

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ :
«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΧΩΡΟΙ SOBOLEV ΚΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΡΑΟΣ Ι. ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

Επιβλέπων : Αναπ. Καθηγητής **Δ. Κανδυλάκης**

ΧΑΝΙΑ , 2009

Περιεχόμενα

Χώροι συναρτήσεων	2
Εισαγωγή	3
1. Χώροι Sobolev	4
2. Παράγωγος συναρτησιακών	17
3. Το θεώρημα Mountain Pass	19
4. Ύπαρξη λύσεων για τη p -Laplacian quasilinear εξίσωση με τη μέθοδο fibering	34
5.Βιβλιογραφία	45

Χώροι Συναρτήσεων

Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$

$\bar{\Omega}$ η κλειστότητα του Ω

$$\text{supp } f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

$C^0(\Omega)$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στο Ω

$C_c(\Omega)$ συνεχείς συναρτήσεις που έχουν $\text{supp } f$ συμπαγές.

$C_b^0(\Omega)$ το σύνολο όλων των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων στο Ω

$C^r(\Omega)$ το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν όλες τις παραγώγους μέχρι r (r θετικός ακέραιος) τάξης συνεχείς

$C_c^r(\Omega)$ συναρτήσεις του $C^r(\Omega)$ που έχουν $\text{supp } f$ συμπαγές

$C^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$ οι συναρτήσεις που έχουν παραγώγους οποιασδήποτε τάξης

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ συναρτήσεις με } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \exists M > 0 \text{ ώστε } |f(x)| \leq M \text{ σ.π. στο } \Omega \right\}$$

Έστω $D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}$, όπου $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ και $|a| = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ η

ασθενής παράγωγος συνάρτησης τάξης $|a|$ τότε έχουμε τους χώρους Sobolev:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ για όλα τα } \alpha \text{ με } 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$$

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε έννοιες προαπαιτούμενες για την κατανόηση της παρακάτω ύλης.

Ορισμός 1 Έστω X, Y μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ λέγεται **Lipschitz** συνεχής όταν για κάθε $x, y \in X$ ισχύει

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq C \|x - y\|_X \text{ για κάποια θετική σταθερά } C.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho(x) = \begin{cases} c e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ με c κατάλληλα

εκλεγμένο ώστε να ισχύει $\int_{\mathbb{R}^m} \rho(x) dx = 1$. Προφανώς $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Ορισμός 2 Για οποιαδήποτε συνάρτηση u , ορίζουμε ως *συνάρτηση εξομάλυνσης της u* την $u_h = h^{-m} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy$.

Τη συνάρτηση εξομάλυνσης θα τη συναντήσουμε στο θεώρημα 1.18. Με τη βοήθεια της ανισότητας του Hölder αποδεικνύεται ότι

Θεώρημα 3 Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ πεπερασμένου μέτρου, τότε, όταν $r > s$ έχουμε ότι $L^r(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ και μάλιστα ισχύει

$$\|f\|_{L^s} \leq |\Omega|^{(r-s)/rs} \|f\|_{L^r}$$

Θεώρημα 4 Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ πεπερασμένου μέτρου. Αν $u \in L^\infty(\Omega)$ και $u \in L^p(\Omega)$ για κάθε $1 \leq p < \infty$ τότε ισχύει

$$\|u\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^p}$$

Στη περίπτωση που $\|u\|_{L^p} \leq K$ για κάθε $1 \leq p < \infty$ τότε $u \in L^\infty(\Omega)$ και $\|u\|_\infty \leq K$.

Θεώρημα 5(Arzelà-Ascoli) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγές, και $\{f_n\}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων από το Ω στο $\mathbb{R}^k$. Αν οι συναρτήσεις f_n είναι

α) *ομοιόμορφα φραγμένες*, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ ώστε

$$\|f_n\|_\infty \leq M \text{ για κάθε } n$$

β) *equicontinuous*, δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ ανεξάρτητο του n ώστε αν $|x - y| < \delta$ τότε $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$
τότε η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία στο Ω .

1. Χώροι SOBOLEV

Ως γνωστόν η οικογένεια παραγωγισίμων συναρτήσεων πάνω στο σύνολο Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) είναι η:

$$C^r(\Omega) = \{u : D^a u \in C^0(\Omega), \text{ για κάθε } 0 \leq |a| \leq r\}$$

Όπου με το σύμβολο D^a εννοούμε την εξής μερική παράγωγο :

Εάν α είναι το διάνυσμα $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ τότε για μια συνάρτηση f του $\mathbb{R}^k$ με $D^a f$ εννοούμε την $D^a f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ όπου $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Π.χ στο $\mathbb{R}^3$ με $D^{(2,3,0)} f$ εννοούμε την παράγωγο: $D^{(2,3,0)} f = \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}$. Όμως,

για λόγους που θα δούμε παρακάτω, για την μελέτη ΜΔΕ (Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων) χρησιμοποιούμε χώρους όπου η έννοια της παραγωγίσης έχει γενικευτεί. Συγκεκριμένα, αν $u \in L^1(\Omega)$ και $\phi \in C_c^1(\Omega)$ ορίζεται η παράγωγος με την έννοια των κατανομών:

Ο τύπος του Green μας λέει ότι

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi \quad \text{όπου } u \text{ διαφορίσιμη και } \phi \in C_c^1$$

Αν λοιπόν για τη $u \in L^1(\Omega)$ μπορούμε να βρούμε συνάρτηση U για την οποία να ισχύει ότι

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} U \phi \quad \text{για κάθε } \phi \in C_c^1$$

τότε λέμε ότι η παράγωγος της u είναι η U δηλαδή $u' = U$.

Με τον ίδιο τρόπο γενικεύεται η έννοια της μερικής παραγώγου. Έτσι καταλήγουμε στον εξής ορισμό για τους χώρους Sobolev:

Ορισμός 1.1 Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ είναι:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : D^a u \in L^p(\Omega) \text{ για όλα τα } \alpha \text{ με } 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

Παρατήρηση 1.2 Ως νόρμα του παραπάνω χώρου θεωρούμε την:

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Παρατήρηση 1.3 Είναι προφανές ότι οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι επίσης παραγωγίσιμες υπό την έννοια που περιγράψαμε παραπάνω και μάλιστα οι δύο παράγωγοι ταυτίζονται. Άρα ο χώρος $C^k(\Omega)$ είναι υποσύνολο του $W^{k,p}(\Omega)$ στην περίπτωση που το Ω είναι φραγμένο. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει.

Θεώρημα 1.4 Ο $W^{k,p}(\Omega)$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach.

(Μια απόδειξη του 1.4 μπορείτε να βρείτε στο [1] σελ.114)

Μια άμεση συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι η κλειστότητα των διαφορικών τελεστών. Αν $u_n \in C^1(\Omega)$ με $u_n \rightarrow u$ και $Du_n \rightarrow v$ στο $L^2(\Omega)$ τότε $v = Du$ επειδή $u_n \in W^{k,2}(\Omega)$ και ο $W^{k,2}(\Omega)$ είναι χώρος Banach.

Παρατήρηση 1.5 Ο πιο εύχρηστος χώρος στις εφαρμογές είναι ο $W^{k,2}$ που θα τον συμβολίζουμε από δω και πέρα με H^k . Ο χώρος H^k είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

και με αντίστοιχη νόρμα :

$$\|u\|_{H^k} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα ο $C_c^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^2(\Omega)$ αλλά δεν είναι πυκνός στον $H^k(\Omega)$. Ας θεωρήσουμε την μερική διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = 0$$

ορισμένη σε κάποιο παραλληλεπίπεδο που περιέχεται στο Ω .

Με τις κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες μπορούμε να βρούμε μια λύση $u_\Omega \neq 0$ που είναι στοιχείο του $H^k(\Omega)$.

Θεωρούμε το εξής γραμμικό συναρτησοειδές

$$L: H^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } L(\varphi) = ((u, \varphi))_{H^k}$$

Επειδή $u \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι $L(u) = \|u\|_{H^k}^2 \neq 0$.

Όμως για οποιοδήποτε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= ((u, \varphi))_{H^k} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha \varphi) \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u, \varphi \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άρα για κάθε συνάρτηση φ του $C_c^\infty(\Omega)$ ισχύει $L(\varphi) = 0$ ενώ $L(u) \neq 0$. Άρα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $u \in H^k(\Omega)$ δεν μπορεί να προσεγγιστεί από συναρτήσεις του $C_c^\infty(\Omega)$. ■

Ορισμός 1.6 Ο χώρος $H_0^k(\Omega)$ είναι η πλήρωση του χώρου

$C_c^\infty(\Omega)$ μέσα στον $H^k(\Omega)$ με την νόρμα $\|\cdot\|_{H^k}$.

Θεώρημα 1.7 (Ανισότητα του Poincare). Έστω Ω φραγμένο

τουλάχιστον σε μια διεύθυνση (για παράδειγμα $|x_1| \leq d < \infty$). Τότε

υπάρχει μια σταθερά C έτσι ώστε:

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Απόδειξη: Χρειάζεται να δείξουμε το παραπάνω συμπέρασμα μόνο για συναρτήσεις στον χώρο $C_c^\infty(\Omega)$ επειδή αυτός είναι εξ ορισμού πυκνός στον $H_0^1(\Omega)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} (x_1)' |u(x)|^2 dx = (\text{παραγ.ολοκλήρωση}) \\ &= - \int_{\Omega} x_1 \frac{\partial |u(x)|^2}{\partial x_1} dx \leq 2d \|u\| \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|. \quad (\text{από ανισότητα C.-Schwartz.})\end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε

$$\|u\| \leq 2d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\| \leq 2d \|\nabla u\| = C \|\nabla u\| \quad \blacksquare$$

Παραθέτουμε τα παρακάτω θεωρήματα χωρίς απόδειξη. (Για αποδείξεις ή άλλες λεπτομέρειες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [1] σελ.121-131, και [5] σελ.215-222).

Θεώρημα 1.8 Ισχύουν τα παρακάτω:

- 1) Ο χώρος $C^\infty(\Omega) \cap H^k(\Omega)$ είναι πυκνός στον $H^k(\Omega)$.
- 2) Ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ είναι πυκνός στον $H^k(\mathbb{R}^m)$.

Θεώρημα 1.9 Αν το Ω είναι ένα φραγμένο C^k χωρίο τότε για κάθε ανοιχτό σύνολο $\Omega' \supset \bar{\Omega}$ υπάρχει ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής E επέκτασης των συναρτήσεων από το Ω στο Ω' έτσι ώστε αν $u \in H^k(\Omega)$ τότε $E[u] \in H_0^k(\Omega)$ και

$$\|E[u]\|_{H^k(\Omega')} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Θεώρημα 1.10 Αν $u \in H^1(a,b)$ με τα a, b αριθμούς πραγματικούς τότε

$$\max_{x \in [a,b]} |u(x)| \leq C \|u\|_{H^1(a,b)}$$

και μάλιστα $u \in C^0([a,b])$.

