

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΟΓΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΡΗΧΩΝ ΥΔΑΤΩΝ

ΚΟΚΚΙΝΑΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Επιβλέπων : Επίκουρος Καθηγητής **Ανάργυρος Ι. Δελής**

ΧΑΝΙΑ , 2010

Η διατριβή αυτή εξετάστηκε επιτυχώς από την παρακάτω Τριμελή Επιτροπή

- Επικ. Καθηγητή Ανάργυρο Δελή ως επιβλέπων
- Καθηγητή Ιωάννη Σαριδακή
- Επικ. Καθηγητή Εμμανουήλ Μαθιουδάκη

Η οποία ορίστηκε κατά την 6^η /23.10.2008 συνεδρίαση της Γενικής Συνέλευσης Ειδικής Σύθεσης του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	5
2	Εξισώσεις Ρηχών Υδάτων στην μια διάσταση	7
2.1	Εξισώσεις	7
2.1.1	Διατήρηση μάζας	7
2.1.2	Διατήρηση ορμής	9
2.1.3	Ιδιότητες των εξισώσεων	10
3	Αριθμητικά σχήματα σε μία χωρική διάσταση	13
3.1	Έμμεσα ή άμεσα TVD σχήματα	13
3.2	Παραγωγή Έμμεσου Αριθμητικού Σχήματος	14
3.3	Μέθοδος Godunov	16
3.3.1	Πηγαίος όρος	20
3.4	Υψηλής ανάλυσης σχήμα	22
3.4.1	Flux-Limiting	22
3.4.2	Slope-Limiting	24
3.5	Έμμεσο σχήμα επίλυσης των εξισώσεων ρηχών υδάτων στην μία διάσταση	28
3.5.1	Αριθμητικό σχήμα	28
3.5.2	Γραμμικοποίηση	29
3.6	Αριθμητικά αποτελέσματα στη μία διάσταση	32
3.6.1	Κατάρευση φράγματος	32
3.6.2	Ροή σταθερής ταχύτητας	34
3.6.3	Στάσιμη κατάσταση	34
3.6.4	Υποκρίσιμη ροή	39
3.6.5	Transcritical ροή χωρίς Shock	43
3.6.6	Transcritical ροή με Shock	46
3.6.7	Διάδοση κύματος	46
4	Επέκταση των εξισώσεων ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις	51
4.1	Προσεγγιστικός επιλυτής Riemann του Roe σε 2Δ	52
4.2	Έμμεσο αριθμητικό σχήμα στις δύο διαστάσεις	56
4.3	Υψηλής ανάλυσης έμμεσο αριθμητικό σχήμα	57
4.4	Γραμμικοποίηση	59
4.4.1	Block Τριδιαγώνιος Αλγόριθμος (<i>Thomas Algorithm</i>)	62
4.5	Αριθμητικά αποτελέσματα στις δύο διαστάσεις	63

4.5.1	Στάσιμες καταστάσεις	63
4.5.2	Υποκρίσιμη ροή	63
4.5.3	Transcritical ροή με Shock	66
4.5.4	Transcritical ροή χωρίς Shock	68
4.5.5	Διάδοση κύματος σε τοπογραφία	70
4.5.6	Κατάρευση κυκλικού φράγματος	70
5	Συμπεράσματα	79
A'	Συνοριακές συνθήκες	85
A'.1	Ελεύθερης ροής	85
A'.2	Υποκρίσιμη ροή	85

Ευχαριστίες

Κλείνοντας ακόμη έναν κύκλο, αυτόν της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, θεωρώ χρέος μου να εκφράσω και εντύπως τις ευχαριστίες μου, σε όλους εκείνους που συνέβαλαν στη δημιουργία και ολοκλήρωσή της.

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή, κ. Ανάργυρο Ι. Δελή, ο οποίος ως επιβλέπων της παρούσας, υπήρξε καταλυτικός παράγοντας τόσο για την επιστημονική καθοδήγηση, όσο και για την ηθική υποστήριξη που μου παρείχε.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ και τον Διευθυντή του Εργαστηρίου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Η/Υ του Πολυτεχνείου Κρήτης, Καθηγητή κ. Ιωάννη Σαριδάκη, για την παραχώρηση της πρόσβασης στα υπολογιστικά συστήματα του Εργαστηρίου καθώς και για την τιμή που μου έκανε συμμετέχοντας στην τριμελή επιτροπή

Θερμές ευχαριστίες οφείλω και στον Επίκουρο Καθηγητή κ. Εμμανουήλ Μαθιουδάκη για την συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές του.

Θα ήταν παράλειψη μου να μην αναφέρω τους καθηγητές μου στο Πανεπιστήμιο Κρήτης. Τον Ομότιμο Καθηγητή κ. Απόστολο Χατζηδήμο και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Παναγιώτη Χατζηπαντελίδη, οι οποίοι απετέλεσαν το εφαλτήριο για την ενασχόληση μου με τα υπολογιστικά μαθηματικά.

Ακόμη, ευχαριστώ τους συνεργάτες του εργαστηρίου, τον Ι.Δ.Α.Χ. Δρ Αναστάση Σηφαλάκη, την Ι.Δ.Α.Χ. και Υποψήφια Διδάκτορα κ. Μαριάννα Παπαδομανωλάκη, τον ΕΕ.ΔΙ.Π. Δρ Νικόλαο Σπανουδάκη και την Υποψήφια Διδάκτορα κ. Μαρία Καζολέα για τις συμβουλές τους και την ηθική υποστήριξη που αφειδώλευτα μου παρείχαν. Τέλος, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, για όλα τα πνευματικά, υλικά και ηθικά αγαθά που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι ροές ελεύθερης επιφάνειας καθώς και οι ροές σε ανοιχτούς αγωγούς εμφανίζονται σε πολλούς τομείς πρακτικού και επιστημονικού ενδιαφέροντος όπως στην θαλάσσια και παράκτια μηχανική, κατάρρευση φραγμάτων, πλημμύρες, μεταφορά ρύπων, ροή ποταμών και διάδοση μακρών κυματισμών. Σε πολλές περιπτώσεις τέτοιες ροές (κάτω από κάποιες παραδοχές-απλοποιήσεις) μπορούν να μοντελοποιηθούν ικανοποιητικά από ένα σύνολο μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου γνωστές και ως εξισώσεις ρηχών υδάτων, οι οποίες προέρχονται από τις εξισώσεις Navier-Stokes [31],[24] θεωρώντας ότι η καμπυλότητα του νερού είναι μεγάλη σε σχέση με το βάθος του. Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων λόγω της υπερβολικότητας τους επιδέχονται ασυνεχείς λύσεις οι οποίες ονομάζονται κρουστικά κύματα και είναι δύσκολο να υπολογιστούν με ακρίβεια χωρίς την χρήση μίας Shock-capturing αριθμητικής μεθόδου. Είναι γνωστό [32] ότι για τον σωστό υπολογισμό τους πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια συντηρητική αριθμητική μέθοδος, δηλαδή μια μέθοδος η οποία θα διατηρεί ποσότητες όπως η μάζα η ορμή και η ενέργεια. Αν χρησιμοποιείται μια μη συντηρητική μέθοδος, τότε θα υπολογιστεί λάθος λύση εάν αυτή η λύση περιέχει κρουστικό κύμα [33]. Πολλά κλασικά έμμεσα σχήματα πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιούνται στην βιομηχανία, όπως το Preissman σχήμα, βλέπετε για παράδειγμα Cunge και άλλοι [34], τα οποία είναι ανακριβή στην μοντελοποίηση ροής με ασυνέχειες. Είναι απομένως επιθυμητή η ανάπτυξη μαθηματικών-υπολογιστικών μοντέλων τα οποία είναι εύκολα υλοποιήσιμα, είναι συντηρητικά, χειρίζονται σωστά την γεωμετρία του πυθμένα και υπολογίζουν με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια τις ασυνέχειες.

Η προσέγγιση των Bermudez και Vazquez [25] υπήρξε σημαντική στις περιπτώσεις υπέρβαρης γεωμετρικών πηγαίων όρων. Οι παραπάνω, ανέπτυξαν ένα πρώτης τάξης αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων όγκων για την προσομοίωση της ροής σε ανοιχτούς αγωγούς, το οποίο ήταν ικανό να διατηρεί την ισορροπία ανάμεσα στην προσέγγιση του πηγαίου όρου και της αριθμητικής ροής. Βασισμένοι σε αυτήν την προσέγγιση, οι Hubbard και Garcia-Navarro [5] επέκτειναν το δεύτερης τάξης αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων όγκων με οριοθέτες ροής και κλίσης στις εξισώσεις ρηχών υδάτων. Στην συνέχεια οι Burguette και Garcia-Navarro [27] ανέπτυξαν άμεσα αριθμητικά σχήματα για ροές σε ανοιχτούς αγωγούς για κανάλια με γενική γεωμετρία χωρίς όμως να αναφερθούν στην ισορροπία ανάμεσα στην προσέγγιση των αριθμητικών ροών και του πηγαίου όρου. Αυτό πραγματοποιήθηκε από τους Vuković και Sopta [28] οι οποίοι ανέπτυξαν πρώτης και δεύτερης τάξης άμεσα αριθμητικά σχήματα με οριοθέτηση ροής. Οι Chinnayya και άλλοι [29] βασιζόμενοι στις ακριβείς λύσεις Riemann-

η [30] ανέπτυξαν ένα αριθμητικό σχήμα για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων με τοπογραφία το οποίο διατηρεί την ισορροπία ανάμεσα στις αριθμητικές ροές και την προσέγγιση του πηγαίου όρου.

Τα άμεσα σχήματα μείωσης ολικής κύμανσης (TVD) προτάθηκαν αρχικά από τον Harten για την επίλυση των εξισώσεων Euler. Η κύρια ιδιότητά τους είναι η δεύτερης τάξης χωρική ακρίβεια και η μη εμφάνιση αριθμητικών ταλαντώσεων κατά μήκος των ασυνεχειών. Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές η αποδοτικότητα του αλγορίθμου παίζει σπουδαίο ρόλο κυρίως, όταν υπάρχει περιορισμένη υπολογιστική ισχύς. Για παράδειγμα κατά την προσομοίωση μακράς διάρκειας πλημμύρων ή προβλήματα βελτιστοποίησης. Είναι γνωστό ότι τα άμεσα TVD αριθμητικά σχήματα υπόκεινται στον περιορισμό του χρονικού βήματος από την Courant-Friedrichs-Lewy συνθήκη ($CFL < 1$). Για την χαλάρωση της παραπάνω συνθήκης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έμμεσα αριθμητικά σχήματα. Σε αυτήν την περίπτωση οι μεταβλητές υπολογίζονται ταυτόχρονα στο καινούριο χρονικό επίπεδο από την λύση ενός συστήματος το οποίο έχει τόσους αγνώστους όσα είναι και τα σημεία στα οποία διακρίτοποιούμε το χωρίο εφαρμογής του προβλήματος. Για μη γραμμικά προβλήματα όπως είναι οι εξισώσεις ρηχών υδάτων, το παραγόμενο σύστημα είναι και αυτό μη γραμμικό και λύνεται γραμμικοποιώντας το ή χρησιμοποιώντας μία επαναληπτική μέθοδο. Αυτό βέβαια απαιτεί επιπρόσθετη υπολογιστική ισχύ το οποίο όμως αντισταθμίζεται από το γεγονός ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερες τιμές για τον αριθμό CFL. Όσο μεγαλύτερο χρονικό βήμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τόσο λιγότερες επαναλήψεις χρειαζόμαστε για να φτάσουμε στο επιθυμητό χρονικό επίπεδο. Αρχικά η ανάπτυξη έμμεσων upwind μεθόδων για την επίλυση υπερβολικών συστημάτων επικεντρώθηκε στην λύση στάσιμων καταστάσεων. Τα έμμεσα TVD σχήματα έχει αποδειχθεί από τους Yee και άλλους [10] ότι είναι ευσταθή άνευ συνθήκης ακόμα και στην περίπτωση γραμμικοποίησης των εξισώσεων. Στην συνέχεια, ακολουθώντας την δουλειά της Yee [8],[10], Alcrudo και άλλοι [11] επέκτειναν το έμμεσο αριθμητικό σχήμα στο σύστημα των εξισώσεων ρηχών υδάτων για μη στάσιμα προβλήματα σε πρισματικά κανάλια με πηγαίους όρους. Τέλος, οι Delis [19] και άλλοι εφάρμοσαν τα έμμεσα σχήματα σε ροές σε ανοιχτούς αγωγούς.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή και υλοποίηση έμμεσων υψηλής ανάλυσης Shock-Capturing TVD αριθμητικών σχημάτων με τύπου upwind διακριτοποίηση του πηγαίου όρου βασισμένα στον προσεγγιστικό επιπλυτή Riemann του Roe για τον υπολογισμό στάσιμων και μη στάσιμων καταστάσεων σε δομημένα υπολογιστικά πλέγματα σε μία και δύο διαστάσεις με οριοθέτες ροής και οριοθέτες κλίσης.

Η οργάνωση της εργασίας έχει ως εξής: Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο του μαθηματικού μοντέλου των εξισώσεων ρηχών υδάτων στη μία διάσταση. Στο τρίτο κεφάλαιο παρατίθεται το υψηλής ανάλυσης έμμεσο TVD αριθμητικό σχήμα με οριοθέτηση ροής και οριοθέτηση κλίσης, η διακριτοποίηση που εφαρμόζεται στους πηγαίους όρους, καθώς και αριθμητικά αποτελέσματα σε μία διάσταση. Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η επέκταση των εξισώσεων και του αριθμητικού σχήματος στις δύο διαστάσεις μαζί με τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 2

Εξισώσεις Ρηχών Υδάτων στην μια διάσταση

2.1 Εξισώσεις

Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων γνωστές και ως εξισώσεις Saint Venant αποτελούν ένα υπερβολικό σύστημα μη γραμμικών νόμων διατήρησης με πηγαίους όρους που περιγράφουν την χρονική μεταβολή του βάθους του ρευστού (νερού) και της οριζόντιας ορμής του, εκφρασμένες ως μέσες τιμές, κάτω από την επίδραση της βαρύτητας.

Μπορούν να παραχθούν είτε από την ολοκλήρωση των εξισώσεων Navier-Stokes κατά μήκος της απόστασης της ελεύθερης επιφάνειας του νερού από τον πυθμένα στην περίπτωση όπου το μήκος της οριζόντιας διάστασης είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το μήκος της κατακόρυφης, είτε από τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και διατήρησης της ορμής, θεωρώντας ότι η κατακόρυφη ταχύτητα του ρευστού είναι αμελητέα και ότι η πίεση που ασκείται είναι υδροστατική.

2.1.1 Διατήρηση μάζας

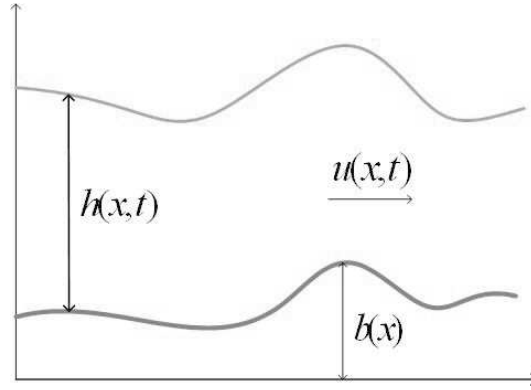
Αρχικά θεωρούμε ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, δηλαδή ότι η πυκνότητα ρ είναι σταθερή, ενώ επιτρέπουμε αυξομειώσεις στο βάθος h του ρευστού. Τότε για έναν όγκο ελέγχου $dV = [x_1, x_2]$ έχουμε ότι,

ο ρυθμός μεταβολής της μάζας του ρευστού είναι ίσος με τον όγκο της ροής που διέρχεται από τον όγκο ελέγχου dV .

Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας του ρευστού στον όγκο ελέγχου dV στο χρόνο t είναι

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t) dx. \quad (2.1)$$

Στην συνέχεια για να βρούμε τον όγκο της ροής ολοκληρώνουμε την πυκνότητα της ορμής κατά μήκος του βάθους



Σχήμα 2.1: Ροή ρευστού σε μονοδιάστατο κανάλι υπό την επίδραση της βαρύτητας.

$$\int_{b(x)}^{h(x,t)+b(x)} \rho u(x, t) dy = \rho u(x, t) \int_{b(x)}^{h(x,t)+b(x)} dy = \rho u(x, t) h(x, t), \quad (2.2)$$

όπου $b(x)$ συνάρτηση που περιγράφει την τοπογραφία του πυθμένα. Επομένως ο όγκος ροής που διέρχεται από τα σύνορα x_1 και x_2 του όγκου ελέγχου dV θα είναι $(\rho u h)|_{x_1}$ και $(\rho u h)|_{x_2}$ αντίστοιχα. Άρα από τις εξισώσεις (2.1) και (2.2) έχουμε ότι η ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας θα είναι:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (u h) dx. \quad (2.3)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.3) ως προς τον χρόνο έχουμε ότι

$$\int_t^{t+\delta t} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} dx dt = 0 \quad (2.4)$$

και αφού η (2.4) ισχύει για τυχαίο όγκο ελέγχου έχουμε ότι η αντίστοιχη διαφορική μορφή του νόμου *διατήρησης της μάζας* θα είναι

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0. \quad (2.5)$$

2.1.2 Διατήρηση ορμής

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον όγκο ελέγχου dV έχουμε ότι θα πρέπει

ο ρυθμός μεταβολής της ορμής να είναι ίσος με την εφαρμόσιμη δύναμη,

ως προς την κατεύθυνση x η οποία θα είναι το άθροισμα της δύναμης που αναπτύσσεται λόγω της πίεσης που εφαρμόζεται στα μέτωπα x_1 και x_2 του όγκου ελέγχου και της δύναμης που αναπτύσσεται από την πίεση που δημιουργεί ο πυθμένας.

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η ολική παράγωγος της ταχύτητας

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_h^{h+b} \rho u dy dx &= \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_h^{h+b} \rho u dy dx + \int_{x_1}^{x_2} \int_h^{h+b} \rho \frac{\partial u}{\partial x} dy dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h u dx + (\rho h u^2)|_{x_2} - (\rho h u^2)|_{x_1}. \end{aligned}$$

η δύναμη της πίεσης από τα μέτωπα είναι:

$$g \left[\int_b^{h+b} \rho (y - h - b) dy \right]_{x_1}^{x_2} = \left[-\frac{1}{2} g \rho h^2 \right]_{x_1}^{x_2},$$

η δύναμη της πίεσης από τον πυθμένα είναι :

$$-g \int_{x_1}^{x_2} \rho h \frac{db}{dx} dx,$$

άρα η συνολική δύναμη που εφαρμόζεται στην κατεύθυνση του x είναι:

$$\left[-\frac{1}{2} g \rho h^2 \right]_{x_1}^{x_2} - g \int_{x_1}^{x_2} \rho h \frac{db}{dx} dx,$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Επομένως η ολοκληρωτική μορφή διατήρησης της ορμής έχει την μορφή

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h u dx + (h u^2)_{x_2} - (h u^2)_{x_1} = \left[-\frac{1}{2} g h^2 \right]_{x_1}^{x_2} \quad (2.6)$$

και υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις $h(x, t)$ και $u(x, t)$ είναι παραγωγίσιμες έχουμε για την διαφορική μορφή της διατήρησης της ορμής

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} = -gh \frac{db(x)}{dx}. \quad (2.7)$$

Από τις (2.5) και (2.7) συνολικά μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{q}(x, t) dx + \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_2, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_1, t)) = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{G} dx, \quad (2.8)$$

για την ολοκληρωτική μορφή και

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} = \mathbf{G} \quad (2.9)$$

για την διαφορική. Λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη της τριβής το σύστημα (2.9) παίρνει την μορφή

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} = \mathbf{G} + \mathbf{S} \quad (2.10)$$

όπου

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{db(x)}{dx} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_f \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

με S_f να αναπαριστά την δύναμη της τριβής και μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εμπειρική σχέση

$$S_f = n_m^2 \frac{u|u|}{h^{4/3}} \quad (2.12)$$

όπου n_m είναι ο συντελεστής του Manning.

2.1.3 Ιδιότητες των εξισώσεων

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

με πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u + c \quad (2.14)$$

και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Με $c = \sqrt{gh}$ συμβολίζουμε την σχετική ταχύτητα κύματος-ρευστού, εάν $h > 0$ το σύστημα είναι αυστηρά υπερβολικό και ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται ως εξής

$$\mathbf{R}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

όπου ο $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ περιέχει τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{J}(\mathbf{q})$.

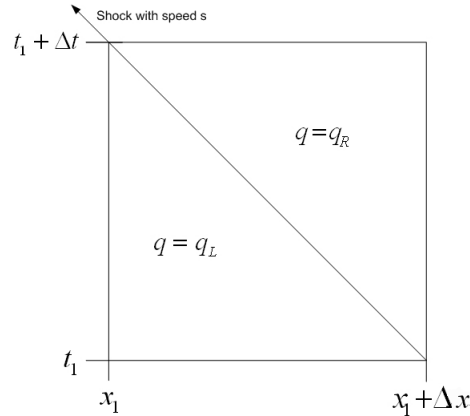
Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση του μαθηματικού μοντέλου των εξισώσεων ριγών υδάτων στη μία διάσταση θα ορίσουμε τον αριθμό Froude ο οποίος περιγράφει την ροή και ορίζεται ως ο λόγος της ταχύτητας της ροής u προς την σχετική ταχύτητα κύματος-ρευστού c :

$$Fr = \frac{|u|}{c}.$$

Όταν $Fr > 1$ η ροή ονομάζεται υπερκρίσιμη. Οι δυνάμεις αδράνειας υπερिσχύουν αυτών της βαρύτητας, οι ιδιοτιμές έχουν πάντα το ίδιο πρόσημο και κατά συνέπεια η φυσική πληροφορία διαδίδεται προς μία κατεύθυνση. Όταν $Fr < 1$ η ροή ονομάζεται υποκρίσιμη. Οι δυνάμεις αδράνειας υπολείπονται αυτών της βαρύτητας, η ιδιοτιμή $\lambda_1 = u - c$ είναι αρνητική και η ιδιοτιμή $\lambda_2 = u + c$ λαμβάνει οποιοδήποτε πρόσημο με αποτέλεσμα η φυσική πληροφορία να διαδίδεται και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό των παραπάνω μη γραμμικών νόμων διατήρησης είναι ότι ακόμα και στην περίπτωση που τα αρχικά δεδομένα είναι ομαλά, ασυνέχειες μπορεί να εμφανιστούν σε κάποια χρονική στιγμή. Επομένως η διαφορική μορφή (2.9) παύει να ισχύει. Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι η (2.9) είχε εξαχθεί από την ολοκληρωτική μορφή των νόμων διατήρησης θεωρώντας ότι οι συναρτήσεις h, u είναι ομαλές. Καθώς η λύση εξελίσσεται το Shock θα διαδίδεται με κάποια μεταβλητή ταχύτητα $s(t)$, για να την υπολογίσουμε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιο θεμελιώδη μορφή του νόμου διατήρησης, την ολοκληρωτική.

Έστω ότι το Shock κινείται όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2, όπου έχουμε εστιάσει σε ένα



Σχήμα 2.2: Η συνθήκη Rankine-Hugoniot.

μικρό χρονικό διάστημα $[t_1, t_1 + \Delta t]$ με την ταχύτητα διάδοσης του Shock να είναι ουσιαστικά σταθερή. Τότε το ορθογώνιο $[x_1, x_1 + \Delta x] \times [t_1, t_1 + \Delta t]$ χωρίζεται σε δύο τρίγωνα σε καθένα από τα οποία η ποσότητα q είναι σταθερή με τιμές q_L, q_R . Εφαρμόζοντας την ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης (2.6) έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} q(x, t_1 + \Delta t) dx - \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} q(x, t_1) dx = \\ & \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} f(q(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} f(q(x_1 + \Delta x, t)) dt \end{aligned}$$

και εφόσον η q είναι ουσιαστικά σταθερή κατά μήκος κάθε ακμής η παραπάνω εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\Delta x q_R - \Delta x q_L = \Delta t f(q_L) - \Delta t f(q_R) + O(\Delta t^2). \quad (2.17)$$

Αν η ταχύτητα του shock είναι s , τότε $\Delta x = -s\Delta t$ για ($s < 0$). Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση διαιρώντας με $-\Delta t$ και παίρνοντας $\Delta t \rightarrow 0$ λαμβάνουμε τη συνθήκη

$$s(q_R - q_L) = f(q_R) - f(q_L) \quad (2.18)$$

η οποία ονομάζεται συνθήκη **Rankine - Hugoniot**. Στην περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος με σταθερούς συντελεστές, όπου $f(q) = Aq$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$A(q_R - q_L) = s(q_R - q_L) \quad (2.19)$$

το οποίο σημαίνει ότι το $q_R - q_L$ θα πρέπει να είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A . Σε αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα διάδοσης s της ασυνέχειας θα είναι ίση με την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικά σχήματα σε μία χωρική διάσταση

3.1 Έμμεσα ή άμεσα TVD σχήματα

Ο υπολογισμός λύσεων οι οποίες περιέχουν ασυνέχειες, βλέπετε αναφορά πριν, όπως υδραυλικά άλματα και μετωπικά κύματα, θέτουν κάποιους περιορισμούς σχετικά με το αριθμητικό σχήμα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση των εξισώσεων. Η αριθμητική μέθοδος θα πρέπει να χειρίζεται κατάλληλα την εμφάνιση αυτών των ασυνεχειών, υπολογίζοντας σωστά την θέση και την ταχύτητα τους. Τέλος μια απλή και φυσική απαίτηση την οποία πρέπει να θέσουμε στο αριθμητικό σχήμα έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε ότι η αριθμητική λύση δεν συγκλίνει σε μη αποδεκτή λύση είναι, το αριθμητικό σχήμα να είναι σε συντηρητική μορφή [24]. Τα σχήματα μείωσης ολικής κύμανσης (TVD) προτάθηκαν αρχικά από τον Harten [2] για την επίλυση των εξισώσεων Euler. Η βασική ιδιότητα των δεύτερης τάξης TVD σχημάτων είναι η μη εμφάνιση ταλαντώσεων κατα μήκος των ασυνεχειών. Μερικά από τα πλεονεκτήματα των άμεσων υψηλής ανάλυσης TVD σχημάτων προέρχονται από την απλότητα κατασκευής της λύσης, το βασικό τους όμως μειονέκτημα έγκειται στο γεγονός του περιορισμού της επιλογής του χρονικού βήματος από τον αριθμό CFL (Courant, Friedrichs και Lewy [17]). Για να μπορέσουμε να απαλλαγούμε από τον παραπάνω περιορισμό μπορούμε να καταφύγουμε στην δημιουργία έμμεσων TVD σχημάτων. Για μη γραμμικά προβλήματα το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει είναι και αυτό μη γραμμικό. Για την επίλυση του μπορούμε είτε να το γραμμικοποιήσουμε είτε να χρησιμοποιήσουμε μια επαναληπτική μέθοδο, όπου στην περίπτωση της τελευταίας επιλογής το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται σε κάθε χρονική επανάληψη της μεθόδου. Έτσι όμως έχουμε την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερες τιμές για τον αριθμό CFL με αποτέλεσμα να αυξάνεται το χρονικό βήμα και η μέθοδος να γίνεται υπολογιστικά πιο οικονομική, ιδιαίτερα για προβλήματα στάσιμων καταστάσεων (Steady-State). Όσο μεγαλύτερο είναι το χρονικό βήμα τόσο λιγότερες επαναλήψεις χρειαζόμαστε για να φτάσουμε στο επιθυμητό χρονικό επίπεδο. Τα έμμεσα υψηλής ανάλυσης TVD σχήματα έχει αποδειχτεί ότι είναι *unconditionally stable* για στάσιμες καταστάσεις, μόνιμης στάσιμης κατάστασης ακόμα και στην περίπτωση γραμμικοποίησης των εξισώσεων, Yee και άλλοι [18].

3.2 Παραγωγή Έμμεσου Αριθμητικού Σχήματος

Το πρώτο σημείο το οποίο κάνει την μέθοδο Godunov ελκυστική από αριθμητική σκοπιά είναι ότι η μέση τιμή της ακριβούς λύσης σε κάθε υπολογιστικό κελί $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ μπορεί εύκολα να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης. Ποιο συγκεκριμένα ορίζοντας μια διαμέριση στο χώρο $\delta(\Delta x) = \{x_i : i = 1, \dots, n\}$ με $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στο υπολογιστικό κελί $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, με $x_{i\pm\frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{1}{2}\Delta x$ και ολοκληρώνοντας στο χρονικό διάστημα $\tau^n = [t^n, t^{n+1}]$ με χρονικό βήμα $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ παίρνουμε

$$\frac{\partial \mathbf{q}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(x, t))}{\partial x} = \mathbf{G}(\mathbf{q}(x, t)) \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_{C_i} \mathbf{q}(x, t) dx = -[\mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i-\frac{1}{2}}, t))] + \int_{C_i} \mathbf{G}(\mathbf{q}(x, t)) dx. \quad (3.2)$$

Όπου $\mathbf{q}(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)$ η λύση του προβλήματος Riemann. Διαιρώντας με Δx την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_i(t) = \mathbf{X}_i(t), \quad (3.3)$$

όπου

$$\mathbf{Q}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathbf{q}(x, t) dx, \quad (3.4)$$

είναι ο μέσος όρος της λύσης στο κελί $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ τη χρονική στιγμή t και

$$\mathbf{X}_i(t) = -\frac{\mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i-\frac{1}{2}}, t))}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathbf{G}(\mathbf{q}(x, t)) dx.$$

Ολοκληρώνοντας την (3.3) στο χρονικό διάστημα $\tau^n = [t^n, t^{n+1}]$ παίρνουμε

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n + \int_{\tau^n} \mathbf{X}_i(t) dt, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n + \Delta t(\theta \mathbf{X}_i^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{X}_i^n). \quad (3.6)$$

Ορίζοντας ως συνάρτηση αριθμητικής ροής την ποσότητα

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_{i+1}^n) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)) \quad (3.7)$$

η (3.6) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^{n+1} + \lambda\theta(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) - \theta dt \tilde{\mathbf{G}}_i^{n+1} = \\ \mathbf{Q}_i^n - \lambda(1-\theta)(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^n) + (1-\theta)dt \tilde{\mathbf{G}}_i^n, \end{aligned} \quad (3.8)$$

όπου $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^n = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i\mp 1}^n, \mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_{i\pm 1}^n, \mathbf{Q}_{i\pm 2}^n)$ και

$\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i\mp 1}^{n+1}, \mathbf{Q}_i^{n+1}, \mathbf{Q}_{i\pm 1}^{n+1}, \mathbf{Q}_{i\pm 2}^{n+1})$. Η συνάρτηση $\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}$ καλείτε αριθμητική ροή. Θέτοντας

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = (1-\theta)\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n + \theta\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \quad (3.9)$$

και παραλείποντας προσωρινά τους πηγαίους όρους η (3.8) μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \lambda(\bar{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}). \quad (3.10)$$

Αυτή η αριθμητική ροή είναι μια συνάρτηση οκτώ μεταβλητών,

$\bar{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_{i-1}^n, \mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_{i+1}^n, \mathbf{Q}_{i+2}^n, \mathbf{Q}_{i-1}^{n+1}, \mathbf{Q}_i^{n+1}, \mathbf{Q}_{i+1}^{n+1}, \mathbf{Q}_{i+2}^{n+1})$ και είναι συνεπής με την ομογενή μορφή του νόμου διατήρησης (2.8) ως προς την ακόλουθη έννοια

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}). \quad (3.11)$$

Η εξίσωση (3.8) περιέχει τόσο έμμεσα όσο και άμεσα αριθμητικά σχήματα. Όταν $\theta = 0$, η (3.8) είναι μια άμεση μέθοδος. Όταν $\theta \neq 0$, η (3.8) είναι ένα έμμεσο αριθμητικό σχήμα. Για παράδειγμα, αν $\theta = \frac{1}{2}$, έχουμε τον τύπο του τραπεζίου ενώ για $\theta = 1$, την προς τα πίσω Euler. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς η (3.8) μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^n, \quad (3.12)$$

όπου $\mathbf{L}$ και $\mathbf{R}$ οι ακόλουθοι τελεστές:

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q})_i = \mathbf{Q}_i + \lambda\theta(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}), \quad (3.13)$$

$$(\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q})_i = \mathbf{Q}_i - \lambda(1-\theta)(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}). \quad (3.14)$$

Η ολική κύμανση μιας διακριτής συνάρτησης u^n ορίζεται να είναι

$$TV(u^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j^n - u_{j+1}^n| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta_{j+\frac{1}{2}} u^n|, \quad (3.15)$$

όπου $\Delta_{j+\frac{1}{2}} u^n = u_{j+1}^n - u_j^n$.

Το αριθμητικό σχήμα (3.8) για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών του (2.8) θα ονομάζεται TVD εάν

$$TV(\mathbf{Q}^{n+1}) \leq TV(\mathbf{Q}^n). \quad (3.16)$$

Ο Harten [2] απέδειξε ότι για να ικανοποιεί το σχήμα (3.8) την TVD ιδιότητα αρκεί να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες,

$$TV(\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^n) \leq TV(\mathbf{Q}^n) \quad (3.17)$$

και

$$TV(\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{n+1}) \geq TV(\mathbf{Q}^{n+1}). \quad (3.18)$$

Θεωρώντας ότι η αριθμητική ροή στην (3.8) είναι Lipschitz συνεχής και γράφοντας την (3.8) ως

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^{n+1} - \lambda\theta(\tilde{\mathbf{C}}_{i+\frac{1}{2}}^- \Delta_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{Q} - \tilde{\mathbf{C}}_{i-\frac{1}{2}}^+ \Delta_{i-\frac{1}{2}} \mathbf{Q})^{n+1} = \\ \mathbf{Q}_i^n + \lambda(1-\theta)(\tilde{\mathbf{C}}_{i+\frac{1}{2}}^- \Delta_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{Q} - \tilde{\mathbf{C}}_{i-\frac{1}{2}}^+ \Delta_{i-\frac{1}{2}} \mathbf{Q})^n, \end{aligned} \quad (3.19)$$

όπου $\tilde{\mathbf{C}}_{i\pm\frac{1}{2}}^\mp = \tilde{\mathbf{C}}^\mp(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{i\pm 1}, \mathbf{Q}_{i\pm 2})$ είναι κάποιες φραγμένες συναρτήσεις, ο Harten απέδειξε ότι ικανές συνθήκες για τις (3.17) και (3.18) είναι

(i) Για κάθε i

$$\mathbf{C}_{i+\frac{1}{2}}^\pm = \lambda(1-\theta)\tilde{\mathbf{C}}_{i+\frac{1}{2}}^\pm \geq 0, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{C}_{i+\frac{1}{2}}^+ + \mathbf{C}_{i+\frac{1}{2}}^- = \lambda(1-\theta)(\tilde{\mathbf{C}}_{i+\frac{1}{2}}^+ + \tilde{\mathbf{C}}_{i+\frac{1}{2}}^-) \leq 1, \quad (3.21)$$

(ii) για κάθε i

$$-\infty < C \leq -\lambda\theta\tilde{\mathbf{C}}_{i+\frac{1}{2}}^\pm \leq 0 \quad (3.22)$$

όπου C πεπερασμένη.

