυχώς, μιας και ο συγκεκριμένος κόμβος είναι ένας από εκείνους στους οποίους εφαρμόστηκε αυτή η συνοριακή συνθήκη. Το ίδιο ισχύει και για τα υπόλοιπα σενάρια επίλυσης.

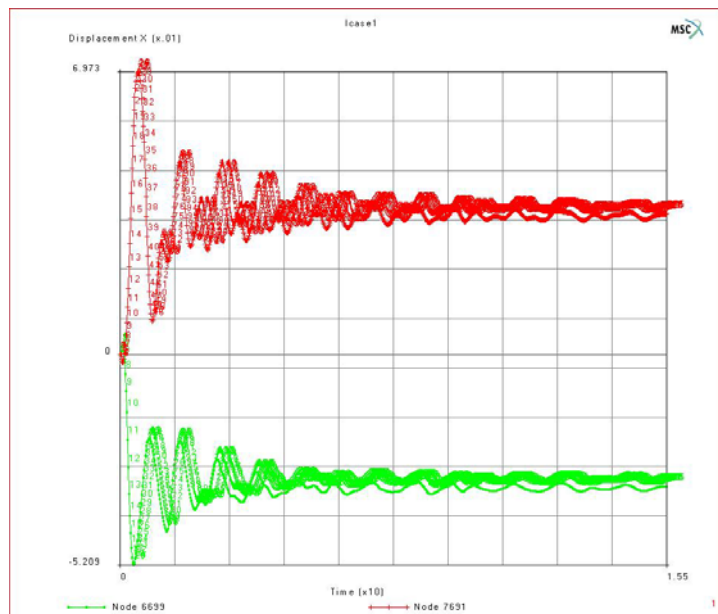
Στην Εικόνα 4.19 παρουσιάζεται, πάλι για το πρώτο σενάριο επίλυσης του προβλήματος, ένα συγκριτικό διάγραμμα της συνισταμένης των μετατοπίσεων για τρεις κόμβους της κατασκευής. Τον κόμβο 1105 η θέση του οποίου αναφέρθηκε προηγουμένως, τον κόμβο 6699, ο οποίος βρίσκεται στην επάνω αριστερή, εξωτερική πλευρά του τόξου, και τον κόμβο 7691 ο οποίος βρίσκεται στην επάνω δεξιά, εξωτερική πλευρά του τόξου.



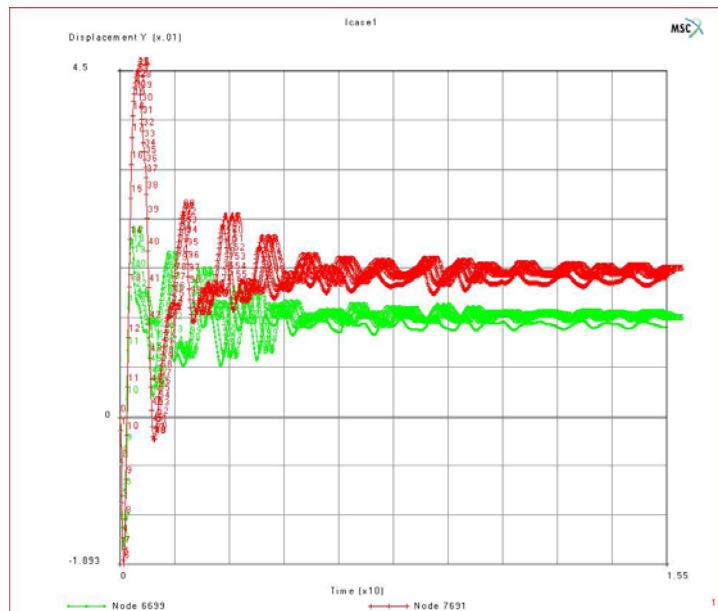
Εικόνα 4.36: Συγκριτικό διάγραμμα της συνισταμένης των μετατοπίσεων για τρεις κόμβους της κατασκευής (1105, 6699 και 7691).

