

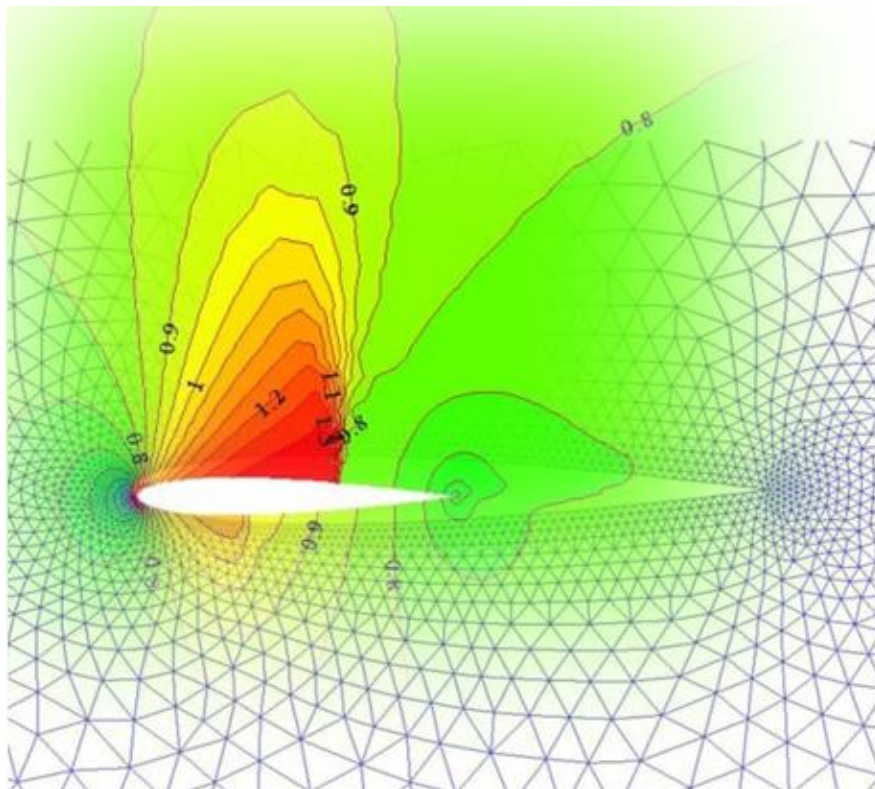


ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Μεταπτυχιακή διατριβή

Πολυδιάστατες συναρτήσεις περιορισμού για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Euler σε μη δομημένα πλέγματα.



Διατριβή που υπεβλήθη για τη μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Υπό
Αντωνίου Αγορίτσας

Επιβλέπων Καθηγητής:
Ι. Κ. Νικολός, Επ. Καθηγητής

ΧΑΝΙΑ, Απρίλιος 2013



Copyright υπό Αντωνίου Αγορίτσας, Χανιά 2013

Η διατριβή της Αντωνίου Αγορίτσας εγκρίνεται από:

Ιωάννης Κ. Νικολός
Επ. Καθηγητής, Επιβλέπων

Ανάργυρος Ι. Δελής
Επ. Καθηγητής

Αναστάσιος Δουλάμης
Επ. Καθηγητής

‘Intentionally Blank’

Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα

Η Αντωνίου Αγορίτσα γεννήθηκε στην Καρδίτσα στις 31 Ιανουαρίου 1986, όπου μεγάλωσε και ολοκλήρωσε τη βασική της εκπαίδευση. Το 2003 μετά από επιτυχή εξέταση στις πανελλαδικές εξετάσεις εισήχθη στο τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης, απ' όπου και αποφοίτησε το 2010 με βαθμό πτυχίου 7.17/10.0. Την ίδια χρονιά εισήχθη στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών του ιδίου τμήματος στο Πολυτεχνείο Κρήτης, στον τομέα Οργάνωσης και Διοίκησης, όπου και εξετάστηκε επιτυχώς στα απαιτούμενα μαθήματα. Μετά την επιτυχή ολοκλήρωση των εξετάσεων στα αντίστοιχα μαθήματα του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών, εκπόνησε τη μεταπτυχιακή της διατριβή στον τομέα Συστημάτων Παραγωγής του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης.

Ευχαριστίες

Στην προσπάθεια εκπόνησης της μεταπτυχιακής μου διατριβής θα ήθελα να ευχαριστήσω πρωτίστως τον κ. Ιωάννη Νικολό, Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης και επιβλέπων της εργασίας μου. Η εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου, καθώς προερχόμουν από έναν διαφορετικό τομέα και η ευκαιρία που μου έδωσε να δουλέψω μαζί του και πάνω σε ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα με ευρύ φάσμα βιομηχανικών εφαρμογών, με έκαναν να πιστέψω σε μένα και να βάλω τα δυνατά μου ώστε να αποκτήσω το κατάλληλο υπόβαθρο για να ανταπεξέλθω στις απαραίτητες επιστημονικές απαιτήσεις για τη διεξαγωγή της διατριβής αυτής. Τέλος, οι γνώσεις του πάνω στο αντικείμενο, η εμπειρία του, η προθυμία του και η σωστή του καθοδήγηση με βοήθησαν να έχω ένα συγκεντρωμένο και προγραμματισμένο διάβασμα, να μην ξεφεύγω από τον τελικό μου στόχο και να ολοκληρώσω με επιτυχία την παρούσα εργασία.

Επίσης, θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και στους φίλους μου, που με στηρίζανε σε αυτή την προσπάθεια, μου έδιναν δύναμη και συμπαράσταση σε όλα αυτά τα ακαδημαϊκά μου χρόνια. Ιδιαίτερη μνεία, φυσικά, στους γονείς μου, από τους οποίους έπαιρνα δύναμη να συνεχίσω ένα όνειρο με όσες δυσκολίες και εμπόδια εμφανίστηκαν, και που με την στήριξή τους κυρίως ψυχολογικά μου έδιναν δύναμη να μπορέσω να πιστέψω στις δυνατότητες μου, στον εαυτό μου, και να φτάσω αυτόν τον στόχο στο τέλος του, για να μπορέσω να θέσω και να εξελίξω και άλλους μελλοντικούς μου στόχους.

*Χανιά, Απρίλιος 2013
Αντωνίου Αγορίτσα*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	9
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ	16
1.1 Οι βασικές εξισώσεις	16
1.2 Η εξίσωση ενέργειας (1ος Θερμοδυναμικός Νόμος)	16
1.3 Καταστατική εξίσωση	17
1.4 Εξισώσεις ροής	18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	19
2.1 Διακριτοποίηση πεδίου ροής	19
2.1.1 Πεπερασμένοι όγκοι	19
2.1.2 Τοπολογική δομή δεδομένων	19
2.2 Υπολογιστικά πλέγματα	19
2.3 Διακριτοποίηση εξισώσεων	22
2.3.1 Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων	22
2.3.2 Υπολογισμός αριθμητικών διανυσμάτων για μη συνεκτική ροή	25
2.3.3 Σχήμα διακριτοποίησης 2ης τάξης ακρίβειας	26
2.3.4 Υπολογισμός των Κλίσεων με τη μέθοδο Green-Gauss	27
2.4 Υπολογισμός μεταβλητών ανακατασκευής	28
2.5 Οριακές συνθήκες	31
2.5.1 Στερεά τοιχώματα	31
2.5.2 Όρια εισόδου/εξόδου της ροής	31
2.6 Χρονική διακριτοποίηση	32
2.7 Μέθοδος Runge-Kutta 2ης τάξης	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ	34
3.1 Isentropic vortex case	34
3.2 Διηχητική ροή γύρω από την αεροτομή NACA0012	99
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	136
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	138
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1:	140
Αποτελέσματα ελέγχου ρυθμού σύγκλισης (Isentropic Vortex Case)	140

‘Intentionally Blank’

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε μια μελέτη συμπεριφοράς πολυδιάστατων συναρτήσεων περιορισμού για την αριθμητική επίλυση εξισώσεων Euler με τη χρήση διδιάστατου μη δομημένου τριγωνικού πλέγματος. Η εν λόγω μέθοδος εφαρμόζεται σε πολυδιάστατα προβλήματα χρονικά μόνιμης ή μη μόνιμης ροής, εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής. Στοχεύει στην επίλυση ροής συμπιεστού ρευστού με μεθόδους τύπου χρονοπροέλασης και τεχνικές πεπερασμένων όγκων με ανάντη σχήμα διακριτοποίησης.

Ο όρος μη δομημένα πλέγματα αναφέρεται συνήθως σε πλέγματα τα οποία στις δυο διαστάσεις αποτελούνται από τρίγωνα και στις τρεις διαστάσεις από τετράεδρα. Η χρήση μη δομημένων πλεγμάτων προσφέρει πλεονεκτήματα σε σύγκριση με τη χρήση δομημένων, όπως είναι η εύκολη διακριτοποίηση χωρίων με πολύπλοκη γεωμετρία και η δυνατότητα προσαρμογής του πλέγματος τοπικά, ανάλογα με τα τοπικά χαρακτηριστικά της ροής (π.χ. οριακό στρώμα, ασυνέχειες ροής, κύματα κρούσης). Σε μη δομημένα πλέγματα τα καταστατικά μεγέθη της ροής είναι δυνατό να προσδιοριστούν είτε στους κόμβους πλέγματος, δηλαδή στις κορυφές των τριγώνων (κεντροκομβική μέθοδος), είτε στα κέντρα των τριγώνων (κεντροκυβελική μέθοδος).

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος πεπερασμένων όγκων (Finite Volume) για διδιάστατο μη δομημένο υπολογιστικό πλέγμα αποτελούμενο από τριγωνικά στοιχεία και κεντροκομβική θεώρηση (cell-centered), με χρήση centroid-dual πλέγματος. Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων χρησιμοποιείται για τη διακριτοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων της ροής με τη μορφή συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων, χρησιμοποιώντας κατάλληλους όγκους ελέγχου, γύρω από κάθε κόμβο στο υπολογιστικό πλέγμα. Αποτελεί κύριο πλεονέκτημα η δυνατότητα εφαρμογής της και σε μη δομημένα πλέγματα, όπως στην παρούσα εργασία. Σύμφωνα με την παραπάνω θεώρηση οι υπολογιστικές κυψέλες (όγκοι ελέγχου) δημιουργούνται από την ένωση με ευθύγραμμο τμήμα των βαρυκέντρων γειτονικών τριγώνων (centroid-dual πλέγμα). Χρησιμοποιείται κατάλληλη διαδικασία για τον υπολογισμό των ροών (fluxes) στο μέσον κάθε πλευράς της υπολογιστικής κυψέλης, με τη χρήση διαδοχικών προβολών των διανυσμάτων των κλίσεων κατά μήκος της ακμής, που ενώνει γειτονικούς κόμβους, και κατά μήκος της αντίστοιχης πλευράς της υπολογιστικής κυψέλης, εφαρμόζοντας ταυτόχρονα με κατάλληλη διαδικασία περιορισμό των κλίσεων των πρωτευουσών μεγεθών της ροής με εφαρμογή διαφορετικών συναρτήσεων περιορισμού.