3.3 Μέθοδος Godunov

Για την επίλυση των εξισώσεων του τύπου (2.9) πρώτος ο Godunov [15] πρότεινε την ιδέα εξέλιξης της λύσης στο νέο χρονικό επίπεδο λύνοντας ένα σύνολο από τοπικά προβλήματα Riemann της μορφής

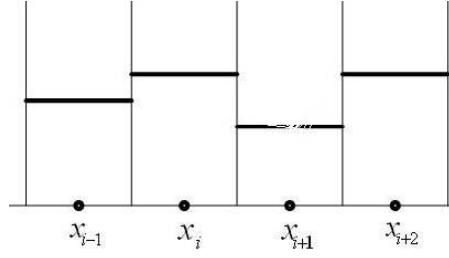
$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{q})_x = 0, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_L & x < 0 \\ \mathbf{q}_R & x > 0 \end{cases}. \quad (3.24)$$

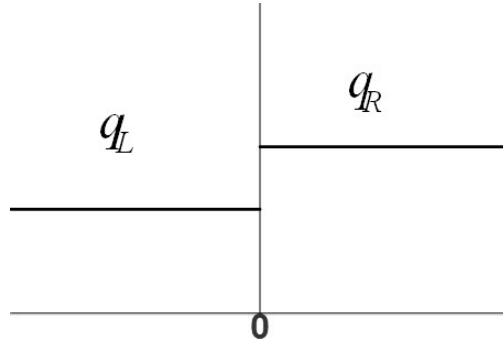
Ο Godunov υπέθεσε ότι η αρχική συνθήκη του προβλήματος (2.9) μπορεί να αντικατασταθεί από την μέση τιμή της $\mathbf{Q}_i(t) = \int_{C_i} \mathbf{q}(x, t) dx$ σε κάθε υπολογιστικό κελί $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ δημιουργώντας έτσι μία κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση (Σχ 3.1).

Στη συνέχεια, θεωρώντας ότι το Δt είναι αρκετά μικρό, σε κάθε μέτωπο $x_{i-\frac{1}{2}}$ το πρόβλημα Riemann (3.23), (3.24) με $\mathbf{q}_L = \mathbf{Q}_{i-1}$ και $\mathbf{q}_R = \mathbf{Q}_i$ λύνεται ακριβώς δημιουργώντας έτσι μία ακολουθία τοπικών προβλημάτων Riemann των οποίων η λύση στο τέλος της διαδικασίας συντίθεται για την κατασκευή της λύσης στο νέο χρονικό επίπεδο.

Η εφαρμογή της ιδέας του Godunov σε μη γραμμικά συστήματα υπερβολικών νόμων διατήρησης είναι αρκετά δαπανηρή και αυτό διότι, για τον υπολογισμό των αριθμητικών ροών χρειαζόμαστε μόνο την λύση του προβλήματος Riemann στο σημείο $x_{i-\frac{1}{2}}$ [24]. Στην πράξη,



Σχήμα 3.1: Κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση.



Σχήμα 3.2: Αρχικές συνθήκες του προβλήματος Riemann.

όπως θα δούμε και στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε προσεγγιστικούς επιλυτές Riemann. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε το προσεγγιστικό επιλυτή Riemann του Roe [1]. Ποιό συγκεκριμένα ο Roe λύνει το πρόβλημα Riemann (3.23), (3.24) προσεγγιστικά εισάγοντας τον Ιακωβιανό πίνακα $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας το σύστημα (3.23) γράφεται ως

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{q}_x = 0. \quad (3.25)$$

Στην συνέχεια ο Ιακωβιανός πίνακας $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ του συστήματος αντικαθίσταται από μια προσέγγιση του $\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R)$ δημιουργώντας έτσι ένα προσεγγιστικό πρόβλημα Riemann

$$\mathbf{q}_t + \tilde{\mathbf{J}}\mathbf{q}_x = 0, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_L & x < 0 \\ \mathbf{q}_R & x > 0 \end{cases}, \quad (3.27)$$

το οποίο και λύνει ακριβώς. Το προσεγγιστικό πρόβλημα Riemann προκύπτει αντικαθιστώντας το αρχικό μη γραμμικό από ένα γραμμικοποιημένο σύστημα σταθερών, τοπικά για κάθε χρονικό βήμα, συντελεστών διατηρώντας όμως την αρχική συνθήκη αμετάβλητη. Ο πίνακας $\tilde{\mathbf{J}}$ ο οποίος ονομάζεται πίνακας του Roe θα πρέπει να έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

$$(1). \Delta_{i-1/2} \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{i-1}) \Delta_{i-1/2} \mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2} \Delta_{i-1/2} \mathbf{Q} \quad \forall i,$$

όπου $\Delta_{i-1/2}(\cdot) = (\cdot)_i - (\cdot)_{i-1}$ και $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_i)$.

(2). Ο $\tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2}$ έχει πραγματικές ιδιοτιμές και γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

(3). $\tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2} \rightarrow \mathbf{F}'(\mathbf{Q})$ ομοιόμορφα καθώς $\mathbf{Q}_{i-1}, \mathbf{Q}_i \rightarrow \mathbf{Q}$.

(4). υπάρχει γραμμική απεικόνιση από το $\mathbf{Q}$ στο $\mathbf{F}$.

Η συνθήκη (1) μας εξασφαλίζει ότι το παραγόμενο σχήμα είναι συντηρητικό. Η συνθήκη (2) μας εξασφαλίζει ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι υπερβολικό και επομένως επιλύσιμο και η συνθήκη (3) ότι η μέθοδος δίνει τη σωστή λύση σε ομαλές περιοχές.

Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων ο πίνακας $\tilde{\mathbf{J}}$ είναι απλά ο Ιακωβιανός πίνακας (2.13) του συστήματος (2.9), [12]

$$\tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{c}^2 - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{bmatrix}_{i-1/2} \quad (3.28)$$

αποτιμημένος στις κάτωθι τιμές

$$\tilde{u}_{i-1/2} = \frac{u_{i-1}\sqrt{h_{i-1}} + u_i\sqrt{h_i}}{\sqrt{h_{i-1}} + \sqrt{h_i}}, \quad \tilde{h}_{i-1/2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}, \quad \tilde{c} = \sqrt{g \frac{h_i + h_{i-1}}{2}}, \quad (3.29)$$

οι οποίες ονομάζονται μέσες τιμές του Roe.

Οι ιδιοτιμές του προσεγγιστικού πίνακα $\tilde{\mathbf{J}}$ είναι:

$$\tilde{\lambda}_{i-1/2}^1 = \tilde{u}_{i-1/2} - \sqrt{g\tilde{h}_{i-1/2}}, \quad \tilde{\lambda}_{i-1/2}^2 = \tilde{u}_{i-1/2} + \sqrt{g\tilde{h}_{i-1/2}}, \quad (3.30)$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\tilde{\mathbf{r}}_{i-1/2}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u}_{i-1/2} - \tilde{c}_{i-1/2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_{i-1/2}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u}_{i-1/2} + \tilde{c}_{i-1/2} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Έστω $\tilde{\mathbf{R}}_{i-1/2}$ πίνακας του οποίου οι στήλες περιέχουν τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\tilde{\mathbf{J}}$, από την συνθήκη (2) έχουμε ότι ο πίνακας $\tilde{\mathbf{J}}$ διαγωνοποιείται ως εξής

$$\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{R}}_{i-1/2} \text{diag}[\tilde{\lambda}_{i-1/2}^k] \tilde{\mathbf{R}}_{i-1/2}^{-1}, \quad k = 1, 2. \quad (3.32)$$

Από την συνθήκη (4) και την προηγούμενη σχέση μπορούμε να γράψουμε την ασυνέχεια της ροής ως

$$\Delta_{i-1/2} \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2} \Delta_{i-1/2} \mathbf{Q} = \sum_{k=1}^2 [\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{r}}_k]_{i-1/2},$$

όπου $\tilde{\alpha}_{i-1/2} = \tilde{\mathbf{R}}_{i-1/2}^{-1} \Delta_{i-1/2} \mathbf{Q}$ τα βάρη

$$\tilde{\alpha}_{i-1/2}^{1,2} = \frac{\Delta_{i-1/2}(hu) + (-\tilde{u}_{i-1/2} \pm \tilde{c}_{i-1/2}) \Delta_{i-1/2} h}{\pm 2 \tilde{c}_{i-1/2}}.$$

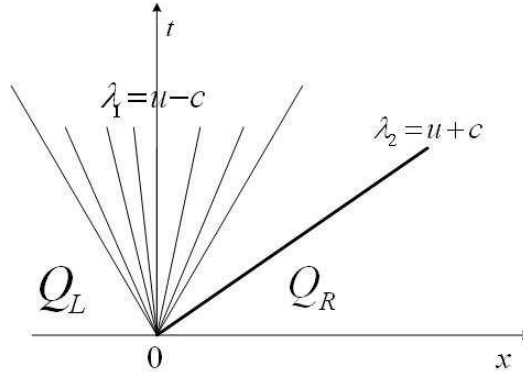
Ακολουθώντας την διαδικασία όπως περιγράφεται για παράδειγμα στους Leveque [20], Delis [14] και άλλοι η αριθμητική ροή μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{i-1} + \mathbf{F}_i] - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2}| (\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}) \quad (3.33)$$

ή

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{i-1} + \mathbf{F}_i] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 [\tilde{\lambda}_k |\tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{r}}_k|]_{i-1/2}. \quad (3.34)$$

Στην περίπτωση που στη λύση του προβλήματος Riemann εμφανίζεται ένα υπερηχητικό



Σχήμα 3.3: Υπερηχητικό κύμα αραιώσης.

κύμα αραιώσης η δομή του οποίου έχει το χαρακτηριστικό ότι επικαλύπτει το μέτωπο του κελιού (Σχ 3.3) και ισχύει ότι $\lambda_k < 0$ στα αριστερά του κύματος και $\lambda_k > 0$ στα δεξιά του κύματος ο όρος ιξώδους στην παραπάνω αριθμητική ροή είναι πολύ μικρός και περιμένουμε

η ιδιοτιμή λ_k να είναι κοντά στο μηδέν επομένως και ο αντίστοιχος όρος στην ροή θα είναι κοντά στο μηδέν. Άρα, μία διόρθωση εντροπίας είναι να αυξήσουμε το ιξώδες τροποποιώντας την αριθμητική ροή. Η διόρθωση αυτή ονομάζεται διόρθωση εντροπίας του Harten [13]. Πιο συγκεκριμένα οι ιδιοτιμές $|\tilde{\lambda}_k|$ στην (3.34) αντικαθίστανται από την τιμή $\psi_\varepsilon(\tilde{\lambda}_{i-1/2}^k)$ όπου $\psi_\varepsilon(\lambda)$ είναι η συνάρτηση

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & |\lambda| \geq \varepsilon \\ \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & |\lambda| < \varepsilon \end{cases}, \quad (3.35)$$

όπου ο αριθμός ε μπορεί να υπολογιστεί [14] ως εξής.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1/2} &= \max[0, \tilde{\lambda}_{i+1/2} - \lambda_i, \lambda_{i+1} - \tilde{\lambda}_{i+1/2}], \\ \varepsilon_{i-1/2} &= \max[0, \tilde{\lambda}_{i-1/2} - \lambda_{i-1}, \lambda_i - \tilde{\lambda}_{i-1/2}]. \end{aligned}$$

3.3.1 Πηγαίος όρος

Μέχρι στιγμής έχουμε θεωρήσει την ομογενή περίπτωση, $\mathbf{G} = 0$ της (2.9). Σε ρεαλιστικά όμως προβλήματα ο πηγαίος όρος της τοπογραφίας υπάρχει. Όπως θα δούμε στην συνέχεια για τον πλήρη ορισμό του αριθμητικού σχήματος θα πρέπει να επιλέξουμε μια κατάλληλη διακριτοποίηση του ολοκληρώματος του πηγαιού όρου $\tilde{\mathbf{G}}_i$, ανάλογη αυτής της ροής, έτσι ώστε να μην υπεισέρχονται αριθμητικές ταλαντώσεις και το σχήμα να μπορεί να διατηρεί τις στάσιμες καταστάσεις. Δηλαδή καταστάσεις της μορφής

$$u(x, t) = 0 \text{ και } h(x, t) \equiv D - b(x) \quad \forall (x, t)$$

ή

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \text{ και } h(x, t) \equiv D - b(x) \quad \forall (x, t),$$

όπου D σταθερά. Όταν λοιπόν $\mathbf{q}_t = 0$ τότε η (2.9) γράφεται

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} = \mathbf{G}.$$

Αυτό σημαίνει για το αριθμητικό σχήμα ότι θα πρέπει η προσέγγιση της αριθμητικής ροής και του πηγαιού όρου να ικανοποιούν την παραπάνω σχέση. Δηλαδή από το γενικό σχήμα

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-1/2} = \tilde{\mathbf{G}}_i.$$

Όταν διατηρείται η παραπάνω ισορροπία το αριθμητικό σχήμα ικανοποιεί την C-ιδιότητα και πιο συγκεκριμένα ικανοποιεί:

1. την ακριβή C-ιδιότητα, όταν έχει ακριβή αποτελέσματα ενώ το υγρό βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση.
2. την προσεγγιστική C-ιδιότητα, όταν έχει ακρίβεια τάξης $O(\Delta x^2)$ ενώ το υγρό βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση.

Η προσέγγιση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι τύπου upwind $\tilde{\mathbf{G}}_i \approx \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{G}_{i-1/2}^+ + \mathbf{G}_{i+1/2}^-)$ και υπολογίζεται ως εξής [9], [25].

Αρχικά εισάγουμε τους παρακάτω πίνακες

$$\tilde{\mathbf{J}}^\pm = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^\pm\tilde{\mathbf{R}}, \quad (3.36)$$

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}^\pm = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1^\pm, \tilde{\lambda}_2^\pm), \quad (3.37)$$

$$|\tilde{\mathbf{J}}| = \tilde{\mathbf{J}}^+ - \tilde{\mathbf{J}}^-, \quad (3.38)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{J}} \pm |\tilde{\mathbf{J}}|), \quad (3.39)$$

όπου $\tilde{\lambda}_k^+ = \max(0, \tilde{\lambda}_k)$ και $\tilde{\lambda}_k^- = \min(0, \tilde{\lambda}_k)$ για $k = 1, 2$.

Προβάλλουμε τον πηγαίο όρο στο χώρο που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\tilde{\mathbf{J}}$ ως εξής

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \tilde{\mathbf{R}}\beta = \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1})\beta = \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^+ + \tilde{\mathbf{\Lambda}}^-)\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\beta \\ &= \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^+\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1})\beta + \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^-\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1})\beta \\ &= \mathbf{G}_{i-1/2}^+ + \mathbf{G}_{i+1/2}^-. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας τους πίνακες που εισάγαμε παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{i-1/2}^+ &= \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^+\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1})\beta = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1} + |\tilde{\mathbf{\Lambda}}|\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1})\beta \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{G}_{i-1/2} + |\tilde{\mathbf{J}}|\tilde{\mathbf{J}}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}\beta) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} + |\tilde{\mathbf{J}}|\tilde{\mathbf{J}}^{-1})\mathbf{G}_{i-1/2} \\ &= \tilde{\mathbf{J}}^+\tilde{\mathbf{J}}^{-1}\mathbf{G}_{i-1/2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

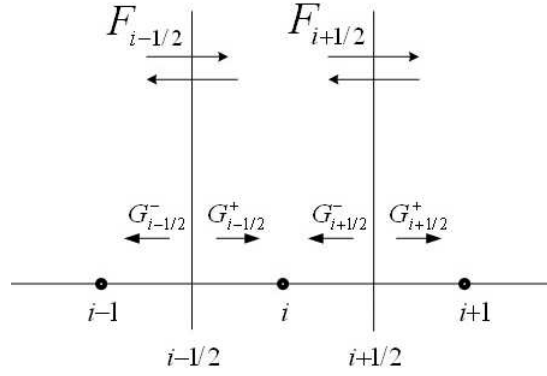
και ομοίως

$$\mathbf{G}_{i+1/2}^- = \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^-\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1})\beta = \tilde{\mathbf{J}}^-\tilde{\mathbf{J}}^{-1}\mathbf{G}_{i+1/2}. \quad (3.41)$$

Χρησιμοποιώντας τα βαρή από την προβολή του πηγαίου όρου στα ιδιοδιανύσματα και την παρακάτω διακριτοποίηση του πηγαίου όρου

$$\mathbf{G}_{i-1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \frac{h_i - h_{i-1}}{2} (b(x_i) - b(x_{i-1})) \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

όπου $b(x)$ συνάρτηση που περιγράφει την τοπογραφία του πυθμένα, η ακόλουθη ισότητα



Σχήμα 3.4: Αριθμητικές ροές και κατανομή του πηγαίου όρου στον όγκο ελέγχου.

ικανοποιείται (διακριτή στάσιμη κατάσταση)

$$\Delta_{i-1/2} \mathbf{F} - \mathbf{G}_{i-1/2} = 0 \quad (3.43)$$

και οι (3.40), (3.41) γράφονται ως

$$\mathbf{G}_{i\mp 1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (\beta_k \tilde{\mathbf{r}}_k (1 \pm \text{sgn}(\tilde{\lambda}_k)))_{i\mp 1/2} \quad (3.44)$$

όπου

$$(\beta_{1,2})_{i-1/2} = \pm \frac{\tilde{c}_{i-1/2} \Delta_{i-1/2} b}{2}. \quad (3.45)$$

Συνολικά βλέπετε Σχήμα 3.4.

3.4 Υψηλής ανάλυσης σχήμα

Το αριθμητικό σχήμα (3.8) εφοδιασμένο με τον προσεγγιστικό επιλυτή Riemann του Roe είναι ένα πρώτης τάξης έμμεσο αριθμητικό σχήμα τύπου upwind. Συνήθως, όμως, σε πρακτικούς υπολογισμούς χρειαζόμαστε υψηλότερη ακρίβεια, η οποία μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας οριοθέτες ροής (Flux-limiting) ή οριοθέτες κλίσης (Slope-Limiting). Οι τεχνικές αυτές μας εξασφαλίζουν δεύτερης τάξης ακρίβεια στις ομαλές περιοχές και ελαχιστοποιούν τις αριθμητικές ταλαντώσεις κοντά στις ασυνέχειες.

3.4.1 Flux-Limiting

Ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να αυξήσουμε την ακρίβεια του αριθμητικού σχήματος (3.8) είναι κατασκευάζοντας αριθμητικές ροές της μορφής:

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{TVD} = \mathbf{F}_{i-1/2}^{FO} + \Phi_{i-1/2}^n (\mathbf{F}_{i-1/2}^{HO} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{FO}) \quad (3.46)$$

όπου $\mathbf{F}_{i-1/2}^{SO}$ δευτέρης τάξης αριθμητική ροή, $\mathbf{F}_{i-1/2}^{FO}$ πρώτης τάξη αριθμητική ροή και $\Phi_{i-1/2} = \text{diag}(\Phi_k)$ $k = 1, 2$ μια μη γραμμική flux-limiter συνάρτηση [22], οριοθέτης, η οποία μπορεί να επιλεγεί από τον Πίνακα 3.1.

Flux-Limiter	$\Phi(\theta)$
Minmod (MM)	$\max(0, \min(1, \theta))$
Superbee (SB)	$\max(0, \min(2\theta, 1), \min(\theta, 2))$
van Leer (VL)	$\frac{ \theta + \theta}{1 + \theta }$
van Albada (VA)	$\frac{\theta^2 + \theta}{1 + \theta^2}$

Table 3.1: Οριοθέτες ροής

Χρησιμοποιώντας σαν υψηλής τάξης ροή την αριθμητική ροή των Lax-Wendroff

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\mathbf{J}}|) |\tilde{\mathbf{J}}| \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2}$$

και σαν πρώτης τάξης την αριθμητική ροή (3.33) έχουμε

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{HO} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{FO} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{R}} |\tilde{\Lambda}| \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} |\tilde{\Lambda}| \right) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \right)_{i-1/2}^n \Delta_{i-1/2} \mathbf{Q}^n. \quad (3.47)$$

Στην συνέχεια αντικαθιστώντας την (3.47) στην (3.46) έχουμε ότι η TVD αριθμητική ροή γράφεται ως

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i-1}^n) - \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{R}} |\tilde{\Lambda}| \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{R}}^{-1})_{i-1/2}^n \Delta_{i-1/2} \mathbf{Q}^n \quad (3.48)$$

όπου

$$\mathbf{L} = \text{diag} \left(1 - \Phi(\tilde{\theta}_k) \left(1 - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_k| \right) \right)$$

και

$$\tilde{\theta}_k = \frac{(\tilde{\alpha}_k)_{I-1/2}}{(\tilde{\alpha}_k)_{i-1/2}}, \quad I = \begin{cases} i-1, & \tilde{\lambda}_k > 0 \\ i+1, & \tilde{\lambda}_k < 0 \end{cases}.$$

Η αριθμητική ροή (3.48) μπορεί να γραφτεί σε μια πιο συμπαγή μορφή ως

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left[\tilde{\alpha}_k |\tilde{\lambda}_k| \left(1 - \Phi(\tilde{\theta}_k) (1 - |\nu_k|) \right) \tilde{\mathbf{r}}_k \right]_{i-1/2}^n \quad (3.49)$$

με $\nu_k = \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \tilde{\lambda}_k$. Η προσέγγιση του πηγαίου όρου κατασκευάζεται κατά αντιστοιχία με την

προσέγγιση της αριθμητικής ροής έτσι ώστε το αριθμητικό σχήμα να διατηρεί την C-property [5], [26]

$$\tilde{\mathbf{G}}_i = \mathbf{G}_{i+1/2}^{TVD} + \mathbf{G}_{i-1/2}^{TVD} \quad (3.50)$$

όπου

$$\mathbf{G}_{i-1/2}^{TVD} = \mathbf{G}_{i-1/2}^{FO} + \Phi_{i-1/2}(\mathbf{G}_{i-1/2}^{SO} - \mathbf{G}_{i-1/2}^{FO}). \quad (3.51)$$

Για την πρώτη τάξης προσέγγιση χρησιμοποιούμε την (3.44) και για την δεύτερης τάξης την αριθμητική ροή Lax-Wendroff

$$\mathbf{G}_{i\pm 1/2}^{LW} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}(\mathbf{I} \mp \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Lambda}^2) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})_{i\pm 1/2}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{G}_{i\pm 1/2}^{SO} - \mathbf{G}_{i\pm 1/2}^{FO} = \mp \frac{1}{2}(\mathbf{R} \mathbf{\Lambda}^{-1} |\mathbf{\Lambda}| (\frac{\Delta t}{\Delta x} |\mathbf{\Lambda}| - \mathbf{I}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})_{i\pm 1/2}. \quad (3.53)$$

Αντικαθιστώντας την (3.53), (3.40) στην (3.51) η (3.50) γίνεται

$$\tilde{\mathbf{G}}_i = \mathbf{G}_{i+1/2}^{-} + \mathbf{G}_{i-1/2}^{+}, \quad (3.54)$$

όπου

$$\mathbf{G}_{i-1/2}^{\pm} = \frac{1}{2}[\mathbf{R}(\mathbf{I} \pm \mathbf{\Lambda}^{-1} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{L}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}]_{i-1/2} \quad (3.55)$$

ή πιο αναλυτικά

$$\mathbf{G}_{i-1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 [\beta_k \mathbf{r}_k (1 \pm \text{sgn}(\lambda_k) (1 - \Phi(\theta_k) (1 - |\frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_k|)))]_{i-1/2}. \quad (3.56)$$

3.4.2 Slope-Limiting

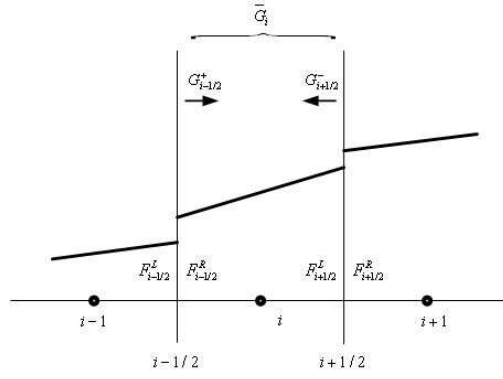
Ένας άλλος τρόπος βάση του οποίου μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα υψηλής ανάλυσης αριθμητικό σχήμα είναι μέσω μιας γεωμετρικής προσέγγισης γνώστη ως MUSCL-type slope-limiting [3], Leveque [20]. Σε αυτήν την περίπτωση η κατασκευή υψηλής ανάλυσης αριθμητικού σχήματος και η διατήρηση της ισορροπίας ανάμεσα στη διακριτοποίηση του πηγαίου όρου και της αριθμητικής ροής είναι πιο δύσκολο να επιτευχθεί και αυτό διότι θεωρούμε πλέον ότι η λύση είναι γραμμική μέσα σε κάθε υπολογιστικό κελί (Σχ 3.5).

Ακολουθώντας την διαδικασία όπως περιγράφεται στο βιβλίο του LeVeque [20], από τις τιμές $\mathbf{Q}_i^n$ κατασκευάζουμε μία κατα τμήματα γραμμική συνάρτηση της μορφής

$$\tilde{\mathbf{q}}_i(x, t_n) = \mathbf{Q}_i^n + \mathbf{s}_i^n(x - x_i) \quad \forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \quad (3.57)$$

όπου

$$x_i = \frac{1}{2}(x_{i-1/2} + x_{i+1/2}) = x_{i-1/2} + \frac{1}{2}\Delta x \quad (3.58)$$



Σχήμα 3.5: Υπολογισμός αριθμητικής ροής και πηγαιού όρου για το MUSCL.

είναι το κέντρο του i -οστού υπολογιστικού κελιού και $\sigma_i^n = \frac{\Delta_i \mathbf{Q}}{\Delta x}$ η κλίση στο i -όστο κελί η οποία υπολογίζεται από τα αριθμητικά δεδομένα. Στην συνέχεια υπολογίζουμε την ακριβή λύση ενός γενικευμένου προβλήματος Riemann $\tilde{\mathbf{q}}(x, t^{n+1})$, χρησιμοποιώντας την κατα τμήματα γραμμική συνάρτηση, την οποία και ολοκληρώνουμε για να πάρουμε τις νέες μέσες τιμές

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{\mathbf{q}}(x, t^{n+1}) dx. \quad (3.59)$$

Η αντίστοιχη αριθμητική ροή [5] είναι

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i-1/2}^R + \mathbf{F}_{i-1/2}^L) - \frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{R}}|\tilde{\mathbf{\Lambda}}|\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\Delta\mathbf{Q}]_{i-1/2} \quad (3.60)$$

ή

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}_{i-1/2}^R + \mathbf{F}_{i-1/2}^L] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 [\tilde{\lambda}_k |\tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{r}}_k]_{i-1/2} \quad (3.61)$$

στην οποία οι μέσες τιμές του Roe υπολογίζονται από την ανακατασκευασμένη γραμμική συνάρτηση (3.57)

$$\tilde{u}_{i\pm 1/2} = \frac{u^L \sqrt{h^L} + u^R \sqrt{h^R}}{\sqrt{h^L} + \sqrt{h^R}}, \quad \tilde{h}_{i\pm 1/2} = \frac{h^R + h^L}{2}, \quad \tilde{c}_{i\pm 1/2} = \sqrt{g \frac{h^R + h^L}{2}}. \quad (3.62)$$

Οι δείκτες R και L δηλώνουν, αντίστοιχα, τον υπολογισμό της εκάστοτε ποσότητας στα δεξιά και αριστερά του μετώπου $i \pm 1/2$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$\mathbf{Q}^R = \tilde{\mathbf{q}}_i^n(x_{i-1/2}) = \mathbf{Q}_i^n + \sigma_i^n(x_{i-1/2} - x_i) = \mathbf{Q}_i^n - \frac{1}{2}\sigma_i^n \Delta x, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{Q}^L = \tilde{\mathbf{q}}_{i-1}^n(x_{i-1/2}) = \mathbf{Q}_{i-1}^n + \sigma_{i-1}^n(x_{i-1/2} - x_{i-1}) = \mathbf{Q}_{i-1}^n + \frac{1}{2}\sigma_{i-1}^n \Delta x, \quad (3.64)$$

με $\mathbf{F}_{i-1/2}^{R,L} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i-1/2}^{R,L})$.

Για την διατήρηση της ισορροπίας ανάμεσα στη διακριτοποίηση της αριθμητικής ροής και

του πηγαίου όρου $\tilde{\mathbf{G}}_i$ θα πρέπει να εφαρμόσουμε μία κατάλληλη διόρθωση, η οποία, όπως αναφέρεται στο [5] είναι :

$$\mathbf{G}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^L, \mathbf{Q}_{i-1/2}^R) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \frac{h_{i+1/2}^L + h_{i-1/2}^R}{2} (b_{i+1/2}^L - b_{i-1/2}^R) \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

όπου

$$b_{i-1/2}^R = b(x_i) + \sigma_i^n (x_{i-1/2} - x_i) = b(x_i) - \frac{1}{2} \sigma_i^n \Delta x, \quad (3.66)$$

$$b_{i+1/2}^L = b(x_i) + \sigma_i^n (x_{i+1/2} - x_i) = b(x_i) + \frac{1}{2} \sigma_i^n \Delta x, \quad (3.67)$$

η γραμμική ανακατασκευή της τοπογραφίας μέσα στο υπολογιστικό κελί.

Απόδειξη :

Στην περίπτωση στάσιμης κατάστασης, δηλαδή στην περίπτωση όπου το υγρό βρίσκεται σε ισορροπία $\mathbf{q}_t = 0$

$$u \equiv 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial b}{\partial x} \quad (3.69)$$

έχουμε

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x} [(\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}^- \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{Q} - \mathbf{R}\mathbf{I}^- \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})_{i+1/2} + (\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{Q} - \mathbf{R}\mathbf{I}^+ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})_{i-1/2}] = 0 \Leftrightarrow \quad (3.70)$$

$$-\frac{\Delta t}{2\Delta x} [(\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{Q} - \mathbf{R}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{Q})_{i+1/2} + (\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{Q} - \mathbf{R}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{Q})_{i-1/2}] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [(\mathbf{R}(\mathbf{I} - \text{sgn}(\mathbf{I}))\mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})_{i+1/2} + (\mathbf{R}(\mathbf{I} + \text{sgn}(\mathbf{I}))\mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})_{i-1/2}] = 0 \Leftrightarrow \quad (3.71)$$

$$-\frac{\Delta t}{2\Delta x} [\Delta \mathbf{F}_{i+1/2} - (\mathbf{R}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{Q})_{i+1/2} + \Delta \mathbf{F}_{i-1/2} + (\mathbf{R}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{Q})_{i-1/2}] + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{G}_{i+1/2}^- + \mathbf{G}_{i-1/2}^+] = 0 \quad (3.72)$$

όπου $\mathbf{\Lambda}^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda} \pm |\mathbf{\Lambda}|)$, $\text{sgn}(\mathbf{I}) = \mathbf{\Lambda}^{-1}|\mathbf{\Lambda}|$ και

$$\mathbf{G}_{i\pm 1/2}^\mp = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left[\beta_k \tilde{\mathbf{r}}_k [1 \mp \text{sgn}(\tilde{\lambda}_k)] \right]_{i\pm 1/2}. \quad (3.73)$$

Οι όροι $\tilde{\beta}_k, \tilde{\lambda}_k, \tilde{\mathbf{r}}_k$ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις ανακατασκευασμένες τιμές (3.62) του MUSCL. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} (\beta_1)_{i\pm 1/2} &= \frac{\tilde{c}_{i\pm 1/2} \Delta_{i\pm 1/2} b}{2} = \frac{\tilde{c}_{i\pm 1/2} (b_{i\pm 1/2}^R - b_{i\pm 1/2}^L)}{2}, \\ (\beta_2)_{i\pm 1/2} &= -\frac{\tilde{c}_{i\pm 1/2} \Delta_{i\pm 1/2} b}{2} = -\frac{\tilde{c}_{i\pm 1/2} (b_{i\pm 1/2}^R - b_{i\pm 1/2}^L)}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\lambda}_1)_{i\pm 1/2} &= \tilde{u}_{i\pm 1/2} - \tilde{c}_{i\pm 1/2}, \quad (\tilde{\lambda}_2)_{i\pm 1/2} = \tilde{u}_{i\pm 1/2} + \tilde{c}_{i\pm 1/2} \\
(\tilde{\mathbf{r}}_{1,2})_{i\pm 1/2} &= [1, (\tilde{\lambda}_{1,2})_{i\pm 1/2}]^T.
\end{aligned}$$

Εξαιτίας της γραμμικής ανακατασκευής της λύσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{F}_{i+1/2} + \Delta \mathbf{F}_{i-1/2} &= (\mathbf{F}_{i+1/2}^R - \mathbf{F}_{i+1/2}^L) + (\mathbf{F}_{i-1/2}^R - \mathbf{F}_{i-1/2}^L) \\
&= (\mathbf{F}_{i+1/2}^R + \mathbf{F}_{i+1/2}^L) - (\mathbf{F}_{i-1/2}^R + \mathbf{F}_{i-1/2}^L) - 2(\mathbf{F}_{i+1/2}^L - \mathbf{F}_{i-1/2}^R)
\end{aligned}$$

Ο λόγος για τον οποίο επιλέγουμε την παραπάνω αναπαράσταση του αθροίσματος $\Delta \mathbf{F}_{i+1/2} + \Delta \mathbf{F}_{i-1/2}$ είναι για να μπορέσουμε να εμφανίσουμε τις αριθμητικές ροές (3.61). Επομένως η (3.72) γράφεται ως

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2}^R + \mathbf{F}_{i+1/2}^L - (\mathbf{R}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{R}^{-1}\Delta\mathbf{Q})_{i+1/2} - (\mathbf{F}_{i-1/2}^R + \mathbf{F}_{i-1/2}^L - (\mathbf{R}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{R}^{-1}\Delta\mathbf{Q})_{i-1/2}) \\
& \quad - 2(\mathbf{F}_{i+1/2}^L - \mathbf{F}_{i-1/2}^R)] + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{G}_{i+1/2}^- + \mathbf{G}_{i-1/2}^+) = 0 \Leftrightarrow \\
& -\frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2}^R + \mathbf{F}_{i+1/2}^L - (\mathbf{R}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{R}^{-1}\Delta\mathbf{Q})_{i+1/2} - (\mathbf{F}_{i-1/2}^R + \mathbf{F}_{i-1/2}^L - (\mathbf{R}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{R}^{-1}\Delta\mathbf{Q})_{i-1/2})] \\
& \quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{G}_{i+1/2}^- + \mathbf{G}_{i-1/2}^+) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^L - \mathbf{F}_{i-1/2}^R) = 0 \Leftrightarrow \\
& -\frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}] + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{G}_{i+1/2}^- + \mathbf{G}_{i-1/2}^+) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^L - \mathbf{F}_{i-1/2}^R) = 0 \quad (3.74)
\end{aligned}$$

όπου ο τελευταίος όρος του αθροίσματος της (3.74) ισούται με

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{i+1/2}^L - \mathbf{F}_{i-1/2}^R &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g(h_{i+1/2}^L)^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g(h_{i-1/2}^R)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g[(h_{i+1/2}^L)^2 - (h_{i-1/2}^R)^2] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g(h_{i+1/2}^L - h_{i-1/2}^R)(h_{i+1/2}^L + h_{i-1/2}^R) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}g(b_{i+1/2}^L - b_{i-1/2}^R)(h_{i+1/2}^L + h_{i-1/2}^R) \end{bmatrix} \\
\mathbf{G}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^L, \mathbf{Q}_{i-1/2}^R) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g\frac{h_{i-1/2}^R + h_{i+1/2}^L}{2}(b_{i-1/2}^R + b_{i+1/2}^L) \end{bmatrix} \quad (3.75)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial b}{\partial x} \Rightarrow h_{i+1/2}^L - h_{i-1/2}^R = -(b_{i+1/2}^L - b_{i-1/2}^R)$.