Απόδειξη: Θεωρούμε αρχικά ότι $u \in C_c^1(\mathbb{R})$. Τότε

$$u(x) = \int_{-\infty}^x Du(x) dx$$

από όπου παίρνουμε άμεσα

$$|u|_\infty \leq |Du|_1 \quad (1)$$

Εάν $u \in H^1(a,b)$ τότε μπορούμε να επεκτείνουμε την u σε μια συνάρτηση

$E[u] \in H_0^1(a', b')$ όπου $[a, b] \subset (a', b')$. Εάν τώρα θεωρήσουμε ακολουθία $u_n \in C_c^\infty(a', b')$ τέτοια ώστε $u_n \rightarrow E[u]$ στο $H^1(a', b')$ τότε από τη σχέση(1)

$$|u_n - u_m|_\infty \leq |D(u_n - u_m)|_1 \leq (b' - a')^{1/2} |D(u_n - u_m)|_2$$

οπότε η ακολουθία $\{u_n\}$ είναι Cauchy στο χώρο $L^\infty(a', b')$. Οπότε συνάγομαι ότι $E[u] \in C^0(a', b')$ και θα ισχύει

$$|E[u]|_\infty \leq C |D(E[u])|_2 \leq C \|E[u]\|_{H^1(a', b')} \leq C \|u\|_{H^1(a, b)}$$

Αφού $u = E[u]|_{(a, b)}$ συνάγομε ότι $u \in C^0([a, b])$ κι επιπλέον

$$\max_{x \in [a, b]} |u(x)| \leq |E[u]|_\infty \leq C \|u\|_{H^1(a, b)} \quad \blacksquare$$

Θεώρημα 1.11 Εάν $u \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$, $m > 1$ τότε

$$|u|_{\frac{m}{m-1}} \leq |Du|_1$$

Απόδειξη: Για οποιοδήποτε $1 \leq j \leq m$ έχουμε

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_j} D_j u(x_1, \dots, y_j, \dots, x_m) dy_j$$

και έτσι για κάθε j θα ισχύει

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_j, \dots, x_m)| dy_j \quad (1)$$

Πολ/ντας μεταξύ τους τις σχέσεις (1) για όλα τα j , $1 \leq j \leq m$ και υψώνοντας στην δύναμη $1/(m-1)$ έχουμε

$$|u(x)|^{m/(m-1)} \leq \prod_{j=1}^m \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_j, \dots, x_m)| dy_j \right)^{1/(m-1)}$$

Ολοκληρώνομε ως προς x_1 και παίρνομε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{m/(m-1)} dx_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^m \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_j, \dots, x_m)| dy_j \right)^{1/(m-1)} dx_1 =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \right)^{1/(m-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=2}^m \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_j \right)^{1/(m-1)} dx_1$$

χρησιμοποιούμε την γενικευμένη ανισότητα του Hölder

$$\left| \int \prod_{k=1}^{m-1} f_k dx \right| \leq \prod_{k=1}^{m-1} \|f_k\|_{L^{m-1}}$$

στο δεύτερο μέλος της ανίσωσης και παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{m/(m-1)} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \right)^{1/(m-1)} \left(\prod_{j=2}^m \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_j \right)^{1/(m-1)}$$

Ολοκληρώνοντας τώρα ως προς x_2 η σχέση θα γίνει

$$\begin{aligned} \int \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{m/(m-1)} dx_1 dx_2 &\leq \left(\int \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_2 \right)^{1/(m-1)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{1/(m-1)} \left(\prod_{j=3}^m \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_j \right)^{1/(m-1)} dx_2 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε για μια ακόμη φορά την ανισότητα Hölder

$$\begin{aligned} \int \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{m/(m-1)} dx_1 dx_2 &\leq \left(\int \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_2 \right)^{1/(m-1)} \times \\ &\times \left(\int \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 dx_2 \right)^{1/(m-1)} \prod_{j=3}^m \left(\int \int \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 dy_j \right)^{1/(m-1)} \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία (ολοκλήρωση ως προς μια μεταβλητή y_j και στη συνέχεια εφαρμογή της ανισότητας Hölder), όταν τελικά ολοκληρώσουμε ως προς x_m θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^{m/(m-1)} dx &\leq \prod_{j=1}^m \left(\int \dots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \dots dy_j \dots dx_m \right)^{1/(m-1)} = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^m} |Du(x)| dx \right)^{m/(m-1)} \end{aligned}$$

άρα τελικά παίρνουμε

$$|u|_{\frac{m}{m-1}} \leq |Du|_1 \quad \blacksquare$$

Θεώρημα 1.12 Έστω $m > 1$. Εάν $1 \leq p < m$ τότε υπάρχει μια σταθερά C (εξαρτώμενη από τα p, m) έτσι ώστε για κάθε $u \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$ να ισχύει

$$|u|_{mp/(m-p)} \leq C |Du|_p.$$

Απόδειξη: Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε έχει αιτιολογηθεί όταν $p = 1$ στο παραπάνω θεώρημα. Γι' αυτό θα αιτιολογήσουμε την πρόταση για $p > 1$. Θέτουμε $v = |u|^\gamma$ στο συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u|^{\gamma m/(m-1)} dx \right)^{(m-1)/m} &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |D|u|^\gamma| dx = \\ &= \gamma \int_{\mathbb{R}^m} |u|^{\gamma-1} |Du| dx \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder στο τελευταίο ολοκλήρωμα

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |u|^{\gamma m/(m-1)} dx \right)^{(m-1)/m} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u|^{\frac{p(\gamma-1)}{(p-1)}} dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |Du|^p dx \right)^{1/p} \quad (1)$$

Αν τώρα επιλέξουμε το γ έτσι ώστε

$$\frac{\gamma m}{m-1} = \frac{p(\gamma-1)}{(p-1)}$$

η τελευταία ανίσωση θα γίνει

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |u|^{mp/(m-p)} dx \right)^{(m-p)/mp} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^m} |Du|^p dx \right)^{1/p}$$

η οποία είναι και η ζητούμενη ■

Εάν τώρα για τη συνάρτηση $u \in C_c^s(\mathbb{R}^m)$ εφαρμόσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα μέχρι την s παράγωγο της συνάρτησης u , παίρνομε ότι

$$\|u\|_{W^{s-1, pm/(m-p)}} \leq C \|u\|_{W^{s,p}}. \quad (2)$$

Θεώρημα 1.13 Αν $k < m/2$ και $u \in H^k(\mathbb{R}^m)$ τότε $u \in L^{2m/(m-2k)}(\mathbb{R}^m)$ και

$$\|u\|_{L^{2m/(m-2k)}} \leq C \|u\|_{H^k}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα k και m .

Απόδειξη: Υποθέτουμε αρχικά ότι $u \in C_c^k(\mathbb{R}^m)$.

Σύμφωνα με την (2) για συνάρτηση $u \in H^k = W^{k,2}$ θα έχουμε

$$\|u\|_{W^{k-1,2m/(m-2)}} \leq C \|u\|_{W^{k,2}} = C \|u\|_{H^k}$$

Εφαρμόζοντας ξανά τη (2) για $p = 2m / (m - 2)$ έχουμε

$$\|u\|_{W^{k-2,2m/(m-4)}} \leq C \|u\|_{W^{k-1,2m/(m-2)}} \leq C \|u\|_{H^k}$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή k φορές έως ότου

$$\frac{2m}{m-2s} < m$$

για $s < (m/2) - 1$ καταλήγουμε στη ζητούμενη ανίσωση

$$\|u\|_{W^{0,2m/(m-2k)}} = \|u\|_{L^{2m/(m-2k)}} \leq C \|u\|_{H^k}$$

μόνο που αποδείξαμε τη σχέση για $u \in C_c^k(\mathbb{R}^m)$.

Το αποτέλεσμα για $u \in H^k(\mathbb{R}^m)$ προκύπτει επειδή ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ είναι πυκνός στον $H^k(\mathbb{R}^m)$ σύμφωνα με το θεώρημα 1.8. ■

Θεώρημα 1.14 Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ένα φραγμένο C^k χώρο. Αν $u \in H^k(\Omega)$ και $k < m/2$ τότε $u \in L^{2m/(m-2k)}(\Omega)$ και

$$\|u\|_{L^{2m/(m-2k)}(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}$$

Αν $k = m/2$ τότε $u \in L^p(\Omega)$ για κάθε $1 \leq p < \infty$, και υπάρχει μια σταθερά $C(p)$ έτσι ώστε

$$\|u\|_{L^p} \leq C(p) \|u\|_{H^k}$$

Απόδειξη: Αρχικά επεκτείνουμε την u σε συνάρτηση $E[u] \in H_0^k(\mathbb{R}^m)$ σύμφωνα με το θεώρημα 1.9. Τότε για $k < m/2$ εφαρμόζουμε το συμπέρασμα του θεωρήματος 1.13 και έχουμε

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{2m/(m-2k)}(\Omega)} &\leq \|E[u]\|_{L^{2m/(m-2k)}(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq C \|E[u]\|_{H^k(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq C \|u\|_{H^k(\Omega)} \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1.9 στη τελευταία ανίσωση.

Για την περίπτωση $k = m / 2$ παρατηρούμε ότι $E[u]$ είναι στοιχείο του

$H_0^k(\Omega')$ για κάποιο φραγμένο Ω' το οποίο περιέχει το $\bar{\Omega}$. Τότε από το θεώρημα εμφύτευσης του Lebesgue (θεώρημα 3 στην εισαγωγή) προκύπτει ότι $E[u] \in W^{k,q}(\mathbb{R}^m)$ για κάθε $q < 2$ και

$$\|E[u]\|_{W^{k,q}(\mathbb{R}^m)} \leq |\Omega'|^{(2-q)/2q} \|E[u]\|_{W^{k,2}(\Omega')} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}$$

Στην περίπτωση που $E[u] \in W^{k,q}(\mathbb{R}^m)$ τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 1.13, $E[u] \in W^{0,qm/(m-kq)}(\mathbb{R}^m) = L^{qm/(m-kq)}(\mathbb{R}^m)$ και

$$\|E[u]\|_{mq/(m-kq)} \leq C \|E[u]\|_{W^{k,q}} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Έτσι λοιπόν η $u = E[u]|_{\Omega}$ είναι στοιχείο του $L^{mq/(m-kq)}(\Omega)$ και ισχύει

$$\|u\|_{L^{mq/(m-kq)}(\Omega)} \leq C(q) \|u\|_{H^k(\Omega)}$$

Εφόσον μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $1 \leq q < 2$ τότε η άνω σχέση ισχύει για $p = mq / (m - kq)$ με $1 \leq p < \infty$ κι έτσι η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Θεώρημα 1.15 Έστω $p > m > 1$, κι έστω Ω ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Τότε εάν $u \in C_c^1(\Omega)$ θα ισχύει

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|Du\|_p$$

Απόδειξη: Αρχικά υποθέτουμε ότι $|\Omega|=1$. Θέτουμε $\tilde{m} = m / (m - 1)$

και $\tilde{p} = p / (p - 1)$. Τέλος ορίζουμε την συνάρτηση v ως

$$v = \frac{|u|}{|Du|_{L^p}}$$

Εφαρμόζουμε τώρα την σχέση (1) του θεωρήματος 1.12 οπότε συνάγουμε

$$\|v^{\gamma}\|_{\tilde{m}} \leq \gamma \|v^{\gamma-1}\|_{\tilde{p}}$$

από όπου συμπεραίνουμε

$$|v|_{\tilde{m}\gamma}^\gamma \leq \gamma |v|_{\tilde{p}(\gamma-1)}^{\gamma-1}$$

και διαδοχικά έχουμε

$$|v|_{\tilde{m}\gamma} \leq \gamma^{1/\gamma} |v|_{\tilde{p}(\gamma-1)}^{\gamma-1/\gamma}$$

οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα εμφύτευσης για L^p χώρους (θεώρημα 3 στην εισαγωγή)

$$|f|_s \leq |\Omega|^{(r-s)/rs} |f|_r \quad \text{όταν } s < r$$

με $|\Omega|=1$ θα πάρουμε τη σχέση

$$|v|_{\tilde{m}\gamma} \leq \gamma^{1/\gamma} |v|_{\tilde{p}\gamma}^{1-1/\gamma} \quad (1)$$

Θέτουμε τώρα $\delta = \tilde{m} / \tilde{p} > 1$ και θεωρούμε την ακολουθία $\gamma_n = \delta^n$ η οποία προφανώς τείνει στο άπειρο. Αν θέσουμε στην (1) ως γ τα γ_n θα πάρουμε

$$|v|_{\tilde{m}\gamma_n} \leq \gamma_n^{1/\gamma_n} |v|_{\tilde{m}\gamma_{n-1}}^{1-1/\gamma_n} \quad (2)$$

Από την άλλη

$$|v|_{\tilde{m}} = |v|_{m/(m-1)} = \frac{|u|_{m/(m-1)}}{|Du|_p} \leq \frac{|Du|_1}{|Du|_p},$$

και χρησιμοποιώντας ξανά το θεώρημα του Lebesgue παίρνουμε ότι

$$|v|_{\tilde{m}} \leq 1$$

οπότε πολ/ντας τις σχέσεις (2) κατά μέλη για κάθε n προκύπτει

$$\begin{aligned} |v|_{\tilde{m}\gamma_n} &\leq \prod_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{1/\gamma_n} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \delta^{n\delta^{-n}} = \delta^\sigma \end{aligned}$$

όπου

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} n \delta^{-n} < \infty.$$

οπότε συνάγομε ότι

$$|v|_{\tilde{m}\gamma_n} \leq C$$

όπου το C δεν εξαρτάται από το n . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 4 από την εισαγωγή έχουμε

$$\|v\|_{\infty} \leq C$$

και έτσι παίρνομε

$$\|v\|_{\infty} \leq C |Du|_{L^p}.$$

Στην περίπτωση όπου $|\Omega| \neq 1$, θέτουμε $y_j = |\Omega|^{1/m} x_j$ και τελικά παίρνομε

$$\|u\|_{\infty} \leq C |\Omega|^{\frac{1}{m} - \frac{1}{p}} |Du|_{L^p}. \blacksquare$$

Θεώρημα 1.16 Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ένα φραγμένο C^k χώρο. Αν

$u \in H^k(\Omega)$ με $k > m/2$ τότε $u \in C^0(\bar{\Omega})$ και υπάρχει σταθερά $C(m, k)$ τέτοια ώστε

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|u\|_{H^k}.$$

Συνοψίζοντας έχουμε το παρακάτω θεώρημα: (Για την απόδειξη του 1.17.Γ μπορείτε να διαβάσετε το [1] σελ.142 και για επιπλέον πληροφορίες στις ανισότητες Sobolev το [5] σελ.222-232.)

