ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΣΟΛΙΤΟΝΙΚΩΝ ΚΥΨΕΛΙΔΙΚΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΩΝ

ΚΑΛΦΑ ΜΑΡΙΑ

Επιβλέπων : Καθηγήτρια **Έλενα Παπαδοπούλου**

ΧΑΝΙΑ , 2012

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτριά μου, Καθηγήτρια του Πολυτεχνείου Κρήτης κα Έλενα Παπαδοπούλου η οποία με σύστησε σε ένα νέο αντικείμενο, αυτό των Κυψελιδικών Αυτομάτων. Με την άρτια εκπαίδευσή της πάνω στα Κυψελιδικά Αυτόματα έδινε πάντα άμεσα λύση σε όλες τις απορίες και δυσκολίες που συνάντησα. Η μεταδοτικότητα που έχει ως καθηγήτρια με βοήθησε να καταλάβω σε βάθος και να υλοποιήσω υπολογιστικά τους κανόνες εξέλιξης που μου δίδαξε. Οι εύστοχες παρατηρήσεις της πάνω στην κωδικοποίηση του υπολογιστικού περιβάλλοντος που αναπτύξαμε με βοήθησαν να εξελίξω τις προγραμματιστικές μου δυνατότητες. Πιο πολύ όμως θα ήθελα να την ευχαριστήσω ως άνθρωπο για την κατανόησή της αλλά και για την αμέριστη συμπαράστασή της με κάθε τρόπο, ώστε να ολοκληρώσω την εκπόνιση αυτής της εργασίας.

Τον Καθηγητή και διευθυντή του εργαστηρίου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του Γενικού Τμήματος Πολυτεχνείου Κρήτης κο Γ. Σαριδάκη, για τον τεχνολογικό και εργαστηριακό εξοπλισμό μου παρείχε, χωρίς τον οποίο η εκπόνηση αυτής της εργασίας δεν θα ήταν εφικτή.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον κο Εμ. Μαθιουδάκη Επίκουρο Καθηγητή του Πολυτεχνείου Κρήτης για την παροχή πολύτιμων γνώσεων σε υπολογιστικά προβλήματα που συνάντησα κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Πιο πολύ όμως θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την ηθική υποστήριξη και την ανθρώπινη συμπεριφορά του, η οποία μου έδινε πάντα κουράγιο να ολοκληρώσω την εργασία μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον σύντροφό μου Στέλιο για το κουράγιο και την ηθική στήριξη που μου παρείχε όλον αυτό τον καιρό. Την φίλη μου Μαρία για τις πάντα εύστοχες παρατηρήσεις της αλλά και για την αξιέπαινη υπομονή της να ακούει τις ανησυχίες και τα άγχη μου, χρόνια τώρα. Πιο πολύ όμως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, για την αγάπη που μου έδωσαν τόσα χρόνια και για την πίστη τους στις δυνατότητές μου.

Μέρος I

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μέρος Ι 4

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 7
1.1 Κυψελιδικά αυτόματα και εφαρμογές τους 7

2. ΘΕΩΡΙΑ-ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΦΙΛΤΡΟΥ 11
2.1 Ορισμός: Κυψελιδικά Αυτόματα 11
2.2 Κυψελιδικά Σολιτονικά Αυτόματα Φίλτρου 12
2.3 Σολιτονικά κυψελιδικά αυτόματα Φίλτρου 13
2.4 1ος Κανόνας εξέλιξης Κυψελιδικών μονοδιάστατων αυτομάτων . 15
2.5 Fast Rule Theorem 17
2.6 Εξέλιξη σωματιδίων στο χρόνο 18
2.7 Εξέλιξη περιοδικών σωματιδίων 22
2.8 Εξέλιξη και αλληλεπίδραση απλών σωματιδίων 25
2.9 Αλληλεπίδραση τυχαίων σωματιδίων 30
2.10 Σολιτονικά Κυψελιδικά Αυτόματα με περιοδικές συνοριακές συνθήκες 32
2.10.1 Συμπεριφορά κυψελιδικών αυτομάτων με περιοδικές συνοριακές συνθήκες 34

3. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ 37
3.1 Αβελιανές ομάδες 37
3.2 Εφαρμογη του γενικευμένου κανόνα εξέλιξης σε κυκλικές ομάδες 40
3.3 Δισδιάστατα,δυαδικά σολιτονικά κυψελιδικά αυτόματα 46

4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ 50
4.1 Ο πρώτος κανόνας εξέλιξης αυτομάτων φίλτρου 50
4.2 Υπολογιστική υλοποίηση του κανόνα εξέλιξης σε περιοδικά κυψελιδικά αυτόματα φίλτρου 53
4.3 Ο γενικευμενος κανόνας εξέλιξης για στοιχεια που ανήκουν σε αβελιανές ομάδες 56
4.4 Υπολογιστική υλοποίηση του γενικευμενου κανόνα εξέλιξης,σε διατάξεις με δυαδικά δισδιάστατα στοιχεία 58

4.5 Υπολογιστική υλοποίηση του γενικευμενου κανόνα εξέλιξης,σε διατάξεις με στοιχεία που ανήκουν σε κυκλικές ομάδες 62

Μέρος II ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΕ ΓΛΩΣΣΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ C , ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΝΟΝΩΝ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΣΟΛΙΤΟΝΙΚΩΝ Κ.Α 71

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Κυψελιδικά αυτόματα και εφαρμογές τους

ΚΥΨΕΛΙΔΙΚΑ ΑΥΤΟΜΑΤΑ: Πρόκειται για μαθηματικά πρότυπα φυσικών συστημάτων στα οποία ο χώρος και ο χρόνος είναι διακριτοί και οι φυσικές ποσότητες παίρνουν διακριτές τιμές απο ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών. Ένα κυψελιδικό αυτόματο αποτελείται απο ένα ομοιογενές πλέγμα συνήθως άπειρο, με μία διακριτή τιμή σε κάθε πλευρά (κελί) του. Η κατάσταση του κυψελιδικού αυτομάτου εξαρτάται απο τις τιμές των μεταβλητών κάθε κελιού, οι οποίες ενημερώνονται - ανανεώνονται αυτόματα.

Τα Κυψελιδικά αυτόματα είναι ιδανικά για τη μελέτη πολύπλοκων συστημάτων, δηλαδή συστημάτων που αποτελούνται απο ένα μεγάλο αριθμό διαφορετικών μη γραμμικών αλληλεπιδρόντων στοιχείων. Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ιδανικές για την μελέτη απλών συστημάτων και ιδιαίτερα για την μελέτη τοπικών λύσεων σε ένα πολύπλοκο σύστημα. Απο την άλλη πλευρά τα κυψελιδικά αυτόματα (Κ.Α) μας δίνουν άμεσα αποτελέσματα για συστήματα με μεγάλο βαθμό ελευθερίας και εξελίσονται μέσω χωρικών αλληλεπιδράσεων. Τυπικά αυτά τα συστήματα με την χρήση κυψελιδικών αυτομάτων είναι απλούστερα στη δομή τους απο αυτά που παραδοσιακά χρησιμοποιούνται (π.χ Δυναμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων). Στα Κ.Α τοποθετείται πεπερασμένο πλήθος σωματιδίων σε κάθε κελί ενός διακριτού πλέγματος, τα οποία ανανεώνονται σε κάθε διακριτό χρονικό βήμα [1],[2],[3]. Η διαφορά μεταξύ αυτών των δυο μεθόδων έγγυται στο γεγονός ότι οι φυσικές ποσότητες, ο χώρος και ο χρόνος παίρνουν διακριτές, πεπερασμένες και όχι συνεχείς τιμές όπως συμβαίνει σε ενα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Παρ'ολα αυτά

η εξέλιξή τους παρουσιάζει μια πλούσια δυναμική καθώς πρατηρούμε ότι μπορούν να παράγουν μια μεγάλη συλλογή διαφορετικών συμπεριφορών αντίστοιχες με αυτές που προκύπτουν απο συστήματα στα οποία όλοι οι παράμετροι είναι συνεχείς. Επιπρόσθετα, λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των κελιών μπορούμε να μελετήσουμε μια συλλογική και όχι τοπική συμπεριφορά των στοιχείων που αποτελούν το σύστημά μας κατα την διάρκεια της χρονικής εξέλιξής του.

Για να ορίσουμε λοιπόν ένα Κυψελιδικό αυτόματο θα πρέπει να λάβουμε υπ όψιν τα παρακάτω χαρακτηριστικά που το καθορίζουν:

Είναι διακριτά ως προς το χώρο: Αποτελούνται απο σημεία σε διακριτό πλέγμα.

Είναι διακριτά ως προς το χρόνο: Η τιμή του κάθε κελιού ανανεώνεται σε διακριτά χρονικά βήματα.

Είναι διακριτά ως προς την κατάσταση τους: Κάθε κελί μπορεί να πάρει τιμές απο ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών.

Είναι ομοιογενή: Όλα τα κελιά είναι ίδιας διάστασης και τοποθετημένα σε έναν κανονικό πίνακα.

Έχουν προκαθορισμένο κανόνα εξέλιξης: Το κάθε κελί εξελίσεται σύμφωνα με τον ίδιο προκαθορισμένο κανόνα.

Υπάρχει τοπική συσχέτιση κελιών : Οι κανόνες εξέλιξης συσχετίζουν γειτονικά κελιά,σε σχέση με αυτό που βρίσκεται υπό εξέλιξη.

Υπάρχει χρονική συσχέτιση κελιών : Η τιμή του υπο εξέλιξη κελιού προκύπτει σύμφωνα με τις τιμές που είχαν τα γειτονικά του κελιά πρίν απο προκαθορισμένο αριθμό παλαιότερων βημάτων. Συνήθως λαμβάνονται υπ΄ όψιν μόνο οι τιμές τους στο αμέσως προηγούμενο βήμα.

Τα Κ.Α. βρίσκουν εφαρμογή σε πληθώρα κλασικών μαθηματικών και όχι μόνο μοντέλων όπως τα παρακάτω: Στη Ρευστομηχανική για την μελέτη ρευστών. Τα ρευστά αποτελούνται απο σωματίδια τα οποία κινούνται σε ένα πλέγμα. Σε κάθε κόμβο του πλέγματος βρίσκεται ένας πεπερασμένος αριθμός σωματιδίων. Σε αυτά τα μοντέλα ο χώρος,ο χρόνος και η ορμή είναι διακριτά μεγέθη. Ενώ υπο ορισμένες συνθήκες τα σωματίδια που βρίσκονται ταυτόχρονα σε έναν κόμβο, μπορεί να συγκρουστούν και να αλλάξει η κατεύθυνση της κίνησής τους. Μια ιδιαίτερη κατηγορία ρευστών είναι τα FHP μοντέλα. Στα οποία το πλέγμα είναι τριγωνικό, υπάρχουν έξι διαθέσιμες διευθύνσεις ταχύτητας. Η ταχύτητα, η μάζα και ο χρόνος είναι μοναδιαία. Μόνο ένα σωματίδιο με ταχύτητα σε δεδομένη διεύθυνση επιτρέπεται να βρεθεί σε κάθε κόμβο του πλέγματος. Τέλος, σε περιπτώσεις κρούσεων διατηρείται η μάζα και η ορμή[4].

Στον τομέα της Βιολογίας, η ανάπτυξη της δομής και του σχήματος των μικροοργανισμών καθώς αυτοί εξελίσονται [5], μπορούν να περιγραφούν με απλούς τοπικούς κανόνες, άρα απο ένα Κυψελιδικό αυτόματο. Οι διακριτές τιμές σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν σε τύπους ζωντανών κυττάρων με την προϋπόθεση οτι αυτά αναπτύσονται σε ένα προκαθορισμένο διακριτό πλέγμα. Οι τοπικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των οργανισμών μπορεί να οδηγήσουν σε δημιουργία διαφορετικών γενετικών χαρακτηριστικών τα οποία και να καθορίσουν τον γενετικό τύπο του εκάστοτε κυττάρου.

Ένα ακόμη αυτόματο του οποίου η εξέλιξη έχει μελετηθεί εκτενώς είναι το *Παιχνίδι της Ζωής* [6]. Σε αυτό το δισδιάστατο αυτόματο ένα κελί θεωρείται *νεκρό* αν δεν έχει τουλάχιστον δύο με τρείς γείτονες ζωντανούς (παίρνοντας την τιμή 0), ενώ αν έχει τουλάχιστον δύο με τρείς γείτονες ζωντανούς θεωρείται *ζωντανό* (παίρνοντας την τιμή 1). Οι πιο απλές μεμονωμένες διατάξεις, αμετάβλητες ως προς το χρόνο, είναι οι τετράγωνες, οι οποίες αποτελούνται απο τέσσερα κατοικίσιμα κελιά και οι εξάγωνες οι οποίες αποτελούνται απο έξι κατοικίσιμα κελιά. Οι διατάξεις *ταλαντωτή*, οπου ένας κύκλος ταλάντωσης αποτελείται απο μια σειρά γνωστών καταστάσεων.

Η απλούστερη διάταξη αυτής της κατηγορίας είναι η *αναβοσβήνουσα*, η οποία αποτελείται απο μια σειρά 3 κατοικίσιμων κελιών, στην οποία ένας κύκλος επιτυγχάνεται με περίοδο δυο χρονικών βημάτων.

Στον τομέα των Η/Υ η χρήση Κ.Α μας εξασφαλίζει παράλληλη επεξεργασία δεδομένων. Θεωρώντας οτι η αρχική διάταξη του Κυψελιδικού Αυτομάτου αντιστοιχεί σε ένα πρόγραμμα με τα αρχικά δεδομένα πρός επεξεργασία, με την χρήση κυψελιδικών αυτομάτων η επεξεργασία κάθε δεδομένου μπορεί να επιτευχθεί σε μεγάλο αριθμό σημείων ταυτόχρονα δηλαδή παράλληλα.

2. ΘΕΩΡΙΑ-ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΦΙΛΤΡΟΥ

2.1 Ορισμός: Κυψελιδικά Αυτόματα

Όπως έχει γινει σαφές απο τα παραπάνω, το κάθε κελί ενός αυτομάτου παίρνει διακριτές τιμές απο ένα πεπερασμένο σύνολο, οι οποίες εξαρτώνται απο αυτές των γειτονικών κελιών που βρίσκονται σε ακτίνα r απο αυτό. Αυτό σημαίνει ότι, ένα αυτόματο μπορεί να αναπαρασταθεί όχι μόνο απο μια σειρά στοιχείων, δηλαδή κελιά μιάς διάστασης αλλά απο ένα ομοιογενές πλέγμα αποτελούμενο απο στοιχεία οποιασδήποτε διάστασης.

Στην πιο απλή περίπτωση ένα αυτόματο, αποτελείται απο μια σειρά στοιχείων καθένα απο τα οποία παίρνει τις τιμές 0 ή 1.Οι τιμές αυτές ενημερώνονται σε διακριτά χρονικά βήματα σύμφωνα με ένα προκαθορισμένο κανόνα, τον κανόνα εξέλιξης. Έστω το στοιχείο α_i^t, δηλαδή το στοιχείο α στη θέση i τη χρονική στιγμή t,του οποίου η νέα κατάσταση προκύπτει απο τη σχέση :

$$\alpha_i^{t+1} = \phi(\alpha_{i-r}^t, \alpha_{i-r+1}^t, ..., \alpha_i^t, ..., \alpha_{i+r-1}^t, \alpha_{i+r}^t) \qquad (2.1)$$

όπου ϕ είναι μια δυαδική συνάρτηση που ονομάζεται κανόνας εξέλιξης. Με λίγα λόγια σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα η νέα τιμή του υπο εξέλιξη στοιχείου προκύπτει συναρτήσει των τιμών που είχαν τα r γειτονικα κελιά στο προηγούμενο χρονικό βήμα,καθώς και της τιμής του προς εξέλιξη στοιχείου την προηγούμενη χρονική στιγμη. Πιό συγκεκριμένα αυτά που βρίσκονται στις θέσεις απο $i - r$ εώς και $i + r$. Στην αρχική του κατάσταση δίνονται οι τιμές όλων των στοιχείων που εκτείνονται σε όλες τις θέσεις απο $-\infty$ εώς και $+\infty$.

2.2 Κυψελιδικά Σολιτονικά Αυτόματα Φίλτρου

Τα αυτόματα φίλτρου είναι μια νέα κατηγορία κυψελιδικών αυτομάτων που εισήχθησαν απο τους Park, Steglitz και Thurston [7] για την μελέτη αυτομάτων. Η βασική τους διαφορά απο τα κλασικά Κ.Α όπως ορίστηκαν παραπάνω είναι οτι η νέα τιμή του κάθε κελιού προκύπτει συναρτήσει όχι μόνο των προηγούμενων καταστάσεων αλλά και των προσφάτως υπολογισμένων στο ίδιο χρονικό βήμα. Τα νέα αυτά αυτόματα είναι δυαδικά και μονοδιάστατα.

Ειδικότερα: Έστω οτι έχουμε πάλι το αυτόματο που αποτελείται απο κελιά μιας διάστασης που παίρνουν τιμές 0 ή 1. Ο κανόνας εξέλιξης για τον υπολογισμό της νέας τιμής ενός στοιχείου α_i^{t+1}πλέον έχει τη μορφή:

$$\alpha_i^{t+1} = \phi(\alpha_{i-r}^{t+1}, \alpha_{i-r+1}^{t+1}, ..., \alpha_i^t, ..., \alpha_{i+r-1}^t, \alpha_{i+r}^t)(2) \qquad (2.2)$$

Όπου ϕ είναι μια δυαδική συνάρτηση.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η επόμενη κατάσταση υπολογίζεται συναρτήσει των ανανεωμένων καταστάσεων

$$\alpha_{i-r}^{t+1}, \alpha_{i-r+1}^{t+1}, ..., \alpha_{i-1}^{t+1}$$

αλλά και των

$$\alpha_i^t, ..., \alpha_{i+r-1}^t, \alpha_{i+r}^t$$

που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο χρονικό βήμα.

Παρά το γεγονός οτι το πλέγμα του αυτομάτου μπορεί να εκτείνεται σε ένα διάστημα $(-\infty, +\infty)$, κατα την υλοποίηση του κανόνα το μέγεθος του πλέγματος είναι διακριτό και πεπερασμένο όπως και τα χρονικά βήματα της εξέλιξης. Ο κανόνας εξέλιξης για τον υπολογισμό της νέας κατάστασης του εκάστοτε στοιχείου εφαρμόζεται απο τα αριστερά προς τα δεξιά στοιχεία του πλέγματος. Η αρχική διάταξη αποτελείται απο πεπερασμένο πλήθος μή μηδενικών κελιών. Τα νέα αυτά αυτόματα είναι δυαδικά και μονοδιάστατα.

2.3 Σολιτονικά κυψελιδικά αυτόματα Φίλτρου

Τα κυψελιδικά αυτόματα φίλτρου αποτελούν μια ιδιαίτερα σημαντική κατηγορία λόγω της περιοδικής τους συμπεριφοράς. Με τον όρο περιοδική (σολιτονική) συμπεριφορά εννοούμε οτι : Τα σωματίδια αλληλεπιδρούν σύμφωνα με έναν κανόνα εξέλιξης της μορφής (2.2) και έπειτα απο πεπερασμένο αριθμό χρονικών βημάτων εξέρχονται ανέπαφα με το ταχύτερο σωματίδιο να προσπερνά τα υπόλοιπα. Σωματίδιο είναι μια συλλογή διαδοχικών θέσεων μιας δομής, της οποίας το πλήθος είναι ακέραιος αριθμός και πολλαπλάσιος του $r+1$. Επίσης ταχύτερο θεωρείται το σωματίδιο που αποτελείται απο τις περισσότερες μονάδες. Άλλο ένα χαρακτηριστικό της αλληλεπίδρασης αυτών των σωματιδίων είναι οτι αν δεν υπάρξει διάσπαση μέχρι την χρονική στιγμή $t = p$, όπου p είναι η περίοδος του ταχύτερου σωματιδίου τότε τα σωματίδια αλληλεπιδρούν πάντα σολιτονικά. Ενώ αντίθετα σε περίπτωση διάσπασης (αν δηλαδή χάσουμε ένα σωματίδιο) οδηγούμαστε σε μη σολιτονικές συμπεριφορές.

Έστω τα σωματίδια $A = 1001101111$ και $B = 1011$ τότε το A είναι ταχύτερο απο το B καθώς $1_A = 7$ και $1_B = 3$ τα οποία αλληλεπιδρούν σύμφωνα με έναν κανόνα εξέλιξης. (Με 1_A και 1_B συμβολίζεται ο αριθμός των μονάδων των σωματιδίων A και B αντίστοιχα.)