Από το παραπάνω διάγραμμα είναι εμφανής η απόσβεση των φορτίων από την κατασκευή. Ενώ παρατηρείται μια αρχικά μεγάλη μετατόπιση των κόμβων του τόξου στο πρώτο 0,5 sec, μετά κινήσεις τους είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις μετατοπίσεις της βάσης εξαιτίας του σεισμού. Ακόμη η αρχικά μεγάλη μετατόπιση οφείλεται στο στατικό φορτίο του βάρους της κατασκευής, το οποίο υπολογίζεται από το λογισμικό στα πρώτα βήματα της επίλυσης. Το παραπάνω φαινόμενο γίνεται

καλύτερα κατανοητό από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα επόμενα δύο διαγράμματα (βλέπε Εικόνες 4.20 και 4.21).



Εικόνα 4.37: Οι μετατοπίσεις των κόμβων 6699 και 7691 στον άξονα x, καθ' όλη τη διάρκεια της δυναμικής φόρτισης.



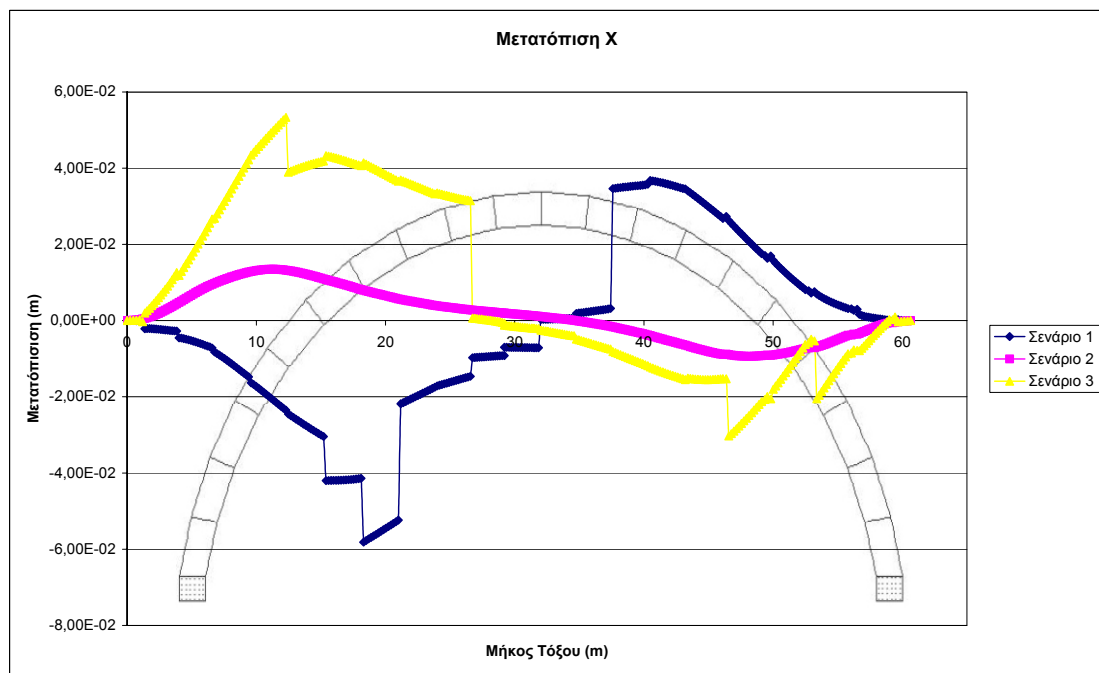
Εικόνα 4.38: Οι μετατοπίσεις των κόμβων 6699 και 7691 στον άξονα y, καθ' όλη τη διάρκεια της δυναμικής φόρτισης.

Από την Εικόνα 4.20 φαίνεται ότι αρχικά το στατικό φορτίο της κατασκευής

τείνει να συμπύκνει τα δομικά στοιχεία του τόξου, τα οποία στη συνέχεια λειτουργούν συγχρονισμένα, περίπου σαν ένα κομμάτι, όσον αφορά τις οριζόντιες μετατοπίσεις. Αυτό είναι ένα πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο και εξηγεί την ευρεία χρήση αυτής της γεωμετρίας σε αυτού του είδους τις κατασκευές.

Στην Εικόνα 4.21 παρατηρείται ότι μετά την αρχική μετατόπιση προς τα κάτω, υπό το βάρος τους για περίπου 1,5cm, οι κόμβοι μετακινούνται προς τα πάνω, εξαιτίας της σύμπτυξης των δομικών στοιχείων του τόξου, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Ακόμη, σε αυτή την εικόνα παρατηρείται ότι η συνθήκη που επιτρέπει την ανάπτυξη σχετικών μετατοπίσεων μεταξύ των δομικών στοιχείων του τόξου, τους επιτρέπει να συμπεριφέρονται σχεδόν αντίστροφα. Πράγμα που εξηγεί και την παραμόρφωση που παρατηρείται στο τέλος της επίλυσης.