Θεώρημα 1.17 (Θεώρημα εμφύτευσης του Sobolev)

Έστω Ω φραγμένο και λείο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ κι έστω ότι $u \in H^k(\Omega)$. Τότε:

A) Αν $k < m/2$ τότε $u \in L^{\frac{2m}{m-2k}}(\Omega)$ και υπάρχει μια σταθερά C έτσι ώστε:

$$\|u\|_{L^{\frac{2m}{m-2k}}(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}$$

Β) Εάν $\kappa = m/2$ τότε $u \in L^p(\Omega)$ για κάθε $1 \leq p < \infty$ και για κάθε p υπάρχει μια σταθερά C (εξαρτώμενη από το p) έτσι ώστε:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}$$

Γ) Εάν $\kappa > n + m/2$ τότε $u \in C^v(\bar{\Omega})$ και υπάρχει μια σταθερά C έτσι ώστε:

$$\|u\|_{C^v(\bar{\Omega})} \leq C_v \|u\|_{H^k(\Omega)}$$

Θεώρημα 1.18 (Rellich – Kondrachov Compactness Theorem)

Έστω Ω ένα φραγμένο C^1 χώρο. Τότε το $H^1(\Omega)$ εμφυτεύεται συμπαγώς στο $L^2(\Omega)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε μια φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων $\{u_n\} \in H^1(\Omega)$ και την επεκτείνουμε σε ακολουθία $\{v_n\}$ φραγμένη στο $H^1(\mathbb{R}^m)$ με συμπαγές support U , χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1.9

Χρησιμοποιούμε τώρα τις συναρτήσεις εξομάλυνσης $(v_n)_h$ για να προσεγγίσουμε την ακολουθία $\{v_n\}$, για τις οποίες υποθέτουμε ότι έχουν το ίδιο support U . Έχουμε

$$\begin{aligned} |v_n(x) - (v_n)_h(x)| &\leq \int_{B(0,1)} \rho(z) |v_n(x) - v_n(x - hz)| dz \\ &\leq \int_{B(0,1)} \rho(z) \int_0^{|h|z|} \left| \frac{\partial}{\partial r} v_n(x - rs) \right| dr dz \end{aligned}$$

όπου $s = z/|z|$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \int_U |v_n(x) - (v_n)_h(x)| dx &\leq h \left(\int_U |Dv_n| dx \right) \left(\int_{B(0,1)} |z| \rho(z) dz \right) \\ &\leq h |U|^{1/2} \|Dv_n\|_{L^2(U)} \leq C h. \end{aligned}$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η $(v_n)_h$ συγκλίνει στη v_n ομοιόμορφα στον L^1 για όλα τα n . Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^q}^{q(r-p)/p(r-q)} \|u\|_{L^r}^{r(p-q)/p(r-q)} \quad \text{με } q < p < r \text{ και } u \in L^r(\Omega)$$

(interpolation inequality του L^p) θα πάρουμε

$$\|(v_n)_h - v_n\|_{L^2} \leq \|(v_n)_h - v_n\|_{L^1}^{(r-2)/2(r-1)} \|(v_n)_h - v_n\|_{L^r}^{r/2(r-1)},$$

κι έτσι διαλέγοντας $r > 2$ έτσι ώστε $H^1(U) \subset L^r(U)$ (θεώρημα εμφύτευσης) συμπεραίνουμε ότι η $(v_n)_h$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην (v_n) για κάθε n στον L^2 .

Τώρα για κάθε συγκεκριμένο h η ακολουθία $(v_n)_h$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και equicontinuous αφού

$$|(v_n)_h(x)| \leq \int_{B(0,1)} \rho(z) |v_n(x-hz)| dz \leq h^{-m} \|\rho\|_{\infty} \|v_n\|_{L^1} \leq C h^{-m}$$

και

$$\begin{aligned} |D(v_n)_h(x)| &\leq \left| \int_{B(0,1)} \rho(z) (D_x v_n)(x-hz) dz \right| \\ &= h^{-1} \left| \int_{B(0,1)} \rho(z) (D_z v_n)(x-hz) dz \right| \\ &= h^{-1} \left| \int_{B(0,1)} D\rho(z) v_n(x-hz) dz \right| \\ &\leq h^{-(m+1)} \|D\rho\|_{\infty} \|v_n\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των **Arzela-Ascoli** (θεώρημα 5 ,εισαγωγή) συμπεραίνουμε ότι για κάθε h υπάρχει μια υπακολουθία $\{(v_n)_h\}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στο U . Προφανώς θα συγκλίνει και στο $L^2(U)$.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε ένα διαγώνιο επιχείρημα για να συνάγομε το ζητούμενο.

Θεωρούμε υπακολουθία $v_{n_{1j}}$ έτσι ώστε η $(v_{n_{1j}})_1$ να συγκλίνει στο L^2 .

Τώρα επιλέγουμε μια υπακολουθία αυτής, την $v_{n_{2j}}$ έτσι ώστε η $(v_{n_{2j}})_{1/2}$ να συγκλίνει στο L^2 . Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο ορίζομαι μια ακολουθία από υπακολουθίες $(v_{n_{mj}})_{1/l}$, που συγκλίνουν στο L^2 για όλα τα $l \leq m$. Τώρα θεωρούμε την διαγώνια ακολουθία $w_j = v_{n_{jj}}$ η οποία

έχει την $(w_j)_{1/n}$ συγκλίνουσα στο L^2 για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε θα ισχύει
 $|w_n - w_m| \leq |w_n - (w_n)_{1/l}| + |w_m - (w_m)_{1/l}| + |(w_n)_{1/l} - (w_m)_{1/l}|$
 Διαλέγοντας l αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει $|w_n - (w_n)_{1/l}| \leq \varepsilon / 3$
 για κάθε τιμή του n καθώς και N αρκετά μεγάλο ώστε για κάθε
 $n, m > N$ να ισχύει $|(w_n)_{1/l} - (w_m)_{1/l}| < \varepsilon / 3$ παίρνουμε το ζητούμενο
 αποτέλεσμα. ■

2.Παράγωγος συναρτησιακών

Ορισμός 2.1 Έστω μια συνάρτηση $I: X \rightarrow \mathbb{R}$, όπου X ένα ανοιχτό υποσύνολο ενός χώρου Banach B . Η συνάρτηση I (η οποία δεν είναι κατ'ανάγκη γραμμική) λέμε ότι έχει Gateaux παράγωγο $I'(x) \in B'$ στο σημείο $x \in B$ αν για κάθε $h \in X$ ισχύει:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I(x+th) - I(x) - \langle I'(x), th \rangle] = 0$$

Αν ισχύει η παραπάνω σχέση τότε θα λέμε ότι η παράγωγος του I στο x είναι $I'(x)$

Ορισμός 2.2 Ομοίως η Frechet παράγωγος της I στο σημείο $x \in X$ είναι η I' αν ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} [I(x+h) - I(x) - \langle I'(x), h \rangle] = 0$$

Επιπλέον λέμε ότι το $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ όταν υπάρχει η Frechet παράγωγός του και είναι συνεχής.

Παρατηρήσεις 2.3 α) Κάθε Frechet παράγωγος είναι και Gateaux παράγωγος.

β) Η κατά κατεύθυνση παράγωγος Gateaux υπολογίζεται από το

όριο:
$$\langle I'(x), h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I(x+th) - I(x)]$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για συναρτήσεις πραγματικές μιας μεταβλητής αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 2.4 Αν το συναρτησοειδές I έχει συνεχή παράγωγο Gateaux τότε $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Σαν εφαρμογή των παραπάνω ορισμών αποδεικνύουμε το επόμενο:

Θεώρημα 2.5 Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $2 < p < \infty$. Τότε το συναρτησοειδές $f(u) = \int_{\Omega} |u|^p$ έχει συνεχή παράγωγο Gateaux που είναι ίση με $\langle f'(u), h \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u h$

Απόδειξη: Έστω τα $u, h \in L^p$. Για δεδομένο $x \in \Omega$ και $0 < |t| < 1$, από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\lambda \in [0, 1]$ έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} \left| \frac{|u(x) + t h(x)|^p - |u(x)|^p}{t} \right| &= p |u(x) + \lambda t h(x)|^{p-1} |h(x)| \leq \\ &\leq p \|u(x) + h(x)\|^{p-1} |h(x)| \end{aligned}$$

Η ανισότητα του Hölder μας δίνει ότι

$$[|u(x)| + |h(x)|]^{p-1} |h(x)| \in L^1(\Omega)$$

Τότε από το θεώρημα του Lebesgue έχουμε ότι :

$$\langle f'(u), h \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u h$$

Η παραπάνω παράγωγος είναι και συνεχής. Ας ορίσουμε την $k(u) = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u$. Έστω η ακολουθία $u_n \rightarrow u$ στον L^p

Τότε $k(u_n) \rightarrow k(u)$ στον L^q όπου $q = \frac{p}{p-1}$

Έτσι από την ανισότητα του Hölder έχουμε ότι:

$$|\langle f'(u_n) - f'(u), h \rangle| \leq \|k(u_n) - k(u)\|_q \|h\|_p \text{ και τελικά}$$

$$\|f'(u_n) - f'(u)\| \leq \|k(u_n) - k(u)\|_q \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

Άρα η $f(u)$ έχει συνεχή παράγωγο Gateaux κι οπότε $f \in C^1$. ■

3. Το θεώρημα Mountain Pass

Έστω ένα συναρτησοειδές I ορισμένο σε ένα χώρο Banach. Θα διατυπώσουμε παρακάτω ένα θεώρημα το οποίο θα μας δίνει ικανές συνθήκες για το πότε το I θα έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο. Πριν από αυτό θα δώσουμε τον σχετικό ορισμό.

Ορισμός 3.1 Έστω $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ ένα συναρτησοειδές ορισμένο στο χώρο Banach X . Τότε το $\xi \in X$ είναι κρίσιμο σημείο του I αν η Frechet παραγωγός του στο σημείο ξ μηδενίζεται δηλαδή $I'(\xi) = 0$. Πριν την απόδειξη του βασικού θεωρήματος θα χρειαστούμε λίγη προεργασία. Ξεκινάμε με τον εξής ορισμό:

Ορισμός 3.2 Έστω E πραγματικός χώρος Banach, $U \subset E$ και $I \in C^1(U, \mathbb{R})$. Τότε το $v \in E$ λέγεται *ψευδοδιάνυσμα κλίσης* (pseudogradient vector) για το I στο σημείο $u \in U$ εάν ισχύει:

$$A) \|v\| \leq 2\|I'(u)\|,$$

$$B) I'(u)v \geq \|I'(u)\|^2$$

Ορισμός 3.3 Έστω $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ και $\tilde{E} \equiv \{u \in E: I'(u) \neq 0\}$. Τότε το $V: \tilde{E} \rightarrow E$ λέγεται *ψευδοδιανυσματικό πεδίο κλίσεων* (pseudogradient vector field) στο $\tilde{E}$ εάν το V είναι τοπικά Lipschitz συνεχής και το $V(x)$ είναι *ψευδοδιάνυσμα κλίσεων* (ψ.δ.κ. για συντόμευση) για το I για όλα τα $x \in \tilde{E}$.