Επομένως από (3.73), (3.75) η διακριτοποίηση του πηγαίου όρου στην (3.8) γράφεται ως

$$\tilde{\mathbf{G}}_i = (\mathbf{G}_{i+1/2}^- + \mathbf{G}_{i-1/2}^+) + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^L, \mathbf{Q}_{i-1/2}^R). \quad (3.76)$$

Τελειώνοντας την παρουσίαση του MUSCL θα πρέπει να επιλέξουμε τις κλίσεις, σ_i^n , έτσι ώστε το αριθμητικό σχήμα (3.8) να είναι δεύτερης τάξης και να ικανοποιεί την TVD ιδιότητα. Εάν επιλέξουμε $\sigma_i^n = 0$, κατασκευάζουμε ένα πρώτης τάξης upwind σχήμα ενώ εάν επιλέξουμε $\sigma_i^n = \frac{1}{\Delta x}(\mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_i^n)$, έχουμε το κλασσικό σχήμα Lax-Wendroff το οποίο είναι δεύτερης τάξης αλλά δεν ικανοποιεί την TVD ιδιότητα. Μια επιλογή οριοθέτη κλίσης σ_i^n η οποία δίνει δεύτερης τάξης ακρίβεια για ομαλές λύσεις και ταυτόχρονα ικανοποιεί την TVD ιδιότητα είναι ο *minmod*

$$\sigma_i^n = \minmod\left(\frac{\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{\mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta x}\right) \quad (3.77)$$

όπου η συνάρτηση *minmod* ορίζεται ως

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} a & \alpha\nu |a| < |b| \text{ και } ab > 0, \\ b & \alpha\nu |b| < |a| \text{ και } ab > 0, \\ 0 & \alpha\nu ab \leq 0. \end{cases} \quad (3.78)$$

Άλλοι οριοθέτες κλίσης που μπορούμε να επιλέξουμε είναι ο *Superbee limiter* ο οποίος οφείλετε στον Roe [6]

$$\sigma_i^n = \maxmod(\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)}), \quad (3.79)$$

όπου

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(1)} &= \minmod\left(\left(\frac{\mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta x}\right), 2\left(\frac{\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n}{\Delta x}\right)\right), \\ \sigma_i^{(2)} &= \minmod\left(2\left(\frac{\mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta x}\right), \left(\frac{\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n}{\Delta x}\right)\right) \end{aligned}$$

και ο MC limiter ο οποίος προτάθηκε από τον van Leer [7]

$$\sigma_i^n = \minmod\left(\left(\frac{\mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n}{2\Delta x}\right), 2\left(\frac{\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n}{\Delta x}\right), 2\left(\frac{\mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta x}\right)\right). \quad (3.80)$$

3.5 Έμμεσο σχήμα επίλυσης των εξισώσεων ρηχών υδάτων στην μία διάσταση

3.5.1 Αριθμητικό σχήμα

Όπως δείξαμε σε προηγούμενη ενότητα λαμβάνοντας την ολοκληρωτική μορφή των νόμων διατήρησης έχουμε ότι η γενική μορφή ενός έμμεσου (implicit) αριθμητικού σχήματος επίλυσης των εξισώσεων ρηχών υδάτων στην μία χωρική διάσταση μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^{n+1} + \lambda\theta(\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) - \theta dt \tilde{\mathbf{G}}_i^{n+1} = \\ \mathbf{Q}_i^n - \lambda(1-\theta)(\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^n) + (1-\theta)dt \tilde{\mathbf{G}}_i^n \end{aligned} \quad (3.81)$$

όπου $\lambda = dt/dx$ και $0 \leq \theta \leq 1$, $\mathbf{G}$ ο πηγαίος όρος και $\tilde{\mathbf{F}}_{i\pm\frac{1}{2}}^n$ οι αριθμητικές ροές από τις οποίες εξαρτάται η χωρική ακρίβεια του αριθμητικού σχήματος.

Για $\theta = 0$ το σχήμα είναι άμεσο, για $\theta = \frac{1}{2}$ το σχήμα αντιστοιχεί στον κανόνα του τραπεζίου ενώ για $\theta = 1$ έχουμε ένα πλήρως έμμεσο αριθμητικό σχήμα, αφού οι αριθμητικές ροές υπολογίζονται μόνο στο επόμενο χρονικό βήμα.

3.5.2 Γραμμικοποίηση

Για την επίλυση της (3.81) ως προς $\mathbf{Q}_i^{n+1}$ συνήθως χρειάζεται να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων μέσω μίας επαναληπτικής διαδικασίας με αποτέλεσμα να αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος, για τον λόγο αυτό ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως περιγράφεται στους Yee [8] και Alcudo κ.α. [11], Delis κ.α [19] κατασκευάζουμε μία συντηρητική γραμμικοποιημένη μορφή της (3.81), λύνοντας έτσι σε κάθε χρονικό βήμα ένα γραμμικό σύστημα.

Οι αριθμητικές ροές στο παραπάνω σύστημα είναι της μορφής (3.48)

Θέτοντας

$$\mathbf{W}_{i\pm 1/2} = -|\tilde{\mathbf{A}}_{i\pm 1/2}| \tilde{\mathbf{L}}_{i\pm 1/2} = \text{diag}[w_{i\pm 1/2}^k], \quad k = 1, 2 \quad (3.82)$$

Όπου

$$w_{i\pm 1/2}^k = -\psi(\tilde{\lambda}_{i\pm 1/2}^k) \left(1 - \Phi(\tilde{\theta}_{i\pm 1/2}^k) \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_{i\pm 1/2}^k| \right) \right) \quad k = 1, 2. \quad (3.83)$$

και ορίζοντας τον πίνακα $\mathbf{B}_{i\pm 1/2}$ ως

$$\mathbf{B}_{i\pm 1/2} = \tilde{\mathbf{R}}_{i\pm 1/2} \tilde{\mathbf{W}}_{i\pm 1/2} \tilde{\mathbf{R}}_{i\pm 1/2}^{-1}. \quad (3.84)$$

Παραλύποντας τους χωρικούς δείκτες και εκτελώντας τις πράξεις στην προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2 - \tilde{\lambda}^1} \begin{bmatrix} w^1 \tilde{\lambda}^2 - w^2 \tilde{\lambda}^1 & w^2 - w^1 \\ \tilde{\lambda}^1 \tilde{\lambda}^2 (w^1 - w^2) & \tilde{\lambda}^2 w^2 - \tilde{\lambda}^1 w^1 \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

Οι παραπάνω πίνακες μας επιτρέπουν να γράψουμε τις αριθμητικές ροές στην (3.48) σε μια πιο συμπαγή μορφή ως

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i\pm 1} + \mathbf{B}_{i\pm 1/2} \Delta_{i\pm 1/2} \mathbf{Q}]. \quad (3.86)$$

Στην συνέχεια οι έμμεσοι όροι $\mathbf{F}^{n+1}$ και $\tilde{\mathbf{G}}^{n+1}$ γραμμικοποιούνται αναπτύσσοντας τους κατά Taylor με κέντρο το $\mathbf{Q}_i^n$ για να δόσουν

$$\mathbf{F}_i^{n+1} = \mathbf{F}_i^n + \mathbf{J}^n \delta \mathbf{Q}_i + O(\Delta t^2), \quad (3.87)$$

$$\mathbf{G}_i^{n+1} = \mathbf{G}_i^n + \mathbf{J}_{\mathbf{G}_i}^n \delta \mathbf{Q}_i + O(\Delta t^2), \quad (3.88)$$

όπου $\delta \mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n$ και $\mathbf{J}_G$ ο Ιακωβιανός πίνακας του πηγαίου όρου $\mathbf{G}$ ως προς $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{J}_G = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -g \frac{\partial b}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.89)$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω και θεωρώντας την προσέγγιση $\mathbf{B}_{i\pm 1/2}^{n+1} = \mathbf{B}_{i\pm 1/2}^n$ στο (3.81) παράγουμε ένα block τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_i^n \delta \mathbf{Q}_{i-1} + \mathbf{B}\mathbf{B}_i^n \delta \mathbf{Q}_i + \mathbf{C}\mathbf{C}_i^n \delta \mathbf{Q}_{i+1} = \mathbf{b}_i^n \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (3.90)$$

Στην παραπάνω σχέση οι δείκτες $i = 2, \dots, N-1$ δηλώνουν τις αντίστοιχες block γραμμές, $\mathbf{A}\mathbf{A}_i^n, \mathbf{B}\mathbf{B}_i^n$ και $\mathbf{C}\mathbf{C}_i^n$ 2×2 πίνακες οι οποίοι είναι στοιχεία του block πίνακα και $\mathbf{b}_i^n$ διάνυσμα 2×1 .

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_i^n = -\frac{\lambda\theta}{2} \left[\mathbf{J}_{i-1/2}^L - \mathbf{B}_{i-1/2} \right]^n, \quad (3.91)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{B}_i^n = \mathbf{I} - \frac{\lambda\theta}{2} \left[\mathbf{B}_{i+1/2} + \mathbf{B}_{i-1/2} \right]^n - \theta \Delta t \mathbf{J}_G, \quad (3.92)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}_i^n = \frac{\lambda\theta}{2} \left[\mathbf{J}_{i+1/2}^R + \mathbf{B}_{i+1/2} \right]^n, \quad (3.93)$$

$$\mathbf{b}_i^n = -\lambda \left[\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-1/2} \right]^n + \Delta t \tilde{\mathbf{G}}_i. \quad (3.94)$$

Με $\mathbf{J}_{i-1/2}^{R,L}$ συμβολίζουμε τον υπολογισμό του Ιακωβιανού πίνακα της ροής στα δεξιά και αριστερά του μετώπου αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, $\mathbf{J}_{i-1/2}^{R,L} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{i-1/2}^{R,L})$. Στην περίπτωση του Flux-limiting $\mathbf{Q}_{i-1/2}^R = \mathbf{Q}_i$ και $\mathbf{Q}_{i-1/2}^L = \mathbf{Q}_{i-1}$ ενώ για το Slope-limiting ο πίνακας $\mathbf{B}_{i\pm 1/2}$ υπολογίζεται ως

$$\mathbf{B}_{i\pm 1/2} = \tilde{\mathbf{R}} \text{diag}[\psi(\tilde{\lambda}_{i\pm 1/2}^k)] \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \quad k = 1, 2 \quad (3.95)$$

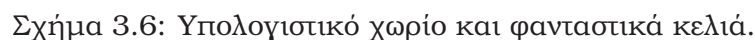
και η διακριτοποίηση των αριθμητικών ροών $\tilde{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2}$ και του πηγαίου όρου $\tilde{\mathbf{G}}_i$ υπολογίζονται από τις (3.60) και (3.76) αντίστοιχα. Το παραγόμενο αριθμητικό σχήμα είναι δεύτερης τάξης ως προς τη χωρική διάσταση και πρώτης τάξης ως προς τη χρονική. Συνιστάται να επιλέξουμε $\theta = 1$ και να μηδενίσουμε τον limiter στο αριστερό μέλος του (3.90), καθιστώντας έτσι τον έμμεσο τελεστή πρώτης τάξης ως προς την χωρική διάσταση επιτρέποντας όμως μεγαλύτερες τιμές στον CFL.

Το block-τριδιαγώνιο σύστημα (3.90) είναι γραμμένο μόνο για τους κόμβους $i = 2, \dots, N-1$, θα πρέπει να συμπληρωθεί λαμβάνοντας υπόψη τις εξωτερικές συνοριακές συνθήκες. Ακολουθώντας την διαδικασία όπως περιγράφεται στους Alcudo κ.α [11] το σύστημα (3.90) συμπληρώνεται για $i = 1, N$ θέτοντας

$$\mathbf{B}\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{I}, \mathbf{C}\mathbf{C}_1 \equiv \mathbf{0}, \mathbf{b}_1 \equiv \mathbf{0} \quad (3.96)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{B}_N \equiv \mathbf{I}, \mathbf{A}\mathbf{A}_N \equiv \mathbf{0}, \mathbf{b}_N \equiv \mathbf{0} \quad (3.97)$$

Ο παραπάνω πίνακας είναι αυστηρά διαγώνια υπέρτερος. Επομένως, χρειαζόμαστε μόνο μία απλή μέθοδο επίλυσης του όπως είναι ο αλγόριθμος του Thomas για block τριδιαγώνια γραμμικά συστήματα, ή μία μέθοδο διαδοχικής χαλάρωσης. Μία ακόμη μεθοδολογία που μπορούμε να ακολουθήσουμε για την συμπλήρωση του συστήματος είναι να χρησιμοποιήσουμε την (3.90) για $i = 1, N$ λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος. Μια πιο εκτενής περιγραφή θα δοθεί κατά την παρουσίαση του δισδιάστατου αριθμητικού σχήματος σε επόμενο κεφάλαιο. Για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών [12] επεκτείνουμε το υπολογιστικό χωρίο θεωρώντας επιπλέον υπολογιστικά κελιά, τα λεγόμενα φανταστικά κελιά, σε κάθε άκρο όπου η τιμή της λύσης είναι προκαθορισμένη και εξαρτάται από την συνοριακή συνθήκη. Στην παρούσα εργασία θεωρούμε σαν φανταστικά κελιά τα C_{-1}, C_0, C_1 και C_N, C_{N+1}, C_{N+2} (Σχ. 3.6). Όπου τα κελιά C_1 και C_N τα θέτουμε ως φανταστικά λόγω της συμπλήρωσης του συστήματος έτσι ώστε να μπορέσει να γίνει σωστά η ανανέωση της τιμής της λύσης.



Στην περίπτωση εφαρμογής συννοριακών συνθηκών ελεύθερης ροής οι τιμές που δίνουμε στα φανταστικά κελιά εξάγονται από αυτές των εσωτερικών ως εξής

$$\mathbf{Q}_N^n = \mathbf{Q}_{N-1}^n, \mathbf{Q}_{N+1}^n = \mathbf{Q}_N^n, \mathbf{Q}_{N+2}^n = \mathbf{Q}_{N+1}^n \quad (3.99)$$

Αντίστοιχα οι τιμές που δίνουμε στα φανταστικά κελιά σε κάθε χρονικό βήμα καθορίζονται ως εξής

$$Q_1^n, Q_0^n, Q_{-1}^n \begin{cases} h_1^n = h_2^n, h_0^n = h_2^n, h_{-1}^n = h_2^n \\ (hu)_1^n = -(hu)_2^n, (hu)_0^n = -(hu)_2^n, (hu)_{-1}^n = -(hu)_2^n, \end{cases}$$

$$Q_N^n, Q_{N+1}^n, Q_{N+2}^n \begin{cases} h_N^n = h_{N-1}^n, h_{N+1}^n = h_{N-1}^n, h_{N+2}^n = h_{N-1}^n \\ (hu)_N^n = -(hu)_{N-1}^n, (hu)_{N+1}^n = -(hu)_{N-1}^n, (hu)_{N+2}^n = -(hu)_{N-1}^n. \end{cases}$$

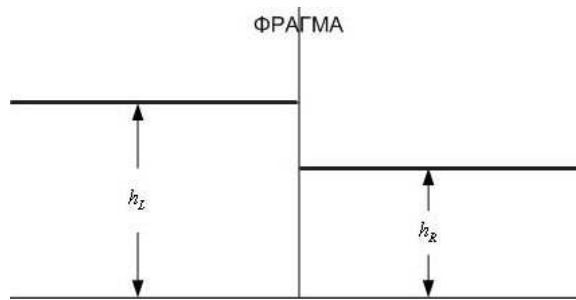
Γενικότερα οι συνοριακές ορίζονται βάση των χαρακτηριστικών, για υποκρίσιμες και υπερκρίσιμες ροές στο σύνορο.

3.6 Αριθμητικά αποτελέσματα στη μία διάσταση

3.6.1 Κατάρρευση φράγματος

Σε αυτό το πρόβλημα θεωρούμε ένα μονοδιάστατο κανάλι μήκους $2.000m$ στη μέση του οποίου είναι τοποθετημένο ένα φράγμα. Ο λόγος του βάθους του ρευστού είναι h_R/h_L όπου h_L το βάθος του ρευστού στο αριστερό άκρο του καναλιού και h_R το βάθος του ρευστού στο δεξιό άκρο του καναλιού (Σχ 3.7).

Το φράγμα καταρρέει την χρονική στιγμή $t = 0$ και έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία



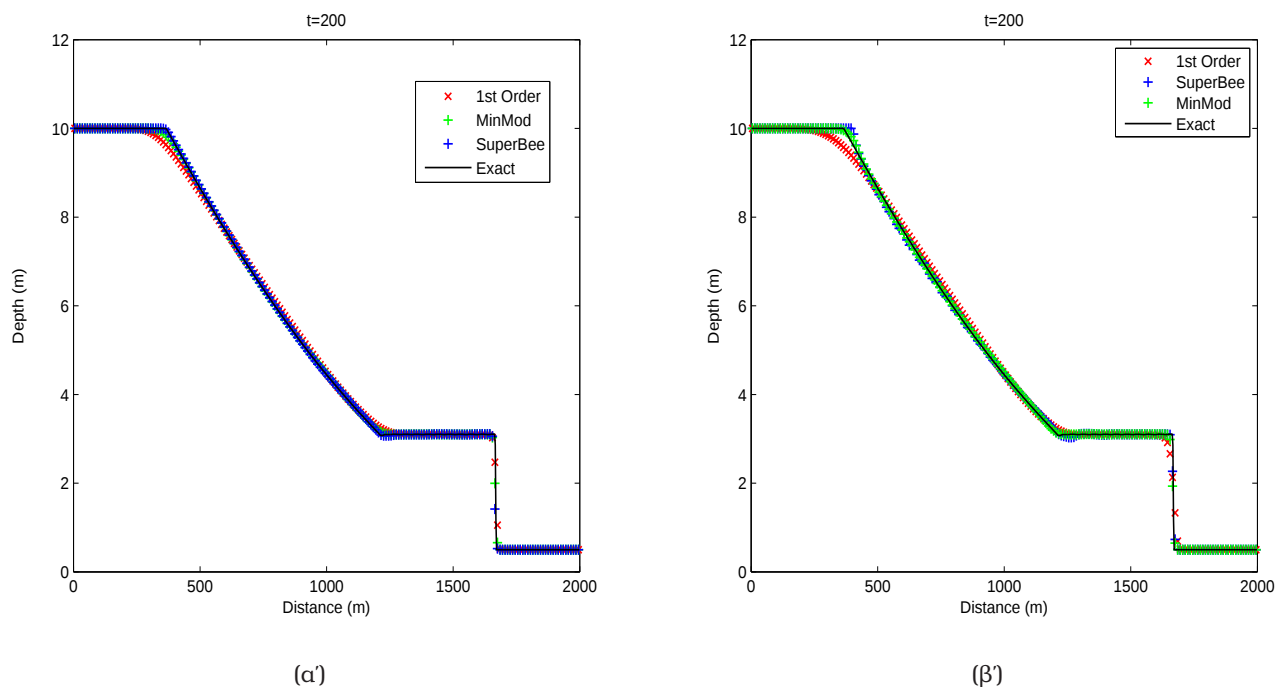
Σχήμα 3.7: Αρχικές συνθήκες για το βάθος του προβλήματος, Κατάρρευση φράγματος.

ενός κύματος τύπου shock το οποίο μεταδίδεται προς το δεξιό άκρο του καναλιού και ενός κύματος αραίωσης προς το αριστερό άκρο του καναλιού. Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος για το βάθος και την ταχύτητα του ρευστού είναι αντίστοιχα

$$u(x, 0) \equiv 0$$

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_L & , x \leq 1000 \\ h_R & , x > 1000 \end{cases} ,$$

με $h_L = 10m$ και $h_R = 0.5m$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας ορίζεται $g = 1m/s^2$. Η εκτέλεση του προβλήματος ολοκληρώνεται την χρονική στιγμή $t = 200s$. Στα αποτελέσματα που παρατίθενται αρχικά συγκρίνουμε την αναλυτική λύση με την αριθμητική λύση του

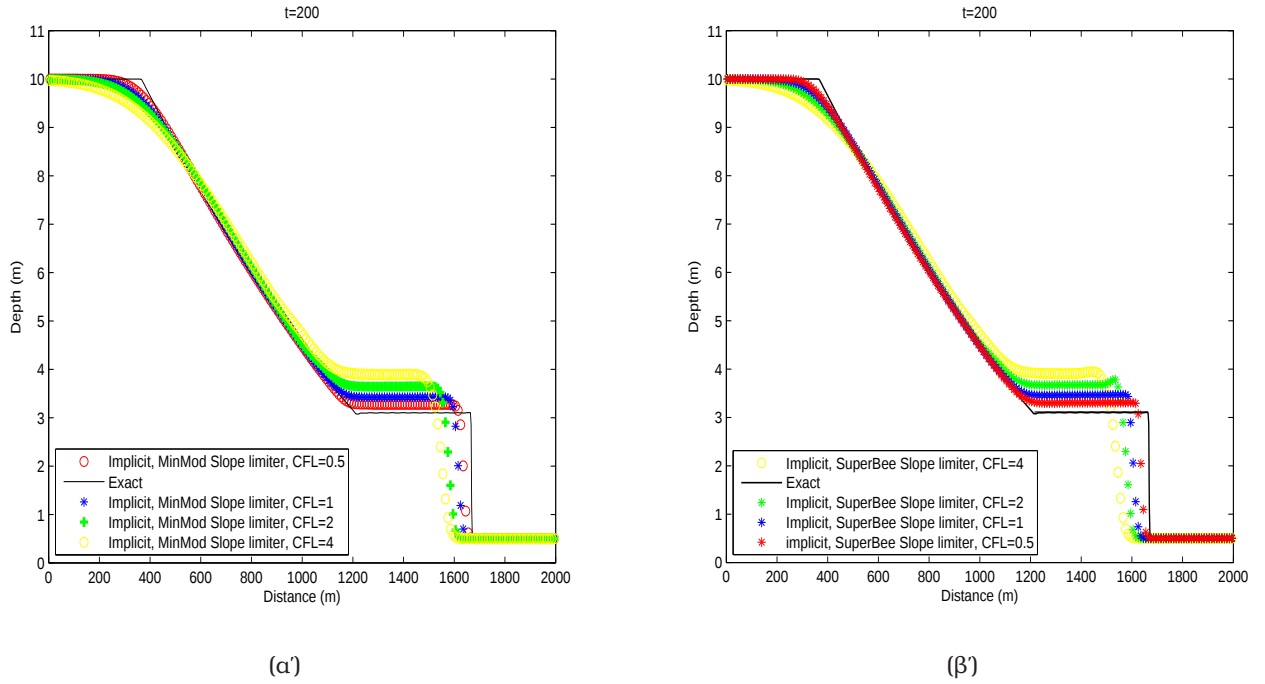


Σχήμα 3.8: Άμεσο αριθμητικό σχήμα. (α') Flux-limiting , πλήθος κελιών 200 και $CFL = 0.9$. (β') MUSCL , πλήθος κελιών 200 και $CFL = 0.4$.

άμεσου αριθμητικού σχήματος για οριοθέτες ροής και οριοθέτες κλίσης και στην συνέχεια παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για το έμμεσο με οριοθέτες ροής και κλίσης αριθμητικό σχήμα για τέσσερις διαφορετικούς αριθμούς CFL. Σε όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα χρησιμοποιούμε ομοιόμορφη διαμέριση με 200 υπολογιστικά κελιά. Στα σχήματα 3.8(α') και 3.8(β') παρουσιάζεται η εξέλιξη του βάθους του νερού την χρονική στιγμή $t = 200s$ για το πρώτης και δεύτερης τάξης άμεσο αριθμητικό σχήμα με οριοθέτες ροής (Flux-limiting) και οριοθέτες κλίσης (MUSCL) αντίστοιχα.

Στα σχήματα 3.9(α')-3.10(α') παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του έμμεσου αριθμητικού σχήματος, πρώτης και δεύτερης τάξης για τους οριοθέτες κλίσης MinMod και SuperBee. Στα σχήματα 3.10(β')-3.10(γ') παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του έμμεσου αριθμητικού σχήματος, πρώτης και δεύτερης τάξης για τους οριοθέτες ροής MinMod, SuperBee και για τέσσερις διαφορετικές τιμές του αριθμού CFL .

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι, το άμεσο αριθμητικό σχήμα τόσο με οριοθέτες ροής όσο και με οριοθέτες κλίσης υπολογίζει σωστά την θέση και το ύψος του Shock καθώς και την έκταση του κύματος αραίωσης Σχ. 3.8(α')-3.8(β'). Σε αντίθεση, στο έμμεσο αριθμητικό σχήμα με οριοθέτες ροής καθώς αυξάνει ο αριθμός CFL οι αριθμητικές λύσεις παρουσιάζουν μεγαλύτερη διάχυση κυρίως στην πρόβλεψη του κύματος αραίωσης και του ύψους του Shock Σχ. 3.10(α')-3.10(γ'). Τέλος, στο έμμεσο αριθμητικό σχήμα με οριοθέτες κλίσεις, καθώς αυξάνει ο αριθμός CFL οι αριθμητικές λύσεις προβλέπουν υψηλότερο μέτωπο στο Shock με μικρότερη ταχύτητα, σε σχέση με την ακριβή λύση.



Σχήμα 3.9: (α) Έμμεσο, MUSCL (MM limiter). (β) Έμμεσο, MUSCL (SB limiter).

3.6.2 Ροή σταθερής ταχύτητας

Ο σκοπός αυτού του προβλήματος είναι η μελέτη της συντηρητικότητας και της σύγκλισης του αριθμητικού σχήματος προς την ροή σταθερής ταχύτητας πάνω από τοπογραφία σε κανάλι μήκους 25m . Η τοπογραφία του πυθμένα του καναλιού ορίζεται ως εξής:

$$b(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2, & \text{άν } 8 < x < 12 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

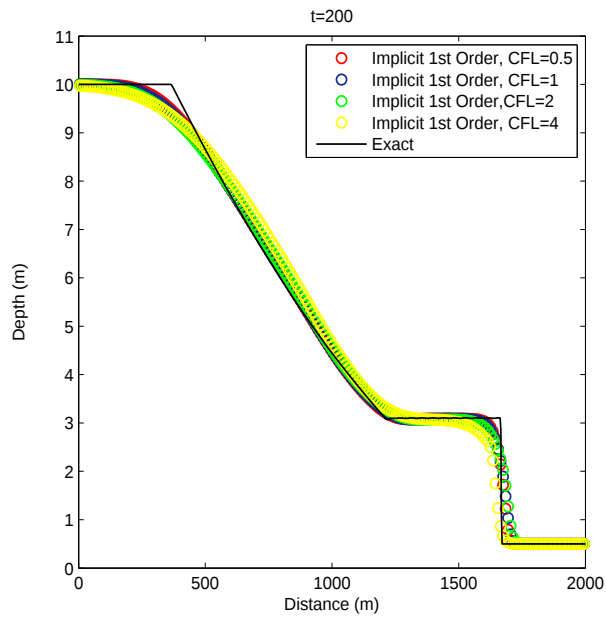
Ανάλογα με τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες, η ροή μπορεί να είναι υποκρίσιμη, trans-critical με σταθερό shock , ή υπερκρίσιμη. Στις περιπτώσεις που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια ως αρχικές συνθήκες παίρνουμε, το ύψος του νερού κατά μήκος του καναλιού να είναι σταθερό και να ισούται με την τιμή της δεξιάς συνοριακής συνθήκης που επιβάλλουμε στο εκάστοτε πρόβλημα και την ορμή ίση με το μηδέν. Οι αναλυτικές λύσεις για τις επόμενες τέσσερις περιπτώσεις δίνονται στο [16]. Οι αριθμητικές λύσεις για το βάθος και την εκροή που παρουσιάζονται στην συνέχεια έχουν υπολογιστεί στην χρονική στιγμή $t = 200s$ χρησιμοποιώντας 100 υπολογιστικά κελιά.

3.6.3 Στάσιμη κατάσταση

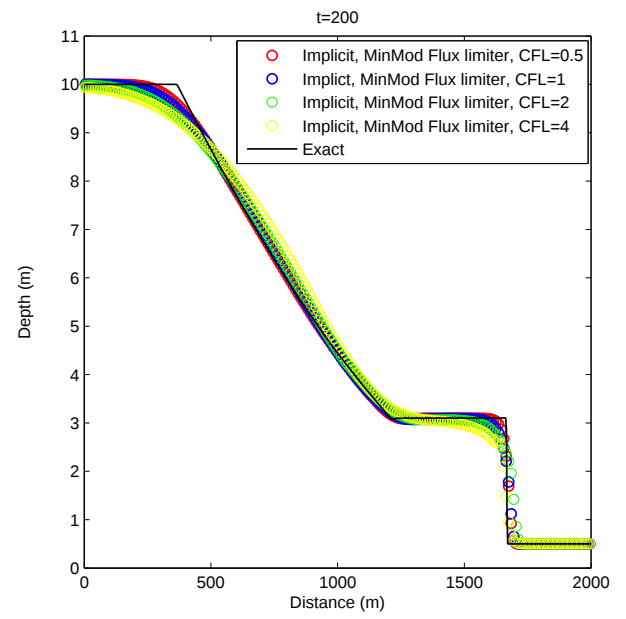
Οι αρχικές συνθήκες για αυτό το πρόβλημα είναι

$$h(x, 0) + b(x) = 2m \quad (3.100)$$

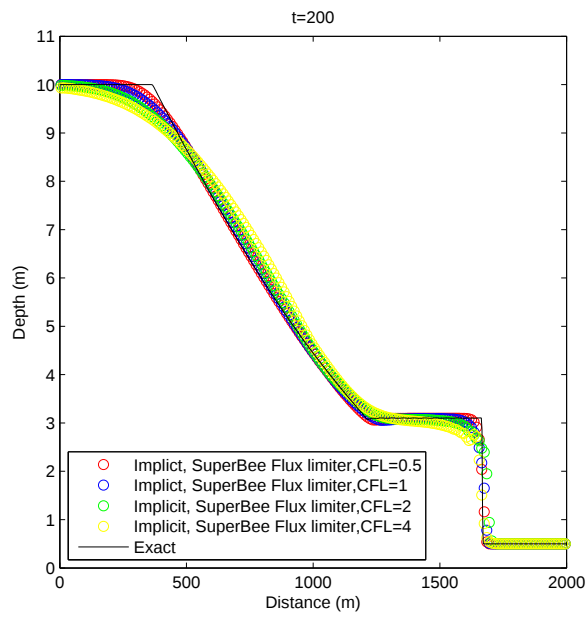
$$u(x, 0) \equiv 0m/s \quad (3.101)$$



(α')



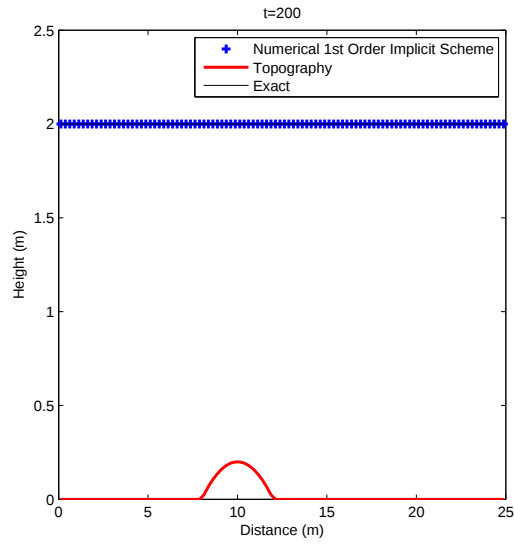
(β')



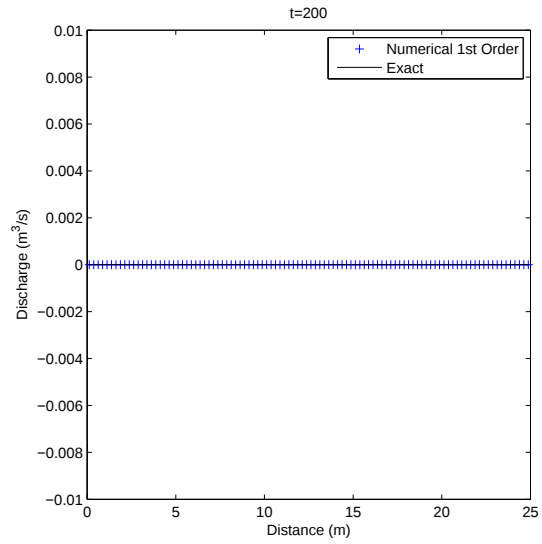
(γ')

Σχήμα 3.10: (α) Έμμεσο πρώτης τάξης αριθμητικό σχήμα. (β) Έμμεσο, Flux-limiting (MM limiter). (γ) Έμμεσο, Flux-limiting (SB limiter).

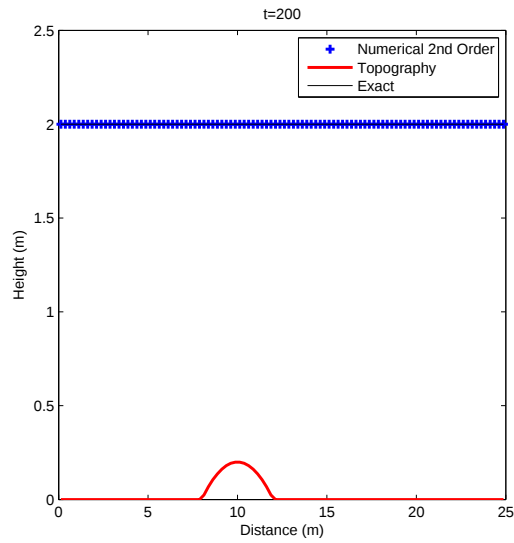
Παρατηρώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα 3.11(α')-3.11(δ') και 3.12(α')-3.12(δ') βλέπουμε ότι το έμμεσο αριθμητικό σχήμα με Flux και Slop limiting διατηρούν την κατάσταση ισορροπίας σε ακρίβεια υπολογιστή. Το ίδιο ισχύει και για το άμεσο αριθμητικό σχήμα πρώτης και δεύτερης τάξης. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση του έμμεσου αριθμητικού σχήματος μπορέσαμε να χρησιμοποιήσουμε $CFL = 200$ πράγμα το οποίο μείωσε το πλήθος των επαναλήψεων στο 7 σε αντίθεση με το άμεσο αριθμητικό σχήμα με το οποίο χρειάστηκαν κατά μέσο όρο 1500 επαναλήψεις.