Παρόμοια εικόνα παρατηρήθηκε και στο τρίτο σενάριο, ενώ στο δεύτερο, όπως φάνηκε και στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων της επίλυσης, η επιλογή *Glue* για το τόξο, δεν επέτρεψε την ανάπτυξη σχετικών μετατοπίσεων.

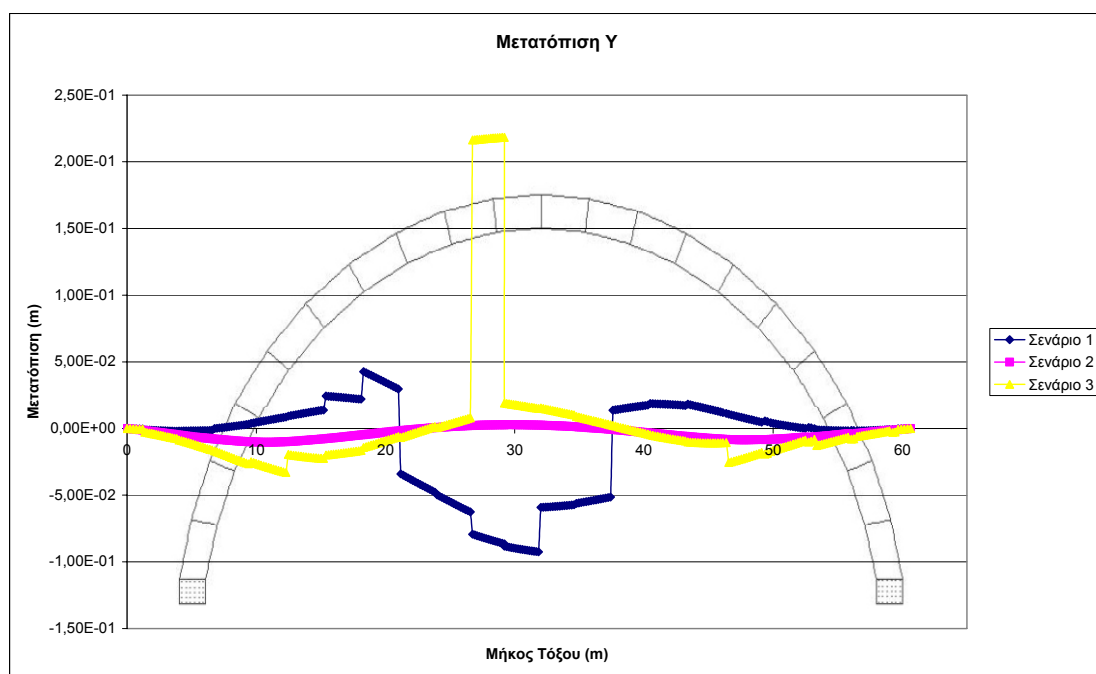


Εικόνα 4.39: Συγκριτικό διάγραμμα των μετατοπίσεων στον άξονα x των κόμβων οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων.

Στην Εικόνα 4.22 παρουσιάζεται συγκριτικό διάγραμμα των μετατοπίσεων στον άξονα x των κόμβων οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου,

στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων. Φαίνεται σε αυτό το διάγραμμα η διαφορά στη συμπεριφορά της κατασκευής ανάλογα με τους περιορισμούς που τέθηκαν κατά τη μοντελοποίηση των σεναρίων.

Παρατηρείται ότι το αποτέλεσμα της καταπόνησης είναι η σύμπτυξη του τόξου, πράγμα που δείχνει και το γιατί η κατασκευή αντέχει σε αυτή την καταπόνηση, μιας και όταν συμπτύσσεται αυξάνονται οι δυνάμεις της επαφής μεταξύ των στοιχείων της. Ακόμη άλλο ένα στοιχείο για την ορθότητα της συμπεριφοράς της κατασκευής, είναι ότι τα φορτία σε αυτή την περίπτωση μετατρέπονται σε θλιπτικά και όχι σε εφελκυστικά, στα οποία τα λιθόκτιστα υλικά παρουσιάζουν μικρή αντοχή.