$t = 0$	1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1
$t = 1$	1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1
$t = 2$	1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1
$t = 3$	1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1
$t = 4$	1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1
$t = 5$	1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1
$t = 6$	1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1
$t = 7$	1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
$t = 8$	1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1

Στο παραπάνω παράδειγμα, τα σωματίδια $A = 1001101111$ και $B = 1011$ τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 8$ είναι διατεταγμένα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μετατοπισμένα όμως προς τα αριστερά. Παρατηρείται σολιτονική σύγκρουση μεταξύ των σωματιδίων A και B, με περίοδο $p = 7$.

Κατα την εξέλιξη μιας οποιαδήποτε αρχικής διάταξης γενικά, πρώτον υπάρχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών σωματιδίων, δηλαδή δεν είναι όλα τα σωματίδια μηδενικά. Δεύτερον, αφού υπάρχει έστω και ένα μη μηδενικό σωματίδιο τότε υπάρχει ταχύτητα κατα τη μετατόπιση των σωματιδίων και τέλος αν δεν προκύψει διάσπαση σωματιδίων, τότε τα σωματίδια αλληλεπιδρούν σολιτονικά.

2.4 1ος Κανόνας εξέλιξης Κυψελιδικών μονοδιάστατων αυτομάτων

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετηθεί η εξέλιξη στο χρόνο των Αυτομάτων Φίλτρου, μέσω του πρώτου κανόνα εξέλιξης όπως αυτός περιγράφεται παρακάτω.

Έστω το αυτόματο φίλτρου που αποτελείται απο L στοιχεία, καθένα απο τα οποία όπως έχει γίνει σαφές μεχρι τώρα παίρνει τις τιμές 0 ή 1. Τα στοιχεία αυτά είναι τοποθετημένα σε ένα πλέγμα της μορφής :

$$\alpha^t : ....0\alpha_0^t...\alpha_i^t...\alpha_L^t \tag{2.3}$$

όπου α_i^t το στοιχείο α τη χρονική στιγμή t που βρίσκεται στη θέση i και έχει την τιμή 0 ή 1 για κάθε $1 \leq i < L$ με την προϋπόθεση οτι $\alpha_0^t = 1$ και $\alpha_L^t = 1$. Τότε η επόμενη κατάσταση υπολογίζεται διαδοχικά απο τα αριστερά προς τα δεξιά σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα εξέλιξης.

$$\alpha_i^{t+1} = \begin{cases} 0, & \text{αν } s \text{ περιττός ή } 0 \\ 1, & \text{αν } s \text{ άρτιος.} \end{cases} \tag{2.4}$$

, όπου

$$s = \sum_{j=r}^{1} \alpha_{i-j}^{t+1} + \sum_{j=0}^{r} \alpha_{i+j}^{t}$$

Το r είναι ένας ακέραιος αριθμός που λέγεται ακτίνα και $r \geq 2$. Υποθέτουμε ότι $\alpha_i^t = 0$ για i αρκετά μακριά προς τα αριστερά. Για παράδειγμα αν $r = 3$ τότε η τιμή του α_i^{t+1} εξαρτάται απο τα 3 προηγούμενα σωματίδια που υπολογίστηκαν στο χρονικό βήμα $t+1$,καθώς και απο την τιμή του ίδιου στοιχείου και των 3 επόμενων στο προηγούμενο χρονικό βήμα t. Έστω λοιπόν η παρακάτω διάταξη τις χρονικές στιγμές t και $t+1$:

a^t: •••0110111000001100001 11

a^{t+1}: 0010101001001000000111 10

Κάθε διάταξη σε κάθε χρονικό βήμα θεωρείται και αντιμετωπίζεται σαν μια συλλογή απο σωματίδια. Τα οποία παρουσιάζουν σολιτονική συμπεριφορά αν και μόνο αν δεν προκύψει καμία διάσπαση κατα την εξέλιξη τους. Επίσης όπως φαίνεται απο τον ορισμό του $1^{ου}$ κανόνα εξέλιξης μια διαφορετική αρχική διάταξη των ίδιων σωματιδίων μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετική εξέλιξη, για παράδειγμα αν δυο σωματίδια τα χωρίσουμε με περισσότερα μηδενικά τότε υπάρχει περίπτωση να μην αλληλεπιδράσουν ποτέ μέσα σε χρόνο $t = p$ όπου p η περίοδος του ταχύτερου σωματιδίου.

2.5 Fast Rule Theorem

Οι Παπαθεοδώρου,Ablowitz και Σαριδάκης [8] εισήγαγαν έναν ισοδύναμο με τον πρώτο κανόνα εξέλιξης σολιτονικών Κ.Α φίλτρου, αλλά πιο ακριβή το λεγόμενο Fast Rule Theorem , σύμφωνα με το οποίο προέκυψαν κάποια πιο αναλυτικά αποτελεσμάτα, για την πιο αναλυτική μελέτη ενός σωματιδίου αποτελούμενου απο μια συλλογή βασικών σωματιδίων.

Το Fast Rule Theorem ακολουθεί τα παρακάτω τέσσερα βήματα.

1. Τοποθέτησε την πρώτη μονάδα σε κουτί
2. Τοποθέτησε κουτί σε κάθε επόμενο $r+1$ ψηφίο, εκτός αν υπάρχουν τουλάχιστον $r+1$ μηδενικά ψηφία μετά απο το προηγούμενο κουτί. Σε αυτή την περίπτωση τοποθετούμε σε κουτί την πρώτη μονάδα που θα συναντήσουμε μετά απο όλα τα μηδενικά ψηφία.
3. Αντικατέστησε την τιμή του ψηφίου του κάθε κουτιού με αυτή του συζυγούς του, και τα υπόλοιπα άφησε τα χωρίς αλλαγή.
4. Μετατόπισε όλα τα ψηφία κατα r θέσεις αριστερά.

Παρακάτω παρατίθεται ένα παράδειγμα του FRT όπου $r = 3$.

$$\begin{array}{lcccccccccccccccccccccccccc}
\alpha_t: & & & & & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
\alpha_{t+1}: & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
\end{array}$$

Βασικό σωματίδιο (ΒΣ) είναι μια συλλογή απο $r+1$ διαδοχικές θέσεις μιας δομής, που αρχίζουν με κουτάκι. Αν ένα σωματίδιο αποτελείται απο ένα ΒΣ τότε αυτό ονομάζεται απλό σωματίδιο.

Παράδειγμα: Έστω τα σωματίδια μιας δομής $A = 1101110000011000$ και $B = 1111$ με $r = 3$. Τότε το σωματίδιο Α αποτελείται απο τέσσερα βασικά σωματίδια τα $A^1 = 1101$, $A^2 = 1100$, $A^3 = 0001$ και το $A^4 = 1000$. Ενώ το σωματίδιο Β είναι ένα απλό σωματίδιο που αποτελείται απο το βασικό σωματίδιο, $B = 1111$.

Το FRT αποτελεί ένα απο τα σημαντικότερα θεωρήματα, καθώς με τη χρήση του αποδείχτηκε ότι τα Αυτόματα Φίλτρου είναι σταθερά. Δηλαδή ένα βασικό σωματίδιο που αποτελείται απο πεπερασμένο αριθμό μονάδων στην αρχική του κατάσταση, μπορεί να παράγει μόνο πεπερασμένο πλήθος μονάδων κατα την εξέλιξή του. Επίσης με την εφαρμογή του μπορεί κανείς :

1. Να παρακολουθήσει την εξέλιξη p-περιοδικών σωματιδίων. Δηλαδή σωματίδια τα οποία έπειτα απο p χρονικά βήματα είναι αυτούσια με την αρχική τους κατάσταση κατάλληλα όμως μετατοπισμένα στο χρόνο.

2. Να κατασκευάσει και να μελετήσει σωματίδια με περίοδο 1.

3. Να αποδείξει υπο προυποθέσεις ότι, αν δύο σωματίδια χωρίζονται απο $r+1$ μηδενικά και κατα την αλληλεπίδρασή τους δεν διασπώνται, τότε μετά την αλληλεπίδρασή τους εμφανίζονται αμετάβλητα με το ταχύτερο σωματίδιο να κινείται προς τα αριστερά.

2.6 Εξέλιξη σωματιδίων στο χρόνο

Έστω α ένα στοιχείο σωματιδίου διάστασης 1 τότε το α παίρνει τις τιμές 0 ή 1 και το συζυγές του $\bar{\alpha}$ τις τιμές 1 και 0 αντίστοιχα. Η πράξη $\oplus$ ονομάζεται αποκλειστική διάζευξη και ορίζεται ως εξής :

$$\alpha \oplus 0 = \alpha \quad \alpha \oplus 1 = \bar{\alpha} \tag{2.5}$$

Έστω το σωματίδιο

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc A^1 A^2 ... A^L \bigcirc\bigcirc\bigcirc \tag{2.6}$$

τη χρονική στιγμή $t = 0$ και $A^1, A^L \neq 0$. Όπου L είναι το πλήθος των Βασικών σωματιδίων A. $\bigcirc$ είναι τα μηδενικά σωματίδια, δηλαδή αυτα που αποτελούνται απο $r+1$ μηδενικά. Συμβολίζουμε με $1_0, 1_1, ...1_L$ τον αριθμό των μονάδων των σωματιδίων :

$$A^1, A^1 \oplus A^2, A^2 \oplus A^3, ..., A^{L-1} \oplus A^L, A^L \tag{2.7}$$

επίσης με $\{d^0\}, \{d^1\}, \{d^2\}...\{d^L\}$ συμβολίζουμε το σύνολο των δεικτών, που δείχνουν που υπάρχουν μονάδες στα παραπάνω ΒΣ (2.6). Δηλαδή :

$$\{d^m\} = \{d_1^m, d_2^m, ..., d_{l_m}^m\}, \tag{2.8}$$

$$1 \leq d_1^m < d_2^m < ... < d_{1_m}^m \leq r + 1 d_1^m = 1, \quad 0 \leq m \leq L.$$

Με d_m^i συμβολίζουμε την θέση της i-οστής μονάδας στο ΒΣ $A^m \oplus A^{m+1}$, επίσης $A^0 = A^{L+1} = 0$. Τέλος υποθέτουμε ότι $A^L \neq T$ και $A^i \neq A^{i+1}$. Όπου Τ είναι το τετριμμένο σωματίδιο, δηλαδή αυτό της μορφής $T = 100...0$. Έχει αποδειχτεί ότι κατα την εξέλιξή τους τα σωματίδια δεν μπορούν παρα να παρουσιάσουν μια απο τις παρακάτω τρείς συμπεριφορές : Πρώτον,το σωματίδιο είναι περιοδικό και η περίοδος p προκύπτει απο τους όρους της αρχικής ακόμα διάταξης α^t. Δεύτερον, το αρχικό σωματίδιο μπορεί να χάσει ένα βασικό σωματίδιο απο το δεξιό ή αριστερό του άκρο. Και τέλος ενα σωματίδιο μπορεί να διασπαστεί σε δύο τουλάχιστον σωματίδια, αν πληρούνται κάποιες ικανές και αναγκαίες συνθήκες της αρχικής διάταξης [11],[12].

Διάσπαση ενός βασικού σωματιδίου Το σωματίδιο (2.6) διασπάται για πρώτη φορά την χρονική στιγμή :

- $t = 1_0 + 1_1 + ... + 1_{k-1} + i, \quad 0 \leq k \leq L, \quad 1 \leq i \leq 1_k \;\; 1_{-1} = 0$ αν και μόνο αν
$$A^{j+1}|_{d_{i+1}^k} = A^{k+1}|_{d_i^k} A^k \tag{2.9}$$
για μερικά $j = k+1, k+2, ..., L, 0, 1, ...k-1$. Αν $k = 0$ τότε $j = 1, 2, ...L-1$

- $t = 1_0 + 1_1 + ... + 1_k, \quad 0 \leq k \leq L-1$ αν και μόνο αν :
$$A^{j+1}|_{d_1^{k+1}} A^j = A^{k+1} \tag{2.10}$$

για μερικα $j = k+1, k+2, ..., L, 0, 1, ...k-1$. Αν $k = 0$ τότε $j = 1, 2, ...L-1$.

Απώλεια ενός ΒΣ απο το αριστερό άκρο : Αν δεν έχουμε διάσπαση μέχρι τη χρονική στιγμή $t \geq 1$, τότε το σωματίδιο (2.2) χάνει ένα βασικό σωματίδιο για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή t, αν και μόνο αν : $t = 1_0 + 1_1 + ... + 1_k$, $0 \leq k \leq L-1$

$$A^{k+1}|d^k_{1_k}\bigcirc = A^{k+2}|d^k_{1_k}\bigcirc \tag{2.11}$$

το σωματίδιο (2.2) δεν μπορεί πάντα να χάσει ένα σωματίδιο απο το δεξιό άκρο. Όπως φαίνεται απο την παραπάνω εξίσωση αυτό μπορεί να συμβεί όταν και μόνο όταν τη χρονική στιγμή $t-1$ το πρώτο ΒΣ αυτού του σωματιδίου είναι το τετριμένο ΒΣ.

Εξέλιξη ενός σωματιδίου σε περίπτωση που δεν έχει συμβεί διάσπαση : Αν μεχρι τη χρονική στιγμή $t = 1_0 + 1_1 + ... + 1_k = t_k$, δηλαδή αν έχουν παραβιαστεί οι συνθήκες (2.5)-(2.7), τότε η εξέλιξη του αρχικού σωματιδίου δίνεται απο :

- $t = 1_0 + 1_1 + ... + l_m + i, \quad m \leq k-1, \quad 0 \leq k \leq L,$
  $1 \leq i \leq 1_{m+1}, \quad 1_{-1} = 0, \quad A^0 = O$:

$$(A^{m+1} \oplus A^{m+1})_i \oplus A^{m+1} \oplus (A^{m+2}...A^L A^0 A^1 ... A^m) \tag{2.12}$$

- $t = t = l_0 + l_1 + ... + l_m, \quad m \leq k \leq L$

$$A^{m+1} \oplus (A^{m+2} A^{m+3} ... A^L A^0 A^1 ... A^m) \tag{2.13}$$

- $k = L$ τότε τη χρονική στιγμή $t = 1_0 + 1_1 + ... + 1_L$ έχουμε την παρακάτω διάταξη :

$$A^1 A^2 ... A^L \tag{2.14}$$

Περιοδικά σωματίδια Αν οι παραπάνω εξισώσεις (2.5) εως και (2.7) παραβιάζονται για κάθε $0 \leq t \leq t_L$ τότε το αρχικό σωματίδιο ειναι περιοδικό, με περίοδο p :

$$p = 1_0 + 1_1 + ... + 1_L \tag{2.15}$$

Σαν επεξήγηση των παραπάνω συνθηκών υλοποιήθηκαν κάποια παραδείγματα προκειμένου να παρουσιαστει η διάσπαση ενός σωματιδίου, η απώλεια ενός ΒΣ, η εξέλιξη ενός περιοδικού σωματιδίου.

Παράδειγμα 2.1: Διάσπαση ενός σωματιδίου
Έστω το σωματίδιο $A^1A^2A^3A^4$ με $A^1 = 101011$, $A^2 = 101111$, $A^3 = 000111$, $A^4 = 001110$ οι προυποθέσεις για διάσπαση ικανοποιούνται και το αρχικό σωματίδιο χωρίζεται σε δύο σωματίδια τη χρονική στιγμή $t = 6$:

```
t=0 1010111011110001110011100000000000000000000000000000
t=1 0010011001111001010001101000000000000000000000000000
t=2 0000010001011011011001001010000000000000000000000000
t=3 0000000000011111001000001110010000000000000000000000
t=4 0000000000001110001100000110110010000000000000000000
t=5 0000000000000110101110000010100011000000000000000000
t=6 0000000000000010111111000000101011100000000000000000
```

Σχήμα 2.1: Παράδειγμα 2.1, Διάσπαση ενός σωματιδίου (Έχει παραλειφθει η μετατόπιση στο χώρο).

Παράδειγμα 2.2: Απώλεια ενός βασικού σωματιδίου
Θεωρούμε το σωματίδιο $A^1A^2A^3A^4$ με $A^1 = 1110$, $A^2 = 1010$, $A^3 = 1011$ και $A^4 = 0101$.Η συνθήκη για την απώλεια ενός βασικού σωματιδίου ισχύει κι έτσι, όπως φαίνεται και παρακάτω, χάνεται ένα βασικό σωματίδιο τη χρονική στιγμή $t = 4$.

```
t=0 1110101010110101000000000000000000000000000000000000
t=1 0110001000111101100000000000000000000000000000000000
t=2 0010011001111001110000000000000000000000000000000000
t=3 0000010001011011111000000000000000000000000000000000
t=4 0000000000011111101001000000000000000000000000000000
```

Σχημα 2.2 : Παράδειγμα 2.2, Απώλεια ενός βασικού σωματιδίου (Έχει παραλειφθει η μετατόπιση στο χώρο)

Παράδειγμα 2.3: Περιοδικό σωματίδιο
Έστω το σωματίδιο $A^1A^2A^3$ όπου $A^1 = 10101$, $A^2 = 10111$, $A^3 = 01010$. Τα βασικά σωματίδια είναι τα A^1, $A^1 \oplus A^2 = 00010$, $A^2 \oplus A^3 = 11101$ και A^3. Έτσι αποδεικνύεται ότι καμία απο τις συνθήκες (2.3)-(2.7) δεν ισχύει για $t \leq 10$, συνεπώς το σωματίδιο είναι

περιοδικό με περίοδο $p = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 = 10$. όπως φαίνεται και παρακάτω οι χρονικές στιγμες $t = 0$ και $t = 10$ είναι πανομοιότυπες, κατάλληλα όμως μετατοπισμένες ως προς τον χρόνο.

```
t=0  1010110111010100000000000000000000000000000000000000000
t=1  0010100111110101000000000000000000000000000000000000000
t=2  0000100011111101010000000000000000000000000000000000000
t=3  0000000010111111010100000000000000000000000000000000000
t=4  0000000000111011011100010000000000000000000000000000000
t=5  0000000000011010011110010100000000000000000000000000000
t=6  0000000000001010111111010110000000000000000000000000000
t=7  0000000000000010101111110111000000000000000000000000000
t=8  0000000000000000101011111111010000000000000000000000000
t=9  0000000000000000001010111110101010000000000000000000000
t=10 0000000000000000000010101101110101000000000000000000000
```

Σχήμα2.3 : Παράδειγμα 2.3, Περιοδικό σωματίδιο (Έχει παραλειφθει η μετατόπιση στο χώρο)

2.7 Εξέλιξη περιοδικών σωματιδίων

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η εξέλιξη ενός περιοδικού σωματιδίου, σε μια οποιαδήποτε δεδομένη χρονική στιγμή, χρησιμοποιώντας μόνο την αρχική του διάταξη. Επίσης μελετώνται η ταχύτητα, η μετατόπιση και η διάταξη κατα την εξέλιξη ενος περιοδικού σωματιδίου στο χρόνο.

Θεώρημα: Έστω το σωματίδιο :

$$\bigcirc A^1 A^2 ... A^L \bigcirc \tag{2.16}$$

που αποτελείται απο τα L βασικά σωματίδια $A^1, A^2, ..., A^L$. Έστω $1_0, 1_1, ...1_L$ το πλήθος των μονάδων των παρακάτω ΒΣ:

$$A^1, A^1 \oplus A^2, A^2 \oplus A^3, ...A^{L-1} \oplus A^L, A_L \quad . \tag{2.17}$$

Αν το σωματίδιο (2.16) είναι περιοδικό τότε η εξέλιξή του δίνεται απο τον κανόνα :

$$t = 1_0 + 1_1 + ...1_{k-1} + i, \quad 0 \leq i \leq 1_k,$$

$$(0 \leq k \leq L \quad 1_{-1} = 0 \quad A^0 = A^{l+1} = 0) :$$

$$\overbrace{\bigcirc - \bigcirc}^{k}(A^k \oplus A^{k+1})_i \oplus A^k \oplus (A^{k+1}...A^L \bigcirc A^1...A^k). \qquad (2.18)$$

Πιο συγκεκριμένα, τη χρονική στιγμή $t = 1_0 + 1_1 + ... + 1_k$ η διάταξη έχει ώς εξης :

$$\overbrace{\bigcirc - \bigcirc}^{k+1} \oplus A^{k+1} \oplus (A^{k+2}...A^L \bigcirc A^1...A^k). \qquad (2.19)$$

ενώ τη χρονική στιγμή $t = p \doteqdot 1_0 + 1_1 + ... + 1_L$:

$$\overbrace{\bigcirc - \bigcirc}^{L+1} A^1 A^2 ... A^{L-1} A^L). \qquad (2.20)$$

Στα παραπάνω με $\overbrace{\bigcirc - \bigcirc}^{k}$ συμβολίζουμε τα k διαδοχικά μηδενικά σωματίδια, θεωρώντας οτι δεν έχει συμβεί καμία διάσπαση κατά τη διαρκεια των p βημάτων.

