

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ:

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ (OPTIONS)

ΜΑΝΙΟΥΔΑΚΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ

Επιβλέπων : Επίκουρος Καθηγητής **Δάρας Τρύφων**

ΧΑΝΙΑ , 2010

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της συγκεκριμένης μεταπτυχιακής διατριβής δε θα ήταν δυνατή χωρίς την καθοδήγηση και την επίβλεψη του Επίκουρου Καθηγητή κ. Δάρα Τρύφωνα, τον οποίο και θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως. Επίσης, ευχαριστίες οφείλω στην Καθηγήτρια κ. Παπαδοπούλου Έλενα και στον Επίκουρο Καθηγητή κ. Δελή Ανάργυρο για τις πολύτιμες συμβουλές και παρατηρήσεις τους. Τέλος, δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τους γονείς μου, που είναι πάντα δίπλα μου και με στηρίζουν σε κάθε βήμα της ζωής μου.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Κεφάλαιο 1- Πιθανότητα – τυχαίες μεταβλητές - παράγωγα

1.1	Πιθανότητα.....	9
1.2	Δεσμευμένη πιθανότητα	14
1.3	Ανεξαρτησία	15
1.4	Τυχαίες μεταβλητές.....	16
1.5	Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές.....	21
1.6	Δεσμευμένες κατανομές.....	26
1.7	Ροπές πολυδιάστατων τ.μ.	28
1.8	Δεσμευμένη μέση τιμή.....	30
1.9	2-διάστατη Κανονική κατανομή.....	31
1.10	Ανεξαρτησία τ.μ.	33
1.11	Ροπογεννήτριες.....	35
1.12	Παράγωγα	37

Κεφάλαιο 2-Μέση Τιμή

2.1	Παράμετροι κεντρικής τάσης μιας τυχαίας μεταβλητής.....	42
2.2	Μέση τιμή	42
2.3	Ροπές	46
2.4	Γενικός ορισμός μέσης τιμής.....	49

Κεφάλαιο 3-Δεσμευμένη Πιθανότητα

3.1	Εισαγωγή	60
3.2	Ορισμός και εφαρμογές της Δεσμευμένης πιθανότητας.....	60
3.3	Ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας.....	71

Κεφάλαιο 4-Δεσμευμένη Μέση Τιμή

4.1	Εισαγωγή	78
4.2	Ορισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής	79
4.3	Ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής.....	94

Κεφάλαιο 5-Martingale

5.1	Εισαγωγή	110
5.2	Ορισμός Martingale.....	110
5.3	Παραδείγματα των martingales.....	114
5.4	Μετασχηματισμοί Martingale	124
5.5	Submartingales – Supermartingales.....	128
5.6	Χρόνοι τερματισμού-Θεώρημα προαιρετικού τερματισμού	132

Κεφάλαιο 6-Κίνηση Brown

6.1	Κίνηση Brown	138
6.2	Παραλλαγές της Κίνησης Brown.....	146
6.3	Τιμολόγηση των Δικαιωμάτων Προαίρεσης Μετοχών	149
6.4	Το θεώρημα arbitrage	152
6.5	Ο τύπος των Black-Scholes για την Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης	154

Πρόλογος

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα (derivatives) μπορούν να ορισθούν σαν συμβόλαια ή συμφωνίες μεταξύ δύο πλευρών, η αξία των οποίων παράγεται (εξαρτάται) από την αξία άλλων χρηματοοικονομικών προϊόντων (underlying assets), όπως τα ομόλογα, τις μετοχές, τα νομίσματα, τους δείκτες των χρηματιστηρίων κ.α. Η αξία τους δηλαδή συνδέεται και διακυμαίνεται ανάλογα με την τιμή του χρηματοοικονομικού προϊόντος από το οποίο παράγεται. Π.χ. το λεγόμενο δικαίωμα προαίρεσης μιας μετοχής (stock option) είναι ένα παράγωγο, η τιμή του οποίου εξαρτάται από την τιμή της συγκεκριμένης μετοχής. Τα παράγωγα είναι δηλαδή χρηματοοικονομικά εργαλεία με τα οποία μπορεί να κερδίσει ή να χάσει κανείς χρήματα προβλέποντας τις μεταβολές που θα έχουν οι τιμές διαφόρων χρεογράφων (μετοχές, ομόλογα) ή προϊόντων (π.χ. βαμβάκι, σιτάρι, καφές, πετρέλαιο κ.λ.π.).

Δημιουργήθηκαν σαν ένας τρόπος προστασίας των επενδυτών και των επιχειρήσεων από τις απότομες διακυμάνσεις των τιμών στις αγορές προϊόντων, συναλλάγματος, επιτοκίων, πρώτων υλών κ.α. Έτσι, π.χ. εάν μια ελληνική εταιρεία εισαγωγών είναι αναγκασμένη να πληρώσει τυχόν υποχρεώσεις τις σε συνάλλαγμα (π.χ. δολάρια), θα χρησιμοποιήσει ένα απλό παράγωγο για να προφυλαχθεί από μια πιθανή υποτίμηση του ευρώ, συμφωνώντας να αγοράσει συνάλλαγμα την ημέρα της πληρωμής σε προκαθορισμένη τιμή. Αναπτύχθηκαν στην αρχή στην αγορά εμπορευμάτων και αργότερα στην αγορά συναλλάγματος, στις αγορές μετοχών, στα επιτόκια κ.α.

Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα μπορεί να συναντήσει κανείς αρκετούς αιώνες πριν. Πρωτοεμφανίστηκαν το 3.500 π.Χ. όταν οι Φοίνικες εμπορεύονταν προϊόντα και οι συμφωνίες τους βασιζόταν στην αγοραπωλησία μελλοντικών ημερομηνιών. Στην αρχαία Ελλάδα γύρω στο 330 π.Χ. ο φιλόσοφος Θαλής χρησιμοποιώντας τη γνώση της αστρολογίας πρόβλεψε μία ανθηρή συγκομιδή ελιάς για την επόμενη άνοιξη. Υπήρχε μεγάλη προσφορά στην αγορά για ελαιотριβεία το χειμώνα. Ο Θαλής εκμεταλλεύτηκε το γεγονός αυτό μιας και ο ανταγωνισμός δεν υπήρχε καν το χειμώνα και διαπραγματεύτηκε τις τιμές των ελαιотριβείων προκαταβάλλοντας ένα μικρό ποσό για την επιλογή (option) να χρησιμοποιήσει τα ελαιотριβεία την άνοιξη. Η πρόβλεψή του ήταν σωστή και την εποχή της άνοιξης η συγκομιδή ήταν τεράστια με αποτέλεσμα η ζήτηση για τα ελαιотριβεία να φτάσει στο αποκορύφωμα δίνοντας στο Θαλή τη δυνατότητα να ενοικιάσει τα ελαιотριβεία σε πολύ μεγαλύτερες τιμές από αυτές που ο ίδιος τα είχε κλείσει.

Αργότερα, κατά τον 17^ο αιώνα (γύρω στο 1636) τα παράγωγα ξαναεμφανίζονται στην Ολλανδία κατά την εποχή της, λεγόμενης,

τρέλας της τουλίπας. Παραγωγοί και αγοραστές κλείνανε συμφωνίες με προκαταβολές με σκοπό να αγοράσουν και να πωλήσουν σε μελλοντική ημερομηνία συγκεκριμένους τύπους τουλίπας προκειμένου να αντισταθμίσουν (hedge) το κίνδυνό τους στη περίπτωση που η συγκομιδή ήταν φτωχή. Η τρέλα της τουλίπας όμως δε σταμάτησε στις συμφωνίες απλά, αλλά δημιουργήθηκε μία δευτερογενής αγορά και οι κερδοσκόποι βρήκαν την ευκαιρία να κάνουν συναλλαγές βασιζόμενοι σε διακυμάνσεις των τιμών των συμβολαίων της τουλίπας. Οι τιμές των βολβών των τουλιπών εκτινάχτηκαν στα ύψη με αποτέλεσμα το επενδυτικό κοινό να μετακινηθεί σε μία αγορά κερδοσκοπίας, η δε Ολλανδική οικονομία να καταρρεύσει, διότι πολλά αντισυμβαλλόμενα μέρη αθέτησαν στις υποχρεώσεις τους μιας και αδυνατούσαν να εκπληρώσουν τις χρηματικές τους υποχρεώσεις. Η κυβέρνηση δε μπόρεσε να βοηθήσει στην ομαλοποίηση της κατάστασης με επακόλουθο και η οικονομία της να γνωρίσει κρίση, αλλά και τα παράγωγα να δημιουργήσουν μία άσχημη εικόνα στο επενδυτικό κοινό της χώρας και της Ευρώπης.

Τα παράγωγα εμφανίστηκαν και στην Αγγλία, πενήντα χρόνια μετά. Το 1711 η εταιρία της Νότιας Θάλασσας απέκτησε το μονοπώλιο στο εμπόριο με αντάλλαγμα να ξεπληρώσει οφειλές του κράτους προς τρίτους. Η τιμή της μετοχής της εκτοξεύτηκε από 130 λίρες στις 1.000 λίρες το 1720 καθώς η ζήτηση έφτασε στο αποκορύφωμα για τις μονοπωλιακές επιχειρηματικές δραστηριότητες της εταιρίας στη Νότια Θάλασσα. Οι μεγαλομέτοχοι της εταιρίας γρήγορα αντιλήφθηκαν πως τα κέρδη της εταιρίας δεν μπορούσαν να δικαιολογήσουν τη φουσκωμένη τιμή της μετοχής και άρχισαν να ξεπουλούν. Τα νέα αυτά οδήγησαν σε ένα τρελό ξεπούλημα της μετοχής και η μετοχή βρέθηκε γρήγορα στις 150 λίρες. Η εταιρία της Νότιας Θάλασσας είχε ήδη όμως κυκλοφορήσει στην αγορά παράγωγα στη μετοχή της, δίνοντας έτσι το δικαίωμα στους επενδυτές να αγοράσουν ή να πουλήσουν μετοχές της εταιρίας σε προκαθορισμένες τιμές σε μελλοντικές ημερομηνίες. Όταν η μετοχή «κατρακύλησε» απότομα, πολλοί κερδοσκόποι δεν μπορούσαν να εκπληρώσουν τις υποχρεώσεις τους. Το αποτέλεσμα ήταν οι συναλλαγές στα παράγωγα να θεωρηθούν παράνομες, (παρόλα αυτά μικρού όγκου συναλλαγές λαμβάνανε μέρος αλλά παράνομα).

Στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής μετά τη δημιουργία του New York Stock Exchange το 1790, οι επενδυτές είχαν την ανάγκη ύπαρξης ενός οργανωμένου χρηματιστηρίου παραγώγων. Οι χρηματιστηριακές εταιρίες της Wall Street προκειμένου να αποφύγουν τις δυσάρεστες εκπλήξεις που δημιουργήθηκαν στην Ευρώπη, δημοσίευσαν προτάσεις πάνω στις συναλλαγές παραγώγων για το ευρύ επενδυτικό κοινό. Στις αρχές του 1900 τα παράγωγα συναλλασσόταν μεταξύ των ενδιαφερομένων αντισυμβαλλομένων

over the counter δηλαδή όχι στο χρηματιστήριο, αλλά σε ένα οργανωμένο δίκτυο μεγάλων επενδυτών. Αν και υπήρξαν πολλές προσπάθειες για να αναπτυχθεί η αγορά των παραγώγων μέχρι και τις αρχές του 1900 ο όγκος των συναλλαγών ήταν μικρός και αυτό διότι οι τότε επενδυτές τα χρησιμοποιούσαν για κερδοσκοπικούς λόγους περισσότερο με αποτέλεσμα πολλοί κερδοσκόποι να αθετούν στις υποχρεώσεις τους.

Την περίοδο της αρχής του 19^{ου} αιώνα δημιουργήθηκε άλλη μία μόδα στην αγορά παραγώγων τα λεγόμενα bucket shops τα οποία χρεώνανε ένα δολάριο για την αγορά βραχυπρόθεσμων παραγώγων. Εάν η τιμή της μετοχής υποχωρούσε κάτω από ένα ορισμένο επίπεδο το bucket shop κρατούσε τα χρήματα. Το 1920 η εμπιστοσύνη χάθηκε περισσότερο, όταν το επενδυτικό κοινό έμαθε πως κάποιοι διαπραγματευτές δωροδοκούνταν με συμμετοχή σε παράγωγα των μετοχών που προωθούσαν. Με τη χειραγώγηση τέτοιων μετοχών πολλοί μικροί επενδυτές έχασαν περιουσίες.

Το 1929 μετά το ιστορικό κραχ το κογκρέσο στις Ηνωμένες Πολιτείες αποφάσισε να δημιουργήσει ένα σώμα που να επιβλέπει τη διαφάνεια των συναλλαγών στην αγορά. Έτσι δημιουργήθηκε το SEC (**S**ecurities **E**xchange **C**ommission) η λεγόμενη Επιτροπή Κεφαλαιαγοράς στις ΗΠΑ. Στις πρώτες συνεδριάσεις της η Επιτροπή δεν επέτρεψε την διεξαγωγή συναλλαγών για τον λόγο, όπως δήλωναν τα μέλη της ότι δεν μπορούσαν να ξεχωρίσουν ποια παράγωγα ήταν «καλά και κακά». Πέρα όμως από αυτό το κογκρέσο ήταν πολύ ανήσυχο διότι έβλεπε πολλά συμβόλαια να λήγουν χωρίς να εξασκηθούν και καταλάβαιναν πως πολλοί επενδυτές έχαναν σημαντικά κεφάλαια. Ο Filer ο οποίος ήταν διαπραγματευτής (dealer) εκείνης της εποχής ρωτήθηκε από την επιτροπή κεφαλαιαγοράς (το 1934) πως ήταν δυνατόν μόνον ένα 12½ % να εξασκεί τα συμβόλαια και το υπόλοιπο 87½% να χάνει τα χρήματά του. Η απάντησή του ήταν αναλογική προς τους αρμόδιους λέγοντας πως η αγορά των συμβολαίων γινόταν καθαρά προκειμένου να ασφαλιστούν τα χαρτοφυλάκιά τους όπως θα έκανε κάποιος που θα ασφάλιζε το σπίτι του. Τους εξήγησε πως έβλεπαν τα παράγωγα μόνον ως κερδοσκοπικά προϊόντα ενώ θα έπρεπε να τα βλέπουν ως ασφάλειες (hedging) πάνω στα χαρτοφυλάκια. Οι επεξηγήσεις του διαφώτισαν σε μεγάλο βαθμό την επιτροπή και έτσι άλλαξε η εσφαλμένη εντύπωση που είχε δημιουργηθεί ως τότε.

Από τα τέλη περίπου της δεκαετίας του 1959 μέχρι τον Απρίλη του 1973 που δημιουργήθηκε το χρηματιστήριο στο Σικάγο το CBOE (Chicago Board Options Exchange), οι συναλλαγές στα παράγωγα λαμβάνανε μέρος μόνον over the counter. Σε καθημερινή βάση ένας put/call dealer διαφήμιζε κάθε πρωί στη Wall Street Journal τα συμβόλαια εκείνα που είχαν ενδιαφέρον. Έτσι, ο ενδιαφερόμενος

επενδυτής τηλεφωνούσε τον συγκεκριμένο put/call dealer. Υπήρχαν όμως και άλλα προβλήματα, όπως η ημερομηνία λήξης η οποία δεν ήταν σταθερή αλλά δημιουργούνταν την ημέρα της συναλλαγής. Έτσι ήταν δύσκολο για δύο αντισυμβαλλόμενους να έχουν τους ίδιους όρους με αποτέλεσμα να είναι δύσκολο το κλείσιμο θέσεων σε οποιαδήποτε στιγμή. Η μόνη λύση ήταν να βρεθεί ο ίδιος αντισυμβαλλόμενος για να κλείσει η θέση. Η έλλειψη δευτερογενούς αγοράς (secondary market) δημιούργησε την ανάγκη οργανωμένου χρηματιστηρίου παραγώγων.

Το 1969 εισήχθησαν συμβόλαια σε 16 μετοχές μόνον για δικαιώματα αγοράς. Η ανάγκη για ένα σώμα που θα εκκαθάριζε τις συναλλαγές έκανε την εμφάνισή του. Έτσι το 1973 δημιουργήθηκε το **Options Clearing Corporation** προκειμένου να διασφαλίζει την εκκαθάριση των συμβολαίων και να συμβάλει στην ομαλή λειτουργία της αγοράς. Η καθιέρωση συγκεκριμένης ορολογίας και άλλων κριτηρίων βοήθησε να αναπτυχθούν ταχύτατα. Βλέποντας τα άλλα χρηματιστήρια την επιτυχία του CBOE δεν θέλησαν να χάσουν την ευκαιρία της νέας αυτής αγοράς και έτσι χρηματιστήρια όπως το Philadelphia Stock Exchange, το American Stock Exchange, το New York Stock Exchange, το Pacific Stock Exchange, του Montreal, του Sydney και του Toronto ξεκίνησαν τις συναλλαγές στα παράγωγα. Το 1983 εμφανίστηκαν και τα παράγωγα πάνω σε δείκτες με πρώτο τον Standard & Poor's 100. Στη συνέχεια εισήχθησαν παράγωγα πάνω στα ομόλογα στα νομίσματα και στα επιτόκια.

Κατά την δεκαετία του 1970 και 1980, η απελευθέρωση της αγοράς συναλλάγματος, αλλά και η ενασχόληση και η συμβολή ακαδημαϊκών στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων και κυρίως των λεγόμενων δικαιωμάτων προαίρεσης (options), άλλαξαν ριζικά το τοπίο και διέυρυναν σημαντικά την χρήση τους.

Στην Ελληνική αγορά, τα παράγωγα έγιναν γνωστά μετά το 1997 με την δημιουργία του Χρηματιστηρίου Παραγώγων Αθηνών (Νόμος 2533/97). Το πρώτο παράγωγο που δημιουργήθηκε ήταν το Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Futures) στον FTSE/20 που άρχισε να διαπραγματεύεται στις 27 Αυγούστου 1999. Στις 14 Ιανουαρίου του 2000 έκανε την πρεμιέρα του το Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης στο δεκαετές ομόλογο. Μετά την επιτυχία και των δύο ακολούθησε και το Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης στο δείκτη FTSE/40 στις 28 Ιανουαρίου του 2000. Το Σεπτέμβριο του 2000 το πρώτο Δικαίωμα Προαίρεσης (Option) έκανε την εμφάνισή του στο δείκτη FTSE 20. ενώ τον Ιούνιο του 2001 ακολούθησε και το Δικαίωμα Προαίρεσης (Option) στο Mid 40. Το Νοέμβριο του 2001 εισήχθησαν τα Μετοχικά Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης στις μετοχές του ΟΤΕ, Εθνικής Τράπεζας Ελλάδος, 3Ε και τότε Panafon (σημερινή Vodafone). Τον Απρίλιο του 2002 ακολούθησαν τα

μετοχικά ΣΜΕ στις Alpha Bank και Intracom. Στις 31 Αυγούστου 2002, το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών και το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών συγχωνεύτηκαν με τη νέα επωνυμία ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΟ ΑΘΗΝΩΝ Α.Ε. με σκοπό την υποστήριξη και παρακολούθηση συναλλαγών επί κινητών αξιών και παραγώγων προϊόντων, λοιπών χρηματιστηριακών προϊόντων, τη διασφάλιση της εύρυθμης λειτουργίας της αγοράς και τη προστασία του επενδυτικού κοινού καθώς και κάθε άλλη συναφή δραστηριότητα.

Σήμερα, τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα χρησιμοποιούνται από αυτούς που παίρνουν μέρος στις αγορές χρήματος και κεφαλαίου, με σκοπό να επιτευχθεί η μείωση του ρίσκου, ο περιορισμός του κόστους των συναλλαγών και η διαφοροποίηση της φύσης της χρηματοοικονομικής «έκθεσης» σε κίνδυνο. Αντιμετωπίζονται διαφορετικά από αυτούς που τα χρησιμοποιούν σε σχέση με αυτούς που τα μελετούν. Έτσι, οι οικονομολόγοι τα θεωρούν σαν εργαλεία για την διαχείριση του επενδυτικού ρίσκου, οι διαχειριστές των χαρτοφυλακίων σαν μέσο πραγματοποίησης κερδών ενώ οι dealers σαν ένα τρόπο είσπραξης της διαφοράς μεταξύ αγοράς και πώλησης ενός προϊόντος. Ακόμα, τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα προσφέρουν την δυνατότητα εύκολης και γρήγορης πραγματοποίησης συναλλαγών, ενώ μειώνοντας τον πιστωτικό κίνδυνο παρέχουν στις επιχειρήσεις τη δυνατότητα χρηματοδότησής τους με χαμηλό κόστος.

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα χωρίζονται σε **κατηγορίες** ανάλογα:

- Με την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο παράγωγο και το προϊόν (underlying asset) από το οποίο εξαρτάται η αξία του (**Προθεσμιακά συμβόλαια / forward contracts, Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης / future contracts, Δικαιώματα προαίρεσης / options, Συμφωνίες ανταλλαγής / swaps**).
- Με τον τύπο του προϊόντος (underlying asset) από το οποίο εξαρτάται η αξία τους (π.χ. equity derivatives, foreign exchange derivatives, interest rate derivatives, commodity derivatives ή credit derivatives)
- Με το αν πραγματοποιούνται σε οργανωμένη αγορά ή όχι (exchange-traded ή over-the-counter)
- Με τον τρόπο εξόφλησης ή πληρωμής τους

Έτσι, έχουμε:

- **Προθεσμιακά συμβόλαια** (forward contracts) και **Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης** (future contracts).

Ένα **προθεσμιακό συμβόλαιο** (forward contract) είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλόμενων μερών για παράδοση και πληρωμή ενός συγκεκριμένου περιουσιακού στοιχείου σε συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία και σε μια προσυμφωνημένη τιμή. Η συμφωνία γίνεται, απευθείας, μεταξύ των ενδιαφερόμενων μερών χωρίς την ύπαρξη οργανωμένης αγοράς. Όταν τέτοιες συμβάσεις γίνονται μέσα από οργανωμένη αγορά, τότε μιλάμε για **Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης** (Future contracts), τα οποία είναι τυποποιημένα συμβόλαια και καθορίζουν την παράδοση και την πληρωμή ενός συγκεκριμένου προϊόντος μέσω ενός κεντρικού «εκκαθαριστικού» οίκου (*clearing house*).

➤ **Δικαιώματα προαίρεσης** (options) και **ομολογοποιημένα δικαιώματα** (warrants).

Τα options είναι συμβόλαια τα οποία δίνουν στον κάτοχο τους (αγοραστή) το δικαίωμα όχι όμως και την υποχρέωση να αγοράσει (δικαίωμα αγοράς / **call option**) ή να πουλήσει (δικαίωμα πώλησης / **put option**) ορισμένη ποσότητα μιας συγκεκριμένης υποκείμενης αξίας σε προκαθορισμένη τιμή (τιμή εξάσκησης / **strike price**) και σε συγκεκριμένη ημερομηνία λήξης (**exercise date**) όταν είναι ευρωπαϊκού τύπου (**european style**), ή οποιαδήποτε στιγμή μεταξύ της ημερομηνίας που έγινε η συμφωνία και της ημερομηνίας λήξης όταν είναι αμερικανικού τύπου (**american style**).

➤ **Συμφωνίες ανταλλαγής** (swaps).

Μια **Συμφωνία ανταλλαγής** (swap) είναι μια συμφωνία ανάμεσα σε δύο οργανισμούς ή εταιρείες για την ανταλλαγή **μετρητών** σε προκαθορισμένα μελλοντικά χρονικά σημεία. Η συμφωνία περιλαμβάνει: (α) τις ημερομηνίες πληρωμής των μετρητών, (β) τον τρόπο υπολογισμού τους και (γ) το τι παίρνει κάθε ένας από τους οργανισμούς. Οι σπουδαιότερες συμφωνίες ανταλλαγής είναι: (I) **ανταλλαγές επιτοκίων (Interest rate swaps)** και (II) **ανταλλαγές συναλλάγματος (Currency swaps)**.

Ακόμα, τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι τα παράγωγα μπορεί να διαπραγματευθούν μέσα από οργανωμένη αγορά (Χρηματιστήριο) ή εξωχρηματιστηριακά.

Τα **εξωχρηματιστηριακά παράγωγα (Over The Counter (OTC) Derivatives)** είναι διμερείς συμφωνίες οι οποίες διαπραγματεύονται ιδιωτικά και εκτελούνται εκτός οργανωμένων αγορών. Οι συμβαλλόμενοι καταλήγουν σε όρους που ικανοποιούν καλύτερα τις ανάγκες τους και το αμοιβαίο συμφέρον. Τα OTC παράγωγα μπορούν να εφαρμοσθούν σε μεγάλη γκάμα διαφορετικών σκοπών και να

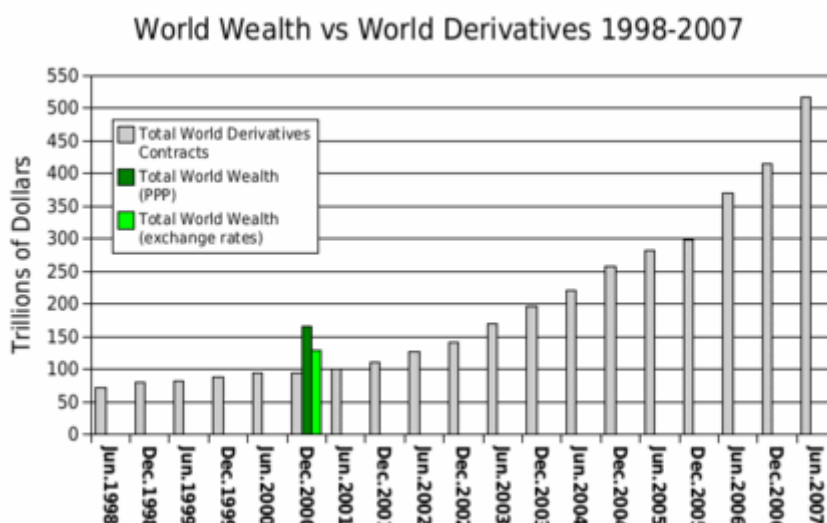
προσαρμοσθούν στις απαιτήσεις των ενδιαφερόμενων μερών. Το γεγονός αυτό περιορίζει την εμπορευσιμότητά τους κατά τη διάρκεια της ζωής τους. Συνήθως ολοκληρώνονται με φυσική παράδοση.

Τα χρηματιστηριακά παράγωγα Exchange Traded Derivatives τελούν υπό διαπραγμάτευση στο πλαίσιο μιας οργανωμένης αγοράς και έχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά:

- Είναι συμβάσεις που καταρτίζονται μεταξύ ενός μέλους και της οργανωμένης αγοράς και κατά συνέπεια ο πιστωτικός κίνδυνος της συναλλαγής αναλαμβάνεται από την αγορά (*clearing house*).
- Κάθε προϊόν είναι τυποποιημένο, δηλαδή έχει **τα ίδια χαρακτηριστικά**. Αυτή η τυποποίηση καθιστά τα προϊόντα ανταλλάξιμα, τους προσδίδει ρευστότητα και δυνατότητα συμψηφισμού και αυξάνει τη **διαφάνεια της αγοράς** αντίθετα με ότι ισχύει στα OTC παράγωγα.

Τα options μπορεί να είναι είτε χρηματιστηριακά, είτε OTC.

Η θεωρία στα χρηματοοικονομικά η οποία άλλαξε με πολλούς τρόπους το αντικείμενο αλλά και την αγορά συνέβη το 1973. Την χρονιά εκείνη οι **Fischer Black & Myron Scholes** δημοσίευσαν στο περιοδικό Journal of Political Economy την εργασία τους - "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*." - για την τιμολόγηση του δικαιώματος προαίρεσης (option pricing) και για τις στρατηγικές εξασφάλισης (hedging strategies) απέναντι σε όλες τις δυνατές εξελίξεις που μπορούν να υπάρξουν, στρατηγικές που μπορούν να εγγυηθούν την εξασφάλιση, με βάση την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους (arbitrage). Την εργασία τους γενίκευσε την ίδια χρονιά ο **Robert Merton**.



Παγκόσμιος πλούτος και συμβόλαια παραγώγων

Η θεωρία των Black & Scholes δεν έγινε εύκολα αποδεκτή στην αρχή τόσο στο οικονομικό όσο και στο επιστημονικό περιβάλλον. Με τον καιρό οι απόψεις τους αφομοιώθηκαν από την επιστημονική κοινότητα, δημιουργήθηκε δε από άλλους σύνδεση της χρηματοοικονομικής θεωρίας με την θεωρία των martingales στις στοχαστικές διαδικασίες. Από τότε τόσο η αγορά των παραγώγων όσο και τα μαθηματικά οικονομικά αναπτύχθηκαν ταχύτατα (δείτε παραπάνω σχήμα).

Η αναγνώριση της θεωρίας των Black & Scholes ήρθε το 1977, με την απονομή του βραβείου νόμπελ οικονομίας στους (επιβιώσαντες) Scholes και Merton.

Η μαθηματική θεωρία των χρηματοοικονομικών παραγώγων απαιτεί σοβαρές γνώσεις από τις Πιθανότητες και την θεωρία μέτρου, τις στοχαστικές διαδικασίες (διαδικασίες Markov και martingales), το στοχαστικό ολοκλήρωμα, τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις κ.α.

Η (χωρίς βέβαιο κέρδος / arbitrage-free) τιμολόγηση παραγώγων, δηλαδή ο προσδιορισμός της (παρούσας) αξίας τους είναι διαδικασία περίπλοκη, και υπάρχουν πολλές διαφορετικές μεταβλητές τις οποίες πρέπει κανείς να λάβει υπ' όψιν. Η τιμολόγηση αυτή είναι το κεντρικό θέμα των οικονομικών μαθηματικών. Η Στοχαστική διαδικασία της τιμής του χρηματοοικονομικού προϊόντος με το οποίο συνδέεται το παράγωγο, είναι το βασικό στοιχείο στην μελέτη της τιμολόγησης, η δε εξίσωση των Black-Scholes είναι το σπουδαιότερο εργαλείο που έχει κανείς στα χέρια του. Ένα απλοποιημένο μοντέλο τιμολόγησης είναι το λεγόμενο **Διωνυμικό μοντέλο** (binomial model). Δεδομένου ότι τα περισσότερα από αυτά τα χρηματοοικονομικά προϊόντα δεν πραγματοποιούνται σε οργανωμένες αγορές, δεν υπάρχουν διαθέσιμες τιμές παραγώγων που θα μπορούσαν να εξεταστούν αν επαληθεύουν το θεωρητικό μοντέλο.

Στην διπλωματική αυτή εργασία περιγράφονται αναλυτικά όλα εκείνα τα μαθηματικά εργαλεία (όπως μέση τιμή, δεσμευμένη πιθανότητα, δεσμευμένη μέση τιμή, διαδικασίες martingales, κίνηση Brown) τα απαραίτητα για την **μελέτη της τιμολόγησης ενός δικαιώματος προαίρεσης σε διακριτό χρόνο** (του λεγόμενου τύπου Black & Scholes).

Κεφάλαιο 1° Πιθανότητα – τυχαίες μεταβλητές - παράγωγα

1.1 Πιθανότητα

Κύριο στοιχείο της Θεωρίας Πιθανοτήτων είναι το **πείραμα**. Για να μπορέσει κανείς να μοντελοποιήσει όσο το δυνατόν περισσότερα πραγματικά προβλήματα, ο ορισμός του είναι αρκετά ευρύς.

Ορισμός 1

Σαν **πείραμα** εννοούμε μια διαδικασία: η οποία μπορεί να **επαναληφθεί** άπειρες φορές, κάτω από τις **ίδιες συνθήκες**, και στο τέλος της οποίας παρατηρούμε ορισμένα **αποτελέσματα**.

Η ρίψη ενός κανονικού νομίσματος με δύο όψεις, ο αριθμός των αυτοκινήτων που περνούν από μια «θύρα» διοδίων σ' ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα, το ύψος των παιδιών μιας περιοχής, μπορούν να θεωρηθούν πειράματα.

Τα πειράματα μπορούν να χωρισθούν σε δύο κατηγορίες: (α) **Αιτιοκρατικά** τα οποία *έχουν ένα δυνατό αποτέλεσμα*, το οποίο είναι γνωστό πριν ακόμα εκτελεστεί το πείραμα, και έτσι δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον (β) **πειράματα τύχης** τα οποία *έχουν περισσότερα του ενός δυνατά αποτελέσματα*, οπότε δεν είναι δυνατόν να είναι γνωστό το αποτέλεσμα πριν από την εκτέλεση του πειράματος. Με τέτοιου είδους πειράματα ασχολείται κανείς στην Θεωρία Πιθανοτήτων.

Ορισμός 2

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης καλείται **δειγματοχώρος** του πειράματος (συμβολίζεται με Ω). Κάθε ένα από τα δυνατά αποτελέσματα του π.τ. καλείται **απλό γεγονός ή δειγματοσημείο**. Αν τώρα $A \subseteq \Omega$, το A καλείται **γεγονός**. Το $\emptyset$ σύνολο καλείται το **αδύνατο** γεγονός, ενώ το Ω το **βέβαιο** γεγονός. Γενικότερα όμως, εάν $A \subseteq \Omega$, τότε το A καλείται **γεγονός** εάν ανήκει σε μία κλάση $\mathfrak{I}$ υποσυνόλων του δειγματοχώρου Ω , η οποία κλάση είναι μια **σ -άλγεβρα** και την οποία ονομάζουμε **σ -άλγεβρα των γεγονότων**. Σε μερικά πειράματα τύχης, υπάρχουν δηλαδή υποσύνολα του δειγματοχώρου στα οποία δεν μπορεί να ορισθεί πιθανότητα.

Ορισμός 3

Μια κλάση $\mathfrak{I}$ υποσυνόλων του Ω καλείται **σ -άλγεβρα** ή **σ -σώμα** εάν:

- (1) η κλάση $\mathfrak{I}$ είναι μη-κενή (δηλαδή περιέχει ένα τουλάχιστον υποσύνολο του Ω).
- (2) Εάν το σύνολο $A \in \mathfrak{I}$, τότε συνεπάγεται ότι και το $A^c \in \mathfrak{I}$.

(3) Εάν τα σύνολα $A_n \in \mathfrak{I}$, $n=1,2,\dots$ (αριθμήσιμο πλήθος συνόλων)

τότε έπεται ότι και το σύνολο $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathfrak{I}$.

Παρατήρηση 1

(α) Εάν η κλάση $\mathfrak{I}$ είναι μία σ-άλγεβρα και τα σύνολα $A_n \in \mathfrak{I}$, $n=1,2,\dots$, τότε έπεται ότι και το σύνολο $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathfrak{I}$ (αριθμήσιμες τομές).

(β) Το $\emptyset$ (οπότε και το Ω) ανήκει πάντα σε μια, οποιαδήποτε, σ-άλγεβρα του Ω .

Παράδειγμα 1

(1) Η κλάση $\mathfrak{I}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ είναι μια σ-άλγεβρα. Είναι η μικρότερη δυνατή και καλείται **τετριμμένη** σ-άλγεβρα. Ακόμα, η $\mathfrak{I}_3 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\text{ολα τα υποσύνολα του } \Omega\}$ είναι μια σ-άλγεβρα. Είναι η μεγαλύτερη δυνατή και καλείται **δυναμοσύνολο** του Ω ή **διακριτή** σ-άλγεβρα.

(2) Η κλάση $\mathfrak{I}_2 = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$, όπου $A \subseteq \Omega$ είναι μια σ-άλγεβρα. Είναι η μικρότερη δυνατή, μετά την τετριμμένη σ-άλγεβρα. ■

Πρόταση 1

Εάν για κάθε $i \in I$, όπου I ένα σύνολο δεικτών, η $\mathfrak{I}_i$ είναι μια σ-άλγεβρα, τότε κλάση $\mathfrak{I} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{I}_i$ είναι μια σ-άλγεβρα.

Θεώρημα 1

Εάν $\mathcal{C}$ είναι μια οποιαδήποτε κλάση υποσυνόλων του Ω , τότε υπάρχει μία μοναδική ελάχιστη (μικρότερη δυνατή) σ-άλγεβρα $\mathfrak{I}$ που περιέχει την $\mathcal{C}$. Η σ-άλγεβρα $\mathfrak{I}$ καλείται σ-άλγεβρα που **παράγεται** ή **γεννιέται** από την κλάση $\mathcal{C}$ (συμβολίζεται με $\mathfrak{I} = \sigma(\mathcal{C})$)).

Απόδειξη

Έστω $\{\mathfrak{I}_i\}_{i \in I}$ η οικογένεια όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την κλάση $\mathcal{C}$. Η οικογένεια αυτή είναι μη-κενή αφού περιέχει την διακριτή σ-άλγεβρα. Εάν:

$$\mathfrak{I} = \sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{I}_i$$

τότε από την προηγούμενη πρόταση η $\mathfrak{I}$ είναι μία σ-άλγεβρα. Είναι η μικρότερη δυνατή, αφού κάθε άλλη σ-άλγεβρα που περιέχει την

κλάση $\mathcal{C}$, θα είναι μία από τις σ-άλγεβρες $\mathfrak{I}_j$, οπότε $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{I}_i \subseteq \mathfrak{I}_j$.
Είναι φανερό ότι η $\mathfrak{I} = \sigma(\mathcal{C})$ είναι και μοναδική.

■

Παράδειγμα 2

(α) Εάν $\mathcal{C}$ είναι μια σ-άλγεβρα, τότε $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C})$.

(β) Εάν $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$ ή $\mathcal{C} = \{\Omega\}$, τότε: $\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega\}$

(γ) **(σ-άλγεβρα του Borel)** Εάν $\Omega = \mathbb{R}$ και θεωρήσουμε σαν κλάση $\mathcal{C}$ την :

$$\mathcal{C} = \{\text{όλα τα διαστήματα του } \mathbb{R}\}$$

$$= \{[x, y], (x, y], (x, y), [x, y), [x, +\infty), (-\infty, x], (x, +\infty), (-\infty, x) : x, y \in \mathbb{R}, x < y\}$$

τότε η σ-άλγεβρα που γεννιέται από την κλάση $\mathcal{C}$ καλείται **σ-άλγεβρα του Borel** στο $\mathbb{R}$ (συμβολίζεται με $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Μπορεί να δειχθεί ότι η σ-άλγεβρα του Borel παράγεται από κάθε μία από τις παραπάνω κλάσεις.

$$\mathcal{C}_1 = \{[x, y] : x, y \in \mathbb{R}, x < y\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{(x, y] : x, y \in \mathbb{R}, x < y\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x < y\},$$

$$\mathcal{C}_4 = \{[x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x < y\}, \quad \mathcal{C}_5 = \{[x, +\infty) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C}_6 = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{C}_7 = \{(x, +\infty) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C}_8 = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

Η σ-άλγεβρα του Borel είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του δυναμοσυνόλου του $\mathbb{R}$, ($\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι Borel μετρήσιμα.

(δ) Εάν $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και θεωρήσουμε την κλάση των συνόλων

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = & \{[x_1, y_1] \times [x_2, y_2], (x_1, y_1] \times [x_2, y_2], [x_1, y_1) \times [x_2, y_2], (x_1, y_1) \times [x_2, y_2], \dots \\ & (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2], (-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2], (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2), (-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \\ & [x_1, +\infty) \times [x_2, +\infty), (x_1, +\infty) \times [x_2, +\infty), [x_1, +\infty) \times (x_2, +\infty), (x_1, +\infty) \times (x_2, +\infty) : \\ & x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}, x_1 < y_1 \text{ \& } x_2 < y_2\} \end{aligned}$$

τότε η σ-άλγεβρα που γεννιέται από την κλάση $\mathcal{C}$ καλείται **σ-άλγεβρα του Borel** στο $\mathbb{R}^2$ ή σ-άλγεβρα του **Borel 2-διαστάσεων** (συμβολίζεται με $\mathcal{B}^2(\mathbb{R})$).

■

Σ' ένα πείραμα τύχης δεν είναι δυνατόν να προβλεφθεί εκ των προτέρων το ποιο ακριβώς αποτέλεσμα θα συμβεί. Θα θέλαμε να μπορούσαμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ένα από αυτά τα (δυνατά) αποτελέσματα έναν αριθμό, τον οποίο θα καλούμε **πιθανότητα του απλού γεγονότος** και ο οποίος θα μας φανέρωνε *το πόσο δυνατόν είναι να συμβεί το εν λόγω γεγονός*.

Ορισμός 4

Έστω Ω ο δειγματοχώρος ενός π.τ. και $\mathfrak{I}$ μια σ -άλγεβρα γεγονότων του. Μια συνολοσυνάρτηση:

$$P: \mathfrak{I} \rightarrow [0, 1]$$

καλείται **πιθανότητα** ή (ακριβέστερα) **μέτρο πιθανότητας**, εάν ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις.

(Π1) (**μη-αρνητικότητα**) $P(A) \geq 0$, για κάθε $A \in \mathfrak{I}$.

(Π2) (**κανονικότητα**) $P(\Omega) = 1$.

(Π3) (**σ -προσθετικότητα**) Εάν $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι μια ακολουθία ανά δύο ξένων γεγονότων, δηλαδή $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{I}$ τ.ω. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, τότε:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Παράδειγμα 3 (ομοιόμορφη πιθανότητα)

Εάν ο δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης είναι ίσος με:

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

και κάνουμε την αντιστοίχιση: $P(\{a_j\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{C(\Omega)}$ $j=1, 2, \dots, n$

όπου $C(\Omega)$ ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου Ω (**πληθάριθμος** του Ω).

Ακόμα, εάν: $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ τότε η **πιθανότητα του γεγονότος A**, είναι λογικό να είναι ίση με:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{C(A)}{C(\Omega)}$$

(σαν σ -άλγεβρα παίρνουμε το **δυναμοσύνολο** του Ω , οπότε κάθε υποσύνολο του είναι γεγονός). ■

Παράδειγμα 4

Έστω ότι το $\Omega = [0, 1]$, $\mathfrak{I} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ η σ -άλγεβρα του Borel και $P((a, b]) = b - a$, $0 \leq a \leq b \leq 1$ (δηλαδή η πιθανότητα ενός διαστήματος είναι ίση με το **μήκος** του διαστήματος). Το P καλείται **μέτρο πιθανότητας του Borel**. ■

Πρόταση 2

Έστω Ω ο δειγματοχώρος ενός π.τ., $\mathfrak{F}$ μια σ -άλγεβρα γεγονότων του και P ένα μέτρο πιθανότητας στον χώρο Ω . Εάν A, B δύο γεγονότα ($A, B \in \mathfrak{F}$), τότε:

(i) $P(\emptyset) = 0$.

(ii) $P(A^c) = 1 - P(A)$ (όπου A^c το συμπλήρωμα του συνόλου A).

(iii) (**μονοτονία**) Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$.

(iv) Η **ένωση** δύο γεγονότων A, B , είναι το γεγονός «συμβαίνει ένα τουλάχιστον από τα γεγονότα A, B », είναι δε ίση με:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(v) Η **διαφορά** του γεγονότος A από το B , $B - A = \{x \in B, x \notin A\}$, είναι το γεγονός ότι «συμβαίνει μόνο το γεγονός B », είναι δε ίση με:

$$P(B - A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$$

(vi) Η **συμμετρική διαφορά** των A και B , $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, είναι το γεγονός «συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A, B », είναι δε ίση με:

$$P(A \Delta B) = P((A - B) \cup (B - A)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

(vii) (**ανισότητα του Boole ή σ -υποπροσθετικότητα**) Εάν $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι μια ακολουθία γεγονότων, όχι απαραίτητα ξένων ανά δύο, τότε:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Για την πιθανότητα της ένωσης γεγονότων, ισχύει γενικότερα το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2

Η πιθανότητα να συμβεί **ένα τουλάχιστον** από τα n γεγονότα $A_1, A_2, \dots, A_n$ δίνεται από την σχέση:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots - (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Το θεώρημα που ακολουθεί μας παρέχει έναν από τους τρόπους υπολογισμού της πιθανότητας του ορίου μιας μονότονης ακολουθίας γεγονότων.

Θεώρημα 3 (συνέχειας του πιθανοθεωρητικού μέτρου)

Εάν $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι μια μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα δηλαδή $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ ή $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ αντίστοιχα) ακολουθία γεγονότων, τότε:

$$(Π3') \quad P(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

Όπου το $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ εάν η ακολουθία των γεγονότων $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα και $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$ εάν η ακολουθία είναι φθίνουσα.