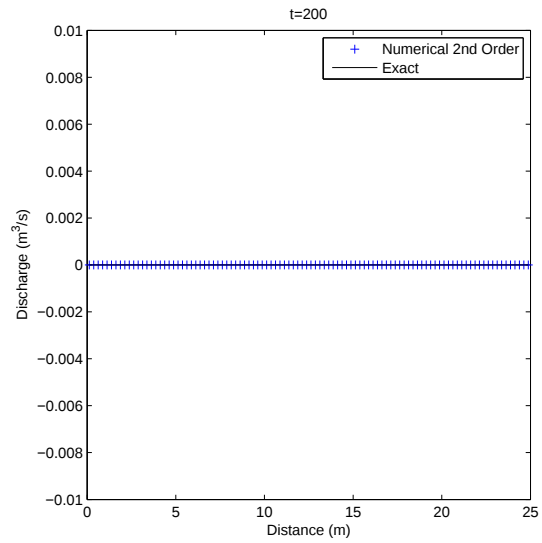
(α')



(β')

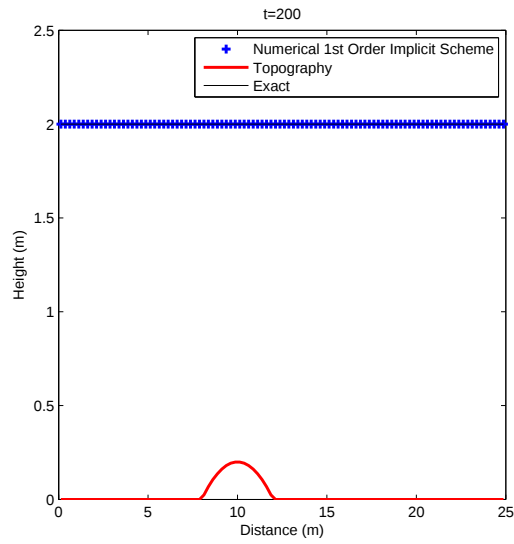


(γ')

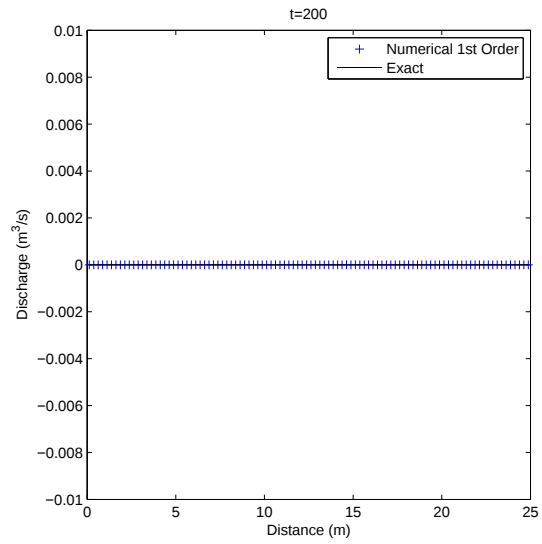


(δ')

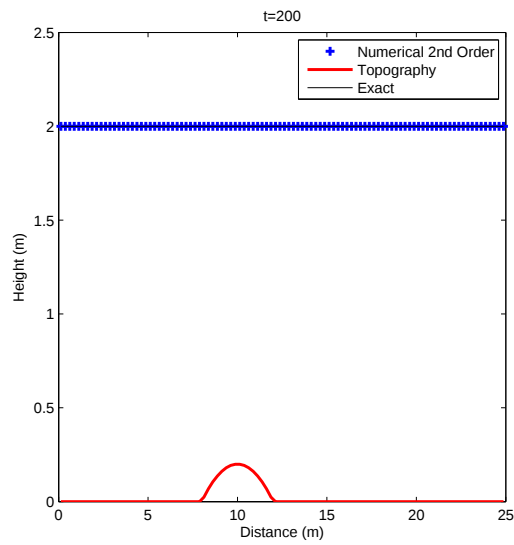
Σχήμα 3.11: Κατάσταση ισορροπίας: $CFL = 200$. (α)-(β) Έμμεσο πρώτης τάξης. (γ)-(δ) Έμμεσο, SuperBee Flux-limiter.



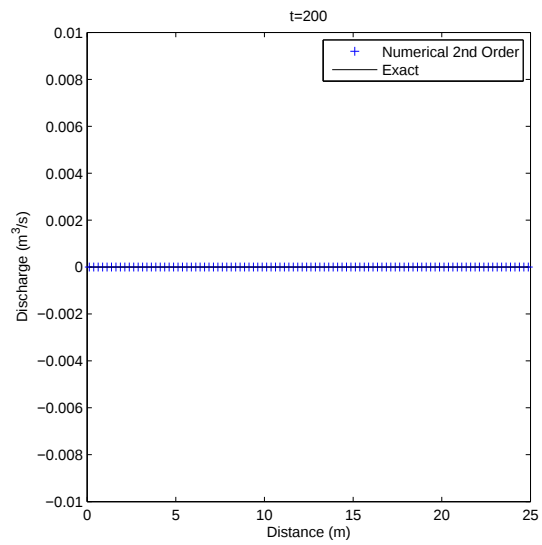
(α')



(β')



(γ')



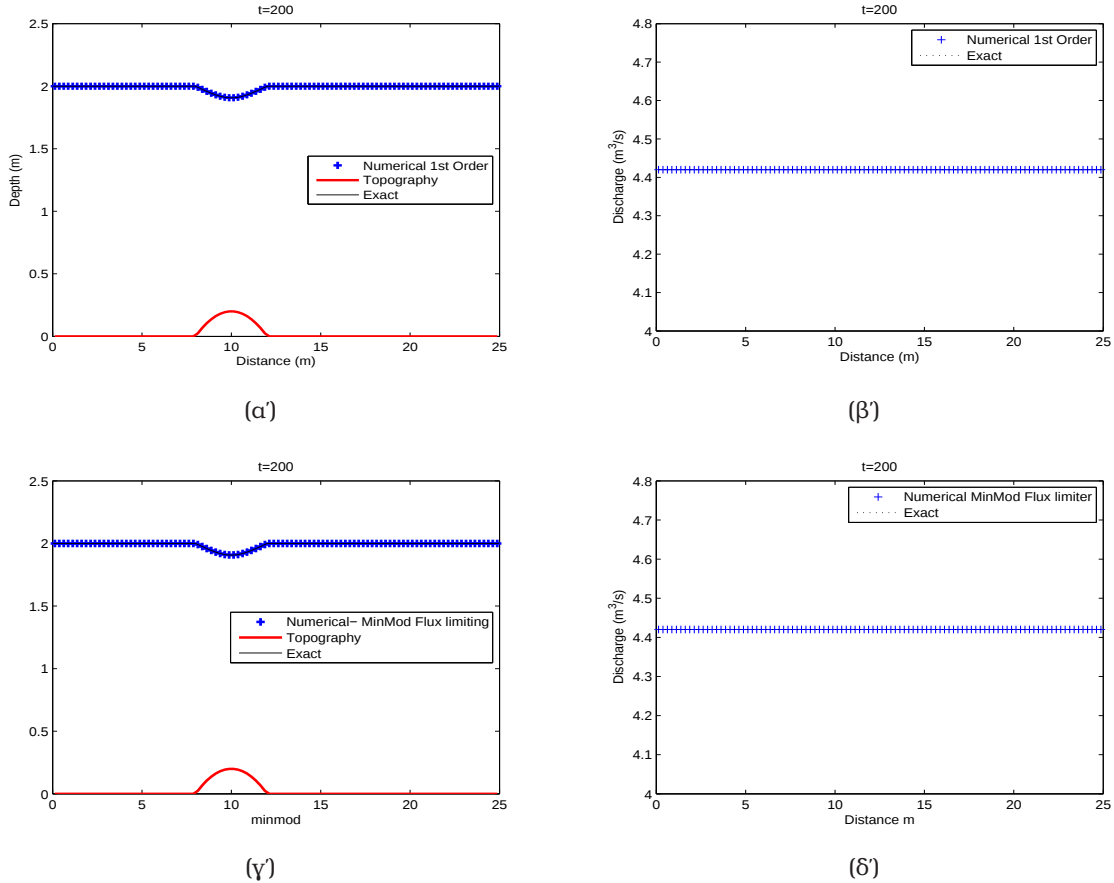
(δ')

Σχήμα 3.12: Κατάσταση ισορροπίας: $CFL = 200$. (α)-(β) Έμμεσο πρώτης τάξης. (γ)-(δ) Έμμεσο, MUSCL, (SB limiter).

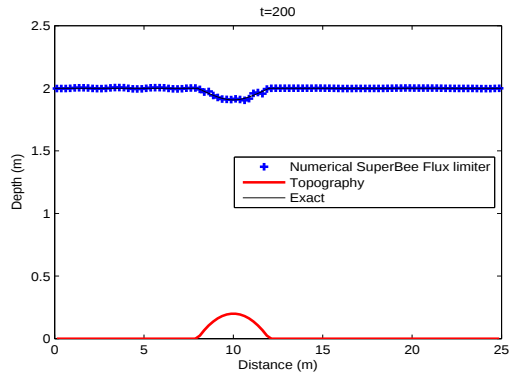
3.6.4 Υποκρίσιμη ροή

Για αυτό το πρόβλημα θέτουμε $hu = 4.42m^3/s$ για την αριστερή συνοριακή συνθήκη της εκροής και $h = 2m$ για την δεξιά συνοριακή συνθήκη του βάθους. Παρακάτω παραθέτουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για το άμεσο και έμμεσο αριθμητικό σχήμα πρώτης και δεύτερης τάξης.

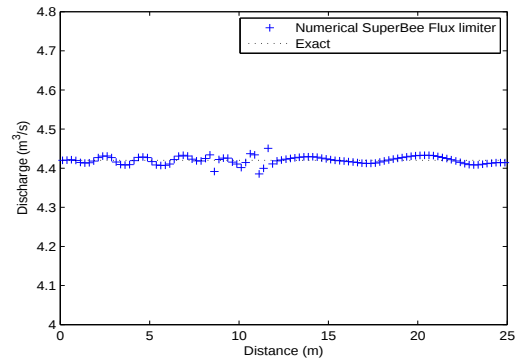
Παρατηρώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα 3.13(α')-3.13(δ'), 3.14(α')-3.14(β'), 3.15(α')-3.15(δ') και 3.16(α')-3.16(δ'), 3.17(α')-3.17(β'), 3.18(α')-3.18(δ') βλέπουμε ότι τόσο το άμεσο όσο και το έμμεσο αριθμητικό σχήμα με Flux και Slop limiting διατηρούν την κατάσταση ισορροπίας εκτός από την περίπτωση του άμεσου αριθμητικού σχήματος με οριοθέτη ροής SuperBee σχήμα 3.14(α')-3.14(β') όπου παρατηρούνται αριθμητικές ταλαντώσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση του έμμεσου πρώτης τάξης αριθμητικού σχήματος μπορέσαμε να χρησιμοποιήσουμε $CFL = 100$ πράγμα το οποίο μείωσε τις επαναλήψεις από 6017 που χρειάστηκαν για το άμεσο στις 55. Επίσης, στην περίπτωση του άμεσου αριθμητικού σχήματος με οριοθέτη κλίσης και $CFL = 0.4$ χρειάστηκαν κατά μέσο όρο 11.000 επαναλήψεις ενώ στο έμμεσο αριθμητικό σχήμα με οριοθέτη κλίσης οι επαναλήψεις μειώθηκαν στις 272.



Σχήμα 3.13: Υποκρίσιμη ροή: $CFL = 0.9$. (α)-(β) Άμεσο πρώτης τάξης. (γ)-(δ) Άμεσο, MinMod Flux-limiter.

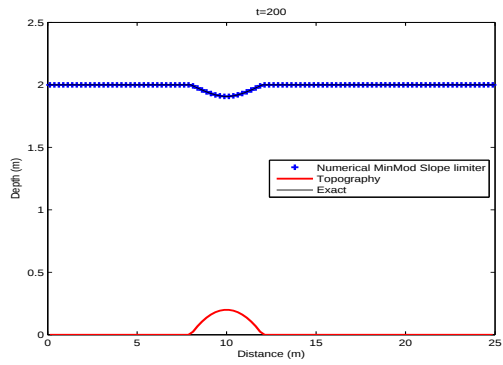


(α')

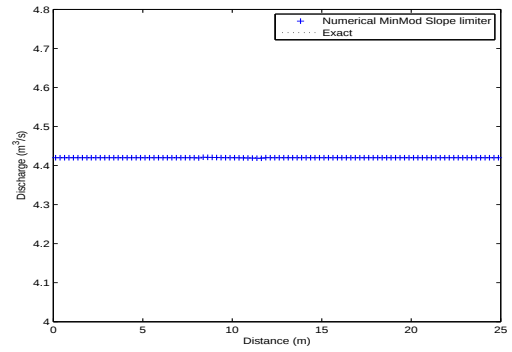


(β')

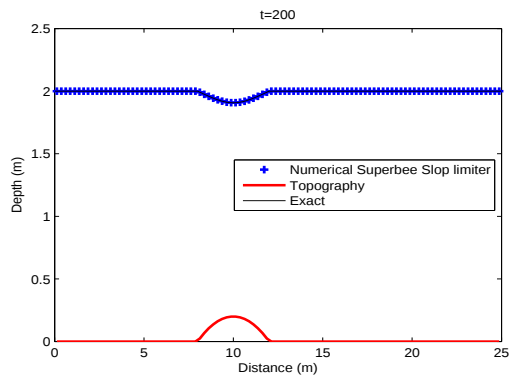
Σχήμα 3.14: Υποκρίσιμη ροή: $CFL = 0.9$. (α)-(β) Άμεσο, SuperBee Flux-limiter.



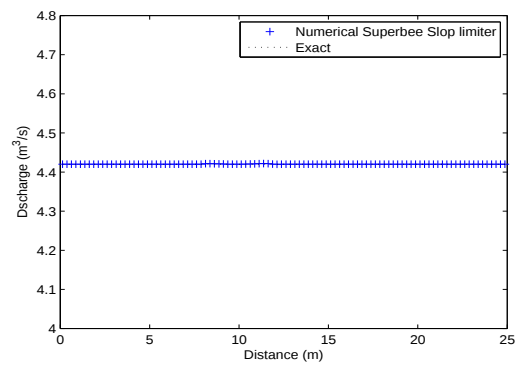
(α'')



(β'')

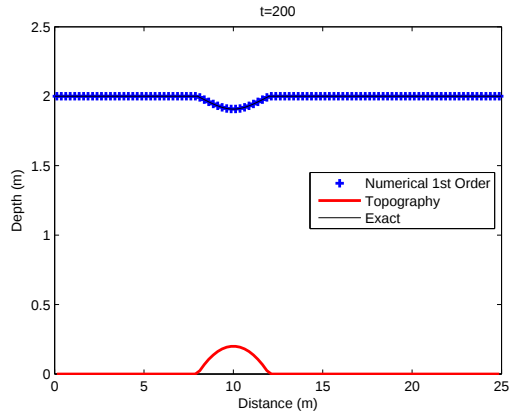


(γ')

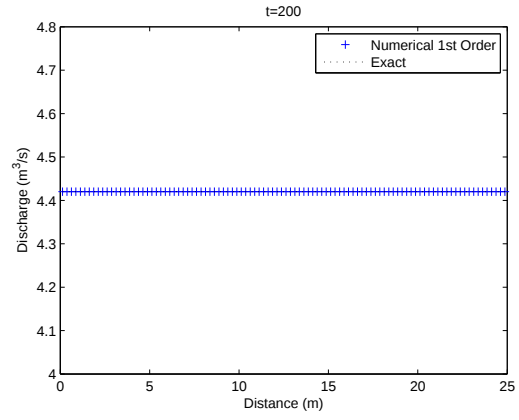


(δ')

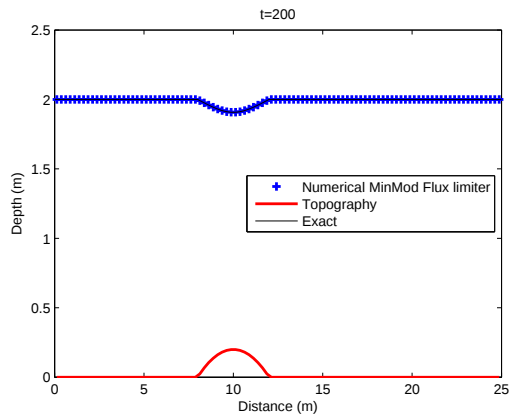
Σχήμα 3.15: Υποκρίσιμη ροή: $CFL = 0.4$. (α)-(β) Άμεσο, MUSCL (MM limiter). (γ)-(δ) Άμεσο, MUSCL (SB limiter).



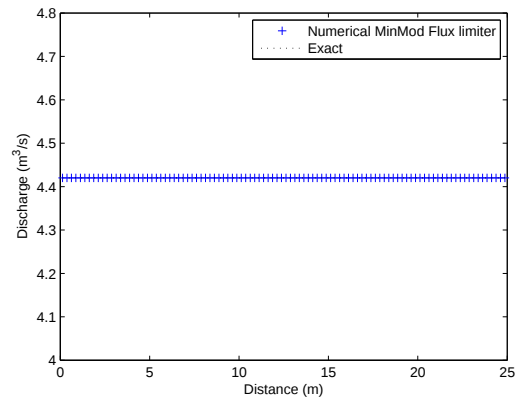
(α')



(β')

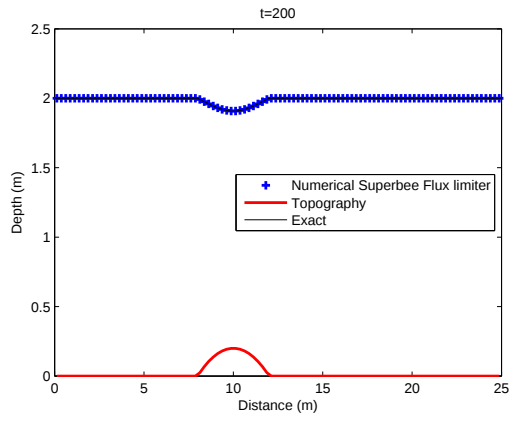


(γ)

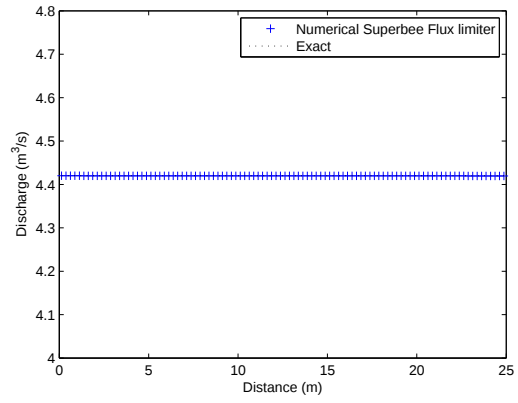


(δ)

Σχήμα 3.16: Υποκρίσιμη ροή: (α)-(β) Έμμεσο πρώτης τάξης, $CFL = 100$. (γ)-(δ) Έμμεσο MinMod Flux-limiting, $CFL = 20$.

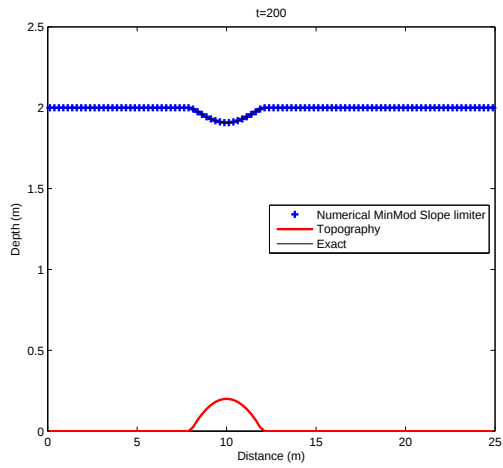


(α')

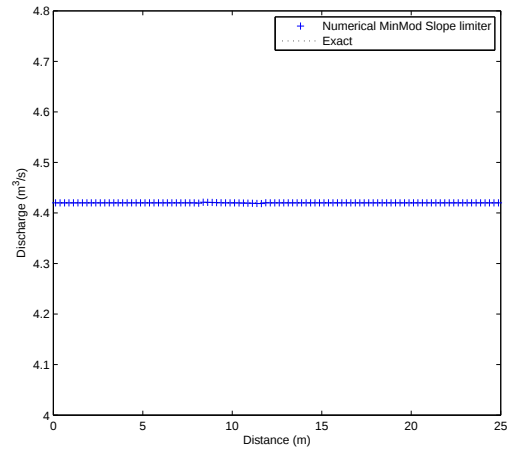


(β')

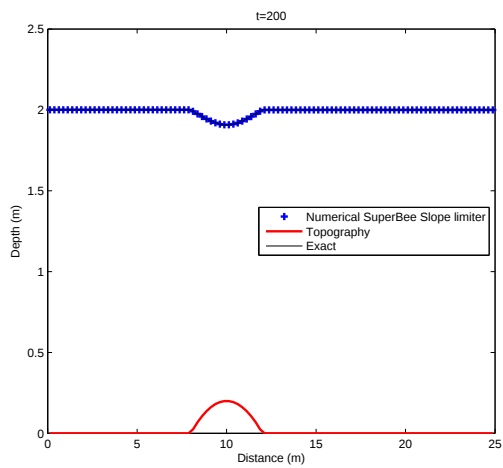
Σχήμα 3.17: Υποκρίσιμη ροή: $CFL = 20$. (α)-(β) Έμμεσο, SuperBee Flux-limiter.



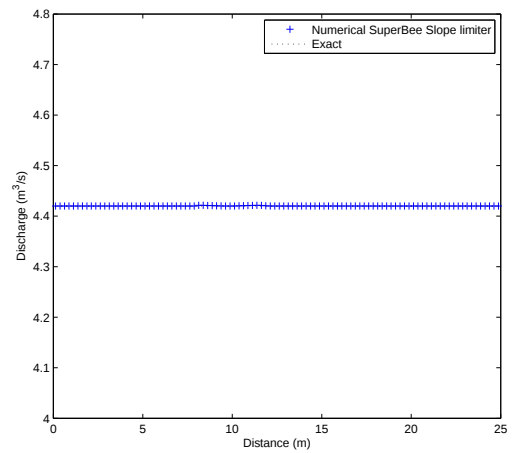
(α'')



(β'')



(γ')

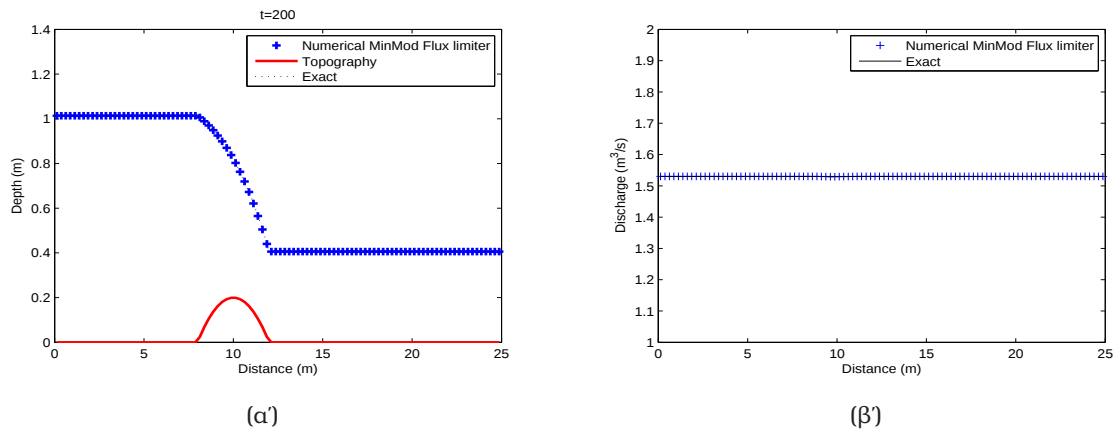


(δ')

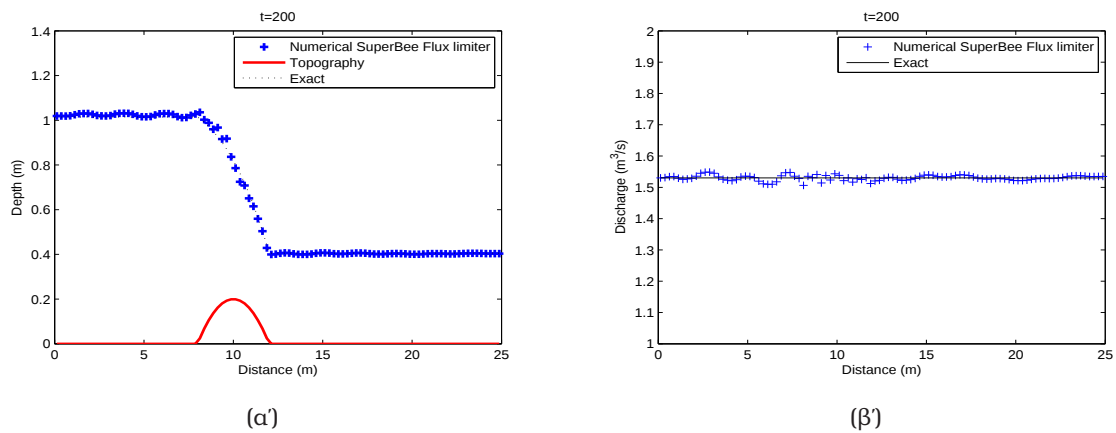
Σχήμα 3.18: Υποκρίσιμη ροή: $CFL = 20$. (α)-(β) Έμμεσο, MUSCL (MM limiter). (γ)-(δ) Έμμεσο, MUSCL (SB limiter).

3.6.5 Transcritical ρή χωρίς Shock

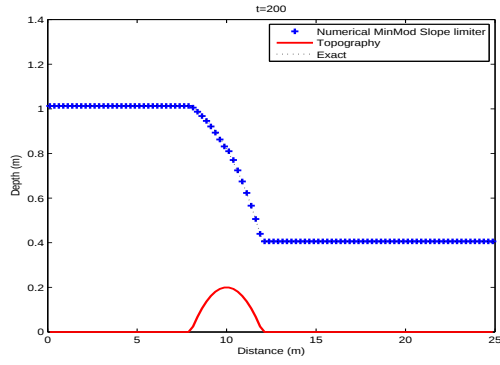
Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε $hu = 1.53m^3/s$ για την αριστερή συνοριακή συνθήκη της εκροής και $h = 0.66m$ για την δεξιά συνοριακή συνθήκη του βάθους μόνο αν η ρή είναι υποκρίσιμη. Εάν η ρή στο δεξιό άκρο του καναλιού είναι υπερκρίσιμη τότε δεν επιβάλλουμε καμία συνοριακή συνθήκη στο δεξιό άκρο.



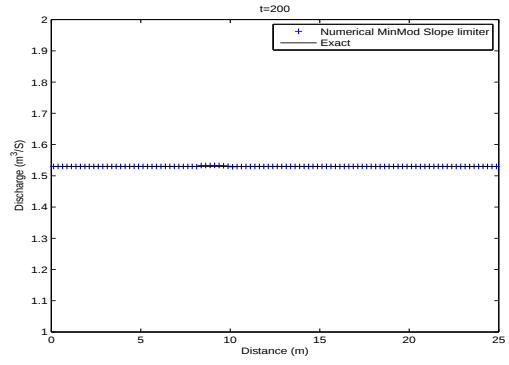
Σχήμα 3.19: Transcritical ρή χωρίς Shock: $CFL = 0.9$. (α)-(β) Άμεσο, MinMod Flux-limiter.



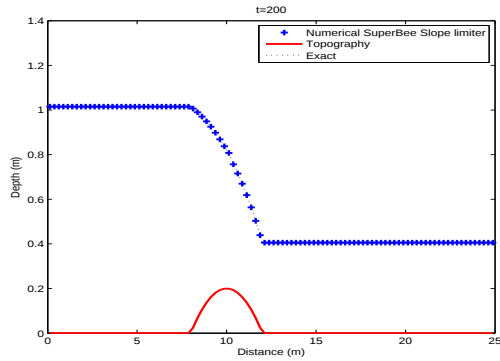
Σχήμα 3.20: Transcritical ρή χωρίς Shock: $CFL = 0.9$. (α')-(β') Άμεσο, SuperBee Flux-limiter.



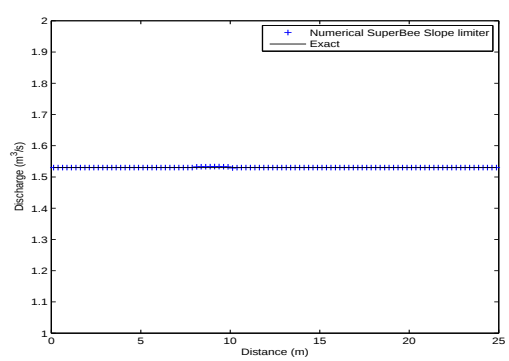
(α')



(β')

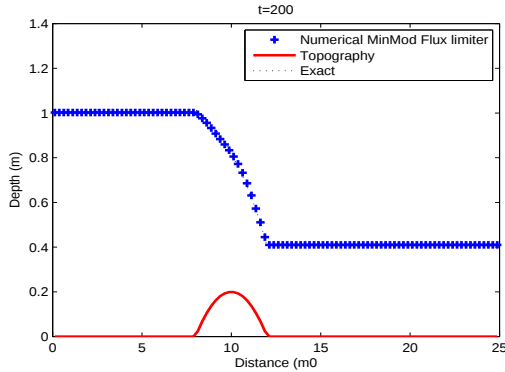


(γ')

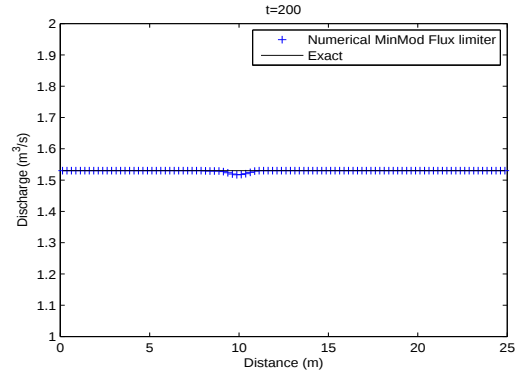


(δ')

Σχήμα 3.21: Transcritical ρή χωρίς Shock: $CFL = 0.4$. (α)-(β) Άμεσο MUSCL (MM limiter). (γ)-(δ) Άμεσο MUSCL (SB limiter).



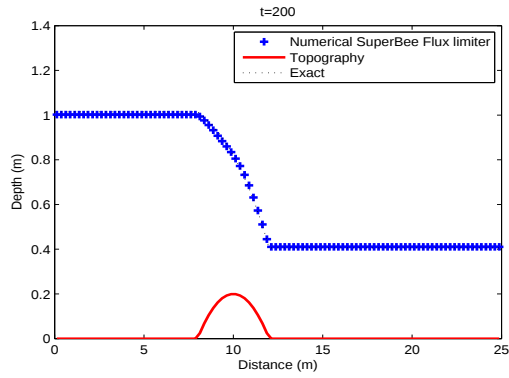
(α'')



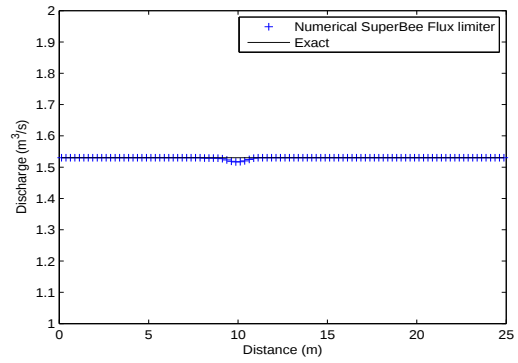
(β'')

Σχήμα 3.22: Transcritical ρή χωρίς Shock: $CFL = 20$. (α)-(β) Έμμεσο, MinMod Flux-limiter.

Συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα με την ακριβή λύση παρατηρούμε ότι, το άμεσο αριθμητικό σχήμα συγκλίνει στην σωστή στάσιμη κατάσταση χωρίς την εμφάνιση αριθμητικών ταλαντώσεων Σχ. 3.19(α')-3.19(β'), 3.21(α')-3.21(δ') εκτός της περίπτωσης που χρησιμοποιούμε τον οριοθέτη ροής SuperBee Σχ. 3.20(α')-3.20(β'). Το έμμεσο Flux-limiting

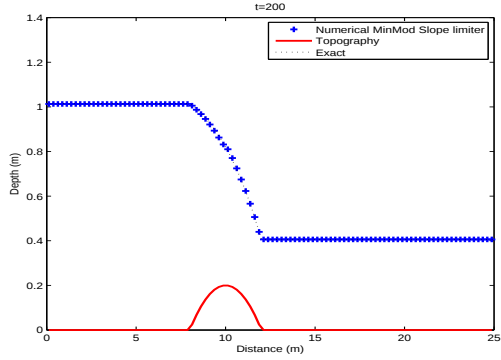


(α')

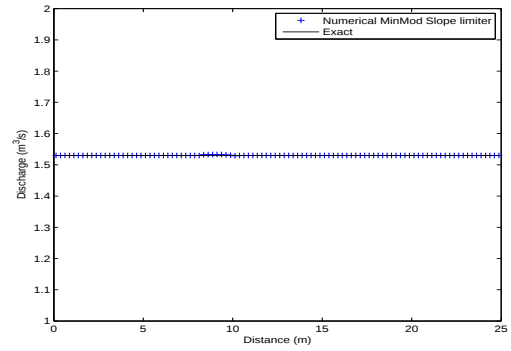


(β)

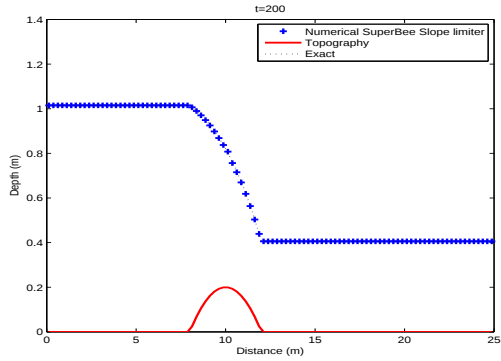
Σχήμα 3.23: Transcritical ρή χωρίς Shock: $CFL = 20$. (α)-(β) Έμμεσο, SuperBee Flux-limiter.



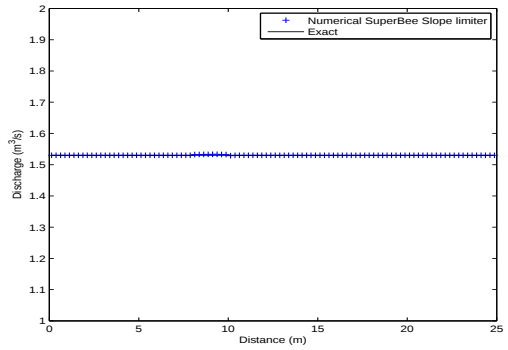
(α')



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 3.24: Transcritical ρή χωρίς Shock: $CFL = 20$. (α)-(β) Έμμεσο, MUSCL (MM limiter). (γ)-(δ) Έμμεσο, MUSCL (SB limiter).