Όπως γίνεται σαφές απο τα παραπάνω η περίοδος $p \doteqdot 1_0 + 1_1 + ... + 1_L$ καθορίζεται απο τον αριθμό των μονάδων των βασικών σωματιδίων (2.17).

Παράδειγμα 2.4 Έστω τα βασικά σωματίδια $A^1 = 10101 \quad , \quad A^2 = 10111 \quad , \quad A^3 = 01010$. Συνεπώς

$$A^1 \oplus A^2 = 00010, \qquad A^2 \oplus A^3 = 11101$$

όπου

$$1_0 = 3, \quad 1_1 = 1, \quad 1_2 = 4, \quad 1_3 = 2 \quad \kappa\alpha\iota \quad p = 10.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα για την εξέλιξη του σωματιδίου $A^1 A^2 A^3$ τις χρονικές στιγμές $t = 3$ και $t = 7$ προκείπτουν τα εξής:

$$t = 3 : \qquad A^1 \oplus (A^2 A^3 \bigcirc) : \quad 00010|11111|10101|, \qquad (2.21)$$

αφού $A^1 \oplus A^3 = 11111$ Για τη χρονική στιγμή

$$t = 7: \qquad (A^2 \oplus A^3)_3 \oplus A^2 \oplus (A^3 \bigcirc A^1 A^2): \quad 00001|01011|11110|11100|. \tag{2.22}$$

Επειδή

$$(A^2 \oplus A^3)_3 = 11100 \quad A^2 \oplus A^3 = 11101, \quad A^2 \oplus A^1 = 00010, \quad A^2 \oplus A^2 = 00000$$

και

$$11100 \oplus (11101|10111|00010|00000)$$

προκύπτει η διάταξη (2.22). Παρατήρηση: Για συγκεκριμένες επιλογές των $A^1 ... A^L$, είναι πιθανό να προκύψει περιοδική συμπεριφορά $\tilde{p}$, με περίοδο $\tilde{p} < p$,όπου $\tilde{p} = p/m$ και $\tilde{p}, m$ ακέραιοι αριθμοί. Στη γενική περίπτωση όμως η περίοδος είναι p. Για την αναπαράσταση της κατάστασης ενός σωματιδίου της μορφής $A^1 ... A^L$ απαιτείται και ο ορισμός της ταχύτητας καθώς και της μετατόπισής του.

Πόρισμα Έστω τα σύνολα

$$\{d^0\}, ..., \{d^L\} \qquad \{d^m\} = \{d_1^m, ..., d_{l_m}^m\} \tag{2.23}$$

Όπου d_i^m δηλώνει τη θέση της i-οστής μονάδας στο βασικό σωματίδιο $A^m \oplus A^{m+1}$ και $A^0 \equiv A^0 \equiv 0$. Αν l_i είναι το πλήθος των μονάδων σε αυτό το ΒΣ. Έστω το σύνολο $\{d\} = \{d_1, ..., d_i, ...\}$ όπου:

$$d_i = \begin{cases} k(r+1) + d_j^k, & i = 1_0 + 1_1 + ...1_{k-1} + j, 1 \le j \le 1_k, \\ & 1 \le k \le L, \ 1_1 = 0 \\ mL(r+1) + d_j, & i = mL(1_0 + l_1 + ...1_L) + j, \\ & 1 \le j \le l_0 + ... + l_L, \quad m = 1, 2, ... \end{cases} \tag{2.24}$$

Η μετατόπιση του περιοδικού σωματιδίου $A^1 ... A^L$ την τυχαία χρονική στιγμή $t = i$ συμβολίζεται με Δ_i και είναι η απόσταση της πρώτης μονάδας τη στιγμή $t = i$ απο την πρώτη μονάδα τη χρονική στιγμή $t = 0$.

$$\Delta_i = d_{i+1} - d_1 \tag{2.25}$$

Παράδειγμα έστω $A^1 = 10011, A^2 = 01101$. Τότε

$$A^1|A^1 \oplus A^2|A^2 = 10011|11110|01101$$

Άρα $d_1 = 1, d_{2=4}, d_3 = 5, d_4 = 6, d_5 = 7, d_6 = 8, d_7 = 9, d_8 = 12, d_9 = 13, d_{10} = 15, d_{11} = d_{10} + d_1....$ Τότε η μετατόπιση θα είναι : $\Delta_1 = 3, \Delta_2 = 4, ..., \Delta_9 = 14, \Delta_{10} = 15, ...$ Το στοιχείο $A^1...A^L$ μετακινείται μια απόσταση $(L+1)(r+1)$ στο χρόνο p. Έτσι η μέση ταχύτητα u_p τη χρονική στιγμή $t = p$ θα ισούται $(L+1)(r+1)/p$. Ενώ την χρονική στιγμή $t = i$ το σωματίδιο μετατοπίζεται κατά ir θέσεις αριστερά. Συνεπώς τη χρονική στιγμή $t = i$ η πραγματική μετατόπιση ισούται με $ir+d_1-d_{i+1}$ ενώ η πραγματική μέση ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = p$ ισούται με $[pr - (L+1)(r+1)]/p$.

Ο πιο απλός περιοδικός σχηματισμός αποτελείται απο δύο περιοδικά σωματίδια ίσης ταχύτητας συνδεδεμένα με τέτοιο τρόπο ωστε να αλληλεπιδρούν για πάντα. Η μέση ταχύτητα ισούται με την μέση ταχύτητα των ξεχωριστών σωματιδίων που αποτελούν αυτό τον σχηματισμό.

2.8 Εξέλιξη και αλληλεπίδραση απλών σωματιδίων

Όπως έχει προαναφερθεί απλό σωματίδιο ονομάζεται ένα σωματίδιο που αποτελείται απο ένα ΒΣ. Τα απλά σωματίδια είναι περιοδικά, με περίοδο ίση με το πλήθος των μονάδων που το αποτελούν. Έστω τα σωματίδια Α και Β, με πλήθος μονάδων 1_A και 1_B αντίστοιχα. Τότε αν $l_A > l_B$ τότε το σωματίδιο Α είναι ταχύτερο απο το Β. Η αλληλεπίδραση μεταξύ απλών σωματιδίων με διαφορετικό πλήθος μονάδων είναι σολιτονική, δηλαδή μετά την αλληλεπίδραση τα σωματίδια που προκύπτουν είναι ακριβώς τα ίδια με τα αρχικά και στην ίδια διάταξη.

Στην περίπτωση όπου το Β είναι ταχύτερο απο το Α, τα σωματίδια αρχίζουν να αλληλεπιδρούν μετά απο $2l_A$ χρονικά βήματα,ώστε στο τέλος το Β να προηγείται του Α. Αν το σωματίδιο Β τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται μπροστά απο το Α, τα σωματίδια ενδέχεται

να αλληλεπιδράσουν ξανά μέχρι να καταλήξουν στην αρχική τους διάταξη. Το πλήθος των αλληλεπιδράσεων μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια και εξαρτάται απο την αρχική διάταξη των σωματιδίων τη χρονική στιγμή $t = 0$ καθώς και απο το πλήθος των μηδενικών σωματιδίων που τα χωρίζουν.

Στην ειδική περίπτωση όπου $1_A = 1_B$, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα, είτε θα προκύψει μια και μόνο αλληλεπίδραση και τα σωματίδια θα χωριστούν ταξιδεύοντας ανεξάρτητα το ένα απο το άλλο, είτε θα σχηματίσουν έναν περιοδικό σχηματισμό και θα αλληλεπιδρούν για πάντα.

Παράδειγμα 2.5: Έστω τα σωματίδια A=1000011 και B=1110001, που χωρίζονται απο δέκα μηδενικά τη χρονική στιγμή $t = 0$ Το σωματίδιο B είναι ταχύτερο απο το A καθώς $1_B = 4$ και $1_A = 3$.Την χρονική στιγμή $t = 1$ αρχίζει η αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων A′=1110000, B′=1100011 και τη στιγμή $t = 7$ σταματά η σολιτονική αλληλεπίδρασή τους (δηλαδή μετα απο $2l_A = 6$ χρονικές στιγμές).Αν και το ταχύτερο σωματίδιο B′ είναι μπροστά απο το A′ αυτά σωματίδια θα αλληλεπιδρούν ξανά. Τη χρονική στιγμή $t = 9$ εμφανίζονται τα $B'' = 1111000$ και $A'' = 1000011$ αρχίζουν τη σολιτονική τους αλληλεπίδραση η οποία διαρκεί $2l_{B''} = 8$ χρονικά βήματα (μεχρι την στιγμή $t = 17$).Αφού το πιο αργό σωματίδιο $A''' = 1110000$ προπορεύεται του ταχύτερου $B''' = 1110001$, θα αλληλεπιδράσουν σολιτονικά μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 24$ (μετά απο $2l_{A'''} = 6$. Τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν ξανά).Την στιγμή $t = 32$ τα αρχικά B και A επανεμφανίζονται.

```
1000011000000000011100010000000000000000000000000000000000000000000000   t=0
0000011100000000001100011000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000011000010000010000110100000000000000000000000000000000000000
0000000000000000010000110000101001101100000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000001110001011011011100000000000000000000000000
0000000000000000000000000000001100011110110011000010000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000001000110101100010000110000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000110001100000000001110000   t=7
                        0000000000000000000000000100011100000000110000100000000000000000000000
                        0000000000000000000000000001111000000001000011000000000000000000000000
                        0000000000000000000000000000111000100001010011001000000000000000000000
                        0000000000000000000000000000011000110001011011001100000000000000000000
                        0000000000000000000000000000001000111001011110011100000000000000000000
                        0000000000000000000000000000000001111010111010011110000000000000000000
                        0000000000000000000000000000000001110100110100011100010000000000000000
                        0000000000000000000000000000000000110100010100001100011000000000000000
                        0000000000000000000000000000000000010100001000001000111000000000000000
                        0000000000000000000000000000000000000100001100000000011110000000000   t=17
                                                0000000000000000111000000000111000100000000000000000000000000000000000
                                                0000000000000000001100001000011000100100000000000000000000000000000000
                                                0000000000000000000100001100011010010011000000000000000000000000000000
                                                0000000000000000000000000011100110110100111000000000000000000000000000
                                                0000000000000000000000000000110011111010001100001000000000000000000000
                                                0000000000000000000000000000001001110101000010000110000000000000000000
                                                0000000000000000000000000000000011100010000000001110000000000000000   t=24
                                                        0000000000000000000000000000000000110001100000000011100010000000000000
                                                        0000000000000000000000000000000000001000111000000000010000111000000000000
                                                        0000000000000000000000000000000000000011110000000000000011110000000000000
                                                        0000000000000000000000000000000000000000111000100000000001100001000000000
                                                        0000000000000000000000000000000000000000011000110000000000010000110000000
                                                        0000000000000000000000000000000000000000001000111000000000000000111000000
                                                        0000000000000000000000000000000000000000000011110000000000000000110000100
                                                        0000000000000000000000000000000000000000000000110001000000000000010000110   t=32
```

Σχήμα 2.4: Παράδειγμα 2.5, σολιτονική αλληλεπίδραση μεταξύ δυο απλών σωματιδίων ακολουθώντας τον πρώτο κανονα εξέλιξης. Το ταχύτερο σωματίδιο προσπερνά το πιο αργό, αφου έχουν αλληλεπιδράσει σολιτονικά δυο φορές (Έχει παραλειφθει η μετατόπιση στο χώρο).

Παράδειγμα 2.6: Έστω τα απλά σωματίδια A=100011 και B=110010, τα οποία τη χρονική στιγμή $t = 0$ χωρίζονται απο οχτώ μηδενικά. Τη στιγμή $t = 1$ ξεκινάει αλληλεπίδραση μεταξύ των A′=111000 και B′100101, η οποία τελειώνει τη χρονική στιγμή $t = 7$. Τη χρονική στιγμή $t = 8$ τα σωματίδια αλληλεπιδρούν ξανά και τη στιγμή $t = 15$ επανεμφανίζεται η αρχική δομή. Έτσι τα σωματίδια έχουν δημιουργήσει έναν περιοδικό μετασχηματισμό με περίοδο $t = 15$.

```
t=0                                                    101100000011001
t=1                                                   11010000010011
t=2                                                 101010001101101
t=3                                                10110011111011
t=4                                              11011111001101
t=5                                           101101100010101
t=6                                          11001000001011
t=7                                       100110000001101
t=8                                      11100000010101
t=9                                   110010001110101
t=10                             100110011001011
t=11                            1110110110111
t=12                         110100110011001
t=13                       101011100010011
t=14                     10101000000111
t=15                  101100000011001
```

Σχήμα 2.5: Παράδειγμα 2.6, Δημιουργία περιοδικού σχηματισμού μεταξύ δυο απλών σωματιδίων

Παράδειγμα 2.7:

Έστω τώρα τα σωματίδια A=10101 και B=11100 ίσης ταχύτητας τα οποία αλλλεπιδρούν μία φορά και τη στιγμή $t = 2I_A + 1 = 2I_B + 1 = 7$ σταματά η αλληλεπίδρασή τους για πάντα.

Παράδειγμα 2.8: Έστω A=10011110,B=10111100 δυο περιοδικοί σχηματισμοί και $r = 3$. Τότε η αρχική δομή επανεμφανίζεται τη στιγμή $t = 24$.

```
t=0                                                  1010100000111
t=1                                                10110000011001
t=2                                              11010001000101
t=3                                            101010100110101
t=4                                          10111001001011
t=5                                        11110100001101
t=6                                     111000000010101
t=7                                   110010000001011
t=8                               1001100000001101
t=9                              111000000010101
t=10                           110010000001011
```

Σχημα 2.6: Παράδειγμα 2.7, απλά σωματίδια που αλληλεπιδρούν μόνο μια φορά

```
t=0                                                 1001111000000101111
t=1                                                 1011010000001101001
t=2                                               1111001000010110101
t=3                                            11110101001111000101
t=4                                          111110110110100011011
t=5                                        11100111110000100111
t=6                                      1101111010010101011111
t=7                                    10101100001110101111
t=8                                   1001001011001001111
t=9                                   110100100000101101
t=10                                 10110101000001111001
t=11                                11110110000011110101
t=12                              111111010000111111011
t=13                            11101011000011100111
t=14                           1100011100001101111
t=15                         10011111000010101111
t=16                         1011110000001001111
t=17                        1101001001101101001
t=18                      10110101110010110101
t=19                     1111010100001111011
t=20                   111110110000111111101
t=21                 11100111000011101011
t=22               1101111100001100011 1
t=23             10101111000010011111
t=24           1001111000000101111
```

Σχήμα 2.7: Παράδειγμα 2.8, σολιτονική αλληλεπίδραση μεταξύ δυο περιοδικών σχηματισμών.

Παράδειγμα 2.9: Έστω ο περιοδικός σχηματισμός $A = 10110000001101$, ενα απλό σωματίδιο $B = 11111$ και $r = 4$. Παρατηρείται ότι η αρχική δομή επανεμφανίζεται τη χρονική στιγμή $t = 15$ με το σωματίδιο B να κινείται ταχύτερα απο τον A.

Παράδειγμα 2.10: Έστω οι περιοδικοί σχηματισμοί $A = 100110000000110001$ και $B = 101111011010$ και $r = 5$. Οι δομές A και B χωρίζονται τη στιγμή $t = 16$ με το ταχύτερο σωματίδιο να κινείται μπροστά απο τον περιοδικό σχηματισμο.

```
t=0                                                 1011000000110010000001111
t=1                                               01101000001001100000011111
t=2                                             1010100011011010000011111
t=3                                           101100111110110000011111
t=4                                         110111110011010001011101
t=5                                     101101100010101010101010101
t=6                                   110010000010111010001011
t=7                                 100110000001111111000001101
t=8                                 111000000111110000010101
t=9                              110010001011110100011101101
t=10                           100110010011011001100101 1
t=11                           11101000101110110110111
t=12                        110110010011010011001 1
t=13                     1011101000101011100010011
t=14                   111110000010101000000111
t=15                 1111100000010110000001 1001
t=16               11111000000011010000010011
t=17            111110000000101010001101101
t=18         1111100000000010110011111011
t=19      11111000000000011011111001101
t=20   111110000000001101101100010101
```

Σχήμα 2.8: Παράδειγμα 2.9, αλληλεπίδραση μεταξύ δυο περιοδικών σχηματισμών A και B, το ταχύτερο σωματίδιο B προσπερνά το A.

```
t=0                                                                                  1001100000001100010000000010111101101
t=1                                                                                 11010000001000110000000001111110101
t=1                                                                             101001000101011001000000011111001010 1
t=2                                                                           1001100101111001100000001111101101011
t=3                                                                         110110111000110100000011010010111
t=4                                                                     1011001100001010010001100100111111001
t=5                                                                 110001000000100110011011001101100 11
t=6                                                             1000110000000011011011101010001101
t=7                                                            1110000000010111111101001000010100 1
t=8                                                        11000100001111111010100000001110010 1
t=10                                                     1000110001101111000100010001100010 11
t=11                                                    1110011001110011000110011010101 11
t=12                                                 110010001111011001110010010100110001
t=13                                              1001010111111100101001011010001000 11
t=14                                            101111111010010000101001000000000111
t=15                                          1111011010110000001001100000000110001
t=16                                       11101001011100000000011010000000100011
t=17                                    1101011011110000000001010010001010 11001
t=18                                 101010011111000000000100110010111 10011
t=19                              10101111111000000000000110110111 0001101
t=20                           1011011110100000000000101100110000101001
t=21                        11010110101000000000011000100000010011
t=22                    101010010101000000000100011000000001101
```

Σχημα 2.9 : Παράδειγμα 2.10, Δυο περιοδικοί σχηματισμοί χωρίζονται, με ένα ταχύτερο σωματίδιο να κινείται μπροστά απο τον περιοδικό σηματισμό

2.9 Αλληλεπίδραση τυχαίων σωματιδίων

Αν κατα την αλληλεπίδραση δυο τυχαίων περιοδικών σωματιδίων δεν προκύψει πρόωρη διάσπαση τότε θα συμβεί ένα απο τα παρακάτω ενδεχόμενα. Μέχρι να αρχίσει η αλληλεπίδραση των σωματιδίων, η εξέλιξη τους είναι προκαθορισμένη απο απο τη θεωρία σωματιδίων. Πιο συγκεκριμένα, αν ένα σωματίδιο A αποτελείται απο L_A βασικά σωματίδια, $A^1, A^2, ...A^{L_A}$, και αν d^A είναι το διατεταγμένο σύνολο των μονάδων, των βασικών σωματιδίων $A^1, A^1 \oplus A^2, ..., A^{L_{A-1}} \oplus A^{L_A}, A^{L_A}$, τότε η μετατόπιση του σωματιδίου A τη χρονική στιγμή

$t = i$ είναι ${d_{i+1}}^{i+1}$.

Αν η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων Α και Β είναι S τη χρονική στιγμή $t = 0$ και το Α βρίσκεται αριστερά του Β, τότε ο διαχωρισμός τους τη στιγμή $t = i$ είναι $S + {d_{i+1}}^{B} - {d_{i+1}}^{A}$,όπου ${d_{i+1}}^{A}$ είναι η μετατόπιση του Α τη χρονική στιγμή $t = i$.Επίσης αν το αριστερό σωματίδιο είναι γρηγορότερο απο το αριστερό και η μεταξύ τους απόσταση αρκετά μεγάλη,τότε τα δυο σωματίδια δεν θα αλληλεπιδράσουν ποτέ.

Τέλος, αν τα δύο σωματίδια Α, Β αρχίσουν να αλληλεπιδρούν με το Α αριστερά του Β και δε συμβεί διάσπαση μέχρι τη στιγμή $t = P_A$, όπου P_A είναι η περίοδος του Α, τότε τα δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν σολιτονικά. Επίσης αν η απόστασή τους είναι $r+1-m-d^B_{i+1}+d^A_{i+1}$. Αν έχουμε διάσπαση σε $t < P_A$, τότε αναφερόμαστε σάυτήν σαν πρόωρη διάσπαση.

Συνεπώς, καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα : Πρώτον, για κάθε χρονικό βήμα η μετατόπιση ενός σωματιδίου δίνεται απο τον τύπο d_i, ενώ αν δεν συμβεί πρόωρη διάσπαση τα σωματίδια αλληλεπιδρούν σολιτονικά.