Λόγω των ασυνεχειών που εμφανίζονται στις κοινές ακμές των γειτονικών όγκων ελέγχου, απαιτείται η επίλυση ενός τοπικού προβλήματος Riemann, το οποίο για τις εξισώσεις Euler είναι μια χρονοβόρα διαδικασία και αποφεύγεται με τη χρήση του προσεγγιστικού επιλύτη Roe, ενώ για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών χρησιμοποιήθηκε επίσης και ένας επιπλέον προσεγγιστικός επιλύτης του προβλήματος Riemann, ο HLLC. Τέτοιου είδους προσεγγιστικοί επιλύτες χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα, που επιλύουν το πρόβλημα της ροής στις κοινές πλευρές των γειτονικών όγκων ελέγχου. Η επίλυση των μοντέλων αυτών γίνεται με ακρίβεια πρώτης ή μεγαλύτερης τάξης, και στην εν λόγω εργασία έγινε με ακρίβεια δεύτερης τάξης σχήματος διακριτοποίησης, το οποίο υπολογίζει τις κλίσεις με τη μέθοδο Green Gauss, και οδηγεί στην εξαγωγή καλύτερων αποτελεσμάτων σε σχέση με το σχήμα πρώτης τάξης.

Με την επιλογή της κεντροκομβικής μεθόδου, όσον αφορά τη διακριτοποίηση του χώρου και του προσεγγιστικού επιλύτη για το προς επίλυση πρόβλημα Riemann, είναι απαραίτητη η επιλογή της μεθόδου αριθμητικής επίλυσης του μοντέλου. Εδώ επιλέχθηκε η ρητή μέθοδος (explicit scheme) επίλυσης με σχήμα ολοκλήρωσης Runge-Kutta 4 βημάτων, που αφορά σε πολυβηματική μέθοδο με χρήση συντελεστών που προκύπτουν μετά από βελτιστοποίηση ενός πρότυπου προβλήματος. Η χρήση κατάλληλων μεταβλητών επιτρέπει τη χρήση όσο το δυνατόν υψηλότερων χρονικών βημάτων κατά την επίλυση, διατηρώντας την ευστάθεια του σχήματος.

Η εφαρμογή και η πιστοποίηση αυτών των συναρτήσεων περιορισμού για την επίλυση των εξισώσεων Euler με τη χρήση μη δομημένου διδιάστατου πλέγματος υλοποιήθηκε με την ανάπτυξη αλγορίθμου στη γλώσσα προγραμματισμού Fortran.

Σε κάθε κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, πραγματεύονται τα εξής:

- *Εισαγωγή*: παρουσιάζονται γενικά στοιχεία της υπολογιστικής ρευστομηχανικής και τα βασικότερα χαρακτηριστικά της μεθόδου επίλυσης.
- *Κεφάλαιο 1*: παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις που διέπουν τη ροή, και οι εξισώσεις Euler, για μη συνεκτικό συμπιεστό ρευστό.
- *Κεφάλαιο 2*: περιγράφεται η αριθμητική μέθοδος επίλυσης των βασικών εξισώσεων σε μη δομημένα πλέγματα με την κεντροκομβική τεχνική για τους πεπερασμένους όγκους. Γίνεται αναφορά στη διακριτοποίηση του χώρου ροής και στον ορισμό των όγκων αναφοράς στο μη δομημένο τριγωνικό πλέγμα, ενώ περιγράφεται και η διακριτοποίηση των όρων των εξισώσεων που απεικονίζουν τη ροή. Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στην αύξηση της τάξης ακρίβειας του σχήματος διακριτοποίησης (reconstruction) και γίνεται περιγραφή των εξισώσεων περιορισμού (limiters) που χρησιμοποιούνται και της μεθόδου που προτείνεται για την εφαρμογή τους στα πλαίσια της προτεινόμενης μεθοδολογίας ανακατασκευής.
- *Κεφάλαιο 3*: πιστοποιούνται τα όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω για τη ροή σε συγκεκριμένα προβλήματα αναφοράς, ενώ παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου.
- *Κεφάλαιο 4*: συνοψίζονται γενικά συμπεράσματα και προτείνονται θέματα μελλοντικής επέκτασης.

‘Intentionally Blank’

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

A. Στοιχεία υπολογιστικής ρευστοδυναμικής

Η μηχανική των ρευστών είναι ένας κλάδος της φυσικής, που μελετά την συμπεριφορά των ρευστών, όπου ρευστά θεωρούνται τα υγρά και τα αέρια, καθώς και την επίδραση των δυνάμεων σε αυτά. Η μελέτη και η επίλυσή τους με αναλυτικές μεθόδους δεν είναι εύκολη, καθώς οι διαφορικές εξισώσεις που απεικονίζουν μαθηματικά αυτά τα προβλήματα, παρουσιάζουν αυξημένη πολυπλοκότητα, ενώ τα σχετικά πειράματα αποδεικνύονται πολλές φορές ιδιαίτερα χρονοβόρα και με υψηλό κόστος. Για την επίλυση αυτών των προβλημάτων αναπτύχθηκε ένας νέος κλάδος, η υπολογιστική ρευστοδυναμική (Computational Fluid Dynamics - CFD).

Ο κλάδος της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής σχετίζεται με αριθμητικές μεθόδους, με αλγορίθμους, οι οποίοι προσομοιώνουν τη ροή, δηλαδή επιλύουν προβλήματα ροής ρευστών και την επίδραση των ρευστών με τη σειρά τους σε επιφάνειες μέσω συνοριακών συνθηκών. Περιλαμβάνει μετάδοση θερμότητας, χημικές αντιδράσεις, μεταφορά σωματιδίων, πολυφασικές ροές, διάδοση ακτινοβολίας, και αποτελεί την τρίτη και νεότερη μεθοδολογία για προβλήματα ρευστομηχανικής, μαζί με το πείραμα και τη θεωρητική ανάλυση.

Η υπολογιστική ρευστοδυναμική εξετάζει μεθόδους ανάπτυξης και επίλυσης διακριτών μοντέλων για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τα ρευστομηχανικά προβλήματα παίρνοντας στοιχεία από τη μαθηματική φυσική και την αριθμητική ανάλυση. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη μη συνεκτική κίνηση των ρευστών είναι οι εξισώσεις Euler, ενώ η συνεκτική ροή περιγράφεται από τις εξισώσεις Navier Stokes (Papadakis, 2001). Για την επίλυση αυτών των εξισώσεων έχουν αναπτυχθεί από τον προηγούμενο αιώνα βασικές αρχές με τις τελευταίες δεκαετίες να παρατηρείται ραγδαία ανάπτυξη στην υπολογιστική ρευστοδυναμική. Το γεγονός αυτό έχει να κάνει με την σύγχρονη πλέον τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών, με τα ισχυρά υπολογιστικά συστήματα, όπου επιλύονται οι διαφορικές εξισώσεις με ακρίβεια και σε αποδοτικό χρονικό διάστημα (Wurtzler, Morton, 2006). Εν τέλει, η εφαρμογή της έδωσε λύση σε πολλά προβλήματα στη βιομηχανικά, αλλά και σε πολλά που παρουσιάζονταν σε ερευνητικό επίπεδο, με αποτέλεσμα να αποτελεί πόλο έλξης για πολλούς ερευνητές, που ασχολούνται με τον τομέα της ρευστομηχανικής.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, με τη μέθοδο του CFD προσεγγίζεται το ρευστομηχανικό πρόβλημα κατά προσέγγιση. Αρχικά, χρησιμοποιείται μια διαδικασία διακριτοποίησης, η οποία προσεγγίζει τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη ροή με ένα σύστημα από αλγεβρικές εξισώσεις, το οποίο λύνεται με τη βοήθεια του υπολογιστή. Πρώτα εφαρμόζονται οι προσεγγίσεις σε μικρά διαστήματα του χώρου και αποδίδεται η λύση στο τέλος σε διακριτά σημεία στο χώρο και στο χρόνο. Τέλος, πρέπει να γίνεται έλεγχος στην προσεγγιστική αριθμητική λύση για να αξιολογείται κατά πόσο πλησιάζει με την ακριβή λύση, ενώ η ανάλυσή της και η σύγκρισή της με πειραματικά δεδομένα είναι μια από τις πιο συνήθεις τακτικές ελέγχου δίνοντας σημαντικά τελικά συμπεράσματα για την ποιότητα της αριθμητικής προσέγγισης που ακολουθείται.

Συμπερασματικά, η υπολογιστική ρευστοδυναμική είναι ένας κλάδος με ευρύ φάσμα εφαρμογών, που απαιτεί πολύ μικρότερο χρόνο προετοιμασίας και πολύ μικρότερο κόστος από το πείραμα, μπορεί να δώσει αποτελέσματα για σύνθετες συνθήκες (υψηλές ταχύτητες και θερμοκρασίες), που δεν μπορούν να επιτευχθούν σε συνθήκες πειράματος, ενώ παρέχει λεπτομέρειες και μεγέθη της ροής, που δεν μπορούν να δοθούν από ένα πείραμα.

B. Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης

Τα στοιχεία σύμφωνα με τα οποία χαρακτηρίζεται μια μέθοδος αριθμητικής επίλυσης είναι (Papadakis 2001):

- Το μαθηματικό μοντέλο.
- Η μέθοδος διακριτοποίησης.
- Το σύστημα συντεταγμένων και η διανυσματική βάση.

- Το υπολογιστικό πλέγμα.
- Οι προσεγγίσεις.
- Η μέθοδος επίλυσης.
- Το κριτήριο σύγκλισης.

B.1 Το μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο γενικά περιλαμβάνει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, που απεικονίζει τη ροή, και τις οριακές συνθήκες. Στην προκείμενη εργασία, το μαθηματικό μοντέλο είναι η εξίσωση συνέχειας (αρχή διατήρησης μάζας), οι εξισώσεις Euler (εξισώσεις ορμής για μη συνεκτικό συμπιεστό ρευστό) και η εξίσωση ενέργειας (1^{ος} Θερμοδυναμικός Νόμος για ανοιχτά συστήματα σε διαφορική μορφή). Ανάλογα με το πρόβλημα που εξετάζεται, οι διαφορικές εξισώσεις διατυπώνονται κατάλληλα, σε σχέση με το πόσες διαστάσεις μελετώνται, αν είναι συμπιεστό ή ασυμπιεστό ρευστό, αν είναι συνεκτική ή μη συνεκτική ροή κ.λπ. Επίσης, αν υπάρχουν και άλλα φυσικά φαινόμενα στο πρόβλημα τότε συμπεριλαμβάνονται και αντίστοιχοι όροι στη διατύπωση των προς επίλυση διαφορικών εξισώσεων, ή επιπλέον διαφορικές εξισώσεις.