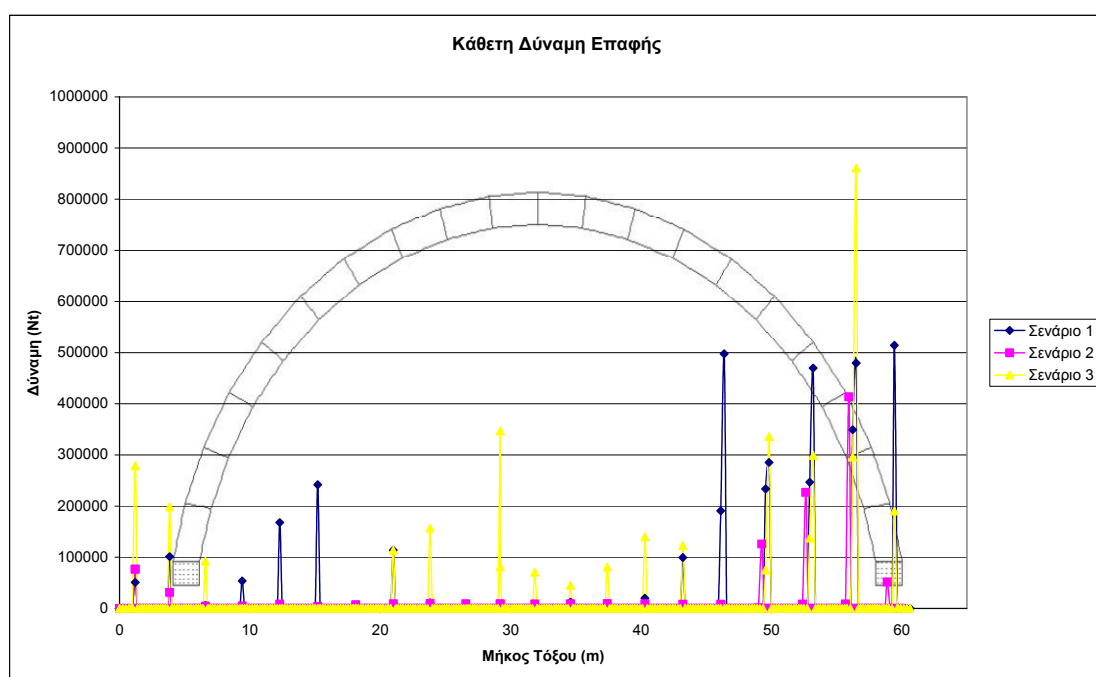


Εικόνα 4.40: Συγκριτικό διάγραμμα των μετατοπίσεων στον άξονα y των κόμβων οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων.

Στην παραπάνω εικόνα παρουσιάζεται συγκριτικό διάγραμμα των μετατοπίσεων στον άξονα y των κόμβων οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων. Σε αυτή την εικόνα παρατηρούνται έντονες μετατοπίσεις στον άξονα y, οι οποίες υποδεικνύουν ότι στα συγκεκριμένα σημεία η εμφάνιση ρωγμών έχει αρχίσει και ιδιαίτερα στην κλείδα, στο