Θεώρημα 2.9.1. *Έστω δυο σωματίδια Α και Β. Αν υποθέσουμε οτι : τα σωματίδια χωρίζονται απο $r + 1 + m$ μηδενικά τη στιγμή $t = 0$,(όπου $m \geq 0$ και $m \in \mathbb{Z}$),τα σωματίδια αλληλεπιδρούν τη χρονική στιγμή $t = 1$, με το Α αριστερά του Β και οτι δεν προκύπτει πρόωρη διάσπαση κατα την διάρκεια των αλληλεπίδράσεων τους.*

Τότε αν το Β είναι ταχύτερο απο το Α, τα σωματίδια θα αλληλεπιδράσουν, αλλά θα χωριστούν με το ταχύτερο σωματίδιο Β να είναι μπροστα απο το αργότερο Α. Ο ακριβής αριθμός των μονάδων υπολογίζεται απο τους όρους d^B_i, d^A_i και m. Ενώ αν τα σωματίδια Α και Β έχουν την ίδια ταχύτητα, τότε ή θα σχηματιστεί ένας περιοδικός σχηματισμός ή θα αλληλεπιδράσουν μια φορά και θα χωριστούν ταξιδεύοντας ανεξάρτητα το ένα απο το άλλο.

2.10 Σολιτονικά Κυψελιδικά Αυτόματα με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται μια άλλη κατηγορία κυψελιδικών αυτομάτων, τα περιοδικά κυψελιδικά αυτόματα φίλτρου. Τα αυτόματα αυτά είναι δυαδικά και η διαφορά τους με τα σολιτονικά κυψελιδικά αυτόματα φίλτρου είναι η περιοδικότητα στις συνοριακές συνθήκες, με την έννοια οτι δεν θεωρείται μηδενικό το σύνορο προς τα δεξιά και αριστερά της κάθε διάταξης, αλλά είναι *ταινειοειδές*. Έτσι σαν αριστερό σύνορο θεωρούνται οι τελευταίες θέσεις της προηγούμενης διάταξης, ενώ σαν δεξί σύνορο χρησιμοποιούνται οι πρώτες, προσφάτως υπολογισμένες θέσεις της νέας διάταξης.

Άλλο ένα χαρακτηριστικό των αυτομάτων αυτών είναι οτι έχουν σταθερό μήκος d. Με a_i^t συμβολίζεται η τιμή στη θέση i για το χρονικό βήμα t. Η κατάσταση a_i^t μπορεί να πάρει τις τιμές 0 ή 1, για όλα τα i, με a_1,a_d συμβολίζεται το πρώτο και το τελευταίο στοιχείο της διάταξης a^t :

$$a^t : a_1^t a_2^t ... a_d^t \tag{2.26}$$

Τα στοιχεία a_1^t και a_d^t μπορούν να πάρουν τις τιμές 0 ή 1 και όχι αναγκαστικά 1 όπως στην περίπτωση των Κ.Α. Φίλτρου.

Η διάταξη 2.26 εξελίσεται, θεωρώντας τις περιοδικές συνθήκες:

$$a_{i-d}^{t+1} = a_i^t$$
$$a_i^{t+1} = a_{i+d}^t$$

Όπου d είναι το μήκος της αρχικής διάταξης. Τότε η επόμενη κατάσταση υπολογίζεται διαδοχικά απο τα αριστερά προς τα δεξιά σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα εξέλιξης:

$$\alpha_i^{t+1} = \begin{cases} 0, & \text{αν } s \text{ περιττός ή } 0 \\ 1, & \text{αν } s \text{ άρτιος.} \end{cases} \tag{2.27}$$

Όπου s: Για $1 \leq i \leq r$,

$$s = \sum_{j=1}^{r} a_{d+i-j}^t + \sum_{j=1}^{r} a_{i+j}^t \tag{2.28}$$

Για $r+1 \leq i \leq d-r$,

$$s = \sum_{j=0}^{r} a_{i+j}^{t} + \sum_{j=1}^{r} a_{i-j}^{t+1} \tag{2.29}$$

Για $d-(r-1) \leq i \leq d$,

$$s = \sum_{j=1}^{r} a_{i-j}^{t+1} + \sum_{j=0}^{r} a_{i+j}^{t} \tag{2.30}$$

Με r συμβολίζεται ο θετικός αριθμός $r \geq 2$, που ονομάζεται ακτίνα.

Σαν επεξήγηση του παραπάνω κανόνα, για $r=4$, το a_i^{t+1} εξαρτάται απο τις ακόλουθες θέσεις. Γράφοντας την καινούρια κατάσταση κάτω απο την προηγούμενη, προκύπτει το επόμενο παράθυρο:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & & & a_1^t & a_2^t & \dots & a_i^t & \dots & a_d^t \\ a_1^t & a_2^t & \dots & a_i^t & \dots & a_1^{t+1} & & & & & & \end{array}$$

Όλες οι τιμές σε αυτό το παράθυρο είναι γνωστές εκτός της a_1^{t+1}. Η οποία όμως υπολογίζεται σύμφωνα με τους τύπους 2.28-2.30. Πιο συγκεκριμένα για τον υπολογισμό του a_1^{t+1}, οι θέσεις που περιλαμβάνονται στον κανόνα για τον προσδιορισμό του είναι οι :

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & a_1^t & a_2^t \dots a_{r+1}^t \\ a_{d-r+1}^t & \dots & a_{d-1}^t & a_d^t & \alpha_{\mathbf{1}}^{\mathbf{t+1}} & & \end{array}$$

Οι θέσεις που λαμβάνονται υπόψιν για τον υπολογισμό ενός ενδιάμεσου στοιχείου a_i^{t+1} είναι οι:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & a_i^t & a_{i+1}^t \dots a_{i+r}^t \\ a_{i-r}^{t+1} & a_{i-r+1}^{t+1} & \dots & a_{i-1}^{t+1} & \alpha_{\mathbf{i}}^{\mathbf{t+1}} & \end{array}$$

ενώ για τον προσδιορισμό του τελευταίου στοιχείου a_d^{t+1} λαμβάνονται υπόψιν οι εξής θέσεις:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & a_d^t\ a_{d+1}^t ... a_{d+r}^t & \\ a_{d-r}^{t+1} & a_{d-r+1}^{t+1} & ... & a_{d-1}^{t+1} & \alpha_{\mathbf{d}}^{\mathbf{t+1}} & \end{array}$$

όμως απο τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες ισχύει οτι: $a_{d+i}^t = a_i^{t+1}$, για $i = 1, 2, ...r$. άρα το παραγόμενο στοιχείο a_d^t προκύπτει απο τις τιμές:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & a_d^t\ a_1^{t+1} ... a_r^{t+1} & \\ a_{d-r}^{t+1} & a_{d-r+1}^{t+1} & ... & a_{d-1}^{t+1} & \alpha_{\mathbf{d}}^{\mathbf{t+1}} & \end{array}$$

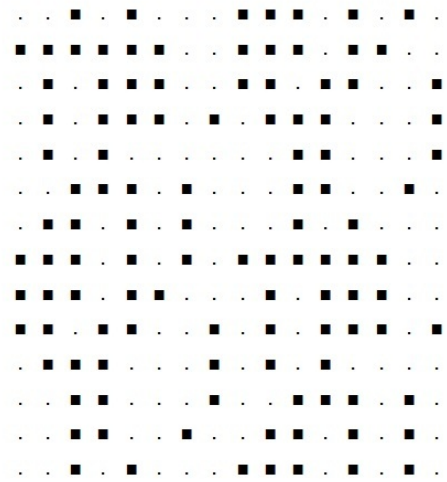
2.10.1 Συμπεριφορά κυψελιδικών αυτομάτων με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

Κατα τη μελέτη [13] της συμπεριφοράς των περιοδικών Κ.Α. παρατηρήθηκαν ποικίλες συμπεριφορές σωματιδίων, ανάλογα με το είδος των σωματιδίων (ΒΣ, απλών, σύνθετων), την ακτίνα αλληλεπίδρασης καθώς και το μήκος της κάθε διάταξης.

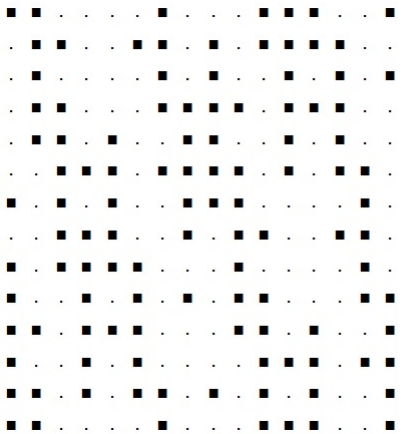
Κάθε περιοδικό σωματίδιο με περίοδο p, επανεμφανίζεται τη χρονική στιγμή $t = p$ πανομοιότυπο με το αρχικό σωματίδιο της χρονικής στιγμής $t = 0$ ($a^0 = a^p$), ανεξάρτητα απο την μετατόπισή του στο χρόνο. Προφανώς τα σωματίδια που προκύπτουν κατα την εξέλιξη περιοδικών σωματιδίων σε κάποιο χρονικό βήμα, είναι επίσης περιοδικά, με την ίδια περίοδο. Στην εικόνα 2.10 φαίνεται η εξέλιξη του περιοδικού σωματιδίου 0010100011101010 με ακτίνα $r = 3$ και περίοδο $p = 13$.

Επιπλέον, παρατηρήθηκε οτι στις περισσότερες διατάξεις με ίδιο μήκος και συγκεκριμένο r η περίοδος παραμένει σταθερή. Οι εικόνες (2.11), (2.12) δείχνουν την εξέλιξη των σωματιδίων 1100001000111001 και 1111111100000000 αντίστοιχα, με την ίδια ακτίνα $r = 3$ και ίδια περίοδο $p = 13$.

Και εδώ μπορεί να συναντήσει κανείς μη περιοδικά σωματίδια, δηλαδή σωματίδια που εκφυλλίζονται στη μηδενική κατάσταση, ή σωματίδια που χάνουν ένα ή περισσότερα ΒΣ.

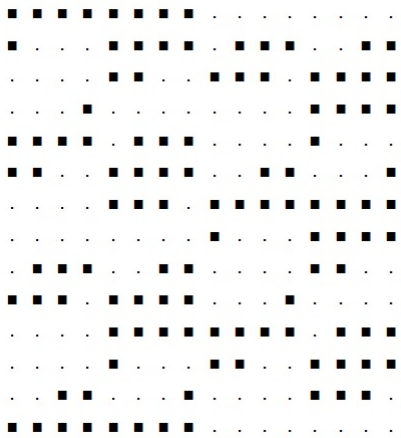


Σχήμα 2.10: Περιοδικό κυψελιδικό αυτόματο με ακτίνα $r = 3$

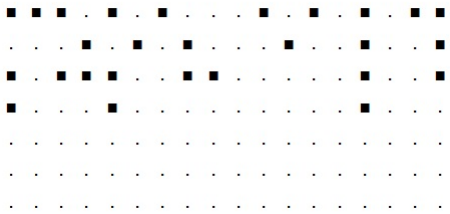


Σχήμα 2.11: Περιοδικό σωματίδιο, με περίοδο $p = 13$ και ακτίνα $r = 3$

Παράδειγμα (2.11.1) Στην εικόνα 2.13 παρουσιάζεται η εξέλιξη ενος μη περιοδικού σωματιδίου 111010100010101011, για ακτίνα $r = 3$. εδώ στο χρονικό βήμα $t = 3$,φαίνεται οτι η διάταξη αποτελέιται μόνο απο τετριμένα ΒΣ (δηλαδή της μορφής 1000), τα οποία στο επόμενο χρονικό βήμα όπως προκύπτει και απο τον κανόνα εξέλιξης εκφυλίζονται σε μηδενικά ΒΣ.

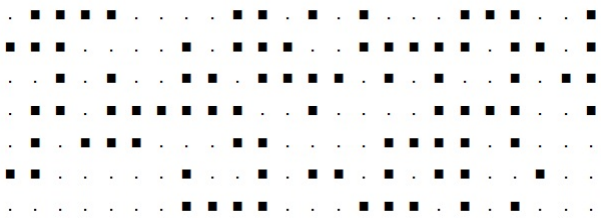


Σχήμα 2.12: Περιοδικο σωματίδιο πάλι με περίοδο $p = 13$ και ακτίνα $r = 3$



Σχήμα 2.13: Μη Περιοδικό σωματίδιο που εκφυλλίζεται σε μηδενικό σωματίδιο, με ακτίνα $r = 3$.

Παράδειγμα (2.11.2) στην εικόνα 2.14 παρουσιάζεται η εξέλιξη του μή περιοδικού σωματιδίου 011110000110101000111001, κατα την οποία προκύπτει απώλεια ενός ΒΣ.



Σχήμα 2.14: Απώλεια ενός βασικού σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 6$.

3. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η εξέλιξη στο χρόνο Κ.Α. των οποίων τα στοιχεία ανήκουν στο Z_n, είναι δισδιάστατα και δυαδικά ή στοιχεία κυκλικών ομάδων τάξης n [10]. Για τη μελέτη στοιχείων αυτής της μορφής αναπτύχθηκε ο γενικευμένος κανόνας εξέλιξης όπως αυτός περιγράφεται παρακάτω.

3.1 Αβελιανές ομάδες

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται ο γενικευμένος κανόνας εξέλιξης Κ.Α, τα βασικά χαρακτηριστικά του καθώς και οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των στοιχείων που ανήκουν σε μια αβελιανή ομάδα. Αποδεικνύεται ότι σωματίδια των οποίων τα στοιχεία ανήκουν σε αβελιανές ομάδες μπορούν να εισαχθούν σε ένα Κ.Α και ακολουθώντας τον γενικευμένο κανόνα εξέλιξης να επιδείξουν αντίστοιχη σολιτονική ή μη συμπεριφορά, όπως ακριβώς και τα δυαδικά μονοδιάστατα σωματίδια που έχουν παρουσιαστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 2).

Ορισμός 3.1 Έστω $G = \{0, g_1, g_2, ..., g_n\}$ μια πεπερασμένη ομάδα εφοδιασμένη με την πράξη $\otimes$. Θεωρούμε οτι το 0 είναι το ταυτοτικό στοιχείο, δηλαδή $0 \otimes g = g \otimes 0 = g$ και $\bar{g}$ είναι το αντίστροφο στοιχείο του g, δηλαδή $\overline{g} \otimes g = g \otimes \overline{g} = 0$.

Ορισμός 3.2 (Ένα γενικευμένο σολιτονικό κυψελιδικό αυτόματο)

Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα, και έστω

$$\alpha^t : 0...0\alpha_0^t...\alpha_i^t...\alpha_L^t \quad , \quad L < \infty \tag{3.1}$$

όπου $0, L \neq 0$.
Τότε

$$\alpha_i^{t+1} = \begin{cases} 0, & \text{,αν όλα τα στοιχεία του } S_k \text{ είναι } 0 \\ \overline{S_k \otimes c \otimes \overline{\alpha}_{k+r}^t}, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{3.2}$$

όπου,

$$S_k = \sum_{j=k^{\otimes}}^{k+r-1} \alpha_{j-r}^{t+1} \otimes \overline{\alpha}_j^t$$

και $c = \alpha_{k+r}^t$όταν όλα τα στοιχεια του S_k είναι 0, διαφορετικά παραμένει ίδιο.
Ο παραπάνω κανόνας είναι μια γενίκευση του 1ου κανόνα εξέλιξης.

Παρατήρηση 3.1 Αν $G =(\otimes, Z_n)$με $Z_n = \{0, 1, ...n\}$ και $\otimes$ συμβολίζει το ακέραιο υπόλοιπο n, τότε ο παραπάνω κανόνας απλοποιείται εφόσον G είναι μια αβελιανή ομάδα :

$$S_k = \sum_{j=1^{\otimes}}^{r} \alpha_{k-j}^{t+1} \otimes \sum_{j=0^{\otimes}}^{r-1} \overline{\alpha}_{k+j}^t \tag{3.3}$$

και

$$\alpha_i^{t+1} = \begin{cases} 0, & \text{,αν όλα τα στοιχεία του } S_k \text{ είναι } 0 \\ \overline{S_k \otimes \overline{\alpha}_{k+r}^t \otimes c}, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{3.4}$$

όπως το c ορίστηκε παραπάνω.

Επιπλέον λόγω των ιδιοτήτων της πράξης του ακέραιου υπολοίπου ο παραπάνω κανόνας μπορεί να γραφεί και ως εξής.

$$S_k = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{k-j}^{t+1} + \sum_{j=0}^{r-1} \overline{\alpha}_{k+j}^{t} \tag{3.5}$$

και

$$\alpha_i^{t+1} = \begin{cases} 0, & \text{,αν όλα τα στοιχεία του } S_k \text{ είναι } 0 \\ \overline{S_k + \overline{\alpha}_{k+r}^{t} + c}, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{3.6}$$

όπως το c ορίστηκε παραπάνω.

Ορισμός 3.3 Ένα βασικό σωματίδιο είναι μια συλλογή απο $r+1$ στοιχεία του G. Με B_i συμβολίζουμε το βασικό σωματίδιο που παίρνουμε μέσω της ακόλουθης πράξης : αντικατέστησε τα στοιχεία του B μέχρι το i-οστό μη ταυτοτικό στοιχείο με τα αντίστροφά τους και αντικατέστησε το υπόλλοιπο κομμάτι του B με μηδενικά. Για παράδειγμα, έστω $B = g_1 0 g_2 g_3$ τότε το $B_1 = \bar{g}_1 000$, $B_2 = \bar{g}_1 0 \bar{g}_2 0$, $B_3 = \bar{g}_1 0 \bar{g}_2 \bar{g}_3$.

Ορισμός 3.4(Εναλλακτικός ορισμός του γενικευμένου κυψελλιδικού αυτομάτου)
Αν το G είναι μια οποιαδήποτε πεπερασμένη ομάδα τότε ένα γενικευμένο Κυψελιδικό Αυτόματο ορίζεται απο την ακόλουθη εξέλιξη. Αν

$$\alpha^t : A^1 A^2 ... A^{L_A} O 0 ... 0 O B^1 B^2 ... B^{L_B} O 0 ... 0 O F^1 F^2 ... F^{L_F} O 0 ... \tag{3.7}$$

όπου τα πρώτα στοιχεία των $A^1, B^1, ..., F^1, ...$ είναι διαφορετικά του O και τα $A^{L_A}, B^{L_B}, ..., F^{L_F}, ...$ δεν είναι τετριμένα βασικά σωματίδια (δηλαδή της μορφής $T = g \underbrace{0..0}_{r}$), ούτε O δηλαδή να αποτελούνται απο $r+1$ διαδοχικά μηδενικά τότε :

$$\alpha^{t+1} : A_1^1 \otimes (A^1 A^2 ... A^{L_A}) A_1^1 O ... O B_1^1 \otimes (B^1 B^2 ... B^{L_B}) B_1^1 O 0 ... 0 O F_1^1 \otimes (F^1 F^2 ... F^{L_F}) F_1^1 O ... \tag{3.8}$$

Ο παραπάνω ορισμός δίνει μια μια γενίκευση του FRT. Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα Κυψελιδικά αυτόματα που δηλώνονται σύμφωνα με τους ορισμούς (3.2) και (3.4) είναι ισοδύναμα, εφόσον η δομή που αποκτήθηκε απο τον ορισμό (3.4) είναι μετατοπισμένη κατα r θέσεις δεξιά κάθε χρονική στιγμη.

Παράδειγμα 3.1 Έστω $G = Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, όπου $\overline{1} = 3$, $\overline{2} = 2$, $\overline{3} = 1$. Θα εφαρμόσουμε τον γενικευμένο κανόνα εξέλιξης σε ένα σωματίδιο που αποτελείται απο δύο ΒΣ για $r = 3$ και A^1A^2, με $A^1 = 1023$ και $A^2 = 1101$.(Έχει παραλειφθει η μετατόπιση στο χώρο).

```
t=0 10231101000000000000000000
t=1 00230101300000000000000000
t=2 00030121302000000000000000
t=3 00000122302100000000000000
t=4 00000022332103000000000000
t=5 00000002330103200000000000
t=6 00000000330303220000000000
t=7 00000000030313221000000000
t=8 00000000000310221100000000
t=9 00000000000010231101000000
```

3.2 Εφαρμογη του γενικευμένου κανόνα εξέλιξης σε κυκλικές ομάδες

Ο γενικευμένος κανόνας εξέλιξης όπως ορίστηκε στη σχέση 3.1,βρίσκει εφαρμογή ακόμη και σε στοιχεία που ανήκουν σε κυκλικές ομάδες τάξης n. Αν G είναι μια πεπερασμένη μη αβελιανή ομάδα συνδυασμών n στοιχείων και

$$\alpha^t : 0...0\alpha_0^t...\alpha_i^t...\alpha_L^t 0...0 \quad L < \infty \tag{3.9}$$

όπου ${\alpha_i}^t, 0 \leqslant i \leqslant L$ είναι στοιχεία του G, με $\alpha_0^t \neq 0$ και $\alpha_L^t \neq 0$.Τότε:

- $\alpha_k^{t+1} = 0$, αν όλα τα στοιχεία του S_k ειναι 0
- $\alpha_k^{t+1} = \overline{S_k \otimes c \otimes \overline{\alpha_{k+r}^t}}$, αν $S_k \neq 0$

$$(3.10)$$

- $\alpha_k^{t+1} = \overline{S_k \otimes \overline{\alpha_{k+r}^t} \otimes c}$, αν $S_k = 0$ και τα στοιχεία του S_k όχι όλα 0

Όπου $S_k = \sum_{j=k^{\otimes}}^{k+r-1} \alpha_{j-r}^{t+1} \otimes \overline{\alpha}_j^t$ και $c = \alpha_{k+r}^t$.