Λήμμα 3.4 Αν $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ τότε υπάρχει ένα ψευδοδιανυσματικό πεδίο κλίσεων για το I στο $\tilde{E}$.

Απόδειξη: Για κάθε $u \in \tilde{E}$ μπορούμε να βρούμε ένα διάνυσμα $w \in E$ έτσι ώστε $\|w\| = 1$ και $I'(u)w > \frac{2}{3}\|I'(u)\|$. Τότε το $z = \frac{3}{2}\|I'(u)\|w$ είναι ένα ψ.κ. για το I στο σημείο u . Επειδή I' είναι συνεχής θα υπάρχει μια γειτονιά του u έστω N_u όπου το z θα είναι ψ.κ $\forall v \in N_u$. Εφόσον το $\{N_u: u \in \tilde{E}\}$ είναι μια ανοιχτή κάλυψη του $\tilde{E}$ ορίζεται μια τοπική πεπερασμένη λέπτυνση που θα τη

συμβολίζουμε $\{M_j\}$. Έστω ότι η απόσταση του τυχαίου x από το συμπλήρωμα του M_j ότι είναι $\rho_j(x)$. Τότε η $\rho_j(x)$ είναι Lipshitz συνεχής και $\rho_j(x)=0$ εάν το $x \notin M_j$. Θέτουμε:

$$\beta_j(x) = \frac{\rho_j(x)}{\sum_k \rho_k(x)}$$

Ο παρονομαστής του άνω κλάσματος είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα αφού το κάθε $x \in E$ ανήκει σε πεπερασμένο πλήθος συνόλων M_k . Καθένα από τα σύνολα M_j απλώνεται σε κάποια N_{uj} .

Έστω $z_j = \frac{3}{2} \|I'(u_j)\| w_j$ ένα ψ.κ. για το I στο M_j και τέλος θέτουμε

$$V(x) = \sum_j z_j \beta_j(x). \text{ Αφού } 0 \leq \beta_j(x) \leq 1 \text{ και } \sum_j \beta_j(x) = 1 \text{ τότε για κάθε}$$

$x \in \tilde{E}$, $V(x)$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός από ψ.κ. για το I στο x . Τέλος το $V(x)$ είναι Lipshitz συνεχής κι άρα το V είναι ένα ψ.δ.π.κ. για το I . ■

Λήμμα 3.5 Αν η $I(x)$ είναι άρτια τότε υπάρχει ένα ψ. πεδίο κ. στο $\tilde{E}$ που δίδεται από μια περιττή συνάρτηση W

Απόδειξη : Έστω I άρτιο συναρτησοειδές και V ψ. πεδίο κ. που υπάρχει λόγω του προηγούμενου λήμματος. Θέτουμε $W(x) = 1/2\{V(x) + V(-x)\}$. Τότε W άρτιο, και τοπικά Lipshitz συνεχής αφού $I'(x)$ περιττή. Τέλος:

$$A) \|W(x)\| \leq \frac{1}{2} \{ \|V(x)\| + \|V(-x)\| \} \leq 2 \|I'(x)\| \quad \text{και}$$

$$B) I'(x)W(x) = \frac{1}{2} I'(x) V(x) + \frac{1}{2} I'(x) V(-x) \geq \|I'(x)\|^2. \quad \blacksquare$$

Ορισμός 3.6 Για ένα συναρτησοειδές $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ λέμε ότι ικανοποιεί τις συνθήκες *Palais-Smale* (από δω και πέρα θα τις συμβολίζουμε (PS)) εάν για κάθε ακολουθία $(u_m) \subset E$ για την οποία $I(u_m)$ είναι φραγμένη και $I'(u_m) \rightarrow 0$ καθώς $m \rightarrow \infty$ τότε η u_m έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία.

Ορίζουμε τα εξής σύνολα που θα μας χρειαστούν στο παρακάτω βασικό θεώρημα: $\tilde{E} \equiv \{u \in E \mid I'(u) \neq 0\}$, $A_s \equiv \{u \in E \mid I(u) \leq s\}$ και $K_s \equiv \{u \in E \mid I(u) = s \text{ και } I'(u) = 0\}$

Θεώρημα 3.7 (Deformation Theorem) Έστω E ένας πραγματικός Banach χώρος κι έστω ένα $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (PS). Αν $c \in \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$ και Θ οποιαδήποτε γειτονιά του K_c τότε υπάρχει ένα $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ κι ένα $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ έτσι ώστε:

- 1) $\eta(0, u) = u$ για όλα τα $u \in E$.
- 2) $\eta(t, u) = u$ για όλα τα $t \in [0, 1]$ όταν $I(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$.
- 3) Η $\eta(t, u)$ είναι ομομορφισμός του E επί του E

$\forall t \in [0, 1]$.

$$4) \|\eta(t, u) - u\| \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1] \text{ \& } u \in E.$$

$$5) I(\eta(t, u)) \leq I(u) \quad \forall t \in [0, 1] \text{ \& } u \in E.$$

$$6) \eta(1, A_{c+\varepsilon} \setminus \Theta) \subset A_{c-\varepsilon}$$

$$7) \text{ Αν } K_c = \emptyset, \eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$$

$$8) \text{ Αν } I(u) \text{ είναι άρτια στο } u \text{ τότε και } \eta(t, u) \text{ είναι περιττή στο } u.$$

Απόδειξη : Θα κατασκευάσουμε μια συνάρτηση η που θα προκύψει ως λύση μιας διαφορικής εξίσωσης που θα περιγράφει ένα ψευδοδιανυσματικό πεδίο κλίσεων αρνητικής ροής για το I .

Από (PS) το K_c είναι συμπαγές. Θέτουμε

$$N_\delta \equiv \{u \in E : \|u - K_c\| < \delta\}$$

όπου με $\|u - K_c\|$ εννοούμε την απόσταση του u από το K_c . Στην απόδειξη που θα κάνουμε παρακάτω, για το 6^ο θα πάρουμε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε $N_\delta \subset \Theta$ οπότε αρκεί να δείξουμε το ερώτημα για το N_δ αντί του Θ . Για το 7^ο παρατηρούμε ότι αν $K_c = \emptyset$ τότε επιλέγουμε $\Theta = \emptyset$ και εφαρμόζοντας το 6^ο παίρνουμε το 7^ο.

Υπάρχουν σταθερές $b, \hat{\varepsilon} > 0$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\|I'(u)\| \geq b \quad \forall u \in A_{c+\hat{\varepsilon}} \setminus (A_{c-\hat{\varepsilon}} \cup N_{\delta/8}) \quad (1)$$

Αυτό ισχύει διότι αν υποθέσουμε το αντίθετο τότε θα υπάρχει ακολουθία $b_n \rightarrow 0$ και $\hat{\varepsilon}_n \rightarrow 0$ και $u_n \in A_{c+\hat{\varepsilon}_n} \setminus (A_{c-\hat{\varepsilon}_n} \cup N_{\delta/8})$ έτσι ώστε $\|I'(u_n)\| < b_n$. Από (PS) υπάρχει υπακολουθία της u_n που θα συγκλίνει σε κάποιο $u \in K_c \setminus N_{\delta/8}$. Όμως το τελευταίο σύνολο είναι κενό, άτοπο. Έτσι υπάρχουν οι σταθερές $b, \hat{\varepsilon} > 0$. Εφόσον ισχύει η (1) μπορούμε να επιλέξουμε ακόμα μικρότερο $\hat{\varepsilon}$ ώστε να ισχύει:

$$0 < \hat{\varepsilon} < \min\left(\bar{\varepsilon}, \frac{b\delta}{32}, \frac{b^2}{2}, \frac{1}{8}\right).$$

Επιλέγουμε τώρα ένα $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$ κι ορίζουμε τα σύνολα :

$$A \equiv \{u \in E : I(u) \leq c - \hat{\varepsilon}\} \cup \{u \in E : I(u) \geq c + \hat{\varepsilon}\} \quad \text{και}$$

$$B \equiv \{u \in E : c - \varepsilon \leq I(u) \leq c + \varepsilon\}$$

Προφανώς $A \cap B = \emptyset$. Ορίζουμε την συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{\|x - A\|}{\|x - A\| + \|x - B\|}.$$

Προφανώς $g(x) = 0 \quad \forall x \in A$, $g(x) = 1 \quad \forall x \in B$ και αλλού $0 \leq g(x) \leq 1$.

Επιπλέον η g είναι Lipchitz συνεχής.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση f έτσι ώστε $f(x) = 1 \quad \forall x \in E \setminus N_{\delta/4}$, $f(x) = 0 \quad \forall x \in N_{\delta/8}$ και $0 \leq f(x) \leq 1$ αλλιώς.

Στην περίπτωση που η I είναι άρτια τότε τα σύνολα A, B, N_δ θα είναι συμμετρικά ως προς το 0 κι οπότε οι f και g θα είναι άρτιες συναρτήσεις.

Στη συνέχεια ορίζουμε την $h(s) = 1$ αν $s \in [0, 1]$ και

$h(s) = 1/s$ αν $s \geq 1$. Αφού $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ από τα λήμματα 3.4 και 3.5

συμπεραίνομε ότι υπάρχει ένα ψευδοδιανυσματικό πεδίο

κλίσεων V για την I όπου το V θα είναι περιττό όταν η I είναι άρτια. Τελικά ορίζουμε

$W(x) = -f(x)g(x)h(\|V(x)\|)V(x) \quad \forall x \in \tilde{E}$ και $W(x) = 0$ αλλιώς. Από τον τρόπο κατασκευής το W είναι Lipshitz συνεχής στο E με

$0 \leq \|W(x)\| \leq 1$ και W περιττή εάν η I είναι άρτια. Έστω τώρα το έξης πρόβλημα Cauchy:

$$\frac{d\eta}{dt} = W(\eta), \quad \eta(0, u) = u \quad (2)$$

Το βασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις μας λέει ότι $\forall u \in E$ υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης σε ένα διάστημα $(t^-(u), t^+(u))$.

Ισχυριζόμαστε ότι $t^\pm(u) = \pm\infty$. Αν όχι τότε θα πρέπει $t^+(u) < +\infty$. Έστω λοιπόν ακολουθία $t_n \rightarrow t^+(u)$ με $t_n < t^+(u)$. Ολοκληρώνοντας την (2) έχουμε:

$$\left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\eta}{dt} \right\| = \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(\eta) \right\|$$

$$\|\eta(t_{n+1}, u) - \eta(t_n, u)\| \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|W(\eta)\|$$

$$\|\eta(t_{n+1}, u) - \eta(t_n, u)\| \leq |t_{n+1} - t_n| \alpha\phi\acute{o}\upsilon \|W\| \leq 1$$

Άρα η ακολουθία $\eta(t_n, u)$ είναι Cauchy ακολουθία σε χώρο Banach οπότε συγκλίνει σε κάποιο $\tilde{u}$. Όμως τότε η λύση της (2) με αρχική συνθήκη $\eta(0, u) = \tilde{u}$ λόγω της συνέχειας του $\eta(t, u)$ θα παίρνει και τιμές για $t > t^+(u)$ όμως αυτό έρχεται σε αντίφαση με το μέγιστο του $t^+(u)$. Άρα θα πρέπει $t^+(u) = \infty$. Με όμοιο τρόπο παίρνουμε ότι $t^-(u) = -\infty$. Η λύση της (2) εξαρτάται συνεχώς από τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης, $\eta(0, u) = u$, κι άρα $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ και ικανοποιείται η συνθήκη $\eta(0, u) = u$ άρα αποδείχτηκε το (1). Αφού $\bar{\varepsilon} > \hat{\varepsilon}$, εάν $I(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$ τότε $u \in A$ οπότε $g(x) = 0$ κι άρα $\frac{d\eta}{dt} = 0$. Οπότε $\eta(t, u) = u \quad \forall t \in [0, 1]$, οπότε αποδείχτηκε και το (2).