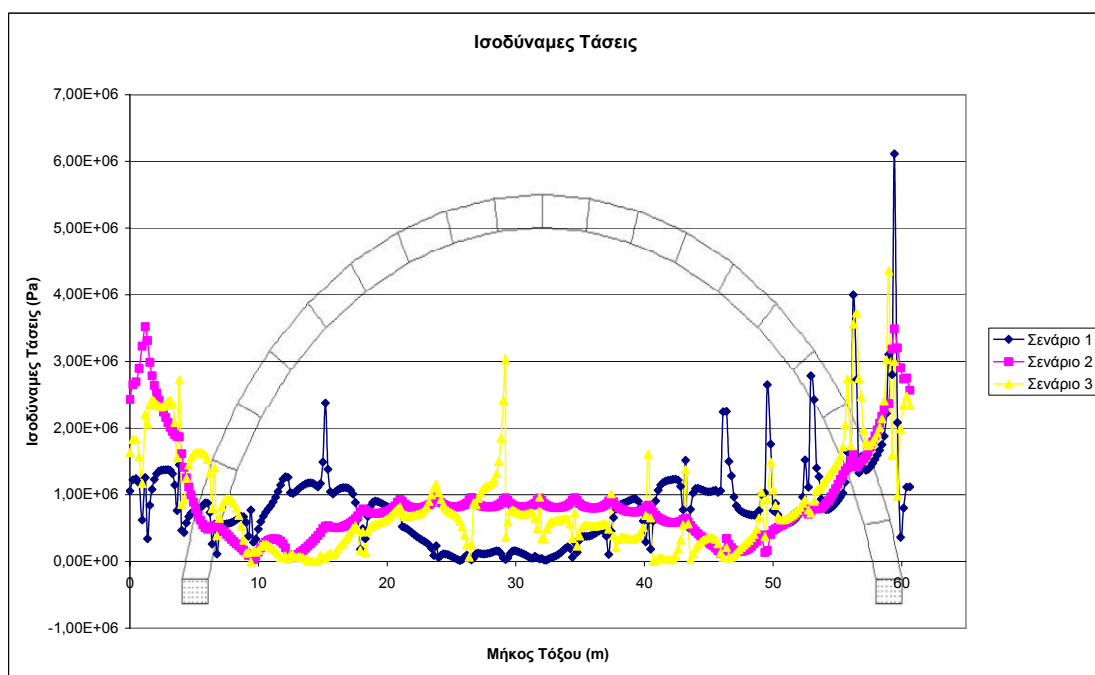
τρίτο σενάριο η μετατόπιση είναι οριακή, διότι αν προχωρήσει λίγο παραπάνω, η κλείδα θα φύγει από τη θέση της και η κατασκευή θα καταρρεύσει.

Δύο ακόμη ενδιαφέροντα σημεία των εικόνων 4.22 και 4.23 είναι αφενός οι πολύ μικρές μετατοπίσεις που παρουσιάζουν οι κόμβοι στο δεύτερο σενάριο εξαιτίας της επιλογής *Glue*, και ο κανόνας των τριών ως πέντε σημείων εκκίνησης της αστοχίας μιας τοξωτής κατασκευής, ο οποίος ακολουθείται από τη προς μελέτη γέφυρα, όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα. Ειδικά στην περίπτωση του δεύτερου σεναρίου, μπορεί οι μετατοπίσεις να είναι πολύ μικρές, ακολουθούν όμως το μοτίβο των υπολοίπων σεναρίων.



Εικόνα 4.41: Συγκριτικό διάγραμμα των κάθετων δυνάμεων επαφής των κόμβων, οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων.

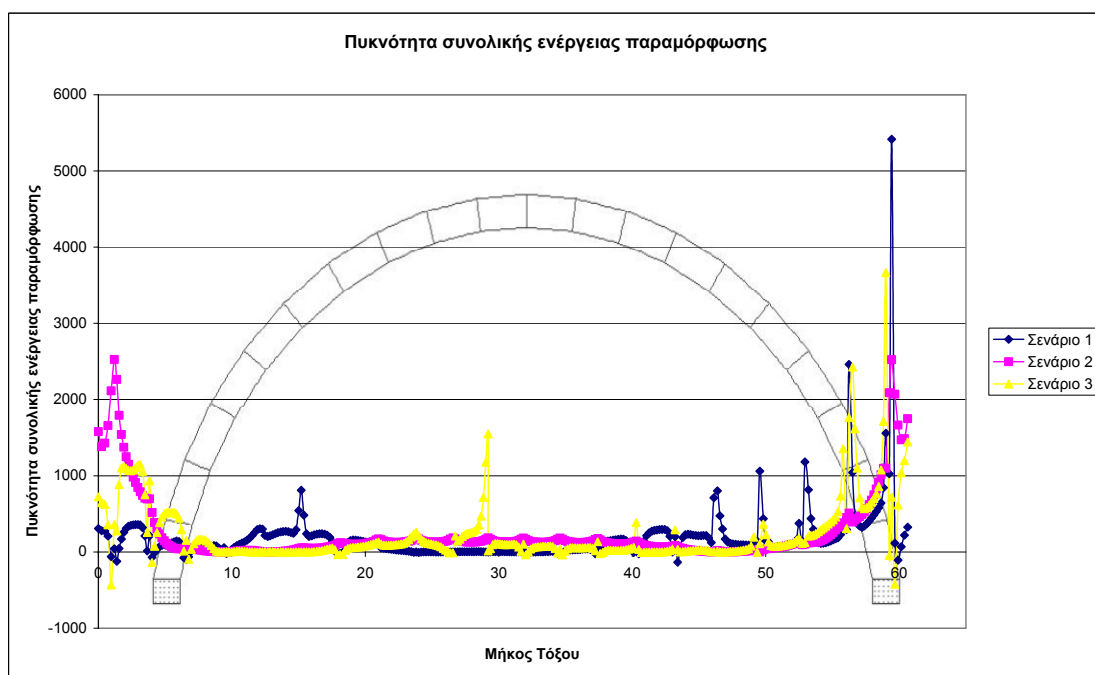
Στην Εικόνα 4.24 παρουσιάζονται οι κάθετες δυνάμεις επαφής στους κόμβους οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων. Αυτή η εικόνα είναι πολύ ενδιαφέρουσα, διότι αφενός δείχνει τα σημεία στα οποία εντοπίζονται οι καταπονήσεις, αλλά αφετέρου όπου οι τιμές της δύναμης είναι μηδενικές, δείχνει ότι η επαφή έχει χαθεί.