αριθμητικό σχήμα παρουσιάζει μία μικρή απόκλιση από την ακριβή λύση ως προς την διατήρηση της ισορροπίας πάνω από την τοπογραφία Σχ. 3.22(α')-3.23(β),

3.6.6 Transcritical ροή με Shock

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αυτού δημιουργούν ένα στάσιμο Shock πάνω από την τοπογραφία. Για την αριστερή συνοριακή συνθήκη της ορμής θέτουμε $hu = 0.18m^3/s$ ενώ για την δεξιά συνοριακή συνθήκη του βάθους θέτουμε $h = 0.33m$. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα 3.25(α')-3.25(γ') και 3.26(α')-3.26(δ') παρατηρούμε ότι το έμμεσο αριθμητικό σχήμα μπορεί και υπολογίζει σωστά την θέση του Shock πάνω από την τοπογραφία, χρησιμοποιώντας $CFL = 20$.

3.6.7 Διάδοση κύματος

Το πρόβλημα αυτό προτάθηκε αρχικά από τον Leveque [20]. Το πρόβλημα αποτελείται από ένα κανάλι μήκους $1m$ με την τοπογραφία του πυθμένα να δίνεται ως ακολούθως.

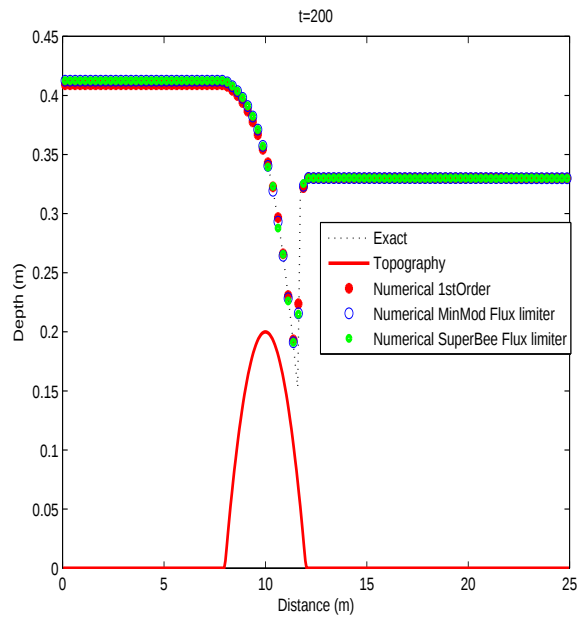
$$b(x) = \begin{cases} 0.25(\cos(\pi(x - 0.5)/0.1) + 0.1) & \text{άν } |x - 0.5| \leq 0.1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.102)$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι

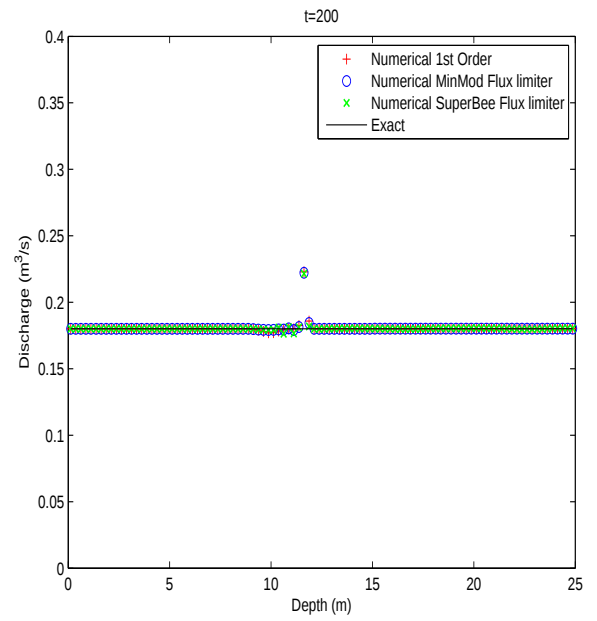
$$u(x, 0) = 0 \quad (3.103)$$

$$h(x, 0) + b(x) = \begin{cases} 1.0 + \varepsilon & \text{άν } 0.1 < x < 0.2 \\ 1.0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.104)$$

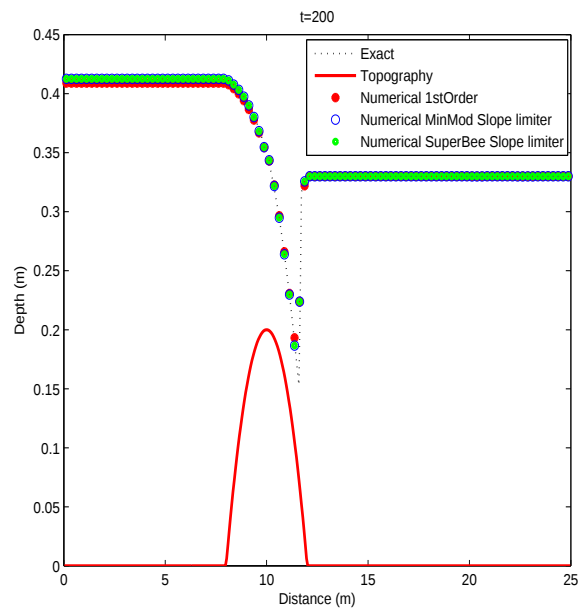
όπου ε μια μικρή διαταραχή. Οι αρχικές συνθήκες για δύο περιπτώσεις, $\varepsilon = 0.2$ και $\varepsilon = 0.01$ φαίνονται στο σχήμα 3.27(α')-3.27(β'). Οι αριθμητικές λύσεις για το βάθος που παρουσιάζονται στην συνέχεια έχουν υπολογιστεί στην χρονική στιγμή $t = 0.7s$ χρησιμοποιώντας ομοιόμορφη χωρική διαμέριση 200 κελιών και συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής. Παρατηρώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα βλέπουμε ότι λόγω της αρχικής διαταραχής δημιουργούνται δύο κύματα, ένα κύμα το οποίο κινείται προς τα δεξιά του καναλιού και ανακλάται μερικός, όταν περνάει πάνω από την τοπογραφία, δημιουργώντας ένα κύμα το οποίο κινείται προς τα αριστερά του καναλιού.



(α')

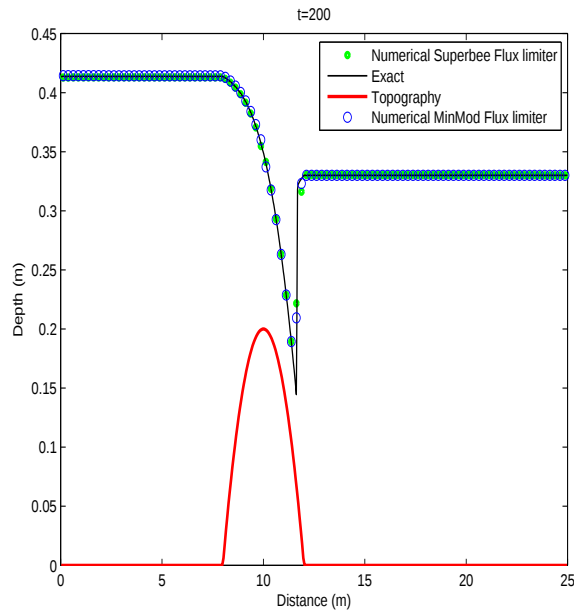


(β')

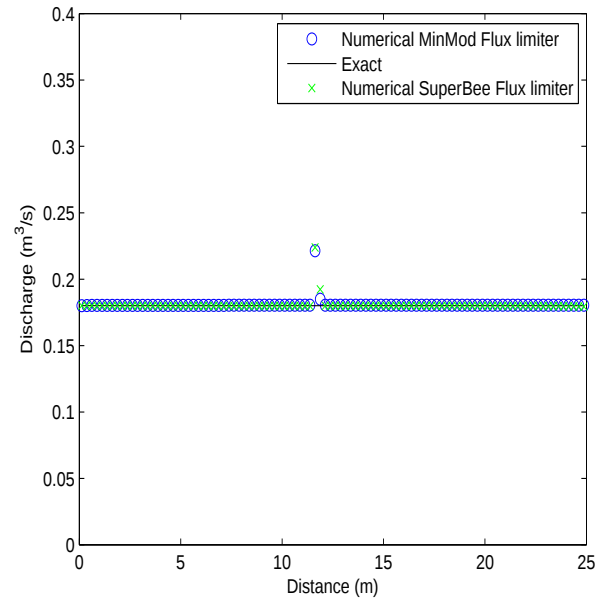


(γ')

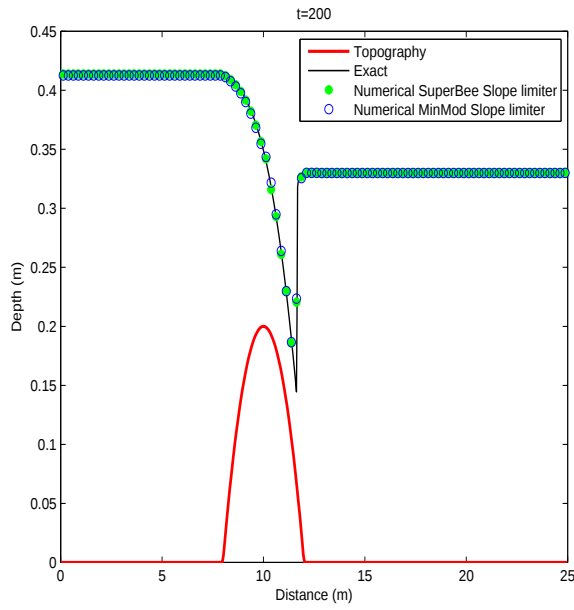
Σχήμα 3.25: Transcritical ρή με Shock : Άμεσο αριθμητικό σχήμα πρώτης και δεύτερης τάξης. (α)-(β) Flux-limiting, $CFL = 0.9$. (β)-(γ) MUSCL, $CFL = 0.4$.



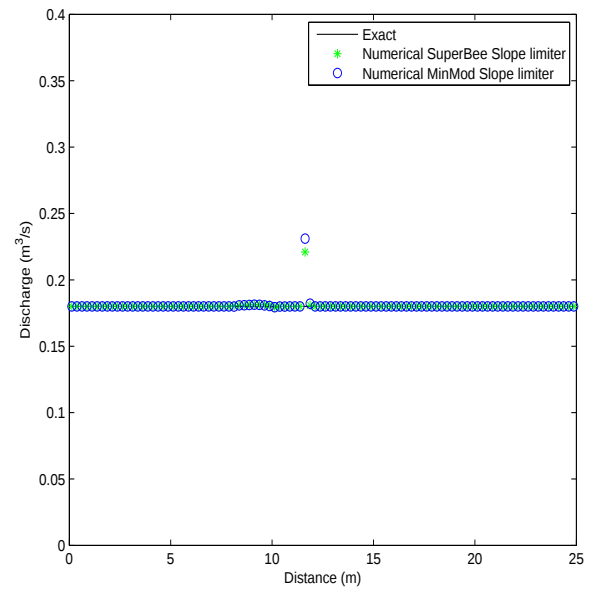
(α')



(β')

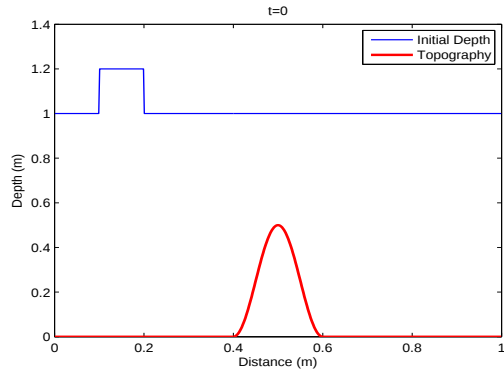


(γ')

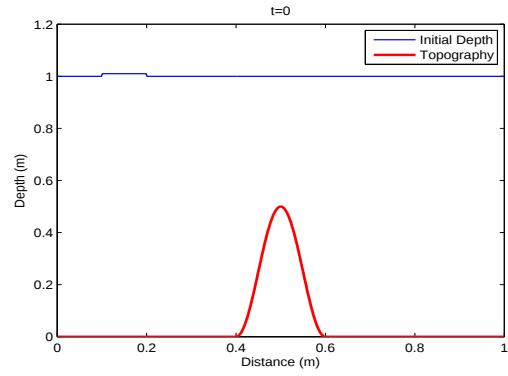


(δ')

Σχήμα 3.26: Transcritical ρή με Shock: $CFL = 20$. Έμφανο αριθμητικό σχήμα δεύτερης τάξης. (α)-(β) Flux-limiting. (γ)-(δ) MUSCL .

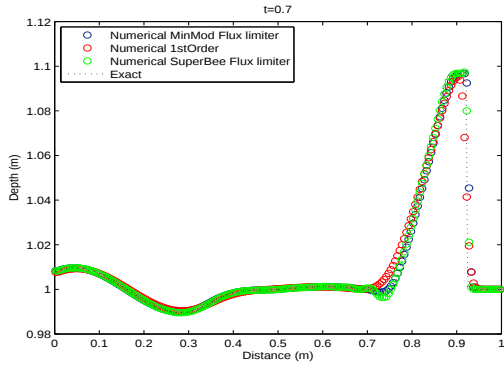


(α')

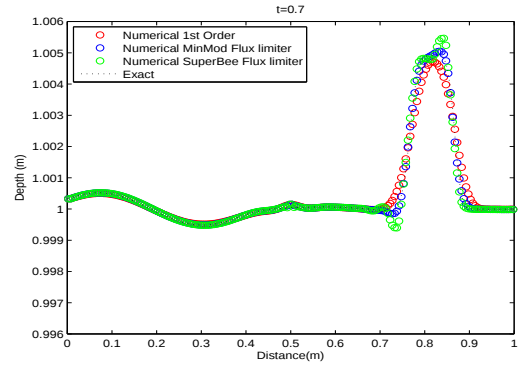


(β')

Σχήμα 3.27: Διάδοση κύματος: Αρχικές συνθήκες για το βάθος: (α') $\varepsilon = 0.2$. (β') $\varepsilon = 0.01$

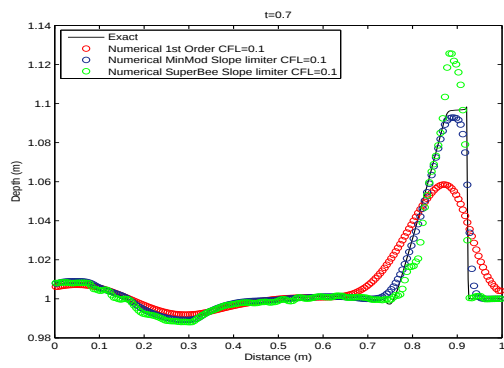


(α')

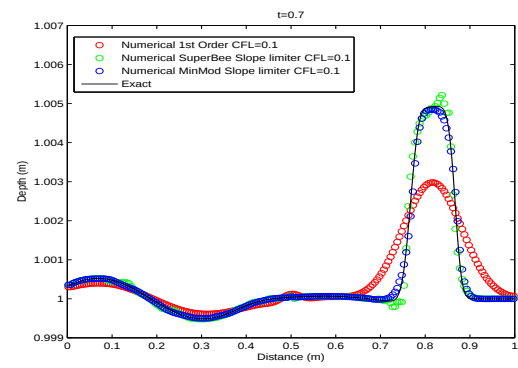


(β')

Σχήμα 3.28: Διάδοση κύματος: Άμεσο, Flux-limiting, $CFL = 0.9$. (α') $\varepsilon = 0.2$. (β') $\varepsilon = 0.01$.



(α')



(β')

Σχήμα 3.29: Διάδοση κύματος: Άμεσο, MUSCL, $CFL = 0.1$. (α') $\varepsilon = 0.2$. (β') $\varepsilon = 0.01$.

Κεφάλαιο 4

Επέκταση των εξισώσεων ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις

Επεκτείνοντας τις εξισώσεις ρηχών υδάτων μίας διάστασης σε αυτές των δύο διαστάσεων με την τοπογραφία ως πηγαίο όρο έχουμε την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{G}(\mathbf{q}, x, y), \quad (4.1)$$

όπου

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix},$$

και

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^1 + \mathbf{G}^2, \quad (4.2)$$

με

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -gh \frac{\partial b(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Όπου, η μεταβλητή $h = h(x, y, t)$ εκφράζει την απόσταση της επιφάνειας του ρευστού από τον πυθμένα, $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ οι κατά μέσο όρο ταχύτητες του ρευστού ως προς την x και y κατεύθυνση αντίστοιχα και $b(x, y)$ συνάρτηση η οποία περιγράφει την τοπογραφία του πυθμένα. Τα διανύσματα $\mathbf{F}(\mathbf{q})$, $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ ορίζουν την ροή ως προς την x και y κατεύθυνση αντίστοιχα ενώ το διάνυσμα $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{q}, x, y)$ τον πηγαίο όρο ο οποίος περιγράφει την συνεισφορά της τοπογραφίας του πυθμένα στο σύστημα.

Οι Ιακωβιανοί πίνακες του συστήματος (4.1) είναι

$$\mathbf{J}^{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{\mathbf{S}} = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Οι ιδιοτιμές των $\mathbf{J}^{\mathbf{F}}$ και $\mathbf{J}^{\mathbf{S}}$ είναι

$$\lambda_1^{\mathbf{F}} = u - c, \quad \lambda_2^{\mathbf{F}} = u, \quad \lambda_3^{\mathbf{F}} = u + c \quad (4.4)$$

και

$$\lambda_1^{\mathbf{S}} = v - c, \quad \lambda_2^{\mathbf{S}} = v, \quad \lambda_3^{\mathbf{S}} = v + c. \quad (4.5)$$

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\mathbf{J}^{\mathbf{F}}$ είναι

$$\mathbf{r}_1^{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2^{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3^{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ v \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

και του πίνακα $\mathbf{J}^{\mathbf{S}}$

$$\mathbf{r}_1^{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v - c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2^{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3^{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v + c \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

4.1 Προσεγγιστικός επιλυτής Riemann του Roe σε 2Δ

Επεκτείνοντας την μέθοδο του Godunov, η οποία αναπτύχθηκε στην παράγραφο 2.2 για την μία διάσταση, στις δύο διαστάσεις, λύνουμε ένα σύνολο από τοπικά προβλήματα Riemann σε κάθε πλευρά του υπολογιστικού κελιού $C_{i,j} = \{(x, y) \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]\}$, σχήμα 4.1, της μορφής

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{q}) = 0, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{q}(x, y, 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{i,j} & (x, y) \in C_{i,j} \\ \mathbf{Q}_{i\pm 1,j} & (x, y) \in C_{i\pm 1,j} \end{cases} \quad (4.9)$$

και

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{S}(\mathbf{q}) = 0, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{q}(x, y, 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{i,j} & (x, y) \in C_{i,j} \\ \mathbf{Q}_{i,j\pm 1} & (x, y) \in C_{i,j\pm 1} \end{cases}. \quad (4.11)$$

Όπου

$$\mathbf{Q}_{i,j}(t) \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int \int_{C_{i,j}} \mathbf{q}(x, y, t) dx dy$$

η μέση τιμή της λύσης πάνω στο υπολογιστικό κελί $C_{i,j}$ με $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ και $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$. Οι αριθμητικές ροές σε αυτήν την περίπτωση θα έχουν την μορφή

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i\pm 1/2,j}^\downarrow), \quad (4.12)$$

$$\mathbf{S}_{i,j\pm 1/2} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}_{i,j\pm 1/2}^\downarrow). \quad (4.13)$$

Όπου $\mathbf{Q}_{i\pm 1/2,j}^\downarrow$ είναι η λύση του προβλήματος Riemann (4.8)-(4.9) στα σημεία $(i \pm 1/2, j)$ και $\mathbf{Q}_{i,j\pm 1/2}^\downarrow$ η λύση του προβλήματος Riemann (4.10)-(4.11) στα σημεία $(i, j \pm 1/2)$. Όπως και στην μία διάσταση για τον υπολογισμό των αριθμητικών ροών χρειαζόμαστε μόνο την λύση του προβλήματος Riemann σε κάθε μέτωπο του υπολογιστικού κελιού $C_{i,j}$. Για αυτόν τον λόγο σε κάθε υπολογιστικό κελί λύνουμε τα προβλήματα Riemann (4.8)-(4.9), (4.10)-(4.11) προσεγγιστικά. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας τα συστήματα (4.8) και (4.10) γράφονται ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{J}^{\mathbf{F}}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{J}^{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Τα προσεγγιστικά προβλήματα Riemann προκύπτουν αντικαθιστώντας τους μη γραμμικούς Ιακωβιανούς πίνακες $\mathbf{J}^{\mathbf{F}}$ και $\mathbf{J}^{\mathbf{G}}$ με σταθερούς διαγωνιοποιήσιμους $\tilde{\mathbf{J}}^{\mathbf{F}}$ και $\tilde{\mathbf{J}}^{\mathbf{G}}$ οι οποίοι ονομάζονται πίνακες του Roe και πρέπει να ικανοποιούν τους παρακάτω περιορισμούς

$$1. \Delta_{i-1/2,j} \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{J}}^{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_{i,j}, \mathbf{Q}_{i-1,j}) \Delta_{i-1/2,j} \mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2,j}^{\mathbf{F}} \Delta_{i-1/2,j} \mathbf{Q} \quad \forall i, j,$$

$$\text{όπου } \Delta_{i-1/2,j}(\cdot) = (\cdot)_{i,j} - (\cdot)_{i-1,j} \text{ και } \mathbf{F}_{i,j} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i,j}).$$

$$2. \text{ Ο } \tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2,j}^{\mathbf{F}} \text{ έχει πραγματικές ιδιοτιμές και γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.}$$

$$3. \tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2,j}^{\mathbf{F}} \rightarrow \mathbf{F}'(\mathbf{Q}) \text{ ομοιόμορφα καθώς } \mathbf{Q}_{i-1,j}, \mathbf{Q}_{i,j} \rightarrow \mathbf{Q}.$$

$$4. \text{ υπάρχει γραμμική απεικόνιση από το } \mathbf{Q} \text{ στο } \mathbf{F}.$$

$$5. \Delta_{i,j-1/2} \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{J}}^{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}_{i,j}, \mathbf{Q}_{i,j-1}) \Delta_{i,j-1/2} \mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{J}}_{i,j-1/2}^{\mathbf{S}} \Delta_{i,j-1/2} \mathbf{Q} \quad \forall i, j,$$

$$\text{όπου } \Delta_{i,j-1/2}(\cdot) = (\cdot)_{i,j} - (\cdot)_{i,j-1} \text{ και } \mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}_{i,j}).$$

$$6. \text{ Ο } \tilde{\mathbf{J}}_{i,j-1/2}^{\mathbf{S}} \text{ έχει πραγματικές ιδιοτιμές και γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.}$$

$$7. \tilde{\mathbf{J}}_{i,j-1/2}^{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{S}'(\mathbf{Q}) \text{ ομοιόμορφα καθώς } \mathbf{Q}_{i,j-1}, \mathbf{Q}_{i,j} \rightarrow \mathbf{Q}.$$

$$8. \text{ υπάρχει γραμμική απεικόνιση από το } \mathbf{Q} \text{ στο } \mathbf{S}.$$

Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων οι πίνακες $\tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2,j}^F$ και $\tilde{\mathbf{J}}_{i,j\pm 1/2}^S$ είναι οι Ιακωβιανοί πίνακες (4.3) αποτιμημένοι στις μέσες τιμές [12],[24]

$$\tilde{u}_{i\pm 1/2,j} = \frac{u_{i\pm 1,j}\sqrt{h_{i\pm 1,j}} + u_{ij}\sqrt{h_{ij}}}{\sqrt{h_{i\pm 1,j}} + \sqrt{h_{ij}}}, \quad \tilde{v}_{i,j\pm 1/2} = \frac{v_{i,j\pm 1}\sqrt{h_{i,j\pm 1}} + v_{ij}\sqrt{h_{ij}}}{\sqrt{h_{i,j\pm 1}} + \sqrt{h_{ij}}} \quad (4.14)$$

και

$$\tilde{h}_{i\pm 1/2,j} = \frac{1}{2}(h_{i\pm 1,j} + h_{ij}), \quad \tilde{h}_{i,j\pm 1/2} = \frac{1}{2}(h_{i,j\pm 1} + h_{ij}). \quad (4.15)$$

Οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στους πίνακες $\tilde{\mathbf{J}}^F$ και $\tilde{\mathbf{J}}^S$ είναι:

$$\tilde{\lambda}_1^F = \tilde{u} - \tilde{c}, \quad \tilde{\lambda}_2^F = \tilde{u}, \quad \tilde{\lambda}_3^F = \tilde{u} + \tilde{c}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\lambda}_1^S = \tilde{v} - \tilde{c}, \quad \tilde{\lambda}_2^S = \tilde{v}, \quad \tilde{\lambda}_3^S = \tilde{v} + \tilde{c}, \quad (4.17)$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\tilde{\mathbf{r}}_1^F = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_2^F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{c} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_3^F = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_1^S = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} - \tilde{c} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_2^S = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{c} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_3^S = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} + \tilde{c} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

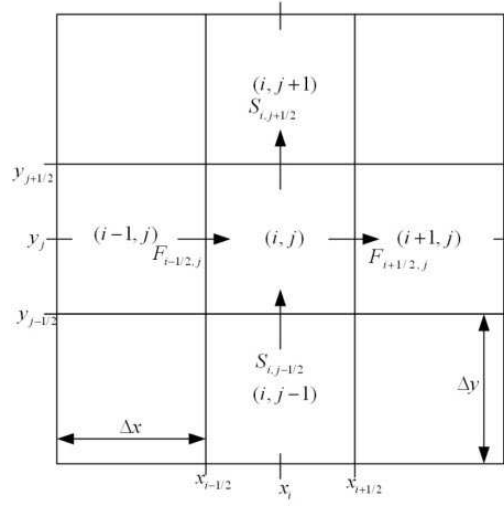
Έστω $\tilde{\mathbf{R}}^F$ και $\tilde{\mathbf{R}}^S$ πίνακες των οποίων οι στήλες περιέχουν τα δεξιά ιδιοδιανύσματα των πινάκων $\tilde{\mathbf{J}}^F$ και $\tilde{\mathbf{J}}^S$ αντίστοιχα. Οι αριθμητικές ροές θα είναι

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i-1,j}^n + \mathbf{F}_{i,j}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 [\tilde{\alpha}_k^F |\tilde{\lambda}_k^F| \tilde{\mathbf{r}}_k^F]_{i-1/2,j}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{S}_{i,j-1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{i,j-1}^n + \mathbf{S}_{i,j}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 [\tilde{\alpha}_k^S |\tilde{\lambda}_k^S| \tilde{\mathbf{r}}_k^S]_{i,j-1/2}, \quad (4.21)$$

όπου $\tilde{\alpha}_{i-1/2,j}^F = (\tilde{\mathbf{R}}^F)^{-1} \Delta_{i-1/2,j} \mathbf{Q}$, $\tilde{\alpha}_{i,j-1/2}^S = (\tilde{\mathbf{R}}^S)^{-1} \Delta_{i,j-1/2} \mathbf{Q}$ τα βάρη

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{1,3}^F &= \frac{1}{2} \Delta_{i-1/2,j} h \pm \frac{1}{2\tilde{c}} (\tilde{u} \Delta_{i-1/2,j} h - \Delta_{i-1/2,j} (uh)), \\ \tilde{\alpha}_2^F &= \frac{1}{\tilde{c}} (\Delta_{i-1/2,j} (vh) - \tilde{v} \Delta_{i-1/2,j} h), \\ \tilde{\alpha}_{1,3}^S &= \frac{1}{2} \Delta_{i,j-1/2} h \pm \frac{1}{2\tilde{c}} (\tilde{v} \Delta_{i,j-1/2} h - \Delta_{i,j-1/2} (vh)), \\ \tilde{\alpha}_2^S &= \frac{1}{\tilde{c}} (\tilde{u} \Delta_{i,j-1/2} h - \Delta_{i,j-1/2} (uh)). \end{aligned}$$



Σχήμα 4.1: Αριθμητικές ροές σε έναν όγκο ελέγχου.

Από τις συνθήκες 2 και 6 έχουμε ότι οι πίνακες $\tilde{\mathbf{J}}^F, \tilde{\mathbf{J}}^S$ διαγωνοποιούνται ως εξής

$$\tilde{\mathbf{J}}^F = \tilde{\mathbf{R}}^F \tilde{\mathbf{\Lambda}}^F (\tilde{\mathbf{R}}^F)^{-1}, \quad (4.22)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}^S = \tilde{\mathbf{R}}^S \tilde{\mathbf{\Lambda}}^S (\tilde{\mathbf{R}}^S)^{-1}, \quad (4.23)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}^F = \text{diag}[\tilde{\lambda}_k^F], \quad k = 1, 2, 3$$

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}^S = \text{diag}[\tilde{\lambda}_k^S], \quad k = 1, 2, 3.$$

Για την προσέγγιση του πηγαίου όρου διακριτοποιούμε ξεχωριστά ως προς κάθε χωρική κατεύθυνση την σχέση (4.2) προβάλλοντας τον όρο $\mathbf{G}^1$ στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\tilde{\mathbf{J}}^F$ και τον όρο $\mathbf{G}^2$ στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\tilde{\mathbf{J}}^S$ λαμβάνοντας έτσι

$$\mathbf{G}_{i,j}^1 = \mathbf{G}_{i+1/2,j}^{1-} + \mathbf{G}_{i-1/2,j}^{1+}, \quad \mathbf{G}_{i,j}^2 = \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{2-} + \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{2+}, \quad (4.24)$$

όπου

$$\mathbf{G}_{i-1/2,j}^{1\pm} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\tilde{\beta}_k^F \tilde{\mathbf{r}}_k^F (1 \pm \text{sgn}(\tilde{\lambda}_k^F)) \right]_{i-1/2,j}, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{G}_{i,j-1/2}^{2\pm} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\tilde{\beta}_k^S \tilde{\mathbf{r}}_k^S (1 \pm \text{sgn}(\tilde{\lambda}_k^S)) \right]_{i,j-1/2}, \quad (4.26)$$

με $\tilde{\beta}_k^F, \tilde{\beta}_k^S$ τα βάρη της προβολής του πηγαίου όρου στα ιδιοδιανύσματα των πινάκων $\tilde{\mathbf{J}}^F$ και $\tilde{\mathbf{J}}^S$ αντίστοιχα. Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις έχουμε

$$\tilde{\beta}_1^F = \frac{\tilde{c} \Delta_{i-1/2,j} b}{2}, \quad \tilde{\beta}_2^F = 0, \quad \tilde{\beta}_3^F = -\frac{\tilde{c} \Delta_{i-1/2,j} b}{2}, \quad (4.27)$$

$$\tilde{\beta}_1^S = \frac{\tilde{c} \Delta_{i,j-1/2} b}{2}, \quad \tilde{\beta}_2^S = 0, \quad \tilde{\beta}_3^S = -\frac{\tilde{c} \Delta_{i,j-1/2} b}{2}. \quad (4.28)$$

4.2 Έμμεσο αριθμητικό σχήμα στις δύο διαστάσεις

Ολοκληρώνοντας το σύστημα (4.1) πάνω από ένα υπολογιστικό κελί $C_{i,j}$ και θέτοντας

$$\mathbf{Q}_{i,j}(t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{q}(x, y, t) dx dy,$$

όπου $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ και $\mathbf{Q}_{i,j}$ η μέση τιμή της λύσης πάνω στο υπολογιστικό κελί $C_{i,j} = \{(x, y) \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]\}$ έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_{i,j}(t) = \mathbf{X}_{i,j}(t) + \mathbf{Y}_{i,j}(t) + \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}(t), \quad (4.29)$$

όπου

$$\mathbf{X}_{i,j}(t) = -\frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{q}(x_{i+1/2}, y, t)) dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{q}(x_{i-1/2}, y, t)) dy}{\Delta x \Delta y}, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{Y}_{i,j}(t) = -\frac{\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{q}(x, y_{i+1/2}, t)) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{q}(x, y_{i-1/2}, t)) dx}{\Delta x \Delta y}, \quad (4.31)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}(t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int \int_{C_{i,j}} \mathbf{G}(\mathbf{q}(x, y, t)) dx dy. \quad (4.32)$$

Ολοκληρώντας την (4.29) στο χρονικό διάστημα $r^n = [t^n, t^{n+1}]$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i,j}(t^{n+1}) &= \mathbf{Q}_{i,j}(t^n) + \int_{r^n} [\mathbf{X}_{i,j}(t) + \mathbf{Y}_{i,j}(t)] dt + \int_{r^n} \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}(t) dt \\ \mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{Q}_{i,j}^n + \Delta t [\theta (\mathbf{X}_{i,j}^{n+1} + \mathbf{Y}_{i,j}^{n+1}) + (1 - \theta) (\mathbf{X}_{i,j}^n + \mathbf{Y}_{i,j}^n)] + \Delta t [\theta \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{n+1} + (1 - \theta) \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^n] \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις (4.30)-(4.32) στην παραπάνω σχέση έχουμε ότι το έμμεσο αριθμητικό σχήμα στις δύο διαστάσεις έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} &+ \theta \left[\lambda_x \left(\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{n+1} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{n+1} \right) + \lambda_y \left(\mathbf{S}_{i,j+1/2}^{n+1} - \mathbf{S}_{i,j-1/2}^{n+1} \right) - \Delta t \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{n+1} \right] \\ &= \mathbf{Q}_{i,j}^n - (1 - \theta) \left[\lambda_x \left(\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n \right) + \lambda_y \left(\mathbf{S}_{i,j+1/2}^n - \mathbf{S}_{i,j-1/2}^n \right) - \Delta t \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^n \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Όπου $\lambda_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\lambda_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$ και

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j}^n = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{q}(x_{i\pm 1/2}, y, t^n)) dy, \quad (4.34)$$

η αριθμητική ροή ως προς την διεύθυνση του άξονα των x και

$$\mathbf{S}_{i,j\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{q}(x, y_{i\pm 1/2}, t^n)) dx \quad (4.35)$$

η αριθμητική ροή ως προς την διεύθυνση του άξονα των y .

4.3 Υψηλής ανάλυσης έμμεσο αριθμητικό σχήμα

Το αριθμητικό σχήμα που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα είναι ένα πρώτης τάξης αριθμητικό σχήμα. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 2.4.1 για την μία διάσταση κατασκευάζουμε ένα υψηλής ανάλυσης έμμεσο αριθμητικό σχήμα, χρησιμοποιώντας flux-limiting το οποίο μας εξασφαλίζει τουλάχιστον δεύτερης τάξης ακρίβεια στις ομαλές περιοχές και ελαχιστοποιεί τις ταλαντώσεις κοντά στις ασυνέχειες.