1.2 Δεσμευμένη πιθανότητα

Έστω A, B είναι δυο γεγονότα ενός πειράματος τύχης και έστω ότι το B έχει θετική πιθανότητα να συμβεί (δηλαδή $P(B) > 0$). Μερικές φορές, όταν εκτελούμε το εν λόγω πείραμα, η πληροφορία που παίρνουμε από την πραγματοποίηση του γεγονότος B μπορεί να μας δίνει την δυνατότητα να επαναπροσδιορίσουμε την πιθανότητα του γεγονότος A . Η «νέα» αυτή πιθανότητα του γεγονότος A καλείται **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος A δοθέντος του γεγονότος B** , (συμβολικά $P(A|B)$)

Ορισμός 5

Η **δεσμευμένη πιθανότητα** του γεγονότος A **δοθέντος** του γεγονότος B ορίζεται από την σχέση:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

με την προϋπόθεση ότι η $P(B) > 0$.

Παρατήρηση 2

Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(\cdot|B)$ ικανοποιεί τις τρεις βασικές ιδιότητες του ορισμού της πιθανότητας, δηλαδή αν A, B είναι γεγονότα:

$$(i) \quad 0 \leq P(A|B) \leq 1$$

$$(ii) \quad P(\Omega|B)=1$$

$$(iii) \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \middle| B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B) \quad \text{αν} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

Θεώρημα 4 (Πολλαπλασιαστικό)

Εάν $E_1, E_2, \dots, E_n$ γεγονότα ενός π.τ. τ.ω. $P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) > 0$, τότε ισχύει:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_n | E_{n-1} \cap E_{n-2} \cap \dots \cap E_1) \cdots P(E_3 | E_2 \cap E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)$$

Στην περίπτωση δυο γεγονότων A, B το θεώρημα γίνεται:

$$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

(ισοδύναμα $P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$).

Έστω τώρα ότι $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω , τέτοια ώστε:

$$(a) \quad \Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$(b) \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Γεγονότα που ικανοποιούν τις ιδιότητες (a) και (b) λέμε ότι αποτελούν μια πεπερασμένη **διαμέριση** του δειγματοχώρου Ω .

Θεώρημα 5 (Ολικής Πιθανότητας)

Αν $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω , τα δε $A_1, A_2, \dots, A_n$ αποτελούν διαμέριση του δειγματοχώρου Ω , τότε:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(B | A_k) \cdot P(A_k)$$

1.3 Ανεξαρτησία

Μια από τις βασικές έννοιες που συναντά κανείς στην Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι εκείνη της **ανεξαρτησίας** γεγονότων.

Ορισμός 6

Δύο γεγονότα A, B , του ίδιου πειράματος τύχης, ονομάζονται **ανεξάρτητα**, εάν (δαισθητικά) η πραγματοποίηση του ενός δεν μας

δίνει πληροφορίες για την πραγματοποίηση του άλλου ή ισοδύναμα (αυστηρά μαθηματικά) εάν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ορισμός 7

Τα γεγονότα $A_1, A_2, \dots, A_n$ καλούνται **ανεξάρτητα** εάν ισχύουν οι συνθήκες:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

με $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ & $2 \leq k \leq n$ (δηλαδή η παραπάνω συνθήκη ισχύει για οποιοδήποτε k από τα n γεγονότα).

1.4 Τυχαίες μεταβλητές

Πολλές φορές σε ένα πείραμα τύχης δεν μας ενδιαφέρει ο δειγματοχώρος του, αλλά ένα σύνολο το οποίο είναι αποτέλεσμα μιας απεικόνισης των στοιχείων του δειγματοχώρου στους πραγματικούς αριθμούς (μας ενδιαφέρει π.χ. ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό των στοιχείων του Ω).

Ορισμός 8

Μια συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (στον χώρο Ω έχει οριστεί μια σ -άλγεβρα γεγονότων $\mathfrak{F}$), καλείται **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ.) εάν:

$$X^{-1}(A) = \{\omega / X(\omega) \in A\} \in \mathfrak{F}$$

για κάθε $A \in B(\mathbb{R})$, όπου $B(\mathbb{R})$ η **σ -άλγεβρα** του **Borel** στο $\mathbb{R}$. Η X καλείται επίσης **$\mathfrak{F}$ -μετρήσιμη** συνάρτηση.

Ισοδύναμα, η $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια τ.μ. εάν για κάθε πραγματικό αριθμό x το σύνολο:

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega / X(\omega) \leq x\}$$

είναι ένα γεγονός του Ω , δηλαδή $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathfrak{F}$.

Ορισμός 9

Εάν στον δειγματοχώρο Ω , μαζί με την σ -άλγεβρα του $\mathfrak{F}$, ορίζεται ένα «μέτρο» πιθανότητας P και μια τυχαία μεταβλητή X , τότε ορίζουμε στο $\mathbb{R}$ (στο οποίο είναι ορισμένη η σ -άλγεβρα $B(\mathbb{R})$ του Borel) ένα μέτρο πιθανότητας **L** , ως εξής:

$$L(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega / X(\omega) \in A\})$$

για όλα τα A γεγονότα του $\mathbb{R}$. Το μέτρο πιθανότητας L καλείται **νόμος ή κατανομή** της τ.μ. X . Η συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$F(x)=L((-\infty, x])=P\{X^{-1}((-\infty, x])\}=P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

καλείται **συνάρτηση κατανομής** της τ.μ. X . (γράφουμε F_X). Είναι φανερό ότι:

$$P\{\alpha < X \leq \beta\}=P\{\{-\infty < X \leq \beta\}-\{-\infty < X \leq \alpha\}\}=F_X(\beta)-F_X(\alpha), \quad \alpha \leq \beta$$

Η συνάρτηση κατανομής F_X μιας τ.μ. X έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

Θεώρημα 6

(α) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

(β) Η F_X είναι αύξουσα.

(γ) Η F_X είναι συνεχής από δεξιά σε όλα τα $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή:

$$F_X(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} F_X(t).$$

(δ) $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ και $F_X(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Εάν η $F_X(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x=\alpha$, τότε

$$F_X(\alpha)=F_X(\alpha-) \Rightarrow P\{X=\alpha\}=0.$$

Εάν δύο τ.μ. X και Y έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής, δηλαδή $F_X=F_Y$, τότε λέμε ότι οι τ.μ. είναι **ισόνομες ή ταυτοτικά κατανεμημένες**.

Ανάλογα με το πλήθος των τιμών που μπορεί να λάβουν οι τ.μ., τις διακρίνουμε σε **διακριτές** και **συνεχείς**.

(Α) Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Μια τ.μ. X καλείται **διακριτή** εάν το πλήθος των τιμών της είναι πολύ αριθμήσιμο και κάθε μια από αυτές τις τιμές έχει θετική πιθανότητα. Δηλαδή, αν η X είναι μια διακριτή τ.μ. και παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ (έστω ότι: $x_1 < x_2 < \dots$), τότε οι πιθανότητες:

$$P(\{\omega / X(\omega)=x_k\})=p_k > 0, \quad k=1, 2, \dots.$$

Είναι φανερό ότι: $\sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X=x_k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

Ορισμός 10

Εάν η X είναι μία διακριτή τ.μ, τότε η συνάρτηση $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από:

$$f_X(x_k) = P\{X=x_k\} = P(\{\omega / X(\omega)=x_k\}) = \begin{cases} p_k & x_k \in X(\Omega), k=1,2,\dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

καλείται (συνάρτηση) **πυκνότητας πιθανότητας** (π.π.) της τ.μ. X , και ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$(a) \quad f_X(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_X(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X=x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

Παρατήρηση 3

Η συνάρτηση κατανομής και η πυκνότητα πιθανότητας μιας διακριτής τ.μ. συνδέονται με τις σχέσεις:

$$(i) \quad F_X(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} P\{X=x_k\} = \sum_{x_k \leq x} f_X(x_k)$$

$$(ii) \quad f_X(x_k) = P\{X=x_k\} = P\{X \leq x_k\} - P\{X \leq x_{k-1}\} = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$$

Αναφέρουμε παρακάτω τις σπουδαιότερες διακριτές τ.μ.

(1) Δείκτρια τ.μ

Εάν $A \in \mathfrak{F}$, τότε η **δείκτρια** του A είναι η τ.μ, που ορίζεται από την σχέση:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

(2) Κατανομή Bernoulli

Εάν μια τ.μ. X παίρνει δυο τιμές 1 και 0 με αντίστοιχες πιθανότητες $p, 1-p$, τότε ακολουθεί την **κατανομή Bernoulli** με παράμετρο p . Η π.π. μιας τέτοιας τ.μ. είναι:

$$f_X(k) = \begin{cases} 1-p & k=0 \\ p & k=1 \end{cases}$$

Μία τ.μ. **Bernoulli** περιγράφει ένα πείραμα τύχης (**διωνυμικό**) με δύο δυνατά αποτελέσματα, τα οποία καλούμε **επιτυχία** και **αποτυχία** αντίστοιχα (η επιτυχία αντιστοιχεί στο 1 και η αποτυχία στο 0).

(3) Διωνυμική κατανομή

Μια τ.μ. X ακολουθεί την **διωνυμική κατανομή** με παραμέτρους n και p (συμβολικά $X \approx B(n;p)$), εάν η πυκνότητα πιθανότητας της δίνεται από την:

$$f_X(k) = P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\dots,n$$

Έστω ότι έχουμε ένα διωνυμικό πείραμα τύχης με πιθανότητα επιτυχίας p και ότι: (α) επαναλαμβάνουμε το π.τ., κάτω από τις ίδιες θεωρητικά συνθήκες, n φορές (β) οι επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και (γ) η πιθανότητα επιτυχίας p παραμένει σταθερή, σε κάθε επανάληψη. Εάν η X παριστάνει τον **αριθμό των επιτυχιών** που έχουμε **στις n επαναλήψεις** του διωνυμικού π.τ., τότε η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p .

(4) Κατανομή Poisson

Η τ.μ. X ακολουθεί την **κατανομή Poisson** με παράμετρο λ με $\lambda > 0$ (συμβολικά $X \approx P(\lambda)$), εάν η πυκνότητα πιθανότητας της ισούται με:

$$P\{X=k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Παρατήρηση 4

Ο αριθμός των ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια συγκεκριμένη διασταύρωση κατά την διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος, ο αριθμός των πελατών που φτάνουν σ' ένα σημείο εξυπηρέτησης (αυτοκίνητα σε διόδια, πελάτες στο ταμείο μιας τράπεζας κ.λ.π.), ο αριθμός των αεροπλάνων που φτάνουν σ' ένα μεγάλο αεροδρόμιο, ο αριθμός των τηλεφωνημάτων που φτάνουν στο κέντρο του Ε.Κ.Α.Β. (μια συγκεκριμένη ημέρα), είναι μια τ.μ. X που ακολουθεί (συνήθως) την κατανομή Poisson με κάποια παράμετρο λ .

Ορισμός 11

Έστω ότι μελετάμε ένα φαινόμενο με την βοήθεια μίας **στοχαστικής διαδικασίας απαρίθμησης** $\{N_t\}_{t \geq 0}$, δηλαδή μίας οικογένειας τ.μ. όπου η τ.μ. N_t παριστάνει τον *αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα* $(0, t]$ και έστω ότι:

(α) γεγονότα που συμβαίνουν σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα χρόνου είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα.

- (β) η πιθανότητα να συμβεί ένας αριθμός γεγονότων σ' ένα χρονικό διάστημα είναι ίδια για όλα τα (χρονικά) διαστήματα ίσου μήκους.
 (γ) σ' ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, συμβαίνει ένα το πολύ γεγονός.
 (δ) η πιθανότητα σ' ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα μήκους h να συμβεί ένα ακριβώς γεγονός είναι ίση με λh (για κάποιο αριθμό λ).

τότε η $\{N_t\}_{t \geq 0}$ καλείται στοχαστική **διαδικασία Poisson** με **ρυθμό λ** . Ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σε κάθε διάστημα μήκους t , μπορεί ναδειχθεί ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt , δηλαδή:

$$P\{N_{t+s} - N_s = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \forall s, t \geq 0 \quad \& \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(B) Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 12

Η τ.μ. X καλείται **συνεχής**, εάν το πλήθος των τιμών μιας τ.μ. X είναι ένα μη-αριθμήσιμο σύνολο S , τ.ω. $P\{X=x\}=0, \quad \forall x \in S = X(\Omega)$.

Εάν δοθεί η σ.κ. F_X μιας συνεχούς τ.μ. X , και υπάρχει μια πραγματική μη-αρνητική συνάρτηση $f_X(x)$ τέτοια ώστε:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

όπου F_X η σ.κ. της X , τότε η $f_X(x)$ καλείται **πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. X . Από το γεγονός ότι $F_X(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Εάν η πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ είναι συνεχής σε ένα σημείο x τότε έχουμε:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

(1) Κανονική κατανομή

Ορισμός 13

Μία τ.μ. X ακολουθεί την **κανονική κατανομή** ή **κατανομή του Gauss** με **παραμέτρους** μ και σ ($X \approx N(\mu, \sigma^2)$), εάν η π.π. της είναι ίση με:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Εάν $\mu=0$ και $\sigma=1$ τότε, λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την **τυπική κανονική κατανομή**, $X \approx N(0, 1)$, η δε π.π. είναι ίση με $f_X(x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 3

Αν η τ.μ. $X \approx N(\mu, \sigma^2)$ τότε η τ.μ. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \approx N(0, 1)$.

1.5 Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

Μερικές φορές εξετάζουμε τον δειγματοχώρο ενός πειράματος τύχης ως προς δύο ή περισσότερα χαρακτηριστικά των σημείων του. Π.χ. έστω ότι έχουμε μια ομάδα ατόμων ενός πληθυσμού και μας ενδιαφέρει το ύψος και το βάρος τους. Ο δειγματοχώρος Ω εδώ είναι τα άτομα της ομάδας του πληθυσμού, η δε αντιστοίχιση σε κάθε άτομο της ομάδας του ύψους και του βάρους του γίνεται μέσω μιας (διανυσματικής) συνάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $X = (X_1, X_2)$ όπου η συνάρτηση $X_1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστοιχεί το ύψος και η $X_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστοιχεί το βάρος.

Ορισμός 14

Η **σ -άλγεβρα του Borel** $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ στον χώρο $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ ορίζεται να είναι η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει όλα τα **μετρήσιμα ορθογώνια** του τύπου:

$$(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \dots \times (-\infty, x_n], \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Είναι δηλαδή η τομή όλων των σ -αλγεβρών του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ που περιέχουν την κλάση αυτή.

Έστω $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ένας πιθανοθεωρητικός χώρος.

Ορισμός 15

Μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ καλείται (**n-διάστατη**) **τυχαία μεταβλητή**, εάν $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathbf{X}^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$$

Παρατήρηση 5

(α) Για να εξετάσει κανείς την μετρησιμότητα της X , είναι αρκετό να εξετάσει εάν η παραπάνω σχέση ικανοποιείται για όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια, δηλαδή πρέπει:

$$\mathbf{X}^{-1}((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = \bigcap_{k=1}^n \mathbf{X}_k^{-1}((-\infty, x_k]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$
$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

(β) Εάν το σύνολο τιμών της $\mathbf{X}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο τότε, αντί της $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ παίρνουμε την **διακριτή** σ-άλγεβρα $\wp(X(\Omega))$ (δυναμοσύνολο του $X(\Omega)$).

Παράδειγμα 5

(α) Έστω ότι ρίχνουμε τρία κανονικά νομίσματα. Εάν $X_i, i=1,2,3$ είναι το αποτέλεσμα του i -νομίσματος (υποθέστε ότι $X_i=0$ εάν το αποτέλεσμα είναι Κ ενώ $X_i=1$ εάν το αποτέλεσμα είναι Γ), τότε η $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ είναι μια τριδιάστατη τ.μ. Ο δειγματοχώρος $\Omega = \{(a,b,c) / a,b,c=K,\Gamma\}$.

(β) Έστω ότι ρίχνουμε δύο ζάρια. Εάν X_1 είναι το αποτέλεσμα του 1^{ου} ζαριού και X_2 είναι το αποτέλεσμα του 2^{ου} ζαριού, τότε η $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ είναι μια διδιάστατη τ.μ. Ο δειγματοχώρος $\Omega = \{(n,m) / m,n = 1,2,\dots,6\}$.

■

Ορισμός 16

Εάν $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ μια n -διάστατη τ.μ., η συνάρτηση $L_{\mathbf{X}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0,1]$ που ορίζεται από την σχέση:

$$L_{\mathbf{X}}(A) = P\{\mathbf{X}^{-1}(A)\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

καλείται **κατανομή** της τ.μ. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ή **νόμος** ή **επαγόμενο μέτρο πιθανότητας**. Η $L_{\mathbf{X}}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας. Με την βοήθεια λοιπόν μίας (n -διάστατης) τ.μ.

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ορίζουμε έναν νέο πιθανοθεωρητικό χώρο $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), L_X)$. Η συνάρτηση $F_{X_1, X_2, \dots, X_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\} = \\ &= P\{\omega \in \Omega / X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\} \end{aligned}$$

καλείται **από κοινού συνάρτηση κατανομής (α.κ.σ.κ.)** των τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Πρόταση 4

Αν $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. X_1, X_2 , τότε προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της ότι εάν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$, $\gamma \leq \delta$

$$P\{\alpha < X_1 \leq \beta, \gamma < X_2 \leq \delta\} = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma).$$

Πρόταση 5

Εάν $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ είναι η α.κ.σ.κ. των τ.μ. X_1, X_2 , τότε:

(α) $0 \leq F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \leq 1$

(β) Η $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ είναι αύξουσα ως προς κάθε μια από τις μεταβλητές, δηλαδή για σταθερό x_2 , εάν $\alpha \leq \beta$ τότε:

$$F_{X_1, X_2}(\alpha, x_2) \leq F_{X_1, X_2}(\beta, x_2)$$

Αντίστοιχα, για x_1 σταθερό, αν $\gamma \leq \delta$ τότε:

$$F_{X_1, X_2}(x_1, \gamma) \leq F_{X_1, X_2}(x_1, \delta)$$

(γ) Η $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ είναι συνεχής από δεξιά ως προς κάθε μία από τις μεταβλητές, δηλαδή για σταθερό x_2 (αντ. x_1 σταθερό), η $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ είναι συνεχής ως προς την μεταβλητή x_1 (αντ. x_2).
Ισοδύναμα, με την βοήθεια των ορίων:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_1, X_2}(x_n, y) = F_{X_1, X_2}(x, y) \quad \forall \{x_n\} \downarrow x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_1, X_2}(x, y_n) = F_{X_1, X_2}(x, y) \quad \forall \{y_n\} \downarrow y$$

(δ) Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X_1, X_2}(x, y) = F_{X_1, X_2}(-\infty, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X_1, X_2}(x, y) = F_{X_1, X_2}(x, -\infty) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F_{X_1, X_2}(x, y) = F_{X_1, X_2}(+\infty, +\infty) = 1$$

(ε) Ικανοποιείται η ανισότητα:

$$F_{X_1, X_2}(x_2, y_2) - F_{X_1, X_2}(x_2, y_1) - F_{X_1, X_2}(x_1, y_2) + F_{X_1, X_2}(x_1, y_1) \geq 0, \quad x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$$

Παρατήρηση 6

Από τον ορισμό της α.κ.σ.κ. και την συνέχεια του πιθανοθεωρητικού μέτρου προκύπτει ότι:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X_1, X_2}(x, y) = F_{X_1, X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x)$$

Η σ.κ. $F_{X_1}(x)$ καλείται **περιθωριακή συνάρτηση κατανομής** της τ.μ. X_1 .

(Α) Διακριτές πολυδιάστατες τ.μ.

Έστω $\mathbf{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ μία διδιάστατη τ.μ. και έστω ότι το σύνολο των τιμών της $\mathbf{X}(\Omega) = S \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο (έστω ότι $S = \{(x_k, y_m) / k, m = 0, 1, 2, \dots\}$), τότε η τ.μ. καλείται **διακριτή**.

Ορισμός 17

Εάν ορίσουμε μία συνάρτηση $f_{X_1, X_2}(x, y): S \rightarrow [0, 1]$, από τον τύπο:

$$f_{X_1, X_2}(x, y) = P\{X_1 = x, X_2 = y\}$$

τότε η συνάρτηση αυτή καλείται **από κοινού πυκνότητα πιθανότητας** των τ.μ. X_1, X_2 ή **πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$. Η $f_{X_1, X_2}(x, y)$ είναι όντως μια π.π., δηλαδή ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(i) \quad f_{X_1, X_2}(x_k, y_m) \geq 0 \quad \forall (x_k, y_m) \in S$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_k, y_m) = 1$$

Παρατήρηση 7

(α) Η συνάρτηση $f_{X_1}(x)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$f_{X_1}(x_k) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_k, y_m), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(i) \quad f_{X_1}(x_k) \geq 0, \text{ σαν άθροισμα μη-αρνητικών ποσοτήτων και}$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_{X_1}(x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_k, y_m) = 1$$

δηλαδή είναι η πυκνότητα πιθανότητας μίας τ.μ και μάλιστα της X_1 . Η π.π. $f_{X_1}(x)$, καλείται **περιθωριακή πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. X_1 .

(β) Εάν υποθέσουμε ότι: $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ & $y_0 < y_1 < y_2 < \dots$, τότε η α.κ.σ.κ $F_{X_1, X_2}(x, y)$ συνδέεται με την α.κ.π.π. $f_{X_1, X_2}(x, y)$ με την σχέση:

$$F_{X_1, X_2}(x, y) = \sum_{t_1 \leq x} \sum_{t_2 \leq y} f_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \begin{cases} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^r f_{X_1, X_2}(x_i, y_j) & x_l \leq x < x_{l+1}, y_r \leq y < y_{r+1} \\ 0 & -\infty < x < x_0, -\infty < y < +\infty \text{ ή } \\ & -\infty < x < +\infty, -\infty < y < y_0 \end{cases}$$

η δε α.κ.π.π. $f_{X_1, X_2}(x, y)$ συνδέεται με την α.κ.σ.κ $F_{X_1, X_2}(x, y)$ με την σχέση:

$$f_{X_1, X_2}(x_m, y_n) = F_{X_1, X_2}(x_m, y_n) - F_{X_1, X_2}(x_{m-1}, y_n) - F_{X_1, X_2}(x_m, y_{n-1}) + F_{X_1, X_2}(x_{m-1}, y_{n-1}),$$

$$k, m = 0, 1, 2, \dots \text{ και } x_{-1} = y_{-1} = -\infty.$$

(B) Συνεχείς τ.μ.

Ορισμός 18

Μία (διδιάστατη) τ.μ $\mathbf{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ καλείται **συνεχής**, εάν υπάρχει μια συνάρτηση $f_{X_1, X_2}(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ τ.ω.

$$(i) \quad f_{X_1, X_2}(x, y) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x, y) dx dy = 1, \quad \text{και ισχύει:}$$

$$P\{a < X_1 \leq b, c < X_2 \leq d\} = \int_c^d \int_a^b f_{X_1, X_2}(x, y) dx dy, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \text{ & } c \leq d$$

Η συνάρτηση $f_{X_1, X_2}(x, y)$ καλείται **από κοινού πυκνότητα πιθανότητας (α.κ.π.π.)** των τ.μ. X_1, X_2 . Η **από κοινού συνάρτηση κατανομής (α.κ.σ.κ.)** $F_{X_1, X_2}(x, y)$ των τ.μ. X_1, X_2 ορίζεται από την σχέση:

$$F_{X_1, X_2}(x, y) = P\{X_1 \leq x, X_2 \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X_1, X_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Εάν η $f_{X_1, X_2}(x, y)$ είναι συνεχής στο σημείο (x, y) , τότε:

$$f_{X_1, X_2}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X_1, X_2}(x, y).$$

Παρατήρηση 8

Η συνάρτηση $f_{X_1}(x)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x, y) dy$$

ικανοποιεί τις σχέσεις:

(i) $f_{X_1}(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, σαν ολοκλήρωμα μη-αρνητικής συνάρτησης και

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x, y) dx dy = 1$$

είναι δηλαδή μία πυκνότητα πιθανότητας και μάλιστα της τ.μ X_1 , γιατί:

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X_1, X_2}(x, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X_1, X_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x f_{X_1, X_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(t_1, t_2) dt_2 \right) dt_1 = \int_{-\infty}^x f_{X_1}(t_1) dt_1 \end{aligned}$$

Η π.π. $f_{X_1}(x)$ καλείται **περιθωριακή πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. X_1 .

1.6 Δεσμευμένες κατανομές

Ορισμός 19

Έστω $\mathbf{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ είναι μία διακριτή τ.μ. με α.κ.π.π. $f_{X_1, X_2}(x, y)$ και $f_{X_2}(x)$ περιθωριακή πυκνότητα πιθανότητας της X_2 . Εάν για κάθε y_m , $m=0, 1, 2, \dots$ τ.ω. $f_{X_2}(y_m) > 0$ ορίσουμε την συνάρτηση $f_{X_1, X_2}(\cdot | y_m)$ από την σχέση:

$$f_{X_1|X_2}(x_i | y_m) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_i, y_m)}{f_{X_2}(y_m)} = P\{X_1 = x_i | X_2 = y_m\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

τότε η $f_{X_1, X_2}(\cdot | y_m)$ είναι μια π.π., γιατί:

(i) $f_{X_1|X_2}(x_i | y_m) > 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$

$$(ii) \sum_{i=0}^{\infty} f_{X_1|X_2}(x_i|y_m) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_i, y_m)}{f_{X_2}(y_m)} = \frac{f_{X_2}(y_m)}{f_{X_2}(y_m)} = 1$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται **δεσμευμένη (ή υπό συνθήκες) πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. X_1 **δοθέντος** ότι $X_2=y_m$. Η **δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X_1 δοθέντος ότι $X_2=y_m$** , μπορεί ναδειχθεί ότι ισούται με (στην περίπτωση που $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ & $y_0 < y_1 < y_2 < \dots$):

$$F_{X_1|X_2}(x|y_m) = \sum_{x_k \leq x} f_{X_1|X_2}(x_k|y_m) = \frac{F_{X_1, X_2}(x, y_m) - F_{X_1, X_2}(x, y_{m-1})}{F_{X_2}(y_m) - F_{X_2}(y_{m-1})}$$

$$= P\{X_1 \leq x | X_2 = y_m\}, x \in \mathbb{R}$$

Ορισμός 20

Έστω $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $X = (X_1, X_2)$ είναι μία συνεχής τ.μ. με α.κ.π.π. $f_{X_1, X_2}(x, y)$ και $f_{X_2}(x)$ περιθωριακή πυκνότητα πιθανότητας της X_2 . Εάν για κάθε $y \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f_{X_2}(y) > 0$, ορίσουμε την συνάρτηση $f_{X_1, X_2}(\cdot|y)$ από την σχέση:

$$f_{X_1|X_2}(x|y) = \frac{f_{X_1, X_2}(x, y)}{f_{X_2}(y)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

τότε η $f_{X_1, X_2}(\cdot|y)$ είναι μια π.π., γιατί:

$$(i) f_{X_1|X_2}(x|y) \geq 0$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1|X_2}(x|y) dx = \frac{1}{f_{X_2}(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x, y) dx = \frac{1}{f_{X_2}(y)} f_{X_2}(y) = 1$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται **δεσμευμένη (ή υπό συνθήκες) πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. X_1 **δοθέντος** ότι $X_2=y$. Η **δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X_1 δοθέντος ότι $X_2=y$** , μπορεί ναδειχθεί ότι ισούται με:

$$F_{X_1|X_2}(x|y) = \frac{\frac{\partial F_{X_1, X_2}(x, y)}{\partial y}}{\frac{dF_{X_2}(y)}{dy}}$$

1.7 Ροπές πολυδιάστατων τ.μ.

Εάν X_1, X_2 δύο τ.μ. και $g(x,y), g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, μια (μετρήσιμη) πραγματική συνάρτηση, τότε η $X = g(X_1, X_2)$ είναι μία τ.μ.

Πρόταση 6

Η μέση τιμή της τ.μ. $X = g(X_1, X_2)$ δίνεται από την σχέση:

$$EX = Eg(X_1, X_2) = \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} g(x_1, x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) & X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

με την προϋπόθεση ότι τα αθροίσματα και τα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους συγκλίνουν απόλυτα.

Ορισμός 21

(α) Εάν η $g(X_1, X_2) = (X_1 - a)^m (X_2 - b)^n$, $m, n = 0, 1, 2, \dots, a, b \in \mathbb{R}$, τότε η μέση της τιμή:

$$E[(X_1 - a)^m (X_2 - b)^n] = \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} (x_1 - a)^m (x_2 - b)^n f_{X_1, X_2}(x_1, x_2), & X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - a)^m (x_2 - b)^n f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

καλείται **(μικτή) ροπή (m,n)-τάξης** των τ.μ. X_1, X_2 , **γύρω από το σημείο (a,b)**.

(β) Εάν η $g(X_1, X_2) = X_1^m X_2^n$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$, τότε η μέση της τιμή:

$$\mu'_{m,n} = E[X_1^m X_2^n] = \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1^m x_2^n f_{X_1, X_2}(x_1, x_2), & X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^m x_2^n f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

καλείται **(μικτή) ροπή (m,n)-τάξης** των τ.μ. X_1, X_2 , **γύρω από την αρχή (0,0)**.

Όλες οι παραπάνω ποσότητες (ορισμοί) έχουν νόημα όταν τα αθροίσματα ή τα ολοκληρώματα των δεξιών μελών είναι πεπερασμένα. Εάν $E(X_1 X_2) = 0$, τότε οι τ.μ. X_1, X_2 καλούνται **ορθογώνιες**. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η **κεντρική ροπή (1,1)-τάξης**.

Ορισμός 22

Η **συνδιασπορά** ή **συσκέδαση** των τ.μ X_1, X_2 ορίζεται να είναι ο αριθμός:

$$C(X_1, X_2) = E[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)] = E(X_1 X_2) - EX_1 EX_2$$

Η συνδιασπορά $C(X_1, X_2)$ είναι ένα **μέτρο** της **συσχέτισης** των τ.μ X_1, X_2 (π.χ όταν $C(X_1, X_2) > 0$, τότε εάν η μια τ.μ. αυξάνει τότε αυξάνει και η άλλη κατά μέσον όρο). Εάν $C(X_1, X_2) = 0$ τότε οι τ.μ. X_1, X_2 καλούνται **ασυσχέτιστες**.

Οι ιδιότητες της συνδιασποράς δύο τ.μ. περιγράφονται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 7

Με την προϋπόθεση ότι όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται στην πρόταση έχουν νόημα, ισχύει:

- (α) Εάν α, β, γ σταθερές, τότε: $C(\alpha X_1 + \beta, \gamma X_2) = \alpha \gamma C(X_1, X_2)$
- (β) $C(X_1 + X_3, X_2) = C(X_1, X_2) + C(X_3, X_2)$
- (γ) $C(X_1, X_1) = \sigma^2(X_1)$
- (δ) (Ισότητα του Bienayme) Εάν $X_j, j=1, \dots, n$ τ.μ. με πεπερασμένη δεύτερη ροπή, τότε:

$$\sigma^2(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{j=1}^n \sigma^2(X_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} C(X_i, X_j)$$

Εάν επιπλέον οι τ.μ. $X_j, j=1, \dots, n$ είναι ανά δύο ασυσχέτιστες, τότε έχουμε:

$$\sigma^2(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{j=1}^n \sigma^2(X_j)$$

(ε) (ανισότητα Cauchy-Schwarz) Εάν $0 < \sigma_1, \sigma_2 < +\infty$, τότε:

(i) $-\sigma_1 \sigma_2 \leq C(X_1, X_2) \leq \sigma_1 \sigma_2$

(ii) $C(X_1, X_2) = \sigma_1 \sigma_2$ εάν και μόνον εάν $P\left\{X_2 = \mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - \mu_1)\right\} = 1$ ενώ

$C(X_1, X_2) = -\sigma_1 \sigma_2$ εάν και μόνον εάν $P\left\{X_2 = \mu_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - \mu_1)\right\} = 1$.

1.8 Δεσμευμένη μέση τιμή

Ορισμός 23

Έστω (X_1, X_2) μία διδιάστατη τ.μ. με δεσμευμένη π.π., της X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2$, την $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$. Η **δεσμευμένη μέση τιμή** της τ.μ. X_1 **δοθέντος ότι** $X_2 = x_2$ ορίζεται από την σχέση:

$$E(X_1|X_2=x_2) = \begin{cases} \sum_{x_1} x_1 f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) & X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) dx_1 & X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

με την προϋπόθεση ότι το άθροισμα ή το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους συγκλίνει. Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 8

Η **δεσμευμένη μέση τιμή** της τ.μ. $X = g(X_1, X_2)$ **δοθέντος ότι** $X_2 = x_2$ δίνεται από την σχέση:

$$E(g(X_1, X_2)|X_2=x_2) = \begin{cases} \sum_{x_1} g(x_1, x_2) f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) & X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) dx_1 & X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

Θεώρημα 7 (ιδιότητες δεσμευμένης μέσης τιμής)

Εάν α, β σταθερές και $g(x, y), h(x, y)$ μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις τ.μ., τ.ω. $E[g(X_1, X_2)], E[h(X_1, X_2)] < \infty$, τότε

(α) $E[\alpha g(X_1, X_2) + \beta h(X_1, X_2)|X_1] = \alpha E[g(X_1, X_2)|X_1] + \beta E[h(X_1, X_2)|X_1]$

(β) Εάν $g(x, y) \geq 0$ τότε $E[g(X_1, X_2)|X_1] \geq 0$

(γ) $E[E[g(X_1, X_2)|X_1]] = E[g(X_1, X_2)]$ **Ιδιαίτερα** $E[E[X_2|X_1]] = EX_2$

(δ) $E[g_1(X_1) \cdot g_2(X_1, X_2)|X_1] = g_1(X_1) \cdot E[g_2(X_1, X_2)|X_1]$

Ιδιαίτερα $E[g_1(X_1)|X_1] = g_1(X_1)$.

Παρατήρηση 9

Η ιδιότητα (γ) του θεωρήματος μας δίνει τον εξής εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού, της μέσης τιμής μίας τ.μ. (με την βοήθεια των δεσμευμένων τιμών).

(i) $EX_2 = \sum_{x_1} E[X_2|X_1=x_1] f_{X_1}(x_1)$ για διακριτές τ.μ

(ii) $EX_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X_2|X_1=x_1] f_{X_1}(x_1) dx_1$ για συνεχείς τ.μ.

Εάν στους δύο αυτούς τύπους θέσουμε σαν $X_2 = I_A$, τότε έχουμε τον εξής εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της πιθανότητας ενός γεγονότος.

$$(iii) \quad P(A) = \sum_{x_1} P\{A|X_1=x_1\} P\{X_1=x_1\} \quad \text{για διακριτές τ.μ}$$

$$(iv) \quad P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{A|X_1=x_1\} f_{X_1}(x_1) dx_1 \quad \text{για συνεχείς τ.μ.}$$

1.9 2-διάστατη Κανονική κατανομή

Η σπουδαιότερη από τις διδιάστατες κατανομές, είναι η 2-διάστατη κανονική κατανομή.

Ορισμός 24

Εάν $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ είναι μία διδιάστατη τ.μ με α.κ.π.π. που δίνεται από την σχέση:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{q}{2}}$$

όπου:

$$q = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]$$

και $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ τότε λέμε ότι, η τ.μ. $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ ακολουθεί την **2-διάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους** $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$.

Θεώρημα 8 (2-διάστατη κανονική κατανομή)

Εάν η $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ ακολουθεί την 2-διάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$.

(α) Η περιθωριακή π.π. της X_1 είναι η $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, ενώ η περιθωριακή π.π. της X_2 είναι η $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

(β) Η δεσμευμένη κατανομή της X_1 δοθέντος ότι $X_2=x_2$ είναι η $N(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2))$ ενώ η δεσμευμένη κατανομή της X_2 δοθέντος $X_1=x_1$ είναι η $N(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2))$.

(γ) Ο συντελεστής συσχέτισης των X_1, X_2 είναι ίσος με την παράμετρο ρ .

Παρατήρηση 10

Εάν οι τ.μ X_1, X_2 ακολουθούν την 2-διάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$, τότε έχουμε:

$$E(X_1|X_2=x_2)=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2).$$

και, ανάλογα:

$$E(X_2|X_1=x_1)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1).$$

Ορισμός 25 (n-διάστατη κανονική κατανομή)

Έστω $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ μία n-διάστατη τ.μ. Εάν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε (το διάνυσμα $\mathbf{x}$) το παριστάνουμε σαν πίνακα στήλη:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Συμβολίζουμε με:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EX_1 \\ EX_2 \\ \vdots \\ EX_n \end{bmatrix}$$

το διάνυσμα των μέσων τιμών των τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$. Ο πίνακας:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{ij} = C(X_i, X_j)$$

ονομάζεται πίνακας **διασποράς-συνδιασποράς** των τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$. Θα λέμε ότι η τ.μ. $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ακολουθεί την **n-διάστατη κανονική κατανομή** με παραμέτρους $\boldsymbol{\mu}$ και Σ , εάν η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τ.μ. $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$, δίνεται από την σχέση:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\det \Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

όπου T συμβολίζει τον ανάστροφο ενός πίνακα.

1.10 Ανεξαρτησία τ.μ.

Η έννοια της ανεξαρτησίας τ.μ είναι μια γενίκευση της έννοιας της ανεξαρτησίας γεγονότων.

Ορισμός 26

Δύο τ.μ X_1, X_2 , ορισμένες στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο, καλούνται **ανεξάρτητες** εάν:

$$P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\} = P\{X_1 \in B_1\} \cdot P\{X_2 \in B_2\}$$

$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, όπου $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ η **σ -άλγεβρα** του **Borel** στο $\mathbb{R}$.

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ισοδύναμους ορισμούς (κριτήρια) για να εξετάσει κανείς την ανεξαρτησία δύο τ.μ.

Θεώρημα 9

Έστω X_1, X_2 δύο τ.μ. με α.κ.σ.κ F_{X_1, X_2} και α.κ.π.π. f_{X_1, X_2} . Οι τ.μ X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες εάν και μόνον εάν ισχύει μια από τις παρακάτω σχέσεις:

- (α) $P\{a < X_1 \leq b, c < X_2 \leq d\} = P\{a < X_1 \leq b\} \cdot P\{c < X_2 \leq d\}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b, c \leq d$
- (β) $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- (γ) $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση 11

(α) Η έννοια της ανεξαρτησίας μπορεί να επεκταθεί σε:

- (i) οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος τ.μ. Οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$, ορισμένες στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο, καλούνται ανεξάρτητες εάν:

$$P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n\} = P\{X_1 \in B_1\} \cdot P\{X_2 \in B_2\} \cdot \dots \cdot P\{X_n \in B_n\},$$

$$\forall B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

- (ii) αριθμήσιμο πλήθος τ.μ. Οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ καλούνται ανεξάρτητες εάν οι τ.μ $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots$ ($i_1 \neq \dots \neq i_k$) είναι ανεξάρτητες (δηλαδή εάν οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος από τις $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ είναι ανεξάρτητες).

- (β) Η έννοια της ανεξαρτησίας δύο τ.μ. είναι γενίκευση της έννοιας της ανεξαρτησίας γεγονότων. Πράγματι, εάν X_1, X_2 είναι δύο (οποιοσδήποτε) τ.μ, B_1, B_2 είναι μετρήσιμα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών και ορίσουμε τα γεγονότα:

$$A = \{\omega / X_1(\omega) \in B_1\}, B = \{\omega / X_2(\omega) \in B_2\}$$

τότε, οι τ.μ. X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες είναι ανεξάρτητες εάν και μόνον εάν $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Πρόταση 9

Εάν οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και f, g είναι δύο μετρήσιμες συναρτήσεις που ορίζονται στο $\mathbb{R}^n$, τότε οι τ.μ. $f(X_1, X_2, \dots, X_m)$, $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ είναι ανεξάρτητες. Ιδιαίτερα, εάν οι τ.μ. X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και g, h είναι πραγματικές συναρτήσεις, τότε οι τ.μ. $Z = g(X_1)$, $W = h(X_2)$ είναι ανεξάρτητες.

Το αντίστροφο της πρότασης δεν ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί συναρτήσεις τ.μ. να είναι ανεξάρτητες, χωρίς οι εν λόγω τ.μ. να είναι ανεξάρτητες.

Παρατήρηση 12

Έστω ότι οι X_1, X_2 είναι συνεχείς τ.μ. με α.κ.π.π. την $f_{X_1, X_2}(x, y)$. Εάν οι τ.μ. X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες, τότε για κάθε $y \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f_{X_2}(y) > 0$ είναι φανερό ότι ισχύει:

$$f_{X_1|X_2}(x|y) = \frac{f_{X_1, X_2}(x, y)}{f_{X_2}(y)} = \frac{f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(y)}{f_{X_2}(y)} = f_{X_1}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

και ακόμα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f_{X_1}(x) > 0$ ισχύει:

$$f_{X_2|X_1}(y|x) = \frac{f_{X_1, X_2}(x, y)}{f_{X_1}(x)} = f_{X_2}(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

Αντίστροφα, εάν ισχύει κάποια από τις παραπάνω δύο σχέσεις, τότε οι τ.μ. X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες. Ανάλογες ισότητες ισχύουν και στην περίπτωση διακριτών τ.μ.

Πρόταση 10

Εάν οι τ.μ. X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες, τότε:

(α) εάν $g(x), h(y)$ είναι δύο μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις ισχύει:

$$E[g(X_1) \cdot h(X_2)] = E[g(X_1)] \cdot E[h(X_2)]$$

Ιδιαίτερα, εάν X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ., τότε:
 $E[X_1 \cdot X_2] = E[X_1] \cdot E[X_2]$.

(β) είναι ασυσχέτιστες δηλαδή $C(X_1, X_2)=0$.

(γ) $\sigma^2(X_1+X_2)=\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)$.

(δ) Ισχύει $E[X_2|X_1]=EX_2$.

1.11 Ροπογεννήτριες

Ορισμός 27

Εάν X είναι μια τ.μ. και f_X η π.π. της. Η **ροπογεννήτρια συνάρτηση** της X ή απλά η **ροπογεννήτρια** (ρ.σ.) συμβολικά M_X , είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$M_X(t) = Ee^{tX} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tx_k} P\{X=x_k\} & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

για όλα τα t για τα οποία το άθροισμα ή το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένο.

Παρατήρηση 13

(α) Επειδή $M_X(0) = Ee^{0 \cdot X} = 1$, έπεται ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση υπάρχει πάντα στο σημείο $t = 0$.

(β) Έστω X είναι μια τ.μ. της οποίας η ροπογεννήτρια συνάρτηση M_X υπάρχει. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $Y = \alpha X + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ δίνεται από την σχέση:

$$M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t)$$

Πρόταση 11

Έστω X μια τ.μ της οποίας η ροπογεννήτρια συνάρτηση M_X υπάρχει σε ένα διάστημα της μορφής $(-\alpha, \alpha)$, $\alpha > 0$. Τότε υπάρχουν όλες οι ροπές $\mu'_r = EX^r$, $r=1,2,\dots$ της X και δίνονται από την σχέση:

$$\mu'_r = M_X^{(r)}(0), \quad r=1,2,\dots$$

Ακόμα, η M_X μπορεί να αναπτυχθεί σε μια σειρά της μορφής:

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\mu'_r}{r!} t^r$$

Στην περίπτωση αυτή, η ροπογεννήτρια συνάρτηση M_X της τ.μ. καθορίζει μονοσήμαντα την κατανομή της X . Η παραπάνω ιδιότητα δικαιολογεί το όνομα της M_X σαν **ροπογεννήτρια** συνάρτηση.