Μια τέτοια ομάδα θα μπορούσε να είναι η $S_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_{n!}\}$, δηλαδή η μη αβελιανή ομάδα των συνδυασμών n στοιχείων. Αν το 0 είναι το ταυτοτικό της στοιχείο τότε : $0 \otimes \sigma_i = \sigma_i \otimes 0 = \sigma_i$ και $\bar{\sigma}_i$ το αντίστροφο στοιχείο του σ_i, δηλαδή $\bar{\sigma}_i \otimes \sigma_i = \sigma_i \otimes \bar{\sigma}_i = 0$.

Παράδειγμα 3.2: Σαν επεξήγηση του κανόνα για τις μη Αβελιανές ομάδες θεωρούμε την S_3, ομάδα των συνδυασμών τριών στοιχείων. Διαλέγουμε την ακόλουθη απεικόνιση του S_3:

$0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
οπότε βρίσκουμε:

	0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
0	0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_1	σ_2	0	σ_4	σ_5	σ_3
σ_2	σ_2	0	σ_1	σ_5	σ_3	σ_4
σ_3	σ_3	σ_5	σ_4	0	σ_2	σ_1
σ_4	σ_4	σ_3	σ_5	σ_1	0	σ_2
σ_5	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	0

Σχήμα 3.1: Όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί των στοιχείων που ανήκουν σε κυκλική ομάδα S_3

Σύμφωνα λοιπόν με τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν τα εξής: $\overline{\sigma_1} = \sigma_2$, $\overline{\sigma_2} = \sigma_1$, $\overline{\sigma_3} = \sigma_3$, $\overline{\sigma_4} = \sigma_4$, $\overline{\sigma_5} = \sigma_5$
Έστω η παρακάτω κατάσταση α_t και $r = 2$.

$\alpha_t = 0\ 0\ 0\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ 0\ 0\ 0 \qquad \alpha_0^t = \sigma_1, \quad \alpha_1^t = \sigma_2, \quad \alpha_2^t = \sigma_3$

$S_{-2} = 0 \otimes \bar{0} \otimes 0 \otimes \bar{0} = 0 \quad \Rightarrow$

$\alpha_{-2}^{t+1} = 0$, αφού όλα τα στοιχεία του S_{-2} είναι μηδέν και $c = \alpha_0^t = \sigma_1$.

$S_{-1} = 0 \otimes \bar{0} \otimes 0 \otimes \bar{\sigma_1} = \bar{\sigma_1} \quad \Rightarrow$

$\alpha_{-1}^{t+1} = \overline{(S_{-1} \otimes c \otimes \overline{\alpha_1^t})} = (\overline{\bar{\sigma_1} \otimes \sigma_1 \otimes \bar{\sigma_2}}) = \sigma_2$

$S_0 = 0 \otimes \bar{\sigma_1} \otimes \sigma_2 \otimes \bar{\sigma_2} = \bar{\sigma_1} \quad \Rightarrow$

$\alpha_0^{t+1} = \overline{(S_0 \otimes c \otimes \overline{\alpha_2^t})} = (\overline{\bar{\sigma_1} \otimes \sigma_1 \otimes \bar{\sigma_3}}) = \sigma_3$

$S_1 = \sigma_2 \otimes \bar{\sigma_2} \otimes \sigma_3 \otimes \bar{\sigma_3} = 0 \Rightarrow$

$\alpha_1^{t+1} = \overline{(S_1 \otimes \overline{\alpha_2^t} \otimes c)} = (\overline{0 \otimes \bar{0} \otimes \sigma_1}) = \sigma_2$

$S_2 = \sigma_3 \otimes \bar{\sigma_3} \otimes \sigma_2 \otimes \bar{0} = \sigma_2 \Rightarrow$
$\alpha_2^{t+1} = \overline{(S_2 \otimes c \otimes \overline{\alpha_3^t})} = (\overline{\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \bar{0}}) = 0$

$S_3 = \sigma_2 \otimes \bar{0} \otimes 0 \otimes \bar{0} = \sigma_2 \quad \Rightarrow$

$\alpha_3^{t+1} = (\overline{\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \bar{0}}) = 0$

$S_4 = 0 \otimes \bar{0} \otimes 0 \otimes \bar{0} = 0 \quad \Rightarrow$

$\alpha_4^{t+1} = 0$, αφού όλα τα στοιχεία του S_4 είναι μηδέν.

Συνεπώς:

α^t:	0	0	0	σ_1	σ_2	σ_3	0	0	0
α^{t+1}:		0	0	0	σ_2	σ_3	σ_2	0	0

Αν συνεχισουμε την εξέλιξη θα παρατηρήσουε οτι το συγκεκριμενο σωματιδιο είναι περιοδικό με $p = 6$

$t = 0$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 $\sigma 1$ $\sigma 2$ $\sigma 3$

$t = 1$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 $\sigma 2$ $\sigma 3$ $\sigma 2$ 0

$t = 2$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 $\sigma 3$ $\sigma 2$ $\sigma 1$ 0 0

$t = 3$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 $\sigma 2$ $\sigma 1$ $\sigma 3$ 0 0 0

$t = 4$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 $\sigma 1$ $\sigma 3$ $\sigma 1$ 0 0 0 0

$t = 5$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 $\sigma 3$ $\sigma 1$ $\sigma 2$ 0 0 0 0 0

$t = 6$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 $\sigma 1$ $\sigma 2$ $\sigma 3$ 0 0 0 0 0 0

Παρακάτω παρατίθεται παράδειγμα σολιτονικής σύγκρουσης των σωματιδίων A=$\sigma_1 0 \sigma_4$ και B=$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$,για $r = 2$.

$t = 0$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ1 0 σ4 0 0 0 0 σ1 σ2 σ3

$t = 1$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ4 σ2 0 0 0 0 σ2 σ3 σ2 0

$t = 2$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ2 0 σ4 0 0 0 σ3 σ2 σ1 0 0

$t = 3$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ4 σ1 0 0 0 σ2 σ1 σ3 0 0 0

$t = 4$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ1 0 σ4 0 σ2 σ3 σ3 0 σ4 0 0 0

$t = 5$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ4 σ2 σ2 σ3 σ5 0 σ4 σ2 0 0 0 0

$t = 6$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ2 σ2 σ1 σ5 0 0 σ2 0 σ4 0 0 0 0

$t = 7$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ2 σ1 σ3 0 0 0 0 σ4 σ1 0 0 0 0 0

$t = 8$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ1 σ3 σ1 0 0 0 0 σ1 0 σ4 0 0 0 0 0

$t = 9$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ3 σ1 σ2 0 0 0 0 0 σ4 σ2 0 0 0 0 0 0

$t = 10$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ1 σ2 σ3 0 0 0 0 0 σ2 0 σ4 0 0 0 0 0 0

$t = 11$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ2 σ3 σ2 0 0 0 0 0 0 σ4 σ1 0 0 0 0 0 0 0

$t = 12$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ3 σ2 σ1 0 0 0 0 0 0 σ1 0 σ4 0 0 0 0 0 0 0

$t = 13$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 σ2 σ1 σ3 0 0 0 0 0 0 0 σ4 σ2 0 0 0 0 0 0 0 0

$t = 14$ 0 0 0 0 0 0 0 0 σ1 σ3 σ1 0 0 0 0 0 0 0 σ2 0 σ4 0 0 0 0 0 0 0 0

$t = 15$ 0 0 0 0 0 0 0 σ3 σ1 σ2 0 0 0 0 0 0 0 0 σ4 σ1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

$t = 16$ 0 0 0 0 0 0 σ1 σ2 σ3 0 0 0 0 0 0 0 0 σ1 0 σ4 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Θεώρημα 3.2.1. *(Εξέλιξη απλών σωματιδίων) Έστω το σωματίδιο*

$$t = 0 : \bigcirc A^1 A^2 ... A^L \bigcirc \tag{3.11}$$

που αποτελείται απο L ΒΣ $A^1, ..., A^L$ με στοιχεία απο το G. αν $l_0, l_1, ..., l_L$ ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων στα ακόλουθα βασικά σωματίδια,

$$A^1, \bar{A}^1 \otimes A^2, \bar{A}^2 \otimes A^3, ..., \bar{A}^{L-1} \otimes A^L \tag{3.12}$$

όπου αν το A περιλαμβάνει τα στοιχεία α, το $\bar{A}$ περιέχει σωματίδια $\bar{\alpha}$. Τότε αν το σωματίδιο (3.10)είναι περιοδικό, δηλαδή ούτε διασπάται ούτε χάνει κάποιο ΒΣ, η εξέλιξή του έχει ως εξής :

$$\text{για } t = l_0 + l_1 + ... + l_{k-1} + i, \quad 0 < i \leq l_k \quad :$$

$$\bigcirc \overbrace{...}^{k} \bigcirc (\bar{A}^k \otimes A^{k+1})_i \otimes \bar{A}^k \otimes (A^{k+1} ... A^L \bigcirc A^1 ... A^k) \tag{3.13}$$

Πιο συγκεκριμένα στο

$$t = l_0 + l_1 + ... + l_k \quad :$$

$$\bigcirc \overbrace{...}^{k+1} \bigcirc \bar{A}^{k+1} \otimes (A^{k+2} ... A^L \bigcirc A^1 ... A^k A^{k+1}), \tag{3.14}$$

και στο χρονικό βήμα

$$t \doteq p = l_0 + l_1 + ... + l_L$$

$$\bigcirc \overbrace{...}^{L+1} \bigcirc A^1 A^2 ... A^L. \tag{3.15}$$

Με $\bigcirc \overbrace{...}^{k} \bigcirc$ συμβολίζουμε τα k στο πλήθος μηδενικά βασικά σωματί-δια.

Θεώρημα 3.2.2. *(Αλληλεπίδραση περιοδικών σωματιδίων) Θεωρούμε δυο περιοδικά σωματίδια A και B τα οποία αρχίζουν να αλληλεπιδρούν τη χρονικλή στιγμή $t = 1$. Αν δεν έχουμε πρόωρη διάσπαση (δηλαδή, αν δεν έχουμε διασπαση σε χρόνο $t = p$,όπου p η περίοδος του σωματιδίου που βρίσκεται στα αριστερά) τότε η αλληλεπίδραση μεταξύ των A και B θα είναι σολιτονική.*

Παράδειγμα 3.3 Σαν παράδειγμα της σολιτονικής αλληλεπίδρασης μεταξύ δυο σωματιδίων, θεωρούμε την ομάδα που ορίστηκε στο παράδειγμα (3.2) και τα σωματίδια $A = \sigma_1 0 \sigma_4$ και $B = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ και ακτίνα $r = 2$.

3.3 Δισδιάστατα,δυαδικά σολιτονικά κυψελιδικά αυτόματα

Ο γενικευμένος κανόνας εξέλιξης, όπως περιγράφεται στις σχέσεις 3.2 - 3.4, βρίσκει εφαρμογή και σε αυτόματα των οποίων κάθε κελί μπορεί να πάρει ως τιμή έναν 2-διάστατο πίνακα. Το 2-διάστατο Κ.Α έχει ως περιορισμούς οτι μπορεί να κινείται μόνο σε μία κατεύθυνση (έστω τον οριζόντιο άξονα) και το κάθε στοιχείο του (όπου πλέον είναι πίνακας 2 διαστάσεων) έχει ελάχιστο πλήθος συνδυασμών μεταξύ των γραμμών και των στηλών του. Παρακάτω ακολουθούν δυο παραδείγματα εφαρμογής του γενικευμένου κανόνα εξέλιξης σε ένα περιοδικό σωματίδιο και σε δύο περιοδικά σωματίδια.

Παράδειγμα 3.4 (Ενα περιοδικό σωματίδιο) Έστω $r = 2$, $G = A_{3\times 2}(Z_2)$, δηλαδή μια ομάδα πινάκων διάστασης 3×2 με στοιχεία 0 ή 1. Θεωρούμε λοιπον την παρακάτω διάταξη :

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

την οποία μπορεί κανείς να θεωρήσει ως ένα απλό σωματίδιο το οποίο αποτελείται απο δύο ΒΣ τα $A = \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ και $B = b_1\ b_2\ b_3$ όπου :

$$\alpha_1 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \alpha_2 = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}, \alpha_3 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}, b_1 = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}, b_2 = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}, \ b_3 = \alpha_3$$

Τότε

$$A_1 = \alpha_1 \bigcirc\bigcirc,\ A_2 = A,\ A\otimes B = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},\ (A\otimes B) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \bigcirc\bigcirc,$$

$(A \otimes B)_2 = (A \otimes B)$.

```
t=0
 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0
 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0
 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0

t=1
 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0
 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0

t=2
     0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0
     0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1
     0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1

t=3
       0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1
       0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1
       0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1

t=4
           0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0
           0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0
           0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0

t=5
               0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1
               0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1
               0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0

t=6
                       0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1
                       0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1
                       0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0

t=7
                           0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0
                           0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0
                           0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0
```

Παράδειγμα 3.5(Αλληλεπίδραση μεταξύ δυο περιοδικών σωματιδίων.) Αν συγκρίνετε τα χρονικά βήματα $t = 0$ και $t = 10$ για $r = 2$ θα δείτε οτι η σύγκρουση είναι σολιτονική, με το ταχύτερο σωματίδιο να φεύγει προς τα αριστερά(Έχει παραλειφθει η μετατόπιση στο χώρο).

```
t=0
1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0
1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1
0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1


t=1
 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1
 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0
 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0


t=2
  0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1
  0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0
  0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1


t=3
 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0
 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0


t=4
        0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0
        0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0
        0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0


t=5
          0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0
          0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0
          0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0
```

t=6

```
0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1
0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1
0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0
```

t=7

```
0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0
0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0
```

t=8

```
0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1
0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1
0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0
```

t=9

```
0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0
0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0
```

t=10

```
0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0
0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0
```

4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετώνται όλοι οι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν για την υλοποίηση των κανόνων εξέλιξης που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα θα παρουσιαστούν οι αλγόριθμοι που υλοποιούν τον πρώτο κανόνα εξέλιξης Κ.Α Φίλτρου μιας διάστασης, οι αλγόριθμοι του γενικευμένου κανόνα εξέλιξης για αυτόματα με στοιχεία μιας διάστασης που ανήκουν σε αβελιανές ομάδες, για αυτόματα των οποίων τα στοιχεία είναι δυαδικά και δισδιάστατα καθώς και για αυτόματα των οποίων τα στοιχεία ανήκουν σε κυκλικές ομάδες μέχρι και τέταρτης τάξης.

4.1 Ο πρώτος κανόνας εξέλιξης αυτομάτων φίλτρου

Στην παράγραφο 2.4 παρουσιάστηκε ο πρώτος κανόνας εξέλιξης Κ.Α φίλτρου, που αποτελούνται απο δυαδικά στοιχεία μιας διάστασης. Για τη μελέτη της εξέλιξης σωματιδίων μιας διάστασης στην παρούσα εργασία, αναπτύχθηκε ο αντίστοιχος αλγόριθμος υλοποίησης του $1^{ου}$ κανόνα εξέλιξης 2.4. Στον συγκεκριμένο αλγόριθμο ως πλέγμα του Κ.Α φίλτρου χρησιμοποιείται κάθε φορά μια γραμμή ενός πίνακα (ένα διάνυσμα), με πεπερασμένο πλήθος θέσεων (κελιών), καθένα απο τα οποία μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0 ή 1, ενώ πρίν απο την εισαγωγή της αρχικής διάταξης όλα τα κελιά έχουν την τιμή 0. Για την ορθή εισαγωγή της αρχικής διάταξης γίνονται οι απαραίτητοι ελέγχοι ώστε όλα τα στοιχεία κάθε σωματιδίου να είναι δυαδικά και να υπάρχει τουλάχιστον 1 μή μηδενικό σωματίδιο. Μετά λοιπόν την επιτυχή εισαγωγή απο το χρήστη μιας διάταξης a_0 εισάγεται ο επιθυμητός αριθμός χρονικών βημάτων $Time$ καθώς

και η ακτίνα (Rad). Αρχικά τοποθετείται η δοθείσα διάταξη a_0 στον έναν πίνακα $A[m, n]$ όπου κάθε του γραμμή είναι η κατάσταση a_t της διάταξης κατα τις χρονικές στιγμές $0 \leq t \leq Time$. Για παράδειγμα το στοιχειο του πίνακα A[2,3] είναι το 3ο στοιχείο της διάταξης κατα το χρονικό βήμα 2. Η αρχική διάταξη τοποθετείται στις γραμμές 0 και 1, πιο συγκεκριμένα στις διαδοχικές θέσεις $A[0, n - dist - Rad]$ μέχρι $A[0, n - Rad]$, αφού η εξέλιξή προχωράει απο τα δεξιά προς τα αριστερά. Η συγκεκριμένη τοποθέτηση βοηθάει ώστε να γίνεται σωστά ο υπολογισμός του στοιχειου a^i_{t+1} καθώς για τον υπολογισμό του απαιτούνται τα γειτονικά Rad προηγούμενα διαδοχικά στοιχεία (Αντίστοιχα Rad διαδοχικά στοιχεια της προηγούμενης γραμμής t) αλλά και τα Rad προσφάτως υπολογισμένα (Αντίστοιχα Rad διαδοχικά στοιχεια της γραμμής $t+1$). Με $dist$: συμβολίζεται το πλήθος των στοιχείων της διάταξης που εισήγαγε ο χρήστης). Παρακάτω παρατίθεται ο αλγόριθμος με τη μορφή ψευδογλώσσας.

Αλγόριθμος Υλοποίησης του πρώτου κανόνα εξέλιξης σολιτονικών κυψελιδικών αυτομάτων Φίλτρου.

Δεδομενα : $time, r, base, dist$
  Για j απο 0 μέχρι $dist - 1$
    $A[0, max - dist - (r + 1) + j] = base[j]$
  Τέλος j Επανάληψης
  Για i απο 1 μέχρι $time$
    Για j απο $r + 1$ μέχρι $max - (r + 1)$
      $c = 0$
      Αν $(A[i - 1, j] = 1)$ τότε $c = c + 1$
      Για k απο 1 μέχρι rad
        Αν $(A[i, j - k] = 1)$ τότε $c = c + 1$
        Αν $(A[i - 1, j + k] = 1)$ τότε $c = c + 1$
      Τέλος k επανάληψης
      Αν ($c = 0$ ή $c\ mod\ 2 = 1$) τότε
        $A[i, j] = 0$
      Αλλιώς
        $A[i, j] = 1$
      Τέλος Αν
    Τέλος j επανάληψης
  Τέλος i επανάληψης

4.2 Υπολογιστική υλοποίηση του κανόνα εξέλιξης σε περιοδικά κυψελιδικά αυτόματα φίλτρου

Στην παράγραφο 2.10 παρουσιάστηκαν τα περιοδικά κυψελιδικά αυτόματα, με περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Για την υλοποίηση του κανόνα εξέλιξης όπως αυτός περιγράφεται στις σχέσεις : 2.26, 2.28-2.30 αναπτύχθηκε και ο αντίστοιχος αλγόριθμος. Όπως σε όλους τους υπόλοιπους αλγορίθμους βασική προϋπόθεση είναι ο χρήστης να εισάγει την αρχική διάταξη, την ακτίνα rad καθώς και το πλήθος των χρονικών βημάτων $time$. Ο χρήστης εισάγει την διάταξη σε ένα διάνυσμα και υπολογίζεται το πλήθος $dist$, των στοιχείων της διάταξης αυτής. Ο κανόνας εξέλιξης θα εφαρμοστεί σε πίνακα A προκαθορισμένης διάστασης και πιο συγκεκριμένα απαιτούνται $time$ γραμμές και $3dist$ στήλες. Οι πρώτες $dist$ στήλες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πρώτων rad στοιχείων της εκάστοτε διάταξης. Οι τελευταίες $dist$ στήλες χρησιμεύουν για τον υπολογισμό των τελευταίων rad στοιχείων κάθε διάταξης, ενώ η αρχική διάταξη τοποθετείται στην μηδενική γραμμή στις θέσεις απο $dist$ εώς $2dist$ και στην πρώτη γραμμή στις θέσεις 1 εώς $dist$.