Το 3^ο είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (2). Για το 4^ο έχουμε:

$$\frac{d\eta}{dt} = W(\eta) \Rightarrow \left\| \int_0^t \frac{d\eta}{dt} \right\| = \left\| \int_0^t W(\eta) \right\| \Rightarrow$$

$$\|\eta(t, u) - \eta(0, u)\| \leq 1$$

διότι από κατασκευή του W , $\|W(x)\| \leq 1$ οπότε

$$\left\| \int_0^t W(\eta) \right\| \leq \int_0^t \|W(\eta)\| \leq \int_0^t 1 = t \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1]$$

Αν το $I(u)$ είναι άρτιο τότε από λήμμα που έχουμε αποδείξει, το W είναι περιττό και κατά συνέπεια και η $\eta(t, u)$ είναι περιττή στο u , κι έτσι δικαιολογήθηκε και το (8).

Για να αιτιολογήσουμε το 5^ο διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Εάν $W(\eta) = 0$, $\eta(t, u) \equiv u$ λόγω μοναδικότητας στη λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) και θα ισχύει η ισότητα στο 5^ο.

Εάν τώρα $W(u) \neq 0$, $u \in \tilde{E}$ οπότε το $V(u)$ είναι ορισμένο σαν $V(\eta(t, u))$ και θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dI(\eta(t, u))}{dt} &= I'(\eta(t, u)) \frac{d\eta}{dt} = I'(\eta(t, u)) W(\eta) = \\ &= -I'(\eta(t, u)) f(\eta(t, u)) g(\eta(t, u)) h(\|V(\eta(t, u))\|) V(\eta(t, u)) \leq 0 \end{aligned}$$

αφού $I'(\eta(t, u)) V(\eta(t, u)) \geq \|I'(\eta(t, u))\| \geq 0$, σύμφωνα με τον ορισμό,

3.2 οπότε η $I(\eta(t, u))$ είναι φθίνουσα ως προς t κι άρα

$I(u) = I(\eta(0, u)) \geq I(\eta(t, u))$ καθώς $t \geq 0$ και το 5^ο αποδείχτηκε.

Μας μένει μόνο να αποδείξουμε το 6^ο: $\eta(1, A_{c+\varepsilon} \setminus \Theta) \subset A_{c-\varepsilon}$

Αν $u \in A_{c-\varepsilon}$ τότε $I(\eta(t, u)) \leq c - \varepsilon$ λόγω του 5^{ου}. Έτσι λοιπόν αρκεί να

αποδείξουμε ότι αν $u \in Y \equiv A_{c+\varepsilon} \setminus (A_{c-\varepsilon} \cup N_\delta)$ τότε $\eta(1, u) \in A_{c-\varepsilon}$.

Έστω κάποιο $u \in Y$. Προηγούμενα δείξαμε ότι:

$$\frac{dI(\eta(t, u))}{dt} \leq 0 \quad (3)$$

Αφού $g=0$ στο $A_{c-\hat{\varepsilon}}$ η τροχιά $\eta(t, u)$ δεν μπαίνει στο $A_{c-\hat{\varepsilon}}$. Λόγω της (3) έχουμε ότι:

$$I(\eta(0, u)) - I(\eta(t, u)) \leq \varepsilon + \hat{\varepsilon} < 2\hat{\varepsilon} \quad (4) \text{ για κάθε } t \geq 0. \quad (4)$$

Έστω ότι $u \in Y$ και $\eta(t, u) \in Z \equiv A_{c+\varepsilon} \setminus (A_{c-\varepsilon} \cup N_{\delta/2})$. Τότε για t αρκετά μικρό και για κάθε $s \in [0, t]$ το $\eta(s, u) \in \tilde{E}$ λόγω της (1)

κι επιπλέον $f(\eta(s, u)) = 1 = g(\eta(s, u))$. Από τη (4) έχουμε:

$$\begin{aligned}
2\hat{\varepsilon} &\geq \int_t^0 -I'(\eta(s,u)) h(\|V(\eta(s,u))\|) V(\eta(s,u)) ds \quad \Theta.M.T. \\
&= \int_0^t I'(\eta(s,u)) h(\|V(\eta(s,u))\|) V(\eta(s,u)) ds \\
&\geq \int_0^t \|I'(\eta(s,u))\|^2 h(\|V(\eta(s,u))\|) ds \quad \text{ορ. 3.2} \\
&\geq b \int_0^t \|I'(\eta(s,u))\| h(\|V(\eta(s,u))\|) ds \quad (1) \\
&\geq \frac{b}{2} \int_0^t \|V(\eta(s,u))\| h(\|V(\eta(s,u))\|) ds \quad \text{ορ. 3.2} \\
&\geq \frac{b}{2} \left\| \int_0^t V(\eta(s,u)) h(\|V(\eta(s,u))\|) ds \right\| \\
&= \frac{b}{2} \left\| \int_0^t W(\eta(s,u)) ds \right\| = \frac{b}{2} \|\eta(t,u) - u\|
\end{aligned}$$

Άρα δείξαμε ότι

$$\|\eta(t,u) - u\| \leq \frac{4\hat{\varepsilon}}{b} < \frac{\delta}{8}$$

Οπότε η τροχιά $\eta(t,u)$ δεν μπορεί να βγει από το Z όταν μπαίνει στο $N_{\delta/2}$. Οπότε ο μόνος τρόπος για να βγει το $\eta(t,u)$ από το Z είναι να μπει στο $A_{c-\varepsilon}$. Ισχυριζόμαστε ότι αυτό θα ισχύει για κάποιο $t \in (0,1)$ κι έτσι θα 'χει αποδειχτεί το 6^ο.

Αν όχι τότε το $\eta(t,u) \in Z$ για κάθε $t \in (0,1)$ και θα έχουμε :

$$\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} \leq -h(\|V(\eta(t,u))\|) \|I'(\eta(t,u))\|^2 \quad (5)$$

Αν για κάποια $t \in (0,1)$, $\|V(\eta(t,u))\| \leq 1$, $h(\|V(\eta(t,u))\|)=1$ τότε λόγω των (1) και (5) παίρνουμε

$$\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} \leq -b^2$$

Από την άλλη αν για κάποιο $t \in (0,1)$ είναι

$\|V(\eta(t,u))\| > 1$, $h(\|V(\eta(t,u))\|) = \|V(\eta(t,u))\|^{-1}$ τότε λόγω του ορισμού 3.2(A) και της (5) παίρνουμε

$$\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} \leq -\frac{1}{4}$$

Οπότε για κάθε $t \in (0,1)$ θα έχουμε:

$$\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} \leq -\min(b^2, \frac{1}{4}).$$

Ολοκληρώνοντας την άνω παράγωγο στο διάστημα $(0,t)$ με $t \leq 1$ καταλήγουμε ότι

$$\min(b^2, \frac{1}{4}) \leq I(u) - I(\eta(t,u)) \leq 2\hat{\varepsilon}$$

πού έρχεται σε αντίφαση με τον αρχικό ισχυρισμό ότι

$$0 < \hat{\varepsilon} < \min\left(\bar{\varepsilon}, \frac{b\delta}{32}, \frac{b^2}{2}, \frac{1}{8}\right).$$

οπότε το θεώρημα αποδείχτηκε. ■

Επιτέλους τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το βασικό στόχο της παραγράφου αυτής.

Θεώρημα 3.5 (Mountain Pass Theorem)

Έστω E ένας πραγματικός χώρος Banach και συνάρτηση

$I \in C^1(E, \mathbb{R})$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (PS). Έστω ότι $I(0)=0$ και (I_1) υπάρχουν σταθερές $\rho, \alpha > 0$ ώστε να ισχύει $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ και

(I_2) υπάρχει ένα $e \in E \setminus \bar{B}_\rho$ έτσι ώστε $I(e) \leq 0$.

Τότε η I έχει τουλάχιστον μια κρίσιμη τιμή $c \geq \alpha$. Μάλιστα για το c ισχύει:

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u)$$

όπου

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) \mid g(0) = 0, g(1) = e\}$$

Απόδειξη: Εξ ορισμού το c είναι πραγματικός πεπερασμένος αριθμός. Αν $g \in \Gamma$, τότε $g([0,1]) \cap \partial B_\rho \neq \emptyset$. Οπότε έχουμε:

$$\max_{u \in g([0,1])} I(u) \geq \inf_{w \in \partial B_\rho} I(w) \geq \alpha$$

λόγω του (I_1) . Κατά συνέπεια $c \geq \alpha$. Έστω ότι το c δεν είναι κρίσιμη τιμή του I . Τότε από το θεώρημα 3.6 υπάρχει συνάρτηση η και για $\bar{\varepsilon} = \alpha/2$ ένα $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$. Μπορούμε να επιλέξουμε ένα $g \in \Gamma$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\max_{u \in g([0,1])} I(u) \leq c + \varepsilon \quad (1)$$

Θεωρούμε την $h(t) = \eta(1, g(t))$. Προφανώς $h \in C([0,1], E)$. Επιπλέον $g(0) = 0$ και $I(0) = 0 < \alpha/2 \leq c - \varepsilon$ οπότε $h(0) = 0$ σύμφωνα με το 1^ο του προηγούμενου θεωρήματος. Επιπλέον $g(1) = e$ και $I(e) \leq 0$ οπότε παίρνουμε ότι $h(1) = e$. Οπότε $h \in \Gamma$ και από τον ορισμό του c καταλαβαίνουμε ότι

$$c \leq \max_{u \in h([0,1])} I(u) \quad (2)$$

Όμως από την σχέση (1) $g([0,1]) \subset A_{c+\varepsilon}$ οπότε από το 6^ο του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε ότι $h([0,1]) \subset A_{c-\varepsilon}$ άρα τελικά

$$\max_{u \in h([0,1])} I(u) \leq c - \varepsilon$$

αντίφαση σύμφωνα με τη σχέση (2). Άρα τελικά το c είναι κρίσιμη τιμή του I . ■

Μια πρώτη εφαρμογή του θεωρήματος Mountain Pass είναι να αποδείξουμε ύπαρξη λύσεων στην παρακάτω ημιγραμμική (semilinear PDE) μερική διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= p(x, u), & x &\in \Omega \\ u &= 0 & x &\in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα φραγμένο χώρο με σύνορο μια λεία επιφάνεια.

Η συνάρτηση $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ λέγεται **ασθενής λύση της (1)** αν ισχύει

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi - p(x, u) \varphi) dx = 0 \quad \text{για κάθε } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Θεώρημα 3.6 Έστω η μερική διαφορική εξίσωση (1) όπου για τη συνάρτηση p ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις

$$(a) \quad p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$(b) \quad \text{υπάρχουν σταθερές } a_1, a_2 \geq 0 \text{ ώστε } |p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s$$

$$\text{όπου } 0 \leq s < (n+2)/(n-2) \text{ όταν } n > 2.$$

Όταν $n=2$ αντί της παραπάνω σχέσης θα ισχύει

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 e^{\varphi(\xi)} \text{ όπου } \varphi(\xi) \xi^{-2} \rightarrow 0 \text{ καθώς } |\xi| \rightarrow \infty.$$

$$(c) \quad p(x, \xi) = o(|\xi|) \text{ καθώς } \xi \rightarrow 0$$

$$(d) \quad \text{υπάρχουν σταθερές } \mu > 2 \text{ και } r > 0 \text{ ώστε για } |\xi| \geq r$$

$$\text{να ισχύει } 0 < \mu P(x, \xi) \leq \xi p(x, \xi) \text{ όπου } P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t) dt.$$

Τότε η (1) έχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη ασθενή λύση.