Παράδειγμα 6 (κανονική κατανομή)

Εάν X είναι μια τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu=0$ και $\sigma=1$, τότε η ροπογεννήτριά συνάρτησή της είναι:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+2tx}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+2tx+t^2}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \stackrel{y=x-t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

Αλλά, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$, οπότε $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

Γενικότερα τώρα, εάν Y είναι μια τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 , τότε η τ.μ. $X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu=0$ και $\sigma=1$. Αλλά, λόγω του ότι $Y = \sigma X + \mu$, χρησιμοποιώντας το (β) της παραπάνω παρατήρησης, έχουμε ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Y είναι:

$$M_Y(t) = M_{\sigma X + \mu}(t) = e^{it\mu} M_X(\sigma t) = e^{it\mu} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{it\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

■

Πρόταση 12

Εάν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με αντίστοιχες ροπογεννήτριες συναρτήσεις M_X, M_Y , τότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση M_{X+Y} του αθροίσματος $X+Y$, δίνεται από την σχέση:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

και γενικότερα, εάν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ., τότε:

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t).$$

Πόρισμα 1

Εάν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμμένες τ.μ., τότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ είναι:

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t)=[M_{X_1}(t)]^n$$

Πρόταση 13 (αναπαγωγική ιδιότητα)

Εάν $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες τ.μ., και η X_m ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ_m, σ_m^2 , τότε το άθροισμά τους $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ ακολουθεί (επίσης) την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k$ και $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_m^2$.

1.12 Παράγωγα

Παράγωγο (derivative) είναι ένα χρηματικό εργαλείο του οποίου η τιμή εξαρτάται από την τιμή κάποιας άλλης βασικής παραμέτρου (συνήθεις παράμετροι είναι οι τιμές εμπορεύσιμων περιουσιακών στοιχείων όπως χρυσός, συνάλλαγμα, μετοχές ή βασικά είδη διατροφής όπως σιτάρι, φρούτα κ.λ.π. ή ακόμα και ένα παράγωγο όπως μελλοντικό συμβόλαιο).

Εμπορεύονται από: «αγορά πάνω από τον πάγκο» (OTC = over the counter)

- (1) τράπεζες
- (2) εταιρείες
- (3) χρηματιστηριακοί οργανισμοί

Μετοχή (equity, share, stock)

Μια ανώνυμη εταιρεία προκειμένου να ιδρυθεί ή να επεκταθεί θα πρέπει να διαθέτει ένα συγκεκριμένο κεφάλαιο. Όταν το κεφάλαιο δεν είναι αρκετό, τότε το απαιτούμενο κεφάλαιο χωρίζεται σε μικρότερα μερίδια, τα οποία ονομάζουμε **μετοχές** (stocks), και τα οποία συνεισφέρουν («αγοράζουν») επενδυτές (**μέτοχοι**). Δηλαδή, ο μέτοχος (κάτοχος της μετοχής) είναι κατά κάποιον τρόπο εν μέρει ιδιοκτήτης της εταιρείας. Έχει δικαίωμα στα κέρδη της εταιρείας, τα δε αντιστοιχούντα σε αυτόν κέρδη ονομάζονται **μερίσματα** (dividends). Τα μερίσματα δίνονται στον κάτοχο της μετοχής σε τακτά χρονικά διαστήματα (εξάμηνο ή χρόνο κ.α.) και υπόκεινται σε φορολόγηση. Έχει ακόμα, δικαίωμα στην έκδοση νέων μετοχών, δικαίωμα ψήφου στη γενική συνέλευση της εταιρείας για την λήψη αποφάσεων σχετικές με την διαχείριση της εταιρείας, και στην εκκαθάριση της εταιρείας σε περίπτωση διάλυσής της. Πολλές φορές, όταν η τιμή της μετοχής είναι αρκετά υψηλή, η εταιρεία ανακοινώνει «σπάσιμο» (split) της μετοχής, δηλαδή χωρισμό μιας μετοχής σε δύο. Η ενέργεια είναι συνήθως ψυχολογική και αποσκοπεί σε αύξηση της ζήτησης της μετοχής με συνέπεια άνοδο της τιμής της. Η Αναγραφόμενη τιμή μίας μετοχής είναι η τιμή της προηγούμενης μέρας στο Χρηματιστήριο. Ακόμα, η τιμή μιας μετοχής θεωρείται μιά στοχαστική διαδικασία.

Forward contracts (μελλοντικά συμβόλαια)

Συμφωνία για την αγορά ή πώληση ενός προϊόντος σε ένα μελλοντικό χρόνο, σε μια συγκεκριμένη τιμή.

1. Η τιμή ονομάζεται **τιμή παράδοσης** (delivery price)
2. Εμπορική πράξη, «πάνω από τον πάγκο», μεταξύ ή δύο χρηματιστηριακών οργανισμών ή μεταξύ ενός χρηματιστηριακού οργανισμού και ενός από τους πελάτες του. Δηλαδή υπάρχουν δύο πλευρές. **(α) Του αγοραστή (long position ή μακριά θέση):** πρέπει να αγοράσει το προϊόν την προκαθορισμένη ημερομηνία, στην τιμή παράδοσης. **(β) Του πωλητή (short position ή κοντή θέση):** πρέπει να αγοράσει το προϊόν την προκαθορισμένη ημερομηνία, στην τιμή παράδοσης. Κόστος σύναψης του συμβολαίου είναι μηδέν.
3. **Hedging** (εξασφάλιση)
4. **Forward price (μελλοντική τιμή):** η μελλοντική τιμή παράδοσης ενός Forward contract για κάποιο περιουσιακό στοιχείο. Δημοσιεύεται συνήθως στον τύπο.

Future contracts (μελλοντικά συμβόλαια ανταλλαγής)

Συμφωνία για την αγορά ή πώληση ενός προϊόντος σε ένα μελλοντικό χρόνο, σε μια συγκεκριμένη τιμή. Αλλά:

- (α) τα συμβόλαια είναι εμπορικό αντικείμενο γραφείων ανταλλαγών (τα οποία λειτουργούν σε οργανωμένα χρηματιστήρια, και είναι το σημείο στο οποίο τα μελλοντικά συμβόλαια ανταλλαγής διαφέρουν από τα μελλοντικά συμβόλαια) . Τα γραφεία αυτά τυποποιούν τα συμβόλαια αυτά με λεπτομερείς αναφορές στην ποιότητα των περιουσιακών στοιχείων που είναι η βάση του μελλοντικού συμβολαίου ανταλλαγής (μηχανισμοί εγγύησης λόγω του ότι οι δύο πλευρές είναι άγνωστες).
- (β) Δεν υπάρχει συγκεκριμένη ημερομηνία παράδοσης, αλλά αναφέρεται ο μήνας παράδοσης.

Γραφεία ανταλλαγών:

1. **Chicago Board of Trade (CBOT)**
2. **Chicago Board of Options Exchange (CBOE)**
3. **Chicago Mercantile Exchange (CME)**
4. **American Stock and Options Exchange (AMEX)**

Swaps (ανταλλαγές)

Συμφωνία ανάμεσα σε δύο οργανισμούς ή εταιρείες για την ανταλλαγή **μετρητών** σε προκαθορισμένα μελλοντικά χρονικά σημεία.

Η συμφωνία περιλαμβάνει:

- (α) τις ημερομηνίες πληρωμής των μετρητών

- (β) τον τρόπο υπολογισμού τους
- (γ) το τι παίρνει κάθε ένας από τους οργανισμούς

Τα σπουδαιότερα είναι:

- (I) **Interest rate swaps (ανταλλαγές επιτοκίων)**
- (II) **Currency swaps (ανταλλαγές συναλλάγματος)**

Options (δικαιώματα)

(i) Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (European call option): είναι εάν συμβόλαιο που μας δίνει το δικαίωμα, όχι όμως και την υποχρέωση, να αγοράσουμε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο σε μια καθορισμένη τιμή (exercise or strike price) στο τέλος της χρονικής διάρκειας του συμβολαίου.

(ii) Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (European put option): είναι εάν συμβόλαιο που μας δίνει το δικαίωμα, όχι όμως και την υποχρέωση, να πουλήσουμε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο σε μια καθορισμένη τιμή στο τέλος της χρονικής διάρκειας του συμβολαίου.

(iii) Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς (American call option): είναι εάν συμβόλαιο που μας δίνει το δικαίωμα, όχι όμως και την υποχρέωση, να αγοράσουμε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο σε μια καθορισμένη τιμή, οποτεδήποτε μέσα στη χρονική διάρκεια του συμβολαίου.

(iv) Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης (American put option): είναι εάν συμβόλαιο που μας δίνει το δικαίωμα, όχι όμως και την υποχρέωση, να πουλήσουμε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο σε μια καθορισμένη τιμή, οποτεδήποτε μέσα στη χρονική διάρκεια του συμβολαίου.

Διαφέρουν, από τα προηγούμενα παράγωγα:

- (α) στο ότι δεν υπάρχει υποχρέωση για κάποια ενέργεια
- (β) αγοράζονται με κάποιου είδους επιβάρυνση την λεγόμενη **τιμή Δικαιώματος (Premium) ή ασφάλιστρο ή κόστος του δικαιώματος**, δηλαδή την χρηματική αξία που πρέπει να πληρώσει ο αγοραστής του δικαιώματος προαίρεσης στον πωλητή προκειμένου να αποκτήσει το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει το υποκείμενο προϊόν σε συγκεκριμένη τιμή. Η τιμή αναφέρεται σε μια μονάδα του υποκείμενου αγαθού. Η πληρωμή του ασφαλίστρου στον πωλητή του δικαιώματος προαίρεσης, γίνεται ανεξαρτήτως αν το δικαίωμα εξασκηθεί ή όχι, κατά συνέπεια το ασφάλιστρο είναι και το μέγιστο κέρδος που μπορεί να επιτύχει ο πωλητής του δικαιώματος. Η τιμή του δικαιώματος, δεν περιλαμβάνεται στους τυποποιημένους όρους του συμβολαίου, καθορίζεται από την προσφορά και την ζήτηση

(τόσο του υποκείμενου αγαθού, αλλά και της οικονομίας γενικότερα) στην αγορά την οποία διαπραγματεύεται. Δηλαδή η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται συνεχώς μέχρι την ημερομηνία λήξης του. Τέλος, δεν υπάρχει υποχρέωση να προκύψει μια οικονομική πράξη ώστε να προστεθεί σε αυτήν το οποιοδήποτε κόστος ή κέρδος για τον οποιοδήποτε.

Αυτό που μας ενδιαφέρει και θα εξετάσουμε στα επόμενα κεφάλαια, δίνοντας αναλυτικά όλες τις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες, είναι το (στοχαστικό) πρόβλημα του υπολογισμού του κόστους ενός δικαιώματος.

Περιοριστικά στοιχεία που είναι αντικείμενο των options:

- (i) μετοχές
- (ii) ξένο συνάλλαγμα
- (iii) δείκτες μετοχών
- (iv) μελλοντικά συμβόλαια

Στρατηγικές επένδυσης

- (α) **Straddle**: Στην περίπτωση αυτή αγοράζουμε το δικαίωμα αγοράς και πώλησης μιας μετοχής με την ίδια τιμή παράδοσης και στην ίδια χρονική διάρκεια. Αν την ημέρα λήξης του δικαιώματος, η τιμή της μετοχής είναι κοντά στην τιμή παράδοσής της, τότε το straddle έχει ζημία. Αυτό συμβαίνει γιατί ο αγοραστής έχει πληρώσει δύο δικαιώματα. Αντίθετα, αν την ημέρα λήξης του δικαιώματος η τιμή της μετοχής είμαι μακριά από την τιμή παράδοσής της, είτε θετικά είτε αρνητικά, τότε υπάρχει κέρδος για τον αγοραστή. Για το λόγο αυτό, το straddle είναι κατάλληλο όταν αναμένονται μεγάλες αλλαγές στην τιμή μίας μετοχής.
- (β) **Strips & Straps**: Στην περίπτωση του strip αγοράζονται σε αναλογία ένα δικαίωμα αγοράς μίας μετοχής προς δύο δικαιώματα πώλησης με την ίδια τιμή παράδοσης και την ίδια ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Στην περίπτωση αυτή, η στρατηγική προσαρμόζεται στο γεγονός ότι αναμένεται μία μεγάλη αλλαγή στην τιμή της μετοχής προς τα κάτω. Το strap αποτελείται από την αγορά σε αναλογία δύο δικαιώματα αγοράς προς ένα δικαίωμα πώλησης. Στην περίπτωση αυτή, η στρατηγική προσαρμόζεται στο γεγονός ότι αναμένεται μία μεγάλη αλλαγή στην τιμή της μετοχής προς τα πάνω.
- (γ) **Strangles**: Στην περίπτωση του strangle ο παίχτης αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης μίας μετοχής με την ίδια ημερομηνία λήξης, αλλά διαφορετικές τιμές παράδοσης.

Τύποι συναλλασσόμενων

- (i) **Hedgers** (εξασφαλιστές): Το είδος αυτό των συναλλασσομένων χρησιμοποιούν την αγορά και τις δυνατότητες που τους παρουσιάζονται, για να εξασφαλιστούν έναντι του ρίσκου που παρουσιάζουν οι μεγάλες αλλαγές στις τιμές των περιουσιακών στοιχείων των επιτοκίων των μετοχών κ.λπ. Η εξασφάλιση (hedging) είναι βασικό είδος συμπεριφοράς πολλών επιχειρήσεων στην προσπάθεια επιβίωσής τους σε έντονα ανταγωνιστικά περιβάλλοντα.
- (ii) **Speculators** (κερδοσκόποι): Το είδος αυτό των συναλλασσομένων διακρίνονται από το γεγονός ότι χρησιμοποιούν την αγορά για να επιτύχουν γρήγορα και μεγάλα κέρδη. Είναι οι άνθρωποι που συνήθως παίρνουν ρίσκα βέβαιι ότι θα κερδίσουν, πολλές φορές και μόνον γιατί το θέλουν με τέτοιο πάθος που δεν μπορούν να κάνουν αλλιώς. Έχουν, δηλαδή, όλα τα χαρακτηριστικά του παίκτη και οι ενέργειές τους θυμίζουν περισσότερο τζόγο παρά επενδύσεις. Είναι σαφώς το αντίθετο από τους Hedgers οι οποίοι προσπαθούν συνεχώς ν' απαλλαγούν από το ρίσκο. Είναι φανερό ότι εκεί που φυτρώνουν οι Hedgers ευδοκιμούν και οι Speculators, μια και όταν υπάρχουν κάποιοι οι οποίοι επιθυμούν ν' απαλλαγούν από το ρίσκο συνήθως υπάρχουν κάποιοι οι οποίοι έχουν την αισιοδοξία να το φορτωθούν. Τους speculators τους διακρίνεις εύκολα στα χρηματιστήρια όπου αγοράζουν και πωλούν την ίδια μετοχή στη διάρκεια μίας ημέρας προσπαθώντας ακόμη και να κερδίσουν στο γενικό κατήφορο.
- (iii) **Arbitrageurs**: Το είδος αυτό των συναλλασσομένων προσπαθούν να εξερευνήσουν την αγορά ή να συνδυάσουν αγορές αναζητώντας το σίγουρο κέρδος (Arbitrage = εξισορροποιητική κερδοσκοπία). Όπου εμφανιστούν οι ευκαιρίες σίγουρου κέρδους σε μία αγορά εξαφανίζονται μια που ενεργούν πολλοί μαζί και ανατρέπουν τις ισορροπίες ζήτησης και προσφοράς. Οι αγορές προσπαθούν ν' αποκλείσουν τις ευκαιρίες βέβαιου κέρδους, γιατί οι εμφανίσεις πολλών arbitrageurs μπορεί να καταστρέψουν τις ισορροπίες και είναι άγνωστο πού το σύστημα θα ισορροπήσει ξανά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2° – Μέση Τιμή

2.1 Παράμετροι κεντρικής τάσης μιας τυχαίας μεταβλητής

Εάν X μια τ.μ. με γνωστή π.π. $f_X(x)$ ή σ.κ. $F_X(x)$. Τότε θεωρητικά μπορούμε να υπολογίσουμε, όλες τις πιθανότητες αναφορικά με την X . Υπάρχουν περιπτώσεις που: (α) οι υπολογισμοί είναι δύσκολοι (β) η κατανομή της τ.μ X είναι άγνωστη. Για να έχουμε μια μερική εικόνα το που είναι συγκεντρωμένη η κατανομής της X , ορίζουμε αριθμούς που χαρακτηρίζουν την X . Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **παράμετροι κεντρικής τάσης ή θέσης** και είναι η μέση τιμή, η διάμεσος, η επικρατούσα τιμή και τα ποσοστιαία σημεία. Σπουδαιότερη από αυτές είναι η μέση τιμή.

2.2 Μέση τιμή

Ορισμός 1

Εάν X είναι μια τ.μ. με π.π. $f_X(x)$, τότε η **μέση τιμή** ή **μαθηματική ελπίδα** της X είναι ο αριθμός:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x_n} x_n f_X(x_n) \quad X \text{ διακριτή}$$

ή

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad X \text{ συνεχής}$$

με την προϋπόθεση ότι τόσο το άθροισμα όσο και το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένα.

Παρατήρηση 1

(α) Η μέση τιμή δεν συμπίπτει, εν γένει, με μια από τις τιμές της μεταβλητής π.χ εάν X είναι μια τ.μ. που παίρνει τις τιμές -2 και 2, καθεμιά με πιθανότητα $1/2$, τότε η μέση της τιμή είναι $EX = (-2) \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2 = 0$ (το 0 δεν είναι τιμή της X).

(β) Η φυσική ερμηνεία της είναι η εξής: εάν τα $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ είναι σημεία μιας ευθείας και στο σημείο x_k είναι κατανεμημένη μια μάζα, με πυκνότητα, $f(x_k)$, τότε η μέση τιμή $\mu_X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_X(x_n)$ είναι το **κέντρο βάρους** της μάζας αυτής.

(γ) Η ονομασία **μαθηματική ελπίδα** προέρχεται από τα τυχερά παιχνίδια. Εάν σε ένα παιχνίδι το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη είναι μηδέν, τότε χαρακτηρίζεται **δίκαιο**.

Παράδειγμα 1

Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ . Τότε:

$$EX = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

■

Παράδειγμα 2

Αν X είναι μια τ.μ. με πυκνότητα πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x & x \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

και η $EX = \frac{1}{2}$. Να υπολογιστούν τα α και β .

Λύση

Η συνάρτηση $f_X(x)$ είναι μια πυκνότητα πιθανότητας, άρα:

$$\int_0^1 f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (\alpha x^2 + \beta x) dx = 1 \Rightarrow \left(\alpha \frac{x^3}{3} + \beta \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow 2\alpha + 3\beta = 6 \quad (i)$$

Ακόμα:

$$EX = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 x f_X(x) dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 x (\alpha x^2 + \beta x) dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\alpha \frac{x^4}{4} + \beta \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\alpha + 4\beta = 6 \quad (ii)$$

Από τις (i), (ii) έχουμε ότι:

$$\alpha = -6, \beta = 6 \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} -6x^2 + 6 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

■

Παρατήρηση 2

(α) Εάν I_A είναι η δείκτρια τ.μ του γεγονότος A , τότε $E I_A = P(A)$.

(β) Υπάρχουν περιπτώσεις που η μέση τιμή μιας τ.μ. δεν υπάρχει π.χ εάν η τ.μ. X παίρνει τις τιμές 7^k , $k=1,2,\dots$ με πιθανότητες

$P\{X=7^k\} = \frac{6}{7^k}$, τότε η EX δεν υπάρχει, γιατί η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} 7^k \frac{6}{7^k}$ αποκλίνει.

■

Υπολογίζουμε παρακάτω την μέση τιμή μερικών βασικών κατανομών.

Παράδειγμα 3

(α) **(διωνυμική)** Εάν η τ.μ. X ακολουθεί την **διωνυμική κατανομή** με παραμέτρους n και p , τότε:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m (1-p)^{(n-1)-m} = np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

δηλαδή: $EX = np$.

(β) **(Poisson)** Εάν η τ.μ. X ακολουθεί την **κατανομή Poisson** με παράμετρο λ , τότε η μέση της τιμή είναι ίση με:

$$EX = \sum_{k=0}^{+\infty} k P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

δηλαδή ίση με την παράμετρο λ της κατανομής.

(γ) **(Κανονική)** Εάν η τ.μ. X ακολουθεί την **κανονική κατανομή** με παραμέτρους μ και σ , τότε η μέση της τιμή είναι ίση με:

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \stackrel{\substack{x-\mu=t \\ dx=\sigma dt}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu+\sigma t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mu + 0 = \mu \end{aligned}$$

δηλαδή ίση με την παράμετρο μ της κατανομής. ■

Εάν η τ.μ. παίρνει μη-αρνητικές ακέραιες τιμές, η μέση της τιμή μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 1

Εάν X μια μη-αρνητική τ.μ. που παίρνει ακέραιες τιμές τότε:

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\}$$

Παράδειγμα 4 (γεωμετρική κατανομή)

Εάν η τ.μ. X ακολουθεί την **γεωμετρική** κατανομή με παράμετρο p , τότε:

$$P\{X \geq n\} = \sum_{m=n}^{\infty} P\{X=m\} = \sum_{m=n}^{\infty} p(1-p)^{m-1} = p \sum_{m=n}^{\infty} (1-p)^{m-1} = p \frac{(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-1}$$

Άρα, από την πρόταση 1, έχουμε:

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

■

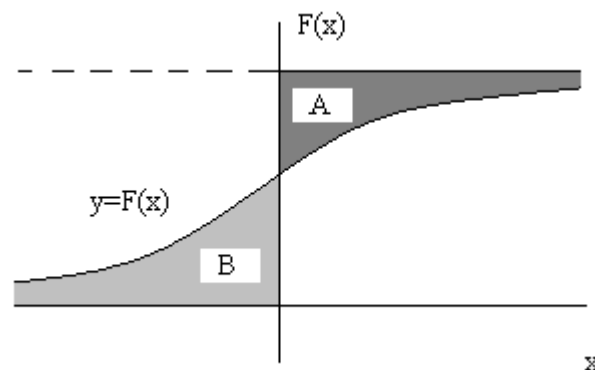
Εάν η τ.μ. είναι συνεχής, η μέση τιμή της μπορεί να υπολογιστεί και από σχέση που δίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2

Εάν X μια συνεχής τ.μ. με σ.κ. $F_X(x)$ και έστω ότι $EX < +\infty$, τότε:

$$\mu = EX = \int_0^{+\infty} (1-F_X(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx$$

Η πρόταση 2 μας αναφέρει με άλλα λόγια ότι, η μέση τιμή ισούται με την διαφορά των εμβαδών των δύο χωρίων A και B που σχηματίζονται από χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της $F_X(x)$ (δείτε το παρακάτω σχήμα).



Η μέση τιμή ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.

Πρόταση 3

Εάν X, Y είναι δύο τ.μ. με πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε:

(α) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ και $E(cX)=cE(X)$ όπου c σταθερά, δηλαδή η μέση τιμή $E(\cdot)$ είναι μια **γραμμική** συνάρτηση.

(β) $|EX| \leq E|X|$

(γ) Εάν X, Y τ.μ. τ.ω. $X \leq Y$ τότε $EX \leq EY$. Άρα, εάν $X \geq 0$, τότε $EX \geq 0$.

2.3 Ροπές

Εάν g είναι μια (μετρήσιμη) συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $Y=g(X)$ είναι μια τ.μ. Η μέση τιμή της Y υπολογίζεται συνήθως (μόνον με την βοήθεια της $f_X(x)$) από την σχέση της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 4

Έστω X μια τ.μ, g μια (μετρήσιμη) πραγματική συνάρτηση και $Y=g(X)$

(α) Εάν η X είναι διακριτή, τότε η μέση τιμή της Y δίνεται από την:

$$E[g(X)] = \sum_{x_n} g(x_n) f_X(x_n)$$

(β) Εάν η X είναι συνεχής με π.π. την $f_X(x)$, η οποία είναι θετική για $x \in S$ και 0 για τα υπόλοιπα. Έστω $g: S \rightarrow T$ μια αμφιμονοσήμαντη και επί συνάρτηση της οποίας η αντίστροφη $g^{-1}: T \rightarrow S$ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι συνεχής. Τότε η μέση τιμή της Y δίνεται από την σχέση:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

με την προϋπόθεση ότι τόσο το άθροισμα όσο και το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένα.

Παράδειγμα 5

Εάν η τ.μ. $X \approx N(0,1)$, να υπολογιστεί η μέση τιμή της $Y = X^2$.

Λύση

(α) (Με την βοήθεια της πρότασης 4)

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

γιατί:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' dx = - \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 + 1 = 1$$

(β) (**άμεσα**, υπολογίζοντας την κατανομή της Y) Η σ.κ. της τ.μ. $Y = X^2$ είναι ίση με:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = \\ &= P\{X \leq \sqrt{y}\} - P\{X < -\sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), y > 0 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την $F_Y(y)$ ως προς y , έχουμε ότι η π.π. της $Y = X^2$ είναι ίση με:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy} (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0$$

Η μέση τιμή της $Y = X^2$ είναι ίση με:

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} y \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} dy \stackrel{u=\sqrt{y}}{=} 2 \int_0^{+\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

■

Ορισμός 2

(α) Εάν η $g(x)=x^r$, $r=1,2,\dots$, η μέση τιμή της $g(X)=X^r$ ισούται με:

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_{x_n} x_n^r f_X(x_n) \quad X \text{ διακριτή}$$

ή

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx \quad X \text{ συνεχής}$$

και καλείται **ροπή r-τάξης** της τ.μ X (**γύρω από την αρχή**). Η ροπή 1^{ης} τάξης μιας τ.μ. είναι ίση με την μέση τιμή.

(β) Εάν $g(x)=(x-E(X))^r$, η μέση τιμή της $g(X)=(X-E(X))^r$ ισούται με:

$$\mu_r = E(X-E(X))^r = \sum_{x_n} (x_n - E(X))^r f_X(x_n) \quad X \text{ διακριτή}$$

ή

$$\mu_r = E(X-E(X))^r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^r f_X(x) dx \quad X \text{ συνεχής}$$

και καλείται **κεντρική ροπή r-τάξης** της τ.μ X .

Η κεντρική ροπή δεύτερης τάξης μιας τ.μ. X καλείται **διασπορά** της τ.μ και συμβολίζεται με $\sigma^2(X)$ ή $V(X)$. Η διασπορά μιας τ.μ. X δηλαδή ισούται με:

$$\sigma^2(X) = V(X) = E[(X-E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

Η (θετική) τετραγωνική ρίζα της διασποράς, $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$, καλείται **τυπική απόκλιση** της τ.μ. X . Πολλές φορές την προτιμάμε από την διασπορά, γιατί οι μονάδες μέτρησης της είναι οι ίδιες με αυτές των τιμών της τ.μ.

(γ) Εάν $g(x)=x(x-1)\dots(x-r+1)$, τότε η μέση τιμή της $g(X)=X(X-1)\dots(X-r+1)$ ισούται με:

$$\mu_{(r)} = E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{x_n} x_n(x_n-1)\dots(x_n-r+1)f_X(x_n) \quad X \text{ διακριτή}$$

$$\mu_{(r)} = E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(x-1)\dots(x-r+1) f_X(x) dx \quad X \text{ συνεχής}$$

και καλείται **παραγοντική ροπή r-τάξεως** της τ.μ. X .

Η διασπορά μιας τ.μ. X , υπολογίζεται με την βοήθεια της παραγοντικής της ροής 1^{ης} τάξης, από την σχέση:

$$\sigma^2(X) = E[X(X-1)] + EX - (EX)^2$$

Υπολογίζουμε παρακάτω την διασπορά μερικών βασικών κατανομών.

Παράδειγμα 6

(α) (**Διωνυμική**) Εάν η τ.μ. X ακολουθεί την **διωνυμική κατανομή** με παραμέτρους n και p , τότε η παραγοντική της ροή 1^{ης} τάξης:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!} p^2 p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} = \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} = \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{m=0}^{n-2} \binom{n-2}{m} p^m (1-p)^{(n-2)-m} = n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

Η διασπορά της X είναι ίση με:

$$\sigma^2(X) = E[X(X-1)] + EX - (EX)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

(β) (**Poisson**) Αν τ.μ. X ακολουθεί την **κατανομή Poisson** με παράμετρο λ , τότε η παραγοντική της ροή r -τάξης :

$$\begin{aligned} E[X(X-1)\dots(X-r+1)] &= \sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1) P\{X=k\} = \sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=r}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-r)!} = \lambda^r e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda^r e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^r \end{aligned}$$

Η διασπορά της X , είναι ίση με:

$$\sigma^2(X) = E[X(X-1)] + EX - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

(γ) (**Κανονική**) Εάν η τ.μ. X ακολουθεί την **κανονική κατανομή** με παραμέτρους μ και σ , τότε η διασπορά της:

$$\sigma^2(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \stackrel{\substack{\frac{x-\mu}{\sigma}=t \\ dx=\sigma dt}}{=} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma^2$$

■

Εάν η πυκνότητα πιθανότητας μιας τ.μ είναι **συμμετρική** γύρω από ένα σημείο, οι ροπές της υπολογίζονται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5

Εάν X είναι μια συνεχής τ.μ. με **συμμετρική**, γύρω από το σημείο $x=c$, π.π. $f_X(x)$ (δηλαδή $f_X(x+c)=f_X(x-c)$), και $EX=\mu < +\infty$, τότε:

(α) Η μέση τιμή της τ.μ X είναι: $EX=\mu=c$

(β) Εάν υπάρχει η κεντρική ροπή r -τάξης της ($\mu_r = E(X-\mu)^r < +\infty$) τότε:

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \begin{cases} 0 & r = 2k+1, \quad k=0,1,2,\dots \\ 2 \int_0^{+\infty} y^{2k} f_X(y+\mu) dy & r = 2k, \quad k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Παράδειγμα 7

Έστω ότι η τ.μ X έχει πυκνότητα πιθανότητας:

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η $f_X(x)$ είναι συμμετρική γύρω από το σημείο $c=0$, άρα η κεντρική ροπή r -τάξης της τ.μ είναι, σύμφωνα με την πρόταση 5, ίση με:

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \begin{cases} EX^{2k+1} = 0 & k=0,1,2,\dots \\ EX^{2k} = \int_0^{+\infty} y^{2k} e^{-y} dy & k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Αλλά $I_n = \int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy = n \int_0^{+\infty} y^{n-1} e^{-y} dy = \dots = n! \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = n!$ οπότε:

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \begin{cases} 0 & r=2k+1, \quad k=0,1,2,\dots \\ (2k)! & r=2k, \quad k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

οπότε $\mu_2 = EX^2 = 2 \Rightarrow \sigma^2(X) = EX^2 - (EX)^2 = 2 - 0 = 2$.

■

2.4 Γενικός ορισμός μέσης τιμής

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την μέση τιμή (ή τις ροπές) μιάς τ.μ. (ή μιας ακολουθίας τ.μ.) σε μοντέλα που περιγράφουν

χρηματοοικονομικά προϊόντα, πρέπει να ορίσουμε την μέση τιμή σ' ένα γενικότερο πλαίσιο από αυτό που δώσαμε παραπάνω.

Έστω $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ένας πιθανοθεωρητικός χώρος και $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τ.μ.

Ορισμός 3

Εάν $\{A_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathfrak{F}$ και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i=1, 2, \dots, n$, η δε X είναι ίση με:

$$X = \sum_{k=1}^n \alpha_k I_{A_k} \quad (*)$$

τότε η X καλείται **απλή** τ.μ.

Παρατήρηση 3

Εάν στην παραπάνω αναπαράσταση της τ.μ. X (η οποία δεν είναι μοναδική), τα $A_k, k=1, 2, \dots, n$ είναι μια διαμέριση του Ω ($\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$) και $\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j, i, j=1, 2, \dots, n$, τότε η αναπαράσταση της X καλείται **κανονική** (είναι δε μοναδική).

Ορισμός 4

Εάν X είναι μια μη-αρνητική, απλή τ.μ με αναπαράσταση της μορφής (*), το **ολοκλήρωμα (Lebesgue)** της τ.μ. X **ως προς το μέτρο πιθανότητας** P ορίζεται από την σχέση:

$$\int_{\Omega} X dP = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(A_k)$$

Παρατήρηση 4

Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπάρχει πάντα, και δεν εξαρτάται από την αναπαράσταση της X (καλά ορισμένο).

Πρόταση 6

Εάν X, Y δύο, μη-αρνητικές απλές τ.μ., τότε:

$$(a) \int_{\Omega} cX dP = c \int_{\Omega} X dP, \quad c \in \mathbb{R}^+$$

$$(b) \int_{\Omega} (X+Y) dP = \int_{\Omega} X dP + \int_{\Omega} Y dP$$

$$(c) \text{ Εάν } X \leq Y, \text{ τότε } \int_{\Omega} X dP \leq \int_{\Omega} Y dP$$

Απόδειξη

(a) Έστω ότι η X παίρνει τιμές $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_A}$ με $X = \sum_{k=1}^{n_A} \alpha_k I_{A_k}$. Άρα,

$$\int_{\Omega} cX dP = \sum_{\kappa=1}^n c\alpha_{\kappa}P(A_{\kappa}) = c \sum_{\kappa=1}^n \alpha_{\kappa}P(A_{\kappa}) = c \int_{\Omega} X dP, c \in \mathfrak{R}, c \in \mathbb{R}$$

$$(\beta) \text{ Έστω } X = \sum_{i=1}^n \alpha_i I_{A_i} \text{ και } Y = \sum_{j=1}^m \beta_j I_{B_j}.$$

$$\begin{aligned} \text{Μπορούμε να γράψουμε : } X &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m I_{A_i \cap B_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i I_{A_i \cap B_j} \\ Y &= \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n I_{A_i \cap B_j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j I_{A_i \cap B_j} \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε, } X+Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) I_{A_i \cap B_j}. \text{ Άρα:}$$

$$\begin{aligned} \int (X+Y) dP &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) P(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m P(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i P(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j P(B_j) \\ &= \int X dP + \int Y dP \end{aligned}$$

(γ) Έστω ότι, οι αναπαραστάσεις είναι οι κανονικές, οπότε :

$$\int_{\Omega} X dP \leq \int_{\Omega} Y dP \Leftrightarrow \sum_{\kappa=1}^n \alpha_{\kappa} P(A_{\kappa}) \leq \sum_{\kappa=1}^n b_{\kappa} P(A_{\kappa}) \Leftrightarrow \alpha_{\kappa} P(A_{\kappa}) \leq b_{\kappa} P(A_{\kappa}) \Leftrightarrow \alpha_{\kappa} \leq b_{\kappa}$$

που ισχύει, αφού $X \leq Y$.

■

Στην περίπτωση μη-αρνητικών τ.μ ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1

Εάν X είναι μια μη-αρνητική τ.μ., τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ μη-αρνητικών απλών τ.μ. (δηλ. $\varphi_n(\omega) \leq \varphi_{n+1}(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, $n \geq 1$) τ.ω.:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(\omega) = X(\omega), \forall \omega \in \Omega.$$

Με την βοήθεια του θεωρήματος αυτού, επεκτείνουμε το ολοκλήρωμα του Lebesgue σε μη-αρνητικές τ.μ.

Ορισμός 5

Έστω X μια μη-αρνητική τ.μ. το **ολοκλήρωμα** (του **Lebesgue**) της τ.μ. X **ως προς το μέτρο πιθανότητας** P ορίζεται από την σχέση:

$$\int_{\Omega} X dP = \sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi dP / \varphi \text{ απλη τ.μ. και } 0 \leq \varphi \leq X \right\}$$

Παρατήρηση 5

- (α) Το ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο (του θεωρήματος 1), το σύνολο του δεξιού μέλους είναι μη-κενό οπότε υπάρχει το supremum του). Υπάρχει πάντα (μπορεί να είναι ίσο με $+\infty$).
- (β) Ο ορισμός 5 του ολοκληρώματος είναι συνεπής με τον ορισμό 3 (οι δύο ορισμοί συμπίπτουν, όταν η X είναι μια μη-αρνητική απλή τ.μ.).

Το θεώρημα που ακολουθεί μας εξασφαλίζει την σύγκλιση μιας ακολουθίας ολοκληρωμάτων μη-αρνητικών τ.μ.

Θεώρημα 2 (Μονότονης Σύγκλισης)

Εάν $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μη-αρνητικών τ.μ. τ.ω.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \forall \omega \in \Omega$, τότε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} X_n dP = \int_{\Omega} X dP$$

Πόρισμα 1

Εάν X, Y δύο μη-αρνητικές τ.μ, τότε:

$$(α) \int_{\Omega} cX dP = c \int_{\Omega} X dP, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (β) \int_{\Omega} (X+Y) dP = \int_{\Omega} X dP + \int_{\Omega} Y dP$$

Πόρισμα 2

Εάν $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι μια ακολουθία μη-αρνητικών τ.μ., τότε:

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{+\infty} X_n dP = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\Omega} X_n dP$$

δηλαδή μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά, άπειρου αθροίσματος μη-αρνητικών τ.μ. και ολοκληρώματος.

Απόδειξη

Έστω η ακολουθία $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Είναι φανερό ότι είναι αύξουσα.

Ισχύει ότι: $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k = g$.

Από Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n dP = \int g dP \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n dP = \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k dP \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{k=1}^n f_k dP = \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k dP \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int f_k dP = \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k dP = \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k dP$$

■

Έστω τώρα X , μια τυχούσα πραγματική τ.μ.

Ορισμός 6

Η συνάρτηση $X^+ : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ που ορίζεται από την σχέση $X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}$ καλείται **θετικό μέρος** της X , ενώ η συνάρτηση $X^- : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$, όπου $X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}$ καλείται **αρνητικό μέρος** της X .

Οι X^+, X^- είναι μη-αρνητικές τ.μ. και:

$$X = X^+ - X^- \quad \text{ενώ} \quad |X| = X^+ + X^-$$

Αφού οι X^+, X^- είναι μη-αρνητικές τ.μ., τα ολοκληρώματα $\int_{\Omega} X^+ dP$, $\int_{\Omega} X^- dP$ υπάρχουν πάντα. (μπορεί να είναι ίσα με $+\infty$).

Όταν και τα δύο αυτά ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα, η τ.μ. X καλείται **ολοκληρώσιμη** ως προς το μ.π. P .

Ορισμός 7

Έστω X μια P -ολοκληρώσιμη τ.μ., το **ολοκλήρωμα** (του **Lebesgue**) της τ.μ. X **ως προς το μέτρο πιθανότητας** P :

$$\int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X^+ dP - \int_{\Omega} X^- dP$$

Το ολοκλήρωμα αυτό καλείται και **μέση τιμή** της τ.μ. X **ως προς το μέτρο πιθανότητας** P και συμβολίζεται με EX , δηλαδή:

$$EX = \int_{\Omega} X dP$$

Γενικότερα, εάν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση και η $g(X)$ μια είναι P -ολοκληρώσιμη τ.μ. Η **μέση τιμή** της $g(X)$ είναι ίση με:

$$Eg(X) = \int_{\Omega} g(X) dP$$

Πόρισμα 3

Μια τ.μ. X είναι P -ολοκληρώσιμη εάν και μόνον εάν η τ.μ. $|X|$ είναι P -ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι: $-|x| \leq x \leq |x|$. Οπότε έχουμε: $-\int |X| dP \leq \int X dP \leq \int |X| dP$.

“ $\Rightarrow$ ”: Έστω ότι η X είναι P ολοκληρώσιμη. Δηλαδή, το $\int X dP$ είναι πεπερασμένο. Επομένως, αφού $-\int |X| dP \leq \int X dP$ έχουμε: $\int |X| dP$, άρα η $|X|$ είναι P ολοκληρώσιμη.

“ $\Leftarrow$ ”: Έστω ότι $|X|$ είναι P ολοκληρώσιμη. Δηλαδή, $\int |X| dP$ είναι πεπερασμένο. Συνεπώς, αφού $\int X dP \leq \int |X| dP$ έχουμε: $\int X dP$, άρα η X είναι P ολοκληρώσιμη

■

Πόρισμα 4

Εάν X, Y δύο P -ολοκληρώσιμες τ.μ., τότε:

$$(a) \int_{\Omega} cX dP = c \int_{\Omega} X dP, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad E(cX) = cEX, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(b) \int_{\Omega} (X+Y) dP = \int_{\Omega} X dP + \int_{\Omega} Y dP \quad \text{ή} \quad E(X+Y) = EX + EY$$

Απόδειξη

(a) Θεωρώ $c > 0$. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} E(cX) &= \int cX dP = \int (cX)^+ dP - \int (cX)^- dP = \int cX^+ dP - \int cX^- dP = \\ &= c \int X^+ dP - c \int X^- dP = c \left(\int X^+ dP - \int X^- dP \right) = c \int X dP. \end{aligned}$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται η πρόταση, για $c < 0$.

(b)

$$\begin{aligned} \int (X+Y) dP &= \int (X+Y)^+ dP - \int (X+Y)^- dP = \int (X^+ + Y^+) dP - \int (X^- + Y^-) dP = \\ &= \int X^+ dP + \int Y^+ dP - \int X^- dP - \int Y^- dP = \int X dP + \int Y dP \end{aligned}$$

■

Ορισμός 8

Εάν $A \in \mathfrak{F}$, τότε το ολοκλήρωμα της **ολοκλήρωμα** της X πάνω στο **σύνολο** A , ως προς το **μέτρο πιθανότητας** P ορίζεται σαν:

$$\int_A X dP = \int_{\Omega} X \cdot I_A dP$$

με την προϋπόθεση ότι η τ.μ. $X \cdot I_A$ είναι P -ολοκληρώσιμη.

Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει την σύγκλιση μιας ακολουθίας ολοκληρωμάτων τ.μ.

Θεώρημα 3 (Κυρίαρχης σύγκλισης)

Έστω $\{Y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ μια ακολουθία P -ολοκληρώσιμων τ.μ. τ.ω. $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Y$ **P -σχεδόν βέβαια** (δηλαδή για όλα τα ω , εκτός από αυτά που ανήκουν σε ένα σύνολο με πιθανότητα μηδέν). Έστω ακόμα ότι υπάρχει μια P -ολοκληρώσιμη τ.μ. X , τ.ω. $|Y_n| \leq X$. Τότε, η Y είναι P -ολοκληρώσιμη και:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} Y_n dP = \int_{\Omega} Y dP \quad \text{ή} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} EY_n = E(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n)$$

(μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά ορίου και ολοκληρώματος).

Παρατήρηση 6 (μέση τιμή διακριτής τ.μ)

Έστω X μια διακριτή τ.μ. με τιμές $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Θέτοντας:

$$A_n = X^{-1}(\{x_n\}) = \{\omega / X(\omega) = x_n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

τότε είναι φανερό ότι: $X = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n I_{A_n}$, $X^+ = \sum_{\{n/x_n \geq 0\}} x_n I_{A_n}$, $X^- = \sum_{\{n/x_n \leq 0\}} x_n I_{A_n}$

Εάν ορίσουμε τις τ.μ.:

$$X_m^+ = \sum_{\{n/x_n \geq 0, n \leq m\}} x_n I_{A_n}, \quad X_m^- = \sum_{\{n/x_n \leq 0, n \leq m\}} x_n I_{A_n}, \quad m = 1, 2, \dots$$

τότε η X_m^+ είναι μια απλή, μη-αρνητική τ.μ. και το:

$$\int_{\Omega} X_m^+ dP = \sum_{\{n/x_n \geq 0, n \leq m\}} x_n P(A_n) = \sum_{\{n/x_n \geq 0, n \leq m\}} x_n P\{X = x_n\}$$

Η ακολουθία των τ.μ. $\{X_m^+\}_{m=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στην τ.μ. X^+ , οπότε από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} X^+ dP &= \int_{\Omega} \lim_{m \rightarrow +\infty} X_m^+ dP = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} X_m^+ dP \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{\{n/x_n \geq 0, n \leq m\}} x_n P(A_n) = \sum_{\{n/x_n \geq 0\}} x_n P\{X = x_n\} \end{aligned}$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{\Omega} X^- dP = \int_{\Omega} \lim_{m \rightarrow +\infty} X_m^- dP = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} X_m^- dP = \sum_{\{n/x_n \leq 0\}} -x_n P\{X=x_n\}$$

Εάν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| P\{X=x_n\} < +\infty$, τότε οι τ.μ. X^+ , X^- είναι P-ολοκληρώσιμες. Η

μέση τιμή της X είναι ίση, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, με:

$$\begin{aligned} EX &= \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X^+ dP - \int_{\Omega} X^- dP = \sum_{\{n/x_n \geq 0\}} x_n P\{X=x_n\} - \sum_{\{n/x_n \leq 0\}} (-x_n) P\{X=x_n\} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n P\{X=x_n\} \end{aligned}$$

σχέση που συμφωνεί με τον ορισμό της μέσης τιμής μιας διακριτής τ.μ που δώσαμε στην αρχή του κεφαλαίου. ■

Αποδεικνύεται ακόμα ότι, και ο γνωστός ορισμός της μέσης τιμής μιας συνεχούς τ.μ. είναι μια ειδική περίπτωση του γενικού ορισμού της μέσης τιμής όπως την ορίσαμε παραπάνω.