Ο κανόνας εξέλιξης εφαρμόζεται στα στοιχεία απο $dist$ εώς και $2dist$, κάθε γραμμής απο τα αριστερά προς τα δεξιά. Για τον υπολογισμό κάθε στοιχείου όπως έχει ήδη αναφερθεί στις σχέσεις 2.28-2.30, αν το στοιχείο βρίσκεται στις θέσεις $dist + rad$ εώς $2dist - rad$, λαμβάνονται υπόψιν τα rad διαδοχικά γειτονικά αριστερά, προσφάτως υπολογισμένα στοιχεία, καθώς και τα rad διαδοχικά δεξιά στοιχεία, που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο χρονικό βήμα αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση που το στοιχείο που πρόκειται να υπολογιστεί βρίσκεται στις πρώτες $dist$ εώς $dist + rad$ θέσεις, τότε για τον υπολογισμό τους λαμβάνονται υποψιν τα τελευταία rad στοιχεία που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Στην περίπτωση υπολογισμού των τελευταίων $dist - rad$ στοιχείων λαμβάνονται υπόψιν τα πρώτα rad στοιχεία της προσφάτως υπολογισμένης διάταξης. Για όλους αυτούς τους λόγους

κάθε νέο στοιχείο της θέσης j που υπολογίζεται ($dist \leq j \leq 2dist$) αντιγράφεται τόσο στη θέση $j - dist$, του επόμενου χρονικού βήματος, όσο και στη θέση $j + dist$ του προηγούμενου χρονικού βήματος. Όπως λοιπόν γίνεται σαφές απο τα παραπάνω η αντιγραφή κάθε διάταξης στις πρώτες θέσεις του επόμενου χρονικού βήματος, χρησιμεύει στον υπολογισμό, των πρώτων rad στοιχείων της επόμενης διάταξης. Η αντιγραφή της διάταξης στο προηγούμενο χρονικό βήμα χρησιμεύει στον υπολογισμό των τελευταίων $dist - rad + 1$ στοιχείων του χρονικού βήματος που βρίσκεται η εξέλιξη τη δεδομένη στιγμή.

Πιο συγκεκριμένα για την υλοποίηση του κανόνα εξέλιξης 2.26 εφαρμόστηκε ο εξής αλγόριθμος :

Αλγόριθμος υλοποίησης ΚΑ φίλτρου με περιοδικές συνθήκες

Δεδομενα : $time, rad, base, dist//$

C :$base$ είναι ένα διάνυσμα διάστασης $dist$ που περιέχει τη διάταξη που εισήγαγε ο χρήστης.

Για j απο 0 μέχρι $dist - 1$
    $A[0, dist + j] = base[j]$
    $A[1, j] = base[j]$
Τέλος j Επανάληψης
Για i απο 1 μέχρι $time$
    Για j απο $dist$ μέχρι $2 * dist$
        $c = 0$
        Αν $(A[i-1, j] = 1)$ $c = c + 1$
        Για k απο 1 μέχρι rad
            Αν $(A[i, j-k] = 1)$ $c = c + 1$
            Αν $(A[i-1, j+k] = 1)$ $c = c + 1$
        Τέλος k επανάληψης
        Αν $(c = 0)$ τότε
            $A[i, j] = 0$
        Αλλιώς
            Αν $(c \; mod \; 2) = 1$ $A[i, j] = 0$
            Αλλιώς $A[i, j] = 1$
        Τέλος Αν
        $A[i+1, j - dist] = A[i, j]$
        $A[i-1, j + dist] = A[i, j]$
    Τέλος j επανάληψης
Τέλος i επανάληψης

4.3 Ο γενικευμενος κανόνας εξέλιξης για στοιχεια που ανήκουν σε αβελιανές ομάδες

Στην παράγραφο 3.1 παρουσιάστηκε ο γενικευμένος κανόνας εξέλιξης για Κ.Α των οποίων τα στοιχεια ανήκουν σε Αβελιανές ομάδες $\mathbb{Z}_n$ Για την υλοποίηση του κανόνα εξέλιξης 3.4 αναπτύχθηκε αντίστοιχος αλγόριθμος. Πρίν ξεκινήσει η εφαρμογή του γενικευμένου κανόνα εξέλιξης 3.4 πρέπει να γίνουν απαραίτητες εισαγωγές απο τον χρήστη, δηλαδή τα χρονικά βήματα της εξέλιξης $Time$, η ακτίνα Rad, η τάξη της αβελιανής ομάδας στην οποία ανήκουν τα σωματίδια n και τέλος η αρχική διάταξη των σωματιδίων. Να σημειωθεί εδώ ότι η αρχική διάταξη των σωματιδίων που εισάγει ο χρήστης τοποθετείται σε έναν μονοδιάστατο πίνακα Α προκαθορισμενης διάστασης στη γραμμή 0. Η μεταβλητή C αρχικά περιέχει το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της εκάστοτε διάταξης σε κάθε χρονική στιγμή, ενώ κατα την διάρκεια της εξέλιξης στο ίδιο χρονικό βήμα η τιμή του ανανεώνεται, άν υπάρχουν διαδοχικά μηδενικά $r+1$ στοιχεία ανάμεσα σε δύο σωματίδια, παίρνοντας την τιμή του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου (μετά τα μηδενικά σωματίδια).

Αλγόριθμος υλοποίησης γενικευμένου κανόνα εξέλιξης σε στοιχεία που ανήκουν σε αβελιανές ομάδες

Δεδομένα $A[0, max], Time, Rad, C, n$
Για t απο 0 μέχρι $Time$
Για j απο 0 μέχρι $max - Rad$
$S1 = 0$
$S2 = 0$
$S3 = 0$
C : Όπου $S1$ είναι αθροιστής των $Rad - 1$ διαδοχικών αριστερών στοιχείων.
C : $S2$ είναι αθροιστής των $Rad - 1$ διαδοχικών συζυγών επόμενων στοιχείων.
C : $S3$ είναι αθροιστής των $Rad - 1$ διαδοχικών επόμενων στοιχείων.
Για i απο 1 μέχρι $Rad - 1$
Αν $j < Rad$ τότε
$S1 = 0$
Αλλιως
$S1 = S1 + A[t + 1, j - i]$
Τέλος αν
$S2 = S2 + n - A[t, j]$
$S3 = S3 + A[t - j]$
Τελος i Επανάληψης
$Sk = S1 + S2 + (n - A[t, j])$
C : Προσθέτουμε και το συζυγές στοιχείο της θέσης στην οποία βρισκόμαστε
Αν $S1 + S3 + A[t, j] = 0$ τότε
$A[t, j] = 0$
$C = A[t, j + Rad]$
C :Κρατάμε για C το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο, αφου έχουμε μετρήσει $Rad + 1$ μηδενικά διαδοχικά στοιχεία.
Αλλιώς
$A[t + 1, j] = ((Sk + n - A[t, j + Rad]) + c) mod\ n)$
Τελος Αν
Τελος j Επανάληψης
Τέλος t Επανάληψης

4.4 Υπολογιστική υλοποίηση του γενικευμενου κανόνα εξέλιξης,σε διατάξεις με δυαδικά δισδιάστατα στοιχεία

Για την κατασκευή ενός 2-διάστατου ΚΑ, θεωρούμε το Κ.Α που παρουσιάστηκε στους ορισμούς 3.2 και 3.4 του οποίου το κάθε κελί μπορεί να πάρει ως τιμές έναν 2-διάστατο πίνακα. Η διάταξη που εισάγει ο χρήστης τοποθετείται στις τελευταίες στήλες των πρώτων γραμμών ενός πίνακα Α, ο οποίος έχει προκαθορισμένη διάσταση. Το κάθε στοιχείο έχει n γραμμές και m στήλες, επίσης έχουν χρησιμοποιηθεί επιπλέον δύο πίνακες $S1$ και $S2$ στους οποίους αθροίζουμε τα αριστερά Rad προσφάτως υπολογισμένα στοιχεία απο τη θέση στην οποία βρισκόμαστε και τα Rad επόμενα συζυγή υπολογισμένα στοιχεία αντίστοιχα. Σε όλους τους προηγούμενους αλγορίθμους μέχρι τώρα έχουν χρησιμοποιηθεί πίνακες οπου τοποθετείται η διάταξη των σωματιδίων για κάθε χρονικό βήμα κι έτσι δεσμεύονται τόσες γραμμές όσες και το πλήθος των βημάτων που εισήγαγε ο χρήστης. Αντίθετως, σε αυτή την υλοποίηση δεσμεύονται μόνο τόσες γραμμές όσες είναι και το πλήθος των γραμμών των στοιχείων της κάθε διάταξης, έτσι σε κάθε χρονικό βήμα επαναχρησιμοποιούνται οι ίδιες θέσεις με αυτές του προηγούμενου βήματος, περιέχοντας βέβαια τα ανανεομένα στοιχεία που προκύπτουν απο την εφαρμογή του κανόνα εξέλιξης (3.4) για το εκάστοτε χρονικό βήμα.
Σε κάθε χρονικό βήμα ο δείκτης p διατρέχει όλα τα στοιχεία της διάταξης Α. Αν τα γειτονικά στοιχεία του p και το ίδιο το στοιχείο της θέσης p είναι μηδενικά τότε και το ανανεωμένο στοιχείο p θα είναι το μηδενικό. Επίσης, αρχίζει η αναζήτηση του C δηλαδή του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου έπειτα απο $Rad + 1$ διαδοχικά μηδενικά στοιχεία. Σε αντίθετη περίπτωση εφαρμόζεται ο κανόνας εξέλιξης ώς εξής : στον πίνακα $S1$ προστίθενται όλα τα στοιχεία απο τις θέσεις $p - Rad * m$ μέχρι και τη θέση p που είναι τα προσφάτως υπολογισμένα στοιχεία. Στον πίνακα $S2$ προστίθενται τα συζυγή των στοιχείων $p + m$ μέχρι και $p + Rad$ που είναι υπολογισμένα απο το προηγούμενο χρονικό βήμα. Τέλος αθροίζονται τα $S1$, $S2$ και το C. το συζυγές αυτού του αθροίσματος είναι η ανανεωμένη τιμή του στοιχείου που βρίσκεται στη θέση p. Τα ίδια βήματα ακολουθούνται για κάθε στοιχείο της διάταξης σε οποιοδήποτε χρονικό βήμα.

Αλγόριθμος υλοποίησης γενικευμένου κανονα εξέλιξης σε δισδιάστατα Κ.Α

Δεδομένα $A[n, max], Time, Rad$

Για t απο 0 μέχρι $Time$

Για p απο Rad μέχρι $max - m * Rad$ με βήμα m

$Count = 0$

Για i απο 0 μέχρι n

Για j απο 0 μέχρι $n - 1$

$S1[i, j] = 0$

$S2[i, j] = 0$

Τέλος j Επανάληψης

C :Όπου $S1$ είναι ο αθροιστής των προηγούμενων Rad στοιχείων

C :$S2$ ο αθροιστής των επόμενων προσφάτως υπολογισμένων Rad συζυγών στοιχείων σύν το συζυγές της θέσης στην οποία βρισκόμαστε

Τέλος i Επανάληψης

C : Έλεγχος για το αν χρειάζεται να υπολογιστεί το νέο C στοιχείο.

Για i απο 0 μέχρι $n - 1$

Για z απο p μέχρι $p + m * (Rad + 1)$

Αν $A[i, z] = 0 \quad Count = Count + 1$

Τέλος z Επανάληψης

Τέλος i Επανάληψης

Αν $Count = (Rad + 1) * m * n$ τότε

$j = p$ C : Κρατάει τη στήλη του στοιχείου προς επεξεργασία

$elem = 0$ C : Μετρητής των στοιχείων μέχρι να βρούμε το $Carry$

(Ξεκινάει η αναζήτηση του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου δηλαδή του C)

Αρχή Επανάληψης

$Zeros = 0$

C : Ο μετρητής $Zeros$ μετράει τα μηδεν της κάθε στήλης. Αν το $Zeros$ πάρει τιμή μικρότερη του n (των γραμμών του κάθε στοιχείου) σημαίνει οτι βρέθηκε το πρώτο μή μηδενκό στοιχείο.

Για i απο 0 μέχρι $n - 1$

Αν $A[i, j] = 0 \quad Zeros = Zeros + 1$

Τέλος i Επανάληψης

Αν $Zeros = n$ τότε

$j = j + 1$

Αν $j \ mod \ m = 0$ τότε $elem = elem + 1$

C :Το $elem$ αυξάνεται κάθε φορά που έχω συμπληρώσει m στήλες, όσες είναι και οι στήλες ενός στοιχείου.

Μέχρις Ότου $n > Zeros$ ή $j = max$

$C2 = p + elem * m$

Για i απο 0 μέχρι $n - 1$

Για j απο $C2$ μέχρι $C2 + m - 1$
$C[i, j - C2] = A[i, j]$
Τέλος j Επανάληψης
Τέλος i Επανάληψης
Τέλος Αν
Για z απο $p - m * Rad$ μέχρι p με βήμα μ
$Count2 = Count2 + 1$

C : Ο μετρητής $Count2$ αυξάνεται κάθε φορά που αθροίζεται ένα στοιχείο στο $S1$

Για i απο 0 μέχρι $n - 1$
Για j απο z μέχρι $z + count2 * m - 1$
$S1[i, j - z] = S1[i, j - z] + A[i, j]$
Τέλος j Επανάληψης
Τέλος i Επανάληψης
Τέλος z Επανάληψης
Για z απο p μέχρι $p + m * Rad$ με βήμα m
$Count3 = Count3 + 1$ C :Ο μετρητής $Count3$ αυξάνεται κάθε φορά που αθροίζεται ένα στοιχείο στο $S2$
Για i απο 0 μέχρι $n - 1$
Για j απο z μέχρι $z + Count3 * m - 1$
$S2[i, j - z] = S2[i, j - z] + (A1[i, j] mod n)$
Τέλος j Επανάληψης
Τέλος i Επανάληψης
Τέλος z Επανάληψης
$count = 0$
Για i απο 0 μέχρι $n - 1$
Για j απο 0 μέχρι $m - 1$
Αν $S1[i, j] + S2[i, j]] = 0$ τότε $count = count + 1$
Τέλος j Επανάληψης
Τέλος i Επανάληψης

C Αν το $S1 + S2$ δίνουν μηδενικό στοιχείο τότε νέο στοιχείο είναι το μηδενικό

Αν $count = n * m$ τότε
Για i απο 0 μέχρι $n - 1$
Για j απο 0 μέχρι $m - 1$
$A[i, p + j] = 0$
Τέλος j Επανάληψης
Τέλος i Επανάληψης
Αλλιώς

Για i απο 0 μέχρι $n-1$
Για j απο 0 μέχρι $m-1$
$S[i,j] = (S1[i,j] + S2[I,j] + C[i,j]) mod n$

C : Διαφορετικά, τα $S1$ και $S2$ καθώς και το C προστίθενται. Το συζυγές αυτού του αθροίσματος είναι το νέο στοιχείο.

$A[i, p+j] = S[i,j]$
Τέλος j Επανάληψης
Τέλος i Επανάληψης
Τέλος Αν
Τέλος p Επανάληψης
Τέλος t Επανάληψης

4.5 Υπολογιστική υλοποίηση του γενικευμενου κανόνα εξέλιξης,σε διατάξεις με στοιχεία που ανήκουν σε κυκλικές ομάδες

Στην παράγραφο 3.2 ορίστηκαν οι μη αβελιανές ομάδες μεταθέσεων και ο τρόπος εφαρμογής του γενικευμένου κανόνα εξέλιξης 3.10 σε διατάξεις τέτοιων στοιχείων. Ο πίνακας μεταθέσεων σχήμα 3.1 προκύπτει μέσω μιας συνάρτησης που δημιουργήθηκε για να παράγει όλες τις πιθανές μεταθέσεις. Η διαφορά σε σχέση με στοιχεία άλλων ομάδων είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ των στοιχείων. Τα στοιχεία μεταξύ τους δεν αλληλεπιδρούν πια μέσω της πρόσθεσης $mod\ n$, αλλά μέσω των μεταθέσεων των στοιχείων των κυκλικών ομάδων. Τα σωματίδια υπολογιστικα μπορούν να αναπαρασταθούν σαν ένας πίνακας 2 γραμμών και m στηλών, όπου m είναι η τάξη της ομάδας. Τα στοιχεία της κάθε γραμμής είναι οι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί απο 1 εώς m, ενώ τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής παίρνουν τιμές επίσης απο 1 εώς m, όχι όμως υποχρεωτικά διαδοχικές. Πιο συγκεκριμένα, έστω η αλληλεπίδραση μεταξύ των στοιχείων S_k και A, το κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής του S_k υπαγορεύει απο ποια στήλη της δεύτερης γραμμής του A θα προκύψει η νέα τιμή της εκάστοτε στήλης, για το παραγόμενο στοιχείο της αλληλεπίδρασης. Η συνάρτηση που υλοποιεί αυτή την αλληλεπίδραση είναι η εξής:

Συνάρτηση Συνδυασμοί $(S_k, A, place, m)$
Για j απο $place$ μέχρι $place + m$
$\cdot\ col = S_k[2, j]$
$S_k[2, j] = A[2, col]$
Τέλος j Επανάληψης
Τέλος Συνδυασμοί

Στην συνάρτηση Συνδυασμοί το νέο στοιχείο της αλληλεπίδρασης μεταξύ των S_k και A αποθηκεύεται στον πίνακα S_k. Επίσης βασική

προϋπόθεση είναι όλα τα στοιχεία που αλληλεπιδρούν να έχουν αρχικοποιηθεί, δηλαδή η πρώτη τους γραμμή να αποτελείται απο τις τιμές 1 εώς m. Με τη χρήση αυτής της συνάρτησης επιτυγχάνεται η παραγωγή όλων των μεταθέσεων μιας ομάδας οποιασδήποτε τάξης και ταυτόχρονα αν την κληθεί για Rad διαδοχικά επόμενα στοιχεία της διάταξης A, μπορεί να παράγει το S_k για τον υπολογισμό του ανανεωμένου a_{t+1}^{place} στοιχείου κατα τη διάρκεια κάθε χρονικού βήματος. Θα πρέπει ακόμη να σημειωθεί οτι η συναρτηση αυτή έχει υλοποιηθεί σε γλώσσα προγραμματισμού C, εποφελούμενοι το γεγονός οτι τους πίνακες τους διαχειρίζεται σαν δείκτες και οποιαδήποτε αλλαγή αν συμβεί σε κάποιο απο τα ορίσματα αν αυτό είναι πίνακας, επιστρέφεται στο κυρίως πρόγραμμα χωρίς να χρειάζεται να δηλώθεί κάποιο επιπλέον όρισμα εξόδου.

Σύμφωνα με τον γενικευμένο κανόνα εξέλιξης έπρεπε να υπάρχει δυνατότητα υπολογισμού συζυγούς σωματιδίου. Όπως έχει προαναφερθει, αν ένα στοιχείο αλληλεπιδράσει με το συζυγές του τότε προκύπτει το μηδενικό στοιχείο όπως αυτό έχει οριστεί στην παράγραφο 3.2. Για την κατασκευή του συζυγούς κατασκευάστηκε η συνάρτηση Συζυγές:

Συνάρτηση Συζυγές $(A, S, place, m)$
  Για j απο $place$ μέχρι $place + m$
    $col = A[2, j]$
    $S[2, col] = A[1, j]$
  Τέλος j Επανάληψης
Τέλος Συζυγές

Στον αλγόριθμο που υλοποιει τον γενικευμένο κανόνα εξέλιξης 3.10 ο χρήστης εισάγει την ακτίνα Rad, τα χρονικά βήματα $Time$ το σωματίδιο και την τάξη της ομάδας m στην οποία ανήκει το σωματίδιο. Και εδώ η εξέλιξη προχωράει απο τα δεξιά προς τα αριστερά γι' αυτό το σωματίδιο απλό ή σύνθετο έισάγεται στις τελευταίες στήλες του πίνακα A δυο γραμμών και ενός αριθμού πολλαπλάσιου

της τάξης m, max στηλών αφήνωντας πάντα τις τελευταίες $Rad*m$ στήλες με μηδενικά στοιχεία. Ο πίνακας A πριν τοποθετηθεί το σωματίδιο του χρήστη αρχικοποιείται αποτελούμενος απο μηδενικά στοιχεία. Δηλαδή απο στοιχεία της μορφής :

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Πρίν ξεκινήσει η εξέλιξη κάθε χρονικού βήματος κρατάται η θέση στην οποία βρίσκεται το στοιχείο C δηλαδή το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της παραγόμενης διάταξης στη μεταβλητή c_1, ενώ η θέση του τελευταίου στοιχείου στη μεταβλητή $last$. Όπως αναλύεται παρακάτω σε κάθε χρονικό βήμα για την παραγωγή κάθε στοιχείου λαμβάνονται υπόψιν τα Rad γειτονικά στοιχεία που βρίσκονται εκατέρωθεν του προς εξέλιξη στοιχείου. Αριστερά του βρίσκονται τα προσφάτως υπολογισμένα στοιχεία ενώ δεξιά τα στοιχεία που προέκυψαν στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Για τον υπολογισμό του S_k του κανόνα εξέλιξης καλείται η συνάρτηση Συνδιασμοί, ενώ για την παραγωγή των συζυγών στοιχείων καλείται η συνάρτηση Συζυγές όπως παρουσιάστηκε σε αυτή την παράγραφο.