B.2 Η μέθοδος διακριτοποίησης

Με τη μέθοδο της διακριτοποίησης προσεγγίζεται το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Έτσι προσεγγίζεται η λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων σε διακριτά σημεία του πεδίου ροής. Τρεις είναι οι βασικές μέθοδοι διακριτοποίησης: α) η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (Finite Differences), β) η μέθοδος πεπερασμένων όγκων (Finite Volumes) και η γ) η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Finite Elements). Όλες αυτές αποδίδουν κατά μια γενική έννοια την ίδια ποιοτικά λύση με τη χρήση ενός πλέγματος υψηλής πυκνότητας και εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος για το ποιά θα χρησιμοποιηθεί. Στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων, για την οποία υπάρχει και η αντίστοιχη ανάλυση στο Κεφάλαιο 2.

B.3 Το σύστημα συντεταγμένων και η διανυσματική βάση

Στο πώς θα προσδιοριστεί το σύστημα συντεταγμένων των μερικών διαφορικών εξισώσεων εξαρτάται από το υπό εξέταση πρόβλημα αλλά και από το σύστημα συντεταγμένων που θα χρησιμοποιηθεί. Ως σύστημα συντεταγμένων μπορεί να χρησιμοποιηθεί το καρτεσιανό, το ακτινικό, το σφαιρικό, το καμπυλόγραμμο ορθογώνιο ή μη ορθογωνικό σύστημα, σταθερό ή μεταβλητό. Η επιλογή για το σύστημα συντεταγμένων εξαρτάται από το υπό εξέταση πρόβλημα και επηρεάζει τον τύπο του πλέγματος που θα χρησιμοποιηθεί, ενώ εξίσου σημαντικός παράγοντας είναι και η διανυσματική βάση. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε το ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και η σταθερή διανυσματική βάση.

B.4 Το υπολογιστικό πλέγμα

Το πλέγμα διαιρεί το πεδίο ροής σε διακριτές κυψέλες και ορίζει τα διακριτά σημεία όπου θα υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών. Τα είδη πλεγμάτων, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, είναι δομημένα ή μη δομημένα και δεν εφαρμόζεται κάποιος περιορισμός στον αριθμό των κυψελών. Σε δυο διαστάσεις το πλέγμα αποτελείται από τρίγωνα ή τετράπλευρα, ενώ σε τρεις διαστάσεις από τετράεδρα ή εξάεδρα και στην περίπτωση των υβριδικών μη δομημένων πλεγμάτων χρησιμοποιούνται εξάεδρα, τετράεδρα, πρίσματα και πυραμίδες.

Τα μη δομημένα πλέγματα υπερτερούν σε σχέση με τα δομημένα, καθώς τα πρώτα προσεγγίζουν εύκολα οποιαδήποτε γεωμετρία χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα, ενώ τα δεύτερα απαιτούν χρόνο, παρουσιάζουν δυσκολίες στην κατασκευή τους κυρίως γύρω από πολύπλοκες γεωμετρίες και μπορούν να δώσουν παραμορφωμένες κυψέλες, με αποτέλεσμα να εμφανιστούν σφάλματα ακόμα και σε αρχικό στάδιο της διακριτοποίησης (Papadakis, 2001). Επίσης, τα μη δομημένα πλέγματα παρέχουν τη δυνατότητα παρέμβασης στο πλέγμα τοπικά και κυρίως σε περιοχές με έντονες μεταβολές, όπως ασυνέχειες, οριακά στρώματα, κύματα κρούσης. Τα δομημένα πλέγματα από την άλλη απαιτούν παρέμβαση σε όλο το πλέγμα συνολικά για να διατηρηθεί ο χαρακτήρας του πλέγματος. Μειονέκτημα των μη δομημένων εί-

ναι ότι μπορούν να χειριστούν πολύ δύσκολα, αφού οι κυψέλες συνδέονται ακανόνιστα και με την έλλειψη δομής κρίνεται απαραίτητη η δημιουργία κατάλληλων δομών δεδομένων για την αποθήκευση τοπολογικών δεδομένων του πλέγματος. Η δημιουργία αυτών των δομών και ο χειρισμός τους απαιτεί χρόνο και υψηλές υπολογιστικές ταχύτητες. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε διάστατο μη δομημένο πλέγμα, που αποτελείται από τρίγωνα.

B.5 Οι προσεγγίσεις

Ανάλογα με τη μέθοδο διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται γίνονται και οι απαραίτητες προσεγγίσεις για τη μετάβαση από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων σε αυτό των αλγεβρικών εξισώσεων. Όσον αφορά τις πεπερασμένες διαφορές γίνεται προσέγγιση παραγώγων και για τους πεπερασμένους όγκους γίνεται προσέγγιση των ολοκληρωμάτων. Η υψηλή ακρίβεια, όμως, των προσεγγίσεων απαιτεί αντίστοιχα υψηλό υπολογιστικό κόστος και πλέγμα υψηλής ποιότητας, ενώ παρουσιάζει κάποιες δυσκολίες στον προγραμματισμό και συνάμα θα πρέπει να συνυπάρχουν η ακρίβεια, η απλότητα, η ευκολία στην εφαρμογή και η υπολογιστική αποδοτικότητα.

B.6 Η μέθοδος επίλυσης

Όπως προαναφέρθηκε, οι προσεγγίσεις δίνουν ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων ανάλογα με το μέγεθος του πλέγματος. Στο σύστημα αυτό εφαρμόζεται μια επαναληπτική διαδικασία με σκοπό την βελτίωση της αρχικής λύσης σε κάθε επανάληψη και αυτό ονομάζεται εσωτερική επανάληψη. Το τι επιλύτης χρησιμοποιείται εξαρτάται από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που επιλύονται, από τη δομή του πλέγματος και από το πλήθος των κόμβων στις αλγεβρικές εξισώσεις. Για τα μη γραμμικά προβλήματα, όπως στην παρούσα εργασία, γίνεται αρχική γραμμικοποίηση των εξισώσεων και έπειτα επιλύεται το γραμμικό σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτει.

B.7 Το κριτήριο σύγκλισης

Το κριτήριο σύγκλισης έχει να κάνει με το που θα τερματιστούν οι επαναλήψεις, ενώ καθορίζεται από το χρήστη και αντιστοιχεί στο μέγιστο υπόλοιπο (residual) των αποτελεσμάτων, που δέχεται ο χρήστης. Οι επαναλήψεις θα σταματήσουν μετά από ένα συγκεκριμένο αριθμό που μπορεί να οριστεί και αυτός από το χρήστη. Το πότε θα τερματιστούν οι επαναλήψεις είναι ιδιαίτερα κρίσιμο, καθώς επηρεάζει την ακρίβεια της λύσης, την αποδοτικότητα στη μέθοδο και το χρόνο που απαιτείται για την επίλυση. Συμπερασματικά, το μέγιστο αποδεκτό υπόλοιπο των αποτελεσμάτων και ο αριθμός των επαναλήψεων θα πρέπει να καθορίζεται με πολύ προσεκτικά από τον χρήστη (Papadakis, 2001).

‘Intentionally Blank’

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ

1.1 Οι βασικές εξισώσεις

Οι βασικές εξισώσεις της ρευστομηχανικής, που περιγράφουν τη ροή ρευστού, έχουν τη βάση τους στους ακόλουθους παγκόσμιους νόμους:

- Αρχή διατήρησης της μάζας,
- Εξίσωση ορμής (2^{ος} Νόμος του Newton),
- Αρχή διατήρησης ενέργειας (1^{ος} Θερμοδυναμικός Νόμος).

Εφαρμόζοντας τους τρεις αυτούς νόμους σε ένα στοιχείο της ροής του ρευστού σώματος προκύπτουν οι απαραίτητες μερικές διαφορικές εξισώσεις, που περιγράφουν την κίνηση του ρευστού. Από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης μάζας σε ένα στοιχείο του ρευστού προκύπτει η Εξίσωση Συνέχειας. Με τον 2^ο Νόμο του Newton διατυπώνονται οι εξισώσεις ορμής, ενώ από τον πρώτο Νόμο της Θερμοδυναμικής προκύπτει η Εξίσωση Ενέργειας. Πέρα από αυτές τις εξισώσεις για την επίλυση του συστήματος που δημιουργείται χρησιμοποιείται και η καταστατική εξίσωση, η οποία συσχετίζει τα θερμοδυναμικά μεγέθη πίεση, πυκνότητα και θερμοκρασία.

Στην παρούσα εργασία το ρευστό θεωρείται συμπίεστο και μη συνεκτικό. Οι δυνάμεις τριβής δεν λαμβάνονται υπόψη και έτσι το ρευστό μελετάται σύμφωνα με τις εξισώσεις Euler, οι οποίες έχουν καθολική ισχύ, καθώς απορρέουν από τους βασικούς φυσικούς νόμους, χωρίς την υιοθέτηση απλοποιήσεων άλλων εκτός από την απουσία συνεκτικότητας. Η διατύπωσή τους εκφράζει τη θεμελιώδη αρχή διατήρησης της ορμής σε διαφορική μορφή. Η συντηρητική μορφή των εξισώσεων σε 2 διαστάσεις (με απουσία των βαρυτικών δυνάμεων, που δεν λαμβάνονται υπόψη), που θα χρησιμοποιείται στη συνέχεια είναι (Λυγιδάκης, 2009), (Κουμπογιάννης, 1998):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \rho \vec{c} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0. \quad (1.3)$$

1.2 Η εξίσωση ενέργειας (1ος Θερμοδυναμικός Νόμος)

Η εξίσωση ενέργειας εκφράζει τον 1ο Θερμοδυναμικό Νόμο. Αναφέρεται στον ισολογισμό μεταξύ της κινητικής ενέργειας, της εσωτερικής ενέργειας, της δυναμικής ενέργειας, του έργου της πίεσης, του μηχανικού έργου και της θερμότητας (όλα σε μορφή ισχύος).

Η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης της ενέργειας αναφέρεται σε όγκο ελέγχου CV που περικλείεται από εξωτερική επιφάνεια ελέγχου CS:

$$\frac{d}{dt} \oint_{CV} E \rho dV = - \oint_{CS} h_t \rho c_n dA + \dot{Q} - \dot{W}, \quad (1.4)$$

$\dot{Q}$: ροή θερμότητας (θετική όταν εισέρχεται και αρνητική όταν εξέρχεται)

$\dot{W}$: μηχανική ισχύς (θετική όταν εξέρχεται και αρνητική όταν εισέρχεται)

h_t : ολική ειδική ενθαλπία. Σημειώνεται επίσης ότι η δυναμική ενέργεια θεωρείται αμελητέα (επειδή αναφερόμαστε σε αέρια, τα οποία έχουν χαμηλή πυκνότητα).

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad (1.5)$$

e : ειδική εσωτερική ενέργεια.

Ο πρώτος όρος της ολοκληρωτικής εξίσωσης της ενέργειας αναφέρεται στη χρονική μεταβολή της αποθηκευμένης ενέργειας στο ρευστό μέσα στον όγκο ελέγχου CV , ενώ ο δεύτερος όρος αναφέρεται στην εισροή ενέργειας στον όγκο ελέγχου CV μαζί με την εισερχόμενη παροχή μάζας. Για αδιαβατική ροή $\dot{Q} = 0$ και για άεργη ροή $\dot{W} = 0$.

