

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΧΩΡΩΝ BANACH ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗΝ
RNP(Radon-Nikodym Ιδιότητα)

Δασκαλάκη Ερασμία

Επιβλέπων : Επ.Καθηγητής **Μίνως Πετράκης**

ΧΑΝΙΑ , 2009

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Μίνωα Πετράκη , τόσο για την επιστημονική καθοδήγηση, όσο και για την ηθική υποστήριξη που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας .

Ευχαριστώ τον αναπληρωτή καθηγητή Δημήτρη Κανδυλάκη και τον επίκουρο καθηγητή Νίκο Ζωγραφόπουλο για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους υποψήφιους διδάκτορες Αναστάση Σηφαλάκη και Μαριάννα Παπαδομανωλάκη για την ηθική συμπαράσταση, τις συμβουλές και το κουράγιο που μου έδιναν καθ'όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, καθώς επίσης και την οικογένειά μου για την υπομονή και την κατανόησή της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Βασικοί ορισμοί	4
1.1 Η ιδιότητα Radon-Nikodym	7
1.2 Martingales	12
1.3 Αναπαραστάσιμοι Τελεστές	24
1.4 Η RNP σε δυϊκούς χώρους	25
2. Η CCP και superCCP ιδιότητα	28
3. Dunford-Pettis και γινόμενα Riesz	35

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή μελετάμε γεωμετρικές ιδιότητες των χώρων Banach σχετικές με την Radon Nikodym ιδιότητα(RNP).

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίζουμε την RNP και παρουσιάζουμε τα βασικά θεωρήματα (σχέση με martingales και τελεστές στον L^1)

Επίσης παρουσιάζουμε τον γεωμετρικό χαρακτηρισμό της RNP για δυϊκούς χώρους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια των (n, ε) Rademacher δέντρων. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το εξής θεώρημα: Ο χώρος X δεν έχει την superCCP αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η B_X περιέχει (n, δ) Rademacher δέντρο.

(Ο χώρος X έχει την CCP αν και μόνο αν κάθε $T : L^1 \rightarrow X$ είναι DP,

Ο χώρος X έχει την superCCP αν και μόνο αν για κάθε χώρο Y που είναι finitely representable στον X , έχω ότι ο Y έχει την CCP ιδιότητα.)

Επίσης εισάγουμε την NRTP(σελ.32).Αποδεικνύουμε ότι ο δυϊκός χώρος με την NRTP δεν έχει την CCP.

Τέλος στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε μία κατασκευή συνεχών μέτρων που είναι singular χρησιμοποιώντας δέντρα στον L^1 . Καταδεικνύουμε τη διαφορά μεταξύ της superRNP και της superCCP και δείχνουμε ότι ο χώρος BR(σελ.39) έχει την CCP αλλά δεν έχει την superCCP.

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ ένας χώρος πιθανότητας και X ένας χώρος Banach.

Μία συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow X$ καλείται απλή εάν υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ και

$$E_1, E_2, \dots, E_n \in \Sigma \text{ έτσι ώστε } f = \sum_{i=1}^n x_i X_{E_i} \text{ όπου } X_{E_i}(\omega) = 1 \text{ εάν } \omega \in E_i \text{ και}$$

$X_{E_i}(\omega) = 0 \text{ εάν } \omega \notin E_i$. Το (Bochner) ολοκλήρωμα μιας απλής συνάρτησης f είναι

$$\text{εξ' ορισμού } \int_E f d\lambda = \sum_{i=1}^n x_i \lambda(E \cap E_i), E \in \Sigma.$$

Μία συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow X$ καλείται μετρήσιμη εάν υπάρχει μία ακολουθία απλών

συναρτήσεων $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\lim_n \|s_n - f\| = 0$ λ -σχεδόν παντού.

Εάν $f : \Omega \rightarrow X$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση και αν υπάρχει ακολουθία απλών

συναρτήσεων $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\lim_n \int_{\Omega} \|s_n - f\| d\lambda = 0$ τότε η f καλείται

Bochner ολοκληρώσιμη. Σ' αυτή την περίπτωση το $\int_E f d\lambda$ ορίζεται για κάθε $E \in \Sigma$

σαν το όριο $\lim_n \int_E s_n d\lambda$.

Θεώρημα: Έστω $f : \Omega \rightarrow X$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Η f είναι Bochner

ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\int_{\Omega} \|f\| d\lambda < \infty$.

Με $L_X^1(\lambda)$ συμβολίζουμε τον χώρο Banach όλων των Bochner ολοκληρώσιμων

συναρτήσεων με νόρμα $\|f\|_{L_X^1} = \int_{\Omega} \|f\| d\lambda$.

Θεωρήματα για Bochner ολοκληρώσιμες συναρτήσεις:

1) Έστω T ένας κλειστός τελεστής από τον χώρο Banach X στον χώρο Banach Y .

Εάν η $f: \Omega \rightarrow X$ και η $Tf: \Omega \rightarrow Y$ είναι Bochner ολοκληρώσιμες τότε

$$T\left(\int_E f d\lambda\right) = \int_E (Tf) d\lambda.$$

2) Εάν $f \in L^1_X$ και $E \in \Sigma$, $\lambda(E) > 0$ τότε $\frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda \in \overline{c_0}(f(E))$.

Ορισμός: Η απεικόνιση $\vec{\mu}: \Sigma \rightarrow X$ καλείται διανυσματικό μέτρο (vector measure)

εάν $\vec{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \vec{\mu}(A_n)$ για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ξένων

συνόλων από την σ-άλγεβρα Σ .

Η κύμανση (variation) ενός διανυσματικού μέτρου $\vec{\mu}$ είναι η (επεκτεταμένη πραγματική) συνάρτηση $|\vec{\mu}|: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ της οποίας η τιμή σ'ένα σύνολο $E \in \Sigma$

είναι $|\vec{\mu}| = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|\vec{\mu}(A)\|$ όπου το supremum το παίρνουμε πάνω σ'όλες τις

διαμερίσεις του E σε πεπερασμένο το πλήθος ξένων ανα δύο στοιχείων από την

Σ . Εάν $|\vec{\mu}|(\Omega) < \infty$ τότε το διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu}$ καλείται μέτρο φραγμένης κύμανσης (bounded variation).

Εάν $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας, X ένας χώρος Banach και $f \in L^1_X(\lambda)$ μία Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση, μπορούμε να ορίσουμε ένα

διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu}: \Sigma \rightarrow X$ ως εξής $\vec{\mu}(E) = \int_E f d\lambda$, $E \in \Sigma$. Το ότι το $\vec{\mu}$ είναι

αριθμήσιμα προσθετικό χρειάζεται απόδειξη (Εάν $E = \bigcup_n E_n$ $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία

ξένων ανά δύο συνόλων από τη Σ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\lambda$ συγκλίνει απολύτως

διότι κυριαρχείται από την συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|f\| d\lambda$. Παρατηρούμε ότι

$$\left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\lambda - \sum_{n=1}^m \int_{E_n} f d\lambda \right\| = \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\lambda \right\|.$$

Είναι φανερό ότι $\lim_m \lambda \left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n \right) = 0$ και επομένως $\lim_m \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\lambda \right\| = 0$.

$$\Rightarrow \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\lambda. \text{ Αυτό σημαίνει ότι } \vec{\mu} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(E_n).$$

Το μέτρο $\vec{\mu}, \vec{\mu}(E) = \int_E f d\lambda$ είναι φραγμένης κύμανσης (bounded variation) και

απολύτως συνεχές ως προς το λ (δηλαδή εάν $E \in \Sigma$ και $\lambda(E) = 0$ τότε $|\vec{\mu}|(E) = 0$).

Τώρα τίθεται το ερώτημα: Κάθε διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu}$, που είναι φραγμένης κύμανσης και είναι απολύτως συνεχές ως προς το λ , προέρχεται από μία Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση; Η απάντηση είναι αρνητική και δίνεται μέσα από το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα: Έστω $(\Omega, \Sigma, \lambda) \equiv ([0,1], \text{Lebesgue μετρήσιμα σύνολα}, \text{Lebesgue μέτρο})$.

Έστω X ο Banach χώρος $L^1[0,1]$. Θεωρούμε το διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu}: \Sigma \rightarrow L^1[0,1]$

που ορίζεται ως εξής: $\vec{\mu}(A) = X_A$, για κάθε $A \in \Sigma$. Είναι προφανές ότι το $\vec{\mu}$ είναι ένα διανυσματικό μέτρο πεπερασμένης κύμανσης και απολύτως συνεχές ως προς το λ . Υποθέτουμε τώρα, ότι υπάρχει $f \in L^1_L(\lambda)$ έτσι ώστε $\vec{\mu}(A) = \int_A f d\lambda$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω $F \in L^\infty[0,1] = (L^1[0,1])^*$. Είναι φανερό ότι $\int_A (F, f(t)) d\lambda(t) = (F, \int_A f(t) d\lambda(t)) = (F, X_A) = \int_A F(t) d\lambda(t)$. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα σύνολο $A(F) \in \Sigma$ με $\lambda(A(F)) = 0$ έτσι ώστε $(F, f(t)) = F(t)$ για κάθε $t \in [0,1] \setminus A(F)$. Έστω (I_n) η ακολουθία όλων των υποδιαστημάτων του $[0,1]$ με ρητά άκρα και έστω $F_n = X_{I_n} \in L^\infty[0,1]$. Έστω $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(F_n)$ και $x \in [0,1] \setminus A$. Έχουμε ότι $\int_{I_n} f(x)(s) d\lambda(s) = \int F_n(s) f(x)(s) d\lambda(s) = F_n(x)$. Αν $x \notin I_n$, τότε $F_n(x) = 0$, άρα $f(x)(s) = 0$ για όλα σχεδόν τα $s \in [0,1]$, αν το $x \in [0,1] \setminus A$. Αυτό συνεπάγεται ότι η $f : [0,1] \rightarrow L^1$ μηδενίζεται σχεδόν παντού. Άρα δεν είναι δυνατόν $\int_A f d\lambda = X_A$, για κάθε $A \in \Sigma$.

1.1 Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ RADON-NIKODYM

Ορισμός : Ο χώρος Banach X λέμε ότι έχει την Radon-Nikodym Ιδιότητα (RNP)

Εάν για κάθε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ και για κάθε διανυσματικό μέτρο

$\vec{\mu} : \Sigma \rightarrow X$ (το οποίο είναι φραγμένης κύμανσης και απολύτως συνεχές ως προς το λ) υπάρχει Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \in L^1_X(\lambda)$,

έτσι ώστε $\vec{\mu}(E) = \int_E f d\lambda$ για κάθε $E \in \Sigma$.

Οι αυτοπαθείς χώροι και οι διαχωρίσιμοι δυϊκοί χώροι έχουν την RNP.