Εικόνα 4.42: Συγκριτικό διάγραμμα των ισοδύναμων τάσεων των κόμβων, οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων.

Στο παραπάνω διάγραμμα παρουσιάζονται οι ισοδύναμες τάσεις των κόμβων, οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων. Αυτό το διάγραμμα δείχνει γιατί προτιμάται αυτή η γεωμετρία – του τόξου – για κατασκευές που χρειάζεται να ενώσουν σημεία τα οποία απέχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους. Οι τάσεις συγκεντρώνονται στις βάσεις του τόξου. Έτσι μπορούν να κατασκευαστούν γέφυρες σχετικά ελαφριές και συνάμα ανθεκτικές, τουλάχιστον σε στατικά φορτία. Οι υπόλοιπες κορυφές του διαγράμματος αντιπροσωπεύουν σημεία στα οποία υπάρχει εκκίνηση εμφάνισης ρωγμών.

Παρόμοιο φαινόμενο παρουσιάζεται και στο επόμενο διάγραμμα (βλέπε Εικόνα 4.26), το οποίο ενισχύει τα προαναφερθέντα σχόλια.



Εικόνα 4.43: Συγκριτικό διάγραμμα της πυκνότητας της συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης των κόμβων, οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων.

Σε αυτή την εικόνα παρουσιάζεται η πυκνότητα της συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης των κόμβων, οι οποίοι βρίσκονται στην εσωτερική πλευρά του τόξου, στις συνδέσεις μεταξύ των δομικών του στοιχείων, για το τελευταίο βήμα της επίλυσης και των τριών σεναρίων. Όπως και παραπάνω, έτσι και σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται ότι τα φορτία κυρίως, μεταφέρονται στη βάση του τόξου, ενώ οι υπόλοιπες κορυφές, και εδώ, αντιπροσωπεύουν σημεία στα οποία υπάρχει εκκίνηση εμφάνισης ρωγμών.

Γενικά συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσης εργασίας ήταν η μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς μια λιθόκτιστης, τοξωτής γέφυρας, όταν αυτή υποβάλλεται σε στατική και δυναμική καταπόνηση. Οι κατασκευές αυτού του είδους παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον, τόσο από μηχανολογική σκοπιά, όσο και από πολιτιστική σκοπιά, μιας και πλέον δεν κατασκευάζονται υποδομές με τέτοιο τρόπο και χρειάζεται να γίνει αντιληπτός ο τρόπος κατασκευής και λειτουργίας τους, αλλά και ο καλύτερος τρόπος αποκατάστασης και διατήρησής τους όπου αυτό είναι εφικτό.

Η μελέτη της συγκεκριμένης κατασκευής πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος MSC.MARC 2005. αφορούσε στη στατική και δυναμική ανάλυση της κατασκευής όταν πλήττεται από έναν σεισμό, της τάξεως των συνήθως συμβαινόντων στον Ελλαδικό χώρο. Για την πραγματοποίησή της δημιουργήθηκαν τρία συν ένα διαφορετικά σενάρια επίλυσης, όσον αφορά τις σχέσεις επαφής των δομικών στοιχείων της γέφυρας, με στόχο την καλύτερη προσομοίωση της συμπεριφοράς των υλικών από τα οποία είναι κατασκευασμένη. Τα αποτελέσματα των επιλύσεων οδήγησαν σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα, τα οποία είναι δυνατόν να βοηθήσουν στην κατανόηση αυτού του είδους των κατασκευών.