Η διαφορική μορφή της εξίσωσης της ενέργειας, για μη συνεκτική και αδιαβατική ροή χωρίς πηγές θερμότητας, διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho E + p)v}{\partial y} = 0. \quad (1.6)$$

1.3 Καταστατική εξίσωση

Η αξιοποίηση της καταστατικής εξίσωσης, η οποία συμπληρώνει τον αριθμό των εξισώσεων του μαθηματικού μοντέλου, απαιτεί την ύπαρξη θερμοδυναμικής ισορροπίας, δηλαδή την παραδοχή ότι το ρευστό ακαριαία προσαρμόζεται σε οποιαδήποτε μεταβολή τείνει να επηρεάσει την ισορροπία του. Η θερμοδυναμική κατάσταση ενός ρευστού προσδιορίζεται γνωρίζοντας δυο μόνο τιμές μεταβλητών, καθώς οι υπόλοιπες υπολογίζονται από την καταστατική εξίσωση. Έτσι, αν είναι γνωστή η πυκνότητα ρ και η τιμή της απόλυτης θερμοκρασίας T του ρευστού, μπορούν να υπολογιστούν η πίεση p και η ειδική εσωτερική ενέργεια e .

Ένα θερμικά τέλειο αέριο ικανοποιεί την θερμική καταστατική εξίσωση:

$$p = \rho R_g T, \quad (1.7)$$

p : πίεση του αερίου, T : απόλυτη θερμοκρασία, R_g : σταθερά τελείου αερίου του συγκεκριμένου αερίου που μελετάται.

Η σταθερά R_g συνδέεται με τις τιμές των ειδικών θερμοχωρητικοτήτων με τις σχέσεις:

$$R_g = c_p - c_v, \quad (1.8)$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad (1.9)$$

όπου γ είναι ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής του τελείου αερίου και οι ειδικές θερμοχωρητικότητες υπό σταθερή πίεση c_p και υπό σταθερό όγκο c_v , οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad (1.10)$$

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v, \quad (1.11)$$

h : η ειδική ενθαλπία του αερίου (ανά μονάδα μάζας):

$$h = e + \frac{p}{\rho}. \quad (1.12)$$

Για τέλειο αέριο οι ποσότητες αυτές είναι συναρτήσεις της θερμοκρασίας, δηλαδή,

$$e = c_v T, \quad h = c_p T. \quad (1.13)$$

Ο αέρας θεωρείται τέλειο αέριο και οι συντελεστές για τις παραπάνω εξισώσεις (1.7 – 1.13) έχουν τις εξής σταθερές τιμές:

$R_g = 287,04 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $c_p = 1004,64 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $c_v = 717,6 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2} \text{ K}^{-1}$ και $\gamma = 1,4$.

Η ενέργεια (ανά μονάδα μάζας) σε σχέση με την πίεση δίδεται από τη σχέση:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2), \quad (1.14)$$

και η ολική ειδική ενθαλπία από τη σχέση:

$$h_t = E + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2). \quad (1.15)$$

1.4 Εξισώσεις ροής

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνεται μαθηματικά το πρόβλημα μη συνεκτικής ροής συμπίεστου ρευστού. Καταγράφονται οι εξισώσεις Euler και οι παραδοχές που ακολουθούν (Κουμπογιάννης, 1998).

Οι εξισώσεις Euler μοντελοποιούν τη συμπίεστη ροή μη συνεκτικού ρευστού και εκφράζουν την εξίσωση της συνέχειας, της ορμής και της ενέργειας σε διαφορική μορφή. Οι μεταβλητές σε σχέση με τις οποίες εκφράζονται οι εξισώσεις, καλούνται συντηρητικές μεταβλητές, γιατί είναι αυτές που μεταφέρονται μέσα από τα όρια κάθε όγκου ελέγχου. Επιπλέον δεδομένο του προβλήματος αποτελεί η εφαρμογή των εξισώσεων σε διδιάστατη ροή και σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y) , οπότε διατυπώνονται σε διανυσματική μορφή ως:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}^{inv}}{\partial y} = \vec{0}, \quad (1.16)$$

$\vec{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$: το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών, ρ η πυκνότητα του ρευστού, ενώ οι συνιστώσες της ταχύτητας $\vec{V}$ στο x, y επίπεδο είναι αντίστοιχα u και v . Οι μεταβλητές αυτές προέρχονται από τις λεγόμενες πρωτεύουσες μεταβλητές $\vec{U} = [\rho, u, v, p]^T$, όπου με ρ η πυκνότητα του ρευστού και οι συνιστώσες της ταχύτητας $\vec{V}$ στο x, y επίπεδο είναι αντίστοιχα u και v , ενώ με p συμβολίζεται η πίεση.

Στις συντηρητικές μεταβλητές με E συμβολίζεται η ολική ενέργεια του ρευστού ανά μονάδα μάζας και δίνεται από τη σχέση:

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad (1.17)$$

όπου e η ειδική εσωτερική ενέργεια. Τα διανύσματα $\vec{F}$ και $\vec{G}$ για τη μη συνεκτική ροή (*inviscid flow*) δίνονται ως:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι όροι της βαρύτητας θεωρούνται αμελητέοι, για αυτό και δεν αναφέρονται, ενώ και οι όροι πηγής είναι επίσης μηδενικοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Στο παρόν κεφάλαιο, γίνεται παρουσίαση της μεθόδου αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων ροής συμπιεστού ρευστού σε μη δομημένα πλέγματα, με τριγωνικά στοιχεία με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Γίνεται αναφορά στο πώς διακριτοποιείται το χωρίο ροής με τριγωνικά στοιχεία, στον ορισμό των όγκων ελέγχου, στη διακριτοποίηση των εξισώσεων και στο πώς επιλύονται οι αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν, σε κάθε χρονικό βήμα.

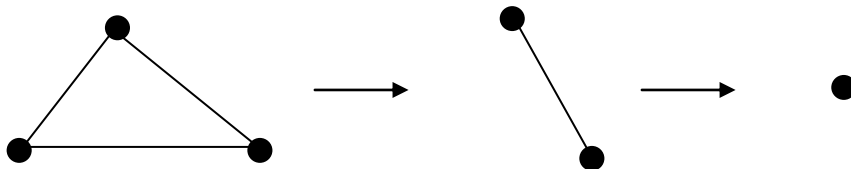
2.1 Διακριτοποίηση πεδίου ροής

2.1.1 Πεπερασμένοι όγκοι

Η μέθοδος διακριτοποίησης πεπερασμένων όγκων είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής ρευστοδυναμικής. Εφαρμόζεται σε κάθε τύπου πλέγματος (μη δομημένο εν προκειμένω) και σε πολύπλοκες γεωμετρίες. Οι μεταβλητές που υπολογίζονται έχουν φυσική σημασία, για αυτό και χρησιμοποιείται ευρέως στη χωρική διακριτοποίηση, όπου στην ουσία μετατρέπεται το πολύπλοκο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων σε ένα επιλύσιμο σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (Κουμπογιάννης, 1998).

2.1.2 Τοπολογική δομή δεδομένων

Ένα υπολογιστικό πλέγμα διακριτοποίησης δεν περιγράφεται μόνο από τις συντεταγμένες των κόμβων του, αλλά πρέπει να παρέχει και πληροφορίες για την τοπολογική δομή του. Οι πληροφορίες αυτές περιγράφουν την τοπολογική δομή δεδομένων του πλέγματος, η οποία είναι ιεραρχική, δίδοντας όμως την ελάχιστη δυνατή πληροφορία. Η δομή, που ακολουθείται στην παρούσα εργασία, βασίζεται στις ακμές του πλέγματος, καθώς για κάθε ακμή θα υπολογίζονται και οι ροές των μεγεθών από τα όρια του κάθε όγκου ελέγχου. Κάθε τριγωνικό στοιχείο αποτελείται από συγκεκριμένες ακμές, οι οποίες συνδέουν συγκεκριμένους κόμβους του πλέγματος (Σχήμα 2.1). Είναι γνωστό ότι η δομή που βασίζεται στις ακμές του πλέγματος παρέχει μειωμένο χρόνο υπολογισμού σε σχέση με άλλες προσεγγίσεις. Επίσης είναι αποτελεσματική και στις περιπτώσεις που εφαρμόζονται τεχνικές αυτόματης πύκνωσης του πλέγματος με εισαγωγή νέων κόμβων, νέων ακμών και νέων στοιχείων (h-refinement).



Σχήμα 2.1: Ιεραρχική δομή για την καταχώρηση στοιχείων πλέγματος στην τοπολογική δομή δεδομένων.

2.2 Υπολογιστικά πλέγματα

Η επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων βασίζεται στη διακριτοποίησή τους με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων. Ο χώρος ροής του ρευστού υποδιαιρείται σε ένα σύνολο όγκων, τους όγκους αναφοράς (ή κυψέλες ελέγχου), με τη βοήθεια του υπολογιστικού πλέγματος διακριτοποίησης. Σε αυτούς τους πεπερασμένους όγκους γίνεται η ολοκλήρωση των προς επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Οι όγκοι ελέγχου περιέχουν τα διακριτά σημεία του πεδίου, στα οποία υπολογίζονται οι μεταβλητές επίλυσης και καλούνται υπολογιστικοί κόμβοι. Ο κόμβος κάθε όγκου ελέγχου αποτελεί ένα διακριτό σημείο του πεδίου, όπου υπολογίζονται οι (μέσες) τιμές των μεταβλητών του προβλήματος. Οι δυο βασικές μέθοδοι δημιουργίας των όγκων ελέγχου είναι η κεντροκομβική και η κεντροκυβελική μέθοδος. Στην κεντροκομβική μέθοδο (Node Centered Finite Volume scheme - NCFV), κάθε υπολογιστικός κόμβος, όπου αποθηκεύονται τα υπολογιζόμενα μεγέθη, εντοπίζεται σαν σημείο τομής των γραμμών του πλέγματος, ενώ τα όρια των όγκων ελέγχου ορίζονται ενδιάμεσα μεταξύ των γειτονικών υπολογιστικών κόμβων (με διαφορετικές μεθόδους, όπως θα φανεί στη συνέχεια). Σε αυτήν τη μέθοδο το "κέντρο" ενός όγκου αναφοράς συμπίπτει με έναν

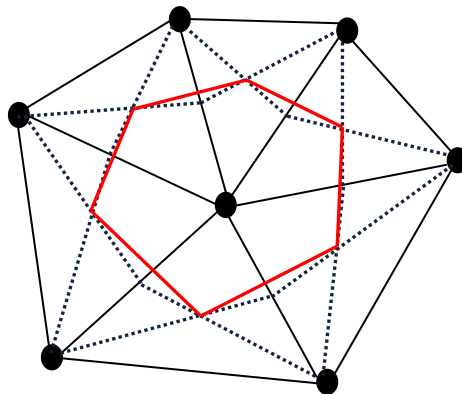
κόμβο του πλέγματος, οπότε ο υπολογισμός των μεταβλητών στα κέντρα των όγκων αναφοράς είναι ισοδύναμος με τον υπολογισμό τους σε όλους τους κόμβους του πλέγματος. Στην κεντροκυψελική μέθοδο (Cell Centered Finite Volume scheme - CCFV) οι γραμμές του πλέγματος διαμορφώνουν τα όρια των όγκων ελέγχου και οι υπολογιστικοί κόμβοι βρίσκονται (συνήθως) στα κέντρα βάρους των όγκων ελέγχου. Στη συνέχεια παρουσιάζονται παρακάτω (Σχήμα 2.2) οι δυο αυτοί τρόποι αναπαράστασης των όγκων ελέγχου για καρτεσιανό διδιάστατο δομημένο πλέγμα, ενώ στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η κεντροκομβική μέθοδος για μη δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων.