Λήμμα 3.7 Έστω Ω φραγμένο χώρο του $\mathbb{R}^n$ του οποίου το σύνορο είναι λεία επιφάνεια. Έστω και η συνάρτηση p για την οποία

$$(a) \quad p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$(b) \quad \text{υπάρχουν σταθερές } a_1, a_2 > 0 \text{ ώστε}$$

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s$$

$$\text{όπου } 0 \leq s < (n+2)/(n-2) \text{ όταν } n > 2.$$

$$\text{Αν θέσουμε } P(x, \xi) \equiv \int_0^\xi p(x, t) dt \text{ και } I(u) \equiv \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - P(x, u) \right) dx$$

$$\text{τότε } I \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R}) \text{ και } I'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi - p(x, u)\varphi) dx$$

$$\text{για κάθε } \varphi \in E \equiv W_0^{1,2}(\Omega).$$

Απόδειξη: Είναι ξεκάθαρο ότι ο πρώτος όρος του I έχει για Frechet

παράγωγο τον πρώτο όρο του I' . Άρα για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι ο δεύτερος όρος του I είναι παραγωγίσιμος κατά Frechet με παράγωγο τον δεύτερο όρο του I' , κι επιπλέον η παράγωγος αυτή είναι συνεχής. Θέτουμε

$$J(u) \equiv \int_{\Omega} P(x, u(x)) \, dx$$

θα αποδείξουμε ότι

$$\left| J(u + \varphi) - J(u) - \int_{\Omega} p(x, u) \varphi \, dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi\|$$

για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ και κατάλληλο δ αρκετά μικρό ώστε $\|\varphi\| \leq \delta$

Θέτουμε

$$\Psi \equiv \left| P(x, u(x) + \varphi(x)) - P(x, u(x)) - p(x, u(x)) \varphi(x) \right|$$

οπότε ισχύει

$$\left| J(u + \varphi) - J(u) - \int_{\Omega} p(x, u) \varphi \, dx \right| \leq \int_{\Omega} \Psi \, dx$$

Ορίζουμε τα σύνολα

$$\Omega_1 \equiv \{x \in \bar{\Omega} \mid |u(x)| \geq \beta\},$$

$$\Omega_2 \equiv \{x \in \bar{\Omega} \mid |\varphi(x)| \geq \gamma\},$$

$$\Omega_3 \equiv \{x \in \bar{\Omega} \mid |\varphi(x)| \leq \gamma \text{ \& } |u(x)| \leq \beta\},$$

όπου τα β και γ για την ώρα είναι τυχαία. Προφανώς ισχύει

$$\int_{\Omega} \Psi \, dx \leq \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \Psi \, dx.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $P(x, t)$ στο διάστημα $[\xi, \xi + \eta]$ έχουμε

$$P(x, \xi + \eta) - P(x, \xi) = p(x, \xi + \vartheta \eta) \eta,$$

με $\vartheta \in (0, 1)$. Έχουμε ότι

$$\int_{\Omega_1} |P(x, u(x) + \varphi(x)) - P(x, u(x))| \, dx \quad (\text{χρήση του (b) του λήμματος})$$

$$\leq \int_{\Omega_1} [\alpha_1 + \alpha_2 (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s |\varphi(x)|] dx \text{ (ανισότητα Holder)}$$

$$\leq \alpha_1 |\Omega_1|^{(n+2)/2n} \|\varphi\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} + \alpha_3 |\Omega_1|^{1/\sigma} \left[\|u\|_{L^{s+1}}^s + \|\varphi\|_{L^{s+1}}^s \right] \|\varphi\|_{L^{2n/n-2}} \quad (1)$$

όπου

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{s}{s+1} + \frac{n-2}{2n} = 1$$

Η παραπάνω ισότητα έχει νόημα αφού από υπόθεση $s < (n+2)(n-2)^{-1}$

οπότε συνεπάγεται ότι $s(s+1)^{-1} + (n-2)(2n)^{-1} < 1$ κι άρα υπάρχει το

$\sigma > 1$ για το οποίο ισχύει η παραπάνω εφαρμογή της ανισότητας του Holder. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Sobolev η προηγούμενη ανισότητα γράφεται

$$\int_{\Omega_1} |P(x, u(x) + \varphi(x)) - P(x, u(x))| dx \leq$$

$$\leq \alpha_4 \|\varphi\| [|\Omega_1|^{(n+2)/2n} + |\Omega_1|^{1/\sigma} (\|u\|^s + \|\varphi\|^s)] \quad (2)$$

όπου με $\|\cdot\|$ εννοούμε τη νόρμα του $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Με όμοιο τρόπο συμπεραίνονται

$$\int_{\Omega_1} |p(x, u(x)) \varphi(x)| dx \leq \alpha_5 \|\varphi\| [|\Omega_1|^{(n+2)/2n} + |\Omega_1|^{1/\sigma} \|u\|^s] \quad (3)$$

Από την άλλη χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Holder και Sobolev

$$\|u\| \geq \alpha_6 \|u\|_{L^2(\Omega)} \geq \alpha_6 \|u\|_{L^2(\Omega_1)} \geq \alpha_6 \beta |\Omega_1|^{1/2}.$$

οπότε

$$|\Omega_1|^{1/\sigma} \leq \left(\frac{\|u\|}{\alpha_6 \beta} \right)^{2/\sigma} \equiv M_1, \text{ και } |\Omega_1|^{(n+2)/2n} \leq \left(\frac{\|u\|}{\alpha_6 \beta} \right)^{(n+2)/n} \equiv M_2 \quad (4)$$

οπότε $M_1, M_2 \rightarrow 0$ καθώς $\beta \rightarrow \infty$. Χρησιμοποιώντας τις (1),(2),(3),(4)

έχομε

$$\int_{\Omega_1} \Psi \, dx \leq \alpha_7 [M_2 + M_1 (\|u\|^s + \|\varphi\|^s)] \|\varphi\|. \quad (5)$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta \leq 1$. Επιλέγοντας το β αρκετά μεγάλο

παίρνουμε $\alpha_7 [M_2 + M_1 (\|u\|^s + 1)] \leq \varepsilon / 3$ κι άρα

$$\int_{\Omega_1} \Psi \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \|\varphi\|. \quad (6)$$

Κάνοντας παρόμοιους συλλογισμούς για το Ψ στο Ω_2

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \Psi \, dx &\leq \alpha_3 \int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s |\varphi(x)|] \, dx \\ &\leq \alpha_4 \left(\int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s]^{(s+1)/s} \, dx \right)^{s/(s+1)} \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega_2)} \\ &\leq \alpha_5 (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \left(\int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^{s+1} \left(\frac{|\varphi(x)|}{\gamma} \right)^{m-(s+1)} \, dx \right)^{1/s+1} \end{aligned}$$

όπου $m = 2n(n-2)^{-1} > s+1$. Έτσι

$$\int_{\Omega_2} \Psi \, dx \leq \alpha_6 \gamma^{(s+1-m)/(s+1)} (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \|\varphi\|^{m/(s+1)}. \quad (7)$$

Τέλος αφού $P \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ για κάθε $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\beta} > 0$ υπάρχει ένα

$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\varepsilon}, \hat{\beta})$ έτσι ώστε

$$|P(x, \xi + h) - P(x, \xi) - p(x, \xi)h| \leq \hat{\varepsilon} |h| \quad (8)$$

για οποιοδήποτε $x \in \bar{\Omega}$, $|\xi| \leq \hat{\beta}$ και $|h| \leq \hat{\gamma}$. Αν μάλιστα θεωρήσουμε

$\hat{\beta} \equiv \beta$ και $\gamma \leq \hat{\gamma}$ τότε από την (8) και την ανισότητα του Sobolev έχουμε

$$\int_{\Omega_3} \Psi \, dx \leq \hat{\varepsilon} \int_{\Omega_3} |\varphi(x)| \, dx \leq \alpha_7 \hat{\varepsilon} \|\varphi\|. \quad (9)$$

Διαλέγοντας $\hat{\varepsilon}$ έτσι ώστε $3\alpha_7 \hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$ έχουμε καθορίσει και το $\hat{\gamma}$. Θέτομε

$\gamma = \widehat{\gamma}$. Συνδυάζοντας τα (6), (7), (9) έχουμε

$$\int_{\Omega} \Psi \, dx \leq \frac{2\varepsilon}{3} \|\varphi\| + \alpha_6 \gamma^{(s+1-m)/(s+1)} (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \|\varphi\|^{m/s+1}.$$

Τέλος επιλέγοντας δ αρκετά μικρό ώστε

$$\alpha_6 \gamma^{1-m/(s+1)} (2 + \|u\|^s) \delta^{(m/(s+1)) - 1} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Για να αποδείξουμε ότι η $J'(u)$ είναι συνεχής, θεωρούμε $u_m \rightarrow u$ στο E .

Τότε $u_m \rightarrow u$ στο $L^{s+1}(\Omega)$ λόγω του θεωρήματος του Sobolev και με τη βοήθεια της ανισότητας του Holder θα έχουμε

$$\begin{aligned} \|J'(u_m) - J'(u)\| &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} (p(x, u_m(x)) - p(x, u(x))) \varphi(x) \, dx \right| \\ &\leq \alpha_7 \|p(\dots, u_m) - p(\dots, u)\|_{L^{(s+1)/s}(\Omega)} \quad (10) \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση (b) του λήμματος ισχύει

$$|p(x, \xi)| \leq \alpha_1 + \alpha_2 |\xi|^{\alpha s/a}$$

για όλα τα $\alpha \geq 1$ και για όλα τα $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Έτσι συνάγομαι ότι $p \in C(L^{\alpha s}(\Omega), L^{\alpha}(\Omega))$. Οπότε θέτοντας $\alpha = (s+1)s^{-1}$ ο δεξιός όρος της (10) συγκλίνει στο 0 κι άρα η J' θα είναι συνεχής. ■

Απόδειξη του θεωρήματος: Η ασθενής λύση της μερικής διαφορικής θα προκύψει ως κρίσιμο σημείο του I με τη βοήθεια του Mountain Pass.

Γι αυτό πρέπει να αιτιολογήσουμε την ισχύ του. Χάρης στο λήμμα βλέπουμε ότι $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ όπου $E \equiv W_0^{1,2}(\Omega)$. Επιπλέον $I(0) = 0$. Έτσι απομένει να δείξουμε τα (I_1) , (I_2) και τις (PS) .

Για να αποδείξουμε το (I_2) παρατηρούμε ότι από το (d) του θεωρήματος ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$P(x, \xi) \geq \alpha_3 |\xi|^{\mu} - \alpha_4$$

όπου $\alpha_3, \alpha_4 > 0$. Οπότε

$$J(u) \equiv \int_{\Omega} P(x, u) dx \geq \alpha_3 \int_{\Omega} |u|^{\mu} dx - \alpha_4 |\Omega| \quad (11)$$

επιλέγουμε τυχαίο $u \in E \setminus \{0\}$ και με τη βοήθεια της (11) έχουμε

$$\begin{aligned} I(tu) &= \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} P(x, tu) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - t^{\mu} \alpha_3 \int_{\Omega} |u|^{\mu} dx + \alpha_4 |\Omega| \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

καθώς $t \rightarrow \infty$. Οπότε το (I_2) ισχύει. Για το (I_1) έχοντας υπόψη το (c) του θεωρήματος παρατηρούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $|\xi| \leq \delta$ θα ισχύει

$$|P(x, \xi)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon |\xi|^2 \text{ για όλα τα } x \in \bar{\Omega}.$$

Από το (b) του θεωρήματος υπάρχει μια σταθερά $A = A(\delta) > 0$ έτσι ώστε για κάθε $|\xi| > \delta$ ισχύει

$$|P(x, \xi)| \leq A |\xi|^{s+1}$$

για όλα τα $x \in \bar{\Omega}$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω εκτιμήσεις έχουμε ότι για κάθε $x \in \bar{\Omega}$ και $\xi \in \mathbb{R}$

$$|P(x, \xi)| \leq A |\xi|^{s+1} + \frac{1}{2} \varepsilon |\xi|^2 \quad (12)$$

Οπότε

$$|J(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + A \int_{\Omega} |u|^{s+1} dx \leq \alpha_5 \left(\frac{\varepsilon}{2} + A \|u\|^{s-1} \right) \|u\|^2$$

οπότε διαλέγοντας ως $\|u\| \leq (\varepsilon / 2A)^{1/(s-1)}$ η προηγούμενη ανίσωση γράφεται

$$|J(u)| \leq \alpha_5 \varepsilon \|u\|^2$$

κι επειδή το ε είναι τυχαίο θα είναι $J(u) = o(\|u\|^2)$ καθώς $u \rightarrow 0$. Οπότε

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + o(\|u\|^2)$$

καθώς $u \rightarrow 0$ κι άρα το (I_1) ισχύει. Τέλος αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση p ικανοποιεί τα (a), (b) του θεωρήματος τότε ισχύουν οι

συνθήκες (PS). (Μια απόδειξη αυτού μπορούμε να βρούμε στο [3] σελ.11).