Θεώρημα 4

Εάν $T: \Omega \rightarrow \Omega'$ μια μετρήσιμη συνάρτηση ($T^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$, $\forall A \in \mathfrak{F}'$), όπου $(\Omega', \mathfrak{F}')$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος (Ω' τυχόν σύνολο και $\mathfrak{F}'$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του), $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση τ.ω. η $g(T)$ είναι P-ολοκληρώσιμη, τότε:

$$\int_{\Omega} g(T) dP = \int_{\Omega'} g dP_T$$

όπου $P_T(A) = P\{T^{-1}(A)\} = P\{\omega / T(\omega) \in A\}$, $A \in \mathfrak{F}'$ (**επαγόμενο** από το P μέτρο **πιθανότητας**).

Παρατήρηση 7

Εάν $\Omega' = \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}' = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (σ-άλγεβρα του Borel) και $X=T$ μια τ.μ, τότε το θεώρημα μας αναφέρει ότι:

$$Eg(X) = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_{\mathbb{R}} g dP_X$$

όπου P_X η **κατανομή** της τ.μ. X . Εάν F_X είναι η σ.κ. τότε η σχέση γίνεται:

$$Eg(X) = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_{\mathbb{R}} g dF_X$$

Εάν η $g(x) = x$, τότε η σχέση αυτή γίνεται:

$$EX = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dP_x$$

Ένα από τα σπουδαιότερα μέτρα (συναρτήσεις $\mu: \mathfrak{I} \rightarrow [0, +\infty]$ που ικανοποιούν ιδιότητες ανάλογες με αυτά του μέτρου πιθανότητας) που μπορεί να ορίσει κανείς στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι το λεγόμενο μέτρο του Lebesgue.

Ορισμός 9 (μέτρο του Lebesgue)

Το (μοναδικό) μέτρο m στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ που ορίζεται από την σχέση $m((\alpha, \beta]) = \beta - \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ καλείται **μέτρο του Lebesgue** στο $\mathbb{R}$ (δηλ. το μέτρο ενός διαστήματος είναι ίσο με το **μήκος** του).

Παρατήρηση 8

(α) Εάν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι (Borel) μετρήσιμη και ο περιορισμός της f σε καθένα από τα διαστήματα $[-n, n]$ είναι μια m -ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε:

$$\int_{\mathbb{R}} f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[-n, n]} f dm$$

(β) Το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, ορίζεται από την σχέση :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^0 f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} f(x) dx$$

Εάν και οι δύο παράγοντες του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένοι, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **συγκλίνει**.

Το επόμενο θεώρημα συνδέει, το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα του Lebesgue της f ως προς το μέτρο (του Lebesgue) m .

Θεώρημα 5

Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Εάν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη τότε η f είναι **(Borel)** μετρήσιμη και τα δύο ολοκληρώματα της f (Riemann και Lebesgue) συμπίπτουν, δηλαδή:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{[\alpha, \beta]} f(x) dm$$

Ορισμός 10

Έστω X μια τ.μ. ορισμένη στον π.χ. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Μια (μη-αρνητική) συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ καλείται **πυκνότητα** της X αναφορικά με το μέτρο m , εάν:

$$P_X((\alpha, \beta]) = \int_{[\alpha, \beta]} f(x) dm, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta$$

Παρατήρηση 9

Εάν η f είναι πυκνότητα της τ.μ. X και είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε:

$$P_X((\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f dx, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta$$

(που συμφωνεί με τον ορισμό της πυκνότητας πιθανότητας μιας τ.μ.).

Πρόταση 7

Έστω X μια τ.μ. ορισμένη στον π.χ. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια (Borel) μετρήσιμη συνάρτηση. Έστω ότι υπάρχει η πυκνότητα f της X αναφορικά με το μέτρο m και η συνάρτηση $g \cdot f$ είναι m -ολοκληρώσιμη. Τότε η μέση τιμή της $g(X)$ είναι ίση με:

$$Eg(X) = \int_{\mathbb{R}} g dP_X = \int_{\mathbb{R}} g f dm$$

Εάν η $g(x) = x$, τότε η σχέση γίνεται:

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x dP_X = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dm$$

(το ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα Lebesgue και όχι Riemann).

Πόρισμα 5

Έστω X μια τ.μ. ορισμένη στον π.χ. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια (Borel) μετρήσιμη συνάρτηση. Έστω ότι υπάρχει η πυκνότητα f της X αναφορικά με το μέτρο m και:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x) dx < +\infty$$

Τότε η μέση τιμή της $g(X)$ είναι ίση με:

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Εάν η $g(x) = x$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty$, τότε η μέση τιμή της τ.μ. X είναι ίση με:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Παρατήρηση 10

Οι παραπάνω δύο τύποι συμπίπτουν με αυτούς που δώσαμε, σαν ορισμό της μέσης τιμής μιας συνεχούς τ.μ, στην αρχή του κεφαλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3° – Δεσμευμένη Πιθανότητα

3.1 Εισαγωγή

Έστω ότι έχουμε δυο γεγονότα A , B ενός πειράματος τύχης και υποθέσουμε ότι το B έχει θετική πιθανότητα να συμβεί (δηλαδή υποθέτουμε ότι $P(B) > 0$).

Έστω τώρα ότι εκτελούμε το εν λόγω πείραμα τύχης, οπότε η πληροφορία που παίρνουμε από την πραγματοποίηση του γεγονότος B , μας επιτρέπει να επαναπροσδιορίσουμε την πιθανότητα του γεγονότος A .

Η «καινούργια» αυτή πιθανότητα του γεγονότος A ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος A δοθέντος του γεγονότος B** , και συμβολίζεται:

$$P(A | B)$$

Δηλαδή, η δεσμευμένη πιθανότητα μας δίνει την δυνατότητα να *λάβουμε υπ' όψιν* (τυχόν) διαθέσιμες πληροφορίες, προσπαθώντας να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος.

3.2 Ορισμός και εφαρμογές της Δεσμευμένης πιθανότητας

Θεωρούμε τον πιθανοθεωρητικό χώρο $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και έστω $B \in \mathcal{A}$ ένα γεγονός με θετική πιθανότητα, $P(B) > 0$. Τότε:

Ορισμός 1

Η **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος A δοθέντος του γεγονότος B** παριστάνεται με το σύμβολο $P(A | B)$ και ορίζεται από τη σχέση:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Παράδειγμα 1

Σε ένα Γυμνάσιο στις εξετάσεις του Ιουνίου το 25% έγραψε στα Μαθηματικά κάτω από τη βάση, το 15% έγραψε στη Φυσική κάτω από τη βάση και το 10% των μαθητών έγραψε και στα δύο μαθήματα κάτω από τη βάση. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή του Γυμνασίου αυτού.

- i) Αν έχει αποτύχει στη Φυσική, ποια η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;
- ii) Αν έχει αποτύχει στα Μαθηματικά, ποια η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στη Φυσική;

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει αποτύχει στα Μαθηματικά και B το ενδεχόμενο να έχει αποτύχει στη Φυσική. Έτσι, έχουμε

$$P(A) = \frac{25}{100}, \quad P(B) = \frac{15}{100} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{10}{100}.$$

$$\text{i) } P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}} = \frac{10}{15} \text{ ή } 67\%$$

$$\text{ii) } P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{10}{25} \text{ ή } 40\%$$

■

Παράδειγμα 2

Για το διοικητικό συμβούλιο μιας επιχείρησης θα εκλεγεί ένας αντιπρόσωπος. Υποψήφιοι είναι 7 άνδρες και 8 γυναίκες. Από τους υποψηφίους 3 άνδρες και 6 γυναίκες είναι διοικητικοί υπάλληλοι, ενώ 4 άνδρες και 2 γυναίκες είναι τεχνικοί υπάλληλοι. Ποια η πιθανότητα να εκλεγεί διοικητικός με δεδομένο ότι έχει εκλεγεί γυναίκα?

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο “να εκλεγεί διοικητικός υπάλληλος” και B το ενδεχόμενο “να εκλεγεί γυναίκα”. Έτσι, έχουμε $P(A) = \frac{9}{15}$ και $P(B) = \frac{8}{15}$. Άρα,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{6}{8}.$$

■

Παρατήρηση 1

(α) Η δεσμευμένη πιθανότητα συνδέεται στενά και με την ανεξαρτησία. Έτσι εάν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους τότε ισχύει ότι:

$$P(A | B) = P(A)$$

δηλαδή η πληροφορία ότι συνέβη το B δεν αλλάζει την πιθανότητα του A.

Παράδειγμα 3

Έστω ότι έχουμε δύο ζάρια. Ποια η πιθανότητα «το πρώτο ζάρι να φέρει 1», αν «το δεύτερο φέρει άρτιο»; Ποια η πιθανότητα το δεύτερο ζάρι να φέρει άρτιο, αν το πρώτο φέρει 1;

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο «το πρώτο ζάρι να φέρει 1» και B το ενδεχόμενο «το δεύτερο ζάρι να φέρει άρτιο». Έτσι, έχουμε

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{36}.$$

Συνεπώς,

$$P(A/B) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} = P(A)$$

και

$$P(B/A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P(B).$$

■

Προχωράμε παρακάτω σε περισσότερες σύνθετες εφαρμογές.

Εφαρμογή 1

Εάν $\{N_t\}_{t \geq 0}$ είναι μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ , αποδεικνύεται ότι για $s < t$:

$$P\{N_s = k | N_t = n\} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} = B\left(k/n; \left(\frac{s}{t}\right)\right), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P\{N_s = k | N_t = n\} = \frac{P\{N_s = k, N_t = n\}}{P\{N_t = n\}} = \frac{P\{N_s = k, N_t - N_s = n - k\}}{P\{N_t = n\}} =$$

$$\stackrel{\alpha.\pi}{=} \frac{P\{N_s = k\} \cdot P\{N_t - N_s = n - k\}}{P\{N_t = n\}} \stackrel{\sigma.\pi}{=} \frac{P\{N_s = k\} \cdot P\{N_{t-s} = n - k\}}{P\{N_t = n\}} =$$

$$\stackrel{\alpha.\pi}{=} \frac{e^{-\lambda s} \frac{(\lambda \cdot s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^k \cdot \left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} = B\left(k/n; \left(\frac{s}{t}\right)\right)$$

■

Εφαρμογή 2

Εάν $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ είναι δύο ανεξάρτητες ανεπίξεις Poisson με ρυθμούς λ και μ αντίστοιχα, τότε:

$$P(X_t = k | X_t + Y_t = n) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} P(X_t = k | X_t + Y_t = n) &= \frac{P(X_t = k, X_t + Y_t = n)}{P(X_t + Y_t = n)} = \frac{P(X_t = k, Y_t = n - k)}{P(X_t + Y_t = n)} = \\ &= \frac{\overset{\text{ανεξ.}}{P(X_t = k)} \cdot P(Y_t = n - k)}{P(X_t + Y_t = n)} = \frac{e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\mu t} \cdot \frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda + \mu)t} \cdot \frac{((\lambda + \mu)t)^n}{n!}} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k \cdot \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

■

(β) Με την χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας αποδεικνύονται διάφορα χρήσιμα θεωρήματα, όπως θεώρημα ολικής πιθανότητας, θεώρημα Bayes κ.λ.π. (δείτε κεφάλαιο 1).

Επιπλέον, η δεσμευμένη πιθανότητα έχει σημαντικές εφαρμογές και σε ιατρικά προβλήματα.

Παράδειγμα 4

Η πιθανότητα μία γυναίκα να πάσχει από καρκίνο του μαστού στην Ελλάδα είναι 0,0001. Ένα τεστ (βιοψία) κάνει σωστή διάγνωση στο 98% των γυναικών που πάσχουν από καρκίνο του μαστού, ενώ λάθος διάγνωση στο 1% των γυναικών που πάσχουν δεν πάσχουν από καρκίνο του μαστού. Αν επιλέξουμε τυχαία μία γυναίκα στην Ελλάδα:

(α) και της κάνουμε εξέταση για καρκίνο του μαστού, ποια η πιθανότητα να είναι θετική;

(β) Αν η βιοψία που κάνει η γυναίκα είναι θετική, ποια η πιθανότητα η γυναίκα να πάσχει πράγματι από καρκίνο του μαστού;

Λύση

Ορίζουμε τα γεγονότα:

K = " η γυναίκα πάσχει από καρκίνο του μαστού "

Θ = " η βιοψία είναι θετική "

(α) Η πιθανότητα θετικής βιοψίας, με χρήση του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας είναι :

$$\begin{aligned} P(\Theta) &= P(\Theta|K)P(K)+P(\Theta|K^c)P(K^c) = \\ &= 0,98 \cdot 0,0001 + 0,01 \cdot 0,9999 = 0,010097 \end{aligned}$$

(β) Αν η βιοψία που κάνει η γυναίκα είναι θετική, τότε η πιθανότητα η γυναίκα να πάσχει πράγματι από καρκίνο του μαστού είναι:

$$P(K|\Theta) = \frac{P(\Theta|K)P(K)}{P(\Theta)} = \frac{0,000098}{0,010097} = 0,009$$

■

Παρακάτω, γενικεύουμε την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας δοθέντος ενός συνόλου με τη λεγόμενη Δεσμευμένη Πιθανότητα δοθέντος μιας κλάσης $\mathcal{A}$ (δηλαδή, όταν γνωρίζουμε πληροφορίες για το πείραμα τύχης πέρα από ένα σύνολο).

Αν θεωρήσουμε ότι $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$ τότε η **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος A δοθέντος της κλάσης $\mathcal{A}$** ορίζεται ως εξής:

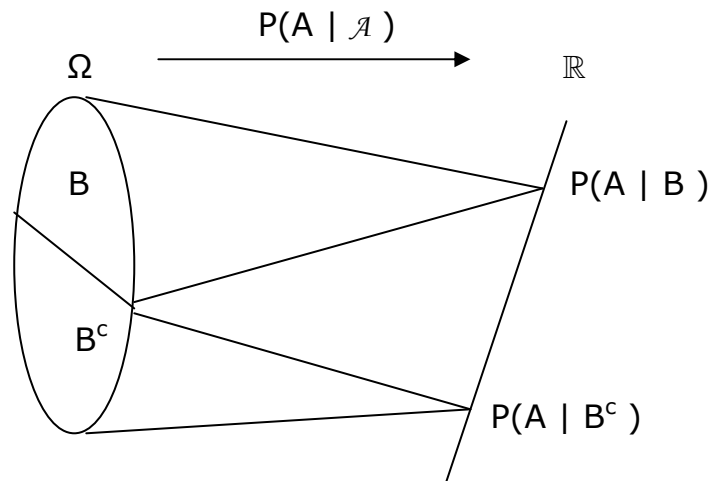
$$P(A | \mathcal{A}) \stackrel{\Delta}{=} P(A | B) \cdot I_B + P(A | B^c) \cdot I_{B^c}$$

ή

$$P(A | \mathcal{A})(\omega) = \begin{cases} P(A|B)(\omega) & \alpha \nu \quad \omega \in B \\ P(A|B^c)(\omega) & \alpha \nu \quad \omega \in B^c \end{cases}$$

Δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση η δεσμευμένη πιθανότητα παίρνει τη μορφή μιας δίτιμης συνάρτησης (με τιμή $P(A|B)(\omega)$ αν $\omega \in B$, και με τιμή $P(A|B^c)(\omega)$ αν $\omega \in B^c$).

Παριστάνοντας τα παραπάνω, γραφικά, έχουμε το εξής σχήμα:



Ο ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας, γενικότερα, παίρνει την εξής μορφή:

Ορισμός 2

Αν $P = \{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι μία διαμέριση του Ω τότε η **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος A ως προς τη διαμέριση P** ορίζεται ως εξής:

$$P(A | P) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A | B_j) \cdot I_{B_j}$$

Με άλλα λόγια, αν θεωρήσουμε ότι $\mathcal{B} = \sigma(P)$ (σ-άλγεβρα που γεννιέται από την κλάση P) τότε η παραπάνω σχέση, η **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος A ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$** , παίρνει την εξής μορφή:

$$P(A | P) = P(A | \mathcal{B})$$

Παρατήρηση 2

Εάν συμβεί για κάποιο B_j , $P(B_j) = 0$, τότε ορίζουμε την $P(A | \mathcal{B})$ να παίρνει οποιαδήποτε σταθερή τιμή στο B_j . Γι' αυτό οποιεσδήποτε δύο τέτοιες συναρτήσεις $P(A | \mathcal{B})$ καλούνται **παραλλαγές της δεσμευμένης πιθανότητας του γεγονότος A δοθέντος της κλάσης $\mathcal{B}$** .

Εφαρμογή 3

Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σε έναν πιθανοθεωρητικό χώρο $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, με τιμές στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, $A = \{X = j\}$, $B_i = \{X + Y = i\}$, όπου j σταθερός

αριθμός. Αν $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ μία διαμέριση του Ω και $\mathcal{B} = \sigma(B_j; j \in \mathbb{N})$, τότε να υπολογισθεί να υπολογισθεί η $P(A | \mathcal{B})$.

Λύση

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας ενός γεγονότος ως προς μια σ-άλγεβρα, έχουμε:

$$P(A | \mathcal{B}) = \sum_{i \geq j} P(A | B_i) \cdot I_{B_i}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} P(A | B_i) &= P(X=j | X+Y=i) = \frac{P(X=j, X+Y=i)}{P(X+Y=i)} = \\ &= \frac{P(X=j) \cdot P(Y=i-j)}{P(X+Y=i)}, \text{ αν } i \geq j \end{aligned}$$

Οπότε,

$$P(A | \mathcal{B}) = \sum_{i \geq j} \frac{P(X=j) \cdot P(Y=i-j)}{P(X+Y=i)} \cdot I_{\{X+Y=i\}}$$

■

Ειδική Περίπτωση

Αν X, Y είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$ τότε είναι γνωστό ότι ισχύει $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$.

Στην περίπτωση αυτή η $P(A | \mathcal{B})$ θα ήταν:

$$\begin{aligned} P(A | \mathcal{B}) &= \sum_{i \geq j} \frac{P(X=j) \cdot P(Y=i-j)}{P(X+Y=i)} \cdot I_{\{X+Y=i\}} = \sum_{i \geq j} \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{i-j}}{(i-j)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^i}{i!}} \cdot I_{\{X+Y=i\}} = \\ &= \sum_{i \geq j} \binom{i}{j} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^i \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j \cdot I_{\{X+Y=i\}} \end{aligned}$$

■

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει τη δεσμευμένη πιθανότητα ενός γεγονότος A δοθέντος της κλάσης $\mathcal{B}$, όπου $\mathcal{B}$ είναι μία σ-άλγεβρα που γεννιέται από μία πεπερασμένη ή αριθμήσιμη διαμέριση του δειγματοχώρου Ω . Είναι φανερό από τον ορισμό αυτό ότι, η **δεσμευμένη πιθανότητα** $P(A | \mathcal{B})$ **του γεγονότος A ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$** , ικανοποιεί τις δύο παρακάτω ιδιότητες:

I. $P(A | \mathcal{B}) = \mathcal{B}$ -μετρήσιμη, δηλαδή οι τιμές της εξαρτώνται μόνο από τα σύνολα της κλάσης $\mathcal{B}$.

II. $\int_G P(A | \mathcal{B}) dP = P(A \cap G)$, για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$.

Αν στη γενικότερη μορφή, θεωρήσουμε την κλάση $\mathcal{B}$ να είναι μία σ-άλγεβρα που δημιουργήθηκε από μία μη αριθμήσιμη διαμέριση του Ω , τότε έχουμε τον παρακάτω (αντίστοιχο) ορισμό:

Ορισμός 3α (δεσμευμένη πιθανότητα ως προς (τυχούσα) σ-άλγεβρα)

Η **δεσμευμένη πιθανότητα** $P(A | \mathcal{B})$ του γεγονότος **A** ως προς την **σ-άλγεβρα** $\mathcal{B}$ (η $\mathcal{B}$ θεωρείται υπό- σ-άλγεβρα της $\mathcal{A}$, δηλαδή $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$), είναι μιά συνάρτηση (η $P(A | \mathcal{B}) : \Omega \rightarrow [0, 1]$) που ικανοποιεί τις ιδιότητες I και II παραπάνω.

Ένας δεύτερος ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας, με την βοήθεια του θεωρήματος Radon-Nikodym, είναι αυτός που ακολουθεί:

Ορισμός 3β (Εναλλακτικός ορισμός)

Εάν $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας και για $A \in \mathcal{B}$, όπου A σταθερό, ορίσουμε το μέτρο

$$V(G) = P(A \cap G), \quad (V: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]).$$

Τότε το V είναι απόλυτα συνεχές, σε σχέση με το P , δηλαδή $V \ll P$.

Πράγματι, αν $P(G) = 0 \Rightarrow P(A \cap G) = 0 \Rightarrow V(G) = 0$

Άρα, από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει συνάρτηση $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη τέτοια ώστε:

$$v(G) = \int_G f dP = P(A \cap G),$$

απ' όπου έπεται ότι $f = P(A | \mathcal{B})$.

Ο ορισμός 3α της δεσμευμένης πιθανότητας συμφωνεί με εκείνον που δόθηκε στην περίπτωση μιας αριθμήσιμης διαμέρισης (ορισμός 2).

Σχόλιο 1 (επέκταση του ορισμού στην διακριτή περίπτωση)

Αν $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι μία αριθμήσιμη διαμέριση του Ω και ορίσουμε σαν

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) \cdot I_{B_i},$$

τότε (α) η f είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη και

(β) για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$ και $G = \bigcup_k B_{i_k}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \int_G f dP &= \int_G \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) \cdot I_{B_i} dP = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} P(A|B_i) \cdot I_{B_i \cap G} dP = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) \cdot P(B_i \cap G) \stackrel{G=B_k}{=} \sum_{\substack{k \\ B_k \subset G}} P(A|B_k) \cdot P(B_k) = \\ &= \sum_{\substack{k \\ B_k \subset G}} \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \cdot P(B_k) = \sum_{\substack{k \\ B_k \subset G}} P(A \cap B_k) = P(A \cap G) \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι ικανοποιείται η (II) ιδιότητα, του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας.

Δηλαδή, ο παραπάνω ορισμός 3α είναι μία γενίκευση (του ορισμού 2) της δεσμευμένης πιθανότητας ως προς τυχούσα σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$.

Εφαρμογή 5 (Γενικευμένο θεώρημα Bayes)

Αποδεικνύεται ότι, για κάθε γεγονός B που ανήκει στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ ισχύει:

$$P(A | \mathcal{B}) = \frac{\int_{\Omega} P(A|B) dP}{\int_{\Omega} P(A|B) dP}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A | B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\int_{\Omega} P(A|B) dP}{\int_{\Omega} P(A|B) dP} \end{aligned}$$

■

Αποδεικνύουμε παρακάτω ότι το Θεώρημα Bayes (δείτε και παράδειγμα 4), είναι μια ειδική περίπτωση της εφαρμογής 5.

Παρατήρηση 3 (Θεώρημα Bayes, κλασσική μορφή)

Αν $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ διαμέριση του Ω και $\mathcal{B} = \sigma(\{B_j / j \in \mathbb{N}\})$ τότε, από το γενικευμένο θεώρημα Bayes, προκύπτει το γνωστό θεώρημα Bayes που έχει ως εξής:

$$P(B_k | A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}$$

Πράγματι,

$$P(B_k | A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{\int_{B_k} P(A | B) dP}{\int_{\Omega} P(A | B) dP} \quad (1)$$

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει ότι:

$$P(A | \mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot I_{B_j}$$

Άρα, για κάθε $B_k \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \int_{B_k} P(A | \mathcal{B}) dP &= \int_{B_k} \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot I_{B_j} dP \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) \cdot P(B_i \cap B_k) = P(A|B_k) \cdot P(B_k) \quad (2) \end{aligned}$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{\Omega} P(A | \mathcal{B}) dP = \sum_j P(A|B_j) \cdot P(B_j) = P(A) \quad (3)$$

Επομένως, η σχέση (1) με τη βοήθεια των σχέσεων (2) και (3) έχει ως εξής:

$$P(B_k | A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}$$

■

Παίρνουμε δηλαδή μια δεύτερη απόδειξη του κλασσικού θεωρήματος Bayes, με την βοήθεια των δεσμευμένων πιθανοτήτων.

Συνεχίζοντας, δίνουμε την μορφή που παίρνει η δεσμευμένη πιθανότητας σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις.

Πρόταση 1

- 1) Αν $A \in \mathcal{B}$ τότε $P(A | \mathcal{B}) = I_A$
- 2) Αν $\mathcal{B} = \{ \emptyset, \Omega \}$ τότε $P(A | \mathcal{B}) = P(A)$
- 3) Το A είναι ανεξάρτητο της $\mathcal{B}$ αν και μόνον αν ισχύει

$$P(A | \mathcal{B}) = P(A).$$

Απόδειξη

- 1) Για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$ ισχύει:

$$\int_G P(A | \mathcal{B}) dP = P(A \cap G) = \int_{\Omega} I_{A \cap G} dP \stackrel{(1)}{=} \int_{\Omega} I_A \cdot I_G dP = \int_G I_A dP,$$

και λόγω του ότι η I_A είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη, έχουμε: $P(A | \mathcal{B}) = I_A$.

$$2) P(A | \mathcal{B}) = P(A | \emptyset) \cdot I_{\emptyset} + P(A | \Omega) \cdot I_{\Omega} =$$

$$= P(A | \Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = \frac{P(A)}{1} = P(A),$$

αφού ισχύει ότι:

$$I_{\emptyset}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \emptyset \\ 0, & x \notin \emptyset \end{cases}, \text{ δηλαδή } I_{\emptyset} \equiv 0$$

και

$$I_{\Omega}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}, \text{ δηλαδή } I_{\Omega} \equiv 1.$$

- 3) ($\Rightarrow$) Έστω ότι το A είναι ανεξάρτητο της $\mathcal{B}$. Τότε ισχύει ότι:
για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$

$$P(A \cap G) = P(A) \cdot P(G) = P(A) \cdot \int_G dP = \int_G P(A) dP = \int_G P(A | \mathcal{B}) dP.$$

Επομένως, $P(A | \mathcal{B}) = P(A)$.

- ($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω ότι $P(A | \mathcal{B}) = P(A)$. Τότε ισχύει:
για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$

$$P(A \cap G) = \int_G P(A | \mathcal{B}) dP = \int_G P(A) dP = P(A) \cdot \int_G dP = P(A) \cdot P(G).$$

Δηλαδή, το A είναι ανεξάρτητο της $\mathcal{B}$.

■

3.3 Ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας

Αναφέρουμε παρακάτω τις βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας, δοθείσης μιας σ-άλγεβρας.

Πρόταση 2 (Ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας)

- i. $0 \leq P(A | \mathcal{B}) \leq 1$, για κάθε γεγονός $A \in \mathcal{B}$.
- ii. Αν $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$ τότε $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j | \mathcal{B}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j | \mathcal{B})$
- iii. Αν $A \subset B$ τότε $P(A | \mathcal{B}) \leq P(B | \mathcal{B})$
- iv. $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j | \mathcal{B}\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j | \mathcal{B}) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j | \mathcal{B}) + \dots$
- v. Αν $A_n \uparrow A$ τότε $P(A_n | \mathcal{B}) \uparrow P(A | \mathcal{B})$
 Αν $A_n \downarrow A$ τότε $P(A_n | \mathcal{B}) \downarrow P(A | \mathcal{B})$
- vi. Αν $P(A) = 1$ τότε $P(A | \mathcal{B}) = 1$
 Αν $P(A) = 0$ τότε $P(A | \mathcal{B}) = 0$

Απόδειξη

i) Η $P(A | \mathcal{B})$ είναι για κάθε ω ένα μέτρο πιθανότητας και ξέρουμε ότι $\forall A \in \mathcal{B}, 0 \leq P(A) \leq 1$, οπότε: $0 \leq P(A | \mathcal{B}) \leq 1$.

ii) Για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \int_G P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j | \mathcal{B}\right) dP &= \\ &= P\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap G\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap G)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \cap G) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_G P(A_j | \mathcal{B}) dP = \int_G \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j | \mathcal{B}) dP$$

Άρα,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \mid \mathcal{B}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j | \mathcal{B}).$$

iii) Για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$ ισχύει:

$$\int_G P(A | \mathcal{B}) dP = P(A \cap G) \stackrel{(1)}{\leq} P(B \cap G) = \int_G P(B | \mathcal{B}) dP$$

όπου η (1) έπεται από το ότι: $A \subseteq B$. Άρα,

$$P(A | \mathcal{B}) \leq P(B | \mathcal{B}).$$

iv) Θα δείξω ότι ισχύει για δύο σύνολα A, Γ δηλαδή :

$$P(A \cup \Gamma | \mathcal{B}) = P(A | \mathcal{B}) + P(\Gamma | \mathcal{B}) - P(A \cap \Gamma | \mathcal{B})$$

Οπότε, για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \int_G P(A \cup \Gamma | \mathcal{B}) dP &= P((A \cup \Gamma) \cap G) = P((A \cap G) \cup (\Gamma \cap G)) = \\ &= P(A \cap G) + P(\Gamma \cap G) - P(A \cap \Gamma \cap G) = \\ &= \int_G P(A | \mathcal{B}) dP + \int_G P(\Gamma | \mathcal{B}) dP - \int_G P(A \cap \Gamma | \mathcal{B}) dP = \\ &= \int_G (P(A | \mathcal{B}) + P(\Gamma | \mathcal{B}) - P(A \cap \Gamma | \mathcal{B})) dP \end{aligned}$$

Άρα,

$$P(A \cup \Gamma | \mathcal{B}) = P(A | \mathcal{B}) + P(\Gamma | \mathcal{B}) - P(A \cap \Gamma | \mathcal{B})$$

Επαγωγικά, ισχύει για n σύνολα.

v) Για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$ ισχύει:

$$\int_G P(A_n | \mathcal{B}) dP = P(A_n \cap G) \rightarrow P(A \cap G) = \int_G P(A | \mathcal{B}) dP.$$

Αφού από την συνέχεια του πιθανοθεωρητικού μέτρου ισχύει:

$$A_n \uparrow A \Rightarrow A_n \cap G \uparrow A \cap G$$

Άρα,

$$P(A_n | \mathcal{B}) \uparrow P(A | \mathcal{B}) .$$

Αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι $P(A_n | \mathcal{B}) \downarrow P(A | \mathcal{B})$ αν $A_n \downarrow A$, με την βοήθεια της συνέχειας του πιθανοθεωρητικού μέτρου.

vi) Για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$, αν $P(A)=1$, ισχύει:

$$\begin{aligned} \int_G P(A | \mathcal{B}) dP &= P(A \cap G) = P(A) + P(G) - P(A \cup G) = \\ &= 1 - P(G) - I = P(G) = \int_G 1 dP \end{aligned}$$

Άρα,

$$P(A | \mathcal{B}) = 1 .$$

Ακόμα, για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$, αν $P(A)=0$, ισχύει:

$$\int_G P(A | \mathcal{B}) dP = P(A \cap G) \stackrel{P(A)=0}{=} 0$$

Άρα,

$$P(A | \mathcal{B}) = 0 .$$

■

Παρατήρηση 4

- 1) Οι ιδιότητες (i) και (ii) αναφέρουν, μ' άλλα λόγια, ότι η συνολο-συνάρτηση $P(\cdot | \mathcal{B})$ είναι πιθανοθεωρητικό μέτρο (ορισμένο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$).
- 2) Όσο η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ μικραίνει τόσο πιο περιοριστική είναι η ιδιότητα (I) του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας. Αντίθετα, όσο αυξάνει η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$, τόσο πιο περιοριστική γίνεται η ιδιότητα (II) του ορισμού της.

Καταλήγοντας, αναφέρουμε όχι μόνο τον ορισμό αλλά και κάποιες εφαρμογές της δεσμευμένης πιθανότητας ενός γεγονότος ως προς μία τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 4 (δεσμευμένη πιθανότητα ως προς μια τ.μ.)

Έστω X μια τ.μ. ορισμένη στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και $\sigma(X)$ η σ-άλγεβρα που γεννιέται από την X , δηλαδή

$$\sigma(X) = \sigma\left(\{\omega / X(\omega) \in B\}_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\right)$$

Τότε η **δεσμευμένη πιθανότητα** $P(A | X)$ του γεγονότος **A** ως προς την **τ.μ. X**, ορίζεται να είναι η:

$$P(A | X) = P(A | \sigma(X))$$

Εφαρμογή 6

Έστω $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ μία τυχαία μεταβλητή ακεραίων τιμών. Αν ορίσουμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P\{A|X=x\}$ σαν οποιαδήποτε $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -μετρήσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε:

$$P(A, X \in B) = \int_B \underbrace{P(A|X=x)}_{\varphi(x)} dP \circ X^{-1}(x), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (1)$$

τότε ικανοποιεί τη σχέση:

$$P(A, X=j) = \varphi(j) \cdot P(X=j) \quad \forall j$$

Εάν $P(X=j) > 0$ τότε συμπεραίνετε ότι κάθε παραλλαγή της παραπάνω δεσμευμένης πιθανότητας ικανοποιεί τη σχέση:

$$P(A|X=j) = \frac{P(A, X=j)}{P(X=j)}$$

Απόδειξη

Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου $B = \{j\}$, τότε προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} P\{A, X=j\} &= \int_{\{j\}} P(A|X=x) dP \circ X^{-1}(x) = \underbrace{P(A|X=j)}_{\varphi(j)} \cdot P \circ X^{-1}(\{j\}) \\ &= P(A|X=j) \cdot P\{X=j\} \end{aligned}$$

Αν $P(X=j) > 0$ είναι φανερό ότι από το παραπάνω προκύπτει ότι:

$$P\{A, X=j\} = P(A|X=j) \cdot P\{X=j\} \Leftrightarrow P(A|X=j) = \frac{P\{A, X=j\}}{P\{X=j\}}$$

■

Σχόλιο 2

Εάν X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές που έχουν από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f(x,y)$, τότε:

$$P(X \in G, Y \in A) = \int_G \int_A f(x,y) dx dy$$

Κατά συνέπεια θα ισχύει ότι:

$$P(X \in G) = \int_G \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy dx$$

Δηλαδή,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy$$

Εφαρμογή 7

Εάν X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές που έχουν από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f(x,y)$, τότε να δείξετε ότι για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ισχύει ότι:

$$P(Y \in B | X = x) = \int_B \frac{f(y,x)}{f(x)} dy$$

Απόδειξη

Κάθε παραλλαγή της $P(Y \in B | X = x)$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$P\{Y \in B, X \in G\} = \int_G P(Y \in B | X = x) dP \circ X^{-1}(x), \quad G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Όμως, $P\{X \in A\} = \int_A f(x) dx$. Οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$P(Y \in B, X \in G) = \int_G P(Y \in B | X = x) f(x) dx \quad (1)$$

Αλλά,

$$P(Y \in B, X \in G) = \int_G \int_B f(x,y) dy dx.$$

Επομένως, για κάθε $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, η σχέση (1) γίνεται ως εξής:

$$P\{Y \in B, X = x\} = \int_B \frac{f(y,x)}{f(x)} dy, \text{ όπου } 0 < f(x) < \infty.$$

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4° – Δεσμευμένη Μέση Τιμή

4.1 Εισαγωγή

Ένα από τα βασικά εργαλεία για την μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών είναι και η δεσμευμένη μέση τιμή. Η έννοια αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν ασχολείται κάποιος (μελετά) χρηματοοικονομικά δικαιώματα (options), γιατί χρειάζεται να κάνει εκτεταμένη χρήση, μέσω των τιμών οι οποίες υπολογίζονται λαμβάνοντας υπ' όψιν (έχοντας γνώση) του «ιστορικού» του δικαιώματος (παρελθοντική συμπεριφορά του). Η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής αποτελεί γενίκευση της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας.

Ξεκινώντας, δίνουμε ένα παράδειγμα στο οποίο φαίνεται η αναγκαιότητα ορισμού της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Παράδειγμα 1

Σε μια οικογένεια με τρία παιδιά (A, K) , έστω X ο αριθμός των κοριτσιών. Έχουμε:

$$\Omega = \{KKK, KKA, KAK, AKK, KAA, AKA, AAK, AAA\}$$

Οι πιθανές τιμές του X είναι: 0,1,2,3

Άρα,

$$P(X=0)=1/8, P(X=1)=3/8, P(X=2)=3/8, P(X=3)=1/8.$$

Οπότε,

$$EX=0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/8 = 12/8 = 1,5$$

Αν, όμως, είναι γνωστό ότι το πρώτο παιδί είναι κορίτσι, τότε:

$$E(X|1^\circ \text{ παιδί κορίτσι}) = 3 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4 = 2$$

Αν, όμως, είναι γνωστό ότι το πρώτο παιδί είναι αγόρι, τότε:

$$E(X|1^\circ \text{ παιδί αγόρι}) = 2 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/4 = 1$$

■

Παρατήρηση 1

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής αλλάζει όταν έχουμε κάποια πληροφορία γι' αυτήν.

Έστω Ω =πεπερασμένο, $\mathcal{F}=P(\Omega)$ και $P(\{\omega\})>0, \forall \omega \in \Omega, A \in \mathcal{F}$ και $P(A) \neq 0, P(A) \neq 1$. Τότε:

$$\begin{aligned} E(X|A) &= \sum_{\omega \in A} X(\omega) \cdot P(\{\omega\} | A) = \sum_{\omega \in A} X(\omega) \cdot \frac{P(\{\omega\} \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega) \cdot P(\omega) = \frac{1}{P(A)} \int_A X dP \end{aligned}$$

Άρα,

$$E(X|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A X dP$$

Ανάλογα,

$$E(X|A^c) = \frac{1}{P(A^c)} \int_{A^c} X dP$$

Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ που γεννιέται από το σύνολο A είναι ίση με

$$\mathcal{B} = \{ \emptyset, A, A^c, \Omega \}$$

Αν, λοιπόν, $B \in \mathcal{B}$ και $P(B) > 0$, τότε είδαμε:

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP$$

Έχουμε, δηλαδή, τον παρακάτω ορισμό.

4.2 Ορισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας πιθανοθεωρητικός χώρος και $B \in \mathcal{A}$ ένα γεγονός με θετική πιθανότητα, $P(B) > 0$. Έστω ακόμα X μία ολοκληρώσιμη τ.μ, ($EX < \infty$).

Ορισμός 1

Η **δεσμευμένη μέση τιμή** της τ.μ. X **δοθέντος του γεγονότος B** , (συμβολικά $E[X|B]$), είναι ο αριθμός που ορίζεται από τη σχέση:

$$E[X|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \frac{E[X \cdot I_B]}{P(B)}$$

Αν $P(B)=0$, τότε η $E[X|B]$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε αυθαίρετη τιμή c που θέλουμε ($E[X|B]=c$).

Παράδειγμα 2

Ρίχνουμε τρία νομίσματα των 1, 2, 5 λεπτών. Έστω ξ η συνολική αξία των νομισμάτων για τα οποία το αποτέλεσμα της ρίψης τους είναι γράμματα. Αν B είναι το γεγονός "δύο από τα αποτελέσματα της

ρίψης είναι γράμματα”, να υπολογιστεί η $E(X|B)$ (δηλαδή, ποια η αναμενόμενη συνολική αξία ξ των νομισμάτων, δεδομένου ότι δύο από αυτά «έρχονται» γράμματα).

Λύση

Έστω $B=\{\Gamma\Gamma\text{Κ}, \Gamma\text{Κ}\Gamma, \text{Κ}\Gamma\Gamma\}$. Κάθε αποτέλεσμα έχει πιθανότητα $1/8$.

Επίσης,

$$X(\Gamma\Gamma\text{Κ})=1+2=3$$

$$X(\Gamma\text{Κ}\Gamma)=1+5=6$$

$$X(\text{Κ}\Gamma\Gamma)=2+5=7$$

Οπότε,

$$E(X|B)=\frac{1}{P(B)}\int_B XdP=\frac{1}{3/8}\left(\frac{3}{8}+\frac{6}{8}+\frac{7}{8}\right)=\frac{16}{3}$$

■

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε ένα πείραμα το οποίο έχει τρία δυνατά αποτελέσματα. Το αποτέλεσμα i συμβαίνει με πιθανότητα p_i , $i=1,2,3$ με $\sum_{i=1}^3 p_i=1$.

Υποθέτουμε ότι η ανεξάρτητες επαναλήψεις του ίδιου πειράματος εκτελούνται και με X_i , $i=1,2,3$ ορίζουμε τις φορές των i αποτελεσμάτων που εμφανίζονται.

(α) Προσδιορίστε την κατανομή του X_1 δεδομένου ότι $X_2 = m$.

(β) Υπολογίστε την δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X_1 δεδομένου ότι $X_2 = m$.

Λύση

(α) Για $k \leq n-m$ έχουμε:

$$P\{X_1 = k | X_2 = m\} = \frac{P\{X_1 = k, X_2 = m\}}{P\{X_2 = m\}}$$

Τώρα αν $X_1 = k$ και $X_2 = m$, τότε συναπάγεται ότι $X_3 = n-k-m$.

Ωστόσο,

$$P\{X_1 = k, X_2 = m, X_3 = n-k-m\} = \frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} p_1^k p_2^m p_3^{(n-k-m)}.$$

Αυτό συνεπάγεται από το ότι, σε κάθε συγκεκριμένη ακολουθία από n πειράματα όπου το αποτέλεσμα 1 εμφανίζεται k φορές και το αποτέλεσμα 2 εμφανίζεται m φορές, το αποτέλεσμα 3 θα εμφανίζεται $(n-k-m)$ φορές με πιθανότητα $p_1^k p_2^m p_3^{(n-k-m)}$ και μάλιστα

υπάρχουν $\frac{n!}{k!m!(n-k-m)!}$ τέτοιες ακολουθίες.

Επομένως, έχουμε:

$$P\{X_1 = k | X_2 = m\} = \frac{\frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} p_1^k p_2^m p_3^{(n-k-m)}}{\frac{n!}{m!(n-m)!} p_2^m (1-p_2)^{n-m}}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει ότι η X_2 έχει διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p_2 .

Έτσι,

$$P\{X_1 = k | X_2 = m\} = \frac{(n-m)!}{k!(n-m-k)!} \left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^k \left(\frac{p_3}{1-p_2}\right)^{n-m-k}.$$

Ισοδύναμα, γράφοντας $p_3 = 1 - p_1 - p_2$, έχουμε

$$P\{X_1 = k | X_2 = m\} = \binom{n-m}{k} \left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^k \left(1 - \frac{p_1}{1-p_2}\right)^{n-m-k}$$

Δηλαδή, η κατανομή του X_1 με δεδομένο ότι $X_2 = m$ είναι μια διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n-m$ και $\frac{p_1}{1-p_2}$.

(β) Στο (α) είδαμε ότι η κατανομή του X_1 με δεδομένο ότι $X_2 = m$ είναι μια διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n-m$ και $\frac{p_1}{1-p_2}$, οπότε:

$$E[X_1 | X_2 = m] = (n-m) \cdot \frac{p_1}{1-p_2}$$

■

Ο ορισμός 1 μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση που δεν έχουμε δέσμευση ως προς ένα σύνολο μόνον, αλλά ως προς μία κλάση συνόλων.

Ορισμός 2

Έστω $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη διαμέριση του Ω και $\mathcal{B} = \sigma(\{B_j; j \in \mathbb{N}\})$.

Η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθείσης της κλάσης $\mathcal{B}$** , είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την σχέση:

$$E[X | \mathcal{B}] = \sum_j E[X | B_j] \cdot I_{B_j}$$

Παράδειγμα 4

Αν θεωρήσουμε ότι η κλάση $\mathcal{B}$ είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα (εδώ $B_1 = \emptyset, B_2 = \Omega$), δηλαδή $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$, τότε προκύπτει:

$$E[X | \mathcal{B}] = E[X | \Omega] \cdot I_{\Omega} + E[X | \emptyset] \cdot I_{\emptyset} = E[X | \Omega] = \int_{\Omega} X dP = E[X]$$

Δηλαδή, $E[X | \mathcal{B}] = E[X]$

Στην περίπτωση αυτή η δέσμευση ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ δεν μας δίνει καμία πληροφορία, και έτσι η $E[X | \mathcal{B}] = E[X]$. ■

Παράδειγμα 5

Έστω $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα του Borel και P το μέτρο του Lebesgue στο $[0, 1]$ (μήκος διαστήματος). Θεωρούμε τη διαμέριση $B_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right), B_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), B_3 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), B_4 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Αν $\mathcal{B} = \sigma(\{B_1, B_2, B_3, B_4\})$ και η τ.μ. $X(x) = 4x^3$, να υπολογιστεί η $E[X | \mathcal{B}]$.