Σχήμα 2.2: Κεντροκομβική (αριστερά) και κεντροκυψελική (δεξιά) μέθοδος διακριτοποίησης (όπου οι διακεκομμένες γραμμές αποτελούν τα όρια των όγκων ελέγχου).

Το πλεονέκτημα της χρήσης μη δομημένων πλεγμάτων, σε σχέση με τα δομημένα, είναι ότι μπορεί να διακριτοποιηθεί πεδίο ροής οποιασδήποτε πολύπλοκης γεωμετρίας και επίσης να γίνεται εύκολη τοπική προσαρμογή ενός αραιού αρχικά πλέγματος στην υπό εξέλιξη λύση. Για παράδειγμα, στη γέννηση ενός δομημένου πλέγματος σε χωρίο πολλαπλής συνοχής απαιτείται διαμέριση του χωρίου σε υποπεριοχές και δημιουργία πολλαπλών πλεγμάτων. Τα δομημένα πλέγματα από τη μεριά τους επιτρέπουν εύκολο έλεγχο της δομής των πλεγμάτων των γραμμών και των αποστάσεών τους από το όριο του χωρίου, γεγονός που καθιστά ευνοϊκή την επίλυση συνεκτικών ροών με συγκεκριμένα μοντέλα τύρβης. Ο συνδυασμός των δυο αυτών ειδών πλέγματος δίνει τα λεγόμενα υβριδικά πλέγματα, τα οποία αποτελούνται από δομημένο πλέγμα στην περιοχή του τοίχου και μη δομημένο στο υπόλοιπο χωρίο, ενώ απαιτούν γενικευμένο λογισμικό επίλυσης, το οποίο μπορεί να διαχειρίζεται μη ομοιόμορφα στοιχεία (Κουμπογιάννης, 1998).

Στην παρούσα εργασία οι όγκοι ελέγχου, στους οποίους γίνεται η αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων της ροής (Σχήμα 2.3), προσεγγίζονται κεντροκομβικά, συνδέοντας τα βαρύκεντρα των τριγώνων, που έχουν σχηματιστεί γύρω από τον εκάστοτε κόμβο αναφοράς, μεταξύ τους με ευθύγραμμα τμήματα (Centroid-dual mesh).



Σχήμα 2.3: Ορισμός όγκου ελέγχου γύρω από εσωτερικό κόμβο πλέγματος, με ένωση των βαρύκεντρων των τριγώνων γύρω από τον εσωτερικό κόμβο (centroid-dual mesh).

Η γενική μεθοδολογία για τους πεπερασμένους όγκους (finite volume method) απαιτεί το διαχωρισμό ενός υπολογιστικού πεδίου ορισμού $\Omega \subset R^2$ σε ένα σύνολο από όγκους ελέγχου, οι οποίοι δεν επικαλύπτονται, και την αριθμητική ολοκλήρωση των μερικών διαφο-

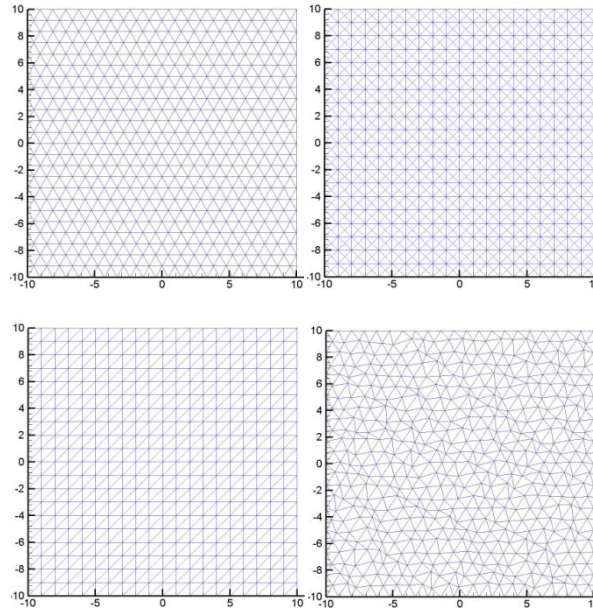
ρικών εξισώσεων της ροής σε κάθε όγκο ελέγχου. Αρχικά, ο πρώτος διαχωρισμός σε τρίγωνα του πεδίου Ω συνθέτει το λεγόμενο πρωτογενές πλέγμα (primal mesh). Η διχοτόμηση του πλέγματος ενώνοντας τα βαρύκεντρα των γειτονικών στοιχείων του πρωτογενούς πλέγματος, παράγει όγκους ελέγχου με σκοπό να μην επικαλύπτει ο ένας τον άλλον για την κεντροκομβική διακριτοποίηση. Αυτοί οι όγκοι ελέγχου καλύπτουν το εσωτερικό υπολογιστικό πεδίο και συνθέτουν ένα δυϊκό πλέγμα σε σχέση με το αρχικό (Centroid-dual mesh) (Delis et. al., 2011).

Στα κεντροκομβικά σχήματα οι διακριτές λύσεις υπολογίζονται στους κόμβους του πλέγματος, οι οποίοι καλούνται και σημεία δεδομένων (data points), και η κοινή πλευρά γειτονικών όγκων ελέγχου καλείται με τον όρο όψη (face). Κάθε τέτοια κοινή όψη χαρακτηρίζεται από δυο διάνυσματα, το διάνυσμα ακμής, που ενώνει τους δυο γειτονικούς κόμβους, που δημιουργούν και τους γειτονικούς όγκους ελέγχου (διάνυσμα $\overline{PQ}$), και ένα διάνυσμα κάθετο στην όψη (face) με μέτρο ίσο με το μήκος της όψης (Delis et al., 2011).

Τα πλέγματα που χρησιμοποιούνται χαρακτηρίζονται ως συμμετρικά και μη-συμμετρικά. Τα συμμετρικά πλέγματα παράγονται από μια ομαλή χαρτογράφηση πλεγμάτων (smooth mapping), με περιοδική συνδεσιμότητα κόμβων και κατανομή κελιών, με χρήση ακόμα και καρτεσιανών πλεγμάτων. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν, για ορισμένες από τις δοκιμές, οι τέσσερις παρακάτω τύποι πλεγμάτων (Delis et al., 2011), (Delis, Nikolos, 2012) (Σχήμα 2.4):

- Equilateral triangular grid (Type I): Ισόπλευρο τριγωνικό πλέγμα.
- Orthogonal grid (Type II): Συμμετρικό τριγωνικό πλέγμα, που δημιουργείται από συμμετρικά τετράπλευρα, τα οποία χωρίζονται με τις 2 διαγώνιους σε 4 τρίγωνα.
- Orthogonal grid (Type III): Συμμετρικό τριγωνικό πλέγμα, που δημιουργείται από συμμετρικά τετράπλευρα, τα οποία χωρίζονται με τη μία διαγώνιο σε 2 τρίγωνα.
- Distorted grid IV: τυχαία παραμορφωμένα πλέγματα, που προέρχονται από τυχαίες αλλαγές στη θέση των κόμβων του Equilateral I πλέγματος. Για την παραγωγή αυτού του τύπου πλέγματος θεωρείται μια τυχαία διαταραχή σε κάθε διάσταση ορισμένη ως $0.4r\Delta x$, όπου $r \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ένας τυχαίος αριθμός και Δx το μήκος κάθε διαμέρισης του πλέγματος κατά την x διεύθυνση.

Πολύ σημαντικό ρόλο κατέχουν, επίσης, η έννοια της ακρίβειας και της ευστάθειας για τα σχήματα πεπερασμένων όγκων σε γενικά πλέγματα. Κύρια απαίτηση για τη μελέτη της σύγκλισης αυτών των σχημάτων και για την επίτευξη της δίκαιης σύγκρισής τους είναι να υπάρξει **συνεπής πυκνωση των πλεγμάτων** (consistency refinement property). Αυτή η ιδιότητα απαιτεί τη μείωση της μέγιστης απόστασης κατά μήκος των κελιών του πλέγματος με την αύξηση του συνολικού αριθμού των σημείων δεδομένων (data points) του πλέγματος N , δηλαδή των κόμβων του πλέγματος, οι οποίοι αποτελούν και τους βαθμούς ελευθερίας. Για ένα δεδομένο υπολογιστικό πεδίο ορισμού με διαστάσεις $L_x \times L_y$ στη x και y διεύθυνση αντίστοιχα, θεωρείται μια υποδιαίρεση του L_x από N_x ευθύγραμμα τμήματα, η οποία καλείται $\Delta x = \frac{L_x}{N_x}$ και εξαρτάται από τον τύπο του πλέγματος. Όμοια γίνεται και η υποδιαίρεση Δy στην y διεύθυνση αντίστοιχα. Επίσης, προσδιορίζεται για κάθε πλέγμα και το χαρακτηριστικό μήκος $h_N = \sqrt{\frac{L_x \times L_y}{N}}$ υποδηλώνοντας και το μέγεθος της διακριτοποίησης. Πραγματοποιούνται διαδοχικές τέτοιου είδους πυκνώσεις στο υπό μελέτη πλέγμα, υποδιπλασιάζοντας το μέγεθος Δx , οπότε υποδιπλασιάζεται και το χαρακτηριστικό μήκος h_N , ενώ τετραπλασιάζονται οι κόμβοι N του πλέγματος και το αποτέλεσμα είναι το σφάλμα στην προκειμένη περίπτωση να μειώνεται με τρόπο που εξαρτάται από το βαθμό του σχήματος διακριτοποίησης (Delis, Nikolos, 2012), (Πίνακας 2.1).



Σχήμα 2.4: Τύποι μη δομημένων πλεγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία.

Grid Type						
	Type I and IV		TypeII		TypeIII	
N_x	N	h_N	N	h_N	N	h_N
20	562	0.843649081	841	0.689655172	441	0.952380952
40	1950	0.452910813	3281	0.349161926	1681	0.487804878
80	7579	0.229733348	12961	0.175675314	6561	0.24691358
160	29877	0.115707497	51521	0.088112566	25921	0.124223602
321	119647	0.057820133	205441	0.044125174	103041	0.062305295

Πίνακας 2.1: Χαρακτηριστικό μήκος h_N και σημεία δεδομένων N με σκοπό την επίτευξη της συνολικής για $\Omega = [20 \times 20]$.