4. Ύπαρξη λύσεων για τη p-Laplacian quasilinear εξίσωση με τη μέθοδο fibering

1.Εισαγωγή

Θα μελετήσουμε την ύπαρξη θετικών λύσεων για την εξίσωση

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)|u|^{\gamma-2}u \quad (1.1)$$

όπου u η άγνωστη συνάρτηση ορισμένη στο φραγμένο

υποσύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ με Dirichlet συνοριακή συνθήκη

$$u = 0 \quad \text{στο} \quad \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u)$$

Υποθέτουμε ότι $p, \lambda, \gamma \in \mathbb{R}, 1 < p < \gamma < p^*$ όπου

$$p^* = \frac{Np}{N-p} \quad \text{όταν} \quad p < N \quad \text{και} \quad p^* = \infty \quad \text{όταν} \quad p \geq N.$$

Αυτό το πρόβλημα θα μελετηθεί σε σχέση με το αντίστοιχο πρόβλημα ιδιοτιμών για την p-Laplacian

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u \quad (1.3)$$

Για τις ιδιοτιμές του (1.3) ισχύει το παρακάτω:

Λήμμα 1.1 Υπάρχει η πρώτη θετική ιδιοτιμή λ_1 του προβλήματος (1.3), (1.2) η οποία υπολογίζεται ως το ελάχιστο του πηλίκου Rayleigh

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in W \\ \int_{\Omega} g(x)|u|^p dx > 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} g(x)|u|^p dx} > 0$$

Επιπλέον στην λ_1 αντιστοιχεί μια θετική ιδιοσυνάρτηση u_1 ορισμένη στο Ω . Επιπλέον οποιεσδήποτε άλλες ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στην λ_1 είναι πολλαπλάσια της u_1 . (Για μια απόδειξη του άνω σχετικού σας παραπέμπουμε στην *Lindquist χώροι Sobolev*).

Θα εργαστούμε στο Sobolev χώρο $W := W_0^{1,p}(\Omega)$ εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|u\|_W = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}$$

Θεωρούμε ότι $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$, g_1, g_2 μη αρνητικές συναρτήσεις και $f(x), g(x) \in L^\infty(\Omega)$. Η συνάρτηση $u \in W$ θα ονομάζεται **ασθενής λύση** του προβλήματος (1.1)-(1.2) αν η παρακάτω ισότητα

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} g(x) |u|^{p-2} uv dx + \int_{\Omega} f(x) |u|^{\gamma-2} uv dx \quad (1.4)$$

ισχύει για κάθε συνάρτηση $v \in W$.

Ο πραγματικός αριθμός λ είναι ιδιοτιμή και η $u \in W, u(x) \neq 0$, είναι μια αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση στο πρόβλημα (1.1)-(1.2) αν ισχύει

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} g(x) |u|^{p-2} uv dx \quad (1.5)$$

για κάθε συνάρτηση $v \in W$.

Επειδή $g(x) \in L^\infty(\Omega)$ συνάγεται ότι

(g0) το συναρτησοειδές

$$u \rightarrow \int_{\Omega} g(x) |u|^p dx$$

είναι συνεχές στο W .

Ομοίως, επειδή $f(x) \in L^\infty(\Omega)$ και $1 < \gamma < p^*$

(f0) το συναρτησοειδές

$$u \rightarrow \int_{\Omega} f(x) |u|^\gamma dx$$

είναι συνεχές στο W .

2. Η μέθοδος fibering (Pohozaev)

Θεωρούμε το συναρτησοειδές του Euler

$$\mathcal{E}_\lambda(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} g(x) |u|^p dx - \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} f(x) |u|^\gamma dx \quad (2.1)$$

Είναι προφανές ότι ένα κρίσιμο σημείο του $\mathcal{E}_\lambda$ αντιστοιχεί σε μια ασθενή λύση του προβλήματος (1.1)-(1.2). Διασπούμε τώρα τη συνάρτηση $u \in W$ ως εξής:

$$u(x) = r v(x) \quad (2.2)$$

με $r \in \mathbb{R}$, $v \in W$ και αντικαθιστούμε την (2.2) στη (2.1). Έχομε

$$\mathcal{E}_\lambda(rv) = \frac{|r|^p}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \frac{\lambda |r|^p}{p} \int_{\Omega} g(x) |v|^p dx - \frac{|r|^\gamma}{\gamma} \int_{\Omega} f(x) |v|^\gamma dx \quad (2.3)$$

Έστω ότι το $u \in W$ είναι κρίσιμο σημείο του $\mathcal{E}_\lambda(u)$. Τότε

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\lambda(rv)}{\partial r} = 0$$

οπότε έχομε

$$|r|^{p-2} r \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \lambda |r|^{p-2} r \int_{\Omega} g(x) |v|^p dx - |r|^{\gamma-2} r \int_{\Omega} f(x) |v|^\gamma dx = 0. \quad (2.4)$$

Αναζητώντας μη τετριμμένες λύσεις (κρίσιμα σημεία) $u \neq 0$, θα θεωρήσουμε ότι $r \neq 0$. Υποθέτομε επιπλέον ότι

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \lambda \int_{\Omega} g(x) |v|^p dx \neq 0$$

Οπότε από τη (2.4) παίρνομε ότι

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \lambda \int_{\Omega} g(x) |v|^p dx - |r|^{\gamma-p} \int_{\Omega} f(x) |v|^\gamma dx = 0. \quad (2.4)$$

Κάνοντας τέλος την υπόθεση $\int_{\Omega} f(x) |v|^\gamma dx \neq 0$ παίρνομε ότι

$$|r|^{\gamma-p} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \lambda \int_{\Omega} g(x) |v|^p dx}{\int_{\Omega} f(x) |v|^\gamma dx} > 0 \quad (2.5)$$

Από τη (2.5) μπορούμε να υπολογίσουμε το $|r|$ και να το αντικαταστήσουμε στην (2.3) οπότε θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_\lambda(v) &:= \mathcal{E}_\lambda(r(v)v) \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma} \right) \cdot \frac{\left| \int_\Omega |\nabla v|^p dx - \lambda \int_\Omega g(x) |v|^p dx \right|^{\gamma/(\gamma-p)}}{\left| \int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx \right|^{p/(\gamma-p)}} \operatorname{sgn} \left(\int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Παρατήρηση 2.1 Η συνάρτηση $r = r(v)$ είναι καλά ορισμένη αν υποθέσουμε ότι

$$(\alpha) \quad \int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx > 0 \text{ και } \int_\Omega |\nabla v|^p dx - \lambda \int_\Omega g(x) |v|^p dx > 0$$

$$(\beta) \quad \int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx < 0 \text{ και } \int_\Omega |\nabla v|^p dx - \lambda \int_\Omega g(x) |v|^p dx < 0$$

Με δεδομένο ότι ικανοποιείται το (α) ή το (β) έχουμε

$$0 = (\mathcal{E}'_\lambda(r(v)v), v)_W = \frac{d\mathcal{E}_\lambda(rv)}{dr} \Big|_{r=r(v)}$$

Λήμμα 2.2 Το συναρτησοειδές $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$ είναι 0-ομογενές δηλαδή για κάθε $v \in W$ με $\int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx \neq 0$ και για κάθε $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ έχουμε

$$\tilde{\mathcal{E}}_\lambda(tv) = \tilde{\mathcal{E}}_\lambda(v).$$

Η $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$ είναι άρτια και η *Gâteaux* παράγωγος της σε κάθε σημείο $v \in W$ με

$\int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx \neq 0$ στην κατεύθυνση v είναι μηδέν:

$$(\tilde{\mathcal{E}}'_\lambda(v), v)_W = 0.$$

Επιπλέον αν το $v_c \in W$ είναι κρίσιμο σημείο τότε και το $|v_c|$ είναι κρίσιμο σημείο του $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$.

Λήμμα 2.3 Κάθε κρίσιμο σημείο $v_c \neq 0$ του $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$ που ικανοποιεί το (α) ή το (β) παράγει ένα κρίσιμο σημείο $u_c \in W$, $u_c \neq 0$ του $\mathcal{E}_\lambda$ σύμφωνα με τον τύπο

$$u_c(x) = r_c v_c(x)$$

όπου το $r_c > 0$ είναι ορισμένο από τη σχέση (2.5).

Απόδειξη Έστω $v \in W$, $\int_{\Omega} f(x) |v|^\gamma dx \neq 0$ και $r = r(v)$, $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda(v) = \mathcal{E}_\lambda(r(v)v)$ όπως είναι ορισμένα στις σχέσεις (2.5), (2.6). Τότε από την (2.1) και (2.3) παίρνουμε ότι

$$\mathcal{E}'_\lambda(rv)v = \frac{\partial \mathcal{E}_\lambda(rv)}{\partial r}$$

οπότε σύμφωνα με την παρατήρηση 2.1 έχουμε

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}_\lambda(rv)}{\partial r} \right|_{r=r(v)} = 0.$$

Με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{E}}'_\lambda(v), h)_W &= r(v)(\mathcal{E}'_\lambda(r(v)v), h)_W + \left(\frac{dr}{dv}(r(v)v), h \right)_W (\mathcal{E}'_\lambda(r(v)v), v)_W = \\ &= r(v)(\mathcal{E}'_\lambda(r(v)v), h)_W. \end{aligned}$$

για όλα τα $h \in W$. Έστω ότι το $v_c \in W$, με $\int_{\Omega} f(x) |v_c|^\gamma dx \neq 0$ είναι ένα κρίσιμο σημείο του $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$ και $r_c = r(v_c) \neq 0$ που ορίστηκε από τη σχέση (2.5). Τότε παίρνουμε ότι

$$\tilde{\mathcal{E}}'_\lambda(v_c) = r_c \mathcal{E}'_\lambda(r_c v_c) = 0$$

άρα τελικά

$$\mathcal{E}'_\lambda(u_c) = 0$$

όπου θέσαμε $u_c = r_c v_c$. ■

Λήμμα 2.4 Θεωρούμε το συναρτησοειδές $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ υπό τον περιορισμό $H(v) = c$ το οποίο ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

$$(H'(v), v)_W \neq 0 \text{ όταν } H(v) = c. \quad (2.7)$$

Τότε κάθε κρίσιμο σημείο του προβλήματος

$$\text{crit } \{\tilde{\mathcal{E}}_\lambda(v) \mid H(v) = c\} \quad (2.8)$$

είναι ένα κρίσιμο σημείο του $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$.

Απόδειξη Έστω v_c ένα κρίσιμο σημείο του προβλήματος (2.8). Τότε θα υπάρχουν αριθμοί μ_1, μ_2 έτσι ώστε

$$\mu_1 \tilde{\mathcal{E}}'_\lambda(v_c) = \mu_2 H'(v_c) \quad (2.9)$$

όπου

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 > 0 \quad (2.10)$$

Τότε από τη (2.9) έχουμε ότι

$$\mu_1 (\tilde{\mathcal{E}}'_\lambda(v_c), v_c)_W = \mu_2 (H'(v_c), v_c)_W$$

Όμως από το λήμμα (2.2) είναι $(\tilde{\mathcal{E}}'_\lambda(v_c), v_c)_W = 0$ ενώ $(H'(v_c), v_c)_W \neq 0$ σύμφωνα με την υπόθεση (2.7). Τότε από τις (2.9), (2.10) συνεπάγεται ότι $\mu_1 \neq 0$ και $\mu_2 = 0$. Έτσι από τη (2.9) έχουμε τελικά

$$\tilde{\mathcal{E}}'_\lambda(v_c) = 0. \blacksquare$$

Έτσι λοιπόν για να αποδείξουμε την ύπαρξη ασθενών λύσεων στο πρόβλημα (1.1) θα κάνουμε τα εξής: Θεωρώντας κατάλληλο συναρτησιακό H ως περιορισμό όπως στο λήμμα 2.4, θα δείξουμε ότι το $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$ έχει μη μηδενικά κρίσιμα σημεία. Αυτά θα παράγουν και τα κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς του Euler $\mathcal{E}_\lambda$ σύμφωνα με το λήμμα 2.3 τα οποία συμπίπτουν με τις ασθενείς λύσεις του προβλήματος (1.1).