Λύση

Εδώ η $\mathcal{B}$ γεννιέται από τα σύνολα:

$$B_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right), B_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), B_3 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), B_4 = \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Οπότε,

$$P(B_1) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}, P(B_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, P(B_3) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, P(B_4) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ακόμη, από τον ορισμό της $E[X | \mathcal{B}]$, $B \in \mathcal{B}$, έχουμε:

$$E(X | B_1) = E\left(X \left[0, \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{P(B_1)} \int_{B_1} X dP = \frac{1}{1/4} \int_0^{1/4} 4x^3 dx = 4 \cdot \left[\frac{4x^4}{4}\right]_0^{1/4} = \frac{1}{64}$$

$$E(X | B_2) = E\left(X \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{P(B_2)} \int_{B_2} X dP = \frac{1}{1/4} \int_{1/4}^{1/2} 4x^3 dx = 4 \cdot \left[\frac{4x^4}{4}\right]_{1/4}^{1/2} = \frac{15}{64}$$

$$E(X | B_3) = E\left(X \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right) = \frac{1}{P(B_3)} \int_{B_3} X dP = \frac{1}{1/4} \int_{1/2}^{3/4} 4x^3 dx = 4 \cdot \left[\frac{4x^4}{4}\right]_{1/2}^{3/4} = \frac{65}{64}$$

$$E(X | B_4) = E\left(X \left[\frac{3}{4}, 1\right)\right) = \frac{1}{P(B_4)} \int_{B_4} X dP = \frac{1}{1/4} \int_{3/4}^1 4x^3 dx = 4 \cdot \left[\frac{4x^4}{4}\right]_{3/4}^1 = \frac{175}{64}$$

Άρα,

$$E[X| \mathcal{B}] = \begin{cases} \frac{1}{64}, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ \frac{15}{64}, & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{65}{64}, & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ \frac{175}{64}, & x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

ή

$$E[X| \mathcal{B}] = \frac{1}{64} I_{B_1}(\cdot) + \frac{15}{64} I_{B_2}(\cdot) + \frac{65}{64} I_{B_3}(\cdot) + \frac{175}{64} I_{B_4}(\cdot)$$

■

Παρατήρηση 2

Η δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δοθείσης της κλάσης $\mathcal{B}$ (σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ που γεννιέται δηλαδή από μια αριθμήσιμη διαμέριση) έχει τις δυό παρακάτω ιδιότητες.

I. $E[X| \mathcal{B}] = \mathcal{B}$ -μετρήσιμη, οι τιμές της δηλαδή εξαρτώνται μόνο από τα σύνολα της κλάσης συνόλων $\mathcal{B}$.

II. $\int_B E[X| \mathcal{B}] dP = \int_B X dP$, για κάθε B που ανήκει στη $\mathcal{B}$.

Γιατί

I. Είναι φανερό από τον ορισμό της (σαν άθροισμα $\mathcal{B}$ -μετρήσιμων συναρτήσεων).

II. Εάν B γεγονός που ανήκει στη $\mathcal{B}$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_B E[X| \mathcal{B}] dP &= \int_B \sum_{j=1}^{\infty} E[X|B_j] \cdot I_{B_j} dP = \sum_{j=1}^{\infty} \int_B E[X|B_j] \cdot I_{B_j} dP \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega} E[X|B_j] \cdot I_{B_j} \cdot I_B dP = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega} E[X|B_j] \cdot I_{B_j \cap B} dP \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E[X|B_j] P(B_j \cap B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j \cap B) \int_{B_j} \frac{X}{P(B_j)} dP \\ &= \sum_{\{j; B_j \subset B\}} \int_{B_j} X dP = \int_B X dP \end{aligned}$$

Εάν η σ -άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι τυχούσα, **δεν** γεννιέται δηλαδή από μια αριθμήσιμη διαμέριση, τότε ο ορισμός 2 έχει την παρακάτω (γενικότερη μορφή).

Ορισμός 3

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας πιθανοθεωρητικός χώρος, X μια τ.μ. ορισμένη στον Ω και $\mathcal{B}$ μια σ -άλγεβρα (υπό- σ -άλγεβρα της $\mathcal{A}$, δηλαδή $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$). Η **δέσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθείσης της σ -άλγεβρας $\mathcal{B}$** , είναι μία τυχαία μεταβλητή (συμβολίζεται με $E[X | \mathcal{B}]$) τέτοια ώστε:

I. $E[X | \mathcal{B}] = \mathcal{B}$ -μετρήσιμη

II. $\int_B E[X | \mathcal{B}] dP = \int_B X dP$, για κάθε B που ανήκει στη $\mathcal{B}$.

Παράδειγμα 6

Εάν θεωρήσουμε ότι $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ και X είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη τ.μ., τότε δεδομένου ότι:

i. $X = \mathcal{B}$ -μετρήσιμη.

ii. Για κάθε B που ανήκει στη $\mathcal{B}$ ισχύει $\int_B X dP = \int_B X dP$. Οπότε, έχουμε

$$E[X | \mathcal{B}] = X$$

Δηλαδή, στην προκειμένη περίπτωση η δέσμευση ως προς την σ -άλγεβρα $\mathcal{B}$ μας δίνει όλες τις δυνατές πληροφορίες. ■

Παράδειγμα 7

Εάν θεωρήσουμε ότι $A \in \mathcal{B}$ είναι ένα γεγονός (του δειγματοχώρου Ω) και $\mathcal{B}$ μία σ -άλγεβρα, τότε ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$P[A | \mathcal{B}] = E[I_A | \mathcal{B}] \quad (\text{σ.β.})$$

Πράγματι, εάν $B \in \mathcal{B}$, τότε έχουμε:

$$\int_B E[X | \mathcal{B}] dP = \int_B E[I_A | \mathcal{B}] dP = \int_B I_A dP = \int_{\Omega} I_A \cdot I_B dP = \int_{\Omega} I_{A \cap B} dP$$

Που σημαίνει ότι:

$$P[A | \mathcal{B}] = E[I_A | \mathcal{B}]$$

Δηλαδή η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι γενίκευση της αντιστοίχης της δεσμευμένης πιθανότητας.

■

Παρατήρηση 3

Το ότι ο ορισμός 3 είναι συνεπής με τον ορισμό 2, άρα αποτελεί μια γενίκευση του, είναι φανερό από την παρατήρηση 2.

Μια ειδική περίπτωση του παραπάνω ορισμού 3 είναι και ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 4

Εάν X, Y είναι δύο τ.μ. τότε η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθείσης της τ.μ. Y** , είναι η τυχαία μεταβλητή που ορίζεται από την σχέση

$$E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)]$$

όπου $\sigma(Y)$ η σ-άλγεβρα που γεννιέται από την τ.μ. Y .

Παράδειγμα 8

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ με σ-άλγεβρα $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ και μέτρο πιθανότητας P που ορίζεται από:

$$\begin{aligned} P(\{1\}) &= P(\{2\}) = 1/16 \\ P(\{3\}) &= P(\{4\}) = 4/16 \\ P(\{5\}) &= P(\{6\}) = 3/16 \end{aligned}$$

Επίσης, έστω $X = 2I_{\{1,2\}} + 8I_{\{3,4,5,6\}}$ και $Y = 4I_{\{1,2,3\}} + 6I_{\{4,5,6\}}$.

Να υπολογιστεί η $E[X|Y]$.

Λύση

Η $\sigma(Y)$ γεννιέται από το $B_1 = \{1, 2, 3\}$ και $B_2 = \{4, 5, 6\} \subset B_1^c$.

Οπότε, $\sigma(Y) = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$.

Άρα,

$$\begin{aligned} E(X|B_1) &= \frac{1}{P(B_1)} \int_{B_1} X dP = \frac{1}{P(\{1, 2, 3\})} \int_{\{1, 2, 3\}} X dP \\ &= \frac{1}{6/16} (X(1) \cdot P(\{1\}) + X(2) \cdot P(\{2\}) + X(3) \cdot P(\{3\})) \\ &= \frac{8}{3} \left(2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 8 \cdot \frac{4}{16} \right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
E(X|B_2) &= \frac{1}{P(B_2)} \int_{B_2} X dP = \frac{1}{P(\{4,5,6\})} \int_{\{4,5,6\}} X dP \\
&= \frac{1}{10/16} (X(4) \cdot P(\{4\}) + X(5) \cdot P(\{5\}) + X(6) \cdot P(\{6\})) \\
&= \frac{8}{5} \left(8 \cdot \frac{4}{16} + 8 \cdot \frac{3}{16} + 8 \cdot \frac{3}{16} \right) \\
&= 8
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$E[X| \mathcal{B}](\omega) = 6I_{\{1,2,3\}}(\omega) + 8I_{\{4,5,6\}}(\omega)$$

■

Η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθείσης της σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$, χαρακτηρίζεται από τις δύο ιδιότητες του ορισμού της, **σχεδόν βέβαια** (εκτός δηλαδή από σύνολα που έχουν μέτρο μηδέν). Αυτό φαίνεται στην παρακάτω πρόταση (ύπαρξης της δεσμευμένης μέσης τιμής).

Πρόταση 1 (μονοσήμαντο και ύπαρξη της δεσμευμένης μέσης τιμής, σ.β.)

Εάν Y είναι μία τ.μ. ορισμένη στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, τέτοια ώστε:

- i. Η Y είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη.
- ii. Για κάθε B που ανήκει στη $\mathcal{B}$ ισχύει

$$\int_B Y dP = \int_B X dP.$$

Τότε

$$Y = E[X| \mathcal{B}] \text{ σ.β.}$$

Υπάρχει τουλάχιστον μία τέτοια τυχαία μεταβλητή που να ικανοποιεί τις ιδιότητες αυτές.

Απόδειξη

Έστω, πρώτα, ότι η X είναι μη αρνητική. Ορίζουμε το μέτρο ν στην $\mathcal{B}$, από τη σχέση

$$\nu(G) = \int_G X dP$$

Το μέτρο είναι πεπερασμένο, γιατί η X είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης, το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το P (δηλ. $\nu \ll P$), άρα σύμφωνα με το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει $f \in \mathcal{B}$ -μετρήσιμη τέτοια ώστε:

$$\nu(G) = \int_G f dP$$

Επομένως, η f ικανοποιεί τις σχέσεις (i) και (ii).

Έστω τώρα ότι, η X δεν είναι απαραίτητα μη αρνητική. Τότε αυτή θα ορίζεται ως εξής:

$$X = X^+ - X^-, \text{ όπου } X^+ = \max(X, 0) \text{ και } X^- = \min(X, 0)$$

Σύμφωνα με το πρώτο μέρος της πρότασης, τα μέτρα:

$$\nu(G) = \int_G E[X^+ | \mathcal{B}] dP \text{ και } \mu(G) = \int_G E[X^- | \mathcal{B}] dP$$

είναι καλά ορισμένα.

Αφαιρώντας τα κατά μέλη, προκύπτει η συνάρτηση (πυκνότητα)

$$E[X^+ | \mathcal{B}] - E[X^- | \mathcal{B}] = E[X | \mathcal{B}]$$

που ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης. ■

Ορισμός 5

Η τ.μ. Y ονομάζεται **παραλλαγή της δεσμευμένης μέσης τιμής της τ.μ. X δοθείσης της σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$** .

Παρατήρηση 4

Η πρόταση 1 μας αναφέρει ότι:

- υπάρχει τουλάχιστον μία παραλλαγή της δεσμευμένης μέσης τιμής της τ.μ. X δοθείσης της σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$ και
- δύο οποιεσδήποτε τέτοιες παραλλαγές είναι **σχεδόν βέβαια ίσες** (διαφέρουν δηλαδή μόνον στα σημεία ενός συνόλου που έχει πιθανότητα μηδέν).

Συνήθως θεωρούμε ότι δύο σχεδόν βέβαια ίσες συναρτήσεις ταυτίζονται (όσον αφορά ένα μέτρο πιθανότητας). Έτσι, αν και οι προτάσεις που αναφέρονται σε δεσμευμένες μέσες τιμές ισχύουν σχεδόν βέβαια, το σχεδόν βέβαια (εννοείται και) παραλείπεται.

Ένας τρόπος για να εξετάσουμε, αν μια μετρήσιμη συνάρτηση είναι μιά παραλλαγή μιας δεσμευμένης μέσης τιμής, περιγράφεται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 2

Έστω:

- $\mathcal{P}$ ένα **π-σύστημα** (δηλαδή μια κλάση γεγονότων κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές) που γεννά την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ και
- το Ω είναι ένωση πεπερασμένου ή αριθμήσιμου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{B}$.

Μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f είναι μιά παραλλαγή της $E[X|\mathcal{B}]$ αν και μόνο αν είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη και για κάθε $B \in \mathcal{P}$ ισχύει

$$\int_B f dP = \int_B X dP, \quad \forall B \in \mathcal{P}.$$

Δηλαδή, για να εξετάσουμε αν μια f $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση είναι μια παραλλαγή της δεσμευμένης μέσης τιμής της τ.μ. X δοθείσης μιας σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$, είναι αρκετό να εξετάσουμε την σχέση

$$\int_B f dP = \int_B X dP$$

για όλα τα σύνολα B που ανήκουν σε μια (μικρότερη) κλάση $\mathcal{P}$ συνόλων (ένα π-σύστημα), που γεννά την εν λόγω σ-άλγεβρα. ■

Εάν X και Y είναι δύο τ.μ και έστω ότι είναι γνωστές οι αντίστοιχες πυκνότητες πιθανότητας τους όπως επίσης και η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας τους, τότε μπορούν να δειχθούν αναλυτικοί τύποι για τον υπολογισμό ορισμένων δεσμευμένων μέσων τιμών. Αυτό φαίνεται στην παρακάτω στην παρακάτω εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

Εάν οι τ.μ. Y, X είναι συνεχείς και έχουν από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f(y, x)$ και $E|Y| < \infty$, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$E[Y|X=x] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot \frac{f(y, x)}{f(x)} dy = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X}(y|x) dy \quad (\sigma.β.)$$

Απόδειξη

Κάθε παραλλαγή της $E[Y|X=x]$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_B E[Y|X=x] dP \circ X^{-1}(x) = \int_{\{X \in B\}} Y(\omega) dP(\omega), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Όμως, λόγω της ύπαρξης της πυκνότητας πιθανότητας ισχύει:

$$P\{X \in A\} = \int_A f(x) dx$$

Άρα,

$$\int_B E[Y|X=x] dP \circ X^{-1}(x) = \int_B E[Y|X=x] \cdot f(x) dx \quad (1)$$

Αν

$$\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{(I_B, y)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{x \cdot y} \mathbb{R}$$

τότε για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ισχύει ότι:

$$\int_{\{X \in B\}} Y(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} I_B(X(\omega)) \cdot Y(\omega) dP(\omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} I_B(x) \cdot y dP \circ (X, Y)^{-1}$$

Αλλά, λόγω της ύπαρξης της από κοινού πυκνότητας πιθανότητας ισχύει:

$$P\{X \in A, Y \in B\} = \int_A \int_B f(x, y) dy dx$$

Άρα,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} I_B(x) \cdot y dP \circ (Y, X)^{-1}(y, x) = \iint_{\mathbb{R}^2} I_B(x) \cdot y \cdot f(x, y) dx dy = \int_B \left(\int_{\mathbb{R}} y \cdot f(x, y) dy \right) dx \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$E[Y|X=x] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot \frac{f(y, x)}{f(x)} dy = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X}(y|x) dy.$$

■

Παρατήρηση 5

Στην περίπτωση που οι τ.μ. X και Y είναι διακριτές, αποδεικνύεται ότι

$$E[Y|X=x] = \sum_y y \cdot \frac{f(y, x)}{f(x)} = \sum_y y \cdot f_{Y|X}(y|x)$$

Οι παραπάνω τύποι, είναι αυτοί που δόθηκαν σαν ορισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής μίας τ.μ. Y δοθέντος ότι $X=x$ στο κεφάλαιο 1. Έτσι η δεσμευμένη μέση μίας τ.μ. δοθείσης μίας σ-άλγεβρας είναι μία γενίκευση εκείνων των ορισμών.

Παράδειγμα 9

Εάν X_1, X_2 τ.μ με α.κ.π.π. που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

$X_1 \backslash X_2$	0	2
0	0,3	0,2
1	0,4	0,1

Να υπολογιστεί η $E(X_1|X_2=0)$.

Λύση

Έχουμε:

$$f_{X_1|X_2}(0|0) = \frac{f_{X_1, X_2}(0,0)}{f_{X_2}(0)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}, \quad f_{X_1|X_2}(1|0) = \frac{f_{X_1, X_2}(1,0)}{f_{X_2}(0)} = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7}$$

και

$$E(X_1|X_2=0) = 0 \cdot f_{X_1|X_2}(0|0) + 1 \cdot f_{X_1|X_2}(1|0) = 0 \cdot \frac{3}{7} + 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$$

■

Παράδειγμα 10

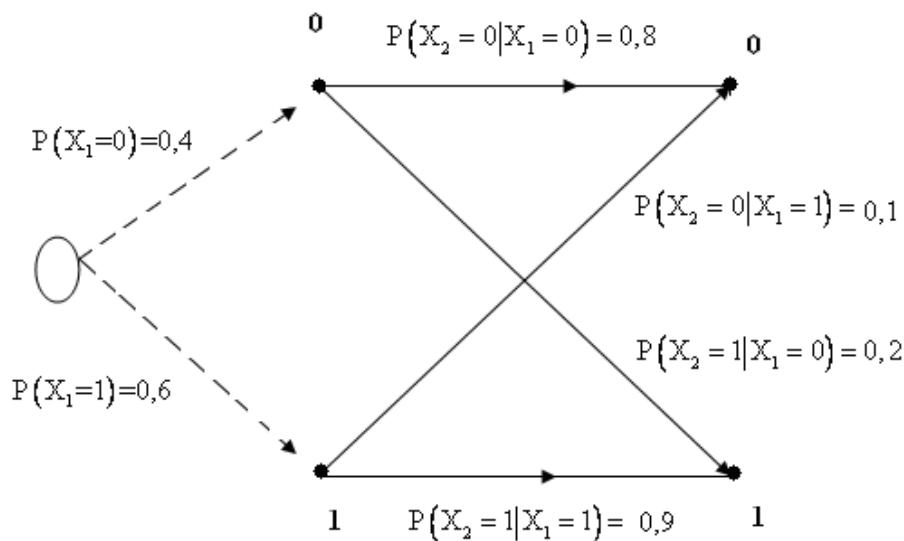
Δυαδικά σήματα (δηλαδή σήματα αποτελούμενα από 0 και 1) εκπέμπονται από έναν πομπό και λαμβάνονται από έναν δέκτη. Λόγω «θορύβου», ένα εκπεμπόμενο από τον πομπό 0 (αντίστ. 1) δεν λαμβάνεται από τον δέκτη σαν 0 (αντίστ. 1). Έστω $X = (X_1, X_2)$ είναι μια διδιάστατη τ.μ όπου η X_1 παριστάνει το ψηφίο που εκπέμπεται και η X_2 το ψηφίο που λαμβάνεται. Είναι γνωστό ότι: $P(X_1=0)=0,4$, $P(X_2=0|X_1=0)=0,8$ και $P(X_2=0|X_1=1)=0,1$ (ένα τέτοιο *δυαδικό κανάλι επικοινωνίας* παριστάνεται με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος)

(α) να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τ.μ. X_1, X_2 .

(β) να βρεθούν οι περιθωριακές π.π. των X_1, X_2

(γ) Η δεσμευμένη π.π. της X_1 δοθέντος ότι $X_2=y$, $y=0,1$

(δ) η δεσμευμένη μέση τιμή της X_1 δοθείσης της X_2 .



Λύση

Από τα δεδομένα είναι φανερό ότι: $P(X_1=1)=0,6$, $P(X_2=1|X_1=0)=0,2$ και $P(X_2=1|X_1=1)=0,8$.

$$(α) f_{X_1, X_2}(0,0)=P(X_1=0, X_2=0)=P(X_2=0|X_1=0) \cdot P(X_1=0)=0,8 \cdot 0,4=0,32$$

$$f_{X_1, X_2}(0,1)=P(X_1=0, X_2=1)=P(X_2=1|X_1=0) \cdot P(X_1=0)=0,2 \cdot 0,4=0,08$$

$$f_{X_1, X_2}(1,0)=P(X_1=1, X_2=0)=P(X_2=0|X_1=1) \cdot P(X_1=1)=0,1 \cdot 0,6=0,06$$

$$f_{X_1, X_2}(1,1)=P(X_1=1, X_2=1)=P(X_2=1|X_1=1) \cdot P(X_1=1)=0,9 \cdot 0,6=0,54$$

(β) Για την περιθωριακή π.π. της X_1 , έχουμε:

$$f_{X_1}(0)=f_{X_1, X_2}(0,0)+f_{X_1, X_2}(0,1)=0,32+0,08=0,4$$

$$f_{X_1}(1)=f_{X_1, X_2}(1,0)+f_{X_1, X_2}(1,1)=0,06+0,54=0,6$$

Ενώ για την περιθωριακή π.π. της X_2 , έχουμε:

$$f_{X_2}(0)=f_{X_1, X_2}(0,0)+f_{X_1, X_2}(1,0)=0,32+0,06=0,38$$

$$f_{X_2}(1)=f_{X_1, X_2}(0,1)+f_{X_1, X_2}(1,1)=0,08+0,54=0,62$$

(γ) Η δεσμευμένη π.π. της X_1 δοθέντος ότι $X_2=y$, $y=0,1$

$$f_{X_1|X_2}(0|0)=\frac{f_{X_1, X_2}(0,0)}{f_{X_2}(0)}=\frac{0,32}{0,38}=0,84, \quad f_{X_1|X_2}(0|1)=\frac{f_{X_1, X_2}(0,1)}{f_{X_2}(1)}=\frac{0,08}{0,62}=0,13$$

$$f_{X_1|X_2}(1|0)=\frac{f_{X_1, X_2}(1,0)}{f_{X_2}(0)}=\frac{0,06}{0,38}=0,16, \quad f_{X_1|X_2}(1|1)=\frac{f_{X_1, X_2}(1,1)}{f_{X_2}(1)}=\frac{0,54}{0,62}=0,87$$

Η δεσμευμένη (ή υπό συνθήκες) μέση τιμή της τ.μ. X_1 δοθέντος ότι $X_2 = 0$:

$$E(X_1|X_2 = 0) = 0 \cdot f_{X_1|X_2}(0|0) + 1 \cdot f_{X_1|X_2}(1|0) = 0 \cdot 0,84 + 1 \cdot 0,16 = 0,16$$

ενώ, η δεσμευμένη (ή υπό συνθήκες) μέση τιμή της τ.μ. X_1 δοθέντος ότι $X_2 = 1$

$$E(X_1|X_2 = 1) = 0 \cdot f_{X_1|X_2}(0|1) + 1 \cdot f_{X_1|X_2}(1|1) = 0 \cdot 0,13 + 1 \cdot 0,87 = 0,87.$$

(δ) Η δεσμευμένη μέση τιμή της X_1 δοθείσης της X_2 , είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$E(X_1|X_2)(0) = E(X_1|X_2=0) = 0,16$$

$$E(X_1|X_2)(1) = E(X_1|X_2=1) = 0,87$$

■

Παράδειγμα 11

Υποθέτουμε ότι η κοινή πυκνότητα πιθανότητας των X και Y δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 4y(x-y)e^{-(x+y)}, & 0 < x < \infty, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Να υπολογιστεί η $E[X|Y=y]$.

Λύση

Η δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας του X , δεδομένου ότι $Y=y$, δίνεται από

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4y(x-y)e^{-(x+y)}}{\int_y^\infty 4y(x-y)e^{-(x+y)} dx}, \quad x > y \\ &= \frac{(x-y)e^{-(x+y)}}{\int_y^\infty (x-y)e^{-(x+y)} dx} = \frac{(x-y)e^{-x}}{\int_y^\infty (x-y)e^{-x} dx} \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{(x-y)e^{-x}}{e^{-y}} = (x-y)e^{-(x-y)}, \quad x > y$$

Επομένως,

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_y^{+\infty} x(x-y)e^{-(x-y)} dx$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X|Y=y] &= -x(x-y)e^{-(x-y)} \Big|_y^{\infty} + \int_y^{\infty} (2x-y)e^{-(x-y)} dx \\ &= \int_y^{\infty} (2x-y)e^{-(x-y)} dx \\ &= -(2x-y)e^{-(x-y)} \Big|_y^{\infty} + 2 \int_y^{\infty} e^{-(x-y)} dx \\ &= y + 2. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 12

Εάν X μία τ.μ. με π.π. $f_X(x) = xe^{-x}$, $x \geq 0$ και Y μία τ.μ. τ.ω. η δεσμευμένη κατανομή της Y δοθέντος ότι $X=x$ είναι η ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, x)$. Να υπολογιστεί

(α) η α.κ.π.π. των X, Y και η περιθωριακή π.π. $f_Y(y)$

(β) η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. Y δοθέντος ότι $X=x$

(γ) η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. Y δοθείσης της X .

Λύση

(α) Από τα δεδομένα είναι φανερό ότι: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}$ $0 < y < x$. Ακόμα:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) = \frac{1}{x} xe^{-x} = e^{-x}, \quad 0 < y < x, \quad x \geq 0$$

Τέλος:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_y^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-y}, \quad y > 0$$

(β) Η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. Y δοθέντος ότι $X=x$ είναι ίση με:

$$E(Y|X=x) = \frac{x}{2}$$

γιατί η κατανομή της Y δοθέντος ότι $X=x$ είναι η ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, x)$. Πράγματι,

$$E(Y|X=x) = \int_0^x y \frac{1}{x} dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

(γ) Τώρα, από το γεγονός ότι $E(Y|X=x) = \frac{x}{2}$, έχουμε $E(Y|X) = \frac{X}{2}$. ■

4.3 Ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής

Η πρόταση που ακολουθεί (και δίνεται χωρίς απόδειξη) περιγράφει τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής (ικανοποιούνται σχεδόν βέβαια). Οι ιδιότητες αυτές είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες της μέσης τιμής.

Πρόταση 3 (Ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής)

Εάν $X, Y, X_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ολοκληρώσιμες τ.μ. τότε:

1) Αν $X \geq 0$ τότε $E[X | \mathcal{B}] \geq 0$ σ.β

2) $E[c | \mathcal{B}] = c$

3) **(Γραμμικότητα):**

i. $E[X + Y | \mathcal{B}] = E[X | \mathcal{B}] + E[Y | \mathcal{B}]$

ii. $E[c \cdot X | \mathcal{B}] = c \cdot E[X | \mathcal{B}]$

4) Αν $X \leq Y$ τότε $E[X | \mathcal{B}] \leq E[Y | \mathcal{B}]$

Επιπλέον $|E[X | \mathcal{B}]| \leq E[|X| | \mathcal{B}]$

5) **(Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης)**

i. Αν $X_n \geq 0$ και $X_n \uparrow X$ τότε $E[X_n | \mathcal{B}] \uparrow E[X | \mathcal{B}]$

ii. Αν $X_n \geq 0$ και $X_n \downarrow X$ τότε $E[X_n | \mathcal{B}] \downarrow E[X | \mathcal{B}]$

6) **(Λήμμα του Fatou)**

Αν X_n ολοκληρώσιμες τυχαιές μεταβλητές και $X_n \geq 0$, ισχύει ότι:

i. $E[\liminf X_n | \mathcal{B}] \leq \liminf E[X_n | \mathcal{B}]$

ii. $E[\overline{\lim} X_n | \mathcal{B}] \geq \overline{\lim} E[X_n | \mathcal{B}]$

7) (Κυρίαρχη σύγκλιση)

Αν $|X_n| \leq Y$ σχεδόν βέβαια και $X_n \rightarrow X$ τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n | \mathcal{B}] = E[X | \mathcal{B}].$$

$$8) \quad E[E[X | \mathcal{B}]] = EX$$

Ακόμα αν $Y = E[X | \mathcal{B}]$ τότε

$$EY = E[E[X | \mathcal{B}]] = EX.$$

Παρατήρηση 6

Από την ιδιότητα 8, δηλαδή από το γεγονός ότι:

$$EX = E[E[X | Y]]$$

προκύπτει ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής (με την βοήθεια δεσμευμένων μέσων τιμών).

Δηλαδή, στην περίπτωση που

α) Οι X, Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές και $P\{Y = y\} > 0, \forall y$ τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} EX &= E[E[X | Y]] \\ &= \sum_y E[X | Y=y] \cdot P\{Y=y\} \\ &= \sum_y \sum_x x \cdot P(X=x | Y=y) \cdot P\{Y=y\} \\ &= \sum_y \sum_x x \cdot f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) \end{aligned}$$

όπου $f_{X|Y}(x|y)$ η δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. X δοθείσης της τ.μ. Y

β) Οι X, Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και $\int f_Y(y) dy > 0$ τότε έχουμε ότι:

$$EX = E[E[X | Y]]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X|Y=y] \cdot f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) dx dy$$

Έχουμε λοιπόν τις παρακάτω ισότητες:

(i) $EY = \sum_x E[Y|X=x] f_X(x)$ για διακριτές τ.μ

(ii) $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} E[Y|X=x] f_X(x) dx$ για συνεχείς τ.μ.

Εάν στους δύο αυτούς τύπους θέσουμε σαν $X=I_A$, τότε έχουμε τον εξής εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της πιθανότητας ενός γεγονότος.

(iii) $P(A) = \sum_x P\{A|X=x\} P\{X=x\}$ για διακριτές τ.μ

(iv) $P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{A|X=x\} f_X(x) dx$ για συνεχείς τ.μ.

Παράδειγμα 13

Αναφερόμενοι στο παράδειγμα 9, η μέση τιμή της X_1 είναι ίση με:

(i) (άμεσα) $E(X_1) = 0 \cdot f_{X_1}(0) + 1 \cdot f_{X_1}(1) = 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6 = 0,6$

(ii) $E(X_1) = E(X_1|X_2=0) \cdot f_{X_2}(0) + E(X_1|X_2=1) \cdot f_{X_2}(1) = 0,16 \cdot 0,38 + 0,87 \cdot 0,62 = 0,6$.

■

Παράδειγμα 14

Αναφερόμενοι στο παράδειγμα 11, είδαμε ότι η δεσμευμένη π.π. της Y δοθέντος ότι $X=x$ είναι η ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, x)$. Άρα:

$$E[Y|X=x] = \frac{x}{2}, \quad x \geq 0$$

Η μέση τιμή της τ.μ. Y θα είναι ίση με:

$$EY = \int_0^{+\infty} E[Y|X=x] f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{2} x e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{1}{2} \Gamma(3) = \frac{1}{2} 2 = 1$$

(όπου $\Gamma(\cdot)$ η γάμμα συνάρτηση).

■

Παράδειγμα 15

Ασθενείς εισέρχονται σε ένα μεγάλο φαρμακείο σύμφωνα με μια κατανομή Poisson με παράμετρο λ , καθένας από τους οποίους αγοράζει ένα εμβόλιο με πιθανότητα p .

- (α) Ποία η πιθανότητα το φαρμακείο να μην πουλήσει κανένα εμβόλιο;
- (β) Ποία η πιθανότητα το φαρμακείο να πουλήσει k εμβόλια;
- (γ) Πόσα εμβόλια αναμένετε να πουληθούν; (ας υποθέσουμε ότι κάθε ασθενής αγοράζει ένα το πολύ εμβόλιο)

Λύση

Έστω X μια τ.μ. που δηλώνει τον αριθμό των εμβολίων που πωλούνται και N μία τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των ασθενών που εισέρχονται στο φαρμακείο.

- (α) Δεσμεύοντας ως προς την τ.μ. N , έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{X=0\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X=0|N=n\} P\{N=n\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X=0|N=n\} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

- (β) Ανάλογα

$$\begin{aligned} P\{X=k\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X=k|N=n\} P\{N=n\} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} = \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

Δηλαδή η $X \approx P(\lambda p)$

- (γ) Ο αριθμός των εμβολίων που αναμένετε να πουληθούν είναι $EX = \lambda p$ (λόγω του (β)).

■

Αναφέρουμε εδώ ένα κλασσικό πρόβλημα που λύνεται με την βοήθεια των δεσμευμένων μέσων τιμών.

Παράδειγμα 16 (το δίλλημα του φυλακισμένου)

Ένας κρατούμενος φυλακίζεται σ' ένα κελί που έχει τρεις πόρτες. Η πρώτη πόρτα τον οδηγεί σ' ένα τούνελ, το οποίο τον γυρίζει πίσω στο κελί του μετά από ταξίδι δύο ημερών. Η δεύτερη πόρτα τον

οδηγεί σ' ένα τούνελ, το οποίο τον γυρίζει πίσω στο κελί του μετά από ταξίδι τεσσάρων ημερών. Η τρίτη πόρτα τον οδηγεί αμέσως στην ελευθερία. Υποθέτουμε ότι ο κρατούμενος διαλέγει την πρώτη, δεύτερη, τρίτη πόρτα με πιθανότητες 0,3, 0,5 και 0,2 αντίστοιχα. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ημερών περιπλάνησης μέχρι ότου φτάσει στην ελευθερία;

Λύση

Έστω X ο αριθμός των ημερών και Y_i η πόρτα που ανοίγει. Οπότε,
 Y_1 το ενδεχόμενο να διαλέξει τη 1^η πόρτα
 Y_2 το ενδεχόμενο να διαλέξει τη 2^η πόρτα
 Y_3 το ενδεχόμενο να διαλέξει τη 3^η πόρτα,
και $P(Y_1)=0,3$, $P(Y_2)=0,5$, $P(Y_3)=0,2$.

Άρα,

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X|Y_1]P(Y_1) + E[X|Y_2]P(Y_2) + E[X|Y_3]P(Y_3) \\ &= 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,2 \\ &= 2,6 \end{aligned}$$

Δηλαδή, ο αναμενόμενος αριθμός ημερών περιπλάνησης μέχρι την ελευθερία είναι 2,6 ημέρες. ■

Παράδειγμα 17

Εάν $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ είναι μία διδιάστατη τ.μ με α.κ.π.π. που δίνεται από την σχέση:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{q}{2}}$$

όπου:

$$q = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]$$

και $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, τότε λέμε ότι, η τ.μ. $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ ακολουθεί τη **2-διάστατη κανονική κατανομή** με **παραμέτρους** $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$. Τότε

(α) Η περιθωριακή π.π. της X_1 είναι η $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, ενώ η περιθωριακή π.π. της X_2 είναι η $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

(β) Η δεσμευμένη κατανομή της X_1 δοθέντος ότι $X_2=x_2$ είναι η $N(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2))$ ενώ η δεσμευμένη κατανομή της X_2

δοθέντος $X_1=x_1$ είναι η $N(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2))$.

(γ) Ο συντελεστής συσχέτισης των X_1, X_2 είναι ίσος με την παράμετρο ρ .

Απόδειξη

(α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} dx_2 = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} dx_2 \stackrel{u=\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}}{=} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \end{aligned}$$

όπου $\mu_{2|1} = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1)$, $\sigma_{2|1} = \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$. Δηλαδή η περιθωριακή π.π. της X_1 είναι η $N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Ανάλογα αποδεικνύεται και το δεύτερο σκέλος του (α).

(β) Η δεσμευμένη π.π. X_1 δεδομένου ότι $X_2=x_2$ είναι ίση, χρησιμοποιώντας το (α):

$$\begin{aligned} f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) &= \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}, \quad x_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Δηλαδή, είναι η $N(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2))$.

Ανάλογα αποδεικνύεται και το δεύτερο σκέλος του (β).

Από το (β) έχουμε:

$$E(X_1|X_2=x_2)=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2).$$

και, ανάλογα:

$$E(X_2|X_1=x_1)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1).$$

■

Εφαρμογή 2

Εάν η τ.μ. (X_1, X_2) ακολουθεί την 2-διάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1 = 4, \mu_2 = 5, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3, \rho = 0,6$, να υπολογιστούν τα παρακάτω.

(α) $P\{X_1 \leq 3 | X_2 = 5\}$

(β) $E(X_1 | X_2 = 5)$ και η $\sigma^2(X_1 | X_2 = 5)$

(γ) $E(X_1 | X_2)$.

Λύση

(α) Είναι γνωστό ότι η δεσμευμένη κατανομή της X_1 δοθέντος ότι $X_2=5$ είναι η

$$N(4+0,6\frac{1}{3}(5-5), 1(1-0,6^2)) = N(4; 0,64)$$

Άρα, εάν θεωρήσουμε X μια τ.μ. τ.ω. $X \approx N(4; 0,64)$, έχουμε:

$$P\{X_1 \leq 3 | X_2 = 5\} = P\{X \leq 3\} = P\left\{\frac{X-4}{\sqrt{0,64}} \leq \frac{3-4}{\sqrt{0,64}}\right\} = P\{Z \leq -1,25\} =$$

$$= P\{Z \geq 1,25\} = 1 - P\{Z \leq 1,25\} = 1 - 0,8943 = 0,1057$$

(β) Είδαμε από το (α) ότι η δεσμευμένη κατανομή της X_1 δοθέντος ότι $X_2=5$, είναι η $N(4; 0,64)$, επομένως $E(X_1 | X_2 = 5) = 4$ και $\sigma^2(X_1 | X_2 = 5) = 0,64$.

(γ) Επειδή η δεσμευμένη κατανομή της X_1 δοθέντος ότι $X_2=x_2$ είναι η κανονική $N(4+0,6\frac{1}{3}(x_2-5); 0,64)$, έπεται ότι η $E(X_1 | X_2) = 4+0,2(X_2-5) = 0,2X_2 + 3$.

■

Εφαρμογή 3

Μια βιομηχανία κατασκευάζει πλαστικούς σωλήνες των οποίων το μήκος X_1 και η εσωτερική διάμετρος X_2 (σε cm) είναι τ.μ. που

ακολουθούν την 2-διάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1 = 90, \mu_2 = 5, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0,05, \rho = 0$.

- (α) Ποία η πιθανότητα το μήκος ενός σωλήνα να είναι μεταξύ 88 και 92 cm, εάν γνωρίζουμε ότι η διάμετρος είναι 5cm;
- (β) Εάν η διάμετρος ενός σωλήνα είναι 5cm, πόσο αναμένεται να είναι το μήκος του σωλήνα; Ποία η διασπορά από το (αναμενόμενο) μήκος αυτό;

Λύση

- (α) Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P\{88 \leq X_1 \leq 92 | X_2 = 5\}$.
Είναι γνωστό ότι η δεσμευμένη κατανομή της X_1 δοθέντος ότι η $X_2=5$ είναι η:

$$N(90+0\frac{1}{0,05}(5-5), 1(1-0^2)) = N(90;1)$$

Άρα, εάν θεωρήσουμε X μια τ.μ. τ.ω. $X \approx N(90;1)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{88 \leq X_1 \leq 92 \mid X_2 = 5\} &= P\{88 \leq X \leq 92\} = P\left\{\frac{88-90}{1} \leq \frac{X-90}{1} \leq \frac{92-90}{1}\right\} = \\ &= P\{-2 \leq Z \leq 2\} = P\{Z \leq 2\} - P\{Z \leq -2\} = 2P\{Z \leq 2\} - 1 \\ &= 2 \cdot 0,977250 - 1 = 0,9545 \end{aligned}$$

- (β) Από το (α) έχουμε $E(X_1 | X_2 = 5) = 90$ cm το αναμενόμενο μήκος του σωλήνα και $\sigma^2(X_1 | X_2 = 5) = 1$ cm² η διασπορά από το μήκος αυτό.

Εφαρμογή 4

Οι φοιτητές ενός τμήματος Στατιστικής έδωσαν δύο διαγωνίσματα (προόδους), κατά την διάρκεια ενός εξαμήνου. Εάν οι X_1, X_2 παριστάνουν τους βαθμούς τους στο πρώτο και στο δεύτερο διαγώνισμα αντίστοιχα, τότε η τ.μ. (X_1, X_2) ακολουθεί την 2-διάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1 = 6,5, \mu_2 = 7, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0,8$, και $\rho = 0,6$. Να υπολογιστεί:

- (α) $P\{X_1 \geq 5\}$ (β) $P\{X_1 \geq 5 | X_2 = 6\}$
 (γ) $E(X_1 | X_2 = 6)$ (δ) $E(X_1 | X_2)$

Λύση

- (a)

$$P\{X_1 \geq 5\} = P\left\{\frac{X-6,5}{1} \geq \frac{5-6,5}{1}\right\} = P\{Z \geq -1,5\} = P\{Z \leq 1,5\} = 0,9331$$

(β) Είναι γνωστό ότι η δεσμευμένη κατανομή της X_1 δοθέντος ότι $X_2=6$ είναι η

$$N(6,5+0,6\frac{1}{0,8}(7-6),1(1-0,6^2))=N(7,25;0,64)$$

Άρα, εάν θεωρήσουμε X μια τ.μ. τ.ω. $X \approx N(7,25;0,64)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{X_1 \geq 5 | X_2 = 6\} &= P\{X \geq 5\} = P\left\{\frac{X-7,25}{\sqrt{0,64}} \geq \frac{5-7,25}{\sqrt{0,64}}\right\} = P\{Z \geq -2,8125\} = \\ &= P\{Z \leq 2,8125\} = 0,9975. \end{aligned}$$

(γ) Από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $N(7,25;0,64)$ οπότε $E[X_1 | X_2 = 6] = 7,25$.

(δ) Επειδή η δεσμευμένη κατανομή της X_1 δοθέντος ότι $X_2=x_2$ είναι η κανονική $N(6,5+0,6\frac{1}{0,8}(x_2-6);0,64)$, ισχύει ότι η $E(X_1 | X_2) = 6,5 + 0,75(X_2 - 6) = 0,75X_2 + 2$.

■

Η ιδιότητα 8 (της πρότασης 3) μαζί με την παρατήρηση 6, μας βοηθά στο δώσουμε εναλλακτικούς τρόπους απόδειξης ήδη γνωστών προτάσεων.

Εφαρμογή 5 (1η ταυτότητα του Wald)

Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανομημένες τ.μ. με $EX_1 = \mu$ & $V(X_1) = \sigma^2$. Έστω ακόμα μία θετική, ακεραίων τιμών τ.μ. N ανεξάρτητη από τις $X_1, X_2, \dots$ με $EN = \lambda$ και

$$Y_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

Να αποδείξετε ότι

$$EY_N = E[X_1]E[N] = \mu \lambda.$$

Λύση

Με την βοήθεια των δεσμευμένων μέσων τιμών έχουμε:

$$\begin{aligned}
EY_N &= E[E(Y_N|N)] = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^N X_j | N=n\right] \cdot P\{N=n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^n X_j | N=n\right] \cdot P\{N=n\} \stackrel{\text{ανεξ.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^n X_j\right] \cdot P\{N=n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n E[X_1] \cdot P\{N=n\} = E[X_1] \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P\{N=n\} \\
&= E[X_1] E[N] = \mu \lambda
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 18

Έστω N ο αριθμός των τηλεφωνημάτων που φθάνουν σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο κατά την διάρκεια μιάς συγκεκριμένης ημέρας και έστω ότι η N είναι μιά τ. μ. με κατανομή F . Ας υποθέσουμε ακόμα ότι τα λεπτά που διαρκούν τα τηλεφωνήματα είναι ανεξάρτητα και έχουν κοινή κατανομή G . Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός λεπτών που διαρκούν (όλα) τα τηλεφωνήματα κατά την διάρκεια της ημέρας;

Λύση

Η άσκηση είναι απλή εφαρμογή της ισότητας του Wald. Πράγματι, εάν N ο αριθμός των τηλεφωνημάτων που φθάνουν στο τηλεφωνικό κέντρο και οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_N$ παριστάνουν τον αριθμό των λεπτών που διαρκεί κάθε τηλεφώνημα, τότε ο *συνολικός αριθμός των λεπτών που διαρκούν τα τηλεφωνήματα, κατά την διάρκεια της ημέρας*, είναι ίσο με

$$Y_N = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Ο αναμενόμενος αριθμός των τηλεφωνημάτων που διαρκούν (όλα) τα τηλεφωνήματα, κατά την διάρκεια της ημέρας, είναι ίσος σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση με :

$$EY_N = E[X_1] E[N]$$

όπου οι ποσότητες $E[X_1], E[N]$ υπολογίζονται από τις συναρτήσεις κατανομής G, F αντίστοιχα, κατά τα γνωστά.