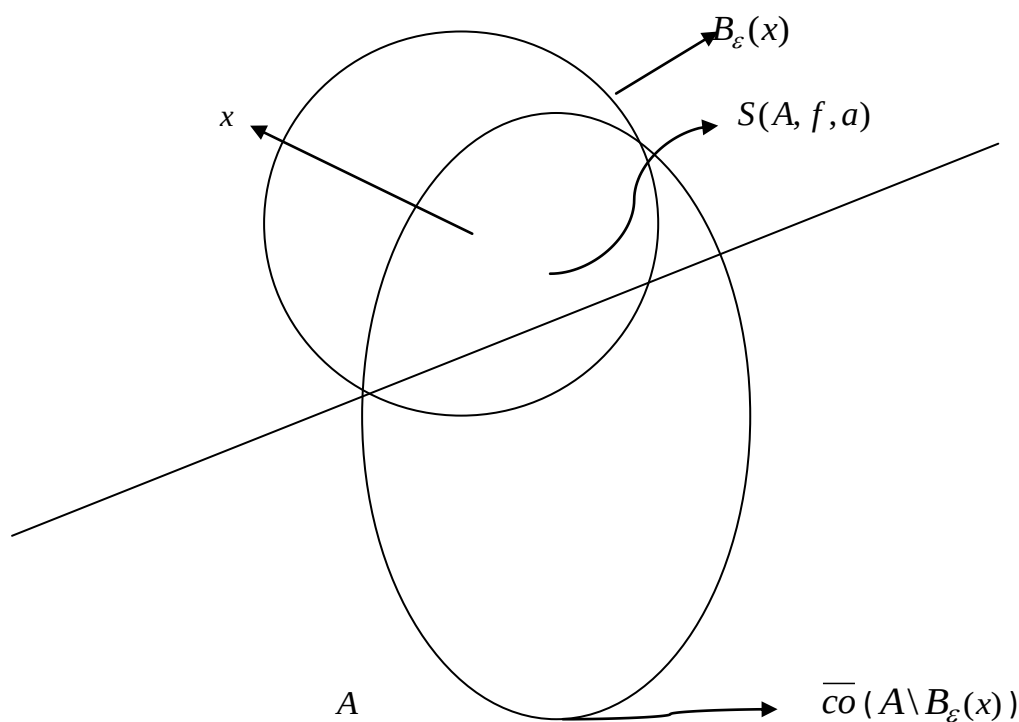
Ορισμός : Έστω A ένα φραγμένο υποσύνολο του X . Το A καλείται dentable εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $x \notin \overline{CO}(A \setminus B_\varepsilon(x))$.

(με $\overline{CO}$ συμβολίζεται η κλειστή κυρτή θήκη και $B_\varepsilon(x) = \{ y \in X : ||x - y|| < \varepsilon \}$).

Εάν A είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του X , $a > 0$ και $f \in X^*$, $f \neq 0$, τότε το slice του A που ορίζεται από το f και το a είναι το σύνολο

$$S(A, f, a) = \{ x \in A : f(x) > \sup(f(A)) - a \}$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος Hahn-Banach αποδεικνύεται ότι ένα σύνολο A είναι dentable αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο slice $S(A, f, a)$ του οποίου η διάμετρος είναι μικρότερη από ε .



Θεώρημα : Έστω X ένας χώρος Banach. Αν κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι dentable τότε ο X έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα. ([D-S])

Απόδειξη: Έστω ένα διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu} : \Sigma \rightarrow X$, το οποίο είναι φραγμένης κύμανσης και $\vec{\mu} \ll \lambda$. Αν $|\vec{\mu}|$ είναι η κύμανση του μ , τότε από το κλασσικό θεώρημα του Radon-Nikodym μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση

$$h \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda), h \geq 0 \text{ τέτοια ώστε } |\vec{\mu}|(E) = \int_E h d\lambda, \text{ για κάθε } E \in \Sigma.$$

Έστω $F \in \Sigma$ και $A(F) = \left\{ \frac{\vec{\mu}(G)}{\lambda(G)} : G \subset F, \lambda(G) > 0 \right\}$. Αν η συνάρτηση h είναι

φραγμένη στο F τότε και το σύνολο $A(F)$ είναι φραγμένο γιατί

$$\left\| \frac{\vec{\mu}(G)}{\lambda(G)} \right\| \leq \frac{|\vec{\mu}|(G)}{\lambda(G)} = \frac{1}{\lambda(G)} \int_G h d\lambda.$$

Για να συνεχιστεί όμως η απόδειξη, θα χρειαστεί το παρακάτω λήμμα

Λήμμα: Για κάθε $\varepsilon > 0$, και για κάθε $E \in \Sigma$ με $\lambda(E) > 0$, υπάρχει συνάρτηση $F \in \Sigma$

με $F \subset E$ και $\lambda(F) > 0$ τέτοια ώστε $\text{diam} A(F) \leq \varepsilon$. Για την απόδειξη υποθέτουμε

ότι η h είναι φραγμένη στο E , άρα και το σύνολο $A(E)$, αφού

$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in E : h(\omega) \leq n\}$ και η h είναι φραγμένη στα σύνολα $\{\omega \in E : h(\omega) \leq n\}$. Το

σύνολο $A(E)$ είναι dentable άρα υπάρχει $F_0 \subset E$ με $\lambda F_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)} \notin \overline{\text{co}} \left(A(E) \setminus B_{\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda F_0} \right) \right) = Q.$$

Το λήμμα θα έχει αποδειχθεί, αν δείξουμε ότι $\text{diam} A(F_0) \leq \varepsilon$.

Έστω ότι $\text{diam} A(F_0) > \varepsilon$. Τότε θα υπάρχει $B \subset F_0$ με $\lambda B > 0$ τέτοια ώστε

$\frac{\vec{\mu}(B)}{\lambda(B)} \in Q$. Πράγματι, γιατί αν $\frac{\vec{\mu}(K)}{\lambda(K)} \notin Q$, για κάθε $K \subset F_0$ με $\lambda K > 0$, τότε

$$\left\| \frac{\vec{\mu}(K)}{\lambda(K)} - \frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ που σημαίνει ότι } \text{diam} A(F_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \text{ Θα διαλέξουμε}$$

τώρα μια maximal αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δυο συνόλων $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με

$\lambda(B_n) > 0$, $B_n \subset F_0$ και $\frac{\vec{\mu}(B_n)}{\lambda(B_n)} \in Q$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω το σύνολο

$F = F_0 \setminus \left(\bigcup B_n\right)$. Αν $\lambda F = 0$ τότε και $\vec{\mu} F = 0$ άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)} = \frac{\vec{\mu}\left(\bigcup_n B_n\right)}{\lambda\left(\bigcup_n B_n\right)} = \sum_n \frac{\lambda(B_n)}{\lambda\left(\bigcup_n B_n\right)} \cdot \frac{\vec{\mu}(B_n)}{\lambda(B_n)}, \text{ που σημαίνει ότι } \frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)} \in Q \text{ πράγμα}$$

άτοπο. Άρα δε γίνεται να είναι $\lambda F = 0$, άρα $\lambda F > 0$. Από την maximality της $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

αν $G \subset F$ και $\lambda G > 0$ τότε $\left\| \frac{\vec{\mu}(G)}{\lambda(G)} - \frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ που σημαίνει ότι $\text{diam} A(F) \leq \varepsilon$.

Εδώ ολοκληρώθηκε η απόδειξη του λήμματος και μπορούμε τώρα να συνεχίσουμε την απόδειξη του θεωρήματος.

Θα πάρουμε ξανά μια maximal αριθμήσιμη οικογένεια $(E_i)_i$ ξένων ανά δυο

συνόλων στην Σ , $\lambda E_i > 0$, τέτοια ώστε $\text{diam} A(E_i) \leq \varepsilon \quad \forall i$. Με επαγωγή μπορούμε

να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων $\pi_n = (E_i^n)_i$ τέτοια ώστε

$$\text{diam} A(E_i^n) < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \forall i, n \in \mathbb{N} \text{ και έστω η συνάρτηση } g_n : \Omega \rightarrow X \text{ με}$$

$$g_n = \sum_i \frac{\vec{\mu}(E_i^n)}{\lambda(E_i^n)} X_{E_i^n}. \text{ Η } g_n \text{ είναι ομοιόμορφα Cauchy αφού}$$

$$\|g_n(\omega) - g_m(\omega)\| < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ αν } m < n, \text{ άρα η } g_n \text{ συγκλίνει στην } L_X^1(\lambda) \text{ σε κάποια}$$

συνάρτηση $g \in L_X^1(\lambda)$. Για κάθε $E \in \Sigma$ έχουμε ότι

$$\|\vec{\mu}(E) - \int_E g_n d\lambda\| = \|\sum_i \vec{\mu}(E_i^n \cap E) - \sum_i \frac{\vec{\mu}(E_i^n)}{\lambda(E_i^n)} \lambda(E_i^n \cap E)\| \leq \sum_i \|\frac{\vec{\mu}(E_i^n \cap E)}{\lambda(E_i^n \cap E)} -$$

$$\frac{\vec{\mu}(E_i^n)}{\lambda(E_i^n)}\| \lambda(E_i^n \cap E) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \lambda(E).$$

$$\text{Άρα } \vec{\mu}(E) = \lim_n \int_E g_n d\lambda = \int_E g d\lambda, \quad \forall E \in \Sigma.$$

1.2 MARTINGALES

Έστω $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ ένας χώρος πιθανότητας, $\Sigma' \subset \Sigma$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και X κάποιος χώρος Banach.

Η συνάρτηση $g \in L^1_X(\lambda)$ καλείται conditional expectation της f ως προς Σ' αν η g είναι Σ' -μετρήσιμη και $\int_E g d\lambda = \int_E f d\lambda, \quad \forall E \in \Sigma'.$

Με $E(f / \Sigma')$ συμβολίζουμε την conditional expectation της f ως προς $\Sigma'.$

Παρατήρηση: Το κλασικό θεώρημα Radon-Nikodym δίνει κατευθείαν ότι αν

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση και $\Sigma' \subset \Sigma$ μια σ-υποάλγεβρα της Σ τότε η $E(f / \Sigma')$ υπάρχει.

Πράγματι, αν $m : \Sigma' \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το μέτρο $m(A) = \int_A f d\lambda$ τότε $m \ll \lambda$ και η

$$E(f / \Sigma') \text{ είναι η Radon-Nikodym παράγωγος } \frac{dm}{d\lambda}.$$

Επίσης αποδεικνύει ότι αν $f : \Omega \rightarrow X$ είναι μια Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση και ο X έχει την Radon-Nikodym Ιδιότητα, τότε η $E(f / \Sigma')$ υπάρχει.

Όμως, ακόμα και αν ο χώρος X δεν έχει την RNP μπορούμε να ορίσουμε conditional expectation συναρτήσεων στον L_X^1 ως εξής :

Ξεκινάμε από τις απλές συναρτήσεις της μορφής $f = \sum_{i=1}^n x_i X_{A_i}$, $A_i \in \Sigma$, $x_i \in X$.