3.Η περίπτωση $0 \leq \lambda < \lambda_1$

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2} u + f(x)|u|^{\gamma-2} u \quad u \in \Omega \quad (3.1)$$

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Έστω $\lambda_1 > 0$ η πρώτη θετική ιδιοτιμή του p -Laplacian τελεστή (1.3) και $u_1 = u_1(x)$ η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση σύμφωνα με το λήμμα 1.1. Υποθέτουμε ότι $0 \leq \lambda < \lambda_1$ και θεωρούμε το συναρτησιακό

$$H_\lambda(v) = \int_\Omega |\nabla v|^p dx - \lambda \int_\Omega g(x) |v|^p dx.$$

Από το λήμμα (1.1) έχουμε ότι $H_\lambda(v) \geq 0$ για κάθε $v \in W$ κι επιπλέον

$$(H'_\lambda(v), v)_W = pH_\lambda(v).$$

Θεωρούμε τον περιορισμό

$$H_\lambda(v) = 1.$$

Το συναρτησοειδές $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda(v)$ που αντιστοιχεί στον άνω περιορισμό είναι

$$\tilde{\mathcal{E}}_\lambda(v) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma} \right) \cdot \frac{1}{\left(\int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx \right)^{\frac{p}{\gamma-p}}} \operatorname{sgn} \left(\int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx \right),$$

και λόγω της παρατήρησης 2.1 έχουμε ότι $\int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx > 0$.

Κάνουμε λοιπόν την εξής υπόθεση:

(f1) $f^+(x) \neq 0$.

Θεωρούμε το εξής:

(P_λ) Να βρεθεί ένα σημείο μεγίστου v_c στο πρόβλημα:

$$0 < M_\lambda = \sup \left\{ \int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx \mid \int_\Omega f(x) |v|^\gamma dx > 0, H_\lambda(v) = 1 \right\}.$$

Σύμφωνα με το λήμμα 2.4. το v_c θα είναι λύση στο (P_λ) αν και μόνο αν το v_c είναι σημείο ελαχίστου του $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$ υποκείμενο στον περιορισμό $H_\lambda(v) = 1$.

Θεώρημα 3.1 Ας υποθέσουμε ότι ισχύουν τα $(g0)$, $g_1 \neq 0$, $(f0)$, $(f1)$.

Τότε το πρόβλημα (P_λ) έχει μη αρνητική λύση.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο

$$W_\lambda = \{v \in W \mid H_\lambda(v) = 1\}$$

Από τον ορισμό του λ_1 κι επειδή $0 \leq \lambda < \lambda_1$ έχουμε ότι $W_\lambda \neq \emptyset$.

Θα δείξουμε ότι το W_λ είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του W . Αφού $H_\lambda(v) = 1$ έχουμε

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx = \lambda \int_{\Omega} g(x) |v|^p dx + 1 \leq \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx + 1. \quad (3.2)$$

Από την (3.2) παίρνουμε ότι το W_λ είναι φραγμένο επειδή

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda}.$$

Κατά συνέπεια οποιαδήποτε ακολουθία $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ τέτοια ώστε

$\int_{\Omega} f(x) |v_n|^\gamma dx = M_\lambda$ για το (P_λ) είναι φραγμένη, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι συγκλίνει

$$v_n \rightarrow v_c \text{ ασθενώς στο } W.$$

Λόγω της υπόθεσης $(f0)$ έχουμε

$$\int_{\Omega} f(x) |v_n|^\gamma dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) |v_c|^\gamma dx = M_\lambda > 0. \quad (3.3)$$

Επειδή $H_\lambda(v_n) = 1$ και λόγω της ασθενούς ημισυνέχειας της νόρμας $\|\cdot\|_W$ και του $(g0)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v_c|^p dx &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^p dx \\ \int_{\Omega} g(x) |v_c|^p dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x) |v_n|^p dx. \end{aligned}$$

Οπότε

$$H_\lambda(v_c) = \int_{\Omega} |\nabla v_c|^p dx - \lambda \int_{\Omega} g(x) |v_c|^p dx \leq 1. \quad (3.4)$$

Από τη (3.3) συνεπάγεται ότι $v_c \neq 0$ και μάλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_c \geq 0$ σύμφωνα με το λήμμα (2.2). Τώρα θα αποδείξουμε ότι στην (3.4) ισχύει μόνο η ισότητα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει κι άρα θα έχουμε

$$H_\lambda(v_c) < 1$$

Υπάρχει $k_c > 1$ έτσι ώστε

$$H_\lambda(k_c v_c) = 1$$

όπου $\hat{v} = k_c v_c \in W_\lambda$ και

$$\int_{\Omega} f(x) |\hat{v}|^\gamma dx = k_c^\gamma \int_{\Omega} f(x) |v_c|^\gamma dx = k_c^\gamma M_\lambda > M_\lambda$$

το οποίο είναι αντίφαση. Άρα το $v_c \in W_\lambda$ είναι λύση του (P_λ) . ■

4.Η περίπτωση $\lambda = \lambda_1$

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2} u + f(x)|u|^{q-2} u \quad u \in \Omega \quad (4.1)$$

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό με αυτόν της προηγούμενης παραγράφου, θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα:

(P_{λ_1}) Να βρεθεί ένα σημείο μεγίστου v_c :

$$0 < M_{\lambda_1} = \sup \left\{ \int_{\Omega} f(x) |v|^q dx \mid \int_{\Omega} f(x) |v|^q dx > 0, H_{\lambda_1}(v) = 1 \right\}$$

Σύμφωνα με το $(f1)$ θα έχουμε $M_{\lambda_1} > 0$. Όμως τώρα το σύνολο

$$W_{\lambda_1} = \{v \in W \mid H_{\lambda_1}(v) = 1\}$$

είναι μη φραγμένο στο W . Έτσι θα θέσουμε μία επιπλέον υπόθεση για την f :

$$(f2) \quad \int_{\Omega} f(x) |u_1|^q dx < 0$$

(όπου u_1 είναι η θετική ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή $\lambda_1 > 0$ του p -Laplacian τελεστή).

Θεώρημα 4.1 Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα $(f0), (f1), (f2), (g0)$ και $g_1 \neq 0$. Τότε το πρόβλημα (P_{λ_1}) έχει μια μη αρνητική λύση.

Απόδειξη: Έστω $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία που μεγιστοποιεί το (P_{λ_1}) , δηλαδή

$$H_{\lambda_1}(v_n) = 1, \quad \int_{\Omega} f(x) |v_n|^q dx = m_n \rightarrow M_{\lambda_1} > 0 \quad (4.2)$$

Η απόδειξη σε γενικές γραμμές είναι ίδια είτε $M_{\lambda_1} \in \mathbb{R}$ είτε $M_{\lambda_1} = \infty$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι η $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μη φραγμένη τότε $\|v_n\|_W \rightarrow \infty$. Θέτουμε $t_n = \|v_n\|_W$ οπότε

$$v_n = t_n w_n \quad \text{όπου } \|w_n\|_W = 1.$$

Έτσι έχουμε

$$H_{\lambda_1}(v_n) = t_n^p \left[\int_{\Omega} |\nabla w_n|^p dx - \lambda_1 \int_{\Omega} g(x) |w_n|^p dx \right] = 1$$

οπότε

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla w_n|^p dx - \lambda_1 \int_{\Omega} g(x) |w_n|^p dx = \frac{1}{t_n^p} \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1 \int_{\Omega} g(x) |w_n|^p dx = 1 \quad (4.4)$$

Υποθέτοντας ότι $w_n \rightarrow w_0$ στο W , η (4.4) και η υπόθεση (g0) μας δίνουν

$$\int_{\Omega} g(x) |w_0|^p dx = \frac{1}{\lambda_1},$$

άρα $w_0 \neq 0$. Επιπλέον

$$\int_{\Omega} |\nabla w_0|^p dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla w_n|^p dx = 1,$$

ενώ από την (4.3) έχουμε

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla w_0|^p dx - \lambda_1 \int_{\Omega} g(x) |w_0|^p dx \leq 0.$$

Από το λήμμα 1.1 η w_0 είναι πολλαπλάσιο της πρώτης ιδιοσυνάρτησης, οπότε υπάρχει $k \neq 0$ ώστε

$$w_0(x) = k u_1(x),$$

από την (4.2) έχουμε

$$\int_{\Omega} f(x) |v_n|^\gamma dx = t_n^\gamma \int_{\Omega} f(x) |w_n|^\gamma dx = m_n \rightarrow M_{\lambda_1} > 0$$

κι άρα

$$\int_{\Omega} f(x) |w_n|^\gamma dx = \frac{m_n}{t_n^\gamma}.$$

Λόγω της (f0) παίρνομε

$$\int_{\Omega} f(x) |w_0|^\gamma dx \geq 0,$$

άρα

$$\int_{\Omega} f(x) |u_1|^\gamma dx \geq 0,$$

σχέση που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση (f2). Έτσι η ακολουθία $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ είναι φραγμένη, οπότε

$$v_n \rightarrow v_c \text{ στο } W.$$

Από το (f0) έχουμε

$$\int_{\Omega} f(x) |v_n|^\gamma dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) |v_c|^\gamma dx = M_{\lambda_1} > 0 \quad (4.5)$$

οπότε $v_c \neq 0$. Από τις (4.2), (g0) και τον ορισμό του λ_1 στο λήμμα 1.1 έχουμε

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla v_c|^p dx - \lambda_1 \int_{\Omega} g(x) |v_c|^p dx \leq 1$$

Θα αποδείξομε πρώτα ότι

$$0 < \int_{\Omega} |\nabla v_c|^p dx - \lambda_1 \int_{\Omega} g(x) |v_c|^p dx$$

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η ισότητα τότε από το λήμμα 1.1 έχουμε ότι υπάρχει $k \neq 0$ ώστε να ισχύει $v_c(x) = k u_1(x)$. Αντικαθιστώντας στην (4.5) θα πάρομε

$$|k|^\gamma \int_{\Omega} f(x) |u_1|^\gamma dx = M_{\lambda_1} > 0$$

σχέση που έρχεται σε αντίφαση με την (f2).

Μένει να αποδείξουμε ότι

$$\int_{\Omega} |\nabla v_c|^p dx - \lambda_1 \int_{\Omega} g(x) |v_c|^p dx = 1 \quad (4.6)$$

Αν υποθέσουμε ότι

$$0 < \int_{\Omega} |\nabla v_c|^p dx - \lambda_1 \int_{\Omega} g(x) |v_c|^p dx < 1$$

τότε θα υπάρχει ένα $t_c > 1$ έτσι ώστε η συνάρτηση $\tilde{v}_c = t_c v_c$ να ικανοποιεί τη συνθήκη $H_{\lambda_1}(\tilde{v}_c) = 1$ οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) |\tilde{v}_c|^\gamma dx &= t_c^\gamma \int_{\Omega} f(x) |v_c|^\gamma dx = t_c^\gamma \cdot M_{\lambda_1} > M_{\lambda_1} \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega} f(x) |v|^\gamma dx \mid H_{\lambda_1}(v) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Έτσι αποδείχτηκε η (4.6) οπότε η v_c είναι σημείο μεγίστου για το (P_{λ_1}) . Τέλος $v_c \geq 0$ σύμφωνα με το λήμμα 2.2. ■

Η περίπτωση $\lambda > \lambda_1$ όπως και η περίπτωση όπου $\Omega = \mathbb{R}^n$ αναλύονται διεξοδικά στο [4].

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors (Cambridge Texts in Applied Mathematics) by [James C. Robinson](#) (Author)

[2] Minimax Theorems (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications) by [Michel Willem](#) (Author)

[3] Minimax Methods in Critical Point Theory With Applications to Differential Equations (Cbms Regional Conference Series in Mathematics) by [Paul H. Rabinowitz](#)

[4] Positive solutions for the p – Laplacian: application of the fibering method by [Pavel Drabek](#) & [Stanislav I. Pohozaev](#)

[5] Συναρτησιακή Ανάλυση , θεωρία κι εφαρμογές. Συγγραφέας [Haim Brezis](#)