2.3 Διακριτοποίηση εξισώσεων

2.3.1 Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων

Στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, οι διαφορικές εξισώσεις που μοντελοποιούν το πρόβλημα της ροής ολοκληρώνονται σε κάθε όγκο ελέγχου. Η διανυσματική μορφή των εξισώσεων διατήρησης έχει την εξής (συντηρητική) μορφή:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}^{inv}}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$\vec{W}$: το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών, $\vec{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}$, οι οποίες προέρχονται από τις πρωτεύουσες μεταβλητές $\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix}$,

$\vec{F}^{inv}$: το διάνυσμα μη συνεκτικής ροής κατά τη διεύθυνση x,

$\vec{G}^{inv}$: το διάνυσμα μη συνεκτικής ροής κατά τη διεύθυνση y. Το δεύτερο μέλος αντικατοπτρίζει το διάνυσμα των όρων πηγής $\vec{S}$ και έχει τιμή 0.

Με ολοκλήρωση της παραπάνω διανυσματικής εξίσωσης στον όγκο ελέγχου C_p για τυχαίο κόμβο P (Σχήμα 2.5), (Σχήμα 2.6), προκύπτει:

$$\iint_{C_p} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dxdy + \iint_{C_p} \left(\frac{\partial \vec{F}^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}^{inv}}{\partial y} \right) dxdy = 0. \quad (2.2)$$

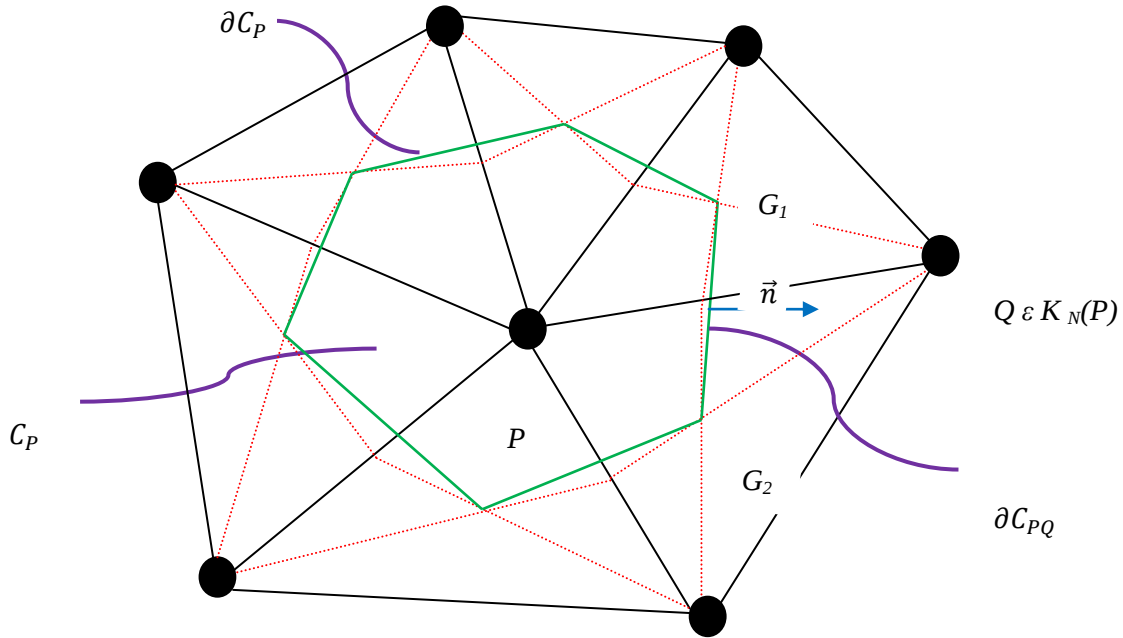
Εφαρμόζοντας θεώρημα Green Gauss το διπλό ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε επικαμύλιο κατά μήκος του ορίου ∂C_p του όγκου ελέγχου. Η φορά διαγραφής του ορίου είναι αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού:

$$\iint_{C_p} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dxdy + \int_{\partial C_p} \vec{H}^{inv} dl = 0, \quad (2.3)$$

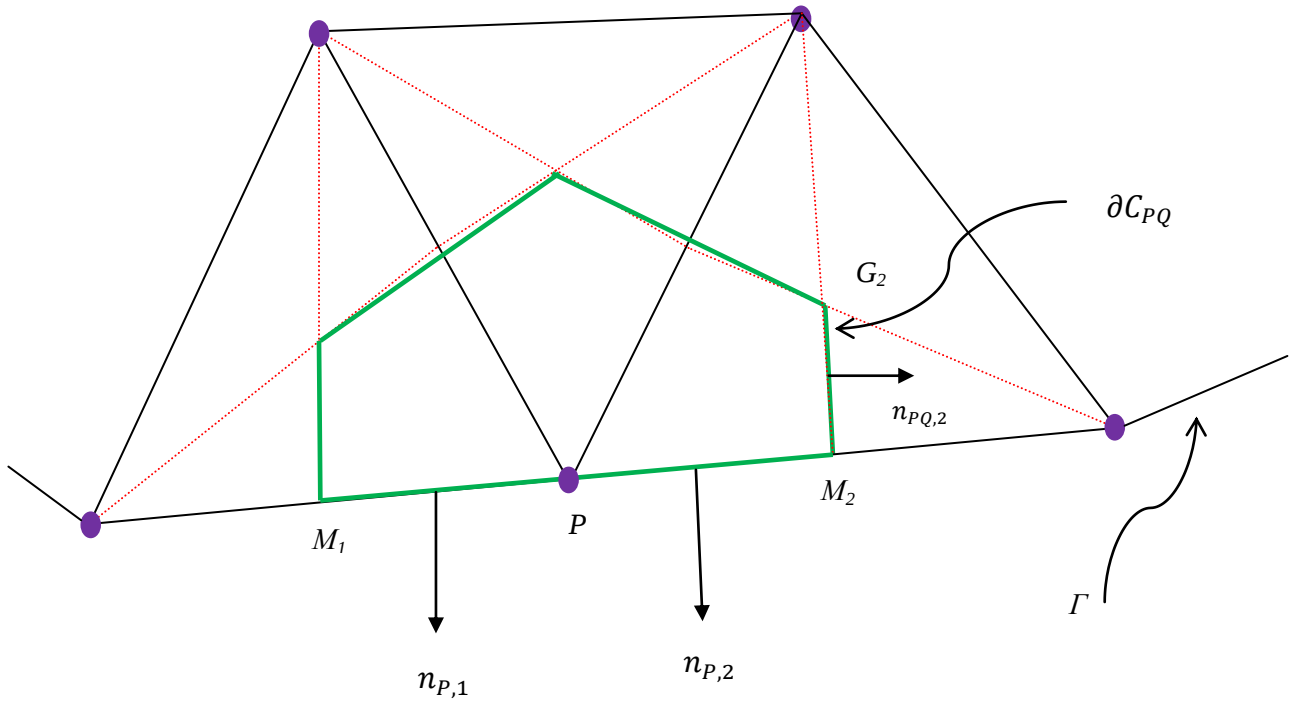
$$\vec{H}^{inv} = \hat{n}_x \vec{F}^{inv} + \hat{n}_y \vec{G}^{inv}, \quad (2.4)$$

$$\vec{\hat{n}} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y). \quad (2.5)$$

Σε κάθε στοιχειώδες τμήμα του ορίου ∂C_p με μήκος dl αντιστοιχεί το κάθετο διάνυσμα $\vec{n} = (n_x, n_y)$, που έχει φορά προς το εξωτερικό του όγκου αναφοράς και μέτρο dl .



Σχήμα 2.5: Όγκος ελέγχου γύρω από τον κόμβο P σε κεντροκομβική προσέγγιση πεπερασμένου όγκου-NCFV.



Σχήμα 2.6: Όγκος ελέγχου για συνοριακό κόμβο P σε κεντροκομβική προσέγγιση πεπερασμένου όγκου-NCFV.

Το σύνορο ∂C_p διακριτοποιείται μέσα από τη διαμέρισή του σε έναν αριθμό ευθύγραμμων τμημάτων. Η διαμέριση που χρησιμοποιείται είναι η εξής:

$$(\partial C_p)^{inv} = \bigcup_{Q \in K_N(P)} \partial C_{PQ} + (\partial C_{PQ} \cap \Gamma) \quad (2.6)$$

και εκφράζει ότι το σύνορο αποτελείται από την ένωση όλων των όψεων (faces) μεταξύ του κόμβου P και των γειτονικών του, καθώς και τις όψεις που ανήκουν στο σύνορο Γ του πεδίου ροής.

$K_N(P)$: το σύνολο των κόμβων που συνδέονται άμεσα με τον κόμβο P μέσα από τις ακμές του πλέγματος,

∂C_{PQ} : η τομή των συνόρων ∂C_p και ∂C_Q των όγκων ελέγχου δυο γειτονικών κόμβων P και Q . Σύμφωνα με την παραπάνω διαμέριση, έχουμε:

$$\iint_{C_p} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dxdy + \sum_{Q \in K_N(P)} \int_{\partial C_{PQ}} \vec{H}^{inv} + \int_{\partial C_p \cap \Gamma} \vec{H}^{inv} dl = 0. \quad (2.7)$$

Θεωρείται ότι οι μεταβλητές έχουν στον κόμβο P τιμή ίση με την μέση τιμή στον όγκο C_p , οπότε:

$$\iint_{C_p} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dxdy = \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_P \iint_{C_p} dxdy = \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_P A_P, \quad (2.8)$$

A_P : το εμβαδόν του όγκου ελέγχου C_p .

Η διακριτοποίηση των ολοκληρωμάτων των χωρικών όρων εισάγει τα αριθμητικά διανύσματα ροής $\vec{\Phi}$ στη θέση των αντίστοιχων φυσικών ποσοτήτων. Η προσέγγιση αυτή για το ολοκλήρωμα των μη συνεκτικών ροών γίνεται ως εξής:

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \int_{\partial C_{PQ}} \vec{H}^{inv} dl = \vec{f}^{inv} \left(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{W}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ} \right), \quad (2.9)$$

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \int_{\partial C_{PQ}} \vec{H}^{inv} dl = \vec{f}^{inv} \left(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{W}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ} \right), \quad (2.10)$$

$$\vec{n}_{PQ} = \int_{\partial C_{PQ}} \vec{n} dl, \quad (2.11)$$

$\vec{n}_{PQ}$: το κάθετο διάνυσμα στην όψη (face) που σχετίζεται με την ακμή PQ και έχει μήκος ίσο με αυτό του τμήματος G_1G_2 ,

$\overrightarrow{W_{PQ}}^L, \overrightarrow{W_{PQ}}^R$: οι τιμές των μεταβλητών, στις οποίες βασίζεται ο υπολογισμός του διανύσματος ροής $\overrightarrow{\Phi_{PQ}}^{inv}$, οι οποίες αποτελούν και την αιτία για τη δημιουργία του διανύσματος μη συνεκτικής ροής που σχετίζεται με την ακμή PQ . Εν τέλει, για τον όγκο ελέγχου γύρω από τον τυχαίο κόμβο P , η διαφορική εξίσωση που μοντελοποιεί τη ροή στην ουσία έχει την εξής τελική μορφή:

$$\left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_P A_P + \sum_{Q \in K_N(P)} \overrightarrow{\Phi_{PQ}}^{inv} + \overrightarrow{\Phi_{P,out}}^{inv} = 0, \quad (2.12)$$

$\overrightarrow{\Phi_{P,out}}$: τα αριθμητικά διανύσματα ροής που διασχίζουν το όριο του χωρίου ροής Γ στα τμήματα όπου αυτό ταυτίζεται με το όριο του όγκου ελέγχου για τον κόμβο P .