Ορίζουμε $E(f / \Sigma') = \sum_{i=1}^n x_i E(X_{A_i} / \Sigma')$ όπου η $E(X_{A_i} / \Sigma')$ είναι η πραγματική

conditional expectation της συνάρτησης $X_{A_i} \in L_{\mathbb{R}}^1(\lambda)$.

Όταν η f είναι απλή συνάρτηση ισχύει ότι :

- 1) Η $g = E(f / \Sigma')$ είναι Σ' μετρήσιμη
- 2) $\int_A g d\lambda = \sum x_i \int_A E(X_{A_i} / \Sigma') = \sum x_i \int_A X_{A_i} = \int_A f d\lambda$, $\forall A \in \Sigma'$
- 3) Η $E(f / \Sigma')$ είναι γραμμική ως προς f
- 4) $\|E(f / \Sigma')(\omega)\| \leq E(\|f\| / \Sigma')(\omega)$.

Αν όμως η $f \in L_X^1(\lambda)$ είναι μια οποιαδήποτε Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση

$f : \Omega \rightarrow X$ τότε η f μπορεί να προσεγγισθεί από απλές συναρτήσεις (s_n) .

Η ακολουθία $(E(s_n) / \Sigma')_{n=1}^\infty$ είναι Cauchy στον $L_X^1(\lambda)$ και το όριό της είναι η

$E(f / \Sigma')$ το οποίο είναι ανεξάρτητο από την ακολουθία (s_n) .

Συνοψίζοντας έχουμε το παρακάτω

Θεώρημα : Έστω $f \in L_X^1(\Omega, \Sigma, \lambda)$, $\Sigma' \subset \Sigma$ μια σ-υποάλγεβρα της Σ .

Υπάρχει μοναδική $g = E(f / \Sigma')$ έτσι ώστε:

- 1) $E(f / \Sigma') \in L_X^1(\Omega, \Sigma, \lambda)$
- 2) $\int_A g d\lambda = \int_A f d\lambda$, $\forall A \in \Sigma'$

Ο τελεστής $E(\cdot/\Sigma') : L_X^1 \rightarrow L_X^1$ είναι γραμμικός και ικανοποιεί τα εξής:

$$1) || E(f/\Sigma')(\omega) || \leq E(||f||/\Sigma')(\omega) \quad \lambda\text{-σχεδόν παντού}$$

$$2) || E(f/\Sigma') ||_1 \leq ||f||_1, \quad \forall f \in L_X^1(\lambda)$$

3) Αν $\Sigma'' \subset \Sigma'$ είναι σ-άλγεβρα τότε

$$E(E(f/\Sigma')/\Sigma'') = E(E(f/\Sigma'')/\Sigma') = E(f/\Sigma').$$

Ορισμός : Έστω $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \dots \Sigma_n \dots \subset \Sigma$ μια αύξουσα ακολουθία σ-υποάλγεβρα της

Σ . Η ακολουθία $(f_n, \Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in L_X^1(\lambda)$ καλείται martingale αν $E(f_{n+1}/\Sigma_n) = f_n$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παραδείγματα:

1) Έστω $f \in L_X^1(\lambda)$ και $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \dots \subset \Sigma_n$ μια αύξουσα ακολουθία

σ-αλγεβρών και $f_n = E(f/\Sigma_n)$. Τότε η ακολουθία (f_n, Σ_n) είναι ένα martingale

2) Έστω $(x_{n,k})$, $n=0,1,2,\dots$, $k=1,2,\dots,2^n$ ένα δένδρο σ'ένα χώρο Banach X .

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $(x_{n,k})$ είναι φραγμένη και

$$x_{n,k} = \frac{1}{2} (x_{n+1,2k-1} + x_{n+1,2k}) \quad \forall n=0,1,2,\dots, 1 \leq k \leq 2^n.$$

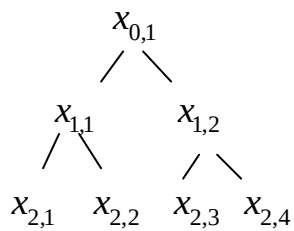
Έστω $I_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, $\forall n=0,1,2,\dots, 1 \leq k \leq 2^n$, η ακολουθία των δυαδικών

διαστημάτων.

Με Σ_n συμβολίζουμε την πεπερασμένη άλγεβρα που γεννάται από τα $I_{n,k}$,

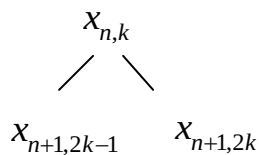
$$1 \leq k \leq 2^n$$

Μπορούμε να ορίσουμε ένα martingale με τιμές στο χώρο X ως εξής:



$$\xi_0 = x_{0,1} X_{I_{0,1}}$$

$$\xi_1 = x_{1,1} X_{I_{1,1}} + x_{1,2} X_{I_{1,2}}$$



$$\xi_n = \sum_{k=1}^{2^n} x_{n,k} X_{I_{n,k}} \quad \xi_n : [0, 1] \rightarrow X$$

Μπορούμε να δούμε ότι $\int_{[0,1]} \xi_0 = \int_{[0,1]} \xi_1$ αφού $x_{0,1} = (x_{1,1} + x_{1,2})$.

Ομοίως έχουμε ότι $E(\xi_{n+1} / \Sigma_n) = \xi_n$ που σημαίνει ότι η ακολουθία (ξ_n, Σ_n) είναι ένα martingale.

Ένα δένδρο $(x_{n,k})$ καλείται ε -δένδρο αν $||x_{n+1,2k-1} - x_{n,k}|| > \varepsilon$ για κάθε n ,

για κάθε k , όπου $1 \leq k \leq 2^n$. Το martingale (ξ_n, Σ_n) που αντιστοιχεί σ'ένα

ε -δένδρο δεν μπορεί να συγκλίνει αφού $||\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)|| > \varepsilon$, για κάθε $t \in [0,1]$.

Στον $L^1[0, 1]$ υπάρχει ένα 1-δένδρο. Πράγματι, αν $h_{n,k} = \frac{X_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}}{1/2^n}$, $1 \leq k \leq 2^n$

$n=0,1,2,\dots$ έχουμε ότι $||h_{n,k}|| \leq 1$, για κάθε n , για κάθε k , όπου $1 \leq k \leq 2^n$ και

$$||h_{n+1,2k-1} - h_{n+1,2k}||_1 = 1$$

Είναι επίσης φανερό ότι το $(h_{n,k})$ είναι δένδρο δηλαδή $h_{n+1,2k-1} + h_{n+1,2k} = 2h_{n,k}$, για κάθε n , για κάθε k , όπου $1 \leq k \leq 2^n$.

Θεώρημα : Έστω X ένας χώρος Banach και $K \subset X$ ένα κλειστό, φραγμένο σύνολο με την RNP. Τότε κάθε martingale με τιμές στο K συγκλίνει σχεδόν παντού.

Απόδειξη: Έστω ότι έχουμε το K που έχει την RNP για το χώρο $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ και

$\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \dots \subset \Sigma_n$ μια αύξουσα ακολουθία σ -υποαλγεβρών της Σ όπου η $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$

γεννά την Σ . Έστω (f_n, Σ_n) ένα martingale με τιμές στο K . Ορίζουμε τα

διανυσματικά μέτρα $\vec{\mu}_n(A) = \int_A f_n d\lambda$ για κάθε $A \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$ (όπου τα $\vec{\mu}_n$ είναι

απολύτως συνεχές ως προς το λ). Τότε το “average range”

$A(\vec{\mu}_n) = \left\{ \frac{\vec{\mu}_n(E)}{\lambda(E)}, \lambda(E) > 0 \right\}$ περιέχεται στο K , αφού αν $x^* \in X^*$, τότε

$x^* \left(\frac{\vec{\mu}_n(A)}{\lambda(A)} \right) = \frac{1}{\lambda(A)} \int_A x^* f_n d\lambda \leq \sup \{ x^*(x) : x \in K \}$. Το K όμως είναι (ασθενώς)

κλειστό, κυρτό, άρα $\frac{\vec{\mu}_n(A)}{\lambda(A)} \in K$. Αφού το (f_n, Σ_n) είναι martingale και η ακολουθία

$\int_A f_n d\lambda$ είναι τελικά σταθερή για $A \in \bigcup \Sigma_n$, το $\lim_n \vec{\mu}_n(A)$ υπάρχει για κάθε

$A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$ και μπορεί να δειχθεί ότι το $\lim_n \vec{\mu}_n(A)$ υπάρχει για κάθε $A \in \Sigma$ αφού η

$\bigcup \Sigma_n$ γεννά την Σ . Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $A \in \Sigma$, υπάρχει $B \in \Sigma_n$, για

κάποιο $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\lambda(A \nabla B) < \frac{\varepsilon}{2M}$ όπου $M = \sup \{ \|x\|, x \in K \}$. Αν $n \geq N$, τότε

$$\begin{aligned} \left\| \int_A f_n d\lambda - \int_A f_N d\lambda \right\| &\leq \left\| \int_B f_n d\lambda - \int_B f_N d\lambda \right\| + \int_{A \setminus B} \|f_n\| d\lambda + \int_{A \setminus B} \|f_N\| d\lambda \leq \\ &\leq 0 + 2\lambda(A \Delta B)M < \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού η ακολουθία $\vec{\mu}_n(A)$ είναι Cauchy το όριο $\vec{\mu}(A) = \lim_n \vec{\mu}_n(A)$ υπάρχει για

κάθε $A \in \Sigma$. Από το θεώρημα Vitali-Hahn-Saks συνεπάγεται ότι το $\vec{\mu}: \Sigma \rightarrow X$, με

$\vec{\mu}(A) = \lim_n \vec{\mu}_n(A)$ είναι μέτρο (δηλαδή αριθμήσιμα προσθετικό). Αφού το $\vec{\mu}$ είναι

απολύτως συνεχές ως προς το λ , $A(\vec{\mu}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A(\vec{\mu}_n) \subset K$ και το K έχει την RNP,

τότε υπάρχει συνάρτηση $f \in L^1_X(\Omega, \Sigma, \lambda)$ τέτοια ώστε $\vec{\mu}(A) = \int_A f d\lambda$, για κάθε

$A \in \Sigma$. Για $A \in \Sigma_n$, έχουμε $\int_A f d\lambda = \vec{\mu}(A) = \vec{\mu}_n(A) = \int_A f_n d\lambda$ που συνεπάγεται ότι

$E(f / \Sigma_n) = f_n$ για λ -σχεδόν παντού. Από το θεώρημα όμως του Levy-Doob

έχουμε ότι $\lim_n \|f_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$ για λ -σχεδόν παντού. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι

αν το K έχει την RNP τότε κάθε martingale με τιμές στο K συγκλίνει σχεδόν παντού.