Αλγόλιθμος γενικευμένου κανόνα εξέλιξης σε στοιχεία κυκλικών ομάδων

Για p απο c_1 μέχρι $last$ με βήμα m

C :Μηδενισμός S_k, S

Για j απο 1 μέχρι m

$S_k[1, j] = j$

$S_k[2, j] = j$

$S[1, j] = j$

$S[2, j] = j$

Τέλος j επανάληψης

C :Αν όλα τα Rad γειτονικά στοιχεία του p είναι μηδενικά τότε το στοιχείο της θέσης p είναι το μηδενικό

$zeros = 0$

$notzeros =$Ψευδής

Όσο $i < p + m * Rad$ και $notzeros =$Ψευδής επανάλαβε

Αν $A[2, i] = A[1, i]$ τότε

$zeros = zeros + 1$

$i = i + 1$

αλλιώς

$notzeros =$Αληθής

Τέλος Αν

Τέλος Επανάληψης

Αν $notzeros$=Ψευδής τότε

Για j απο 1 μέχρι m

$A_k[2, p + j] = j$

Τέλος j επανάληψης

C :Στην ίδια περίπτωση αρχίζει και η αναζήτηση του στοιχείου C

Αναζήτηση$C(A, p, C)$

C :Μέσω του υποπρογράμματος Αναζήτηση$C(A, p, C)$ το οποίο δέχεται ως όρισματα την διάταξη A και τη θέση απο την οποία αρχίζει η αναζήτηση p, υπολογίζεται και επιστρέφεται το νέο C.

Αλλιώς

C :Στην περίπτωση όπου τα γειτονικά Rad δεν είναι μηδενικά ο κανόνας εξέλιξης εφαρμόζεται ώς εξής:

Για k απο $p - m * Rad$ μέχρι p

Συνδυασμοί(S_k, A, k, m)

Συζυγές $(A, S, k + Rad * m, m)$

Συνδυασμοί$(S_k, S, 1, m)$

Τέλος k επανάληψης

C :Αν το στοιχείο S_k Είναι το μηδενικό τότε στοιχείο της θέσης p προκύπτει απο την πράξη $\overline{S_k \otimes \overline{a}_{p+Rad} \otimes C}$

Αν $S_k = 0$

Συζυγές $(S, A, p + m * Rad, m)$

C : το συζυγές του $A[p + Rad * m]$ αποθηκεύεται στο S
Συνδυασμοί$(S_k, S, 1, m)$
C : το S επιδρά το στο Sk
Συνδυασμοί$(S_k, C, 1, m)$
C : το C επιδρά το στο Sk
Συζυγές $(S, S_k, 1, m)$
C : το συζυγές του S_k αποθηκεύεται στο S
Αλλιώς Αν $S_k \neq 0$
C :Στην περίπτωση όπου το $S_k \neq 0$ τότε το νέο στοιχείο της θέσης p υπολογίζεται απο την πράξη $\overline{S_k \otimes C \otimes \overline{a}_{p+Rad}}$
Συνδυασμοί$(S_k, C, 1, m)$
C : το S επιδρά το στο Sk
Συζυγές $(S, A, p + m * Rad, m)$
C : το συζυγές του $A[p + Rad * m]$ αποθηκεύεται στο S
Συνδυασμοί$(S_k, S, 1, m)$
C : το S επιδρά το στο Sk
Συζυγές $(S, S_k, 1, m)$
C : το συζυγές του S_k αποθηκεύεται στο S
Τέλος Αν
Για j απο 1 μέχρι m
$A[2, p + j] = S[2, j]$
Τέλος j επανάληψης
Τέλος p επανάληψης

Σε κάθε χρονικό βήμα προς εξέλιξη πρέπει αρχικά να μελετάται αν όλα τα γειτονικά Rad στοιχεία που βρίσκονται στη θέση p μαζί και με το στοιχείο p είναι μηδενικά. Αν ο ισχυρισμός αυτός ισχύει τότε το στοιχείο της θέσης p είναι το μηδενικό. Στην ίδια περίπτωση αρχίζει και η αναζήτηση του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου C αν μεταξύ του μηδενικού στοιχείου p και του επόμενου στοιχείου παρεμβάλονται περισσότερα απο $Rad + 1$ μηδενικά στοιχεία. Σε αντίθετη περίπτωση το νέο στοιχείο της θέσης p εξαρτάται απο το S_k. Το S_k περιέχει την αλληλεπίδραση μεταξύ των Rad προσφάτως υπολογισμένων στοιχείων καθώς και των συζυγών των Rad στοιχείων, υπολογισμένων στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Η αλληλεπίδραση αυτή γίνεται με την εξής σειρά: Το στοιχείο a_{p-i}^{t+1} αλληλεπιδρά με το $\overline{a}_{p+i}^{t}$ (όπου $1 \leq i \leq Rad$ και $0 \leq t \leq Time$),το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης αποθηκεύεται στο S_k και αυτό με τη σειρά

του αλληλεπιδρά με το επόμενο $a^{t+1}_{p-(i+1)}$ στοιχείο κ.ο.κ. Επειδή στις ομάδες μεταθέσεων δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, έπρεπε να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στη σειρά με την οποία υπολογίζεται η αλληλεπίδραση μεταξύ των εκάστοτε στοιχείων. Γι' αυτό τον λόγο αν $S_k = 0$ τότε το $a^{t+1}_p = \overline{S_k \otimes \overline{a}^t_{p+Rad} \otimes C}$ ενώ αν το $S_k \neq 0$ τότε $a^{t+1}_p = \overline{S_k \otimes C \otimes \overline{a}^t_{p+Rad}}$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία, κατά την μελέτη του Γενικευμένου κανόνα εξέλιξης σε σωματίδια που ανήκουν σε κυκλικές ομάδες παρουσιάστηκε ένας νέος κανόνας εξέλιξης. Ο κανόνας αυτός ορίζει με πιό αυστηρό τρόπο πως ανανεώνεται η κατάσταση κάθε νέου στοιχείου α_k^{t+1}, όπου k η θέση του σε μια διάταξη τη χρονική στιγμή $t+1$. Πιο συγκεκριμένα, ο γενικευμένος κανόνας εξέλιξης όπως παρουσιάστηκε στις σχέσεις (3.2)-(3.6), λόγω της μη αντιμεταθετικότητας της πράξης με την οποία αλληλεπιδρούν τα στοιχεία των κυκλικών ομάδων, δεν μπορούσε να εφαρμοστεί αυτούσιος. Παρατηρήθηκε λοιπόν οτι η τιμή του S_k παίζει καθοριστικό ρόλο, για τον υπολογισμό κάθε νέου στοιχείου. Δηλαδή, όταν το S_k είναι το μηδενικό στοιχείο επειδή, όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν τότε $\alpha_k^{t+1} = 0$. Ενώ αν $S_k = 0$ και τα στοιχεία του δεν είναι όλα μηδεν, τότε $\alpha_k^{t+1} = \overline{S_k \otimes \overline{\alpha_{k+r}^t}} \otimes c$. Διαφορετικά, δηλαδή αν $S_k \neq 0$ τότε $\alpha_k^{t+1} = \overline{S_k \otimes c \otimes \overline{\alpha_{k+r}^t}}$.

Επίσης για όλους τους κανόνες εξέλιξης που παρουσιάστηκαν στα κεφάλαια 3 και 4, αναπτύχθηκαν και οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι υλοποίησής τους, οι οποίοι συνθέτουν το υπολογιστικό περιβάλλον που κατασκευάστηκε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] S. Wolfram 1986 *"Theory and Applications of Cellular Automata", World Scientific* Singapore.

[2] T.Toffoli and N.Margolus 1982. *"Cellular Automata Machines: A new environment for modeling"* MIT Press, Cambridge,MA.

[3] H.A.Gutowitz 1990. *"Cellular Automata"*, *MIT Press* , Cambridge, MA.

[4] Wolf-Gladrow, Dieter A. 2005. *"Lattice-Gas Cellular Lattice -An Introduction "* Berlin: Springer.

[5] Norman H. Packard 1985. "Lattice models for Solidification and Aggregation" *"The Proceedings of the First International Symposium for Science of Form"*

[6] Conway 1970;Gardner 1971,1972; Wainwright,1971-1973; Wainwright 1974; Buckingham, 1978; Berlecamp et al., 1982 Chap. 25; R.W. Gosper, private communications

[7] J. Park, K. Steiglitz and W. Thurston 1986. "Soliton like behaviour in automata",*Physica* ,**19D**, 423.

[8] T.S Papatheodorou, M.J Ablowitz, Y.G Saridakis 1988. "A Rule for fast computation and analysis of soliton automata", *Stud.Appl.Math*,**79**,173–184.

[9] A.S Fokas, E.P.Papadopoulou, Y.G.Saridakis and M.J.Ablowitz 1989. "Interaction of Simple Particles in Soliton Automata", *Atudies in Appl Math*, **81**,153–180.

[10] A.S Fokas, E.P.Papadopoulou, Y.G.Saridakis 1990. "Coherent structures in Cellular Aytomata", *Phys Let A*,**147,7**,369–379.

[11] A.S Fokas, E.P.Papadopoulou, Y.G.Saridakis 1989."Particles in Soliton Automata",*Complex System*,**3**,197–321.

[12] A.S Fokas, E.P.Papadopoulou, Y.G.Saridakis 1990."Soliton Cellular Automata", *Phys D*,**41**,297–321.

[13] Βασιλικη Κακαβα 1996.' Σολιτονιά κυψελιδικά αυτόματα με μηδενικές και με περιοδικές συνοριακές διατάξεις ¨, Πολυτεχνείο Κρήτης, Μεταπτυχιακή εργασία.

Μέρος ΙΙ

ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΕ ΓΛΩΣΣΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ C , ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΝΟΝΩΝ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΣΟΛΙΤΟΝΙΚΩΝ Κ.Α

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<string.h>
#define max 200
#define max2 1200

int Sc[2][3],Skc[2][3],Cc[2][3];
int Ac[2][max2];

void Sundiasmoi(int a1,int a2,int choice);
void Suzuges(int a1,int a2,int choice);
int main(void)
{
char ep;
char b;
char answer='Y';
while (answer=='Y')
{
    system("cls");
printf("***SOLITONIC CELLULAR AUTOMATA***\n");
printf("Are you interested in one or two dimensions?\n");
printf("Press 1 For one dimension automata\n");
printf("Press 2 For two dimension automata\n");
printf("Press 3 For Cyclic groups\n");
scanf("%c",&ep);
while (ep!='3' && ep!='1' && ep!='2')
{
printf("You can only choose between 1 and 2 dimensions\n");
scanf(" %c",&ep);
}
if (ep=='1')
{
printf("Press 0 - For periodic Boundary\n");
```

```
printf("Press 1 - For Non periodic Boundary\n");
scanf(" %c",&b);
while (b!='0'&& b!='1')
{
printf("You can only choose between of those two options 0-periodic
scanf(" %c",&b);

}
if (b=='1') one_dimension();
        if (b=='0')  periodic();
}
if (ep=='2')
{
two_dimension();
}
if (ep=='3')
{
Cycle_teams();
}
printf("Do you want to continue?\nPress Y-if your answer is yes\n")
printf("Press N- if your answer is no :\n");
scanf(" %c",&answer);
while ((answer!='Y')&&(answer!='N')&&(answer!='y')&&(answer!='n'))
{
printf("You can only choose between Y-Yes and N-No\n");
scanf(" %c",&answer);
}
}

}

//*****************************************************************
int periodic()
```

```
{
      char pa[200];
      int dist,base[200],rad,t;
      printf("Enter the particle:\n");
      scanf("%s",pa);
      printf("Enter the radious\n");
      scanf("%d",&rad);
      printf("Enter the time steps");
      scanf("%d",&t);
      dist=strlen(pa);
      int A[200][200];
      int i,j,k,c;


      for (i=0;i<200;i++)
      {
          base[i]=0;
          for(j=0;j<200;j++)
          {
              A[i][j]=0;
          }
      }
      for(i=0;i<dist;i++)
      {
       if (pa[i]=='1')
        base[i]=1;
       else
       base[i]=0;
      }

      for(j=0;j<dist;j++)
      {
           A[0][dist+j]=base[j];
```

```
     A[1][j]=base[j];
}
for (i=1;i<=t;i++)
{
    for(j=dist;j<2*dist;j++)
    {
      c=0;
      if (A[i-1][j]==1)
       c++;
        for (k=1;k<=rad;k++)
        {
         if(A[i][j-k]==1) c++;
         if (A[i-1][j+k]==1) c++;
        }
     if (c==0)
        A[i][j]=0;
     else
     {
        if (c%2==1)
           A[i][j]=0;
        else
           A[i][j]=1;
     }

    A[i+1][j-dist]=A[i][j];
    A[i-1][j+dist]=A[i][j];

    }

}
for (i=0;i<=t;i++)
{
    for (j=dist;j<2*dist;j++)
```

```
          {
              if (A[i][j]==0)
              printf(".");
              else
              printf("'w");
          }
          printf("\n");
      }


}

//*****************************************************************
//One Dimension Automata
int one_dimension()
{
int i,j,Base[max],Rad,Time,mhkos,A[max][max];
int n,SK,S1,S2,S3,c,l,k;
int dist;
char answer;
char Morio[max];
char tsa[2],ss;
FILE *fp;
  for(i=0;i<max;i++)
 {
  for(j=0;j<max;j++)
  {
   A[i][j]=0;
  }
 }

 for (i=0;i<max;i++)
 {
```

```
//  Morio[i]='0';
  Base[i]=0;
 }

 //Rad=0;
 Time=0;
//Insert

printf("Enter the particle :\n");
scanf("%s",&Morio);

dist=strlen(Morio);
//ss=gets(Morio);
//printf("%c %c \n",Morio[0],Morio[1]);

printf("Enter the Radious :\n");
scanf("%d", &Rad);

printf("Enter the steps\n");
scanf("%d",&Time);
printf("Enter the module\n");
scanf("%d",&n);


 for (i=0;i<dist;i++)
 {
 tsa[0]=Morio[i];
 //Base[i+Rad+2+(Rad+1)%2]=atoi(tsa);
 Base[max-dist-Rad+i]=atoi(tsa);
 }
// printf("-->%d\n",Rad);
 printf("\n");
```

```
for(j=dist;j<max;j++)
{
 A[0][j-dist]=Base[j];
}
for(j=max-dist;j<=max;j++)
{
 //A[1][j+2*Rad+1]=Base[j];
 A[1][j]=Base[j];
}

//CALCULATIONSSSS
 for(k=0;k<=Time;k++)
 {
  for (j=0;j<max-Rad;j++)
   {
    S1=0;
    S2=0;
    S3=0;
     for (i=1;i<Rad;i++)
      {
      if (j<Rad)
         {
          S1=0;
         }
      else
      S1+=A[k+1][j-i];
      if(max-j<Rad)
      {
      S2=0;
```

```
      S3=0;
      }
      else
      {
      S2+=n-A[k][j+i];
      S3+=A[k][j+i];
      }
     }

      if(j<Rad)
      {
      S1=0;
      }
      else
      S1+=A[k+1][j-Rad];

    SK=S1+S2+(n-A[k][j]);
    if (S1+S3+A[k][j]==0)
    {
     A[k+1][j]=0;
     c=A[k][j+Rad];
    }
    else
    {
     A[k+1][j]=(n-((SK+(n-A[k][j+Rad])+c)%n))%n;
    }
   }

  }

for (i=0;i<=Time;i++)
{
  for(j=100;j<=max-dist;j++)
```

```
   {
   printf("%d",A[i][j]);
   }
 printf("\n");
}


}

int two_dimension()
{
FILE *fp;
int Time,Rad,m,n1,m1,A[max][max],i,j,n,s,k1,k2,k3,rep;
char rep2;
for (i=0;i<max;i++)
{
for (j=0;j<max;j++)
{
A[i][j]=0;

}
}

Time=0;
char name[max];
printf("-------EISAGWGH DEDOMENWN--------\n");
printf("Eisagete to onoma tou arxeiou\n");
scanf("%s",name);
printf("Choose your shift press \n 1 - Left shift  \n 2- Without sh
scanf("%d",&rep);
if (rep==1)
{
s=0;
```

```
fp=fopen(name,"r");
fscanf(fp,"%d \n",&n1);
fscanf(fp,"%d \n",&m1);
s=m1/m;
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m1;j++)
{
fscanf(fp,"%d \n",&A[i][max-m1+j]);
printf("%d",A[i][max-m1+j]);
}
printf("\n");
}
fclose(fp);
printf("Enter the elements dimension \n");
    scanf("%d %d",&n1,&m);

    printf("Enter the Radious\n");
    scanf("%d", &Rad);
    printf("Enter the steps\n");
    scanf("%d",&Time);
    printf("Enter the module\n");
    scanf("%d",&n);
    printf("\n");

k1=cell1(n1,m,Rad,Time,m1,n,A);
printf("Do you want to repeat the evolution without shift?\nPress Y
scanf(" %c",&rep2);


if (rep2=='Y')
{
```

```
for (i=0;i<max;i++)
{
for (j=0;j<max;j++)
{
A[i][j]=0;

}
}
s=0;
fp=fopen(name,"r");
fscanf(fp,"%d \n",&n1);
fscanf(fp,"%d \n",&m1);
s=m1/m;
printf("It's a particle with %d elements\n",s);
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m1;j++)
{
fscanf(fp,"%d \n",&A[i][j+2*m*Rad]);
// printf("%d",A[i][max-m1+j]);
}
// printf("\n");
}
fclose(fp);

k2=cell3(n1,m,Rad,Time,m1,n,A);
}
}

else if(rep==2)
{
s=0;
fp=fopen(name,"r");
```

```
fscanf(fp,"%d \n",&n1);
fscanf(fp,"%d \n",&m1);
// s=m1/m;
// printf("It's a particle with %d elements\n",s);
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m1;j++)
{
fscanf(fp,"%d \n",&A[i][j+2*m*Rad]);
printf("%d",A[i][j+2*m*Rad]);
}
printf("\n");
}
fclose(fp);
printf("Enter the elements dimension \n");
    scanf("%d %d",&n1,&m);
    printf("Enter the Radious\n");
    scanf("%d", &Rad);
    printf("Enter the steps\n");
    scanf("%d",&Time);
    printf("Enter the module\n");
    scanf("%d",&n);
    printf("\n");
k3=cell3(n1,m,Rad,Time,m1,n,A);
printf("Do you want to repeat the evolution with Left shift?\nPress
scanf(" %c",&rep2);
if (rep2=='Y')
{
for (i=0;i<max;i++)
{
for (j=0;j<max;j++)
{
A[i][j]=0;
```

```
}
}
fp=fopen("hell3","r");
fscanf(fp,"%d \n",&n1);
fscanf(fp,"%d \n",&m1);
s=m1/m;
printf("It's a particle with %d elements\n",s);
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m1;j++)
{
fscanf(fp,"%d \n",&A[i][max-m1+j]);
}
}
fclose(fp);
k2=cell1(n1,m,Rad,Time,m1,n,A);
}
}

}



int cell1(int n1 ,int m,int Rad,int Time ,int m1,int n,int A[max][m
{
int i,j,A1[max][max];
int C[max][max],c1,S[max][max],c2;
int k,mhden,Temp[max][max],l,S1[max][max],S2[max][max],B[max][max],
k=0;
//Rad : radious
//Time : Time steps
```

```
//A : Evolution Matrix
//n1: number of element's lines
//m: number of element's rows
//m1: number of particle's rows


for (i=0;i<max;i++)
{
for (j=0;j<max;j++)
{

A1[i][j]=0;
C[i][j]=0;
Temp[i][j]=0;
S1[i][j]=0;
S2[i][j]=0;
S[i][j]=0;
B[i][j]=0;
}
}
for (i=0;i<n1;i++)
{
for(j=m*Rad;j<max;j++)
{
B[i][j-(Rad)*m]=A[i][j];
}
}
for (i=0;i<n1;i++)
{
for(j=0;j<max;j++)
{
A[i][j]=B[i][j];
}
```