■

Εφαρμογή 6

Εάν η κατανομή του αριθμού N των τηλεφωνημάτων ενός τηλεφωνικού κέντρου είναι η Poisson με παράμετρο $\lambda=1000$ τηλεφωνήματα/ημέρα, και ο αριθμός των λεπτών X_i που διαρκεί κάθε τηλεφώνημα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή

30 λεπτά και τυπική απόκλιση 10 λεπτά, τότε: $E[X_1]=30$, $E[N]=1000$,
 οπότε ο αναμενόμενος αριθμός των λεπτών που διαρκούν όλα τα
 τηλεφωνήματα κατά την διάρκεια της ημέρας είναι ίσος με:
 $EY_N=E[X_1] \cdot E[N]=30 \cdot 1000=30.000$ λεπτά.

■

Οι παρακάτω τρεις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής μίας τ.μ.,
 αναφέρονται εδώ ξεχωριστά λόγω της σπουδαιότητάς τους.

Πρόταση 4

Εάν η τυχαία μεταβλητή X είναι **ανεξάρτητη** της σ -άλγεβρας $\mathcal{B}$ τότε
 ισχύει ότι:

$$E[X | \mathcal{B}] = E[X]$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι αν X, Y είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές
 τότε

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

Για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \int_B E[X] dP &= E[X] \cdot \int_B dP = E[X] \cdot \int_{\Omega} I_B dP \\ &= E[X] \cdot E[I_B] \quad (X, I_B \text{ ανεξάρτητες}) \\ &= E[X \cdot I_B] \\ &= \int_{\Omega} X \cdot I_B dP = \int_B X dP \\ &= \int_B E[X | \mathcal{B}] dP \end{aligned}$$

Άρα, $E[X | \mathcal{B}] = E[X]$ σ.β.

■

Δηλαδή, στην περίπτωση της ανεξαρτησίας, η δέσμευση ως προς την
 σ -άλγεβρα $\mathcal{B}$ δεν μας δίνει επιπλέον πληροφορίες. Επομένως, η
 δεσμευμένη μέση τιμή ισούται με την μέση τιμή.

Πρόταση 5

Εάν η τυχαία μεταβλητή Y είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη και φραγμένη τότε ισχύει ότι:

$$E[Y \cdot X | \mathcal{B}] = Y \cdot E[X | \mathcal{B}]$$

Ιδιαίτερα, $E[Y | \mathcal{B}] = Y$.

Απόδειξη

Για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \int_B E[Y \cdot X | \mathcal{B}] dP &= \int_B Y \cdot X dP \\ &= \int_{\Omega} (Y \cdot I_B) \cdot X dP, \end{aligned}$$

όπου $Y \cdot I_B$ είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} (Y \cdot I_B) \cdot E[X | \mathcal{B}] dP \\ &= \int_B Y \cdot E[X | \mathcal{B}] dP \end{aligned}$$

Άρα, $E[Y \cdot X | \mathcal{B}] = Y \cdot E[X | \mathcal{B}]$.

Στην περίπτωση όπου $X = I_{\Omega} \equiv 1$, έχουμε ότι:

$$E[Y \cdot X | \mathcal{B}] = E[Y | \mathcal{B}]$$

και

$$Y \cdot E[X | \mathcal{B}] = Y$$

Κατά συνέπεια,

$$E[Y | \mathcal{B}] = Y.$$

■

Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιώντας κατάλληλες προτάσεις από την θεωρία μέτρου, μπορεί να αποδειχθεί η παρακάτω γενικότερη πρόταση.

Πρόταση 6

Εάν η τυχαία μεταβλητή X είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη και οι τυχαίες μεταβλητές $Y, X \cdot Y$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε

$$E[Y \cdot X | \mathcal{B}] = X \cdot E[Y | \mathcal{B}]$$

Πρόταση 7 (Απορρόφηση)

Αν θεωρήσουμε ότι X είναι μία ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή και $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ σ-άλγεβρες τέτοιες ώστε $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{A}$, τότε ισχύει:

$$E[E[X | \mathcal{B}_2] | \mathcal{B}_1] = E[E[X | \mathcal{B}_1] | \mathcal{B}_2] = E[X | \mathcal{B}_1]$$

Απόδειξη

i. Θα δείξουμε ότι $E[E[X | \mathcal{B}_1] | \mathcal{B}_2] = E[X | \mathcal{B}_1]$.

Γνωρίζουμε ότι $E[X | \mathcal{B}_1]$ είναι $\mathcal{B}_1$ -μετρήσιμη και λόγω ότι $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ συνεπάγεται ότι $E[X | \mathcal{B}_1]$ θα είναι και $\mathcal{B}_2$ -μετρήσιμη. Συνεπώς, θα ισχύει ότι:

$$E[E[X | \mathcal{B}_1] | \mathcal{B}_2] = E[X | \mathcal{B}_1]$$

ii. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $E[E[X | \mathcal{B}_2] | \mathcal{B}_1] = E[X | \mathcal{B}_1]$.

Με τη βοήθεια του ορισμού της δεσμευμένης μέσης τιμή έχουμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{B}_1$ ισχύει ότι:

$$\int_B E[E[X | \mathcal{B}_2] | \mathcal{B}_1] dP = \int_B E[X | \mathcal{B}_2] dP,$$

όπου $E[E[X | \mathcal{B}_2] | \mathcal{B}_1]$ - $\mathcal{B}_1$ μετρήσιμη. (1)

Επιπλέον, για κάθε $C \in \mathcal{B}_2$ ισχύει ότι:

$$\int_C E[X | \mathcal{B}_2] dP = \int_C X dP \quad (2)$$

Όμως, $C \in \mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}_1$. Άρα, η σχέση (2) ισχύει και για κάθε $C \equiv B \in \mathcal{B}_1$. Επομένως, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\int_B E[E[X | \mathcal{B}_2] | \mathcal{B}_1] dP = \int_B X dP, \quad \forall B \in \mathcal{B}_1$$

Άρα,

$$E[E[X | \mathcal{B}_2] | \mathcal{B}_1] = E[X | \mathcal{B}_1].$$

■

Παρατήρηση 7

1) Εάν $\mathcal{B}_2 = \mathcal{A}$ τότε $E[X | \mathcal{B}_2] = X$ και η παραπάνω σχέση είναι προφανής.

- 2) Εάν $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ και $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$, τότε $E[X] = E[E[X | \mathcal{B}]]$, που προκύπτει από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής για $\mathcal{B} = \Omega$.

Μία έννοια που σχετίζεται με την έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι και αυτή της δεσμευμένης διασποράς.

Ορισμός 6 (Δεσμευμένη διασπορά)

Η **δεσμευμένη διασπορά της τ.μ. X δοθείσης της σ -άλγεβρας $\mathcal{B}$** ορίζεται από την σχέση

$$V(X | \mathcal{B}) = E[(X - E[X | \mathcal{B}])^2 | \mathcal{B}]$$

Εφαρμογή 7

Να δείξετε ότι:

$$V(X) = E[V(X | \mathcal{B})] + V(E[X | \mathcal{B}])$$

Απόδειξη

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[V(X | \mathcal{B})] &= E[E[(X - E[X | \mathcal{B}])^2 | \mathcal{B}]] \\ &= E[(X - E[X | \mathcal{B}])^2] \\ &= E[X^2 + (E[X | \mathcal{B}])^2 - 2 \cdot X \cdot E[X | \mathcal{B}]] \\ &= E[X^2] + E[(E[X | \mathcal{B}])^2] - 2 \cdot E[X \cdot E[X | \mathcal{B}]] \\ &= E[X^2] + E[(E[X | \mathcal{B}])^2] - 2 \cdot E[E[X \cdot E[X | \mathcal{B}]]] \\ &= E[X^2] + E[(E[X | \mathcal{B}])^2] - 2 \cdot E[E[X | \mathcal{B}] \cdot E[X | \mathcal{B}]] \\ &= E[X^2] + E[(E[X | \mathcal{B}])^2] - 2 \cdot E[E[X | \mathcal{B}]]^2 \\ &= E[X^2] - E[E[X | \mathcal{B}]]^2 \end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} V(E[X | \mathcal{B}]) &= E[E^2[X | \mathcal{B}]] - (E[E[X | \mathcal{B}]])^2 \\ &= E[E[X | \mathcal{B}]]^2 - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Από το 2^ο μέλος της ζητούμενης σχέσης προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
E[V(X| \mathcal{B})] + V(E[X| \mathcal{B}]) &= E[X^2] - E[E[X| \mathcal{B}]]^2 + E[E[X| \mathcal{B}]]^2 - (E[X])^2 \\
&= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= V(X).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$V(X) = E[V(X| \mathcal{B})] + V(E[X| \mathcal{B}])$$

■

Με την βοήθεια της δεσμευμένης διασποράς, και της εφαρμογής 7, μπορεί να αποδειχθεί η λεγόμενη 2^η ταυτότητα του Wald.

Πρόταση 8 (2^η ταυτότητα του Wald)

Εάν $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, N μια τυχαία μεταβλητή ακεραίων τιμών ανεξάρτητη από τις $X_1, X_2, \dots, X_n$ και ορίσουμε σαν $Y_N = \sum_{i=1}^N X_i$ τότε ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$V(X_N) = E[N] \cdot V(X_1) + (E[X_1])^2 \cdot V(N).$$

Εφαρμογή 8

Αεροπλάνα από διαφορετικές χώρες φτάνουν στο αεροδρόμιο των Χανίων (κατά την διάρκεια των καλοκαιρινών μηνών) σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, με ρυθμό 20 ανά ημέρα. Αν ο αριθμός των επιβατών που μεταφέρει ένα αεροπλάνο ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=40$ επιβάτες και διασπορά $\sigma^2=5$, ποιος ο αναμενόμενος αριθμός των επιβατών που φτάνουν στο αεροδρόμιο κατά την διάρκεια 10 ημερών; Ποια η (τυπική) απόκλιση από τον αριθμό αυτό;

Λύση

Εάν N ο αριθμός των επιβατών που φτάνουν στο αεροδρόμιο των Χανίων κατά την διάρκεια 10 ημερών και οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_N$ παριστάνουν το αριθμό των επιβατών που ταξιδεύουν με το 1^ο, 2^ο κ.ο.κ. αεροπλάνο, τότε ο συνολικός αριθμός των επιβατών που επιβιβάζονται στο αεροδρόμιο των Χανίων είναι ίσο με $Y_N = \sum_{i=1}^N X_i$. Η τ.μ N ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda=10 \times 20=200$ οπότε $EN=\sigma^2(N)=200$, ενώ κάθε μία από τις μεταβλητές $X_j \approx N(40,5)$ οπότε $EX_j=40$, $\sigma^2(X_j)=5$.

Ο αναμενόμενος αριθμός των επιβατών που φτάνουν στο αεροδρόμιο θα είναι ίσος με:

$$EY_N = E[X_1] \cdot E[N] = 40 \cdot 200 = 8.000 \text{ επιβάτες}$$

Η διασπορά από τον αριθμό αυτό θα είναι ίση με :

$$\sigma^2(Y_N) = E[N] \cdot \sigma^2(X_1) + (EX_1)^2 \cdot \sigma^2(N) = 200 \cdot 5 + 1600 \cdot 200 = 321.000$$

Οπότε η τυπική απόκλιση από τον αριθμό αυτό θα είναι ίση με:
 $\sigma(Y_N) = \sqrt{321.000} \approx 567$ επιβάτες.

■

Δίνουμε, τέλος, μία πολύ χρήσιμη ανισότητα, που αφορά μια ειδική κατηγορία συναρτήσεων δεσμευμένων μέσων τιμών.

Ορισμός 7

Μία συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται **κυρτή** εάν,
 $\forall x, y \in [\alpha, \beta], 0 < \lambda < 1$, έχουμε:

$$\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \geq g(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

Πρόταση 9 (Ανισότητα Jensen)

Εάν X είναι μία ολοκληρώσιμη τ.μ. και $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία κυρτή ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε

$$\phi(E[X | \mathcal{B}]) \leq E[\phi(x) | \mathcal{B}].$$

Παράδειγμα 19

1) Εάν $\phi(x) = |x|$ τότε η ανισότητα γίνεται

$$|E[X | \mathcal{B}]| \leq E[|X| | \mathcal{B}].$$

2) Εάν $p \geq 1$ και $\phi(x) = |x|^p$ τότε

$$|E[X | \mathcal{B}]|^p \leq E[|X|^p | \mathcal{B}].$$

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5° - MARTINGALES

5.1 Εισαγωγή

Όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο για να περιγράψουμε τα αποτελέσματα μιας σειράς από τυχαία φαινόμενα (πειράματα), όπως π.χ. την ρίψη ενός νομίσματος επαναληπτικά ή την τιμή του δείκτη του Χρηματιστηρίου Αθηνών σε συνεχείς εργάσιμες ημέρες, δεν είναι αρκετή μια τ.μ. αλλά μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Με άλλα λόγια χρειαζόμαστε μια (διακριτού χρόνου) στοχαστική διαδικασία. Ένας από τους τρόπους σύνδεσης των τ.μ της στοχαστικής διαδικασίας είναι και αυτός που ονομάζουμε *martingale*. Η έννοια έχει τις ρίζες της στα τυχερά παιχνίδια, χρησιμοποιείται δε για να περιγράψει «δίκαια» παιχνίδια (καταστάσεις) τύχης. Κάποιες από τις έννοιες των τυχερών παιχνιδιών («ποντάρισμα») έχουν «κληρονομηθεί» και στα Οικονομικά Μαθηματικά και ιδιαίτερα στην θεωρία των χρηματοοικονομικών παραγώγων, όπως τα δικαιώματα (options). Γι' αυτό και τα martingales παίζουν σημαντικό ρόλο στην θεωρία αυτή.

5.2 Ορισμός Martingale

Ορισμός 1

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας πιθανοθεωρητικός χώρος και $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία αύξουσα ακολουθία υπό-σ-αλγεβρών της $\mathcal{A}$, δηλαδή $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \dots$. Τότε η ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται **διύλιση**.

Εδώ η σ-άλγεβρα F_n παριστάνει την γνώση που έχουμε (για κάποιο τυχαίο φαινόμενο ή σειρά τυχαίων φαινομένων που παρατηρούμε ή ενδιαφερόμαστε) την χρονική στιγμή n . Περιέχει όλα εκείνα τα γεγονότα A για τα οποία την χρονική στιγμή n είναι δυνατόν να αποφασίσουμε εάν το A συμβαίνει ή όχι. Καθώς το n αυξάνει, θα υπάρχουν περισσότερα τέτοια γεγονότα A , δηλαδή η ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ που παριστάνει την γνώση μας θα μεγαλώνει (εξ' ου και η αύξουσα ακολουθία των σ-αλγεβρών).

Έστω τώρα $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία τ.μ. και $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια διύλιση. Αρχικά μπορεί να φαίνεται ότι δεν έχουν τίποτε κοινό. Στην πράξη όμως η ακολουθία των τ.μ. περιγράφει μια ακολουθία από τυχαία φαινόμενα και η διύλιση περιέχει την γνώση που έχουμε αποκτήσει παρατηρώντας τα αποτελέσματα της ακολουθίας (των τ.μ.). Η 1^η συνθήκη λοιπόν στον παρακάτω ορισμό σημαίνει ότι η F_n περιέχει

οτιδήποτε γνώση έχουμε από τις τιμές των $X_1, X_2, \dots, X_n$ (συνήθως περιέχει πολύ περισσότερες πληροφορίες).

Ορισμός 2

Έστω $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ ένα μια διύλιση του π.χ. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Μία ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ καλείται **martingale** ως προς την ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ (ή για άλλους συγγραφείς η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^\infty$) εάν:

- i. Η X_n είναι F_n -μετρήσιμη, δηλαδή $X_n \in F_n$
- ii. Η X_n είναι (απόλυτα) ολοκληρώσιμη, δηλαδή $E[|X_n|] < \infty$
- iii. $E[X_{n+1} | F_n] = X_n$

Παρατήρηση 1

(α) Η συνθήκη ii απαιτείται για να έχει νόημα η δεσμευμένη μέση τιμή της iii. Πράγματι, ισχύει:

$$E[E[X_{n+1} | F_n]] \leq E[E[|X_{n+1}| | F_n]] = E[|X_{n+1}|] < +\infty$$

(β) Ο όρος martingale οφείλει την ονομασία του σε μια στρατηγική (πονταρίσματος) στοιχημάτων κατά την οποία όταν κάποιος, παίζοντας τυχερά παιχνίδια, χάνει ένα γύρο (παρτίδα) του παιχνιδιού, τότε διπλασιάζει το στοίχημα στον επόμενο γύρο με σκοπό να κερδίσει τα χρήματα που ήδη έχει χάσει.

(γ) Αν X_n η τιμή της μετοχής, μιας συγκεκριμένης εταιρείας εισηγμένης στο Χρηματιστήριο Αθηνών, την $n^{\text{οστη}}$ ημέρα (από κάποια ημέρα που θεωρούμε σαν αρχή του χρόνου), τότε η συνθήκη iii μας αναφέρει ότι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής την $n+1$ ημέρα θα είναι ίση με X_n .

Θεωρούμε τώρα την σ-άλγεβρα $G_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), n \in \mathbb{N}$ (η σ-άλγεβρα που γεννιέται από τις τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$). Η G_n είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα ως προς την οποία κάθε μία από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι μετρήσιμη. Είναι φανερό ότι $G_n \subset F_n$ αν και μόνο αν η τυχαία μεταβλητή X_n είναι F_n -μετρήσιμη.

Παρατήρηση 2

Εάν η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^\infty$ είναι ένα martingale, τότε και η ακολουθία $\{X_n, G_n\}_{n=1}^\infty$ είναι επίσης ένα martingale.

Γιατί,

- i. Η ακολουθία $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και η τ.μ. X_n είναι G_n -μετρήσιμη.
- ii. Η $|X_n|$ είναι ολοκληρώσιμη.
- iii. Από την ιδιότητα της απορρόφησης, λόγω του ότι $G_n \subset F_n$, έχουμε:

$$E[X_{n+1}|G_n] = E[E[X_{n+1}|F_n]|G_n] = \underbrace{E[X_n|G_n]}_{X_n = G_n\text{-μετρήσιμη}} = X_n$$

Στα περισσότερα παραδείγματα έχουμε $G_n = F_n$, και εάν σε κάποιο από αυτά δεν αναφέρεται η διύλιση, εννοείται ότι είναι η $\{G_n\}_{n=1}^\infty$.

Πολλές φορές ένα martingale αρχίζει από τον χρόνο 0, δηλαδή την X_0 .

Η πρόταση που ακολουθεί μας δίνει έναν εναλλακτικό ορισμό ενός martingale.

Πρόταση 1

Η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^\infty$ είναι ένα martingale αν και μόνον αν $\forall A \in F_n$ ισχύει

$$\int_A X_n dP = \int_A X_{n+1} dP$$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε: $\forall A \in F_n$

$$\int_A E[X_{n+1}|F_n] dP = \int_A X_{n+1} dP$$

Αλλά από την υπόθεση του martingale, έχουμε

$$\int_A E[X_{n+1}|F_n] dP = \int_A X_n dP$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις έπεται ότι: $\int_A X_n dP = \int_A X_{n+1} dP$.

($\Leftarrow$) Εάν $\int_A X_n dP = \int_A X_{n+1} dP \quad \forall A \in F_n$, τότε επειδή από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε

$$\int_A E[X_{n+1} | F_n] dP = \int_A X_{n+1} dP \quad \forall A \in F_n,$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις συνεπάγεται ότι

$$\int_A E[X_{n+1} | F_n] dP = \int_A X_n dP \quad \forall A \in F_n$$

Αλλά τότε, χρησιμοποιώντας γνωστή πρόταση της θεωρίας μέτρου, συνεπάγεται ότι

$$E[X_{n+1} | F_n] = X_n, \quad \forall n$$

δηλαδή, η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

■

Το πρώτο μέρος της παρακάτω πρότασης μας δίνει ένα (πρώτο) τεστ για να εξετάσουμε εάν μια δοθείσα ακολουθία τ.μ. είναι ένα martingale.

Πρόταση 2

Εάν $\{X_n, G_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale, τότε:

- i. $E[X_n] = E[X_1], \quad \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή σ' ένα martingale η μέση τιμή παραμένει σταθερή.
- ii. Για κάθε $n > m$ ισχύει ότι $E[X_n | F_m] = X_m$

Απόδειξη

- i. Η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής.

Για $n=1$ έχουμε: $E[X_n] = E[X_1]$, το οποίο ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή: $E[X_k] = E[X_1]$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$, δηλαδή $E[X_{k+1}] = E[X_1]$.

Πράγματι:

$$E[X_{k+1}] = E[E[X_{k+1} | F_k]] \stackrel{\text{mgl}}{=} E[X_k] \stackrel{\substack{\text{επαγωγική} \\ \text{υπόθεση}}}{=} E[X_1]$$

ii. Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε την μεθόδου της επαγωγής.

Για $n=m+1$ έχουμε: $E[X_n | F_m] = E[X_{m+1} | F_m] = X_m$, το οποίο ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $n=m+k$: $E[X_{m+k} | F_m] = X_m$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=m+k+1$, δηλαδή $E[X_{m+k+1} | F_m] = X_m$.

Πράγματι:

$$E[X_{m+k+1} | F_m] = E[E[X_{m+k+1} | F_{m+k}] | F_m] \stackrel{\text{mgl}}{=} E[X_{m+k} | F_m] \stackrel{\substack{\text{επαγωγική} \\ \text{υπόθεση}}}{=} X_m$$

■

5.3 Παραδείγματα των martingales

Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα martingales (από την πλειάδα των εφαρμογών που έχει η θεωρία τους).

Το πρώτο παράδειγμα μας φανερώνει ότι η έννοια του διακριτού martingale γενικεύει την έννοια της ακολουθίας ανεξάρτητων και ταυτοτικά κατανομημένων τ.μ.

Παράδειγμα 1

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία τ.μ. τ.ω $X_0=0$ και οι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με μέση τιμή $E[X_n]=0$ και $E[|X_n|] < \infty$, $\forall n$. Εάν ορίσουμε

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

τότε η ακολουθία $\{S_n, G_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

Γιατί,

i. Είναι φανερό ότι η S_n είναι G_n -μετρήσιμη (σαν άθροισμα G_n -μετρήσιμων συναρτήσεων).

$$\text{ii. } E[|S_n|] \leq \sum_{j=1}^n E[|X_j|] < \infty.$$

$$\text{iii. } E[S_{n+1} | G_n] = E[X_{n+1} + S_n | G_n]$$

$$\begin{aligned}
&= E\left[\underbrace{X_{n+1}}_{\text{ανεξάρτητες}} \mid G_n\right] + E[S_n \mid G_n] \\
&= E[X_{n+1}] + S_n = 0 + S_n = S_n.
\end{aligned}$$

■

Ερμηνεία 1

Τα martingales αποτελούν ένα μαθηματικό μοντέλο μιας ακολουθίας **δίκαιων** (τυχερών) παιχνιδιών. Έστω λοιπόν ότι, στο παραπάνω παράδειγμα, η τ.μ. X_n παριστάνει το ποσό που «κερδίζει» (κερδίζει ή χάνει) ένας παίκτης, ανά νομισματική μονάδα στοιχήματος (π.χ. ανά ένα ευρώ που στοιχηματίζει) στο $n^{\text{στο}}$ δίκαιο παιχνίδι ($E[X_n] = 0$) και η F_n περιέχει όλη την πληροφορία («προϊστορία») για τα παιχνίδια μέχρι τη $n^{\text{στη}}$ χρονική στιγμή. Η τ.μ. $S_n = X_1 + \dots + X_n$ παριστάνει τα συνολικά κέρδη του παίκτη μετά την συμπλήρωση n παιχνιδιών (εδώ οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες). Η ιδιότητα (iii) του ορισμού αναφέρει ότι το αναμενόμενο συνολικό κέρδος του παίκτη μετά το επόμενο παιχνίδι είναι το ίδιο με αυτό μετά το παρόν παιχνίδι (δίκαιο παιχνίδι).

Παρατήρηση 3

(α) Στην γενικότερη περίπτωση που οι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ταυτοτικά κατανομημένες τ.μ. αλλά η $E[X_1] = \mu \neq 0$, εάν ορίσουμε

$$S_n = X_1 + \dots + X_n - n\mu$$

τότε αποδεικνύεται ανάλογα ότι, η ακολουθία $\{S_n, G_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

(β) Εάν $\Omega = \{-1, 1\}$, $\mathcal{A}$ = δυναμοσύνολο του Ω , $P(\{1\}) = P(\{-1\}) = \frac{1}{2}$, και

$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανομημένες τ.μ. τ.ω. $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ (η μέση τιμή

$E[X_n] = 0$). Η ακολουθία $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται **συμμετρικός τυχαίος περίπατος**.

Η ερμηνεία σ' αυτή την περίπτωση είναι ίδια με την παραπάνω (εδώ, σε κάθε παιχνίδι ο παίκτης κερδίζει ή χάνει μια νομισματική μονάδα με πιθανότητα $1/2$).

Γενικότερα, εάν $P(\{1\})=p, P(\{-1\})=1-p=q$, η $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται **απλός τυχαίος περίπατος**.

Εφαρμογή 1

Μια χρηματιστηριακή εταιρεία πουλά δικαιώματα προαίρεσης αγοράς (call options) συνεχώς, τα οποία έχουν βάση διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία. Το αναμενόμενο κέρδος ή η ζημία είναι πεπερασμένο για κάθε ένα από τα δικαιώματα αγοράς. Η αξία των περιουσιακών στοιχείων σχηματίζεται ανεξάρτητα του κάθε ενός από όλα τα άλλα. Το αναμενόμενο κέρδος από κάθε δικαίωμα αγοράς για τη χρηματιστηριακή εταιρεία είναι μηδέν, ικανοποιώντας έτσι την αρχή του no-arbitrage. Αν S_n είναι το *συνολικό κέρδος της χρηματιστη-ριακής εταιρείας από την υλοποίηση των n δικαιωμάτων αγοράς*, να δείξετε ότι αν εξακολουθεί να επενδύει σε δικαιώματα αγοράς, τότε η S_n είτε είναι ένα martingale σε σχέση με το κέρδος είτε είναι ζημία από τα δικαιώματα αγοράς.

Λύση

Έστω X_i η τ.μ. η οποία ορίζεται να είναι:

$X_i =$ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει *το κέρδος ή τη ζημία από το i*

Δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (call option) για $i=1,2,\dots,n$.

Αφού το αναμενόμενο κέρδος ή ζημία είναι πεπερασμένο αυτό σημαίνει ότι $E[|X_n|] < \infty$.

Είναι προφανές ότι η χρηματιστηριακή εταιρεία από 0 πωλήσεις δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς θα έχει μηδενικό αναμενόμενο κέρδος ή ζημία και επομένως έχουμε ότι X_0 και $E[X_0]=0$.

Επιπλέον όμως το αναμενόμενο κέρδος για τη χρηματιστηριακή εταιρεία είναι μηδέν για κάθε ένα από τα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς (no-arbitrage) και έτσι έχουμε ότι : $E[X_n]=0$ για $n=1,2,\dots$

Η τ.μ. S_n είναι το *συνολικό κέρδος* της χρηματιστηριακής εταιρείας από την υλοποίηση των n δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς, επομένως $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Αφού, η αξία των περιουσιακών στοιχείων σχηματίζεται ανεξάρτητα του κάθε ενός από όλα τα άλλα, έχουμε ότι οι τ.μ. $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Επομένως, από το παράδειγμα 1, η σ.δ. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale. Δηλαδή, το συνολικό κέρδος ή η ζημία της χρηματιστηριακής εταιρείας είναι ένα martingale σε σχέση με το κέρδος ή τη ζημία από

κάθε δικαίωμα προαίρεσης αγοράς με διαφορετική βάση ως περιουσιακό στοιχείο που πουλά.

■

Παράδειγμα 2

Έστω $\{X_n\}_{n \geq 1}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με μέση τιμή $E[X_n] = m_n \neq 0$ και $E[|X_n|] < \infty, \forall n$. Εάν ορίσουμε σαν

$$Y_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{X_k}{m_k} \right),$$

τότε η ακολουθία $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale αναφορικά με την ακολουθία $G_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Γιατί,

- i. Είναι φανερό ότι η Y_n είναι G_n -μετρήσιμη (σαν γινόμενο G_n -μετρήσιμων συναρτήσεων).
- ii. $E[|Y_n|] = E\left[\left|\prod_{k=1}^n \left(\frac{X_k}{m_k}\right)\right|\right] = \prod_{k=1}^n E\left[\left|\frac{X_k}{m_k}\right|\right] < \infty$
- iii. $E[Y_{n+1} | G_n] = E\left[Y_n \cdot \frac{X_{n+1}}{m_{n+1}} | G_n\right]$

$$\begin{aligned} &= Y_n \cdot \frac{1}{m_{n+1}} \cdot \underbrace{E[X_{n+1} | G_n]}_{\text{ανεξάρτητες}} = Y_n \cdot \frac{1}{m_{n+1}} \cdot E[X_{n+1}] \\ &= Y_n \cdot \frac{1}{m_{n+1}} \cdot m_{n+1} = Y_n. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 3 (τιμές μετοχών)

Έστω $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες, θετικές τ.μ. τ.ω. $EZ_n < +\infty, \forall n \geq 1$ και έστω:

$$X_n = X_0 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_n$$

Εδώ η Z_n μπορεί να θεωρήσουμε ότι παριστάνει την μεταβολή της τιμής μιας μετοχής, σαν κλάσμα της παρούσας της τιμής, κατά την διάρκεια μιας χρονικής μονάδας (π.χ. μιας ημέρας, ενός μήνα κ.λ.π.). Ο παραπάνω πολλαπλασιαστικός κανόνας (στον ορισμό της X_n) μας εγγυάται ότι η τιμή της μετοχής είναι μη-αρνητική και η

εμπειρία μας έχει δείξει ότι οι μεταβολές στην τιμή της μετοχής είναι περίπου ανάλογες της τιμής της μετοχής.

Εφαρμογή 2 (Διακριτό μοντέλο Black- Scholes).

Εδώ, η $Z_n = e^{Y_n}$, $Y_n \approx N(\mu, \sigma^2)$

Εφαρμογή 3 (Διωνυμικό μοντέλο).

Εδώ, η $Z_n = (1+\alpha)e^{-r}$ με πιθανότητα p και $(1+\alpha)^{-1}e^{-r}$, όπου r είναι το επιτόκιο. Η χρήση του $(1+\alpha)$ και του $(1+\alpha)^{-1}$ μας εγγυάται ότι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή n θα έχει την μορφή $X_n = X_0 \cdot (1+\alpha)^k e^{-nr}$

Η ακολουθία $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ είναι ένα martingale εάν $EZ_k = 1$. Πράγματι,

$$E[X_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0] = E[X_0 \cdot Z_1 \cdots Z_n \cdot Z_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0] =$$

$$E[X_n \cdot Z_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0] = x_n \cdot EZ_{n+1} = x_n, \quad \forall x_n$$

δηλαδή, $E[X_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0] = X_n$.

Παράδειγμα 4

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ μία ακολουθία τ.μ. τ.ώ. $X_0=0$ και οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανομημένες τ.μ., με μέση τιμή $E[X_n] = 0$ και $E[X_n^2] = \sigma^2$, $\forall n \geq 1$. Εάν ορίσουμε $S_0 = 0$ και

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^n X_k \right)^2 - n\sigma^2$$

τότε η ακολουθία $\{S_n, G_n\}_{n=1}^\infty$ είναι ένα martingale.

Γιατί,

- i. Είναι φανερό ότι η S_n είναι G_n -μετρήσιμη (σαν άθροισμα G_n -μετρήσιμων συναρτήσεων).

$$\begin{aligned} \text{ii. } E[|S_n|] &= E\left[\left|\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2 - n\sigma^2\right|\right] \\ &\leq E\left[\left|\sum_{k=1}^n X_k\right|^2\right] + n\sigma^2 = E\left[\sum_{k=1}^n X_k^2 + 2\sum_{i < j} X_i X_j\right] + n\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{\kappa=1}^n E[X_{\kappa}^2] + 2 \sum_{i < j} E[X_i] \cdot E[X_j] + n\sigma^2$$

$$= \sum_{\kappa=1}^n E[X_{\kappa}^2] + n\sigma^2 = (n+n) \cdot \sigma^2 < \infty$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } E[S_{n+1} | G_n] &= E \left[\left(\sum_{\kappa=1}^{n+1} X_{\kappa} \right)^2 - (n+1)\sigma^2 \mid G_n \right] \\ &= E \left[\left(X_{n+1} + \sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right)^2 - (n+1)\sigma^2 \mid G_n \right] \\ &= E \left[X_{n+1}^2 + \left(\sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right)^2 - 2 \cdot X_{n+1} \left(\sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right) - (n+1)\sigma^2 \mid G_n \right] \\ &= EX_{n+1}^2 + E \left[\left(\sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right)^2 \mid G_n \right] - 2E \left[X_{n+1} \left(\sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right) \mid G_n \right] - (n+1)\sigma^2 \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} E[S_{n+1} | G_n] &= \sigma^2 + \left(\sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right)^2 - \underbrace{2E[X_{n+1} | G_n]}_{\text{ανεξάρτητες}} \cdot \left(\sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right) - n\sigma^2 - \sigma^2 \\ &= \left(\sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right)^2 - 2 \underbrace{E[X_{n+1}]}_{=0} \cdot \left(\sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right) - n\sigma^2 \\ &= \left(\sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right)^2 - n\sigma^2 = S_n . \end{aligned}$$

■

Εφαρμογή 4

Θεωρούμε τη χρηματιστηριακή εταιρεία να πουλά δικαιώματα προαίρεσης αγοράς συνεχώς, τα οποία έχουν βάση διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία. Η χρηματιστηριακή εταιρεία έχει παρατηρήσει ότι τα κέρδη ή ζημίες στα διαφορετικά δικαιώματα προαίρεσης αγοράς είναι ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες έχουν όλες την ίδια διακύμανση σ^2 . Η χρηματιστηριακή εταιρεία ορίζει ένα δείκτη λειτουργίας της, ο οποίος για n πωλήσεις δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς με διαφορετική βάση δίνεται από τον τύπο:

$$Z_n = \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2 - n\sigma^2$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι καθώς αυξάνουν σε πωλήσεις, λόγω του παραδείγματος 4, η στοχαστική διαδικασία $\{Z_n\}_{n=0}^\infty$ είναι ένα martingale σε σχέση με το κέρδος ή ζημία από το δικαίωμα αγοράς.

■

Το παρακάτω παράδειγμα συναντιέται αρκετά συχνά, και είναι ο τρόπος με τον οποίο παριστάνουμε την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης αγοράς σαν martingale.

Παράδειγμα 5

Έστω X μία τ.μ. τέτοια ώστε $E[|X|] < \infty$ και $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ μία αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών, υπό-αλγεβρών της κλάσης $\mathcal{A}$. Εάν ορίσουμε

$$Y_n = E[X | G_n], \quad \forall n,$$

τότε η ακολουθία $\{Y_n, G_n\}_{n=0}^\infty$ είναι ένα martingale. Η $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ καλείται **martingale του Doob**.

Πράγματι,

i. Η Y_n σαν παραλλαγή της $E[X | G_n]$ είναι G_n -μετρήσιμη.

ii. $E|Y_n| = E[E[X | G_n]]$

$$\leq E[E[|X| | G_n]]$$

$$= E[|X|] < \infty \quad (\text{ιδιότητα της δ.μ.τ.})$$

iii. $E[Y_{n+1} | G_n] = E[E[X | G_{n+1}] | G_n]$

$$= E[X | G_n], \text{ επειδή } G_n \subset G_{n+1}$$

$$= Y_n$$

■

Ερμηνεία 2

Εάν X είναι η τιμή μιάς μετοχής (μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή), τότε οι αναμενόμενες τιμές της μετοχής, σε διαδοχικές χρονικές στιγμές (λαμβάνοντας υπ' όψιν κάθε φορά πληροφορίες σχετικά με την μετοχή) αποτελούν ένα martingale.

Παράδειγμα 6 (Μοντέλο Κελιού Ρολγα)

Έστω ένα δοχείο το οποίο περιέχει αρχικά τ κόκκινες και β μαύρες μπάλες. Επιλεγούμε επαναληπτικά μπάλες από το δοχείο ως εξής: μετά από κάθε επιλογή μιας μπάλας από το δοχείο, την επιστρέφουμε μαζί με a μπάλες του ίδιου χρώματος. Θεωρούμε ότι οι αριθμοί τ , β , a είναι ακέραιοι. Έστω:

$$Y_n = \begin{cases} 1, & \text{αν η } n^{\text{στη}} \text{ μπάλα που επιλέξαμε είναι κόκκινη.} \\ 0, & \text{αν η } n^{\text{στη}} \text{ μπάλα που επιλέξαμε είναι μαύρη.} \end{cases}$$

Εάν

$\tau_n =$ «αριθμός των κόκκινων μπαλών μετά την ολοκλήρωση της $n^{\text{στης}}$ επιλογής»

$\beta_n =$ «αριθμός των μαύρων μπαλών μετά την ολοκλήρωση της $n^{\text{στης}}$ επιλογής» και

$X_n =$ «ποσοστό των κόκκινων μπαλών στο δοχείο μετά το $n^{\text{στο}}$ βήμα»,

$$(X_n = \frac{\tau_n}{\tau_n + \beta_n})$$

Τότε η ακολουθία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale ως προς την ακολουθία $G_n = \sigma(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$.

Πράγματι,

- i. Είναι φανερό ότι η X_n είναι G_n -μετρήσιμη.
- ii. Επειδή από την υπόθεση προκύπτει ότι $0 \leq X_n \leq 1$, συνεπάγεται ότι $E[|X_n|] < \infty$.

$$\begin{aligned} \text{iii. } E[X_{n+1} | G_n] &= \frac{\tau_n + a}{\tau_n + \beta_n + a} \cdot \frac{\tau_n}{\tau_n + \beta_n} + \frac{\tau_n}{\tau_n + \beta_n + a} \cdot \frac{\beta_n}{\tau_n + \beta_n} \\ &= \frac{\tau_n}{\tau_n + \beta_n} \cdot \left(\frac{\tau_n + a}{\tau_n + \beta_n + a} + \frac{\beta_n}{\tau_n + \beta_n + a} \right) \\ &= \frac{\tau_n}{\tau_n + \beta_n} \cdot \frac{\tau_n + \beta_n + a}{\tau_n + \beta_n + a} \\ &= \frac{\tau_n}{\tau_n + \beta_n} = X_n. \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 4

Επειδή η ακολουθία $\{X_n, G_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale, θα ισχύει ότι

$$E[X_n] = E[X_1] = \frac{\tau}{\tau + \beta}.$$

Παράδειγμα 7 (Κλαδωτή αλυσίδα)

Έστω ότι η ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μία **κλαδωτή αλυσίδα**, όπου η τ.μ. X_n εκφράζει το μέγεθος της $n^{\text{στης}}$ γενιάς. Θεωρούμε $X_0 \equiv 1$ και $X_{n+1} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{X_n}$, όπου $\{Y_i\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανομημένες τ.μ., όπου Y_k δηλώνει τον αριθμό των απογόνων που γεννά ο k οργανισμός της $n^{\text{οστής}}$ γενιάς, με $p(k) = P\{Y_1 = k\} = \alpha_k$ και $E[Y_1] = m$, για κάθε $k \geq 0$ και $0 < m < \infty$. Τότε:

- i. Η σ.δ. $Z_n = \frac{X_n}{m^n}$ είναι ένα martingale ως προς την ακολουθία $G_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.
- ii. Η ακολουθία $\{\xi^{X_n}\}$ είναι ένα martingale ως προς την ακολουθία $G_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$, όπου ξ είναι ένα σταθερό σημείο της **πιθανογεννήτριας** $\pi(\xi) = \sum_u p(u) \cdot \xi^u$, $\xi \geq 0$.

Γιατί,

$$\begin{aligned} \text{i. } E[Z_{n+1} | G_n] &= E\left[\frac{X_{n+1}}{m^{n+1}} | Y_0, Y_1, \dots, Y_{X_n}\right] \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} E\left[\underbrace{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{X_n}}_{\text{ανεξάρτητες}}\right] = \frac{1}{m^{n+1}} \cdot X_n \cdot E[Y_1] \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} \cdot X_n \cdot m = \frac{X_n}{m^n} = Z_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } E[\xi^{X_{n+1}} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{ιδιότητα}}{=} \stackrel{\text{Markov}}{=} \\ &= E[\xi^{X_{n+1}} | X_n = x_n] = \sum_{u \geq 0} p(x_n, u) \cdot \xi^u \\ &= \sum_{u \geq 0} \xi^u \cdot P\{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{x_n} = u\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[\xi^{Y_1+Y_2+\dots+Y_{x_n}}] = \left\{ E[\xi^{Y_1}] \right\}^{x_n} \\
&= [\pi(\xi)]^{x_n} \stackrel{\text{σταθερό}}{=} \xi^{x_n}.
\end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 5

Είδαμε παραπάνω στο παράδειγμα 1 ότι, εάν $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες τ.μ. με μέση τιμή $E[X_n]=0$ (δίκαιο παιχνίδι), η $S_n=X_1+\dots+X_n$ είναι ένα martingale (υποθέτουμε ότι η τ.μ. X_n παριστάνει το ποσό που «κερδίζει» ένας παίκτης, ανά νομισματική μονάδα στοιχήματος, στο $n^{\text{στο}}$ δίκαιο παιχνίδι).

Θα θέλαμε να ξέρουμε εάν υπάρχει ένα *σύστημα* ή μια *στρατηγική* η οποία θα μπορούσε να κάνει το παιχνίδι να είναι **ευνοϊκό** (favorable) για μας. Η στρατηγική π.χ. θα συνίστατο στο να στοιχηματίζουμε διαφορετικά ποσά σε κάθε παιχνίδι, με το ποσόν u_n (ας υποθέσουμε ότι υπάρχει όριο στο τι μπορούμε να στοιχηματίσουμε κάθε φορά, δηλαδή $u_n \leq C$) που θα ποντάραμε στο n -οστό παιχνίδι, να αποφασίζεται με βάση την γνώση που έχουμε από το τι συνέβη στα προηγούμενα $(n-1)$ παιχνίδια. Τότε $u_{n+1} \in G_n$ (ακόμα u_1 είναι σταθερά). Η ακολουθία

$$W_n = u_1 \cdot X_1 + u_2 \cdot X_2 + \dots + u_n \cdot X_n$$

παριστάνει τα *συνολικά κέρδη* του παίκτη μετά την συμπλήρωση n παιχνιδιών. Είναι ένα martingale, γιατί:

$$\begin{aligned}
E[W_{n+1}|G_n] &= E[W_n + u_{n+1} \cdot X_{n+1}|G_n] = E[W_n|G_n] + E[u_{n+1} \cdot X_{n+1}|G_n] = \\
&= W_n + u_{n+1} \cdot E[X_{n+1}|G_n] = W_n + u_{n+1} \cdot E[X_{n+1}] = W_n + u_{n+1} \cdot 0 = W_n
\end{aligned}$$

Αλλά τότε:

$$EW_n = EW_1 = E(u_1 \cdot X_1) = u_1 \cdot EX_1 = 0$$

Δηλαδή, καμιά στρατηγική δεν μπορεί να μετατρέψει ένα δίκαιο παιχνίδι σε ευνοϊκό ή άδικο (unfavorable) για μας παιχνίδι.

Προσπαθώντας να γενικεύσουμε τα παραπάνω, έχουμε μια σειρά ορισμούς και προτάσεις.