2.3.2 Υπολογισμός αριθμητικών διανυσμάτων για μη συνεκτική ροή

Βασικό κομμάτι στις μεθόδους πεπερασμένου όγκου (Finite Volume-FV methods) είναι να επιτευχθεί η αριθμητική προσέγγιση της πραγματικής ροής. Αρχικά, για να οριστεί η αριθμητική ροή, υπολογίζονται τα διανύσματα μη συνεκτικής ροής σαρώνοντας τις ακμές του πλέγματος. Σε κάθε ακμή PQ υπολογίζεται το αριθμητικό διάνυσμα ροής $\vec{\Phi}_{PQ}^{inv}$, το οποίο συνεισφέρει με το κατάλληλο πρόσημο στον ισολογισμό ροών των όγκων ελέγχου των δυο ακραίων κόμβων P και Q της ακμής. Ορίζεται ένα μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann μεταξύ δυο καταστάσεων, που βρίσκονται δεξιά και αριστερά του μέσου της όψης (face) του όγκου ελέγχου, που σχετίζεται με την ακμή PQ . Οι καταστάσεις αυτές συμβολίζονται με L (left) και R (right) και χαρακτηρίζονται αντίστοιχα από τα διανύσματα κατάστασης $\vec{W}_{PQ}^L$ και $\vec{W}_{PQ}^R$. Στο προς επίλυση πρόβλημα σε κάθε χρονικό βήμα εφαρμόζεται ο προσεγγιστικός επιλύτης Riemann του Roe (Roe, 1981), (Κουμπογιάννης, 1998) (ή εναλλακτικά ο προσεγγιστικός επιλύτης HLLC), όπου το διάνυσμα ροής υπολογίζεται σύμφωνα με το σχήμα διάσπασης των διαφορών ροής του Roe ως (Roe, 1981), (Κουμπογιάννης, 1998):

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} \left(\vec{H}^{inv}(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}) + \vec{H}^{inv}(\vec{W}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) \right) - \frac{1}{2} |\vec{A}_{PQ}| (\vec{W}_{PQ}^R - \vec{W}_{PQ}^L). \quad (2.13)$$

Στην παραπάνω σχέση, το διάνυσμα $\vec{H}$ δίνεται ως

$$\vec{H}^{inv} = \hat{n}_x \vec{F}^{inv} + \hat{n}_y \vec{G}^{inv}, \quad (2.14)$$

ενώ με $\vec{A}_{PQ}$ συμβολίζεται το Ιακωβιανό μητρώο, που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις μέσες κατά Roe τιμές των συντηρητικών μεταβλητών. Οι συντηρητικές μεταβλητές υπολογίζονται από τις αντίστοιχες μέσες κατά Roe (Roe, 1981) τιμές των πρωταρχικών μεταβλητών στην ακμή PQ , οι οποίες είναι:

$$\vec{U}_{PQ} = [\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}_t]^T \quad (2.15)$$

και ορίζονται από τη σχέση

$$\vec{U}_{PQ} = \frac{\sqrt{\rho_L} \vec{u}_L + \sqrt{\rho_R} \vec{u}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}. \quad (2.16)$$

Η μεταβλητή $\vec{u}$ αντικαθίσταται από τις πρωτεύουσες μεταβλητές ρ, u, v για τον αντίστοιχο κόμβο, καθώς και από την ολική ενθαλπία h_t . Από την ολική τιμή της ενθαλπίας υπολογίζεται η μέση κατά Roe τιμή για την πίεση,

$$\tilde{p} = \frac{(\gamma - 1)\tilde{\rho}}{\gamma} \left(\tilde{h}_t - \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \right). \quad (2.17)$$

Για να υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών στη δεξιά και αριστερή κατάσταση στις παραπάνω σχέσεις, χρησιμοποιείται αρχικά σχήμα ακρίβειας πρώτης τάξης, δηλαδή οι τιμές αριστερά και δεξιά της όψης στην οποία γίνεται η ολοκλήρωση θεωρούνται ίσες με τις τιμές στους αντίστοιχους κόμβους των όγκων ελέγχου εκατέρωθεν της συγκεκριμένης όψης. Θεωρούμε δηλαδή ότι οι ποσότητες της ροής παραμένουν σταθερές σε κάθε όγκο ελέγχου και μεταβάλλονται μόνο από όγκο σε όγκο:

$$\vec{U}_{PQ}^L = \vec{U}_P, \vec{U}_{PQ}^R = \vec{U}_Q. \quad (2.18)$$

Επίσης, για το Ιακωβιανό μητρώο του διανύσματος $\vec{H}$ ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές ισχύει:

$$\underline{A} = \frac{\partial \vec{H}^{inv}}{\partial \vec{W}} \quad (2.19)$$

$$\tilde{\underline{A}} = \tilde{\underline{A}}(\vec{W}, \vec{n}) \quad (2.20)$$

$$|\underline{A}| = \underline{T}|\underline{A}|\underline{T}^{-1} \quad (2.21)$$

με $\underline{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \text{diag}(V_n, V_n, V_n + c|\vec{n}|, V_n - c|\vec{n}|)$ ο διαγώνιος πίνακας για τις ιδιοτιμές από το μητρώο $\underline{A}$. Σημειώνεται, επίσης, ότι η περισπωμένη $\sim$ δηλώνει μητρώα, τα οποία υπολογίστηκαν σύμφωνα με τις μέσες κατά Roe τιμές των πρωταρχικών μεταβλητών. Τέλος, για το μητρώο $\tilde{\underline{A}}_{PQ}$ ικανοποιείται η εξίσωση

$$\vec{H}(\vec{W}_{PQ}^R) - \vec{H}(\vec{W}_{PQ}^L) = \tilde{\underline{A}}_{PQ}(\vec{W}_{PQ}^R - \vec{W}_{PQ}^L), \quad (2.22)$$

οπότε και η εξίσωση για το διάνυσμα ροής επαναδιατυπώνεται ως εξής :

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \vec{H}^{inv}(\vec{W}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) - \tilde{\underline{A}}_{PQ}^+(\vec{W}_{PQ}^R - \vec{W}_{PQ}^L), \quad (2.23)$$

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \vec{H}^{inv}(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}) + \tilde{\underline{A}}_{PQ}^-(\vec{W}_{PQ}^R - \vec{W}_{PQ}^L). \quad (2.24)$$

2.3.3 Σχήμα διακριτοποίησης 2ης τάξης ακρίβειας

Αρχικά, σημειώνεται ότι η επίλυση με ακρίβεια πρώτης τάξης στη χωρική διακριτοποίηση για τις μη συνεκτικές ροές, επειδή εισάγει ποσά διάχυσης και φτωχή ποιότητα στα αποτελέσματα, παρατηρείται η ανάγκη αύξησης ακρίβειας του σχήματος. Για να επιτευχθεί αυτό χρησιμοποιείται το λεγόμενο σχήμα MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws), όπου είναι μια μέθοδος που παράγει υψηλής ακρίβειας λύσεις για το σύστημα ακόμα και σε λύσεις με ασυνέχειες, ή και υψηλές κλίσεις. Συγκεκριμένα, το σχήμα MUSCL (Van Leer, 1979) αυξάνει την τάξη ακρίβειας με κατάλληλη προεκβολή των μεταβλητών, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται υπερεκτιμήσεις ή υποεκτιμήσεις των τιμών τους στο μέσο μιας ακμής σε σχέση με τις τιμές τους στους ακραίους κόμβους της ακμής. Για να αποφευχθούν, λοιπόν, οι διάφορες ανομοιομορφίες στη λύση φράσσονται οι προεκβαλλόμενες τιμές στο μέσο της ακμής μεταξύ των τιμών των ακραίων κόμβων. Έτσι, οι συναρτήσεις περιορι-

σμού κρίνεται απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν. Μια συνάρτηση περιορισμού δίνει στις σχέσεις προεκβολής τους όρους που περιέχουν τις κλίσεις των μεταβλητών και δίνουν στο σχήμα την ακρίβεια δεύτερης τάξης (Λυγιδάκης, 2009).

Για την επίτευξη δεύτερης τάξης ακρίβεια στο υπό μελέτη μη δομημένο τριγωνικό πλέγμα, υπολογίζεται η δεξιά $\vec{W}_{PQ}^R$ και η αριστερή $\vec{W}_{PQ}^L$ κατάσταση των μεταβλητών, υποθέτοντας ότι η λύση σε κάθε κυψέλη μεταβάλλεται γραμμικά. Σύμφωνα με το σχήμα MUSCL χρησιμοποιούνται οι πρωτεύουσες μεταβλητές $\vec{U}$, από τις τιμές $\vec{U}_{PQ}^L$ και $\vec{U}_{PQ}^R$ υπολογίζονται οι αντίστοιχες τιμές των συντηρητικών μεταβλητών και χρησιμοποιούνται για τα αριθμητικά διανύσματα ροής. Οι τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών στα όρια του όγκου ελέγχου υπολογίζονται (ανακατασκευάζονται) με τη χρήση των κλίσεων (gradients) των πρωτευουσών μεταβλητών, οι οποίες με τη σειρά τους υπολογίζονται με τη χρήση της μεθόδου Green-Gauss. Το σχήμα MUSCL απαιτεί τη χρήση συναρτήσεων περιορισμού, όπως προαναφέρθηκε, για την αποφυγή ταλαντώσεων που προκαλούνται στη λύση. Οι περιορισμοί κλίσεων καταστέλλουν τις αριθμητικές ταλαντώσεις, αποτρέποντας τη δημιουργία τοπικών ακρότατων στο υπό μελέτη τμήμα του όγκου ελέγχου, που αποτελεί και την κοινή όψη (face) των όγκων ελέγχου, που συνδέονται σε δυο γειτονικούς κόμβους (cell interface – τμήμα G_1G_2). Απαιτούνται κυρίως στις περιοχές της ροής, όπου εμφανίζονται ασυνέχειες στη λύση (Delis, Nikolos, 2012).

Στην παρούσα εργασία η ανακατασκευή αυστηρής μονοτονίας πραγματοποιείται με τη χρήση των ακόλουθων συναρτήσεων περιορισμού (τύπου ακμής):

- *Van Albada – Van Leer*,

$$L^{VA}(a, b) = \begin{cases} \frac{(a^2 + e)b + (b^2 + e)a}{a^2 + b^2 + 2e}, & ab > 0 \\ 0, & ab \leq 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

a, b : κλίσεις των συναρτήσεων και $0 < e \ll 1, e = 10^{-16}$, ώστε να αποφευχθεί η απροσδιοριστία που προκαλείται με την εξαφάνιση της κλίσης σε περιοχές με ομοιόμορφες ροές και να αποτραπεί η χρήση περιορισμού σε περιοχές με ομαλή ροή.