```
}
for (k=0;k<=Time;k++)
{

printf("To swmatidio A th xronikh stigmh Time=%d\n",k);
printf("\n");

for(i=0;i<n1;i++)
{

for(j=150;j<max-m*(Rad);j++)
{
printf(" %d",A[i][j]);
}
printf("\n");
}
printf("*********************\n");
//Elegxos diastashs me th xrhsh ths prwths mh mhdenikhs sthlhs
/*if (c1<=0)
{ printf("Ektos oriwn\n");
        goto telos;
}*/
// ME8ODOSSSSSSSSSSS!!!!!!!!!!!!!!


count=0;
count2=0;

for(p=m*Rad;p<max-m*Rad;p=p+m)
{


count=0;
```

```
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m;j++)
{
S1[i][j]=0;
S2[i][j]=0;
}
}



for (i=0;i<n1;i++)
{
for (z=p;z<p+m*(Rad+1);z++)
{
if (A[i][z]==0)
count=count+1;
}
}


if (count==(Rad+1)*m*n1)
{

          j=p;
           int elem;
            elem=0;
              do
            {
             mhden=0;

         for (i=0;i<n1;i++)
```

```
      {

       if (A[i][j]==0)
     {
       mhden=mhden+1;
         }
       }

if (mhden==3)
{
j=j+1;
if (j%m==0) elem=elem+1;
}
} while (mhden>=3);

c2=p+elem*m;


for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=c2;j<c2+m;j++)
{

C[i][j-c2]=A[i][j];

}

}


}
else
{
```

```
for (z=p-m*Rad;z<p;z=z+m)
{

count=count+1;
for(i=0;i<n1;i++)
{

for(j=z;j<z+count*m;j++)
{

                      A1[i][j-z]=A[i][j];
S1[i][j-z]=S1[i][j-z]+(A1[i][j-z]);
}
}
}

                 for (z=p;z<=p+m*Rad;z=z+m)
{
count2=count2+1;

for(i=0;i<n1;i++)
{
for(j=z;j<z+count2*m;j++)
{
                      A1[i][j-z]=A[i][j];
S2[i][j-z]=S2[i][j-z]+(A1[i][j-z]%n);

}
}

                   }
                   mhden=0;
```

```
                    for (i=0;i<n1;i++)
                    {
                        for(l=0;l<m;l++)
                        {
                                        S[i][l]=(S1[i][l]+S2[i][l]);
                                        if (S[i][l]==0) mhden=mhden+1
                        }
                    }
                    if (mhden==m*n1)
                    {
                       for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m;j++)
{
A[i][p+j]=0;
}
                       }

                     }
                     else
                     {
  for(i=0;i<n1;i++)
{
for (l=0;l<m;l++)
{
S[i][l]=(S1[i][l]+S2[i][l]+C[i][l])%n;
}
}




     for (i=0;i<n1;i++)
```

```
      {
         for (j=0;j<m;j++)
           {
             A[i][p+j]=S[i][j];
         }

        }
           }


      }
    }

}


telos:
return 0;
}


int cell2(int n1 ,int m,int Rad,int Time ,int m1,int n,int A[max][m
{
int i,j,A1[max][max],c3;
int C[max][max],c1,S[max][max],c2;
int k,mhden,Temp[max][max],l,S1[max][max],S2[max][max],B[max][max],
k=0;
//Rad : radious
//Time : xronika bhmata
//A : O Pinakas mesa ston opoio ginontai oi prakseis twn stoixeiwn
//n1: oi grammes tou ka8e stoixeiou
//m: oi sthles tou ka8e stoixeiou
//m1: to plh8os twn sthlwn tou swmatidiou
```

```
for (i=0;i<max;i++)
{
for (j=0;j<max;j++)
{

A1[i][j]=0;
C[i][j]=0;
Temp[i][j]=0;
S1[i][j]=0;
S2[i][j]=0;
S[i][j]=0;
B[i][j]=0;
}
}

for(i=0;i<n1;i++)
{

for(j=2*Rad*m;j<m1+2*Rad*m;j++)
{
printf(" %d",A[i][j]);
}
printf("\n");
}

//ksekinaei o xronos
for (k=0;k<=Time;k++)
{
for (i=0;i<n1;i++)
{
for(j=0;j<max-m*Rad;j++)
```

```
{
B[i][j+m]=A[i][j];
}
}
for (i=0;i<n1;i++)
{
for(j=0;j<max;j++)
{
A[i][j]=B[i][j];
}
}

for (i=0;i<n1;i++)
{
for(j=0;j<max;j++)
{
B[i][j]=0;
}
}
//Telos elegxou (O A exei kataskeuastei epituxws)
//Metatopizoume ta swmatidia  Rad 8eseis deksia (olis8hsh)
// parakatw briskoume to Ck (prwto mh mhdeniko stoixeio)
j=0;
do
{
mhden=0;




for (i=0;i<n1;i++)
{
```

```
if (A[i][j]==0)
{
mhden=mhden+1;
}
}

if (mhden==3)
{
j=j+1;
}


}while (mhden>=3);
c1=j;
printf("c1= %d \n",c1);
// parakatw briskoume thn teleutaia mh mhdenikh sthlh)
j=max;
do
{
mhden=0;




for (i=0;i<n1;i++)
{

if (A[i][j]==0)
{
mhden=mhden+1;
}
}
```

```
if (mhden==3)
{
j=j-1;
}


}while (mhden>=3);

c3=j;
printf("c3= %d \n",c3);

//Kataxwrhsh tou stoixeiou Ck
printf("\n");
printf("---Ck---\n");

for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=c1;j<c1+m;j++)
{

C[i][j-c1]=A[i][j];
// printf(" %d",C[i][j-c1]);
}
printf("\n");
}


printf("To swmatidio A th xronikh stigmh Time=%d\n",k);
printf("\n");

for(i=0;i<n1;i++)
{
```

```
for(j=2*m*(Rad+1);j<30;j++)
{
printf(" %d",A[i][j]);
}
printf("\n");
}




// ME8ODOSSSSSSSSSSS!!!!!!!!!!!!!!!
// Elegxos diastashs me th xrhsh ths teleutaias mh mhdenikhs sthlhs
if (c3>=max-m*Rad)
{ printf("Ektos oriwn\n");
        goto telos;
}

count=0;
count2=0;
for(p=c1-m*Rad;p<=max-m*Rad;p=p+m)
{


count=0;

for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m;j++)
{
S1[i][j]=0;
S2[i][j]=0;
}
}
```

```
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (z=p;z<=p+m*Rad+1;z++)
{
if (A[i][z]==0)
count=count+1;
}
}


if (count==(Rad+1)*m*n1)
{
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m;j++)
{
A[i][p+j]=0;
}

}
j=p;
do
{
mhden=0;




for (i=0;i<n1;i++)
{
```

```
if (A[i][j]==0)
{
mhden=mhden+1;
}
}

if (mhden==3)
{
j=j+1;
}
} while (mhden>=3);

c2=j;


for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=c2;j<c2+m;j++)
{

C[i][j-c2]=A[i][j];

}

}

}
else
{

for (z=p-m*Rad;z<p;z=z+m)
{
```

```
count=count+1;
for(i=0;i<n1;i++)
{

for(j=z;j<z+count*m;j++)
{

                                        A1[i][j-z]=A[i][j];
S1[i][j-z]=S1[i][j-z]+(A1[i][j-z]);
}
}
}

                                for (z=p;z<=p+m*(Rad);z=z+m)
{
count2=count2+1;

for(i=0;i<n1;i++)
{
for(j=z;j<z+count2*m;j++)
{
                                        A1[i][j-z]=A[i][j];
S2[i][j-z]=S2[i][j-z]+(A1[i][j-z]%n);

}
}

                              }

  for(i=0;i<n1;i++)
{
for (l=0;l<m;l++)
```

```
{
S[i][l]=(S1[i][l]+S2[i][l]+C[i][l])%n;
}
}




for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m;j++)
{
A[i][p+j]=S[i][j];
}

}
}



}
```

```
}



// }

telos:

return 0;
}
int cell3(int n1 ,int m,int Rad,int Time ,int m1,int n,int A[max][m
{
int i,j,A1[max][max],c3;
int C[max][max],c1,S[max][max],c2,count;
int k,mhden,Temp[max][max],l,S1[max][max],S2[max][max],B[max][max],
k=0;
//Rad : radious
//Time : xronika bhmata
//A : O Pinakas mesa ston opoio ginontai oi prakseis twn stoixeiwn
//n1: oi grammes tou ka8e stoixeiou
//m: oi sthles tou ka8e stoixeiou
//m1: to plh8os twn sthlwn tou swmatidiou


for (i=0;i<max;i++)
{
for (j=0;j<max;j++)
{
```

```
A1[i][j]=0;
C[i][j]=0;
Temp[i][j]=0;
S1[i][j]=0;
S2[i][j]=0;
S[i][j]=0;
B[i][j]=0;
}
}

for(i=0;i<n1;i++)
{

for(j=2*m*Rad;j<m1+2*m*Rad;j++)
{
printf(" %d",A[i][j]);
}
printf("\n");
}
//ksekinaei o xronos
for (k=0;k<=Time;k++)
{
for (i=0;i<n1;i++)
{
for(j=0;j<max-m*Rad;j++)
{
B[i][j+m*Rad]=A[i][j];
}
}
for (i=0;i<n1;i++)
{
for(j=0;j<max;j++)
{
```

```
A[i][j]=B[i][j];
}
}
for (i=0;i<n1;i++)
{
for(j=0;j<max;j++)
{
B[i][j]=0;
}
}
j=0;
do
{
mhden=0;




for (i=0;i<n1;i++)
{

if (A[i][j]==0)
{
mhden=mhden+1;
}
}

if (mhden==3)
{
j=j+1;
}
```

```
}while (mhden>=3);
c1=j;
printf("c1= %d \n",c1);
// parakatw briskoume thn teleutaia mh mhdenikh sthlh)
j=max;
do
{
mhden=0;


for (i=0;i<n1;i++)
{

if (A[i][j]==0)
{
mhden=mhden+1;
}
}

if (mhden==3)
{
j=j-1;
}


}while (mhden>=3);

c3=j;
//printf("c3= %d \n",c3);

//Kataxwrhsh tou stoixeiou Ck
printf("\n");
//printf("---Ck---\n");
```

```
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=c1;j<c1+m;j++)
{

C[i][j-c1]=A[i][j];
// printf(" %d",C[i][j-c1]);
}
printf("\n");
}


printf("To swmatidio A th xronikh stigmh Time=%d\n",k);
printf("\n");

for(i=0;i<n1;i++)
{

for(j=c1;j<=c1+m1+m+1;j++)
{
printf(" %d",A[i][j]);
}
printf("\n");
}




// ME8ODOSSSSSSSSSSS!!!!!!!!!!!!!!!
// Elegxos diastashs me th xrhsh ths teleutaias mh mhdenikhs sthlhs
if (c3>=max)
{ printf("Ektos oriwn\n");
```

```
        goto telos;
}

counter1=0;
counter2=0;
for(p=c1-m*Rad;p<max-m*Rad;p=p+m)
{


count=0;

for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m;j++)
{
S1[i][j]=0;
S2[i][j]=0;
}
}



for (i=0;i<n1;i++)
{
for (z=p;z<=p+m*Rad+1;z++)
{
if (A[i][z]==0)
count=count+1;
}
}


if (count==(Rad+1)*m*n1)
```

```
{
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m;j++)
{
A[i][p+j]=0;
}

}
j=p;
do
{
mhden=0;




for (i=0;i<n1;i++)
{

if (A[i][j]==0)
{
mhden=mhden+1;
}
}

if (mhden==3)
{
j=j+1;
}
} while (mhden>=3);

c2=j;
```

```
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=c2;j<c2+m;j++)
{

C[i][j-c2]=A[i][j];

}

}


}
else
{

for (z=p-m*Rad;z<p;z=z+m)
{

counter1=counter1+1;
for(i=0;i<n1;i++)
{

for(j=z;j<z+counter1*m;j++)
{

                                                A1[i][j-z]=A[i][j];
S1[i][j-z]=S1[i][j-z]+(A1[i][j-z]);
}
}
}
```

```
                                    for (z=p;z<=p+m*(Rad);z=z+m)
{
counter2=counter2+1;

for(i=0;i<n1;i++)
{
for(j=z;j<z+counter2*m;j++)
{
                          A1[i][j-z]=A[i][j];
S2[i][j-z]=S2[i][j-z]+(A1[i][j-z]%n);

}
}

                                  }

  for(i=0;i<n1;i++)
{
for (l=0;l<m;l++)
{
S[i][l]=(S1[i][l]+S2[i][l]+C[i][l])%n;
}
}




for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=0;j<m;j++)
{
A[i][p+j]=S[i][j];
```

```
}

}
}



}



}

telos:

return 0;
}

int Cycle_teams()
{
int B[2][max2],i,j,l,m1,n1,m,Rad,s,n2,m2,Time,c1;
```

```
int p,window,window2,stoixeio,z,metrhths,mhdenika,k,stoixeio2,tel;
int mhden,c2,mhden2,stoixeio3;
char name[max];
FILE *fp1,*fp2;
c1=260;
//Mhdenismos Pinakwn
for (i=0;i<2;i++)
{
for (j=0;j<max2;j++)
{
Ac[i][j]=0;
B[i][j]=0;
}
}

for (i=0;i<2;i++)
{
for (j=0;j<3;j++)
{
Skc[i][j]=j+1;
Cc[i][j]=j+1;
}
}
//printf("Enter the Radious\n");
//scanf("%d",&Rad);
Rad=2;
//printf("Dwse taksi omadas\n");
//scanf("%d",&m);
m=3;
printf("Eisagete onoma arxeiou\n");
scanf("%s",name);

//printf("Enter the Steps\n");
```

```
//scanf("%d",&Time);
for (i=0;i<2;i++)
{
for (j=0;j<max2;j=j+3)
{
for(l=j;l<j+3;l++)
{
Ac[i][l]=l-j+1;
B[i][l]=l-j+1;
}
}
}


printf("************");


fp1=fopen(name,"r");
fscanf(fp1,"%d \n",&n1);
fscanf(fp1,"%d \n",&m1);
s=m1/m;
printf("Einai swmatidio me %d stoixeia\n",s);
for (i=0;i<2;i++)
{
for (j=0;j<m1;j++)
{
fscanf(fp1,"%d \n",&Ac[i][max2-m1-m*Rad+j]);
}
}
fclose(fp1);
for (i=1104;i<max2-m*Rad;i=i+m)
{
if (Ac[1][i]==1)
```

```
{
if (Ac[1][i+1]==2)
printf("O ");
else
printf("S4 ");
}
else if (Ac[1][i]==2)
{
if (Ac[1][i+1]==3)
printf("S1 ");
else
printf("S3 ");
}
else
{
if (Ac[1][i+1]==1)
printf("S2 ");
else
printf("S5 ");
}


}
printf("\n \n");
printf("Enter the Radious\n");
scanf("%d",&Rad);
printf("Dwse taksi omadas\n");
scanf("%d",&m);
printf("Enter the Steps\n");
scanf("%d",&Time);
//XRONOSSSSSS
for (k=0;k<=Time;k++)
{
```

```
//Edw htan prin
l=0;
do
{
mhden=0;

if (Ac[0][l]==Ac[1][l])
{
mhden=mhden+1;
}
if (mhden==1)
{
l=l+1;
}

}while (mhden>=1);

c1=l;

if (Ac[0][c1]==1)
{
//Kataxwrhsh tou stoixeiou Ck

 for (i=0;i<n1;i++)
 {
for (j=c1;j<c1+m;j++)
{

Cc[i][j-c1]=Ac[i][j];

}
 }
}
```

```
else
{
//Kataxwrhsh tou stoixeiou Ck

c1=c1-1;
 for (i=0;i<n1;i++)
 {
for (j=c1;j<c1+m;j++)
{

Cc[i][j-c1]=Ac[i][j];

}

 }
}
i=max2-1;

do
{

mhden2=0;

if (Ac[0][i]==Ac[1][i])
{
mhden2=mhden2+1;
}

if (mhden2==1)
{
i=i-1;
}
```

```
}while (mhden2>=1);

tel=i;

if (Ac[0][tel]==2)
tel=tel-1;
else if (Ac[0][tel]==3)
tel=tel-2;

printf("Time=%d     ",k);


for (i=1104;i<max2-m*Rad;i=i+m)
{
if (Ac[1][i]==1)
{
if (Ac[1][i+1]==2)
printf("O ");
else
printf("S4 ");
}
else if (Ac[1][i]==2)
{
if (Ac[1][i+1]==3)
printf("S1 ");
else
printf("S3 ");
}
else
{
if (Ac[1][i+1]==1)
printf("S2 ");
else
```

```
printf("S5 ");
}


}
printf("\n \n");
for (p=c1-m*(Rad);p<tel+m;p=p+m)
{
for (j=0;j<3;j++)
{
Skc[0][j]=j+1;
Sc[0][j]=j+1;
Skc[1][j]=j+1;
Sc[1][j]=j+1;
}
window=0;
mhdenika=0;
for (i=p-m*Rad;i<(p+m*(Rad));i++)
{
if (Ac[1][i]==Ac[0][i])
{
mhdenika=mhdenika+1;
}
}

if (mhdenika==2*Rad*m)
{

for (i=0;i<2;i++)
{
for(j=0;j<3;j++)
{
Ac[i][p+j]=j+1;
```

```
}

}
l=p;

do
{
mhden=0;

if (Ac[0][l]==Ac[1][l])
{
mhden=mhden+1;
}

if (mhden==1)
{
l=l+1;

}

}while (mhden>=1);

c2=l;

if ((Ac[0][c2]==1))
{

for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=c2;j<c2+m;j++)
{

Cc[i][j-c2]=Ac[i][j];
```

```
}

}
}
else if ((Ac[0][c2]!=1))
{
//Kataxwrhsh tou stoixeiou Ck


c2=c2-1;
for (i=0;i<n1;i++)
{
for (j=c2;j<c2+m;j++)
{

Cc[i][j-c2]=Ac[i][j];

}

}

}
}
else
{
for (z=p-m*(Rad);z<p;z=z+m)
{

            Sundiasmoi(z,z+m,5);//Skc sto Ac
            Sundiasmoi(j=z+(Rad)*m,z+(Rad+1)*m,1);//Ac sto Sc
            Sundiasmoi(0,m,2);//Skc sto Sc
```

```
}
 int count=0;
     for (j=0;j<m;j++)
     {
             if (Skc[1][j]==j+1) count++;
         }
if (count==m)
{
       Sundiasmoi(p+m*Rad,p+m*(Rad+1),1);//Ac sto Sc
       Sundiasmoi(0,m,2);//Skc sto Sc
       Sundiasmoi(0,m,3);//Skc sto Cc
       Suzuges(0,m,2); // Suzuges tou Sk


for (i=0;i<2;i++)
{
for(j=0;j<m;j++)
{
Ac[i][p+j]=Sc[i][j];
}
}

}
else
{
        Sundiasmoi(0,m,3);//Skc sto Cc
        Suzuges(p+m*Rad,p+m*(Rad+1),1);//Suzuges Ac
        Sundiasmoi(0,m,2);//Skc sto Sc
Suzuges(0,m,2); //Suzuges tou Sk
for (i=0;i<2;i++)
{
for(j=0;j<m;j++)
{
```

```
Ac[i][p+j]=Sc[i][j];
}
}
}
}

}


}
return 0;
}

void Sundiasmoi(int a1,int a2,int choice)
{
 int j;
 int stoixeio;
 if (choice==1)
 {
  for(j=a1;j<a2;j++)
{
stoixeio=Ac[1][j];
Sc[1][stoixeio-1]=Ac[0][j];
}
 }
 else if(choice==2)
 {
        for(j=a1;j<a2;j++)
{
stoixeio=Skc[1][j]; //Skc sto Sc
Skc[1][j]=Sc[1][stoixeio-1];

}
```

```
  }
  else if (choice==3)
  {
   for(j=a1;j<a2;j++)
{
stoixeio=Skc[1][j]; //Skc to Cc
Skc[1][j]=Cc[1][stoixeio-1];
}

  }
  /*else if (choice==4)
  {
for(j=a1;j<a2;j++)
{
stoixeio=Skc[1][j];//Skc sto Sc
Sc[1][stoixeio-1]=Sc[0][j];

}
  }*/
  else if (choice==5)
  {
       for(j=a1;j<a2;j++)
{
stoixeio=Skc[1][j-a1];//Skc sto Ac
Skc[1][j-a1]=Ac[1][a1+stoixeio-1];
}
  }
}
void Suzuges(int a1,int a2,int choice)
{
     int j,stoixeio;
     if (choice==1)
     {
```

```
          for(j=a1;j<a2;j++)
{
stoixeio=Ac[1][j];
Sc[1][stoixeio-1]=Ac[0][j];
}
     }
     else
     {
        for(j=a1;j<a2;j++)
{
stoixeio=Skc[1][j];//Skc sto Sc
Sc[1][stoixeio-1]=Sc[0][j];

}
     }
}
```