Αρχικά, ένα πρώτο και πολύ σημαντικό συμπέρασμα ήταν ότι η προσέγγιση της συμπεριφοράς των υλικών με διεπιφάνειες επαφής, λειτούργησε και οδήγησε στην ρεαλιστικότερη απεικόνιση της πραγματικής συμπεριφοράς της κατασκευής. Το κόστος αυτής της μέθοδο είναι η πολυπλοκότητα και η δυσκολία στη μοντελοποίηση, αλλά και στη διαχείριση των δεδομένων, από το λογισμικό.

Ένα δεύτερο συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από τα αποτελέσματα της επίλυσης, είναι ότι η κατασκευή, τελικά, αντέχει στα επιβαλλόμενα φορτία, τόσο του βάρους της, όσο και του σεισμού. Και στα τρία σενάρια στα οποία περιλαμβάνεται στο μοντέλο, η υπάρχουσα ενισχυτική τοιχοποιία εκατέρωθεν του τόξου της γέφυρας, το αποτέλεσμα της καταπόνησης ήταν να προκληθούν παραμορφώσεις και «ρωγμές» στην κατασκευή, αλλά όχι και η κατάρρευσή της.

Τρίτο ενδιαφέρον συμπέρασμα, ήταν ότι οι αστοχίες και στα τέσσερα σενάρια εντοπίζονται σε τρία έως πέντε σημεία κάθε φορά και όχι σε όλο το σώμα του τόξου. αυτό γίνεται πιο έντονα εμφανές κατά την επίλυση του τέταρτου σεναρίου, από το

οποίο έχει αφαιρεθεί η ενισχυτική τοιχοποιία. Σε αυτό το σενάριο βασίζεται και το τελευταίο σημαντικό συμπέρασμα, το οποίο εξάγεται από τα αποτελέσματα της παρούσης εργασίας, και δεν είναι άλλο από το ότι η ενισχυτική τοιχοποιία δρα όντως ενισχυτικά και χωρίς την υποστήριξη που παρέχει στο τόξο, η γέφυρα καταρρέει με την επιβολή του δυναμικού φορτίου.

Εκκινώντας από τα παραπάνω, ενδιαφέρον για περαιτέρω έρευνα, παρουσιάζει η επιλογή και άλλων εναλλακτικών σεναρίων επίλυσης, κατά τα οποία θα διαφοροποιούνται και άλλες παράμετροι, όπως ο συντελεστής τριβής μ μεταξύ των διεπιφανειών επαφής, η ένταση και η διάρκεια της δυναμικής καταπόνησης. Ακόμη θα ήταν δυνατή η βελτιστοποίηση του πλήθους των δομικών στοιχείων του τόξου της γέφυρας για την επίτευξη του λεπτομερέστερου ελέγχου των πιθανών εστιών εμφάνισης ρωγμών.

Τέλος μεγάλο ενδιαφέρον θα παρουσίαζε και η τρισδιάστατη μοντελοποίηση της κατασκευής και η επιβολή των μετακινήσεων του σεισμού και στους υπόλοιπους άξονες για την περαιτέρω βελτίωση της προσέγγισης στην πραγματικότητα, μέσω των καταπονήσεων εκτός επιπέδου, που είναι δυνατόν να εμφανιστούν κατά τη διάρκεια ενός σεισμού.