Για την ολοκλήρωση όμως της παραπάνω απόδειξης χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα Vitali-Hahn-Saks: Έστω $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ χώρος πιθανότητας, X χώρος Banach

και $\vec{\mu}_n: \Sigma \rightarrow X$ μια ακολουθία από λ -συνεχή ($\vec{\mu}_n \ll \lambda$) διανυσματικά μέτρα. Αν το

όριο $\lim_n \vec{\mu}_n(E)$ υπάρχει για κάθε $E \in \Sigma$ τότε $\lim_{\lambda(E) \rightarrow 0} \vec{\mu}_n(E) = 0$ ομοιόμορφα για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$

Επίσης το $\vec{\mu} : \Sigma \rightarrow X$, $\vec{\mu}(E) = \lim_n \vec{\mu}_n(E)$ είναι διανυσματικό μέτρο.

Απόδειξη: Στο σύνολο Σ , μπορούμε να ορίσουμε μία μετρική. Έστω $\lambda(A \nabla B)$ η

απόσταση των συνόλων $A, B \in \Sigma$. Αποδεικνύεται ότι ο χώρος με την μετρική αυτή

είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος. Κάθε διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu}_n : \Sigma \rightarrow X$ είναι μία

συνεχής συνάρτηση από τον μετρικό χώρο Σ στο χώρο Banach X γιατί $\vec{\mu}_n \ll \lambda$. Τα

σύνολα $\Sigma_{n,m} = \{E : E \in \Sigma, \|\vec{\mu}_n(E) - \vec{\mu}_m(E)\| \leq \varepsilon\}$ είναι κλειστά για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα

και το σύνολο $\Sigma_p = \bigcap_{n,m \geq p} \Sigma_{n,m}$ είναι κλειστό στον πλήρη μετρικό χώρο Σ . Αφού το

$\lim_n \vec{\mu}_n(E)$ υπάρχει για κάθε $E \in \Sigma$, έχουμε ότι $\Sigma = \bigcup_{p=1}^{\infty} \Sigma_p$. Σύμφωνα με το

θεώρημα του Baire, κάποιο από τα Σ_p θα έχει εσωτερικό σημείο. Θα υπάρξει

δηλαδή κάποιος ακέραιος $q, r > 0$, $A \in \Sigma$ έτσι ώστε για κάθε E που ανήκει στη

σφαίρα με κέντρο το A και ακτίνα το r , να έχουμε ότι $\|\vec{\mu}_n(E) - \vec{\mu}_m(E)\| \leq \varepsilon$,

$n, m \geq q$. Ας πάρουμε τώρα ένα δ , με $0 < \delta < r$ τέτοιο ώστε $\|\vec{\mu}_n(\tilde{B})\| < \varepsilon$ για

$n = 1, 2, \dots, q-1, q \quad \forall \tilde{B}$ με $\lambda(\tilde{B}) < \delta$. Αν $\lambda(B) < \delta$ για κάποιο B έτσι ώστε το

σύνολο $A \setminus B$ και το σύνολο $A \cup B$ να ανήκουν στη σφαίρα

$K = \{E \in \Sigma : \lambda(A \nabla E) < r\}$ (όπου $K \subset \Sigma_p$) θα έχουμε

$$\vec{\mu}_n(B) = \vec{\mu}_q(B) + (\vec{\mu}_n(B) - \vec{\mu}_q(B)) = \vec{\mu}_q(B) + (\vec{\mu}_n(A \cup B) - \vec{\mu}_q(A \cup B)) - (\vec{\mu}_n(A \setminus B) - \vec{\mu}_q(A \setminus B))$$

που συνεπάγεται ότι $|\vec{\mu}_n(B)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Μέχρι στιγμής

λοιπόν έχει αποδειχθεί ότι $\lim_{\lambda(E) \rightarrow 0} \vec{\mu}_n(E) = 0$ ομοιόμορφα, για κάθε

$n = 1, 2, 3, \dots$. Τώρα μένει να αποδειχθεί ότι το $\vec{\mu}$ είναι αριθμήσιμα προσθετικό.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\vec{\mu}(E_m) \rightarrow 0$ για κάθε φθίνουσα ακολουθία

$E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_m$ με $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \emptyset$. Για μία τέτοια ακολουθία $\{E_i\}$ έχουμε ότι

$$\lambda(E_m) = \sum_{k=m}^{\infty} \lambda(E_k \setminus E_{k+1}). \text{ Όμως, αφού } \lim_{\lambda(E) \rightarrow 0} \vec{\mu}_n(E) = 0 \text{ ομοιόμορφα, } \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\vec{\mu}_n(E_m)\| < \varepsilon$, για κάθε

$m \geq m_\varepsilon$ και $n = 1, 2, 3, \dots$, που συνεπάγεται ότι $\|\vec{\mu}(E_m)\| \leq \varepsilon$ για κάθε $m \geq m_\varepsilon$

και άρα παίρνουμε το ζητούμενο, ότι $\vec{\mu}(E_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Θεώρημα των Levy-Doob: Έστω $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ χώρος πιθανότητας και

$\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \dots \Sigma_n \dots \subset \Sigma$ ακολουθία από σ-υποάλγεβρες της Σ των οποίων η ένωση

γεννά την Σ . Έστω $f_n = E(f / \Sigma_n)$ όπου f μια οποιαδήποτε Bochner

ολοκληρώσιμη συνάρτηση ($f \in L_X^1(\lambda)$). Τότε $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$, λ -σχεδόν

παντού και $\lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$.

Απόδειξη: Ας πάρουμε το σύνολο $\Gamma = \{ f \in L^1_X(\lambda) \text{ έτσι ώστε } \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \rightarrow 0 \text{ για } \lambda\text{-σχεδόν παντού και } \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \text{ καθώς το } n \rightarrow \infty \}$. Θα αποδειχθεί ότι το σύνολο αυτό, είναι κλειστό και πυκνό στον χώρο $L^1_X(\lambda)$.

α) Πρώτα θα δείξουμε ότι το σύνολο Γ είναι πυκνό στον $L^1_X(\lambda)$.: Αν η

$f \in L^1_X(\Omega, \Sigma_n, \lambda)$ (δηλαδή αν η f είναι Σ_n μετρήσιμη) τότε $E(f \setminus \Sigma_k) = f$ για κάθε

$k \geq n$ που σημαίνει ότι συνάρτηση $f \in \Gamma$. Άρα φαίνεται ότι

$\Gamma \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} L^1_X(\Omega, \Sigma_n, \lambda)$. Όμως κάθε συνάρτηση της μορφής $x \cdot X_A$ με $x \in X$ και

$A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$ ανήκει στο Γ , και αφού η $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$ είναι πυκνή στην Σ , μπορούμε να δούμε

ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $x \cdot X_B$ με $x \in X$ και $B \in \Sigma$ ανήκει στο Γ .

Παρατηρούμε ότι ο γραμμικός χώρος Γ περιέχει το πυκνό σύνολο των απλών συναρτήσεων, άρα το Γ είναι πυκνό στον $L^1_X(\Omega, \Sigma, \lambda)$.

β) Τώρα θα δείξουμε ότι το Γ είναι κλειστό στον $L^1_X(\lambda)$. Έστω συνάρτηση f η οποία

ανήκει στη κλειστή θήκη του Γ . Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει

$g \in \Gamma$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 < \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \delta$. Έστω $g_n = E(g \setminus \Sigma_n)$. Για όλα σχεδόν τα

$\omega \in \Omega$ έχουμε ότι

$$\|f_n(\omega) - f_k(\omega)\| \leq \|g_n(\omega) - g_k(\omega)\| + \|(f_n - g_n)(\omega) - (f_k - g_k)(\omega)\| \leq$$

$$\leq \|g_n(\omega) - g_k(\omega)\| + \|E(f - g \setminus \Sigma_n)(\omega)\| + \|E((f - g) \setminus \Sigma_k)(\omega)\| \leq$$

$$\leq \|g_n(\omega) - g_k(\omega)\| + 2 \sup_j E(\|f - g\| \setminus \Sigma_j).$$

Έστω $h_j(\omega) = E(\|f - g\| \mid \Sigma_j)(\omega)$. Από τις προηγούμενες ανισότητες και από το ότι

$g \in \Gamma$ παίρνω ότι : $\limsup_{n,k \rightarrow \infty} \|f_n(\omega) - f_k(\omega)\| \leq 2 \sup_j h_j(\omega)$, για λ -σχεδόν παντού.

Η ακολουθία (h_j) ικανοποιεί τις συνθήκες της maximal inequality και άρα

$$\lambda(\{\omega : \limsup_{n,k \rightarrow \infty} \|f_n(\omega) - f_k(\omega)\| > \varepsilon\}) \leq \lambda(\{\omega : 2 \sup_j h_j(\omega) > \varepsilon\}) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon} \sup_j \|h_j\|_1 = \frac{2}{\varepsilon} \sup_j \int_{\Omega} \|f(\omega) - g(\omega)\| d\lambda(\omega) = \frac{2}{\varepsilon} \|f - g\|_1 < \delta. \text{ Αφού τα } \varepsilon, \delta$$

ήταν τυχαίοι θετικοί αριθμοί φαίνεται ότι το όριο $\lim_n f_n(\omega) = \hat{f}(\omega)$ υπάρχει

σχεδόν παντού. Μένει τώρα να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f που πήραμε στη

κλειστή θήκη του Γ ανήκει στο Γ . $\forall \varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση

$g \in L^1_X(\Omega, \Sigma_N, \lambda)$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Όταν $n \geq N$ έχουμε

$$\|f - f_n\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - E(g \mid \Sigma_n)\|_1 + \|E(g \mid \Sigma_n) - f_n\|_1 <$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \|g - f\|_1 < \varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim_n \|f - f_n\|_1 = 0$. Από αυτό συνεπάγεται

ότι κάποια υπακολουθία (f_{n_i}) της (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού στην f , δηλαδή

$$f(\omega) = \lim_i f_{n_i}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \lim_n f_n(\omega) \text{ για } \lambda\text{-σχεδόν παντού.}$$

Θεώρημα της maximal inequality: Έστω $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \dots \subset \Sigma_n$ μια αύξουσα

ακολουθία σ-αλγεβρών από μετρήσιμα σύνολα του Ω . Έστω (h_n) να είναι μία

ακολουθία θετικών πραγματικών συναρτήσεων τέτοια ώστε :

1. Η h_j είναι Σ_j μετρήσιμη για κάθε $j \in \mathbb{N}$

2. Αν $i \leq n, A \in \Sigma_j$ τότε $\int_A h_i d\lambda \leq \int_A h_n d\lambda$

$$3. \quad \sup_j \int_{\Omega} h_j < \infty.$$

Τότε για κάθε $c > 0$ έχουμε ότι $\lambda(\{\omega \in \Omega : \sup_j h_j(\omega) > c\}) \leq \frac{1}{c} \sup_j \int_{\Omega} h_j d\lambda$.