Οι αριθμητικές ροές στην (4.33) θα είναι τώρα της μορφής

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j}^{TVD} = \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{FO} + (\Phi_{i-1/2,j}^F)^n (\mathbf{F}_{i-1/2,j}^{SO} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{FO}), \quad (4.36)$$

$$\mathbf{S}_{i,j-1/2}^{TVD} = \mathbf{S}_{i,j-1/2}^{FO} + (\Phi_{i,j-1/2}^S)^n (\mathbf{S}_{i,j-1/2}^{SO} - \mathbf{S}_{i,j-1/2}^{FO}), \quad (4.37)$$

όπου $\mathbf{F}_{i-1/2,j}^{SO}$, $\mathbf{S}_{i,j-1/2}^{SO}$ δεύτερης τάξης αριθμητικές ροές, $\mathbf{F}_{i-1/2,j}^{FO}$, $\mathbf{S}_{i,j-1/2}^{FO}$ πρώτης τάξης αριθμητικές ροές και $(\Phi_{i-1/2,j}^F)^n = \text{diag}[\Phi_k^F]$, $(\Phi_{i,j-1/2}^S)^n = \text{diag}[\Phi_k^S]$, $k = 1, 2, 3$ μη γραμμικές Flux-limiter συναρτήσεις. Χρησιμοποιώντας σαν δεύτερης τάξης αριθμητική ροή την αριθμητική ροή των Lax-Wendroff

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\mathbf{J}}^F|) |\tilde{\mathbf{J}}^F| \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2,j},$$

$$\mathbf{S}_{i,j-1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\mathbf{J}}^S|) |\tilde{\mathbf{J}}^S| \Delta \mathbf{Q}_{i,j-1/2}.$$

και σαν πρώτης τάξης τις αριθμητικές ροές (4.20), (4.21) έχουμε ότι οι αριθμητικές ροές ως προς την x και y κατεύθυνση αντίστοιχα θα γράφονται ως

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i,j}^n + \mathbf{F}_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} \left[\tilde{\mathbf{R}}^F |\tilde{\mathbf{A}}^F| \tilde{\mathbf{L}}^F (\tilde{\mathbf{R}}^F)^{-1} \right]_{i-1/2,j}^n \Delta_{i-1/2,j} \mathbf{Q}^n \quad (4.38)$$

$$\mathbf{S}_{i,j-1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{i,j}^n + \mathbf{S}_{i,j-1}^n) - \frac{1}{2} \left[\tilde{\mathbf{R}}^S |\tilde{\mathbf{A}}^S| \tilde{\mathbf{L}}^S (\tilde{\mathbf{R}}^S)^{-1} \right]_{i,j-1/2}^n \Delta_{i,j-1/2} \mathbf{Q}^n \quad (4.39)$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}^F &= \text{diag} \left[1 - \Phi(\tilde{\theta}_k^F) \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_k^F| \right) \right], \\ \tilde{\mathbf{L}}^S &= \text{diag} \left[1 - \Phi(\tilde{\theta}_k^S) \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_k^S| \right) \right] \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_k^F &= \frac{(\tilde{\alpha}_k^F)_{I-1/2,j}}{(\tilde{\alpha}_k^F)_{i-1/2,j}}, \quad I = i - \text{sgn}(\tilde{\lambda}_{i-1/2,j}^F), \\ \tilde{\theta}_k^S &= \frac{(\tilde{\alpha}_k^S)_{i,J-1/2}}{(\tilde{\alpha}_k^S)_{i,j-1/2}}, \quad J = j - \text{sgn}(\tilde{\lambda}_{i,j-1/2}^S). \end{aligned}$$

Οι αριθμητικές ροές (4.38)-(4.39) μπορούν να γραφτούν σε μία πιο συμπαγή μορφή ως

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i,j}^n + \mathbf{F}_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\tilde{\alpha}_k^F |\tilde{\lambda}_k^F| \left(1 - \Phi(\tilde{\theta}_k^F) (1 - |\nu_k^F|) \right) \tilde{\mathbf{r}}_k^F \right]_{i-1/2,j}^n \quad (4.40)$$

$$\mathbf{S}_{i,j-1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{i,j}^n + \mathbf{S}_{i,j-1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\tilde{\alpha}_k^S |\tilde{\lambda}_k^S| \left(1 - \Phi(\tilde{\theta}_k^S) (1 - |\nu_k^S|) \right) \tilde{\mathbf{r}}_k^S \right]_{i,j-1/2}^n \quad (4.41)$$

με $\nu_k^F = \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \tilde{\lambda}_k^F$ και $\nu_k^S = \frac{\Delta t^n}{\Delta y} \tilde{\lambda}_k^S$. Η προσέγγιση του πηγαίου όρου κατασκευάζεται κατά αντιστοιχία με την προσέγγιση της αριθμητικής ροής έτσι ώστε το αριθμητικό σχήμα να ικανοποιεί την C-property

$$\mathbf{G}_{i,j}^1 = \mathbf{G}_{i+1/2,j}^{1,TV D} + \mathbf{G}_{i-1/2,j}^{1,TV D}, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{G}_{ij}^2 = \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{2,TV D} + \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{2,TV D}, \quad (4.43)$$

όπου

$$\mathbf{G}_{i-1/2,j}^{1,TV D} = \mathbf{G}_{i-1/2,j}^{1,FO} + \Phi_{i-1/2,j}^F (\mathbf{G}_{i-1/2,j}^{1,SO} - \mathbf{G}_{i-1/2,j}^{1,FO}), \quad (4.44)$$

$$\mathbf{G}_{i,j-1/2}^{2,TV D} = \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{2,FO} + \Phi_{i,j-1/2}^S (\mathbf{G}_{i,j-1/2}^{2,SO} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{2,FO}). \quad (4.45)$$

Για τις πρώτης τάξης προσεγγίσεις χρησιμοποιούμε τις (4.25)-(4.26) και για τις δεύτερης τάξης την αριθμητική προσέγγιση του πηγαίου όρου των Lax-Wendroff

$$\mathbf{G}_{i-1/2,j}^{1,SO} = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{R}}^F (\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\Lambda}^F)^{-1} (\tilde{\Lambda}^F)^2) (\tilde{\mathbf{R}}^F)^{-1} \mathbf{G}^1]_{i-1/2,j}, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{G}_{i,j-1/2}^{2,SO} = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{R}}^S (\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\tilde{\Lambda}^S)^{-1} (\tilde{\Lambda}^S)^2) (\tilde{\mathbf{R}}^S)^{-1} \mathbf{G}^2]_{i,j-1/2}. \quad (4.47)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.25)-(4.26) και (4.46)-(4.47) στις (4.44),(4.45) οι (4.42),(4.43) γράφονται ως

$$\mathbf{G}_{i,j}^1 = \mathbf{G}_{i+1/2,j}^{1,-} + \mathbf{G}_{i-1/2,j}^{1,+}, \quad (4.48)$$

$$\mathbf{G}_{ij}^2 = \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{2,-} + \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{2,+}, \quad (4.49)$$

όπου

$$\mathbf{G}_{i-1/2,j}^{1,\pm} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\tilde{\beta}_k^F \tilde{\mathbf{r}}_k^F \left(1 \pm \text{sgn}(\tilde{\lambda}_k^F) (1 - \Phi_k^F (1 - |\tilde{\nu}_k^F|)) \right) \right]_{i-1/2,j}, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{G}_{i,j-1/2}^{2,\pm} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\tilde{\beta}_k^S \tilde{\mathbf{r}}_k^S \left(1 \pm \text{sgn}(\tilde{\lambda}_k^S) (1 - \Phi_k^S (1 - |\tilde{\nu}_k^S|)) \right) \right]_{i,j-1/2}. \quad (4.51)$$

με $\tilde{\beta}_k^F, \tilde{\beta}_k^S$ τα βάρη της προβολής του πηγαίου όρου στα ιδιοδιανύσματα των πινάκων $\tilde{\mathbf{J}}^F$ και $\tilde{\mathbf{J}}^S$ αντίστοιχα, τα οποία δίνονται από τις (4.27),(4.28).

4.4 Γραμμικοποίηση

Όπως και στην μία διάσταση το σύστημα (4.33) είναι μη γραμμικό για τον λόγο αυτό κατασκευάζουμε μια συντηρητική γραμμικοποιημένη μορφή του, λύνοντας έτσι σε κάθε χρονικό βήμα ένα γραμμικό σύστημα. Θέτοντας

$$\mathbf{W}_{i\pm 1/2,j}^F = -|\tilde{\mathbf{A}}_{i\pm 1/2,j}^F| \tilde{\mathbf{L}}_{i\pm 1/2,j}^F = \text{diag}[(w_k^F)_{i\pm 1/2,j}], \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.52)$$

$$\mathbf{W}_{i,j\pm 1/2}^S = -|\tilde{\mathbf{A}}_{i,j\pm 1/2}^S| \tilde{\mathbf{L}}_{i,j\pm 1/2}^S = \text{diag}[(w_k^S)_{i,j\pm 1/2}], \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.53)$$

όπου

$$(w_k^F)_{i\pm 1/2,j} = - \left[\psi(\tilde{\lambda}_k^F) \left(1 - \Phi(\tilde{\theta}_k^F) \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_k^F| \right) \right) \right]_{i\pm 1/2,j}, \quad (4.54)$$

$$(w_k^S)_{i,j\pm 1/2} = - \left[\psi(\tilde{\lambda}_k^S) \left(1 - \Phi(\tilde{\theta}_k^S) \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta y} |\tilde{\lambda}_k^S| \right) \right) \right]_{i,j\pm 1/2} \quad (4.55)$$

και ορίζοντας τους πίνακες $\mathbf{B}_{i\pm 1/2,j}^F, \mathbf{B}_{i,j\pm 1/2}^S$ ως

$$\mathbf{B}_{i\pm 1/2,j}^F = \tilde{\mathbf{R}}_{i\pm 1/2,j}^F \mathbf{W}_{i\pm 1/2,j}^F (\tilde{\mathbf{R}}_{i\pm 1/2,j}^F)^{-1}, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{B}_{i,j\pm 1/2}^S = \tilde{\mathbf{R}}_{i,j\pm 1/2}^S \mathbf{W}_{i,j\pm 1/2}^S (\tilde{\mathbf{R}}_{i,j\pm 1/2}^S)^{-1}. \quad (4.57)$$

Παραλύποντας τους χωρικούς δείκτες και εκτελώντας τις πράξεις οι δύο προηγούμενες σχέσεις γράφονται ως

$$\mathbf{B}^F = \frac{1}{\tilde{\lambda}_3^F - \tilde{\lambda}_1^F} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_3^F w_1^F - \tilde{\lambda}_1^F w_3^F & w_3^F - w_1^F & 0 \\ \tilde{\lambda}_1^F \tilde{\lambda}_3^F (w_1^F - w_3^F) & \tilde{\lambda}_3^F w_3^F - \tilde{\lambda}_1^F w_1^F & 0 \\ \tilde{v} \left(\tilde{\lambda}_3^F w_1^F - (\tilde{\lambda}_3^F - \tilde{\lambda}_1^F) w_2^F - \tilde{\lambda}_1^F w_3^F \right) & \tilde{v}(w_3^F - w_1^F) & (\tilde{\lambda}_3^F - \tilde{\lambda}_1^F) w_2^F \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^S = \frac{1}{\tilde{\lambda}_3^S - \tilde{\lambda}_1^S} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_3^S w_1^S - \tilde{\lambda}_1^S w_3^S & 0 & w_3^S - w_1^S \\ \tilde{u} \left(\tilde{\lambda}_3^S w_1^S - (\tilde{\lambda}_3^S - \tilde{\lambda}_1^S) w_2^S - \tilde{\lambda}_1^S w_3^S \right) & (\tilde{\lambda}_3^S - \tilde{\lambda}_1^S) w_2^S & \tilde{u}(w_3^S - w_1^S) \\ \tilde{\lambda}_1^S \tilde{\lambda}_3^S (w_1^S - w_3^S) & 0 & \tilde{\lambda}_3^S w_3^S - \tilde{\lambda}_1^S w_1^S \end{bmatrix}.$$

Οι παραπάνω πίνακες μας επιτρέπουν να γράψουμε τις αριθμητικές ροές (4.38), (4.39) ως

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{F}_{i\pm 1,j} + \mathbf{B}_{i\pm 1/2,j}^F \Delta_{i\pm 1/2,j} \mathbf{Q}], \quad (4.58)$$

$$\mathbf{S}_{i,j\pm 1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{S}_{i,j} + \mathbf{S}_{i,j\pm 1} + \mathbf{B}_{i,j\pm 1/2}^S \Delta_{i,j\pm 1/2} \mathbf{Q}]. \quad (4.59)$$

Στην συνέχεια οι έμμεσοι όροι $\mathbf{F}^{n+1}, \mathbf{S}^{n+1}$ και $\tilde{\mathbf{G}}^{n+1}$ γραμμικοποιούνται αναπτύσσοντας τους κατά Taylor με κέντρο το $\mathbf{Q}^n$ για να δώσουν

$$\mathbf{F}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{F}_{i,j}^n + (\mathbf{J}_{i,j}^F)^n \delta \mathbf{Q}_{i,j} + O(\Delta t^2), \quad (4.60)$$

$$\mathbf{S}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{S}_{i,j}^n + (\mathbf{J}_{i,j}^S)^n \delta \mathbf{Q}_{i,j} + O(\Delta t^2), \quad (4.61)$$

$$\mathbf{G}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{G}_{i,j}^n + (\mathbf{J}_{i,j}^G)^n \delta \mathbf{Q}_{i,j} + O(\Delta t^2), \quad (4.62)$$

όπου

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{Q}_{i,j} &= \mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,j}^n, \\ (\mathbf{J}_{i,j}^F)^n &= \mathbf{J}^F(\mathbf{Q}_{i,j}^n), \\ (\mathbf{J}_{i,j}^S)^n &= \mathbf{J}^S(\mathbf{Q}_{i,j}^n),\end{aligned}$$

και $(\mathbf{J}_{i,j}^G)^n$ ο Ιακωβιανός πίνακας του πηγαίου όρου $\mathbf{G}$ ως προς $\mathbf{Q}$,

$$\mathbf{J}^G = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} & 0 & 0 \\ -g \frac{\partial b(x,y)}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω και θεωρώντας τις προσεγγίσεις $(\mathbf{B}_{i\pm 1/2,j}^F)^{n+1} = (\mathbf{B}_{i\pm 1/2,j}^F)^n$ $(\mathbf{B}_{i,j\pm 1/2}^S)^{n+1} = (\mathbf{B}_{i,j\pm 1/2}^S)^n$ στο (4.38) παράγουμε ένα γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής

$$\mathbf{D}\delta \mathbf{Q}_{i,j-1} + \mathbf{A}\delta \mathbf{Q}_{i-1,j} + \mathbf{B}\delta \mathbf{Q}_{i,j} + \mathbf{C}\delta \mathbf{Q}_{i+1,j} + \mathbf{E}\delta \mathbf{Q}_{i,j+1} = \mathbf{b}_{i,j} \quad \forall i = 2, \dots, N-1, j = 2, \dots, N-1 \quad (4.63)$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -\frac{\lambda_x \theta}{2} [\mathbf{J}_{i-1,j}^F + \mathbf{B}_{i-1/2,j}^F]^n, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{I} + \frac{\lambda_x \theta}{2} [\mathbf{B}_{i+1/2,j}^F + \mathbf{B}_{i-1/2,j}^F]^n + \frac{\lambda_y \theta}{2} [\mathbf{B}_{i,j+1/2}^S + \mathbf{B}_{i,j-1/2}^S]^n - \theta \Delta t (\mathbf{J}_{i,j}^G)^n, \\ \mathbf{C} &= \frac{\lambda_x \theta}{2} [\mathbf{J}_{i+1,j}^F - \mathbf{B}_{i+1/2,j}^F]^n, \\ \mathbf{D} &= -\frac{\lambda_y \theta}{2} [\mathbf{J}_{i,j-1}^S + \mathbf{B}_{i,j-1/2}^S]^n, \\ \mathbf{E} &= -\frac{\lambda_y \theta}{2} [\mathbf{J}_{i,j+1}^S + \mathbf{B}_{i,j+1/2}^S]^n,\end{aligned}$$

πίνακες διάστασης 3×3 και

$$\mathbf{b}_{i,j} = -\left[\lambda_x (\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n) + \lambda_y (\mathbf{S}_{i,j+1/2}^n - \mathbf{S}_{i,j-1/2}^n) - \Delta t \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^n \right],$$

διάνυσμα στήλης διάστασης 3×3 . Τις παραπάνω εξισώσεις τις κατατάσσουμε στη λεγόμενη φυσική τους διάταξη, αριθμώντας τα κελιά του πλέγματος, στα οποία αντιστοιχούν, πρώτα από αριστερά προς τα δεξιά και ύστερα από κάτω προς τα πάνω (Σχ.4.2). Η συλλογή των εξισώσεων (4.63), με την σειρά που προαναφέρθηκε, οδηγεί σε ένα block τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\mathbf{G}_k \mathbf{U}_{k-1} + \mathbf{F}_k \mathbf{U}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{B}_k \quad k = 2, \dots, N-1, \quad (4.64)$$

όπου

$$\mathbf{U}_k = [\delta \mathbf{Q}_{1,k} \quad \delta \mathbf{Q}_{2,k} \quad \dots \quad \delta \mathbf{Q}_{N,k}]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1},$$

$$\mathbf{B}_k = [\mathbf{b}_{1,k} \quad \mathbf{b}_{2,k} \quad \cdots \quad \mathbf{b}_{N,k}]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1},$$

με $\delta \mathbf{Q}_{i,k} \in \mathbb{R}^{1 \times 3} \quad \forall i = 1, \dots, N, \mathbf{b}_{i,k} \in \mathbb{R}^{1 \times 3} \quad \forall i = 1, \dots, N$. Για $k = 1$ και $k = N$ η (4.64), λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές, γράφεται ως

$$\hat{\mathbf{F}}_1 \mathbf{U}_1 + \mathbf{L}_1 \mathbf{U}_2 = \mathbf{B}_1 \quad (4.65)$$

$$\mathbf{G}_N \mathbf{U}_{N-1} + \hat{\mathbf{F}}_N \mathbf{U}_N = \mathbf{B}_N \quad (4.66)$$

όπου οι πίνακες $\hat{\mathbf{F}}_1, \hat{\mathbf{F}}_N$ ορίζονται βάση των συνοριακών (Παράρτημα Α). Το σύστημα (4.63) σε μορφή πινάκων γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 & \mathbf{L}_1 & & & & & \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{F}_2 & \mathbf{L}_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \mathbf{G}_k & \mathbf{F}_k & \mathbf{L}_k & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbf{G}_{N-1} & \mathbf{F}_{N-1} & \mathbf{L}_{N-1} \\ & & & & & \mathbf{G}_N & \hat{\mathbf{F}}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{N-1} \\ \mathbf{U}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_k \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{N-1} \\ \mathbf{B}_N \end{bmatrix}$$

όπου

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1^k & \mathbf{C}_1^k & & & & & \\ \mathbf{A}_2^k & \mathbf{B}_2^k & \mathbf{C}_2^k & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \mathbf{A}_i^k & \mathbf{B}_i^k & \mathbf{C}_i^k & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbf{A}_{N-1}^k & \mathbf{B}_{N-1}^k & \mathbf{C}_{N-1}^k \\ & & & & & \mathbf{A}_N^k & \hat{\mathbf{B}}_N^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, N \quad (4.67)$$

block τριδιαγώνιος πίνακας διάστασης $N \times N$ blocks όπου το κάθε block είναι διάστασης 3×3 . Η μορφή των πινάκων $\hat{\mathbf{B}}_1^k, \hat{\mathbf{B}}_N^k$ εξαρτάται από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (Παράρτημα Α).

$$\mathbf{B}_i^k = \mathbf{I} + \frac{\lambda_x \theta}{2} [\mathbf{B}_{i+1/2,k}^F + \mathbf{B}_{i-1/2,k}^F]^n + \frac{\lambda_y \theta}{2} [\mathbf{B}_{i,k+1/2}^S + \mathbf{B}_{i,k-1/2}^S]^n - \theta \Delta t (\mathbf{J}_{i,k}^G)^n \quad i = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{A}_i^k = -\frac{\lambda_x \theta}{2} [\mathbf{J}_{i-1,k}^F + \mathbf{B}_{i-1/2,k}^F]^n, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{C}_i^k = \frac{\lambda_x \theta}{2} [\mathbf{J}_{i+1,k}^F - \mathbf{B}_{i+1/2,k}^F]^n, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^k & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{D}_i^k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{D}_N^k \end{bmatrix}, \quad k = 2, \dots, N,$$

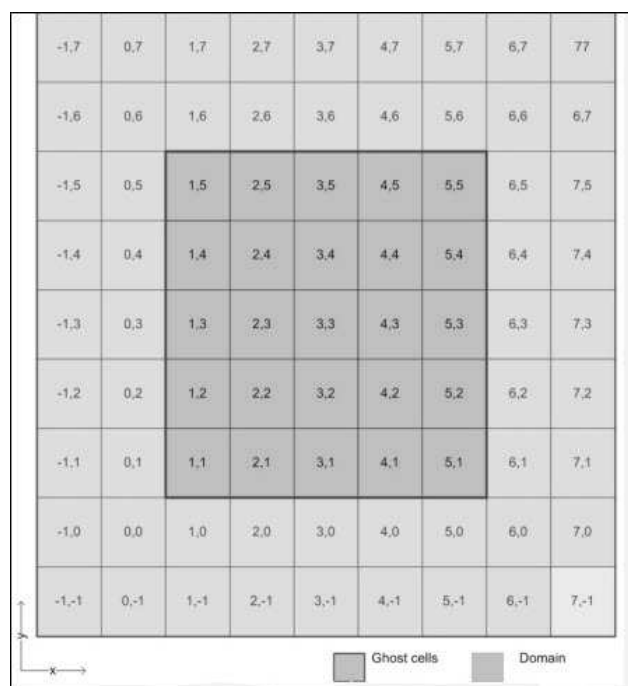
block διαγώνιος πίνακας διάστασης $N \times N$ blocks όπου το κάθε block είναι διάστασης 3×3 και υπολογίζεται από την σχέση

$$\mathbf{D}_i^k = -\frac{\lambda_y \theta}{2} [\mathbf{J}_{i,k-1}^S + \mathbf{B}_{i,k-1/2}^S]^n, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^k & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{E}_i^k & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{E}_N^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

block διαγώνιος πίνακας διάστασης $N \times N$ blocks όπου το κάθε block είναι διάστασης 3×3 και υπολογίζεται από την σχέση

$$\mathbf{E}_i^k = -\frac{\lambda_y \theta}{2} [\mathbf{J}_{i,k+1}^S + \mathbf{B}_{i,k+1/2}^S]^n, \quad i = 1, \dots, N.$$



Σχήμα 4.2: Αρίθμηση υπολογιστικών κελιών.

4.4.1 Block Τριδιαγώνιος Αλγόριθμος (*Thomas Algorithm*)

Στην παρούσα εργασία για την επίλυση του γραμμικού συστήματος (4.63), εκμεταλλευόμενοι την block τριδιαγώνια δομή του, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του Thomas. Η block LU

παραγοντοποίηση του πίνακα του γραμμικού συστήματος (4.63) θα έχει block διδιαγώνιους πίνακες της μορφής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{L}_1 & & \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{F}_2 & \mathbf{L}_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mathbf{G}_N & \mathbf{F}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & & & \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{f}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mathbf{G}_N & \mathbf{f}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{l}_1 & & \\ & \mathbf{I} & \mathbf{l}_2 & \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{l}_{N-1} \\ & & & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{F}_1$$

$$\text{Λύσε } \mathbf{f}_1 \mathbf{l}_1 = \mathbf{L}_1$$

$$\text{Λύσε } \mathbf{f}_1 \mathbf{X}_i = \mathbf{B}_1$$

$$\text{Για } i = 2 : N$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{l}_{i-1}$$

$$\text{Λύσε } \mathbf{f}_i \mathbf{l}_i = \mathbf{L}_i$$

$$\text{Λύσε } \mathbf{f}_i \mathbf{X}_i = (\mathbf{B}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{X}_{i-1})$$

$$\mathbf{U}_N = \mathbf{X}_N$$

$$\text{Για } i = N - 1 : -1 : 1$$

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{L}_i \mathbf{U}_{i+1}$$

4.5 Αριθμητικά αποτελέσματα στις δύο διαστάσεις

4.5.1 Στάσιμες καταστάσεις

Σκοπός των προβλημάτων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, τα οποία είναι ανάλογα αυτών που παρουσιάστηκαν στο πρώτο κεφάλαιο, είναι η μελέτη της συντηρητικότητας και της σύγκλισης του αριθμητικού σχήματος προς την ροή σταθερής ταχύτητας πάνω από τοπογραφία σε τετραγωνικό κανάλι διαστάσεων $25m \times 25m$. Η συνάρτηση που περιγράφει την τοπογραφία του πυθμένα δίνεται από την σχέση

$$b(x, y) = \max(0, 0.2 - 0.05(x - 10)^2). \quad (4.68)$$

Ανάλογα με τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες, η ροή μπορεί να είναι υποκρίσιμη, transcritical με σταθερό shock, ή transcritical χωρίς shock. Ως αρχικές συνθήκες παίρνουμε, το ύψος του νερού να είναι σταθερό και να ισούται με την τιμή της δεξιάς συνοριακής συνθήκης που επιβάλλουμε στο εκάστοτε πρόβλημα για το βάθος και την ορμή ίση με το μηδέν.

4.5.2 Υποκρίσιμη ροή

Για την διακριτοποίηση του προβλήματος αυτού, επιθέτουμε στο κανάλι ένα ομοιόμορφο πλέγμα με 6400 υπολογιστικά κελιά. και αρχικές συνθήκες

$$h(x, y, 0) + b(x, y) = 2m \quad \forall (x, y) \in [0, 25] \times [0, 25] \quad (4.69)$$

$$u(x, y, 0) \equiv 0m/s \quad (4.70)$$

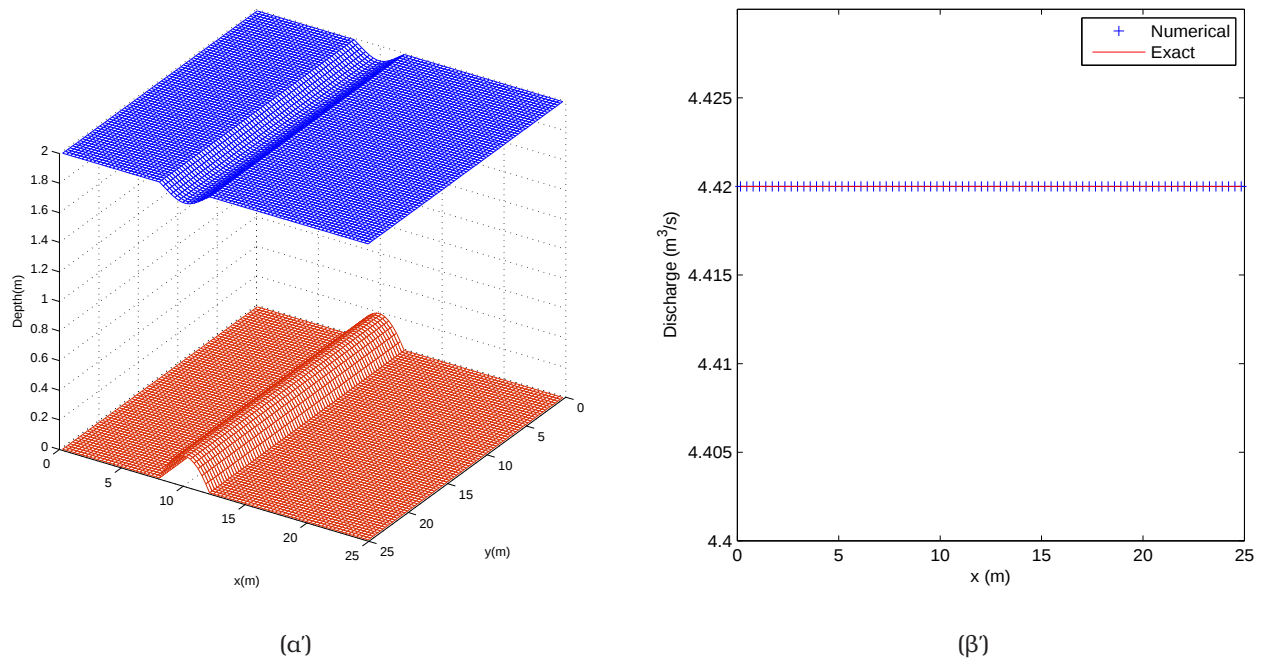
$$v(x, y, 0) \equiv 0m/s \quad (4.71)$$

Για την αριστερή συνοριακή συνθήκη της εισροής θέτουμε

$$(hu)_{in} = 4.42m^2/s \quad (4.72)$$

$$(hv)_{in} = 0m^2/s \quad (4.73)$$

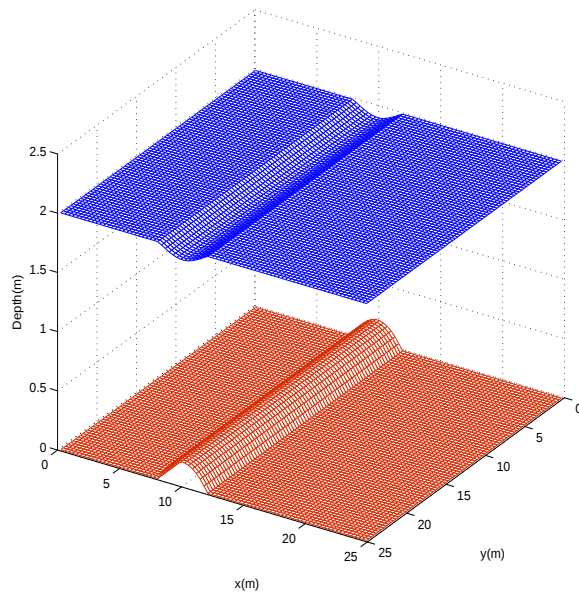
και για την δεξιά συνοριακή του βάθους $(h)_{out} = 2m$. Η χρονική διάρκεια του προβλήματος είναι $t = 300sec$ Παρακάτω παραθέτουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για το άμεσο και έμμεσο αριθμητικό σχήμα πρώτης και δεύτερης τάξης.



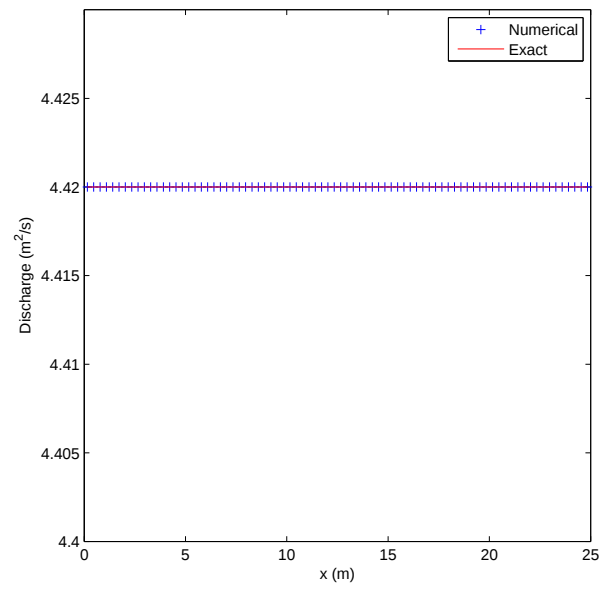
Σχήμα 4.3: Υποκρίσιμη ροή: $CFL = 0.7$. Άμεσο δεύτερης τάξης αριθμητικό σχήμα με οριοθέτη ροής MinMod και (β) διάγραμμα της x συνιστώσας της εκροής για $y = 12$.

Αρ. Σχήμα	CFL	Επαναλήψεις	CPU time(sec)
Άμεσο 2 ^{ης} τάξης	0.9	7196	3041
Έμμεσο 1 ^{ης} τάξης	150	44	871
Έμμεσο 2 ^{ης} τάξης	150	44	878

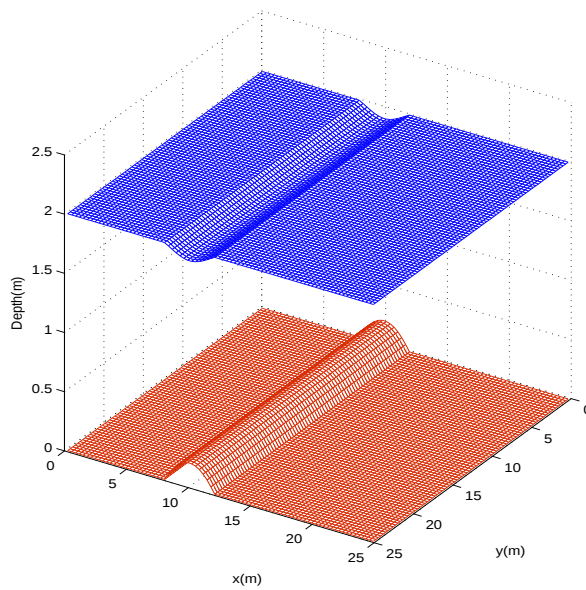
Πίνακας 4.1: Υποκρίσιμη ροή



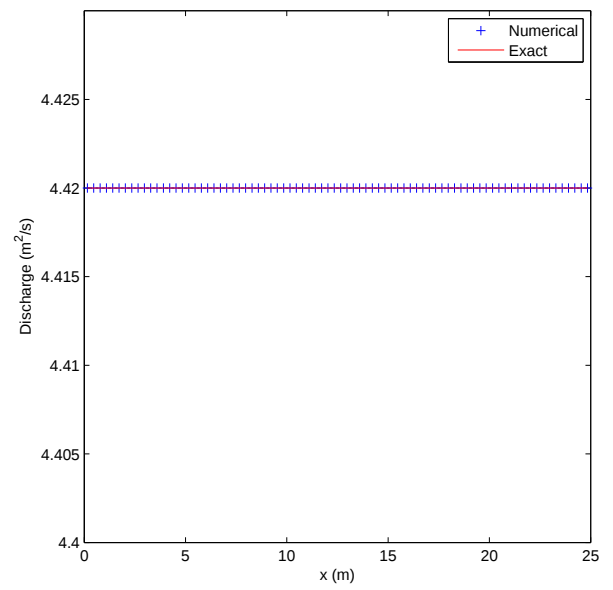
(α')



(β')



(γ')



(δ')

Σχήμα 4.4: Υποκρίσιμη ροή: $CFL = 150$ (α) Έμφανο πρώτης τάξης αριθμητικό σχήμα και (β) διάγραμμα της x συνιστώσας της εκροής για $y = 12$. (γ) Έμφανο δεύτερης τάξης αριθμητικό σχήμα με οριοθέτη ροής SuperBee. και (δ) διάγραμμα της x συνιστώσας της εκροής για $y = 12$.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 4.1 και παρατηρώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα του

άμεσου και έμμεσου αριθμητικού σχήματος γίνεται σαφές ότι, το έμμεσο αριθμητικό σχήμα μας δίνει την ίδια ακρίβεια με το άμμεσο σε λιγότερα χρονικά βήματα και υπολογιστικό χρόνο.