5.4 Μετασχηματισμοί Martingale

Μέχρι τώρα έχουμε συναντήσει (μεταξύ άλλων), το martingale σαν τα μερικά αθροίσματα των κερδών σε ένα δίκαιο παιχνίδι. Ένα τέτοιου είδους παιχνίδι μπορεί να θεωρηθεί και μια μετοχή που πωλείται (ή αγοράζεται) σε διακριτά χρονικά διαστήματα. Ερμηνεύοντας έτσι το παιχνίδι, θα πρέπει να κατασκευάσουμε μια σ.δ. (την αξία του χαρτοφυλάκιου μας) που θα περιγράφει επενδυτικές στρατηγικές για την μετοχή. Η αξία του χαρτοφυλάκιου αλλάζει καθώς αλλάζει η τιμή της μετοχής. Η αξία αυτή είναι ίση με τον αριθμό των μετοχών πολλαπλασιασμένο με την τιμή της μετοχής.

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία σ.δ. Για παράδειγμα, η τ.μ. X_n μπορεί να εκφράζει τη τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου (π.χ. μετοχής). Μερικές φορές, ιδιαίτερη σημασία έχουν οι διαφορές $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ για κάθε $n=1,2,\dots$

Έστω ότι η τ.μ. C_n ορίζεται ως εξής:

C_n = το ποσό που επενδύεται (στο περιουσιακό στοιχείο) τη στιγμή $n-1$ που είναι γνωστή η τιμή της X_{n-1} με σκοπό το κέρδος από τη διαφορά ΔX_n

τότε προφανώς το κέρδος αυτό τη χρονική στιγμή n είναι

$$C_n \Delta X_n = C_n (X_n - X_{n-1}) .$$

Η σ.δ. $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, όπου Y_n εκφράζει το *συνολικό κέρδος (των επενδύσεών μας στο περιουσιακό στοιχείο)* μέχρι τη στιγμή n είναι ίση με:

$$Y_n = \sum_{k=1}^n C_k (X_k - X_{k-1}) := (C * X)_n .$$

Η σ.δ. $\{(C * X)_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται ο **μετασχηματισμός** της σ.δ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ από την $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$. Εάν η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale, τότε η $\{(C * X)_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται **μετασχηματισμός martingale**.

Η σ.δ. $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ ονομάζεται η **προβλέψιμη** σ.δ. (η τ.μ. C_n καθορίζεται με βάση την «προϊστορία» της σ.δ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $n-1$), δηλαδή μ' άλλα λόγια η $C_n \in G_{n-1} = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Είναι φανερό ότι:

$$Y_n - Y_{n-1} = C_n (X_n - X_{n-1})$$

και ότι

$$(C * X)_0 = 0.$$

Παρατήρηση 6

Ο μετασχηματισμός martingale $(C * X)_n$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ από την προβλέψιμη διαδικασία $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι το διακριτό ανάλογο του **στοχαστικού ολοκληρώματος** $\int C dX$.

Οι μετασχηματισμοί martingale συναντιούνται συχνά σε εφαρμογές σε χρηματοοικονομικά παράγωγα που αφορούν διακριτό χρόνο.

Θεώρημα 1

Έστω $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία προβλέψιμη διαδικασία με μη-αρνητικές τιμές. Υποθέτουμε ότι η $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένη, δηλαδή ότι $C_n < K$ για κάθε $n=1,2, \dots$

Έστω ότι η σ.δ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale. Τότε ο μετασχηματισμός martingale $(C * X)_n$ της σ.δ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ από την προβλέψιμη διαδικασία $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale (σε σχέση με τη σ.δ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$).

Απόδειξη

1. Είναι προφανές ότι η $(C * X)_n$ είναι προσαρμοσμένη στην G_n που περιέχει όλες τις πληροφορίες που παρέχουν οι τυχαίες μεταβλητές $X_0, X_1, \dots, X_n$, γιατί:

$$(C * X)_n = \sum_{k=1}^n C_k (X_k - X_{k-1})$$

2. Θα πρέπει να δείξουμε ότι η μέση τιμή της απόλυτης τιμής της $(C * X)_t$ είναι πεπερασμένη για κάθε t . Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E \left[|(C * X)_n| \right] &= E \left[\left| \sum_{k=1}^n C_k (X_k - X_{k-1}) \right| \right] = \\ &\leq \sum_{k=1}^n E \left[|C_k (X_k - X_{k-1})| \right] \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^n E[C_k | X_k - X_{k-1}] \quad (\text{επειδή } C_k < K \text{ για κάθε } k)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n K \{E[|X_k|] + E[|X_{k-1}|]\} < \infty$$

επειδή $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ είναι ένα martingale κατά συνέπεια είναι γνωστό ότι $E[|X_k|] < \infty$ για κάθε $k=0,1,2, \dots$

3. Θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$E[(C * X)_{n+1} | G_n] = (C * X)_n \text{ για κάθε } n=0,1,2, \dots$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[(C * X)_{n+1} | G_n] &= \\ &= \left(\text{επειδή η } G_n \text{ περιέχει όλες τις πληροφορίες} \right. \\ &\quad \left. \text{που παρέχουν οι τ.μ. } X_0, X_1, \dots, X_n \right) \\ &= E[(C * X)_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n] = \\ &= E\left[\sum_{k=1}^{n+1} C_k (X_k - X_{k-1}) | X_0, X_1, \dots, X_n\right] = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} E[C_k (X_k - X_{k-1}) | X_0, X_1, \dots, X_n] = \\ &= \left(\text{επειδή η } C_k \text{ είναι γνωστή όταν είναι γνωστή η} \right. \\ &\quad \left. \text{πληροφορία } X_0, X_1, \dots, X_{k-1} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_k E[X_k - X_{k-1} | X_0, X_1, \dots, X_n] = \\ &= C_{n+1} E[X_{n+1} - X_n | X_0, X_1, \dots, X_n] + \sum_{k=1}^n C_k E[X_k - X_{k+1} | X_0, X_1, \dots, X_n] = \\ &= C_{n+1} E[X_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n] - \\ &\quad - C_{n+1} E[X_n | X_0, X_1, \dots, X_n] + \sum_{k=1}^n C_k E[X_k - X_{k-1} | X_0, X_1, \dots, X_n] = \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{(i) η } \{X_n\}_{n=0}^\infty \text{ είναι ένα martingale } E[X_{k+1} | X_0, X_1, \dots, X_n] = X_n \\ \text{(ii) από τις ιδιοτητες της δεσμευμενης μέσης τιμής} \\ E[X_n | X_0, X_1, \dots, X_n] = X_n \quad \text{και} \\ E[X_k - X_{k-1} | X_0, X_1, \dots, X_n] = X_k - X_{k+1} \quad \text{για } k \leq n \end{array} \right)$$

$$= C_{n+1}X_n - C_{n+1}X_n + \sum_{k=1}^n C_k (X_k - X_{k-1}) = (C * X)_n$$

■

Μία διαισθητική ερμηνεία

Το παραπάνω αποτέλεσμα μας αναφέρει ότι, όσο καλή και να είναι η πρόβλεψη για τις τιμές της $\{C_k\}_{k=1}^\infty$, όταν η $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ είναι ένα martingale, τότε και η $\{(C * X)_n\}_{n=1}^\infty$ θα είναι ένα martingale, δηλαδή το αναμενόμενο κέρδος για την επόμενη χρονική στιγμή θα είναι ίσο με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι θα εφαρμόζεται η αρχή του arbitrage. Με άλλα λόγια, το θεώρημα μας αναφέρει ότι: «δεν μπορεί να κερδίσει κανείς χρήματα παίζοντας σε ένα δίκαιο παιχνίδι».

Γενικότερα τώρα:

Ορισμός 3

Το ζεύγος $\{(d_i, \mathcal{B}_i)\}_{i \geq 0}$ είναι μια **martingale διαφορά** εάν:

- i. Η ακολουθία $\{\mathcal{B}_i\}_{i \geq 0}$ είναι μια διύλιση.
- ii. $d_j \in L^1$ και $d_j \in \mathcal{B}_j$.
- iii. Για κάθε j ισχύει $E[d_{j+1} | \mathcal{B}_j] = 0$.

Πρόταση 3

- i. Έστω ότι η ακολουθία $\{(d_i, \mathcal{B}_i)\}_{i \geq 0}$ είναι μια martingale διαφορά. Εάν ορίσουμε $X_n = \sum_{j=0}^n d_j$ τότε η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{B}_n\}_{n \geq 0}$ είναι ένα martingale.
- ii. Εάν η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{B}_n\}_{n \geq 0}$ είναι ένα martingale και ορίσουμε $d_0 = X_0 - E[X_0]$ και $d_j = X_j - X_{j-1}$, $j \geq 1$ τότε η ακολουθία $\{(d_i, \mathcal{B}_i)\}_{i \geq 0}$ είναι μια martingale διαφορά.

Η πρόταση που ακολουθεί είναι μια γενίκευση του θεωρήματος που αποδείξαμε παραπάνω (αποδεικνύεται ανάλογα).

Πρόταση 4 (Διακριτή Στοχαστική Ολοκλήρωση)

Έστω ότι η ακολουθία $\{(d_i, \mathcal{B}_i)\}_{i \geq 0}$ είναι μια martingale διαφορά και ότι η ακολουθία $\{u_j\}_{j \geq 0}$ είναι **προβλέψιμη** ($u_{j+1} \in \mathcal{B}_j$). Εάν ορίσουμε

$Y_j = \sum_{k=1}^j u_k \cdot d_k$ τότε, η ακολουθία $\{Y_j, \mathcal{B}_j\}_{j \geq 0}$ είναι ένα martingale.

Παρατήρηση 7

Μερικές εφαρμογές της πρότασης είναι και οι:

- (α) **(Στα τυχερά παιχνίδια)**: Στην περίπτωση αυτή η τ.μ. u_j παριστάνει το ποσό του στοιχήματος που ποντάρει ο παίχτης, ενώ η d_j παίρνει την τιμή 1 αν ο παίχτης κερδίζει ή την τιμή -1 αν ο παίχτης χάνει.
- (β) **(Οικονομία)** Εδώ: η τ.μ. u_j δηλώνει τον αριθμό των μετοχών που έχει κάποιος (την χρονική στιγμή j) και η τ.μ. d_j παριστάνει την διαφορά της τιμής της μετοχής από την $j-1$ μέχρι την j χρονική στιγμή.
- (γ) **(Κίνηση Brown)**: η τ.μ. d_j παριστάνει τις προσαυξήσεις της κίνησης Brown ενώ η τ.μ. Y_j εκφράζει το (διακριτικό) **στοχαστικό ολοκλήρωμα**.

5.5 Submartingales – Supermartingales

Σε πολλά προβλήματα μας ενδιαφέρει να έχουμε στον Ορισμό 2 (martingale), αντί ισότητας ανισότητα. Για τις περιπτώσεις αυτές έχουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 4

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας πιθανοθεωρητικός χώρος και $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια διύλιση του. Μία ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται

- (α) **submartingale** ως προς την ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν και μόνο αν:

i. Η X_n είναι F_n -μετρήσιμη, δηλαδή $X_n \in F_n$.

$$\text{ii. } E[X_n^+] < \infty, \text{ όπου } X^+ = \max\{0, X\}.$$

$$\text{iii. } E[X_{n+1} | F_n] \geq X_n.$$

(β) **supermartingale** ως προς την ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ αν και μόνο αν:

$$\text{i. } H \text{ } X_n \text{ είναι } F_n \text{-μετρήσιμη, δηλαδή } X_n \in F_n.$$

$$\text{ii. } E[X_n^-] < \infty, \text{ όπου } X^- = -\min\{0, X\}.$$

$$\text{iii. } E[X_{n+1} | F_n] \leq X_n.$$

Παράδειγμα 8

(α) Εάν η ακολουθία $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ είναι σταθερή, δηλαδή $X_n \equiv X, \forall n$, τότε είναι (τετριμμένα) ένα martingale. Εάν η $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ είναι αύξουσα, τότε είναι ένα submartingale, ενώ εάν είναι φθίνουσα τότε είναι ένα supermartingale.

(β) Εάν η ακολουθία $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ είναι martingale ως προς την ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^\infty$, τότε είναι submartingale και supermartingale ως προς την $\{F_n\}_{n=1}^\infty$.

(γ) Η $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ είναι submartingale ως προς την $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ αν και μόνο αν η $\{-X_n\}_{n=1}^\infty$ είναι supermartingale ως προς την $\{F_n\}_{n=1}^\infty$.

(δ) Στο παράδειγμα 3 η ακολουθία $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ είναι ένα submartingale εάν $EZ_k > 1$, ενώ είναι ένα supermartingale εάν $EZ_k < 1$.

Παρατήρηση 8

1) Μία ακολουθία submartingale παραπέμπει σε ένα ευνοϊκό παιχνίδι (favorable), ενώ μία supermartingale ακολουθία σε ένα άδικο (unfavorable) παιχνίδι.

2) Εάν η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^\infty$ είναι submartingale, τότε:

$$E[X_1] \leq E[X_2] \leq \dots$$

Ανάλογα, αν η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^\infty$ είναι supermartingale, τότε:

$$E[X_1] \geq E[X_2] \geq \dots$$

- 3) Αν η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι submartingale (supermartingale) τότε η $\{X_n, G_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι submartingale (supermartingale), όπου $G_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 5

- (α) Εάν οι ακολουθίες $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{Y_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι martingales τότε η ακολουθία $\{a \cdot X_n + \beta \cdot Y_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου a και β πραγματικοί αριθμοί, είναι ένα martingale.
- (β) Αν οι ακολουθίες $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{Y_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι submartingales (supermartingales) τότε ισχύουν τα παρακάτω:
- Η ακολουθία $\{a \cdot X_n + \beta \cdot Y_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $a, \beta \geq 0$, είναι ένα submartingale (supermartingale).
 - Η ακολουθία $\{\sup\{X_n, Y_n\}, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{\inf\{X_n, Y_n\}, F_n\}_{n=1}^{\infty}$) είναι ένα submartingale (supermartingale).

Απόδειξη

- (α) Οι δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού είναι προφανές ότι ικανοποιούνται από την ακολουθία $\{a \cdot X_n + \beta \cdot Y_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$, λόγω γραμμικότητας. Αρκεί να αποδείξουμε την τρίτη.

$$\begin{aligned} E[a \cdot X_{n+1} + \beta \cdot Y_{n+1} | F_n] &= a \cdot E[X_{n+1} | F_n] + \beta \cdot E[Y_{n+1} | F_n] \\ &= a \cdot X_n + \beta \cdot Y_n. \end{aligned}$$

- (β) i Ανάλογη με το (α), αντικαθιστώντας την ισότητα με (κατάλληλη) ανισότητα.
- ii Οι δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού είναι προφανές ότι ικανοποιούνται από την ακολουθία $\{\sup\{X_n, Y_n\}, F_n\}_{n=1}^{\infty}$. Η Αρκεί να αποδείξουμε την τρίτη είναι προφανής γιατί:

$$E[X_{n+1} \vee Y_{n+1} | F_n] \geq X_n \vee Y_n.$$

■

Ένας τρόπος για να αποδείξει κανείς ότι μιά ακολουθία τ.μ. είναι submartingale είναι με την βοήθεια (εφ' όσον μπορεί να χρησιμοποιηθεί) της ανισότητας του Jensen.

Θεώρημα 2

- i. Έστω ότι η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία **κυρτή** συνάρτηση τέτοια ώστε $E[|f(X_n)|] < \infty$ για κάθε $n \geq 0$. Τότε η ακολουθία $\{f(X_n), F_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα submartingale.
- ii. Έστω ότι η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα submartingale και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία αύξουσα **κυρτή** συνάρτηση τέτοια ώστε $E[|f(X_n)|] < \infty$ για κάθε $n \geq 0$. Τότε η ακολουθία $\{f(X_n), F_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα submartingale.

Απόδειξη

Και στις δύο περιπτώσεις, είναι εύκολο να δει κανείς ότι, ικανοποιούνται οι δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού. Αρκεί, να αποδείξουμε την τρίτη ιδιότητα σε καθεμία από αυτές.

- i. Με την βοήθεια της ανισότητας Jensen προκύπτει ότι:

$$E[f(X_{n+1})|F_n] \geq f(E[X_{n+1}|F_n]) = f(X_n)$$

- ii. Ομοίως,

$$E[f(X_{n+1})|F_n] \geq f(E[X_{n+1}|F_n]) \geq f(X_n)$$

■

Πόρισμα 1

Έστω ότι η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι martingale. Τότε:

- i. Η ακολουθία $\{|X_n|^p, F_n\}_{n=0}^{\infty}$, όπου $p \geq 1$, είναι submartingale.
Ειδικότερα, η ακολουθία $\{|X_n|, F_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι submartingale.
- ii. Η ακολουθία $\{X_n^+, F_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι submartingale.

Απόδειξη

- i. Η συνάρτηση $f(x)=|x|^p$, $p \geq 1$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$
- ii. Η συνάρτηση $f(x)=x^+$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

■

Πόρισμα 2

Αν η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα θετικό submartingale τότε η ακολουθία $\{X_n^p, F_n\}_{n=0}^{\infty}$, όπου $p \geq 1$, είναι submartingale.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f(x)=x^p$, $p \geq 1$ είναι κυρτή και αύξουσα στο $\mathbb{R}_+$.

■

Το παρακάτω θεώρημα είναι ανάλογο του θεωρήματος 1 (αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο)

Θεώρημα 3

Έστω $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία προβλέψιμη διαδικασία με μη-αρνητικές τιμές. Υποθέτουμε ότι η $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένη, δηλαδή ότι $C_n < K$ για κάθε $n=1,2, \dots$

Έστω ότι η σ.δ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα submartingale (supermartingale). Τότε ο μετασχηματισμός $(C * X)_n$ της σ.δ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ από την προβλέψιμη διαδικασία $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα submartingale (supermartingale) (σε σχέση με τη σ. δ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$).

5.6 Χρόνοι τερματισμού - Θεώρημα προαιρετικού τερματισμού

Όταν κάποιος παίζει τυχερά παιχνίδια, έχει την δυνατότητα να σταματήσει οποιαδήποτε χρονική στιγμή το επιθυμεί. Ο αριθμός των παιχνιδιών (διακριτός χρόνος ή χρονικές μονάδες) στα οποία έχει συμμετάσχει, πριν σταματήσει έστω ότι είναι T . Το T μπορεί να είναι προκαθορισμένο, π.χ. $T=5$, εάν αποφασίσει να σταματήσει αφού πάρει μέρος σε 5 γύρους του τυχερού παιχνιδιού. Τις περισσότερες φορές όμως, η απόφαση του να σταματήσει ή όχι λαμβάνεται μετά από κάθε γύρο, εξαρτάται δε από την γνώση που έχουμε "συσσωρεύσει" μέχρι τότε. Γι' αυτό, ο T είναι μια .τ.μ. με τιμές στο σύνολο $\{0,1,2,\dots\} \cup \{\infty\}$ (το ∞ είναι για την περίπτωση που, θεωρητικά, το παιχνίδι δεν σταματά ποτέ). Κάθε χρονική στιγμή n , ο παίκτης θα πρέπει να είναι σε θέση να αποφασίσει εάν θα σταματήσει να παίζει ή όχι, δηλαδή εάν $T=n$ ή όχι. Επομένως, το γεγονός $T=n$ θα ανήκει στην σ-άλγεβρα F_n (η οποία όπως έχουμε αναφέρει παριστάνει την γνώση μας μέχρι τον χρόνο n). Έχουμε λοιπόν το παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5

Έστω $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ μια διύλιση στον π.χ. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Μία τ.μ. $T: \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ καλείται **χρόνος τερματισμού** ή **χρόνος Markov** ως προς το διύλιση $\{F_n\}_{n=1}^\infty$, αν $\{T = n\} \in F_n$ για όλα τα $n \geq 1$.

Παρατήρηση 9

Η τ.μ. T ικανοποιεί τη σχέση $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c \in F_n$, για όλα τα n αφού η $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια διύλιση.

Πρόταση 6

Η τ.μ. T είναι χρόνος τερματισμού αν και μόνο αν ικανοποιείται η σχέση $\{T \leq n\} \in F_n$, για κάθε n .

Απόδειξη

Πράγματι,

$$\{T=n\} = \{T \leq n\} - \{T \leq n-1\} \in F_n$$

και

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{T=k\} \in F_n.$$

■

Παράδειγμα 9

Θεωρούμε τη ρίψη ενός κανονικού νομίσματος. Αν ορίσουμε

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{αν στη } n^{\text{στη}} \text{ ρίψη εμφανιστεί κεφαλή} \\ 0, & \text{αν στη } n^{\text{στη}} \text{ ρίψη εμφανιστεί γράμμα.} \end{cases}$$

και T ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της πρώτης κεφαλής, τότε η τ.μ. T είναι χρόνος τερματισμού ως προς την $F_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$, γιατί:

$$\{T = n\} = \{X_n = 1, X_j = 0, 1 \leq j < n\} \in F_n$$

■

Παράδειγμα 10

Έστω $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ μια διύλιση στον π.χ. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και $B \in \mathcal{B}^1$. Θεωρούμε την ακολουθία $Y_0, Y_1, \dots$ τ.μ. $Y_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $Y_n \in F_n$ για κάθε n . Αν ορίσουμε

$$T_B(\omega) = \begin{cases} \inf \{n; Y_n \in B\}, & \text{αν } B \neq \emptyset \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε η τ.μ. T_B είναι ένας χρόνος τερματισμού ως προς το διύλιση $\{F_n\}_{n=1}^\infty$, γιατί:

$$\{T_B = n\} = \{Y_1 \notin B, \dots, Y_{n-1} \notin B, Y_n \in B\} \in F_n$$

Η τ.μ. T_B ονομάζεται **χρόνος πρώτης επίσκεψης στο B**. Το ότι (μπορεί) $T_B = \infty$ σημαίνει ότι δεν επισκεπτόμαστε ποτέ το σύνολο B. ■

Παρατήρηση 10

Γενικά, για k σταθερό, ο **χρόνος της k επίσκεψης** (της ακολουθίας $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$) **στο B** είναι χρόνος τερματισμού. Αλλά, ο χρόνος της τελευταίας επίσκεψης δεν είναι αφού πρέπει να γνωρίζουμε όλο το μέλλον.

Πρόταση 7

Εάν $\{T_k\}$ είναι χρόνοι τερματισμού, τότε

- α) το $\bigwedge_k T_k = \inf_k T_k$ και το $\bigvee_k T_k = \sup_k T_k$ είναι χρόνοι τερματισμού,
- β) Εάν η οικογένεια $\{T_k\}$ των χρόνων τερματισμού είναι μονότονη, τότε $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k$ είναι ένας χρόνος τερματισμού
- γ) ο $T_i + T_j$, $\forall i, j$ είναι ένας χρόνος τερματισμού (ο $T_i - T_j$, εν γένει, δεν είναι).

Συνεχίζοντας, έστω ότι η τ.μ. X_n περιγράφει τα «κέρδη» (κέρδος ή ζημιά) ενός παίκτη κατά την διάρκεια n γύρων ενός τυχερού παιχνιδιού. Εάν ο παίκτης αποφασίσει να σταματήσει μετά από T γύρους, τότε τα συνολικά «κέρδη» του θα είναι X_T . Εάν λοιπόν, το παιχνίδι είναι δίκαιο (οπότε $EX_n = 0$), θα θέλαμε να ξέρουμε αν $EX_T = 0$ (δεν είναι απαραίτητο $EX_T = 0$). Στην πραγματικότητα, εάν ο παίκτης αποφασίσει να σταματήσει μετά από n γύρους, τότε τα συνολικά «κέρδη» του θα είναι $X_{n \wedge T}$.

Πρόταση 8

Έστω $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ μια ακολουθία τ.μ τ.ω. $X_n \in F_n$. Η ακολουθία $\{X_{n \wedge T}\}_{n=1}^\infty$ είναι προσαρμοσμένη στην διύλιση $\{F_n\}_{n=1}^\infty$.

Απόδειξη

Η

$$X_{n \wedge T} = \sum_{m=0}^{n-1} X_m I_{\{T=m\}} + X_n I_{\{T \geq n\}}$$

από την οποία έπεται ότι οι τ.μ. $X_{n \wedge T}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι F_n μετρήσιμες. ■

Πρόταση 9

Εάν η $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ είναι ένα martingale (submartingale ή super martingale αντίστοιχα) τότε η ακολουθία $\{X_{n \wedge T}\}_{n=1}^\infty$ είναι ένα martingale (submartingale ή supermartingale αντίστοιχα).

Απόδειξη

Έχουμε ότι:

$$X_{(n+1) \wedge T} - X_{n \wedge T} = I_{\{T > n\}} (X_{(n+1)} - X_n)$$

και

$$E[X_{(n+1) \wedge T} - X_{n \wedge T} | F_n] = I_{\{T > n\}} E[X_{(n+1)} - X_n | F_n] = 0$$

Από το γεγονός αυτό και την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι, εάν η $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ είναι ένα martingale, τότε η ακολουθία $\{X_{n \wedge T}\}_{n=1}^\infty$ είναι ένα martingale. ■

Τα θεωρήματα που ακολουθούν δίνουν συνθήκες που εξασφαλίζουν (γενικότερα) ότι $EX_T = EX_n$, $\forall n$.

Παρατήρηση 11

Η X_T είναι μια τ.μ. αφού: $X_T = \sum_{m=0}^{+\infty} X_m I_{\{T=m\}}$, οπότε εάν $B \in \mathcal{B}^1$, τότε:

$$\{\omega / X_T \in B\} = \sum_{m=0}^{+\infty} \{X_m \in B, T=m\}.$$

Θεώρημα 4 (προαιρετικού τερματισμού του Doob)

Έστω T ένας χρόνος τερματισμού και $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μιά σ.α. και έστω ακόμα ότι μια (τουλάχιστον) από τις παρακάτω συνθήκες ικανοποιείται

(α) ο T είναι φραγμένος (δηλαδή $T(\omega) \leq k, \forall \omega$ & $k=ct$)

(β) ο T είναι πεπερασμένος σ.β. (δηλαδή $P\{T < \infty\} = 1$) και η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένη (δηλαδή $|X_n(\omega)| \leq k, \forall n, \omega$ & $k=ct$)

(γ) ο T είναι ολοκληρώσιμος ($ET < \infty$) και οι προσαυξήσεις της $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένες (δηλαδή $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq M, \forall n, \omega$ & $M=ct$)

Τότε

(I) Εάν η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα supermartingale έπεται ότι $EX_T < \infty$ και

$$EX_T \leq EX_0$$

(II) Εάν η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale έπεται ότι $EX_T < \infty$ και

$$EX_T = EX_0$$

Μιά δεύτερη μορφή του παραπάνω βασικού θεωρήματος είναι αυτή που ακολουθεί.

Θεώρημα 5 (προαιρετικού τερματισμού-2^η μορφή)

Εάν $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale και T ένας χρόνος τερματισμού

τέτοιος ώστε $P\{T < \infty\} = 1$ και $E\left|\sup_{n \geq 0} X_{T \wedge n}\right| < \infty$ τότε

$$EX_T = EX_0$$

Πόρισμα 3

Εάν $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale και T ένας χρόνος τερματισμού τέτοιος ώστε $ET < \infty$ και $\exists K$ τ.ω.

$$E\left[|X_{n+1} - X_n| \mid F_n\right] \leq K, \quad \text{για } n < T$$

Τότε $EX_T = EX_0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6° - Τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης (options)

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε, πως μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς στοχαστικές διαδικασίες (και ιδιαίτερα σ.δ. martingales) για την μοντελοποίηση καταστάσεων στην Οικονομία. Πιο συγκεκριμένα θα δούμε πως χρησιμοποιείται η σπουδαιότερη από τις σ.δ., η ονομαζόμενη *κίνηση Brown* για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης (options).

6.1 Κίνηση Brown

Το καλοκαίρι του 1827 ο Robert Brown, ένας Σκοτσέζος γιατρός και βοτανολόγος, παρατήρησε, με το μικροσκόπιό του, την κίνηση της γύρης των φυτών μέσα σε ένα υγρό και πρόσεξε ότι ήταν πολύ ασυνήθιστη (ασυνήθιστες «προσαυξήσεις» στις διαδοχικές θέσεις των μορίων της). Βρέθηκε ότι τα μικρά σωματίδια κινούνται πολύ γρήγορα και η κίνησή τους αυξάνεται από τη θερμοκρασία και από την ελάττωση της περιεκτικότητας του υγρού. Οι έρευνές του εκδόθηκαν ως *Ένας Σύντομος Υπολογισμός των Μικροσκοπικών Παρατηρήσεων που έγιναν τους καλοκαιρινούς μήνες του 1827*. Αργότερα, εκείνον τον αιώνα αναφέρθηκε ότι η ασυνήθιστη κίνηση οφειλόταν σε ένα μεγάλο αριθμό συγκρούσεων μεταξύ της γύρης και των σωματιδίων του υγρού (τα οποία είναι μικροσκοπικά μικρά σε σχέση με τη γύρη). Τα χτυπήματα (συγκρούσεις) υποθέτουμε ότι συμβαίνουν πολύ συχνά, σε μικρά χρονικά διαστήματα, ανεξάρτητα μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα του κάθε χτυπήματος θεωρείται πολύ μικρό σε σχέση με το συνολικό αποτέλεσμα. Γύρω στα 1900 ο Louis Bachelier, ένας διδακτορικός φοιτητής των μαθηματικών στη Σορβόνη, μελετούσε τη συμπεριφορά των τιμών των μετοχών στο χρηματιστήριο του Παρισιού και παρατήρησε υψηλές ασυνήθιστες προσαυξήσεις (στις τιμές αυτές, από ημέρα σε ημέρα). Ανέπτυξε, λοιπόν, τον πρώτο μαθηματικό προσδιορισμό της κίνησης που αναφέρθηκε από τον Brown, και τον χρησιμοποίησε ως μοντέλο για την προσαύξηση των τιμών των μετοχών. Στη δεκαετία του 1920 ο Norbert Wiener, ένας φυσικομαθηματικός του MIT, ανέπτυξε ένα πλήρως αυστηρό πιθανοθεωρητικό πλαίσιο γι' αυτό το μοντέλο. Αυτού του είδους η κίνηση ονομάζεται *κίνηση Brown* ή *διαδικασία Wiener*. Η διαδικασία αυτή συμβολίζεται με B ή W . Η κίνηση Brown είναι χρησιμοποιείται ευρέως σε μοντέλα των οικονομικών και φυσικών επιστημών. Επίσης, η κίνηση Brown είναι βασική στη μοντελοποίηση της τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης.

Παρατήρηση 1 (Χρήση της κίνησης Brown στην τιμολόγηση μετοχών)

Η κίνηση Brown μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο να μοντελοποιήσει την εξέλιξη των τιμών μιας μετοχής ως εξής: έστω Δt ένα χρονικό διάστημα και $X(t)$, $X(t+\Delta t)$ η τιμή της μετοχής τις χρονικές στιγμές t

και $t+\Delta t$ αντίστοιχα και $\Delta W(t)$ η διαφορά («αύξηση») των τιμών της κίνησης στο διάστημα μήκους Δt . Ένα μοντέλο που υιοθετείται από πολλούς για την περιγραφή των τιμών μιας μετοχής (σε διακριτό χρόνο) είναι:

$$\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{X(t)} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t)$$

όπου μ, σ είναι σταθερές. Η (στοχαστική αυτή διαφορική) εξίσωση μας αναφέρει ότι η αλλαγή στην τιμή της μετοχής, σε σχέση με την παρούσα της τιμή, είναι μια ποσότητα που εξαρτάται από δύο παράγοντες: (α) από έναν μη-τυχαίο παράγοντα ανάλογο του μ και (β) από έναν τυχαίο παράγοντα ο οποίος είναι ανάλογος της «αύξησης» της κίνησης Brown στο χρονικό διάστημα Δt (με συντελεστή αναλογίας σ).

Σε συνεχή χρόνο, το παραπάνω διακριτό μοντέλο, γίνεται η στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

Λύνοντας την, μπορεί ναδειχθεί ότι η σ.δ. $X(t)$ της τιμής της μετοχής είναι ίση με:

$$X(t) = X(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}$$

(ποσότητα μη-αρνητική) ή

$$X(t) = X(0)e^{\mu t} e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}}$$

η οποία εξαρτάται από:

- (α) τον μη-τυχαίο παράγοντα $X(0)e^{\mu t}$, ο οποίος είναι $X(0)$ «προσαυξημένος» (πολλαπλασιασμένος με) κατά τον παράγοντα $e^{\mu t}$ (κεφάλαιο $X(0)$ συνεχώς ανατοκιζόμενο, με ρυθμό (επιτόκιο) ανατοκισμού μ ανά μονάδα χρόνου) και
- (β) τον τυχαίο παράγοντα $e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}}$, που έχει μέση τιμή ίση με 1.

Η σ.δ. $e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}}$ είναι ένα παράδειγμα ενός martingale.

Επομένως, η αναμενόμενη τιμή της μετοχής, την χρονική στιγμή t , είναι ίση με $X(0)e^{\mu t}$

Θα εξηγήσουμε στην συνέχεια το πως η κίνηση Brown προκύπτει (οριακά) από έναν τυχαίο περίπατο. Από την περιγραφή γίνεται

φανερό το γιατί η διασπορά σε μια κίνηση Brown είναι ανάλογη του χρόνου.

Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας το συμμετρικό τυχαίο περίπατο, στον οποίο σε κάθε χρονική στιγμή είναι εξίσου πιθανό να κάνουμε ένα βήμα είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά. Έτσι, έχουμε μια αλυσίδα Markov με πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος:

$$P_{i,i+1} = \frac{1}{2} = P_{i,i-1}, i = 0, \pm 1, \dots$$

Τώρα υποθέτουμε ότι επιταχύνουμε αυτή τη διαδικασία, κάνοντας όλο και μικρότερα βήματα σε όλο και μικρότερα χρονικά διαστήματα. Αν, λοιπόν, φτάσουμε στο όριο (με τον κατάλληλο τρόπο), τότε παίρνουμε την **κίνηση Brown**.

Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι σε κάθε χρονικό διάστημα μήκους Δt κάνουμε ένα βήμα μεγέθους Δx είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά, με ίσες πιθανότητες. Αν συμβολίσουμε με $W(t)$ τη θέση (που βρισκόμαστε) την χρονική στιγμή t τότε:

$$X(t) = \Delta x (X_1 + \dots + X_{[t/\Delta t]}) \quad (*)$$

όπου:

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{αν το } i \text{ βήμα, μήκους } \Delta x, \text{ είναι προς τα δεξιά} \\ -1, & \text{αν είναι προς τα αριστερά} \end{cases}$$

και $[t/\Delta t]$ είναι, το ακέραιο μέρος του $t/\Delta t$, ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του $t/\Delta t$, και τα X_i θεωρούνται ανεξάρτητες τ.μ. με:

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Η $E[X_i] = 0$, $V(X_i) = E[X_i^2] = 1$. Τότε, από την σχέση (*) έχουμε:

$$E[W(t)] = 0 \quad \text{και} \quad V(W(t)) = (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t} \right]. \quad (1)$$

Τώρα, ας αφήσουμε τα Δx και Δt να τείνουν προς το 0. Ωστόσο, θα το κάνουμε κατά τέτοιο τρόπο ώστε η οριακή διαδικασία που παίρνουμε να είναι μη τετριμμένη.

Αν πάρουμε $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$, όπου σ θετική σταθερά, τότε από την (1), καθώς το $\Delta t \rightarrow 0$, έχουμε ότι:

$$E[W(t)] = 0 \quad \text{και} \quad V(W(t)) = \sigma^2 t.$$

Ας αναφέρουμε μερικές προφανείς (δαισθητικά) ιδιότητες της οριακής αυτής της διαδικασίας, παίρνοντας $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ και $\Delta t \rightarrow 0$. Από την σχέση (*) και το Κ.Ο.Θ. έχουμε:

1) η $W(t)$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 t$.

Επιπλέον, επειδή οι αλλαγές των τιμών του τυχαίου περιπάτου σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες, έχουμε ότι:

2) η σ.δ. $\{W(t), t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή εάν $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, οι τ.μ.

$$W(t_n)-W(t_{n-1}), W(t_{n-1})-W(t_{n-2}), \dots, W(t_2)-W(t_1), W(t_1)$$

είναι ανεξάρτητες.

Τέλος, αφού η κατανομή της αλλαγής στη θέση του τυχαίου περιπάτου σε κάθε χρονικό διάστημα εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος, θα μπορούσαμε να πούμε ότι:

3) η $\{W(t), t \geq 0\}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις δηλαδή η κατανομή του $W(t+s)-W(t)$ δεν εξαρτάται από το t .

Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1

Μια στοχαστική διαδικασία $\{W(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται **κίνηση Brown** αν:

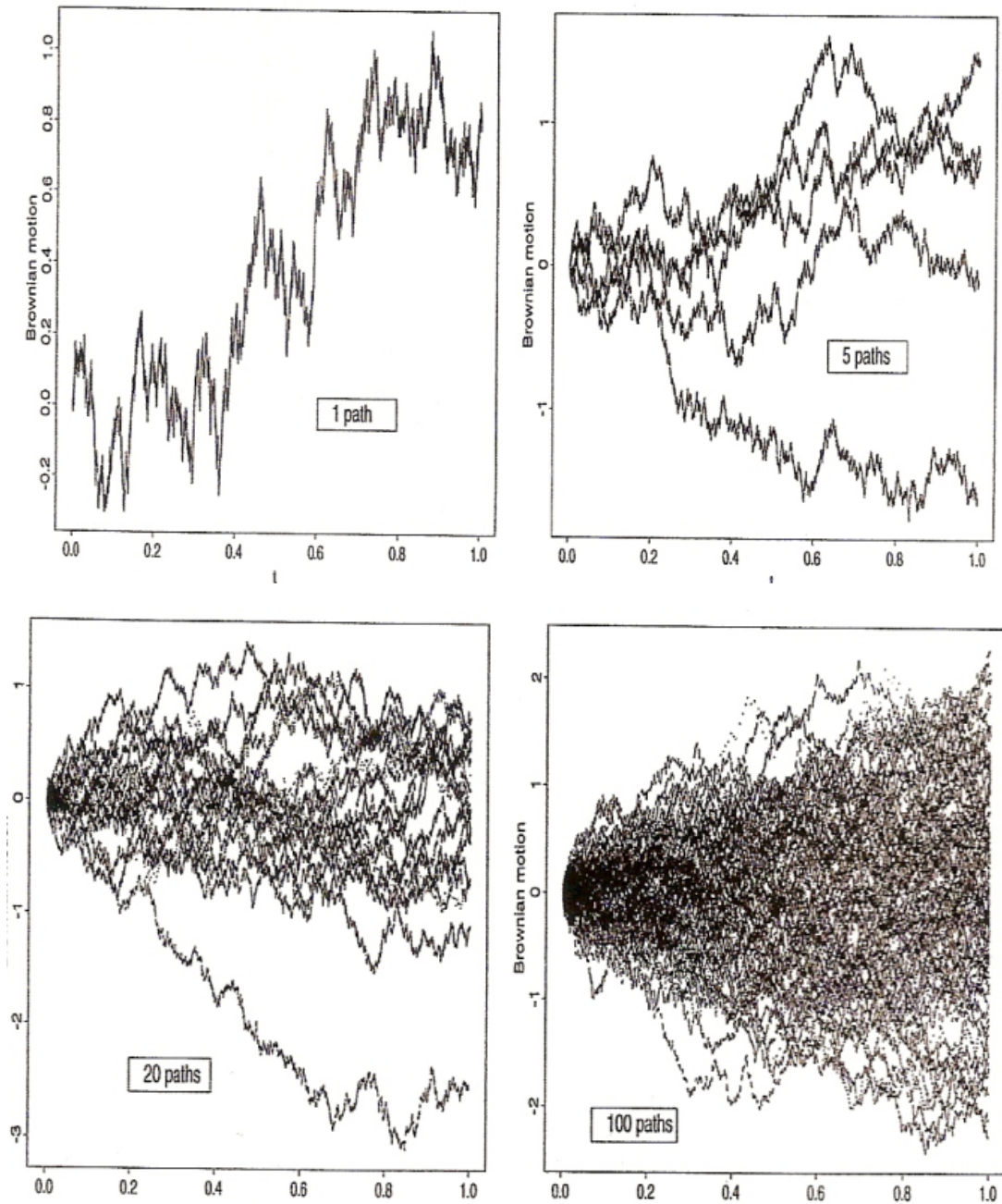
I) $W(0) = 0$

II) η $\{W(t), t \geq 0\}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

III) για κάθε $t > 0$, η $W(t)$ έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 t$.

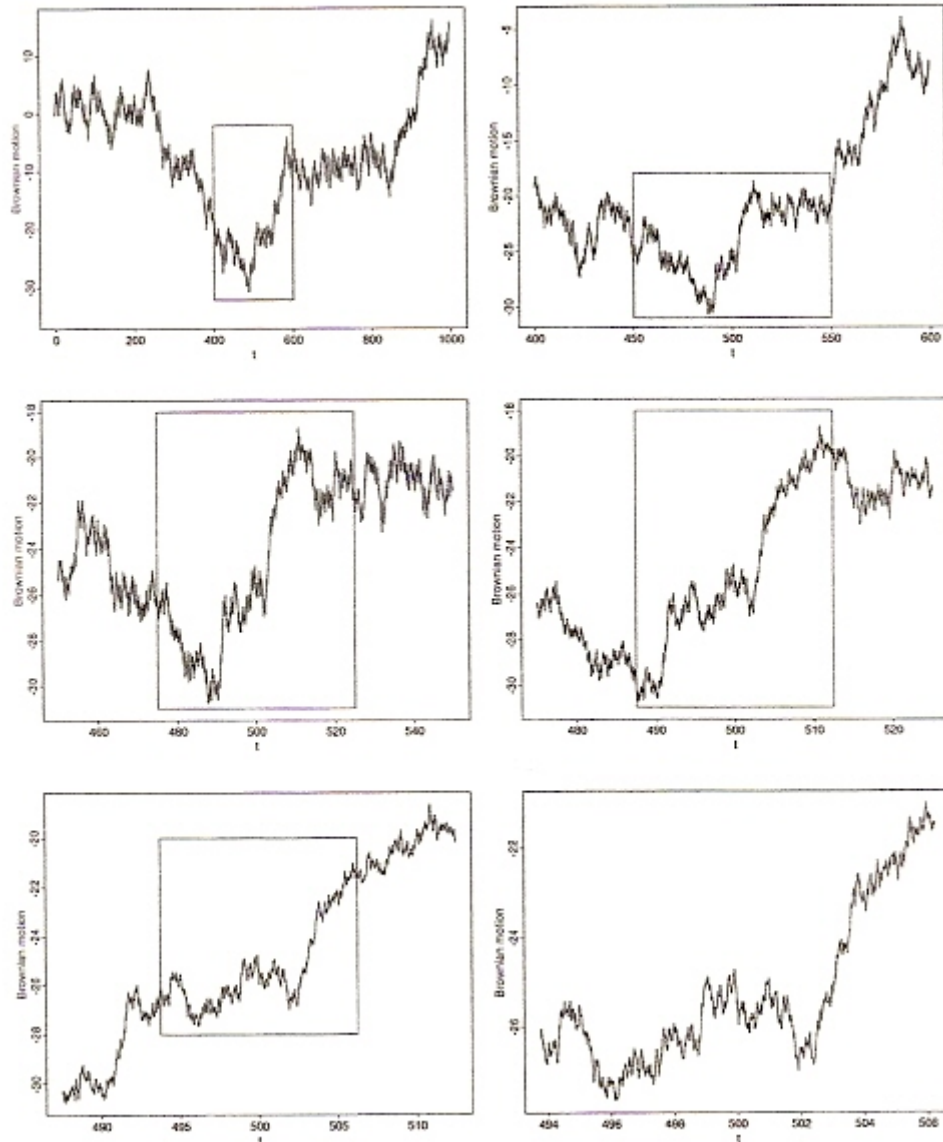
Αν $\sigma=1$, τότε η διαδικασία ονομάζεται **κανονική κίνηση Brown**. Όμως, επειδή κάθε κίνηση Brown μπορεί να μετατραπεί σε κανονική θέτοντας $B(t) = W(t)/\sigma$ (αν δεν το αναφέρουμε διαφορετικά), θα θεωρούμε ότι $\sigma=1$ σε αυτό το κεφάλαιο.

Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται προσομοιώσεις της κίνησης Brown (1, 5, 20 και 100 μονοπάτια αντίστοιχα)



Παρατήρηση 2

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε το ίδιο μονοπάτι της κίνησης Brown σε διαφορετικές κλίμακες μέτρησης. Τα σχήματα των καμπύλων στα διάφορα διαστήματα φαίνονται όμοια, αλλά δεν είναι απλά το ένα αντίγραφο του άλλου.



Πρόταση 1

Η κίνηση Brown $\{W(t), t \geq 0\}$ είναι ένα martingale.

Απόδειξη

Πράγματι, η

$$\begin{aligned}
 E[W(t) | W(u), 0 \leq u \leq s] &= E[W(t) - W(s) + W(s) | W(u), 0 \leq u \leq s] = \\
 &= E[W(t) - W(s) | W(u), 0 \leq u \leq s] + E[W(s) | W(u), 0 \leq u \leq s] = \\
 &= E[W(t) - W(s)] + W(s) = W(s)
 \end{aligned}$$

όπου $E[W(t) - W(s) | W(u), 0 \leq u \leq s] = E[W(t) - W(s)]$, λόγω της ανεξαρτησίας των προασυζήσεων και $E[W(s) | W(u), 0 \leq u \leq s] = W(s)$ επειδή η $W(s)$ είναι μετρήσιμη ως προς την σ -άλγεβρα $\sigma(\{W(u), 0 \leq u \leq s\})$.

■

Είδαμε παραπάνω ότι, η $B(t)$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά t , οπότε η πυκνότητα πιθανότητας της δίνεται από τη σχέση:

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

Για να υπολογίσουμε την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των $B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n)$ για $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι ακόλουθες ισότητες

$$B(t_1) = x_1, B(t_2) = x_2, \dots, B(t_n) = x_n$$

είναι ισοδύναμες με τις εξής:

$$B(t_1) = x_1, B(t_2) - B(t_1) = x_2 - x_1, \dots, B(t_n) - B(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}.$$

Ωστόσο, από την υπόθεση των ανεξαρτήτων προσαυξήσεων έχουμε ότι $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες, ενώ από την υπόθεση των στάσιμων προσαυξήσεων έχουμε ότι η $B(t_k) - B(t_{k-1})$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά $t_k - t_{k-1}$.

Έτσι, η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των $B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2-x_1) \dots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1}) \\ &= \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + \dots + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}} \right] \right\}}{(2\pi)^{n/2} [t_1(t_2-t_1) \dots (t_n-t_{n-1})]^{1/2}} \end{aligned}$$

Από αυτή την ισότητα, μπορούμε να υπολογίσουμε (θεωρητικά), κάθε επιθυμητή πιθανότητα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ζητάμε την δεσμευμένη κατανομή της $B(s)$ δεδομένου ότι $B(t) = \beta$, όπου $s < t$. Η δεσμευμένη πυκνότητα είναι:

$$\begin{aligned} f_{s|t}(x|\beta) &= \frac{f_s(x) f_{t-s}(\beta-x)}{f_t(\beta)} \\ &= K_1 \exp \left\{ -\frac{x^2}{2s} - \frac{(\beta-x)^2}{2(t-s)} \right\} \end{aligned}$$

$$=K_2 \exp \left\{ -x^2 \left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(t-s)} \right) + \frac{\beta x}{t-s} \right\}$$

$$=K_2 \exp \left\{ -\frac{t}{2s(t-s)} \left(x^2 - 2 \frac{s\beta}{t} x \right) \right\} = K_3 \exp \left\{ -\frac{\left(x - \frac{\beta s}{t} \right)^2}{\frac{2s(t-s)}{t}} \right\}$$

όπου οι K_1, K_2, K_3 είναι ανεξάρτητες του x . Συνεπώς, παρατηρούμε ότι η δεσμευμένη κατανομή της $B(s)$ δεδομένου ότι $B(t) = \beta$ είναι, για $s < t$, κανονική με μέση τιμή και διασπορά:

$$E[B(s)|B(t)=\beta] = \frac{s}{t} \beta$$

$$V[B(s)|B(t)=\beta] = \frac{s}{t} (t-s)$$

Παράδειγμα 1

Σε ένα ποδηλατικό αγώνα μεταξύ δύο ανταγωνιστών, ορίζουμε με $Y(t)$ το χρόνο (σε δευτερόλεπτα) κατά τον οποίο ο ποδηλάτης που ξεκίνησε στην εσωτερική θέση είναι μπροστά, όταν τα 100t % του αγώνα έχουν συμπληρωθεί. Υποθέτουμε ότι η $\{Y(t), 0 \leq t \leq 1\}$ μπορεί αποτελεσματικά να μοντελοποιηθεί ως κίνηση Brown με σταθερά διασποράς σ^2 .

- Αν ο εσωτερικός ποδηλάτης προηγείται σ δευτερόλεπτα στα μισά της διαδρομής, ποια είναι η πιθανότητα να είναι εκείνος ο νικητής;
- Αν ο εσωτερικός ποδηλάτης νικήσει τον αγώνα με διαφορά σ δευτερόλεπτα, ποια η πιθανότητα να προηγείται στη μέση της διαδρομής;

Λύση

- Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P\{Y(1) > 0 | Y(1/2) = \sigma\} &= P\{Y(1) - Y(1/2) > -\sigma | Y(1/2) = \sigma\} \\ &= P\{Y(1) - Y(1/2) > -\sigma\} \text{ από ανεξάρτητες προσαυξήσεις} \\ &= P\{Y(1/2) > -\sigma\} \text{ από στάσιμες προσαυξήσεις} \\ &= P\left\{ \frac{Y(1/2)}{\sigma/\sqrt{2}} > -\sqrt{2} \right\} = \Phi(\sqrt{2}) \approx 0.9213 \end{aligned}$$

όπου $\Phi(x) = P\{N(0, 1) \leq x\}$ είναι η πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

β) Πρέπει να υπολογίσουμε την $P\{Y(1/2)>0|Y(1)=\sigma\}$. Ας υπολογίσουμε πρώτα την δεσμευμένη κατανομή της $Y(s)$ δεδομένου ότι $Y(t)=C$ όταν $s<t$. Τώρα, αφού η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι κανονική κίνηση Brown όταν $X(t)=Y(t)/\sigma$, έχουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή της $X(s)$ δεδομένου ότι $X(t)=C/\sigma$ είναι κανονική με μέση τιμή $sC/t\sigma$ και διασπορά $s(t-s)/t$. Άρα, η δεσμευμένη κατανομή της $Y(s)=\sigma X(s)$ με δεδομένο ότι $Y(t)=C$ είναι κανονική με μέση τιμή sC/t και διασπορά $\sigma^2 s(t-s)/t$. Επομένως,

$$\begin{aligned} P\{Y(1/2)>0|Y(1)=\sigma\} &= P\{N(\sigma/2, \sigma^2/4)>0\} \\ &= \Phi(1) \\ &\approx 0.8413 \end{aligned}$$

■

6.2 Παραλλαγές της Κίνησης Brown

1. Κίνηση Brown με Αδράνεια (Drift)

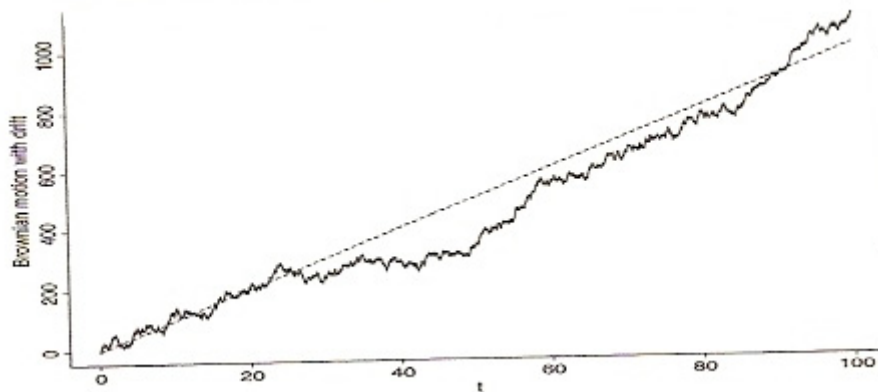
Λέμε ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι μια **κίνηση Brown με συντελεστή αδράνειας** (*drift coefficient*) μ και συντελεστή διασποράς σ^2 , αν:

- I) $X(0) = 0$
- II) η $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις
- III) η $X(t)$ έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή μt και διασπορά $t\sigma^2$.

Ένας ισοδύναμος ορισμός είναι να θεωρήσουμε ότι η $\{B(t), t \geq 0\}$ είναι μια κανονική κίνηση Brown και να ορίσουμε σαν:

$$X(t) = \sigma B(t) + \mu t.$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια προσομοίωση της κίνησης Brown $X(t)=20B(t)+10t$ (με διακεκομμένη γραμμή την γραφική παράσταση της συνάρτησης μέσης τιμής $\mu_X(t)=10t$).



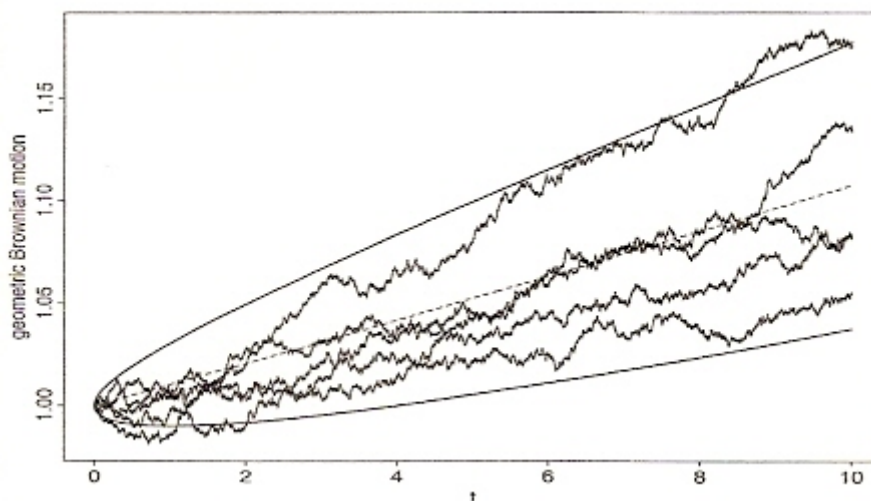
2. Γεωμετρική Κίνηση Brown

Αν η $\{Y(t), t \geq 0\}$ είναι μια κίνηση Brown με συντελεστή αδράνειας μ και συντελεστή διασποράς σ^2 , τότε η $\{X(t), t \geq 0\}$ που ορίζεται σαν:

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

ονομάζεται **γεωμετρική κίνηση Brown**.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια προσομοίωση της γεωμετρικής κίνησης Brown $X(t) = e^{0,01t + 0,01B(t)}$ (με διακεκομμένη γραμμή την γραφική παράσταση της συνάρτησης μέσης τιμής $\mu_X(t)$)



Η γεωμετρική κίνηση Brown $\{X(t)\}$ μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας την χρονική στιγμή t δεδομένου ότι γνωρίζουμε την «ιστορία» της διαδικασίας μέχρι την χρονική στιγμή s . Έτσι, για $s < t$, θέλουμε να θεωρούμε υπολογίσουμε την:

$$E[X(t) | X(u), 0 \leq u \leq s]$$

Αλλά, η

$$\begin{aligned} E[X(t) | X(u), 0 \leq u \leq s] &= E[e^{Y(t)} | Y(u), 0 \leq u \leq s] \\ &= E[e^{Y(s)+Y(t)-Y(s)} | Y(u), 0 \leq u \leq s] \\ &= e^{Y(s)} E[e^{Y(t)-Y(s)} | Y(u), 0 \leq u \leq s] \\ &= X(s) E[e^{Y(t)-Y(s)}] \end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα ακολουθεί το γεγονός ότι η $Y(s)$ είναι $\sigma(\{Y(u), 0 \leq u \leq s\})$ -μετρήσιμη, και η τελευταία από την ιδιότητα των ανεξαρτήτων προσαυξήσεων της κίνησης Brown.

Τώρα, η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κανονικής τ.μ. W δίνεται από:

$$E[e^{aW}] = e^{a E[W] + a^2 V(W)/2}$$

Έτσι, αφού η $Y(t)-Y(s)$ είναι κανονική με μέση τιμή $\mu(t-s)$ και απόκλιση $(t-s)\sigma^2$, θέτοντας $\alpha=1$ έχουμε:

$$E[e^{Y(t)-Y(s)}] = e^{\mu(t-s) + (t-s)\sigma^2/2}$$

Οπότε, καταλήγουμε στο ότι:

$$E[X(t) | X(u), 0 \leq u \leq s] = X(s) e^{(t-s)(\mu + \sigma^2/2)}.$$

■

Παρατήρηση 3

Από τον παραπάνω υπολογισμό γίνεται φανερό ότι η σ.δ. $Z(t) = e^{-at} e^{Y(t)}$ όπου $\{Y(t), t \geq 0\}$ είναι μια κίνηση Brown με συντελεστή αδράνειας μ και συντελεστή διασποράς σ^2 (όπου $\mu + \sigma^2/2 = a$) είναι ένα martingale. Πράγματι, εάν $X(s) = e^{Y(s)}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Z(t) | Z(u), 0 \leq u \leq s] &= E[e^{-at} e^{Y(t)} | e^{-as} e^{Y(u)}, 0 \leq u \leq s] \\ &= E[e^{-at} e^{Y(t)} | X(u), 0 \leq u \leq s] = e^{-at} E[e^{Y(t)} | X(u), 0 \leq u \leq s] \\ &= e^{-at} E[X(t) | X(u), 0 \leq u \leq s] = e^{-at} X(s) e^{(t-s)(\mu + \sigma^2/2)} \\ &= e^{-(\mu + \sigma^2/2)t} X(s) e^{(t-s)(\mu + \sigma^2/2)} = X(s) e^{-s(\mu + \sigma^2/2)} = Z(s) \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 4

Θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω την γεωμετρική κίνηση Brown (και όχι την κίνηση Brown) για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης. Αυτό γιατί η κίνηση Brown (σαν μοντέλο τιμολόγησης), φαίνεται να έχει δύο μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι ότι αφού η τιμή της μετοχής είναι μια κανονική τ.μ. θα παίρνει και αρνητικές τιμές κάτι που δεν θέλουμε. Το δεύτερο είναι το ότι, η υπόθεση ότι η διαφορά των τιμών σε ένα συγκεκριμένου μήκους χρονικό διάστημα, έχει την ίδια κανονική κατανομή ανεξάρτητα από το πια είναι η τιμή της μετοχής στην αρχή του χρονικού διαστήματος, δεν φαίνεται να είναι ικανοποιητική. Π.χ., πολλοί δεν θα σκεφτούν ότι η πιθανότητα μια μετοχή της οποίας η παρούσα αξία είναι 20€ να πέσει στα 15€ (να χάσει δηλαδή 25% της αξίας της) σε ένα μήνα θα είναι ίση με την πιθανότητα το να είναι η παρούσα αξία της 10€ και να πέσει στα 5€ (να χάσει δηλαδή 50% της αξίας της) σε ένα μήνα. Από την άλλη μεριά η γεωμετρική κίνηση Brown δεν φαίνεται να έχει τα δύο αυτά μειονεκτήματα. Αφού ο λογάριθμός τώρα της τιμής της μετοχής έχει την κανονική κατανομή, το μοντέλο δεν επιτρέπει αρνητικές τιμές μετοχών. Ακόμα, αφού οι λόγοι των τιμών της μετοχής σε ένα συγκεκριμένου μήκους χρονικό διάστημα έχουν την ίδια κατανομή, η γεωμετρική κίνηση Brown μας κάνει πιο ρεαλιστική την υπόθεση του ότι είναι η ποσοστιαία αλλαγή της τιμής, και όχι ίδια η τιμή, της οποίας η πιθανότητα δεν εξαρτάται από την παρούσα τιμή.

6.3 Τιμολόγηση των Δικαιωμάτων Προαίρεσης Μετοχών

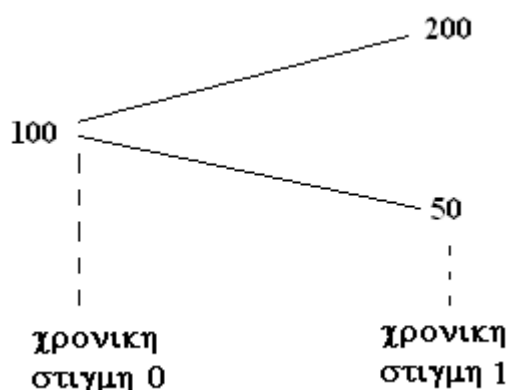
Παράδειγμα 2 (Για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων)

Σε περιπτώσεις που χρήματα λαμβάνονται ή ξοδεύονται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν την «αξία» των χρημάτων. Έτσι, το να δίνεται ένα ποσό u την χρονική στιγμή t μελλοντικά, δεν αξίζει όσο να δοθεί το ποσό u άμεσα. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι αν δοθεί το u άμεσα, τότε μπορεί να δανειστεί, με κάποιο επιτόκιο, και έτσι να αξίζει περισσότερο από u την χρονική στιγμή t . Για να λάβουμε λοιπόν αυτό υπ' όψιν, υποθέτουμε ότι την χρονική στιγμή (σε χρόνο) 0 η αξία του ποσού u (επίσης λέγεται **παρούσα αξία**) που μπορεί να κερδίσουμε σε χρόνο t είναι ue^{-at} . Η ποσότητα a καλείται ονομάζεται **εκπτωτικός παράγοντας**.

Σε οικονομικούς όρους, η υπόθεση του εκπτωτικού παράγοντα e^{-at} είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι μπορούμε να κερδίσουμε τόκο, συνεχώς ανατοκιζόμενο, με ρυθμό $100a$ % ανά μονάδα χρόνου.

Τώρα, θα θεωρήσουμε ένα απλό μοντέλο για τιμολόγηση ενός δικαιώματος για να αγοράσουμε μια μετοχή στο προσεχές μέλλον σε καθορισμένη τιμή.

Υποθέτουμε ότι η σημερινή τιμή μιας μετοχής είναι 100€ (χρόνος 0), και επίσης υποθέτουμε ότι ξέρουμε πως μετά από μια χρονική περίοδο (χρόνος 1), με παρούσα αξία σε €, θα γίνει είτε 200€ είτε 50€ (δείτε το παρακάτω σχήμα).



Να σημειώσουμε και πάλι ότι οι τιμές την χρονική στιγμή 1 είναι τιμές παρούσας αξίας (ή τιμές στο χρόνο 0). Έτσι, αν ο εκπρωτικός παράγοντας είναι a τότε οι πιθανές πραγματικές τιμές στο χρόνο 1 θα είναι $200e^a$ ή $50e^a$. Για να διατηρήσουμε τον συμβολισμό απλό, θεωρούμε ότι όλες οι δοσμένες τιμές είναι σε χρόνο 0.

Έστω ότι για κάθε y , με κόστος cy , μπορούμε στο χρόνο 0 να αγοράσουμε το δικαίωμα να αγοράσουμε y μετοχές στο χρόνο 1 στην τιμή των 150€ την κάθε μία (τιμή χρόνου 0).

Έτσι, για παράδειγμα, αν αγοράσουμε το δικαίωμα (προαίρεσης) και η μετοχή αυξηθεί στα 200€, τότε μπορούμε να ασκήσουμε το δικαίωμα την χρονική στιγμή 1 και τελικά να κερδίσουμε $200 - 150 = 50$ € για κάθε ένα από τα y δικαιώματα (προαίρεσης) που αγοράσαμε. Από την άλλη μεριά, αν στο χρόνο 1 η τιμή μειωθεί στα 50€, τότε το δικαίωμα θα ήταν χωρίς αξία την χρονική στιγμή 1. Επιπλέον, στο κόστος των $100x$ μπορούμε να αγοράσουμε x μετοχές στο χρόνο 0, οι οποίες θα αξίζουν $200x$ είτε $50x$ την χρονική στιγμή.

Υποθέτουμε ότι, τα x και y μπορούν να είναι είτε θετικά είτε αρνητικά (ή μηδέν). Δηλαδή, μπορούμε να αγοράσουμε ή και να πουλήσουμε όχι μόνο μετοχές αλλά και δικαιώματα προαίρεσης.

Για παράδειγμα, αν το x είναι αρνητικό, θα πουλούσαμε $-x$ μετοχές, αποδίδοντάς μας $-100x$ € και θα έπρεπε να αγοράσουμε $-x$ μετοχές την χρονική στιγμή 1 στο κόστος των 200€ ή των 50€ την καθεμία.

Ενδιαφερόμαστε στο να προσδιορίσουμε την κατάλληλη τιμή του c (**τιμολόγηση δικαιώματος προαίρεσης**), δηλαδή το ανά μονάδα **κόστος** (ασφάλιστρο / premium) του δικαιώματος προαίρεσης. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι μπορεί να υπάρξει ένας συνδυασμός αγορών που μπορεί να δώσει θετικό αποτέλεσμα, εκτός αν $c = 50/3$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι, την χρονική στιγμή 0 αγοράζουμε x μετοχές και y δικαιώματα προαίρεσης, όπου x και y (μπορούν και πάλι να πάρουν θετικές ή αρνητικές τιμές), πρέπει να προσδιοριστούν.

Η αξία όσων έχουμε την χρονική στιγμή 1 εξαρτάται από την τιμή των μετοχών και δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\alpha\chi\acute{\iota}\alpha = \begin{cases} 200x + 50y, & \text{αν η τιμή είναι 200} \\ 50x, & \text{αν η τιμή είναι 50} \end{cases}$$

γιατί αν η τιμή της μετοχής είναι 200€, τότε οι x μονάδες της μετοχής αξίζουν $200x$ €, και οι y μονάδες των δικαιωμάτων προαίρεσης στην τιμή των 150€ αξίζουν $(200-150)y$ €. Από την άλλη μεριά, αν η τιμή της μετοχής είναι 50, τότε οι x μονάδες αξίζουν $50x$ € και οι y μονάδες των δικαιωμάτων είναι χωρίς αξία.

Έστω τώρα ότι διαλέγουμε το y να είναι τέτοιο ώστε η αξία που προσδιορίσαμε παραπάνω είναι η ίδια ανεξάρτητα από το ποια είναι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή 1. Έτσι, διαλέγουμε y ώστε

$$200x + 50y = 50x \quad \text{ή} \quad y = -3x$$

Να σημειώσουμε ότι το y έχει το αντίθετο πρόσημο από το x , οπότε αν το x είναι θετικό, δηλαδή x μονάδες μετοχών έχουν αγοραστεί τη χρονική στιγμή 0, τότε $3x$ μονάδες δικαιωμάτων προαίρεσης έχουν πουληθεί την ίδια χρονική στιγμή. Ανάλογα, αν το x είναι αρνητικό, τότε έχουν πουληθεί $-x$ μονάδες μετοχών και έχουν αγοραστεί $-3x$ μονάδες δικαιωμάτων προαίρεσης τη χρονική στιγμή 0.

Έτσι, με $y = -3x$ η αξία όσων έχουμε στο χρόνο 1 είναι:

$$\alpha\chi\acute{\iota}\alpha = 50x$$

Εφόσον, το αρχικό κόστος αγοράς x μετοχών και $-3x$ δικαιωμάτων προαίρεσης είναι:

$$\text{αρχικό κόστος} = 100x - 3xc$$

παρατηρούμε ότι τα κέρδη από τη συναλλαγή είναι

$$\text{κέρδη} = 50x - (100x - 3xc) = x(3c - 50)$$

Άρα, αν $3c = 50$ τότε το κέρδος είναι 0, ενώ αν $3c \neq 50$ μπορούμε να εγγυηθούμε θετικό κέρδος (ανεξάρτητα από την τιμή της μετοχής στο χρόνο 1) θέτοντας το x θετικό όταν $3c > 50$ και αρνητικό όταν $3c < 50$.

Για παράδειγμα, αν το κόστος ανά δικαίωμα προαίρεσης είναι $c = 20$, τότε το να αγοράσεις 1 μονάδα μετοχής ($x = 1$) και συγχρόνως να πουλήσεις 3 δικαιώματα προαίρεσης ($y = -3$) μας κοστίζει, αρχικά, $100 - 60 = 40$. Ωστόσο, η αξία όσων έχουμε στο χρόνο 1 είναι 50 ενώ η μετοχή έχει αξία 50 ή 200€. Έτσι, έχουμε εγγυημένο κέρδος των 10€. Όμοια, αν το κόστος ανά μονάδα δικαιώματος προαίρεσης είναι $c = 15$ τότε το να πουλήσεις 1 μονάδα μετοχής ($x = -1$) και συγχρόνως να αγοράσεις 3 δικαιώματα προαίρεσης ($y = 3$) μας οδηγεί σε ένα αρχικό κέρδος των $100 - 45 = 55$. Από την άλλη μεριά, η αξία όσων έχουμε στο χρόνο 1 είναι -50. Έτσι, έχουμε εγγυημένο κέρδος των 5€, σε αυτή την περίπτωση.

Ένα σίγουρο *επικερδές* σχέδιο αγορα-πωλησίας ονομάζεται **arbitrage**. Άρα, όπως είδαμε, το μόνο κόστος δικαιώματος προαίρεσης c που δεν έχει αποτέλεσμα σε ένα arbitrage είναι όταν $c = 50/3$.

6.4. Το θεώρημα arbitrage

Ας θεωρήσουμε ένα πείραμα με σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων $S = \{1, 2, \dots, m\}$. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι έχουμε n ποσά (wagers) τα οποία σκοπεύουμε να επενδύσουμε. Εάν x είναι το ποσό της i επένδυσης, τότε η «επιστροφή» $x_i(j)$ είναι το ποσό που κερδίζουμε εάν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι j . Μ' άλλα λόγια, $r_i(\cdot)$ είναι το ποσό που κερδίζουμε, για μοναδιαίο ποσό επένδυσης.

Μια **επενδυτική στρατηγική** (ή αλλιώς σχέδιο «πονταρίσματος») είναι ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου x_1 το ποσόν της 1^{ης} επένδυσης, x_2 το ποσόν της 2^{ης} επένδυσης κ.ο.κ. εάν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι j , τότε η «επιστροφή» που λαμβάνουμε από την επενδυτική στρατηγική $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι ίση με

$$\text{επιστροφή}(j) = \sum_{i=1}^n x_i r_i(j)$$

Θεώρημα 1 (arbitrage)

Ισχύει ένα από τα παρακάτω

(α) Υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανότητας $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, για το οποίο:

$$\sum_{j=1}^m p_j \eta(j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ή

(β) Υπάρχει μια επενδυτική στρατηγική $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, για την οποία:

$$\sum_{i=1}^n x_i \eta(j) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Παρατήρηση 5

Το παραπάνω θεώρημα αναφέρει ότι, είτε υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανότητας $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ στο σύνολο όλων των αποτελεσμάτων του πειράματος τ.ω. κάθε επένδυση έχει αναμενόμενη επιστροφή 0, ή υπάρχει μια επενδυτική στρατηγική η οποία εγγυάται σίγουρο κέρδος.

Παράδειγμα 3

Ας επανέλθουμε στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου:ας υποθέσουμε ότι η σημερινή τιμή μιας μετοχής είναι 100€ (χρόνος 0) και η σημερινή αξία της μετοχής σε χρόνο 1 είναι 200€ είτε 50€. Έστω ακόμα ότι με κόστος c , μπορούμε στο χρόνο 0 να αγοράσουμε το δικαίωμα να αγοράσουμε 1 μετοχή στο χρόνο 1 στην τιμή των 150€ (τιμή χρόνου 0). Θέλουμε να προσδιορίσουμε το c έτσι ώστε να μην υπάρχει σίγουρο κέρδος

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να θεωρήσουμε σαν πείραμα την τιμή της μετοχής στον χρόνο 1, οπότε θα υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα (200 ή 50€). Υπάρχουν επίσης δύο επενδυτικά ποσά-στρατηγικές: να αγοράσουμε (ή να πουλήσουμε) την μετοχή, και να αγοράσουμε (ή να πουλήσουμε) το δικαίωμα προαίρεσης. Από το θεώρημα arbitrage έχουμε ότι, δεν θα έχουμε σίγουρο κέρδος εάν υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανότητας $(p, 1-p)$ το οποίο κάνει την αναμενόμενη επιστροφή μας από την επένδυση (χρησιμοποιώντας τις δύο στρατηγικές επένδυσης) να είναι 0.

Αλλά, η επιστροφή όταν αγοράσουμε μία μετοχή είναι ίση με:

$$\text{επιστροφή} = \begin{cases} 200-100 & \text{εαν η τιμή είναι 200 την στιγμή 1} \\ 50-100 & \text{εαν η τιμή είναι 50 την στιγμή 1} \end{cases}$$

Οπότε, εάν p είναι η πιθανότητα να η τιμή της μετοχής την στιγμή 1 ίση με 200€, τότε:

$$E[\text{επιστροφή}] = 100p - 50(1-p)$$

Και εξισώνοντάς το με το 0, έχουμε: $p = \frac{1}{3}$

Δηλαδή το διάνυσμα πιθανότητας $(p, 1-p)$ για το οποίο, χρησιμοποιώντας την πρώτη στρατηγική επένδυσης, έχουμε αναμενόμενη επιστροφή από την επένδυση 0 είναι το διάνυσμα $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Ανάλογα, η επιστροφή όταν αγοράσουμε το δικαίωμα είναι ίση με:

$$\text{επιστροφή} = \begin{cases} 50-c & \text{εάν η τιμή είναι 200 την στιγμή 1} \\ -c & \text{εάν η τιμή είναι 50 την στιγμή 1} \end{cases}$$

Οπότε, η αναμενόμενη επιστροφή (χρησιμοποιώντας αυτή την στρατηγική επένδυσης) εάν $p = \frac{1}{3}$, είναι ίση με:

$$E[\text{επιστροφή}] = (50-c)\frac{1}{3} - c\frac{2}{3} = \frac{50}{3} - c$$

Από το έπεται ότι, η μόνη τιμή του c για την οποία δεν θα υπάρχει σίγουρο κέρδος είναι $c = \frac{50}{3}$.

■

6.4 Ο τύπος των Black-Scholes για την Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Υποθέτουμε ότι η τωρινή τιμή της μετοχής είναι $X(0) = x_0$ και έστω $X(t)$ η τιμή της την χρονική στιγμή t . Υποθέτουμε ότι ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε μια μετοχή σε ένα χρονικό διάστημα, από 0 έως T . Επίσης, υποθέτουμε ότι ο εκπτωτικός παράγοντας είναι a (ισοδύναμα, το επιτόκιο είναι $100a$, και ο τόκος ανατοκίζεται συνεχώς), και έτσι η παρούσα αξία της τιμής της μετοχής στο χρόνο t , είναι $e^{-at}X(t)$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε την εξέλιξη της τιμής της μετοχής σαν ένα πείραμα, οπότε το αποτέλεσμα του είναι η τιμή της συνάρτησης $X(t)$, $0 \leq t \leq T$ (αξία μετοχής). Εάν παρατηρήσουμε την εξέλιξη της τιμής της μετοχής για διάστημα μήκους $s < t$, τότε μπορούμε να αγοράσουμε (ή να πουλήσουμε) μετοχές στην τιμή $X(s)$ (την χρονική

στιγμή s) και μετά να αγοράσουμε (ή να πουλήσουμε) αυτές τις μετοχές στην τιμή $X(t)$, την χρονική στιγμή t . Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι μπορούμε να αγοράσουμε οποιοδήποτε από N διαφορετικά δικαιώματα προαίρεσης την χρονική στιγμή 0 . Το δικαίωμα i , με κόστος c_i ανά μετοχή, μας δίνει τη δυνατότητα να αγοράσουμε μέρη της μετοχής την χρονική στιγμή t_i με την καθορισμένη τιμή των K_i η καθεμία, όπου $i=1, \dots, N$.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις c_i αξίες για τις οποίες δεν υπάρχει καμία επενδυτική στρατηγική που να μας οδηγεί σε σίγουρο κέρδος. Θεωρώντας ότι το θεώρημα του arbitrage μπορεί να γενικευτεί (στην περίπτωση που το αποτέλεσμα του πειράματος είναι μια συνάρτηση), έχουμε σαν συμπέρασμα ότι δεν θα υπάρξει σίγουρο κέρδος εάν και μόνον εάν υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας στο σύνολο των αποτελεσμάτων (αναφορικά με τα οποία το αναμενόμενο κέρδος είναι 0).

Έστω P το μέτρο πιθανότητας στο σύνολο των αποτελεσμάτων και έστω ότι παρατηρούμε την εξέλιξη της τιμής της μετοχής για διάστημα $s < t$. Κατόπιν αγοράζουμε (ή πουλάμε) μια μετοχή με σκοπό να την πουλήσουμε (ή να την αγοράσουμε) την χρονική στιγμή t , $0 \leq s < t \leq T$. Η παρούσα αξία του ποσού που πληρώσαμε για την μετοχή είναι $e^{-as}X(s)$, ενώ η παρούσα αξία του ποσού που λαμβάνουμε είναι $e^{-at}X(t)$. Έτσι, για να είναι το αναμενόμενο κέρδος 0 , όταν P το μέτρο πιθανότητας στο σύνολο $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, πρέπει να έχουμε:

$$E_p[e^{-at}X(t)|X(u), 0 \leq u \leq s] = e^{-as}X(s) \quad (\text{σχέση 1})$$

Έστω τώρα ότι, μελετάμε το δικαίωμα προαίρεσης. Υποθέτουμε ότι το δικαίωμα αυτό μας επιτρέπει να αγοράσουμε μια μετοχή την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t , στη τιμή K . Στην χρονική στιγμή t , η αξία αυτού του δικαιώματος δίνεται από:

$$\text{αξία δικαιώματος στο χρόνο } t = \begin{cases} X(t) - K, & \text{αν } X(t) \geq K \\ 0, & \text{αν } X(t) < K \end{cases}$$

δηλαδή, η αξία του δικαιώματος προαίρεσης την χρονική στιγμή t είναι $(X(t)-K)^+$, οπότε η παρούσα αξία του δικαιώματος είναι $e^{-at}(X(t)-K)^+$. Έστω c το κόστος του δικαιώματος προαίρεσης (χρόνος 0). Εάν έχουμε σκοπό να αγοράσουμε το δικαίωμα και αναμένοντας να έχουμε επιστροφή 0 (παρούσα αξία), πρέπει να έχουμε:

$$E_p[e^{-at}(X(t)-K)^+] = c \quad (\text{σχέση 2})$$

Με βάση το θεώρημα του arbitrage, μπορούμε να βρούμε ένα μέτρο πιθανότητας P στο σύνολο των αποτελεσμάτων, που ικανοποιεί την σχέση 1. Αν c είναι το κόστος του δικαιώματος προαίρεσης για να αγοράσουμε μια μετοχή την χρονική στιγμή t , στην καθορισμένη τιμή K , δίνεται από την σχέση 2, τότε δεν έχουμε arbitrage.

Ακόμα, αν για την δοσμένη τιμή c , δεν υπάρχει κανένα μέτρο πιθανότητας P που να ικανοποιεί την σχέση 1 και την:

$$c = E_P \left[e^{-a \cdot t} (X(t) - K)^+ \right]$$

τότε έχουμε σίγουρο κέρδος.

Τώρα, θα βρούμε ένα (συγκεκριμένο) μέτρο πιθανότητας P στο σύνολο $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, το οποίο ικανοποιεί την σχέση 1.

Υποθέτουμε ότι $X(t) = x_0 e^{Y(t)}$, όπου $\{Y(t), t \geq 0\}$ είναι μια κίνηση Brown με συντελεστή αδράνειας μ και συντελεστή διασποράς σ^2 . Δηλαδή η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown. Οπότε, για $s < t$, έχουμε:

$$E[X(t) | X(s), 0 \leq s \leq t] = X(s) e^{(t-s)(\mu + \sigma^2/2)} \quad (**)$$

Άρα, αν διαλέξουμε μ και σ^2 έτσι ώστε $\mu + \sigma^2/2 = a$, τότε η σχέση 1 ικανοποιείται (δείτε π.χ. παρατήρηση 3). Δηλαδή, θέτοντας με P το μέτρο πιθανότητας που καθορίζεται από την στοχαστική διαδικασία $\{x_0 e^{Y(t)}, 0 \leq t \leq T\}$, όπου $Y(t)$ είναι μια κίνηση Brown με drift συντελεστή μ και συντελεστή διασποράς σ^2 και $\mu + \sigma^2/2 = a$ τότε ικανοποιείται η σχέση 1.

Με βάση τα προηγούμενα έχουμε ότι, αν τιμολογήσουμε το δικαίωμα προαίρεσης για να αγοράσουμε μια μετοχή στο χρόνο t στην καθορισμένη τιμή K με:

$$c = E_P \left[e^{-a \cdot t} (X(t) - K)^+ \right] \quad (***)$$

τότε κανένα arbitrage δεν είναι πιθανό. Αλλά, $X(t) = x_0 e^{Y(t)}$, όπου $Y(t)$ είναι κανονική με μέση τιμή μt και διασπορά $t\sigma^2$, οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} c e^{a \cdot t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_0 e^y - K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-(y-\mu t)^2/2t\sigma^2} dy \\ &= \int_{\log(K/x_0)}^{\infty} (x_0 e^y - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-(y-\mu t)^2/2t\sigma^2} dy \end{aligned}$$

Κάνοντας μια αλλαγή στη μεταβλητή $w=(y-\mu t)/(\sigma t^{1/2})$ έχουμε ότι:

$$ce^{at} = x_0 e^{\mu t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{\sigma w \sqrt{t}} e^{-w^2/2} dw - K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-w^2/2} dw \quad (\text{σχέση 3})$$

$$\text{όπου } a = \frac{\log(K/x_0) - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}.$$

Τώρα:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{\sigma w \sqrt{t}} e^{-w^2/2} dw &= e^{t\sigma^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-(w-\sigma\sqrt{t})^2/2} dw = e^{t\sigma^2/2} P\{N(\sigma\sqrt{t}, 1) \geq a\} \\ &= e^{t\sigma^2/2} P\{N(0, 1) \geq a - \sigma\sqrt{t}\} \\ &= e^{t\sigma^2/2} P\{N(0, 1) \leq -(a - \sigma\sqrt{t})\} \\ &= e^{t\sigma^2/2} \Phi(\sigma\sqrt{t} - a) \end{aligned}$$

όπου $N(m, v)$ είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή m και διασπορά v , και η Φ είναι η κανονική συνάρτηση κατανομής. Άρα, παρατηρώντας τη σχέση 3, έχουμε:

$$ce^{at} = x_0 e^{\mu t + \sigma^2 t/2} \Phi(\sigma\sqrt{t} - a) - K\Phi(-a)$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το ότι $\mu + \sigma^2/2 = a$ και θέτοντας $b = -a$, έχουμε:

$$c = x_0 \Phi(\sigma\sqrt{t} + b) - K e^{-at} \Phi(b) \quad (\text{σχέση 4})$$

$$\text{όπου } b = \frac{a t - \sigma^2 t/2 - \log(K/x_0)}{\sigma \sqrt{t}}.$$

Η σχέση 4 για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, εξαρτάται από την αρχική τιμή της μετοχής x_0 , το χρόνο t , την τιμή K , τον εκπρωτικό παράγοντα a και την τιμή σ^2 .

Παρατήρηση 6

(α) Για κάθε τιμή της σ^2 , αν τα δικαιώματα προαίρεσης είναι τιμολογημένα σύμφωνα με τον τύπο της σχέσης 4, τότε κανένα arbitrage δεν είναι πιθανό. Ωστόσο, εφόσον όλο και περισσότεροι άνθρωποι πιστεύουν ότι η τιμολόγηση μιας μετοχής πραγματικά ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown, έχει προταθεί να είναι φυσιολογικό να τιμολογείται μια μετοχή σύμφωνα με τη σχέση 4, με την παράμετρο σ^2 να ισοδυναμεί με την εκτιμημένη αξία της

διασποράς του μοντέλου της γεωμετρικής κίνησης Brown. Όταν, λοιπόν, γίνεται αυτό η σχέση 4 είναι γνωστή ως **τύπος των Black-Scholes**.

Πάντως, είναι ενδιαφέρον ότι η τιμή του δικαιώματος δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου μ (drift) αλλά μόνο από την διασπορά σ^2 .

Παράδειγμα 4

Ας υποθέσουμε ότι η (σημερινή) αξία μιας μετοχής είναι 30€ , και το επιτόκιο είναι 8%, η δε παράμετρος της γεωμετρικής κίνησης Brown που παριστάνει την τιμή της μετοχής είναι $\sigma=0,2$. Να βρεθεί το κόστος ενός δικαιώματος προαίρεσης αγοράς της εν λόγω μετοχής, εάν το δικαίωμα λήγει σε τρεις μήνες και η τιμή εξάσκησης είναι 34€

Λύση

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο των Black-Scholes, το κόστος του ενός δικαιώματος προαίρεσης αγοράς της εν λόγω μετοχής, είναι ίσο με: (χρησιμοποιώντας ότι $t=0,25=\frac{3}{12}$, $a=0,08$, $K=34$, $x_0=30$, $\sigma=0,2$)

$$c = x_0 \Phi(\sigma\sqrt{t}+b) - Ke^{-at}\Phi(b)$$

όπου

$$b = \frac{a t - \sigma^2 t/2 - \log(K/x_0)}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{0,08 \cdot 0,25 - \frac{0,2^2 \cdot 0,25}{2} - \log\left(\frac{34}{30}\right)}{0,2 \cdot 0,25} \simeq -1,0016$$

Άρα,

$$c = x_0 \Phi(\sigma\sqrt{t}+b) - Ke^{-at}\Phi(b) = 30 \Phi(0,2\sqrt{0,25}-1,0016) - 34e^{-0,08 \cdot 0,25} \Phi(-1,0016) \simeq 0,2383$$

Δηλαδή, το ζητούμενο κόστος του δικαιώματος προαίρεσης αγοράς της εν λόγω μετοχής, είναι ίσο με 24 λεπτά (του ευρώ) περίπου.

■

- (β) Η σχέση 4 δεν είναι ο μόνος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να τιμολογήσουμε δικαιώματα προαίρεσης. Έστω $\{X(t)/0 \leq t \leq T\}$ μια στοχαστική διαδικασία που ικανοποιεί την σχέση 1 (δηλαδή με άλλα λόγια μια διαδικασία $\{X(t)/0 \leq t \leq T\}$ τ.ω. η σ.δ. $\{e^{-a t} X(t)/0 \leq t \leq T\}$ είναι ένα martingale). Εάν το c δίνεται από την σχέση (**), τότε δεν έχουμε arbitrage.

Βιβλιογραφία

(Α) Ελληνική

1. Βασιλείου, Π.-Χ. Γ. *Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά*, Εκδόσεις Ζήτη, 2001.
2. Βασιλείου, Π.-Χ. Γ. *Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες*, Εκδόσεις Ζήτη, 1999.
3. Δάρας, Τ.Ι.- Σύψας, Π.Θ.: *Στοχαστικές Ανελίξεις – Θεωρία και εφαρμογές*, Εκδόσεις Ζήτη, 2003.
4. Δάρας, Τ.Ι.- Σύψας, Π.Θ.: *Πιθανότητες & Στατιστική – Θεωρία και εφαρμογές*, Εκδόσεις Ζήτη, 2010.
5. Κάκουλλος, Θ.Ν.: *Στοχαστικές Ανελίξεις*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1995.
6. Καλπαζίδου, Σ. : *Στοιχεία θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων*, εκδόσεις Ζήτη, 1991.
7. Κουνιάς, Σ.- Μωυσιάδης, Χ.: *Θεωρία Πιθανοτήτων Ι: Κλασσική Πιθανότητα , Μονοδιάστατες κατανομές*, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, 1999.
8. Φακίνος Δ.: *Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, τεύχη Ι & ΙΙ, 1994.

(Β) Ξενόγλωσση

9. Durrett, R.: *Essentials of Stochastic Processes*, Srpinger, 1999.
10. Ross, S.M.: *Probability Models*, Eighth Edition, Academic Press, an imprint of Elsevier, 2003.
11. Ross, S.: *An introduction to the Mathematics of Finance. Options and other topics*, Cambridge 1999.
12. Karlin, S.- Taylor, H.M.: *A first course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1975.

(Γ) Μεταφρασμένη

13. Hoel, P.- Port, S.- Stone, C.: *Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων*, Π.Ε.Κ. 2002.