Απόδειξη: Έστω $n \in \mathbb{N}$ ένας σταθερός φυσικός αριθμός. Με A_i συμβολίζουμε το

σύνολο $\{\omega \in \Omega : h_1(\omega) > c\}$ και με A_j το σύνολο

$\{\omega \in \Omega, h_1 \leq c, \dots, h_{i-1} \leq c, \text{ και } h_i(\omega) > c\}$. Τότε $A_i \in \Sigma_i$ και $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και

$$1 \leq i \leq n. \text{ Παρατηρούμε ότι } c \cdot \lambda(\{\omega \in \Omega : \sup_{j \leq n} h_j(\omega) > c\}) = c \cdot \lambda(\bigcup_{i=1}^n A_i) =$$

$$\sum_{i=1}^n c \cdot \lambda(A_i) \leq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} h_i d\lambda \leq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} h_n d\lambda \leq \int_{\Omega} h_n d\lambda \leq \sup_j \int_{\Omega} h_j d\lambda. \text{ Άρα έχουμε αποδείξει}$$

τώρα ότι $\lambda(\{\omega : \sup_{j \leq n} h_j(\omega) > c\}) \leq \frac{1}{c} \sup_j \int_{\Omega} h_j$. Είναι φανερό λοιπόν ότι αν $n \rightarrow \infty$ τότε

$$\text{έχουμε ότι } \lambda(\{\omega : \sup_j h_j(\omega) > c\}) \leq \frac{1}{c} \sup_j \int_{\Omega} h_j.$$

Θεώρημα : Έστω K ένα κυρτό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X . Αν κάθε martingale $\xi_n : [0,1] \rightarrow K$ συγκλίνει σχεδόν παντού τότε κάθε υποσύνολο του K είναι dentable.

Απόδειξη: Έστω ότι το σύνολο $A \subset K$ δεν είναι dentable. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει

$\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$, $x \in \overline{co}(A \setminus B(x, \varepsilon))$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε

ότι υπάρχει μια ακολουθία $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \dots \subset \Sigma_n$, σ-αλγεβρών από (μετρήσιμα)

υποσύνολα του $[0,1]$ και μια ακολουθία $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\xi_n : [0,1] \rightarrow K$ τέτοια ώστε :

1. Κάθε Σ_n είναι πεπερασμένη

2. $\|\xi_{n+1} - \xi_n\| \geq \varepsilon$
3. Κάθε ξ_n είναι Σ_n -μετρήσιμη και παίρνει τιμές στο A
4. $\sum_n \|\xi_n - E_n[\xi_{n+1}]\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$

Η κατασκευή των Σ_n και των ξ_n θα γίνει με επαγωγή ως προς το n .

1. $\Sigma_1 = \{\emptyset, [0,1]\}$, $\xi_1 = x \cdot X_{[0,1]}$ όπου x είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο του A .
2. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει την Σ_n και ξ_n . Έστω $(I_i)_{i=1}^j$ η διαμέριση του $[0,1]$ που γεννά την Σ_n , και ας υποθέσουμε ότι η

$$\xi_n : [0,1] \rightarrow A \text{ είναι της μορφής } \xi_n = \sum_{i=1}^j x_i X_{I_i} \text{ όπου } x_1, x_2, \dots, x_j \in A.$$

Έστω δοσμένο i . Γνωρίζουμε ότι $x_i \in \overline{co}(A \setminus B(x_i, \varepsilon))$ και άρα υπάρχουν θετικοί αριθμοί $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,k_i}$ και στοιχεία $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,k_i}$ του συνόλου $A \setminus B(x_i, \varepsilon)$ έτσι ώστε :

- I. $\lambda_{i,1} + \lambda_{i,2} + \dots + \lambda_{i,k_i} = 1$
- II. $\|x_i - (\lambda_{i,1}x_{i,1} + \dots + \lambda_{i,k_i}x_{i,k_i})\| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 2^{-n}$

Έστω $I_{i,1}, \dots, I_{i,k_i}$ μια διαμέριση του I_i έτσι ώστε $\lambda(I_{i,k}) = \lambda_{i,k} \lambda(I_i)$ (όπου λ είναι το

μέτρο Lebesgue). Ορίζουμε Σ_{n+1} να είναι η άλγεβρα που γεννάται από το

$\{I_{n,k} : 1 \leq i \leq j, 1 \leq k \leq k_i\}$. Επίσης ορίζουμε $\xi_{n+1} : [0,1] \rightarrow X$ να είναι

$$\xi_{n+1} = \sum_{i=1}^j \sum_{k=1}^{k_i} x_{i,k} X_{I_{i,k}}. \text{ Επειδή } \|x_i - x_{i,k}\| \geq \varepsilon \text{ για κάθε } i \text{ και για κάθε } k, \text{ έχουμε ότι}$$

$$\|\xi_{n+1} - \xi_n\|_1 > \varepsilon. \text{ Παρατηρούμε ότι } E_n(\xi_{n+1}) = \sum_{i=1}^j \sum_{k=1}^{k_i} x_{i,k} \frac{\lambda(I_{i,k})}{\lambda(I_i)} X_{I_i} \text{ που συνεπάγεται}$$

ότι $\|\xi_n - E_n(\xi_{n+1})\|_1 \leq \sum_{i=1}^j \|x_i - \sum_{k=1}^{k_j} \lambda_{i,k} x_{i,k}\| \lambda(I_i) < \frac{\varepsilon}{3} 2^{-n}$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\sum_n \|\xi_n - E_n(\xi_{n+1})\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Θεώρημα : Έστω K ένα κυρτό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X .

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1) Το K έχει την RNP
- 2) Κάθε martingale με τιμές στο K συγκλίνει σχεδόν παντού
- 3) Κάθε υποσύνολο του K είναι dentable

1.3 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΙΜΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Ορισμός: Έστω X ένας χώρος Banach. Ένας τελεστής $T : L^1[0,1] \rightarrow X$ καλείται αναπαραστάσιμος (representable) αν υπάρχει $g \in L^\infty_X$ έτσι ώστε $T\varphi = \int \varphi \cdot g$ για κάθε $\varphi \in L^1[0,1]$.

Θεώρημα : Έστω $K \subset X$ ένα κυρτό, κλειστό υποσύνολο του X με την RNP.

Αν $T : L^1[0,1] \rightarrow X$ είναι ένας τελεστής έτσι ώστε $\{T\varphi : \varphi \geq 0, \int \varphi = 1\} \subset K$ τότε ο

T είναι αναπαραστάσιμος. ([D-U])

Θεώρημα: Ο χώρος Banach X έχει την RNP αν και μόνο αν κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : L^1 \rightarrow X$ είναι αναπαραστάσιμος. ([D-U])

Θεώρημα (Dunford-Pettis) : Έστω $T : L^1 \rightarrow X$ ένας αναπαραστάσιμος τελεστής .

Αν $K \subset L^1$ είναι ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του L^1 , τότε το σύνολο $T(K)$ είναι norm- συμπαγές υποσύνολο του X .

Απόδειξη : Έστω ότι $\exists g \in L^\infty_X$ έτσι ώστε $Tf = \int fgd\lambda \quad \forall f \in L^1$ και έστω K ένα

φραγμένο ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο(uniformly integrable) υποσύνολο του L^1 .

Διαλέγουμε μια ακολουθία (g_n) απλών συναρτήσεων η οποία να συγκλίνει σχεδόν παντού στην g .Από το θεώρημα Egoroff μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο E_1 έτσι ώστε $\lim_n g_n = g$ ομοιόμορφα στο E_1 και το μέτρο $\lambda([0,1] \setminus E_1)$ να είναι τόσο μικρό

ώστε

$$\int_{[0,1] \setminus E_1} |f| d\lambda < \frac{\varepsilon}{\|T\|+1} \text{ για κάθε } f \in K . \text{ Αφού η συνάρτηση } g \cdot \chi_{E_1} : [0,1] \rightarrow X$$

έχει (σχετικά) συμπαγές πεδίο τιμών ,ο τελεστής $f \mapsto \int_{E_1} fgd\lambda$ είναι συμπαγής

και επομένως το σύνολο $\{ \int_{E_1} fgd\lambda , f \in K \}$ είναι σχετικά συμπαγές.

$$\text{Παρατηρούμε ότι για } f \in K , \left\| \int_{[0,1] \setminus E_1} fgd\lambda \right\| \leq \frac{\|T\| \cdot \varepsilon}{\|T\|+1} < \varepsilon .$$

Το σύνολο $\{T(f) : f \in K\} = \{ \int_{E_1} fgd\lambda + \int_{[0,1] \setminus E_1} fgd\lambda , f \in K \}$ είναι totally

bounded από 2ε -σφαίρες. Άρα το σύνολο $T(K)$ είναι σχετικά συμπαγές .

Θεώρημα (Lewis-Stegall): Έστω $T : L^1 \rightarrow X$ ένας τελεστής .Ο T είναι αναπαραστάσιμος αν και μόνο αν υπάρχουν τελεστές $S : L^1 \rightarrow l^1$, $U : l^1 \rightarrow X$ έτσι ώστε $T = U \circ S \cdot ([D-U])$

Θεώρημα: Έστω $T: L^1 \rightarrow X$ ένας ασθενώς συμπαγής τελεστής. Τότε ο T είναι αναπαραστάσιμος.

1.4 Η RNP σε δυϊκούς χώρους

Ένας χώρος Banach X που έχει την RNP, δεν μπορεί να περιέχει ένα (φραγμένο) ε -δένδρο, για κάποιο $\varepsilon > 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει όμως.

Ο Bourgain και ο Rosenthal κατασκεύασαν έναν υπόχωρο του L^1 ο οποίος δεν περιέχει ε -δένδρα και δεν έχει την RNP.

Για δυϊκούς χώρους όμως ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα (Stegall): Αν X είναι ένας χώρος Banach τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1) Ο δυϊκός χώρος X^* έχει την RNP
- 2) Ο X^* δεν περιέχει ε -δέντρα
- 3) Για κάθε διαχωρίσιμο υπόχωρο Y του X ο συζυγής Y^* είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη: (D.V. Dulst, I. Namioka)

Από το (1) στο (2) είναι προφανές, αφού ο χώρος X^* έχει την RNP αν και μόνο αν δεν υπάρχει φραγμένο δέντρο μέσα στο X^* .

Από το (3) στο (1), γνωρίζουμε ότι κάθε διαχωρίσιμος δυϊκός έχει την RNP.

Για ν' αποδειχτεί από το (2) στο (3) θα χρειαστεί το παρακάτω λήμμα

Λήμμα: Έστω $\{K_n : n=1,2,\dots\}$ μία ακολουθία από συμπαγή κυρτά υποσύνολα ενός τοπολογικού γραμμικού χώρου E τέτοια ώστε $K_{2n} \cup K_{2n+1} \subset K_n$ για κάθε n .