Βιβλιογραφία

1. Audenaerta A., Fanningb P. Sobczakb L., Peremansa H., 2007, 2-D analysis of arch bridges using an elasto-plastic material model, UFSIA-UA, Prinsstraat, Engineering Structures 30 (2008) 845–855.
2. Thavaligam A., Bicanic N., Robinson J. I., Ponniah D. A., 2001, Computational framework for discontinuous modeling of masonry arch bridges, University of Glasgow, Computers and Structures 79 (2001) 1821 – 1830.
3. Drosopoulos G. A., Stavroulakis G. E., Massalas C. V., 2006, Limit analysis of a single span masonry bridge with unilateral frictional contact interfaces, University of Ioannina, Engineering Structures 28 (2006) 1864 – 1873.
4. Ng K-H., Fairfield C. A., 2004, Modifying the mechanism method of masonry arch bridge analysis, Napier University, Construction and Building Materials 18 (2004) 91 – 97.
5. Stavroulaki M. E., 2006, Dynamic analysis of a stone bridge including contact and friction effects, Technical University of Crete, NNMAE.
6. De Luca A., Giordano A., Mele E., 2004, A simplified procedure for assessing the seismic capacity of masonry arches, Universita di Napoli, Engineering Structures 26 (2004) 1915 – 1929.
7. Heyman J. The safety of masonry arches. International Journal of Mechanical Science 1969;11:363–85.
8. Ural A., Oruc S., Dogangun A., Iskender Tuluk O., 2008, Turkish historical arch bridges and their deteriorations and failures, Karadeniz Technical University, Engineering Failure Analysis 15 (2008) 45 – 53.
9. P.B. Lourenço, P. Roca (Eds.), 2001, Analysis and experiments of masonry arches, Technische Universiteit Eindhoven, The Netherlands Guimarães
10. Paulo B. Lourenço, 2003, Guidelines for the analysis of historical masonry structures, University of Minho, Guimarães, Portugal.

11. Carl L Brookes and Paul J Mullett, 2004, Service load testing, numerical simulation and strengthening of masonry arch bridges, Arch Bridges ARCH'04, C L Brookes and P J Mullett (Eds).
12. Alex Rong, 2004, Structural Analysis of an 'Ancient Arch Bridge' using Modern Technology, Structures, ASCE 2004.
13. Alberto Drei and Alberto Fontana, 2001, Load carrying capacity of multiple-leaf masonry arches, Historical Constructions, P.B. Lourenço, P. Roca (Eds.), Guimarães, 2001, Polytechnic University of Milan, Structural Engineering Department, Milan, Italy.
14. Andrea Cavicchi, Luigi Gambarotta, 2004, Collapse analysis of masonry bridges taking into account arch–fill interaction, Engineering Structures 27 (2005) 605–615
15. Anjan Dutta, S. Talukdar, 2002, Damage detection in bridges using accurate modal parameters, Finite Elements in Analysis and Design 40 (2004) 287–304
16. F. Biondini, F. Bontempi, E. Garavaglia, 2002, Uncertainties in the nonlinear analysis of masonry bridge structures, Structural Safety and Reliability.
17. A. S. Gago & J. Alfaiate, 2002, Numerical Analyses of the Bargower Arch Bridge, ICIST - Instituto Superior Técnico – Lisbon, Portugal.
18. www.physics4u.gr/faq/measureearthquake.html
19. www.civilprotection.gr/games/seismos2.html
20. G. W. Housner, The behaviour of inverted pendulum structures during earthquakes, Bull. Seism. Soc. Am. 53, 403–417 (1963).
21. Paolo Clemente, 1998, Introduction to dynamics of stone arches, Earthquake Engng. Struct. Dyn. 27, 513–522
22. G. Augusti and A. Sinopoli, Modelling the dynamics of large block structures, Meccanica, Int. J. Meccanica, AIME'A 27(3), 195–211 (1992).
23. W. K. Tso and C. M. Wong, Steady state rocking response of rigid blocks. Part 1: Analysis, Int. J. Earthquake Engng. Struct. Dyn. 18, 1057–1071 (1989).
24. J. Heyman, The stone skeleton, Int. J. Solids Struct. 2, 249–279 (1966).
25. S. J. Hogan, The many steady state response of a rigid body under harmonic forcing, Int. J. Earthquake Engng. Struct. Dyn. 19, 89–106 (1990).
26. I. J. Oppenheim, The Masonry arch as a four-link mechanism under base motion, Int. J. Earthquake Engng. Struct. Dyn. 21, 1005–1017 (1992).

27. G. Di Pasquale and G. Orsini, Numerical analysis of the seismic behaviour of a masonry arch, Proc. Italian-French Symp. On Strengthening and Repair of Structures in Seismic Area (Nice), OUEST EDITIONS, Nantes Cedex, 1994
28. Y. Ishiyama, Motion of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations, Int. J. Earthquake Engng. Struct. Dyn.10, 635-650 (1982).
29. Strang G., 1988, Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
30. MARC Analysis Research Corporation, 1998, MARC® Volume A: Theory and User Information, Version 7.3.