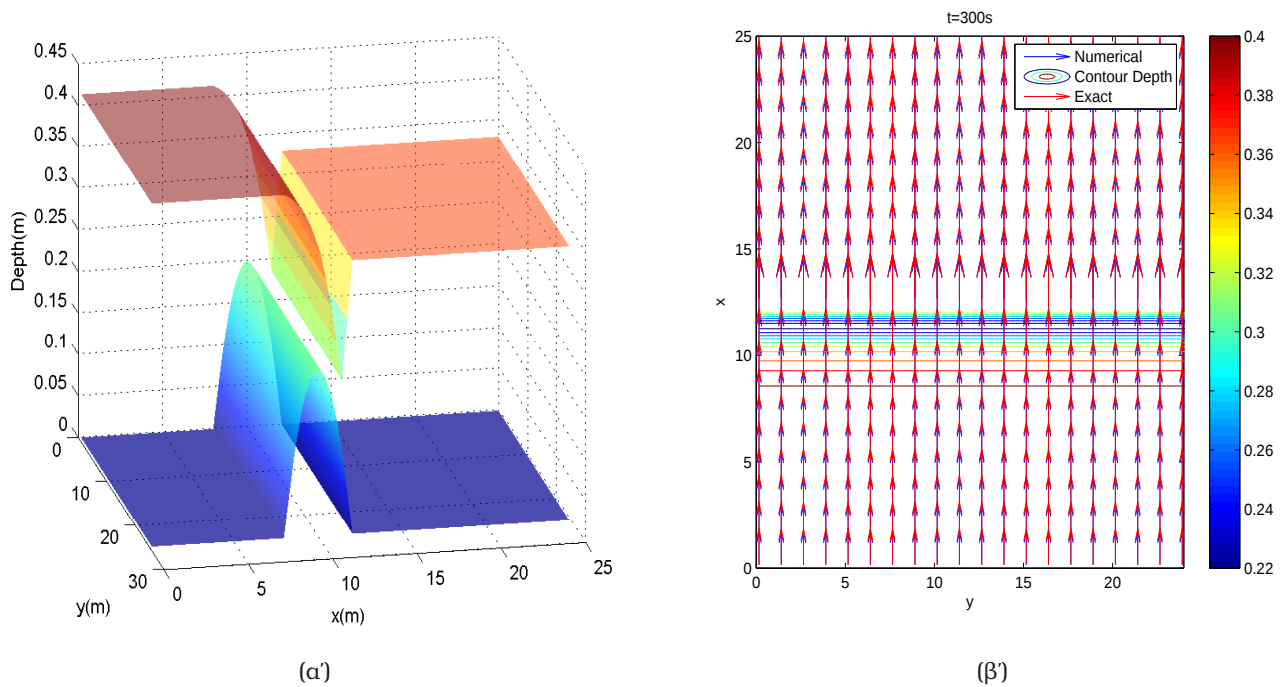
4.5.3 Transcritical ροή με Shock

Όπως και στο αντίστοιχο πρόβλημα στην μία διάσταση οι συνοριακές συνθήκες δημιουργούν ένα στάσιμο Shock πάνω από την τοπογραφία. Για την αριστερή συνοριακή συνθήκη της εισροής θέτουμε

$$(hu)_{in} = 0.18m^2/s \quad (4.74)$$

$$(hv)_{in} = 0m^2/s \quad (4.75)$$

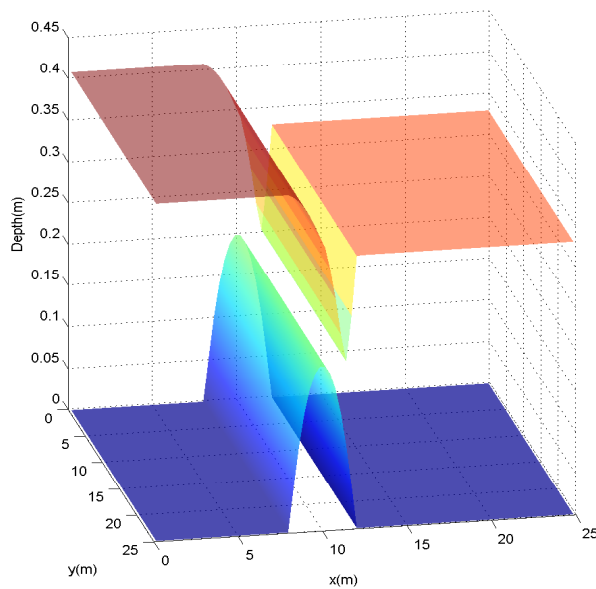
ενώ για την δεξιά συνοριακή συνθήκη του βάθους επιβάλλουμε $(h)_{out} = 0.33m$.



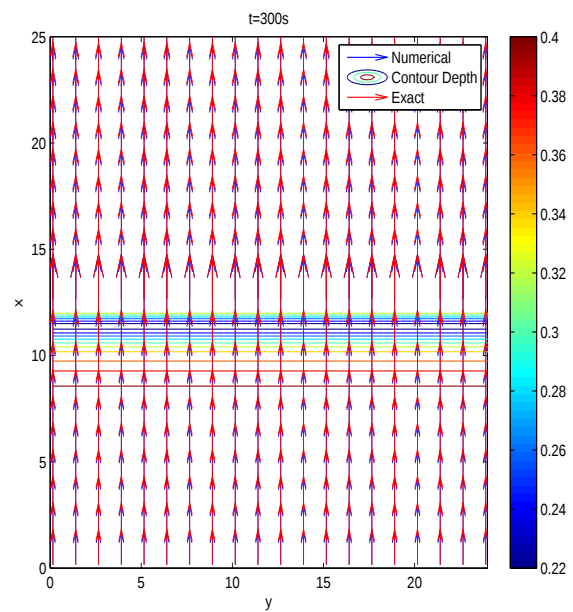
Σχήμα 4.5: Transcritical με Shock: (α) Άμεσο πρώτης τάξης αριθμητικό σχήμα με $CFL = 0.9$ και (β) διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους και ταχυτήτων.

Αρ. Σχήμα	CFL	Επαναλήψεις	CPU time(sec)
Άμεσο 1 ^{ης} τάξης	0.9	3279	1369.97
Έμμεσο 1 ^{ης} τάξης	150	20	368.23
Έμμεσο 2 ^{ης} τάξης	150	20	347

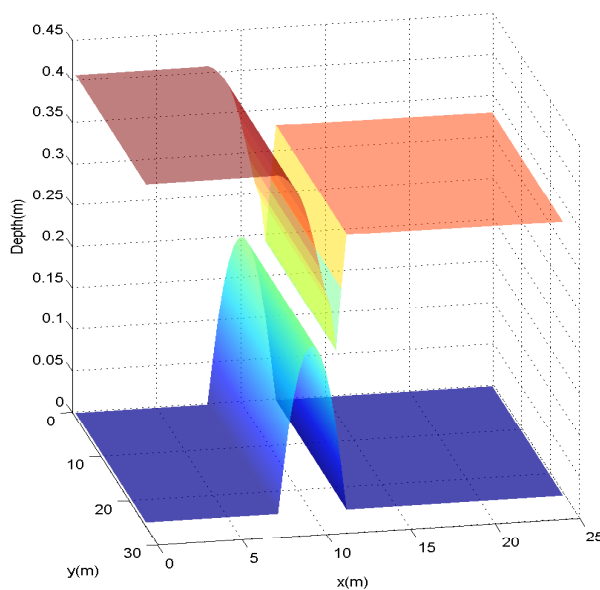
Πίνακας 4.2: Transcritical ροή με Shock



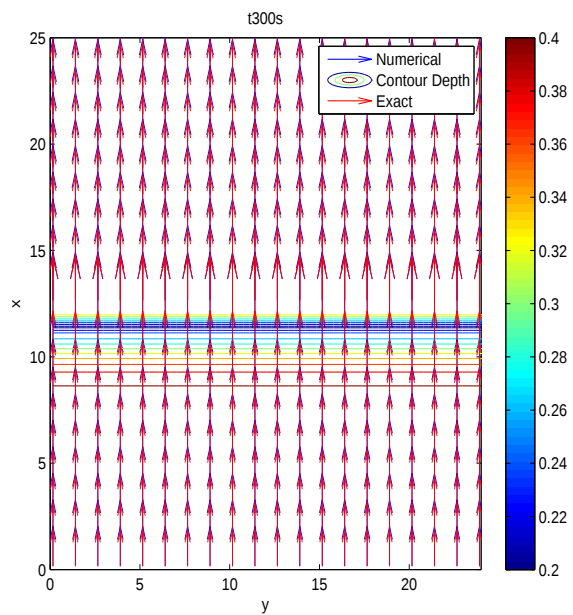
(α')



(β')



(γ')



(δ')

Σχήμα 4.6: Transcritical με Shock: $CFL = 150$. (α) Έμμεσο πρώτης τάξης αριθμητικό σχήμα και (β) διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους και ταχυτήτων. (γ) Έμμεσο δεύτερης τάξης αριθμητικό σχήμα με οριοθέτη ροής SuperBee και (δ) διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους και ταχυτήτων.

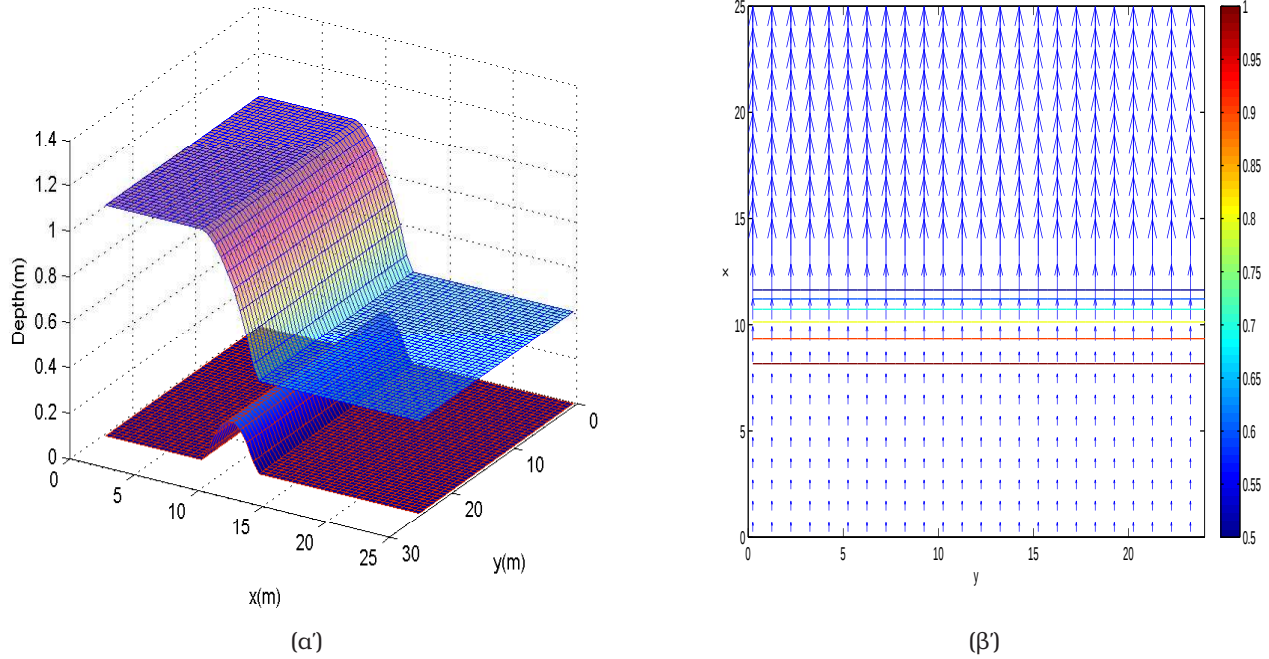
4.5.4 Transcritical ρή χωρίς Shock

Για την διακριτοποίηση του προβλήματος αυτού, επιθέτουμε στο κανάλι ένα ομοιόμορφο πλέγμα με 2500 υπολογιστικά κελιά. Για την αριστερή συνοριακή συνθήκη της εισροής θέτουμε

$$(hu)_{in} = 1.53m^2/s \quad (4.76)$$

$$(hv)_{in} = 0m^2/s \quad (4.77)$$

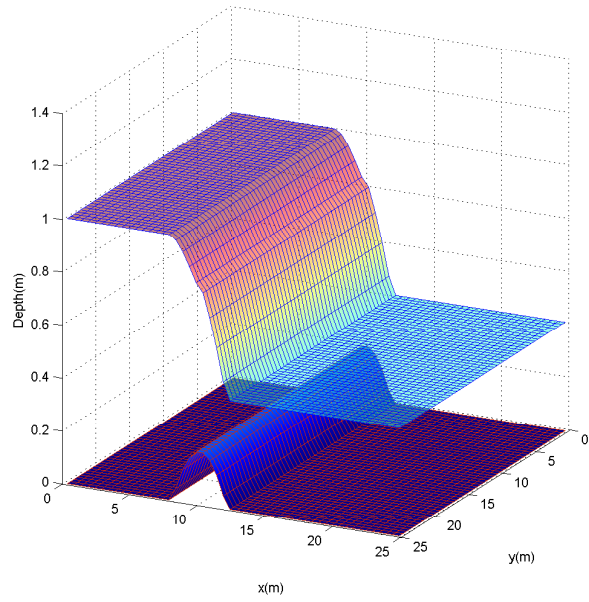
και για την δεξιά συνοριακή συνθήκη του βάθους $(h)_{out} = 2m$ μόνο αν η ρή είναι υποκρίσιμη. Στην περίπτωση που η ρή είναι υπερκρίσιμη επιβάλλουμε συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής.



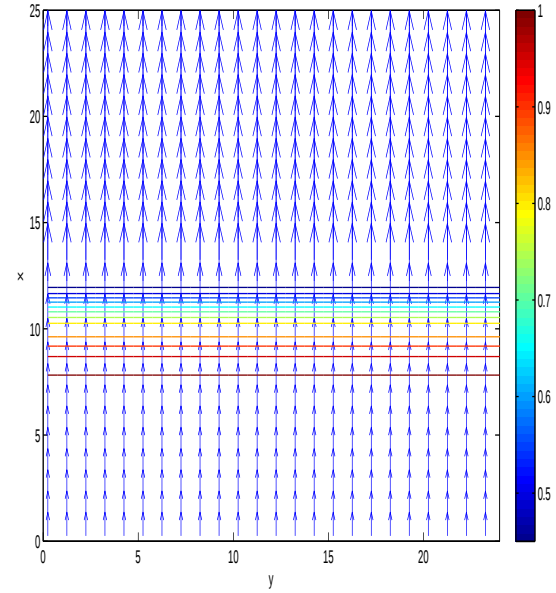
Σχήμα 4.7: Transcritical ρή χωρίς Shock: $CFL = 0.9$ (α) Άμεσο δεύτερης τάξης αριθμητικό σχήμα με οριοθέτη ροής MinMod και (β) διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους και ταχυτήτων.

Αρ. Σχήμα	CFL	Επαναλήψεις	CPU time(sec)
Άμεσο 2 ^{ης} τάξης	0.9	3864	648.22
Έμμεσο 1 ^{ης} τάξης	40	95	420.20
Έμμεσο 2 ^{ης} τάξης	40	93	411

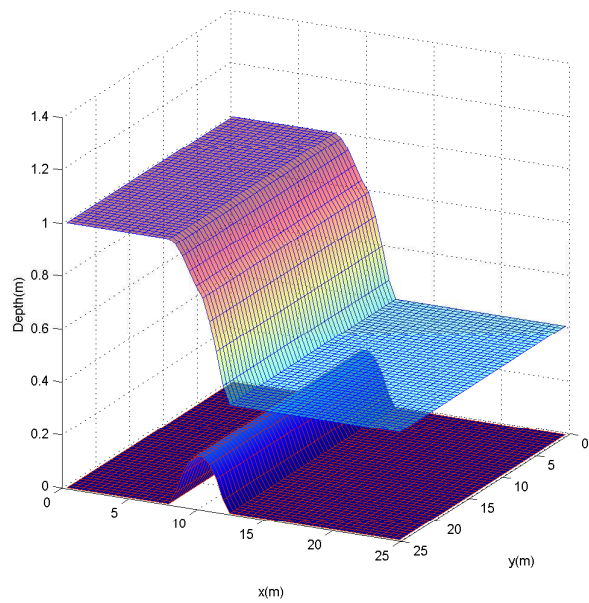
Πίνακας 4.3: Transcritical ρή χωρίς Shock



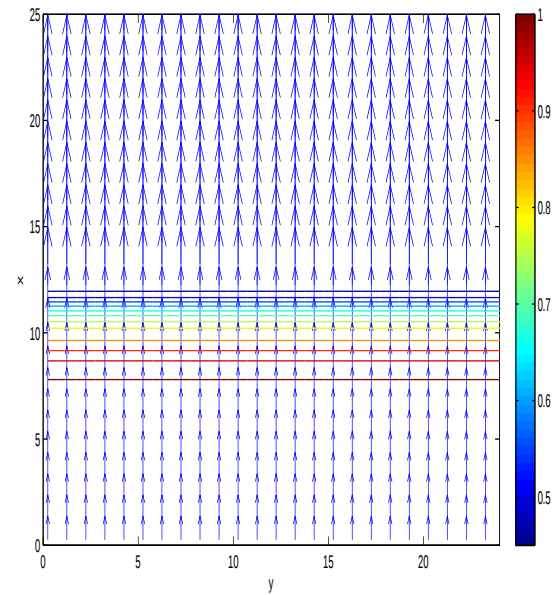
(α')



(β')



(γ')



(δ')

Σχήμα 4.8: Transcritical ροή χωρίς Shock: $CFL = 150$ (α) Έμμεσο πρώτης τάξης αριθμητικό σχήμα και (β) διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους και ταχυτήτων. (γ) Έμμεσο δεύτερης τάξης αριθμητικό σχήμα με οριοθέτη ροής SuperBee και (δ) διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους και ταχυτήτων.

4.5.5 Διάδοση κύματος σε τοπογραφία

Σε αυτό το πρόβλημα μελετάμε τη διάδοση κύματος σε τοπογραφία. Παρουσιάστηκε αρχικά από τον LeVeque [20] και τους Hubbard και Garcia-Navarro [5]. Το χωρίο εφαρμογής του προβλήματος είναι ένα τετράγωνο κανάλι διαστάσεων $1m \times 1m$. Για την διακριτοποίηση του επιθέτουμε ένα ομοιόμορφο πλέγμα από 10000 τετραγωνικά κελιά. Στο σύνορο του καναλιού επιβάλλουμε συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής. Σαν αρχικές συνθήκες του προβλήματος θεωρούμε:

$$h(x, y, 0) = \begin{cases} 1.01 - b(x, y) & \text{αν } (x, y) \in [0.8, 0.9] \times [0, 1] \\ 1 - b(x, y) & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

$$u(x, y, 0) \equiv 0,$$

$$v(x, y, 0) \equiv 0,$$

όπου $b(x, y)$ η συνάρτηση που περιγράφει την τοπογραφία του πυθμένα και δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$b(x, y) = 0.5 \exp(-50(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2).$$

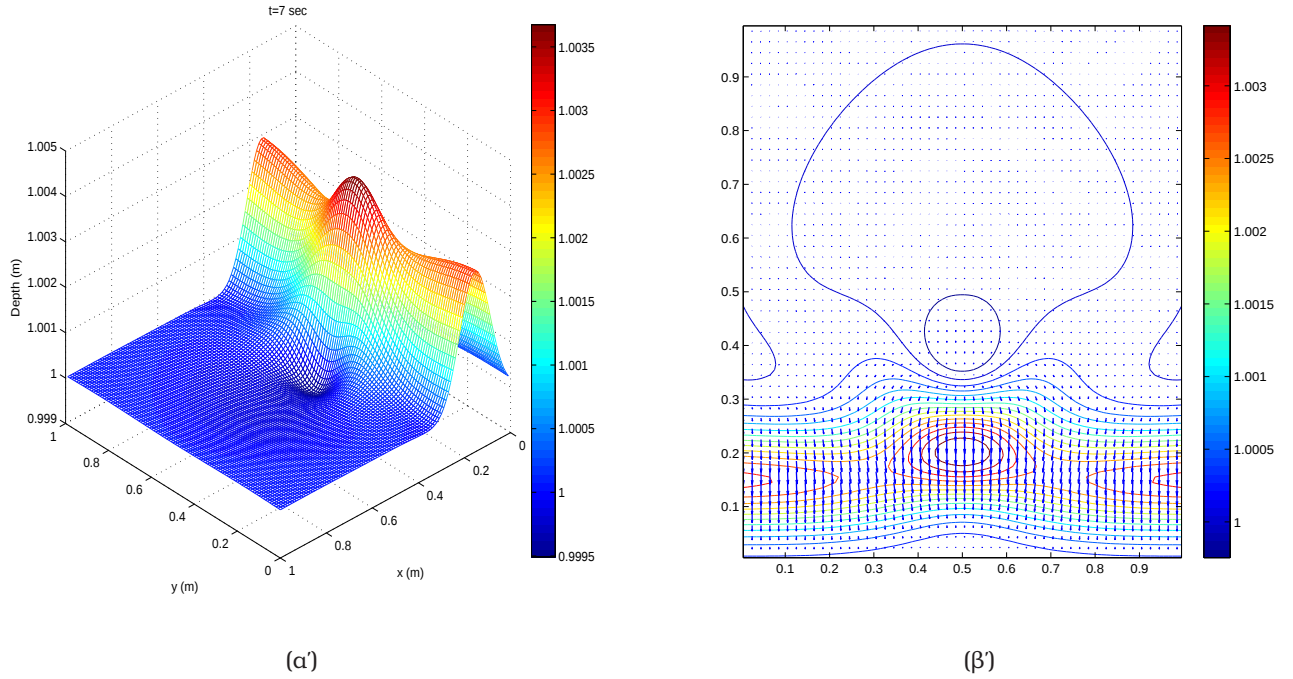
Για αυτό το πρόβλημα η επιτάχυνση της βαρύτητας ορίζεται $g = 1m/s^2$. Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εξέλιξης του βάθους του νερού και το διαγράμματα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στον χρόνο $t = 0.7sec$ για το άμεσο, πρώτης και δεύτερης τάξης (MM limiter) αριθμητικό σχήμα με $CFL = 0.5$ και για το έμμεσο δεύτερης τάξης (MM limiter) αριθμητικό σχήμα για δύο περιπτώσεις της παραμέτρου θ , $\theta = 1$ και $\theta = 1/2$ όπου σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιούμε $CFL = 1$ και $CFL = 2$.

Στα σχήματα 4.9(α')-4.10(β') βλέπουμε ότι το άμεσο δεύτερης τάξης αριθμητικό σχήμα παράγει ακριβέστερα αποτελέσματα από το πρώτης τάξης, χωρίς την παρουσία αριθμητικών ταλαντώσεων, τα οποία συμφωνούν με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται από τον LeVeque [20]. Σε αντίθεση, στο έμμεσο αριθμητικό σχήμα 4.11(α')-4.14(β') καθώς αυξάνεται ο αριθμός CFL παρουσιάζεται μεγαλύτερη διάχυση στην λύση, με μία ελφρά βελτίωση στην περίπτωση που διαλέξουμε $\theta = 1/2$ σχήματα 4.11(α')-4.12(β') όπου σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ένα δεύτερης τάξης αριθμητικό σχήμα και ως προς τον χρόνο.

4.5.6 Κατάρρευση κυκλικού φράγματος

Το πρόβλημα αυτό παρουσιάστηκε αρχικά από τους Alcrudo και Garcia-Navarro [21]. Το χωρίο εφαρμογής του προβλήματος είναι ένα τετράγωνο κανάλι διαστάσεων $50m \times 50m$ στο κέντρο του οποίου υπάρχει ένα κυκλικό φράγμα ακτίνας $11m$. Το πρόβλημα αυτό είναι σημαντικό κυρίως για τον έλεγχο της συμμετρικότητας του αριθμητικού σχήματος που αναπτύξαμε στην παρούσα εργασία. Αρχικά το φυσικό μοντέλο αποτελείται από δύο περιοχές στάσιμου νερού οι οποίες διαχωρίζονται από ένα κυλινδρικό φράγμα που υπάρχει στο κέντρο του καναλιού. Το βάθος του νερού μέσα στον κύλινδρο είναι $10m$ ενώ έξω από αυτόν $1m$,

$$h(x, y, 0) = \begin{cases} 10 & \text{αν } (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 11^2 \\ 1 & \text{αλλιώς} \end{cases},$$



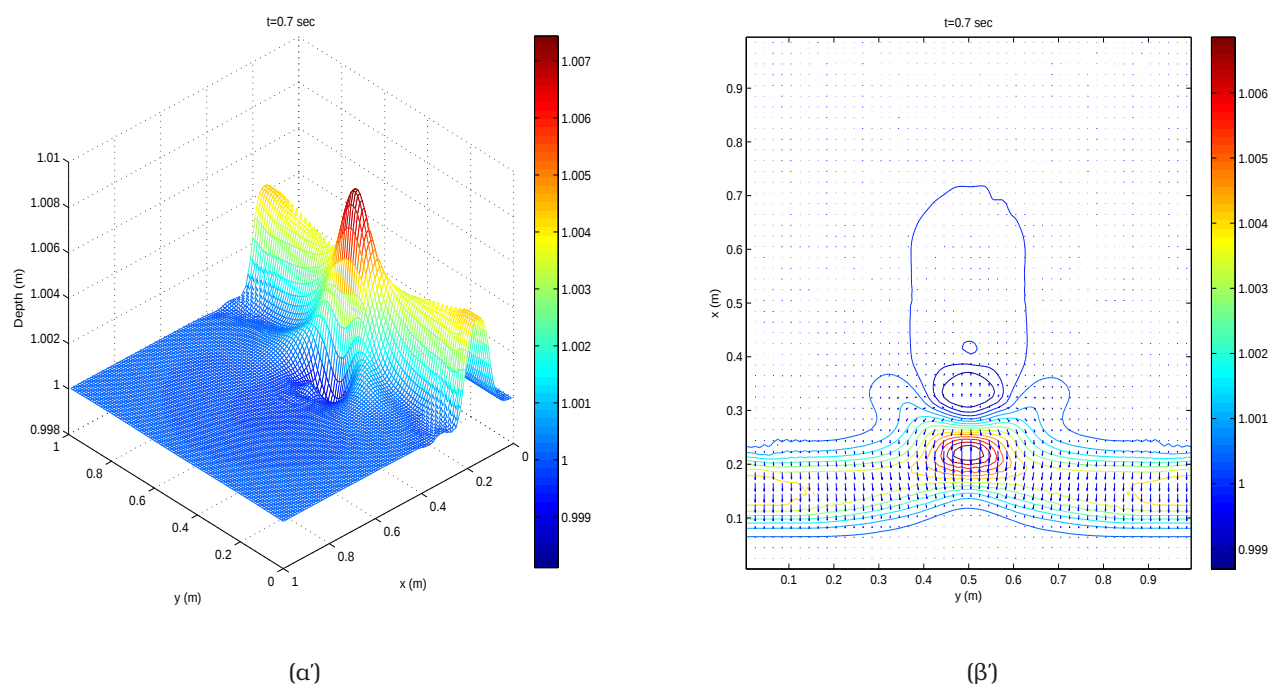
Σχήμα 4.9: Διάδοση κύματος. Άμεσο σχήμα πρώτης τάξης, $CFL = 0.5$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &\equiv 0, \\ v(x, y, 0) &\equiv 0, \end{aligned}$$

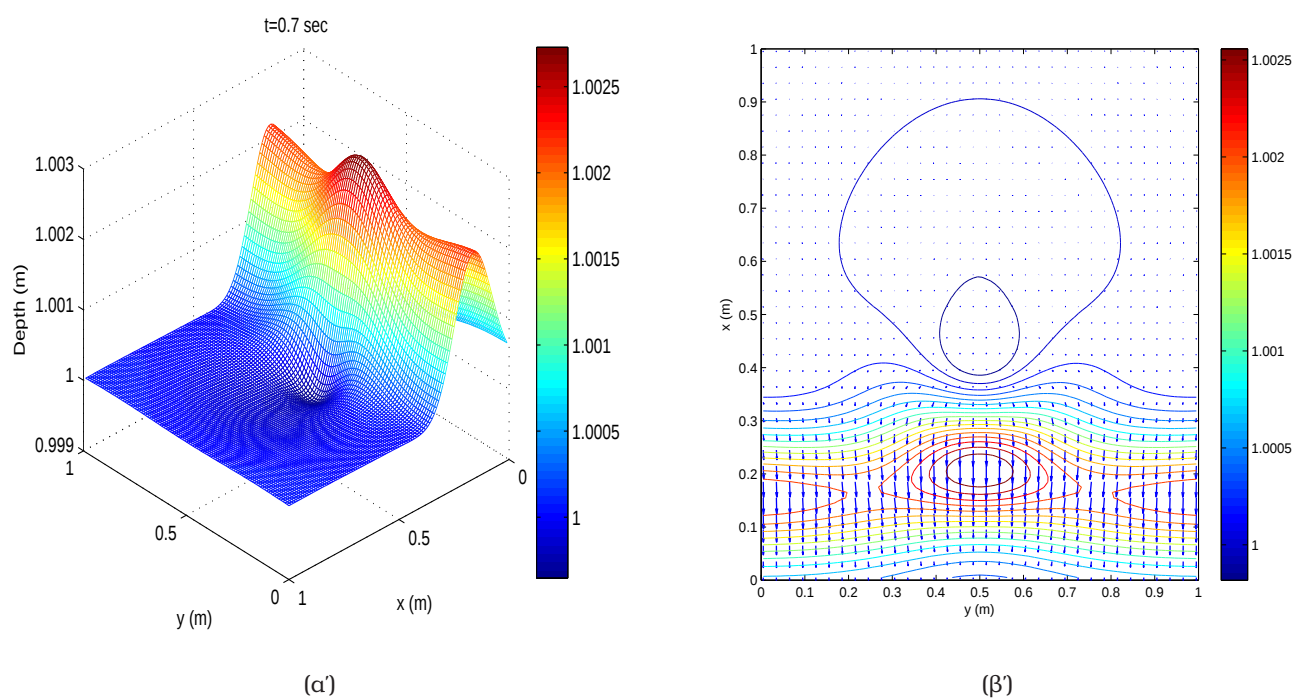
ενώ στο σύνορο του χωρίου επιβάλλουμε συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής. Το φράγμα καταρρέει ακαριαία και το νερό αρχίζει να κινείται ακτινικά και συμμετρικά. Τότε υπάρχει μία μετάβαση από υποκρίσιμη σε υπερκρίσιμη ροή. Για την διακριτοποίηση του προβλήματος επίθετουμε στο υπολογιστικό χωρίο ένα ομοιόμορφο πλέγμα από 6400 τετράγωνα κελιά. Για αυτό το πρόβλημα η επιτάχυνση της βαρύτητας ορίζεται $g = 9.81 m/s^2$.

Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εξέλιξης του βάθους του νερού και τα διαγράμματα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στον χρόνο $t = 0.7 sec$ για το άμεσο, πρώτης και δεύτερης τάξης (MC limiter) αριθμητικό σχήμα με $CFL = 0.7$ και για το έμμεσο δεύτερης τάξης (MC limiter) αριθμητικό σχήμα για δύο περιπτώσεις της παραμέτρου θ , $\theta = 1$ και $\theta = 1/2$ όπου σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιούμε $CFL = 1$ και $CFL = 2$.

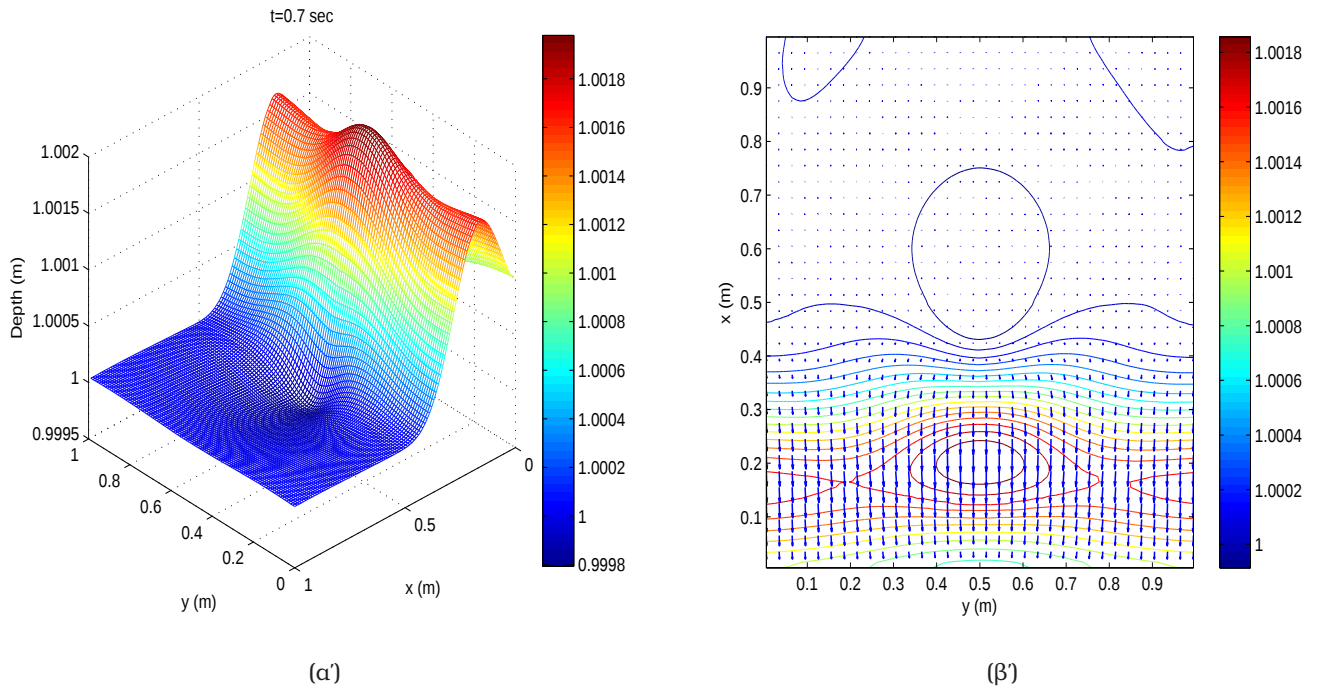
Παρατηρώντας τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι τα κύματα απλώνονται ομοιόμορφα και ακτινικά, με την ακτινική συμμετρία ελαφρώς παραμορφωμένη λόγω της αδυναμίας αναπαράστασης ενός κύκλου σε τετραγωνικό πλέγμα. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι το έμμεσο δεύτερης τάξης αριθμητικό σχήμα εξομαλύνει την λύση.