Τότε υπάρχει ένα δέντρο $\{x_n\}$ στο E τέτοιο ώστε $x_n \in K_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη Λήμματος: Έστω $Q = \prod_{n \in \mathbb{N}} K_n$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$A_n = \{ q \in Q : \frac{1}{2}(q(2n) + q(2n+1)) = q(n) \}$. Το A_n είναι ένα κλειστό υποσύνολο του

Q και θα δείξουμε ότι $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Από την συμπάγεια, αρκεί να δείξω ότι

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \neq \emptyset$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για σταθερό k ορίζουμε ένα στοιχείο p του

Q ως εξής: Για $n > k$, παίρνουμε το $p(n)$ σαν τυχαίο σημείο του K_n . Από το $n = k$

ως $n = 1$, έχουμε τον επαγωγικό ορισμό:

Αν για $m > n$ το $p(m) \in K_m$ είναι ορισμένο, τότε θέτουμε

$$p(n) = \frac{1}{2}(p(2n) + p(2n+1)).$$

Αφού κάθε K_n είναι κυρτό και $K_{2n} \cup K_{2n+1} \subset K_n$

έχουμε ότι $p(n) \in K_n$. Άρα $p \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$.

Πρόταση: Έστω X ένας χώρος Banach. Αν υπάρχει ένα φραγμένο υποσύνολο B του X^* και ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\text{diam } U > \varepsilon$ για κάθε σχετικά ω^* -ανοιχτό υποσύνολο του B , τότε το σύνολο ω^* -cl co B (ω^* κλειστή κυρτή θήκη του B) περιέχει ένα $\frac{\varepsilon}{2}$ -δέντρο.

Απόδειξη Πρότασης: Κατασκευάζουμε μια ακολουθία $\{U_n\}$ από σχετικά ω^* -ανοιχτά

υποσύνολα του B και μια ακολουθία $\{x_n\}$ στο X τέτοια ώστε :

α) $\|x_n\| = 1$ για $n = 1, 2, \dots$

β) $U_{2n} \cup U_{2n+1} \subset U_n$, για $n = 1, 2,$

γ) για κάθε n , αν $f \in U_{2n}$ και $g \in U_{2n+1}$, τότε $(f - g)(x_n) \geq \varepsilon$.

Παίρνουμε το U_1 να είναι το σύνολο B . Έστω ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, έχει ορισθεί το

U_k

για $1 \leq k \leq 2^m$ και το x_n για $1 \leq n \leq 2^{m-1}$ έτσι ώστε να ισχύουν τα (α),(β),(γ) για όλα τα n όπου $1 \leq n \leq 2^{m-1}$. Έστω $2^{m-1} \leq k < 2^m$. Από υπόθεση έχουμε ότι $\text{diam } U > \varepsilon$, άρα υπάρχουν κάποια $h_0, h_1 \in U_k$ τέτοια ώστε $\|h_0 - h_1\| > \varepsilon$. Διαλέγουμε κάποιο $x_k \in X$ τέτοιο ώστε $\|x_k\| = 1$ και $(h_0 - h_1)(x_k) = \varepsilon + \delta$, για κάποιο $\delta > 0$. Έστω $U_{2k} = \{f \in U_k : f(x_k) > h_0(x_k) - \frac{\delta}{2}\}$ και $U_{2k+1} = \{g \in U_k : g(x_k) < h_1(x_k) + \frac{\delta}{2}\}$. Τα σύνολα U_{2k} και U_{2k+1} είναι ω^* -ανοιχτά υποσύνολα του B και για $n = k$, τα U_{2k}, U_{2k+1} και x_k ικανοποιούν τα (α),(β),(γ). Αφού τα $n = 2k$ και $n = 2k+1$ εξαντλούν το σύνολο $\{n : 2^m \leq n < 2^{m+1}\}$ όταν το k βρίσκεται στο σύνολο $\{k : 2^{m-1} \leq k \leq 2^m\}$, η κατασκευή της $\{U_n\}$ και της $\{x_n\}$ έχει ολοκληρωθεί.

Έστω $K_n = \omega^* - \text{clco} U_n$. Κάθε K_n είναι ω^* -συμπαγές και κυρτό και από το (β) έχουμε ότι $K_{2n} \cup K_{2n+1} \subset K_n$. Τότε, από το προηγούμενο λήμμα θα υπάρχει ένα δέντρο $\{f_n\}$ στο X^* τέτοιο ώστε $f_n \in K_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $f_{2n} - f_{2n+1} \in K_{2n} - K_{2n+1} \subset \omega^* - \overline{\text{co}}(U_{2n} - U_{2n+1})$, από το (γ) έχουμε ότι $\|f_{2n} - f_{2n+1}\| \geq \varepsilon$.

Τώρα θα συνεχίσουμε την απόδειξη από το (2) στο (3) του θεωρήματος του Stegall. Έστω ότι ο χώρος X περιέχει ένα διαχωρίσιμο υπόχωρο Y και ότι ο συζυγής Y^* δεν είναι διαχωρίσιμος. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $0 < \varepsilon < 1$, η μοναδιαία σφαίρα B_{X^*} περιέχει ένα $\frac{\varepsilon}{2}$ -δέντρο. Το σύνολο B_{Y^*} περιέχει ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο A τέτοιο ώστε $\|f_1 - f_2\| > \varepsilon$ για κάθε $f_1, f_2 \in A$ με $f_1 \neq f_2$. Αλλιώς η σφαίρα B_{Y^*} θα μπορούσε να καλυφθεί από αριθμήσιμο το πλήθος

σφαίρες ακτίνας $\leq \varepsilon$, και κάθε μια από αυτές να καλυφθεί από αριθμήσιμο το πλήθος σφαίρες ακτίνας $\leq \varepsilon^2$ κ.τ.λ. και αφού $\varepsilon^n \rightarrow 0$ θα είχαμε ότι η B_{Y^*} είναι διαχωρίσιμο σύνολο, άρα και ο Y^* .

Αφού η B_{Y^*} είναι ω^* -μετριοποιήσιμο και ω^* -διαχωρίσιμο, όλα τα σημεία του A , εκτός από ένα αριθμήσιμο πλήθος, είναι ω^* σημεία συσσώρευσης. Αν αφαιρέσουμε το πολύ αριθμήσιμο το πλήθος σημείων από το A και πάρουμε την ω^* -κλειστότητα, παίρνουμε ένα ω^* -συμπαγές υποσύνολο A_1 του B_{Y^*} έτσι ώστε $\text{diam} V < \varepsilon$ για κάθε ω^* -ανοικτό υποσύνολο του A_1 . Αφού ο περιορισμός

$R^*: X^* \rightarrow Y^*$ είναι ω^* - ω^* συνεχής και $R(B_{X^*}) = B_{Y^*}$ υπάρχει ένα minimal

ω^* -συμπαγές υποσύνολο B του B_{X^*} έτσι ώστε $R(B) = A_1$. Το B ικανοποιεί την

υπόθεση της πρότασης, άρα το B_{X^*} περιέχει ένα άπειρο $\frac{\varepsilon}{2}$ -δέντρο.

2. Η CCP ΚΑΙ superCCP ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Ορισμός: Ο χώρος Banach X λέμε ότι έχει την complete continuity property (CCP)

αν κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T: L^1 \rightarrow X$ είναι Dunford-Pettis.

Συνεπώς, ο χώρος Banach που έχει την RNP έχει και την CCP.

Ορισμός: ε -δέντρο είναι μία ακολουθία $\{x_n: n=1,2,\dots\}$ τέτοια ώστε για κάθε

$$n=1,2,\dots, \quad x_n = \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2n+1}) \text{ και } \|x_{2n} - x_n\| = \|x_{2n+1} - x_n\| \geq \varepsilon.$$

Ορισμός : Ένα δέντρο μέσα στη B_X καλείται ε -Rademacher δέντρο όταν για

κάθε θετικό ακέραιο n , $x_n = \frac{1}{2} (x_{2n} + x_{2n+1})$ και $|| \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} (-1)^j x_j || \geq 2^n \varepsilon$, όπου

$\varepsilon > 0$.

Αν ο χώρος Banach X περιέχει άπειρο Rademacher δέντρο τότε ο X δεν έχει τη CCP.

Ο χώρος Banach Y είναι finitely representable στον X αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο W του Y υπάρχει ένας γραμμικός, 1-1 τελεστής $T: W \rightarrow T(W)$, όπου $T(W)$ υπόχωρος του X και ίδιας διάστασης με τον W , τέτοιος ώστε $||T|| ||T^{-1}|| \leq 1 + \varepsilon$.

Ορισμός : Ο χώρος X έχει την $\text{super}(p)$ ιδιότητα αν και μόνο αν για κάθε χώρο Y που είναι finitely representable στον X , έχω ότι ο Y έχει την p ιδιότητα.

Πρόταση: Ο χώρος X έχει την $\text{super}(\text{super}(p))$ ιδιότητα αν και μόνο αν έχει την $\text{super}(p)$.

Πρόταση: Ο χώρος X είναι super-reflexive αν και μόνο αν είναι super-Radon-Nikodym.

Η μελέτη αυτή, οδήγησε στο εξής θεώρημα. Η απόδειξη είναι παραλλαγή της απόδειξης του θεωρήματος του Pisier ([Bo] σελ.35):

Θεώρημα : Έστω ότι υπάρχει $\delta > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η B_X περιέχει ε -Rademacher δένδρα με n -επίπεδα. Τότε υπάρχει χώρος Y έτσι ώστε ο Y να είναι finitely representable στον X και η B_Y να περιέχει άπειρο Rademacher δέντρο. Συνεπώς ο X δεν έχει την super CCP.

Απόδειξη: Έστω Y ένας χώρος Banach ο οποίος είναι finitely representable στον X και περιέχει ένα φραγμένο ε -Rademacher δένδρο. Ένας τέτοιος χώρος δεν έχει την CCP και άρα ο X δεν έχει την superCCP. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε

$$\{x_j(n) : j=1, 2, \dots, 2^n-1\} \text{ μέσα στη } B_X \text{ έτσι ώστε } x_j(n) = \frac{1}{2} (x_{2j}(n) + x_{2j+1}(n))$$

$$\text{και } \left\| \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} (-1)^j x_j \right\| \geq 2^n \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \text{ για } n=0, 1, 2, \dots$$

Αν $r \in \mathbb{N}$ και $t_1, t_2, \dots, t_r$ είναι ρητοί αριθμοί, τότε η φραγμένη ακολουθία $\left\{ \left\| \sum_{j=1}^r t_j x_j(k) \right\| : k=1, 2, \dots \right\}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Στην πραγματικότητα, μπορεί να βρεθεί μια αύξουσα ακολουθία $\{k_n : n=1, 2, \dots\}$ θετικών ακεραιών τέτοια ώστε όποτε το $r \in \mathbb{N}$ και $t_1, t_2, \dots, t_r$ είναι ρητοί αριθμοί,

τότε το $\lim_n \left\| \sum_{j=1}^r t_j x_j(k_n) \right\|$ υπάρχει. Παρατηρούμε ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} x_{2j}(k_n) + \frac{1}{2} x_{2j+1}(k_n) - x_j(k_n) = 0 \text{ και } \left\| \sum_{j=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} (-1)^j x_j \right\| \geq 2^{k_n} \varepsilon \text{ για πολύ}$$

μεγάλα n .

Τώρα έστω $a_1, a_2, \dots$ μια ακολουθία συμβόλων και με Z συμβολίζουμε το

διανυσματικό χώρο των γραμμικά πεπερασμένων συνδυασμών των a_i . Για τους

ρητούς αριθμούς $t_1, t_2, \dots, t_r$ ορίζουμε το $\|\sum_{j=1}^r t_j a_j\|$ ως

$$\|\sum_{j=1}^r t_j a_j\| = \lim_n \|\sum_{j=1}^r t_j x_j(k_n)\|.$$

Από τη συνέχεια φαίνεται ότι το $\|\sum_{j=1}^r s_j a_j\|$ είναι μοναδικά ορισμένο για

$s_1, \dots, s_r \in \mathbb{R}$ ως το όριο των “rational approximations”. Τότε ο $(Z, \|\cdot\|)$ είναι ένας ημι-μετρικός χώρος και ο πραγματικός χώρος του πηλίκου

$\tilde{Z} \equiv Z / \{a \in Z : \|a\| = 0\}$ είναι ένας μετρικός χώρος για τον οποίο οι εξισώσεις

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tilde{a}_{2j} + \left(\frac{1}{2}\right) \tilde{a}_{2j+1} - \tilde{a}_j = 0 \text{ και οι ανισώσεις } \left\| \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} (-1)^j \tilde{a}_j \right\| \geq 2^n \varepsilon \text{ ισχύουν για}$$

κάθε $n = 0, 1, \dots$

Όσο $\|\tilde{a}_j\| = \lim_n \|x_j(k_n)\| \leq 1$, για κάθε j , ο $\tilde{Z}$ περιέχει ένα φραγμένο

ε -Rademacher δένδρο άρα και ο $Y \equiv$ συμπλήρωμα του $\tilde{Z}$. Συνεπώς ο χώρος Y

δεν έχει την CCP και απομένει να δείξουμε ότι ο $\tilde{Y}$ είναι finitely representable

στον X . Αρκεί να δείξουμε ότι ο $\tilde{Z}$ είναι finitely representable στον X . Αλλά κάθε

υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης περιέχεται στο linear span του $\{\tilde{a}_i : i \in F\}$ για

κάποιο πεπερασμένο σύνολο F . Αν το $\{\tilde{a}_i : i \in G\}$ είναι το μέγιστο ανεξάρτητο

γραμμικό υποσύνολο του $\{\tilde{a}_i : i \in F\}$ για $G \subset F$ τότε T_n : linear

$\text{span}(\{\tilde{a}_i : i \in F\}) \rightarrow X$ θα είναι η γραμμική απεικόνιση που προσδιορίζεται από τις συνθήκες $T_n(\tilde{a}_i) \equiv x_i(k_n)$ για $i \in G$. Τότε η T_n είναι καλά ορισμένο (τουλάχιστον για μεγάλα n) και αφού η T_n είναι 1-1 αν το n είναι μεγάλο και $\lim_n \|T_n\| \|T_n^{-1}\| = 1$, η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ισχύει όμως και το αντίστροφο του θεωρήματος: Αν ο χώρος X δεν έχει τη superCCP τότε υπάρχει χώρος Y που είναι finitely representable στον X και περιέχει ένα άπειρο Rademacher δέντρο που είναι και ε -Rademacher δέντρο.

Ορισμός: Έστω X ένας χώρος Banach. Ορίζουμε το σύνολο

$S = \{ (k, j) : k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq 2^{k-1} \}$ και για κάθε θετικό ακέραιο n , το σύνολο

$S_n = \{ (k, j) \in S : k \leq n \}$. Ο χώρος X λέμε ότι έχει την neighborly tree property

(NTP) αν και μόνο αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί ε και δ για τους οποίους ισχύει

ότι $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$ και η κλειστή μοναδιαία σφαίρα στο X περιέχει μία ακολουθία (T_n)

από πεπερασμένα δέντρα που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

1. Κάθε T_n είναι ορισμένο στο S_n
2. Κάθε T_n έχει διαχωρίσιμη σταθερά ε
3. Για κάθε (k, j) στο S , υπάρχει μία σφαίρα στο X ακτίνας δ που περιέχει το

$$\{ x_{k,j}^n : n \geq k \}, \text{ όπου } T_n(k, j) = x_{k,j}^n \text{ όταν } (k, j) \in S_n.$$

Ορισμός: Έστω K ένα κλειστό, φραγμένο, κυρτό υποσύνολο του χώρου Banach X .

Το K έχει την neighborly Rademacher tree property (NRTP) για το (δ, ε) αν για

$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$ υπάρχουν πεπερασμένα (κ, ε) Rademacher δέντρα $x_{k,j}^n$ για $n = 2, 3, \dots$

στο K και υπάρχει και κλειστή δ -σφαίρα στον X που περιέχουν κάθε $x_{k,j}^n$, για $n \geq k$.

Θεώρημα: Έστω K ένα ω^* -συμπαγές κυρτό υποσύνολο του δυϊκού χώρου W^* .

Αν το K έχει την Rademacher NTP, τότε θα περιέχει ένα ε -Rademacher δέντρο για κάποιο $\varepsilon > 0$, που σημαίνει ότι το K δεν έχει την CCP.

(Η απόδειξη είναι παραλλαγή του θεωρήματος του McCartney, ([Bo]) σελ.245)

Απόδειξη: Έστω ότι το K έχει την Rademacher NTP για (δ, ε) και έστω

$\{x_{k,j}^n : (k, j) \in S_n\}$, $n=2,3,\dots$ να είναι μια ακολουθία από πεπερασμένα

(n, ε) -Rademacher δέντρα στο K . Για κάθε $(k, j) \in S$ θέτουμε $U_{k,j}$ να είναι η τομή του K με μια κλειστή σφαίρα ακτίνας δ , που περιέχει τα $x_{k,j}^n$ για κάθε $n \geq k$.

Στο χώρο του γινομένου $P \equiv \{ \prod (U_{k,j}, weak^* : (k, j) \in S) \}$ θεωρούμε την ακολουθία

$\{f_n : n=1,2,\dots\}$ που είναι ορισμένη ως εξής:

$$f_n(k, j) \equiv \begin{cases} x_{k,j}^k & \text{αν } n < k \\ x_{k,j}^n & \text{αν } n \geq k \end{cases} \quad (k, j) \in S.$$

Έτσι για δοσμένο $(k, j) \in S$, η ακολουθία $\{f_n(k, j) : n=1,2,\dots\}$ είναι τελικά το (k, j)

στοιχείο του n -οστού πεπερασμένου Rademacher δέντρου. Αφού το P είναι

συμπαγές, η $\{f_n : n=1,2,\dots\}$ έχει ένα σημείο συσσώρευσης στο P και έστω ότι είναι

το f . Παρατηρούμε ότι όταν το $(k, j) \in S$ τότε

$$\left(\frac{1}{2}\right) f_n(k+1, 2j-1) + \left(\frac{1}{2}\right) f_n(k+1, 2j) = f_n(k, j), \text{ όταν } n > k \text{ και για το λόγο αυτό}$$

έχουμε ότι $f(k+1, 2j-1) + f(k+1, 2j) = f(k, j)$ για κάθε $(k, j) \in S$. Επίσης

$f(k+1, 2j-1) \in U_{k+1, 2j-1}$ και $f(k, j) \in U_{k, j}$, υποσύνολα του K με διάμετρο το

πολύ 2δ . Έτσι για κάθε n ,

$$\|f(k, 1) - f(k, 2) + \dots - f(k, 2^k)\| \geq \|f_n(k, 1) - f_n(k, 2) + \dots - f_n(k, 2^k)\| - \|f(k, 1) -$$

$$f(k, 2) + \dots - f_n(k, 1) + f_n(k, 2) - \dots + f_n(k, 2^k)\| \geq 2^k(\varepsilon - 4\delta) > 0. \text{ Έτσι με } x_{k, j} \equiv f(k, j)$$

για $(k, j) \in S$ έχουμε ότι

$\{x_{k, j} : (k, j) \in S\}$ είναι ένα $2^k(\varepsilon - 4\delta)$ Rademacher δέντρο, με τιμές στο K .

Θεώρημα: Ένας δυϊκός χώρος X^* έχει την NRTP αν και μόνο αν ο X^* περιέχει ένα

άπειρο rademacher δέντρο. (Παραλλαγή θεωρήματος του McCartney [Bo])

Απόδειξη: Έστω (B_n) μία ακολουθία από πεπερασμένα (κ, ε) Rademacher δέντρα

στον X^* με $\varepsilon > 0$ και $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$. Για κάθε $(k, j) \in S_n$, θα γράφουμε το $B_n(k, j)$ με

$f_n(k, j)$. Για κάθε $(k, j) \in S$ ορίζουμε σαν $B^{k, j}$ να είναι η κλειστή σφαίρα ακτίνας

δ με την ιδιότητα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $f_n(k, j)$ είναι μέσα στη σφαίρα

$B^{k, j}$ και σημειώνουμε το κέντρο της $B^{k, j}$ με $g^{k, j}$. Για κάθε $B^{k, j}$ δίνουμε τη σχετική

ω^* -τοπολογία, έτσι ώστε το τοπολογικό γινόμενο $Q = \prod_A B^{k, j}$ να είναι συμπαγές.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε ένα στοιχείο ω_n στο Q ως εξής:

$$\omega_n(k, j) = \begin{cases} f_n^{k, j} & \alpha \nu \ k \leq n \\ g^{k, j} & \alpha \nu \ k > n \end{cases}$$

Αφού το Q είναι μετρήσιμα συμπαγές, η ακολουθία (ω_n) έχει ένα σημείο

συσσώρευσης ω στο Q .

3. Dunford-Pettis και γινόμενα Riesz

Έστω X ένας χώρος Banach. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο χώρος X έχει την CCP (complete continuity property) αν κάθε τελεστής $T : L^1[0,1] \rightarrow X$ είναι Dunford-Pettis. Αν $K \subseteq X$ ένα κυρτό, κλειστό, φραγμένο υποσύνολο του X τότε το K έχει την CCP αν κάθε $T : L^1[0,1] \rightarrow X$ με $T(P) \subseteq K$ είναι Dunford-Pettis. Όπου το P συμβολίζει το σύνολο $\{\varphi \in L^1_+, \int \varphi d\lambda = 1\}$ την probability densities.

Αφού κάθε αναπαραστάσιμος τελεστής είναι Dunford-Pettis, έχουμε ότι αν το K έχει την RNP τότε συνεπάγεται ότι το K έχει και τη CCP. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. (για παράδειγμα αν $K = B_{JT^*}$, $K = B_{BR}$, η μοναδιαία σφαίρα του δυϊκού χώρου του James tree, ή αντίστοιχα η μοναδιαία σφαίρα του χώρου Bourgain-Rosenthal. ([B-R]).

Αν το $K \subseteq X$ δεν έχει την CCP τότε ([Bou],[W]) το K περιέχει ένα δ-δέντρο το οποίο μπορούμε να το κατασκευάσουμε να είναι και δ'-Rademacher δέντρο ([G]).

Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει σε κάθε σύνολο της μορφής $\sum_{i=1}^n \lambda_i S_i$ με $\lambda_i \geq 0$ και $\sum \lambda_i = 1$ όπου τα S_i είναι slices του K [P].

Είναι γνωστό ([D-U]) ότι ο τελεστής $T : L^1[0,1] \rightarrow X$ είναι Dunford-Pettis αν και μόνο

αν το martingale $\xi_n : [0,1] \rightarrow X$, όπου $\xi_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} T(h_{n,k}) h_{n,k}(t)$ με $h_{n,k} = \frac{X_{I_{n,k}}}{1/2^n}$,

$X_{I_{n,k}} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, $k = 0, 1, \dots, 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι Cauchy στη νόρμα του Pettis

([Bou],[D-U]). Αν $f \in L^1_X$ τότε η Pettis νόρμα της f , $\|f\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \int |x^* f| d\lambda$.

Αν το martingale ξ_n είναι Cauchy στη νόρμα του Pettis και το ξ_n δεν συγκλίνει σχεδόν παντού, τότε ο τελεστής $T : L^1[0,1] \rightarrow X$ με $T\varphi = \lim_n \int \xi_n(t)\varphi(t)dt$ είναι Dunford-Pettis και μη αναπαραστάσιμος. Τέτοιος τελεστής $T : L^1 \rightarrow X$ βρίσκεται για κάθε χώρο X που δεν έχει την RNP [Bou] ή σε κάθε σύνολο κυρτό, κλειστό και φραγμένο K που δεν έχει την RNP [W] (με $T(P) \subseteq K$).

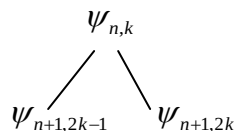
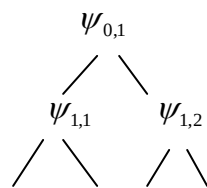
Χρησιμοποιώντας την ιδέα της απόδειξης του παραπάνω, παραθέτουμε μια κατασκευή συνεχών μέτρων που είναι singular: Έστω $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1[0,1]$ μία ασθενώς μηδενική ακολουθία στον L^1 με $\|r_n\|_\infty \leq 1$ (για παράδειγμα $r_n = \text{Rademacher}$).

Κατασκευάζουμε ένα δέντρο στον $L^1[0,1]$ ως εξής: $\psi_{0,1} = 1$, $\psi_{1,1} = 1(1 + \frac{1}{3}r_{n_1})$,

$\psi_{1,2} = 1(1 - \frac{1}{3}r_{n_1})$. Αν έχει κατασκευασθεί το $\psi_{n,k}$, ορίζουμε $\psi_{n+1,2k-1} = \psi_{n,k}(1 + \frac{1}{3}r_{n_k})$

και $\psi_{n+1,2k} = \psi_{n,k}(1 - \frac{1}{3}r_{n_k})$. Η ακολουθία (r_{n_k}) μπορεί να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο

(βλέπε [Bou]) έτσι ώστε το δέντρο $(\psi_{n,k})$ να ορίζει Dunford- Pettis τελεστή.



$$\|\xi_{n+1} - \xi_n\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k=1}^{2^n} |x^*(d_{n,k})| = \sup_{\|g\|_{L^\infty} \leq 1} \sum_{k=1}^{2^n} | \langle g, \psi_{n+1,2k-1} - \psi_{n+1,2k} \rangle | =$$

$$\sup_{\|g\|_{L^\infty} \leq 1} \sum_{k=1}^{2^n} | \langle g \psi_{n,k}, r_{n_k} \rangle | \leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad (\text{όπου } d_{n,k} = \psi_{n+1,2k-1} - \psi_{n+1,2k} = r_n \psi_{n,k}).$$

Το $\omega^* \lim \xi_n(x) = \mu_x$ υπάρχει σχεδόν παντού και ο στοχαστικός πυρήνας $x \mapsto \mu_x$ αναπαριστά τον $T^*: L^\infty \rightarrow L^\infty$ με την έννοια $T^* f(x) = \int f d\mu_x$, σχεδόν παντού, για κάθε $f \in L^\infty$ ([Wei]). Επίσης από [Wei] έχουμε ότι αν ο T είναι Dunford-Pettis τότε τα $\{\mu_x\}$ είναι συνεχή μέτρα σχεδόν παντού. Επειδή όμως το δέντρο $(\psi_{n,k})$ είναι δ-δέντρο, $\|\psi_{n+1,2k-1} - \psi_{n+1,2k}\| = \|\psi_{n,k} r_{n_k}\| = \|\psi_{n,k}\| \approx 1$, ο τελεστής $T: L^1 \rightarrow L^1$ είναι μη αναπαραστάσιμος που συνεπάγεται ότι το μ_x είναι singular ως προς το μέτρο Lebesgue λ ([Wei]). Παρατηρούμε ότι $\mu_x = \omega^* - \prod_{i=1}^{\infty} (1 \pm \frac{1}{3} r_{n_i})$ (ένα είδος Riesz γινομένου) συνεχές και singular μέτρο.

Τελικές Παρατηρήσεις

Στη μελέτη αυτή βρήκαμε γεωμετρικό χαρακτηρισμό για την superCCP. Είναι γνωστό ([G-J]) ότι ο χώρος έχει την superCCP αν και μόνο αν ο χώρος έχει Rademacher τύπο.

Ορισμός : Ένας χώρος X έχει Rademacher τύπο p , αν για $1 \leq p \leq 2$ υπάρχει

σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $\{x_i\}_{i=1}^n$ στο X , $(E \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq c(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Είναι γνωστό ότι υπάρχει χώρος τύπου 2 που δεν είναι reflexive (James, Israel 78).

Συνεπώς έχουμε ότι υπάρχει χώρος με την superCCP ιδιότητα που δεν έχει την superRNP ιδιότητα. Η λεπτή διαφορά των 2 εννοιών (superRNP και superCCP) φαίνεται από τα παρακάτω σημεία([A-K]):

1. Ένας χώρος X είναι super reflexive συνεπώς έχει και την superRNP αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $N = N(\varepsilon)$ έτσι ώστε αν $x_j \in B_X$, με $1 \leq j \leq N$ τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n , με $1 \leq n \leq N$ και $y \in co\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $z \in co\{x_{n+1}, \dots, x_N\}$ με $\|y - z\| < \varepsilon$.
2. Ένας χώρος X έχει μη τετριμμένο τύπο ($1 < p \leq 2$) άρα έχει και την superCCP αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $N = N(\varepsilon)$ έτσι ώστε αν $x_j \in B_X$, $1 \leq j \leq N$, με $\|x_j\| = 1$ υπάρχει $A \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ και $y \in co\{x_j\}_{j \in A}$, $z \in co\{x_j\}_{j \notin A}$ με $\|y - z\| < \varepsilon$.

Θεώρημα ([D-J-T]) : Έστω X κλειστός υπόχωρος του $L^1(\mu)$ (όπου μ πεπερασμένο μέτρο). Ο X έχει τύπο $p > 1$ αν και μόνο αν ο X είναι ισομορφικός με έναν υπόχωρο του $L^r(\nu)$, $1 < r \leq 2$ και το ν μέτρο πιθανότητας.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, αποδεικνύουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση: Ο χώρος BR (Bourgain-Rosenthal) έχει την CCP αλλά δεν έχει την superCCP.

Απόδειξη: Ο χώρος BR είναι υπόχωρος του $L^1[0,1]$ που δεν έχει την RNP αλλά δεν περιέχει δυαδικά δέντρα ([B-R]). Είναι γνωστό ([Bou]) ότι αν ο X δεν έχει την CCP τότε η B_X περιέχει ένα δυαδικό δ-δέντρο. Άρα ο χώρος BR έχει την CCP. Αν είχε την superCCP τότε θα είχε τύπο $p > 1$ και από το παραπάνω θεώρημα θα ήταν αυτοπαθής. Άτοπο.

Τελειώνουμε τώρα, με μια ερώτηση:

Υπάρχει χώρος με την CCP που δεν εμφυτεύεται σε δυϊκό χώρο X^* με $l_1 \not\hookrightarrow X$;

Πιστεύουμε ότι ένας χώρος αντίστοιχος με τον χώρο των McCartney- O'Brien (ο χώρος αυτός έχει την RNP και δεν εμφυτεύεται σε διαχωρίσιμο δυϊκό) είναι πιθανό να μην εμφυτεύεται σε δυϊκό χώρο X^* με $l_1 \not\hookrightarrow X$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [A-K]** F. Albiac and N. Kalton, Topics in Banach space theory Springer, (2006).
- [Bo]** Richard D. Bourgin, Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property, Springer-Verlag, (1983).
- [Bou]** J. Bourgain, Dunford-Pettis operators on L^1 and the Radon - Nikodym property, Israel J.Math.37, (1980), p.34-37.
- [B-L]** Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, Geometric Nonlinear Functional Analysis, Vol 48, Colloquium Publications, Amer. Math. Soc. (2000).
- [B-M]** R.C. O'Brien and P.W. McCartney, A separable Banach space With the Radon-Nikodym property that is not isomorphic to a Subspace of a separable dual, Proc. Amer. Math. (1980), P.40-42.
- [B-R]** J. Bourgain and H. P. Rosenthal, Martingales valued in certain Subspaces of L^1 , Israel J. Math. , (1980a).
- [D]** J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces, Springer-Verlag, (1984).
- [D-J-T]** J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely summing operators, Cambridge University Press ,(1995), p.224.

- [D-S]** N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear operators Part I : General Theory, Interscience Publishers, Inc., New York, (1958).
- [D-U]** J. Diestel and J.J. Uhl, Jr. Vector measures, Math. Surveys 15, Amer.Math.Soc, (1977).
- [G]** M.K. Girardi, Dunford-Pettis operators on L^1 and the complete Continuity property, University of Illinois at Urbana Champaign,(1990).
- [G-J]** M.K. Girardi and W.B. Johnson, Universal non-completely Continuous operators, Israel J. Math, (1997), p. 207-219. (2000).
- [McC]** P.W. McCartney, Neighborly bushes and the Radon-Nikodym Property for Banach spaces, Pacific J. Math. (1980) , p.157-168.
- [P]** M. Petrakis, Ultra filter over $\mathbb{N}$ and operators on L^1 , Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol26, Number 2, Springer 1996, p. 707-717.
- [S]** C. Stegall, The Radon-Nikodym Property in conjugate Banach Spaces, Trans. Amer. Soc., **206**, (1975),p.213-223.
- [Wei]** L. Weis, on the representation of order continuous operators By Random measures, Transaction of AMS, (1984).
- [W]** A. Wessel, Some remarks on Dunford-Pettis operators, Strong regularity and the RNP, Seminaire d'analyse Fonctionnelle 1985/1986/1987 Paris VI-VII Publications Mathematiques de l'Universite Paros VII, Paris.