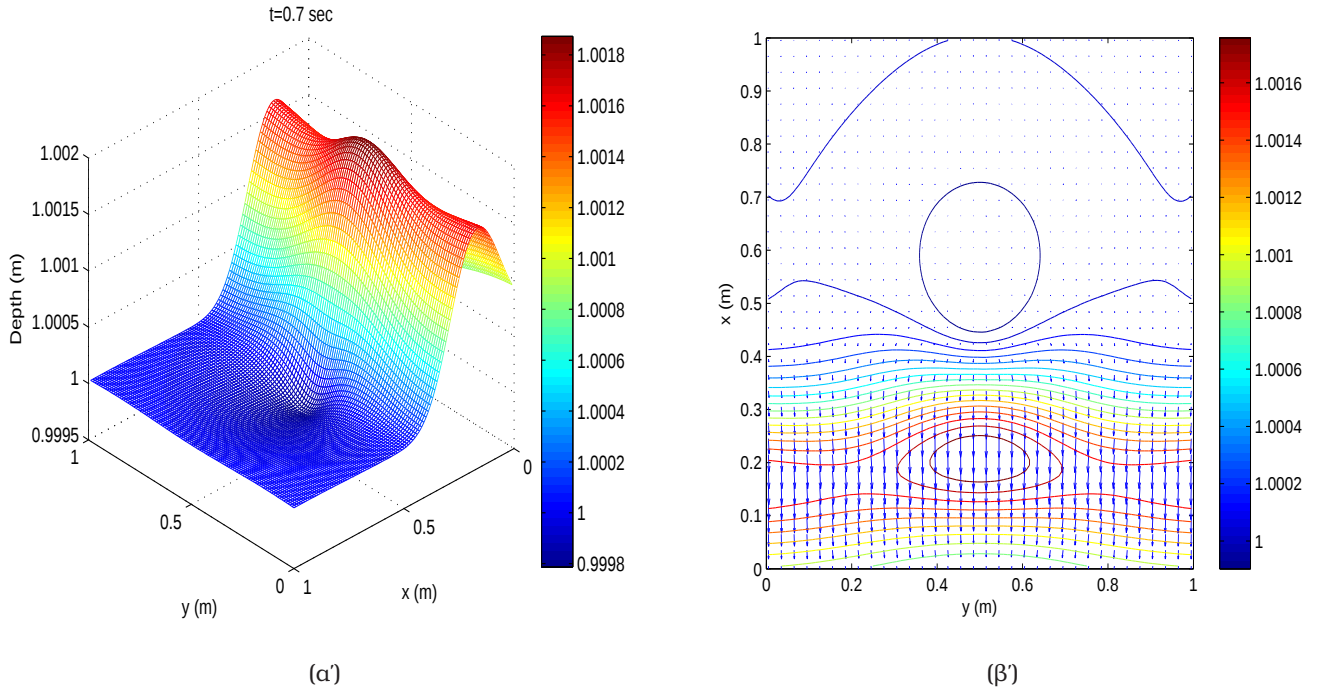
Σχήμα 4.10: Διάδοση κύματος: Άμεσο σχήμα δεύτερης τάξης (MM limiter), $CFL = 0.5$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων.



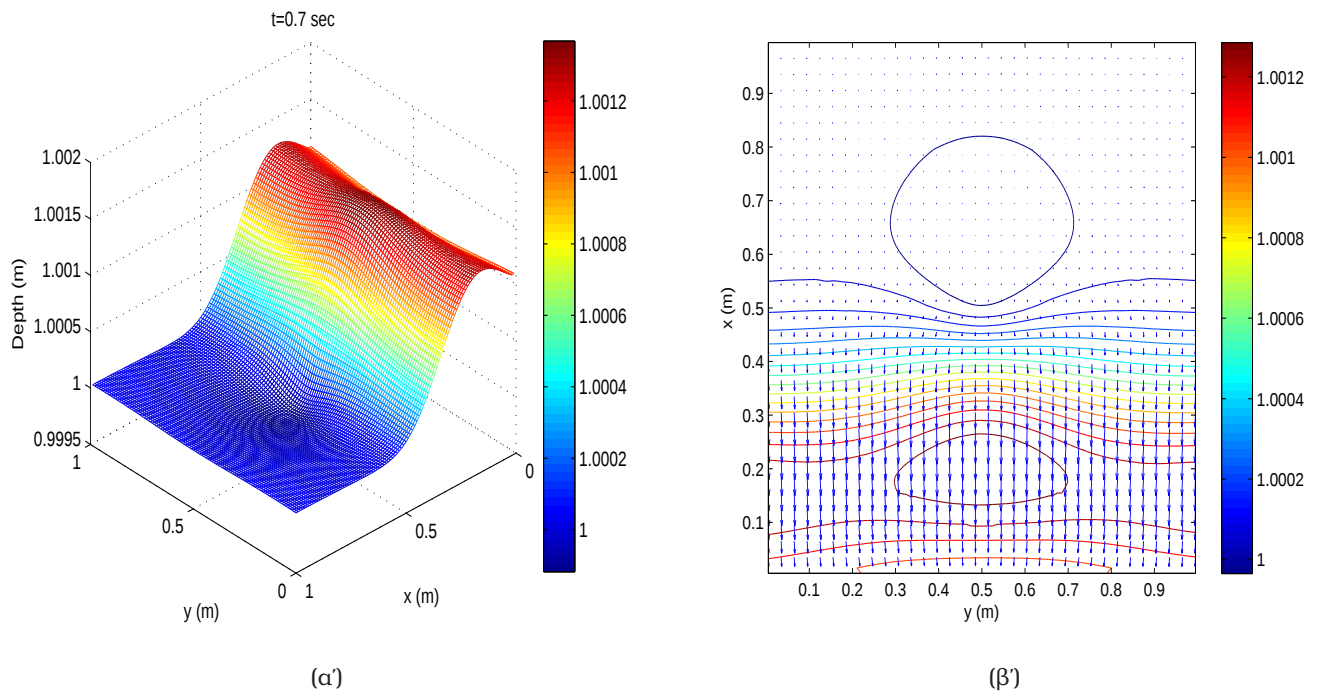
Σχήμα 4.11: Διάδοση κύματος: Έμμεσο σχήμα δεύτερης τάξης (MM limiter), $\theta = 1/2$, $CFL = 1$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων.



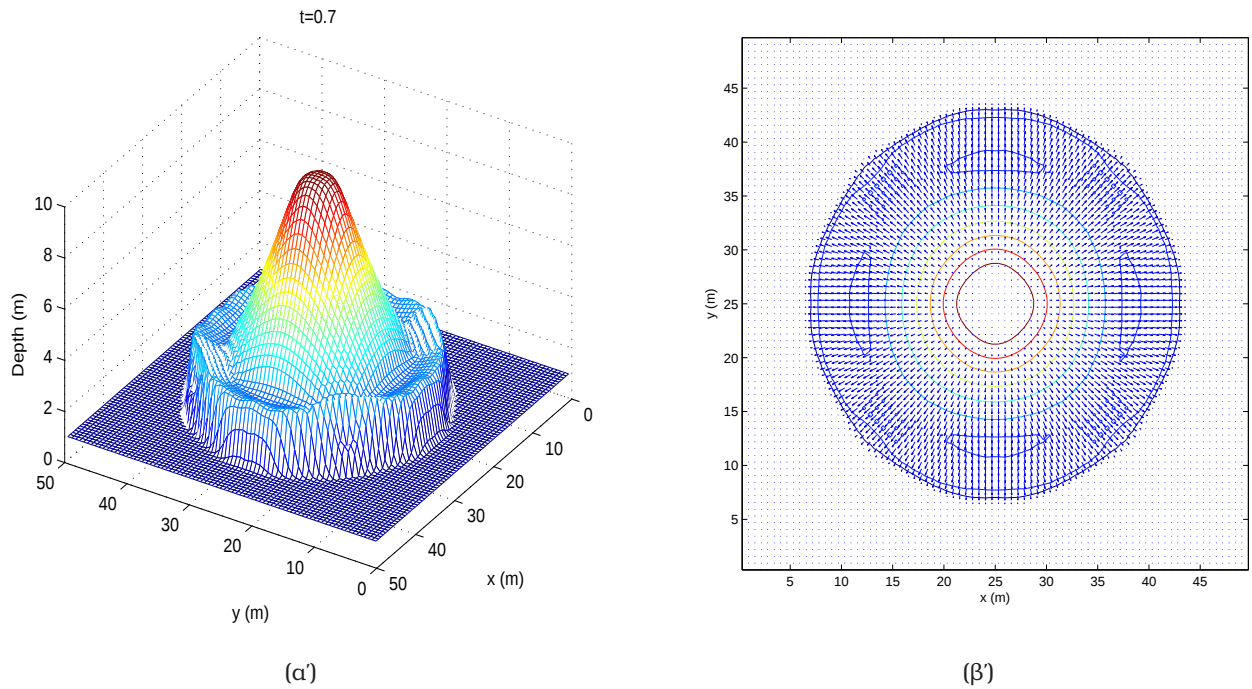
Σχήμα 4.12: Διάδοση κύματος: Έμμεσο σχήμα δεύτερης τάξης (MM limiter), $\theta = 1/2$, $CFL = 2$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων.



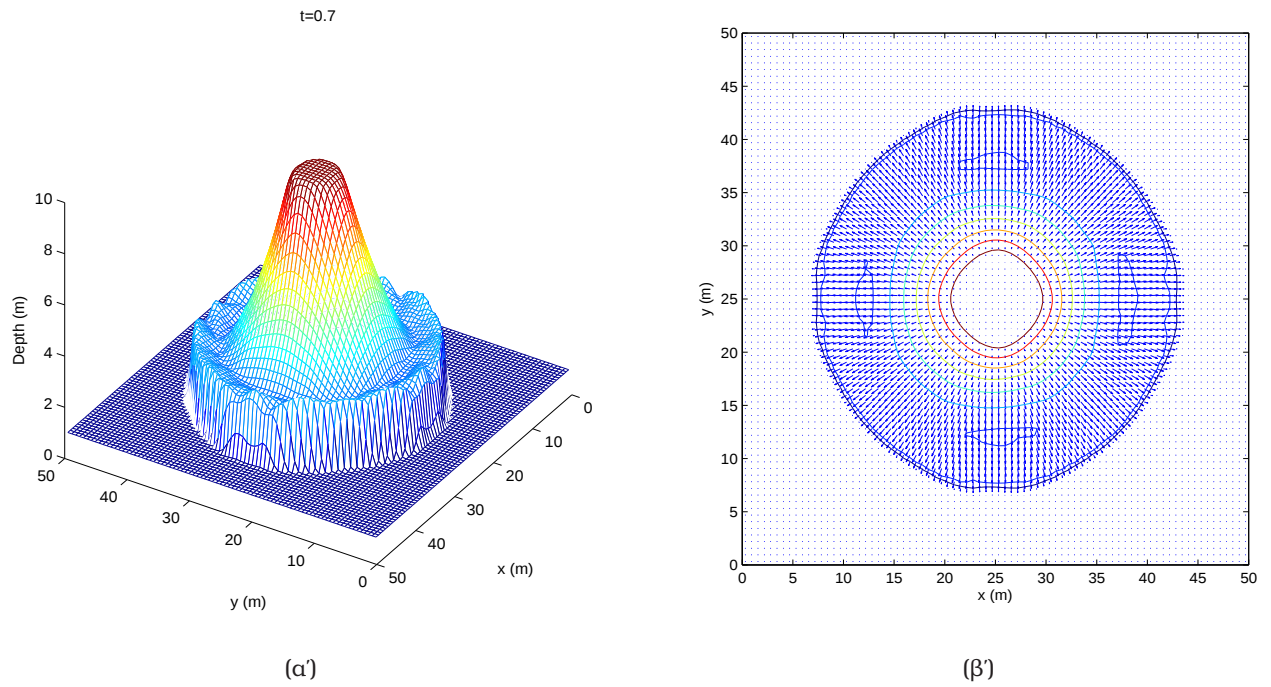
Σχήμα 4.13: Διάδοση κύματος: Έμμεσο σχήμα δεύτερης τάξης (MM limiter), $\theta = 1$, $CFL = 1$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων.



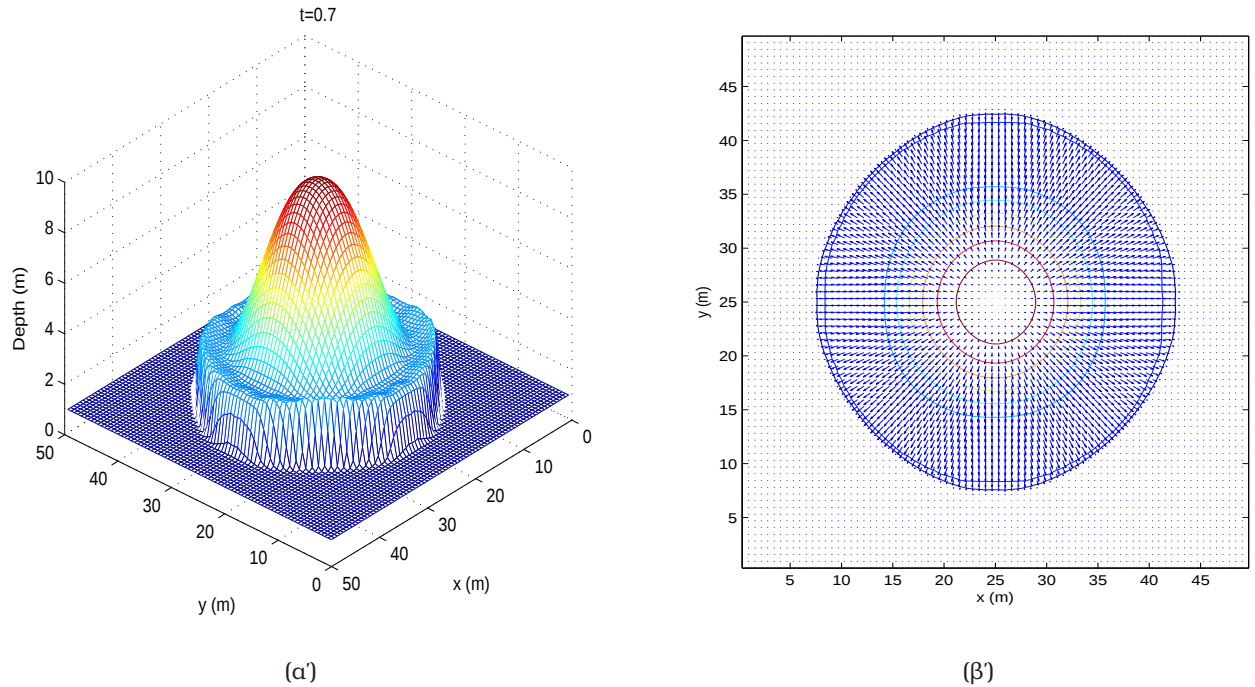
Σχήμα 4.14: Διάδοση κύματος: Έμμεσο σχήμα δεύτερης τάξης (MM limiter), $\theta = 1$, $CFL = 2$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων.



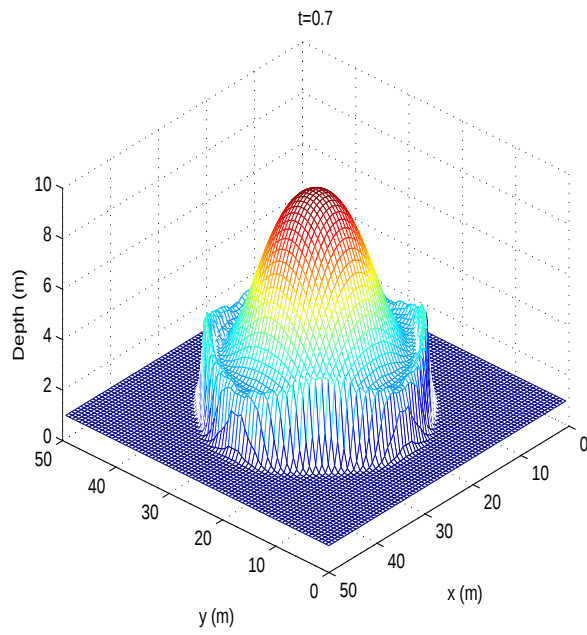
Σχήμα 4.15: Κατάρρευση φράγματος: Άμεσο σχήμα πρώτης τάξης, $CFL = 0.7$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων



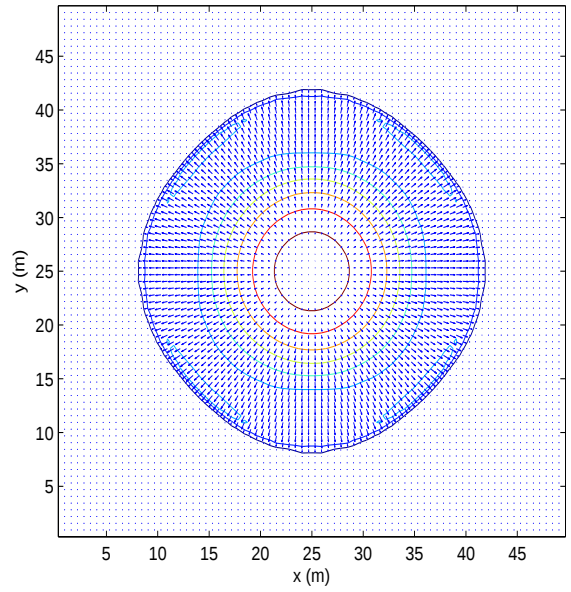
Σχήμα 4.16: Κατάρρευση φράγματος: Άμεσο σχήμα δεύτερης τάξης (MC limiter), $CFL = 0.7$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων



Σχήμα 4.17: Κατάρρευση φράγματος: Έμμεσο σχήμα δεύτερης τάξης (MC limiter), $\theta = 1/2$, $CFL = 1$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων

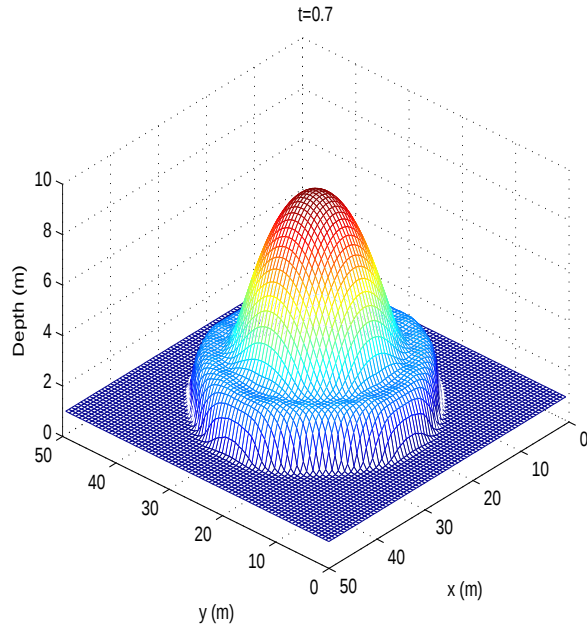


(α')

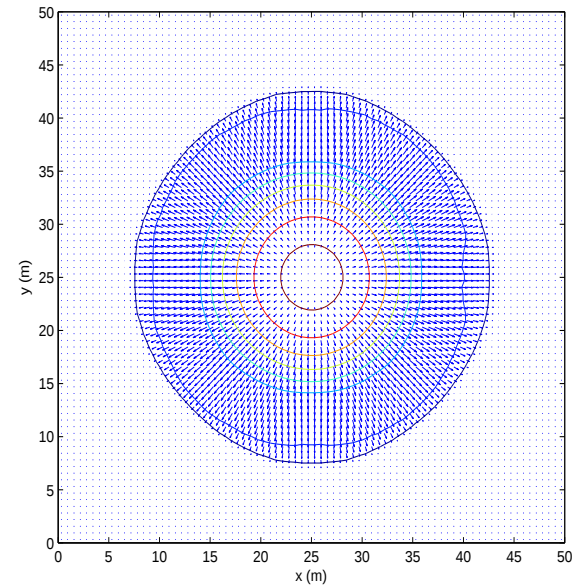


(β')

Σχήμα 4.18: Κατάρρευση φράγματος: Έμμεσο σχήμα δεύτερης τάξης (MC limiter), $\theta = 1/2$, $CFL = 2$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων

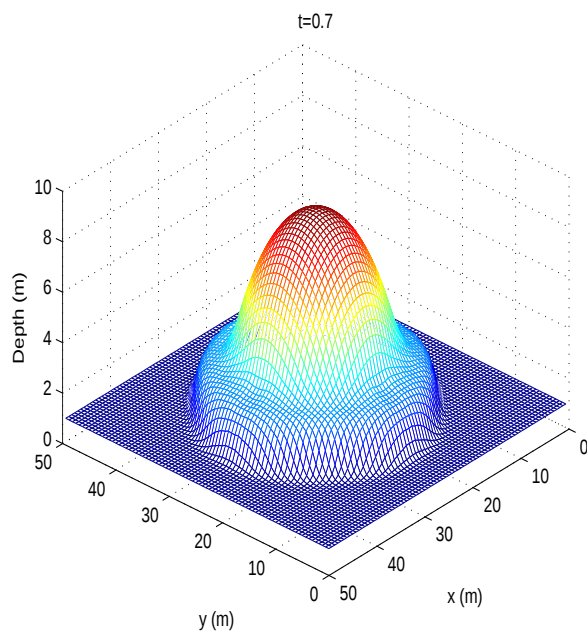


(α')

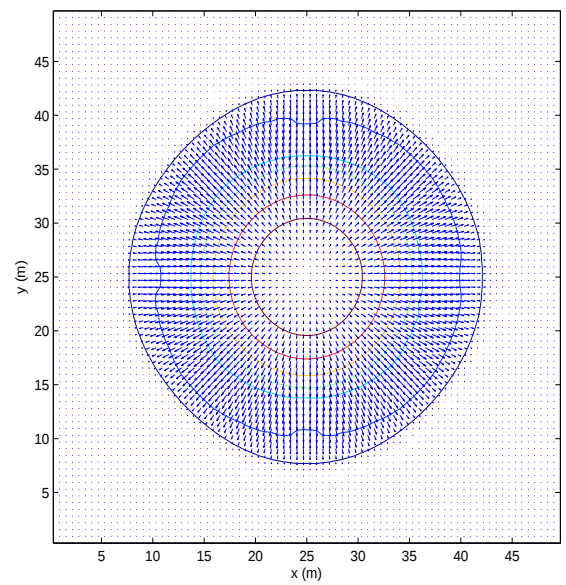


(β')

Σχήμα 4.19: Κατάρρευση φράγματος: Έμμεσο σχήμα δεύτερης τάξης (MC limiter), $\theta = 1$, $CFL = 1$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων



(α')



(β')

Σχήμα 4.20: Κατάρευση φράγματος: Έμμεσο σχήμα δεύτερης τάξης (MC limiter), $\theta = 1$, $CFL = 2$. (α) Εξέλιξη του βάθους του νερού. (β) Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με πεδίο ταχυτήτων

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε η εξαγωγή και η ανάλυση τόσο του μαθηματικού μοντέλου των εξισώσεων ρηχών υδάτων όσο και αριθμητικών σχημάτων πεπερασμένων όγκων που χρησιμοποιούνται για την αριθμητική επίλυση του σε μία και δύο χωρικές διαστάσεις. Τα αριθμητικά σχήματα που κατασκευάστηκαν βασίζονται στην μέθοδο των πεπερασμένων όγκων και χρησιμοποιούν τον προσεγγιστικό επιλυτή Riemann του Roe. Είναι έμμεσα δεύτερης τάξης, ως προς το χώρο, TVD αριθμητικά σχήματα τύπου upwind και πρώτης ή δεύτερης τάξης, ως προς το χρόνο, ανάλογα με την μέθοδο που χρησιμοποιούμε για την χρονική διακριτοποίηση. Για την επίτευξη της δεύτερης τάξης χωρικής ακρίβειας, για την μία διάσταση, εφαρμόστηκε η τεχνική της οριοθέτησης ροής (Flux-limiting) και της οριοθέτησης κλίσης (MUSCL) ενώ για τις δύο διαστάσεις εφαρμόστηκε μόνο οριοθέτηση ροής. Για την διατήρηση της ισορροπίας μεταξύ των αριθμητικών ροών και του πηγαίου όρου στην περίπτωση ύπαρξης τοπογραφίας εφαρμόστηκε κατάλληλη διακριτοποίηση του πηγαίου όρου τύπου upwind, ανάλογη αυτής της ροής έτσι ώστε το αριθμητικό σχήμα να διατηρεί τις στάσιμες καταστάσεις, C-ιδιότητα, χωρίς την εμφάνιση αριθμητικών ταλαντώσεων. Για την αποφυγή επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων μέσω μίας επαναληπτικής μεθόδου για την εξαγωγή της αριθμητικής λύσης, παρουσιάστηκε κατάλληλη γραμμικοποίηση του έμμεσου τελεστή καταλήγοντας έτσι σε ένα block τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα όπου, για την επίλυση του, χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος του Thomas.

Το παραγόμενο έμμεσα αριθμητικά σχήματα εφαρμόστηκαν, στις μία και δύο διαστάσεις, σε πληθώρα προβλημάτων στάσιμης και μη στάσιμης κατάστασης και έγινε σύγκριση, όπου αυτό ήταν εφικτό, με αναλυτικές λύσεις. Οι στάσιμες καταστάσεις χρησιμοποιούνται ως αρχικές συνθήκες πεδίων ροής σε προβλήματα μη στάσιμης κατάστασης. Στα προβλήματα στάσιμης κατάστασης τα έμμεσα σχήματα εφαρμόστηκαν σε υποκρίσιμες, υπερκρίσιμες και Transcritical ροές με Shock δίνοντας ακριβή αποτελέσματα χωρίς να περιορίζονται από την συνθήκη ευστάθειας CFL. Ακόμα και για μεγάλες τιμές του αριθμού CFL τα έμμεσα σχήματα διατήρησαν την TVD ιδιότητα και σύγκλιναν στην στάσιμη κατάσταση σε λιγότερες χρονικές επαναλήψεις σε σύγκριση με το άμεσο, κάνοντας έτσι εμφανές την υπερτερότητά τους. Στα προβλήματα μη στάσιμης κατάστασης, κατάρρευση φράγματος και διάδοση κύματος πάνω από τοπογραφία τα έμμεσα αριθμητικά σχήματα παρουσίασαν διάχυση στα αριθμητικά αποτελέσματα μην επιτρέποντας έτσι την χρήση μεγάλων τιμών στον αριθμό CFL.

Η παρούσα εργασία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως βάση για την εφαρμογή του

έμμεσου αριθμητικού σχήματος σε μη δομημένα πλέγματα όπως επίσης και σε διαφορετικό τύπου πλέγματα, για παράδειγμα τριγωνισμούς, για την καλύτερη προσέγγιση της γεωμετρίας του πυθμένα. Επίσης το παρόν σχήμα θα μπορούσε να τροποποιηθεί κατάλληλα έτσι ώστε να αντιμετωπίζει προβλήματα όπου παρουσιάζονται στεγανές περιοχές και ο όρος της τριβής. Ακόμη, κατάλληλη αρίθμηση των κελιών του πλέγματος θα μπορούσε να προσδώσει στο αριθμητικό σχήμα ιδιότητες για παράλληλη επεξεργασία ελαχιστοποιώντας έτσι το χρόνο λήψης των αποτελεσμάτων. Τέλος, ένας ακόμη τομέας μελλοντικής έρευνας είναι η επέκταση του MUSCL στις δύο διαστάσεις καθώς και η περαιτέρω μελέτη του έμμεσου σχήματος με σκοπό την μείωση της αριθμητικής διάχυσης με πιθανά αίτια, τον τρόπο γραμμικοποίησης του συστήματος ή την μέθοδο επίλυσής του.

Βιβλιογραφία

- [1] P. L. Roe, **Approximate Riemman solvers, parameter vectors, and difference schemes**, *J. Comput. Phys.*, **43**(2), 357 ,1981.
- [2] A. Harten, **On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes**, *SIAM J.Numer. Anal.*, 21, 1, 1984.
- [3] B. van Leer, **Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's methode**, *J. Comput. Phys.* **32**, 101, 1979.
- [4] R. J. LeVeque, **Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems**. Cambridge University Press, 2002.
- [5] M. E. Hubbard. and P. Garcia-Navarro, **Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients**, *J. Comput. Phys.* **165**, 89-125, 2000.
- [6] P. L. Roe, **Some contributions to the modeling of discontinous flows**, *Lect, Notes Appl. Math.*, **22**, 163-193, 1985.
- [7] B. van Leer, **Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection**, *J. Comput. Phys*, **23**, 276-299, 1977.
- [8] H. C. Yee, **Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications**, *J. Comput. Phys.* 68:151, 1987.
- [9] A. I. Delis, C. P. Skeels and S. C. Rylie, **Evaluation of some approximate Riemann solvers for transient open channel flows**, *J. Hydraulic Res.* 38, 2000.
- [10] H. C. Yee, **Linearised form of implicit TVD schemes for multidimensional Euler and Naviers-Stokes equations**. *Comp. and Maths, with Appls.* 12A(4/5):413, 1986.
- [11] F. Alcrudo, P. Garcia-Navarro, and A. Priestley., **An implicit method for water flow modelling in channels and pipes**, *J. Hydraulic Res.*, 32:721, 1994.
- [12] R.J. LeVeque, **Numerical Methods for Concervation Laws**. BirkHauser, 1992.
- [13] A. Harten, **High resolution schemes for hyperbolic conservation laws**. *Journal of Computational Physics*, 49:1, 1983.
- [14] A.I. Delis and C.P Skeels . **TVD schemes for open channel flow**. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 26:791, 1998.

- [15] S.K Godunov., **Finite difference methods for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics.** *Math. Sb.*, 47:271, 1959.
- [16] N. Goutal, F. Maurel , **In Proceedings of the 2nd Workshop on Dam-Break Wave Simulation.** HE-43/97/016/B, Department Laboratoire National d'Hydraulique, Groupe Hydraulique Fluviale Electricite De de France, France, 1997
- [17] R. Courant, K.Friedrichs, and H. Lewy, **Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik.** *Math. Ann.*, 100: 32-74, 1928.
- [18] H. C. Yee. **Linearized form of implicit TVD schemes for the multidimensional Euler and Navier-Stokes equations.** *Comp. and maths, with Appls*, 12A(4/5):413, 1986.
- [19] A. I. Delis, C. P. Skeels and S. C. Rylie. **Implicit High-Resolution methods for modelling one-dimensional open channel flow.** *J. Hydraulic Res.* 38, 2000.
- [20] R. J. LeVeque. **Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propagation Algorithm.** *Journal of Computational Physics*, 146:346-365, 1998.
- [21] F. Alcrudo, P. Garcia-Navarro. **A high resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow water equations.** *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 16:489-505, 1993.
- [22] P. K. Sweby. **High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws .** *SIAM J. Numer. Anal.*, 21: pp. 995-1011, 1984
- [23] E. F. Toro. **Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows .** John Wiley and Sons Ltd, 2001.
- [24] E.F. Toro. **Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows.** John Wiley and Sons Ltd, 2001.
- [25] A. Bermudez and M.E Vazquez-Cendón. **Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms.** *Computer Fluids*, 23:955-970, 1994.
- [26] A. I. Delis, M. Kazolea and N. A. Kampanis. **A robust high-resolution finite volume scheme for the simulation of long waves over complex domains.** *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2007
- [27] M.E. Hubbard, P. Garcia-Navarro. **Efficient construction of high-resolution TVD conservative schemes for equations with source terms:Application to shallow water flows.** *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 37:209-248, 2001.
- [28] S. Vuković, L. Sopta. **Upwind schemes with exact conservation property for one-dimensional open channel flow equations.** *SIAM. J. Sci. Comput.* 24(5) 1630-1649, 2003.

- [29] A. Chinnayya, A. Y. LeRoux, N. Seguin. **A well-balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms.** *J. Comput. Phys.* 214:576-598, 2006.
- [30] A. Chinnayya, A. Y. LeRoux. **A new general Riemann solver fir shallow water equations, with friction and topography.** Available at: <http://www.math.ntnu.no/conservation/1999/021.html>
- [31] J.A Liggett. **Fluid Mechanics.** Inc McGrawHill, 1994.
- [32] P.D. Lax and B. Wendroff. **Systems of conservation laws.** *Comm. Pure Appl. Math.*,12:217, 1960.
- [33] T.Y. Hou and P. LeFloch. **Why non-conservative schemes converge to the wrong solutions: Error analysis.** *Math. of Comput.*, 62, 1994.
- [34] J.A. Cunge, F.M. Holly, and A. Verway. **Practical Aspects of Computational River Hydraulics.** Pitman Publishing Ltd., London, 1980.

Παράρτημα Α΄

Συνοριακές συνθήκες

Α΄.1 Ελεύθερης ροής

Στην περίπτωση επιβολής συνοριακών συνθηκών ελεύθερης ροής έχουμε:

$\forall j = 0, \dots, N + 1$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{Q}_{j,0} &= \delta \mathbf{Q}_{j,1}, \\ \delta \mathbf{Q}_{j,N+1} &= \delta \mathbf{Q}_{j,N},\end{aligned}$$

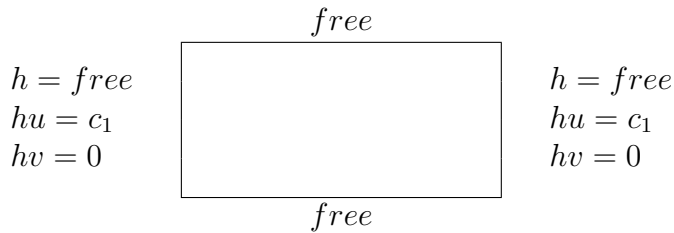
$$\begin{aligned}\delta \mathbf{Q}_{0,j} &= \delta \mathbf{Q}_{1,j}, \\ \delta \mathbf{Q}_{N+1,j} &= \delta \mathbf{Q}_{N,j},\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{Q} = [h, hu, hv]^T$ και $\delta(*) = (*)^{n+1} - (*)^n$. Οι πίνακες $\hat{\mathbf{F}}_1, \hat{\mathbf{F}}_N, \hat{\mathbf{B}}_1^k, \hat{\mathbf{B}}_N^k$ στις (4.65), (4.66) και (4.67) ορίζονται ως

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}}_1 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{G}_1, \\ \hat{\mathbf{F}}_N &= \mathbf{F}_N + \mathbf{L}_N, \\ \hat{\mathbf{B}}_1^k &= \mathbf{A}_1^k + \mathbf{B}_1^k, \\ \hat{\mathbf{B}}_N^k &= \mathbf{B}_N^k + \mathbf{C}_N^k.\end{aligned}$$

Α΄.2 Υποκρίσιμη ροή

Στην περίπτωση όπου οι συνοριακές συνθήκες είναι όπως περιγράφονται στο παρακάτω σχήμα



έχουμε ότι:

$$\forall j = 0, \dots, N+1$$

$$\begin{array}{ccccccc} \delta \mathbf{Q}_{j,0} & = & \delta \mathbf{Q}_{j,1} & , & (\delta h)_{0,j} & = & (\delta h)_{1,j} & , & (\delta h)_{N+1,j} & = & 0 \\ \delta \mathbf{Q}_{j,N+1} & = & \delta \mathbf{Q}_{j,N} & , & (\delta hu)_{0,j} & = & 0 & , & (\delta hu)_{N+1,j} & = & (\delta hu)_{N,j} \\ & & & & (\delta hv)_{0,j} & = & 0 & & (\delta hv)_{N+1,j} & = & 0 \end{array}$$

και οι πίνακες $\hat{\mathbf{F}}_1, \hat{\mathbf{F}}_N, \hat{\mathbf{B}}_1^k, \hat{\mathbf{B}}_N^k$ στις (4.65), (4.66) και (4.67) ορίζονται ως

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_1 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{G}_1, \\ \hat{\mathbf{F}}_N &= \mathbf{F}_N + \mathbf{L}_N, \\ \hat{\mathbf{B}}_1^k &= \mathbf{A}_1^k + \mathbf{B}_1^k \cdot \mathbf{e}_1, \\ \hat{\mathbf{B}}_N^k &= \mathbf{B}_N^k + \mathbf{C}_N^k \cdot \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Όπου $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$ και $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T$.