- *MinMod και SuperBee*,

$$L^\beta = b \max \left[0, \min \left(\beta \frac{a}{b}, 1 \right), \min \left(\frac{a}{b}, \beta \right) \right], \quad (2.26)$$

όπου για την παράμετρο β ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$. Αν $\beta=1$ δίνει τη συνάρτηση περιορισμού Minmod και αν $\beta=2$ δίνει τη SuperBee.

Μια τροποποιημένη συνάρτηση περιορισμού που εμπίπτει μεταξύ αυτών των δυο είναι η

- *MC (Monotonized Central)*,

$$L^{MC}(a, b) = b \max \left[0, \min \left(2, \min \left(\frac{1}{3} \frac{a}{b} + \frac{2}{3}, 2 \frac{a}{b} \right) \right) \right]. \quad (2.27)$$

- *Van Leer*,

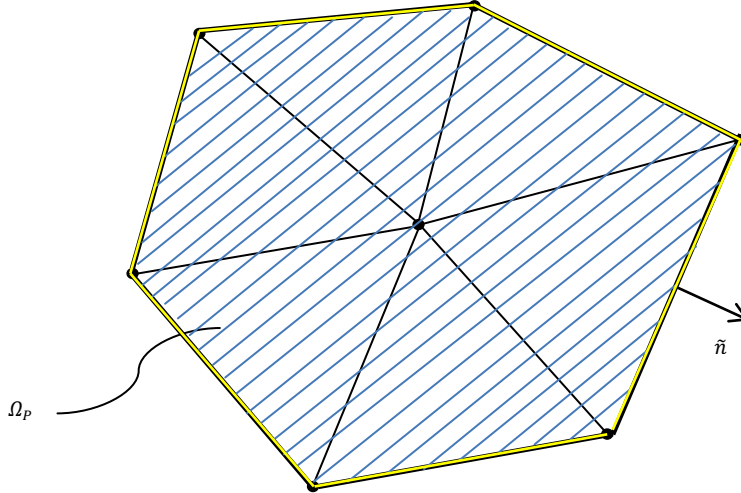
$$L^{VL}(a, b) = \begin{cases} \frac{2ab}{a + b + e}, & ab > 0 \\ 0, & ab \leq 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

2.3.4 Υπολογισμός των Κλίσεων με τη μέθοδο Green-Gauss

Το διάνυσμα κλίσης για κάθε κόμβο P του πλέγματος υπολογίζεται εφαρμόζοντας το θεώρημα Green – Gauss στην περιοχή Ω_P , όπου Ω_P είναι το υπολογιστικό πλέγμα, το οποίο αποτελείται από τα τρίγωνα που βρίσκονται γύρω από τον κόμβο P . Το διάνυσμα κλί-

σης υπολογίζεται σαν ολοκληρωτικός μέσος λαμβάνοντας υπόψη ότι η διακριτή λύση της μεταβλητής W μεταβάλλεται γραμμικά, δηλαδή ότι παρατηρείται σταθερή κλίση στο χωρίο Ω_P (γραμμική ανακατασκευή-Green Gauss) (Delis et al., 2011).

$$\iint_{\Omega_P} \nabla w_i dA = \oint_{\partial\Omega_P} w_i \vec{n} dl \quad (2.29)$$



Σχήμα 2.7: Ορισμός της περιοχής όπου υπολογίζεται το διάνυσμα κλίσης για το κεντροκομβικό σχήμα (centroid-dual).

2.4 Υπολογισμός μεταβλητών ανακατασκευής

Η τμηματική ανακατασκευή των μεταβλητών κατάστασης, που περιγράφεται στη συνέχεια, προτάθηκε από τους (Delis, Nikolos, 2012). Υποθέτοντας μια σταθερή τμηματική προσέγγιση του κάθε i -στού στοιχείου των συντηρητικών μεταβλητών W , $w_{i,p}$, στο γνωστό χρόνο t^n , μπορεί να σχηματιστεί μια τοπική γραμμική προσέγγιση για κάθε όψη (face) που σχετίζεται με την ακμή PQ ως

$$(w_{i,p})^L = w_{i,p} + \vec{r}_{PM'} \cdot \nabla w_i, \quad (2.30)$$

$\vec{r}_{PM'}$: διάνυσμα θέσης που ξεκινάει από το σημείο P και καταλήγει στο μέσον M' της όψης που σχετίζεται με την ακμή PQ ,

∇w_i : κλίση (gradient) της μεταβλητής.

Το σημείο M' δεν βρίσκεται γενικά πάνω στην ακμή PQ και δεν μπορούν να εφαρμοστούν οι παραπάνω συναρτήσεις περιορισμού, διότι αυτές αναφέρονται κατά μήκος ακμής. Οπότε εφαρμόζεται διαδικασία τμηματικής ανακατασκευής της λύσης στο όριο. Πρώτα ανακατασκευάζεται η λύση στο σημείο D , το οποίο είναι η τομή της ακμής PQ με την αντίστοιχη όψη, και στη συνέχεια, όπως θα αναλυθεί, ανακατασκευάζεται η τιμή στο μέσον M' της όψης. Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση περιορισμού Van Albada (Van Albada et al., 1982), υπολογίζονται οι μεταβλητές που έχουν να κάνουν με την ανακατασκευή στο σημείο τομής D της ακμής PQ με την κοινή όψη των γειτονικών όγκων ελέγχου, δηλαδή του $\partial T_p \cap \partial T_q$ και $\overline{PQ}$, ώστε να μπορεί να συγκριθεί με την τιμή της κλίσης αναφοράς $w_{i,Q} - w_{i,P}$. Αυτό από γεωμετρικής άποψης αντιστοιχεί σε μια γραμμική παρεμβολή μεταξύ των κόμβων P και Q . Έτσι υπολογίζονται δεξιά και αριστερά οι γραμμικές προεκτάσεις των τιμών στο σημείο D ως εξής:

$$(w_{i,P})_D^L = w_{i,P} + \vec{r}_{PD} \cdot \nabla w_{i,P}, \quad (2.31)$$

$$(w_{i,Q})_D^R = w_{i,Q} - \vec{r}_{DQ} \cdot \nabla w_{i,Q}, \quad (2.32)$$

όπου το σημείο D γενικά δεν συμπίπτει με το μέσο M της ακμής PQ . Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση περιορισμού και λαμβάνοντας υπόψη ότι το διάνυσμα θέσης θα εκφραστεί ως ποσοστό συναρτήσεως του ολικού τμήματος PQ πάνω στο οποίο βρίσκεται, τότε η γραμμική απεικόνιση των καταστάσεων γίνεται:

$$(w_{i,P})_D^L = w_{i,P} + \frac{\|r_{PD}\|}{\|r_{PQ}\|} L^{VA} \left((\nabla w_{i,P})^{upwind} \cdot \vec{r}_{PQ}, (\nabla w_i)^{cent} \cdot \vec{r}_{PQ} \right), \quad (2.33)$$

$$(w_{i,Q})_D^R = w_{i,Q} - \frac{\|r_{DQ}\|}{\|r_{PQ}\|} L^{VA} \left((\nabla w_{i,Q})^{upwind} \cdot \vec{r}_{PQ}, (\nabla w_i)^{cent} \cdot \vec{r}_{PQ} \right), \quad (2.34)$$

όπου

$\frac{\|r_{PD}\|}{\|r_{PQ}\|}$: η αναλογία των τμημάτων PD και PQ , δηλαδή τι ποσοστό καταλαμβάνει πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα PQ το τμήμα PD ,

$\frac{\|r_{DQ}\|}{\|r_{PQ}\|}$: η αναλογία των τμημάτων DQ και PQ , δηλαδή τι ποσοστό καταλαμβάνει πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα PQ το τμήμα DQ , (Delis et al. 2011)

$$(\nabla w_i)^{cent} \cdot \vec{r}_{PQ} = w_{i,Q} - w_{i,P}, \quad (2.35)$$

$$(\nabla w_{i,P})^{upwind} = 2(\nabla w_{i,P}) - (\nabla w_i)^{cent}, \quad (2.36)$$

$$(\nabla w_{i,Q})^{upwind} = 2(\nabla w_{i,Q}) - (\nabla w_i)^{cent}. \quad (2.37)$$

Σε ένα ιδανικό μη δομημένο πλέγμα, οι μεταβλητές εξάγονται στο σημείο D της ακμής PQ , που ταυτίζεται με το μέσο M' της αντίστοιχης όψης. Ως εκ τούτου, ένα σημείο παρεμβολής της επιφάνειας θα είναι δεύτερης τάξης ακρίβεια, γιατί η αριθμητική ολοκλήρωση της ροής με τον κανόνα του μέσου είναι ακριβής για γραμμικές συναρτήσεις κατά μήκος της κοινής όψης των γειτονικών όγκων ελέγχου, από όπου περνάει η ροή. Εάν, όμως, οι μεταβλητές εξαχθούν σε ένα διαφορετικό σημείο, όπως το σημείο M' , τότε το σημείο παρεμβολής αναμένεται να είναι πρώτης τάξης ακρίβειας, ειδικά για πλέγματα που είναι μεγάλη η απόσταση μεταξύ των D και M' (Σχήμα 2.8). Η ανωτέρω ασυνέπεια, ότι δηλαδή το σημείο M' , όπου υπολογίζονται οι αριθμητικές ροές, δε συμπίπτει με το σημείο D , όπου εξάγονται οι ανακατασκευασμένες τιμές αρχικά, απαιτεί κάποιας μορφής διόρθωση. Το σφάλμα, που εισάγεται με την προαναφερθείσα ανασυγκρότηση, είναι συνάρτηση της απόστασης μεταξύ του βέλτιστου σημείου M' (του μέσου της κοινής όψης) και του σημείου παρεκβολής D . Οι ανακατασκευασμένες τιμές $(w_{i,P})_D^L$ (2.32) και $(w_{i,Q})_D^R$ (2.33) στο σημείο D , που προκύπτουν με τη χρήση των συναρτήσεων περιορισμού, υπολογίζονται αρχικά και στη συνέχεια χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των τιμών ανακατασκευής στο σημείο M' (οι οποίες και χρησιμοποιούνται στους Riemann επιλύτες). Η διόρθωση που γίνεται έγκειται στο εξής:

$$(w_{i,P})_{M'}^L = (w_{i,P})_D^L + \vec{r}_{DM'} \cdot (\nabla w_{i,P}) \quad (2.38)$$

$$(w_{i,P})_{M'}^R = (w_{i,P})_D^R + \vec{r}_{DM'} \cdot (\nabla w_{i,Q}). \quad (2.39)$$

Αυτή η διόρθωση είναι ακριβής για ομαλή ροή, αλλά απαιτούνται επιπλέον εκτιμήσεις στην περίπτωση που εμφανίζονται ασυνέχειες στη ροή. Τέτοιες εκτιμήσεις θα προέλθουν εφαρμόζοντας συναρτήσεις περιορισμού κατά μήκος του τμήματος $\overline{DM'}$, όπου η εφαρμογή

αυτών των συναρτήσεων δεν είναι εύκολη, καθώς πρέπει να υπολογιστούν τιμές αναφοράς, οι οποίες να έχουν φυσικό νόημα. Αρχικά, θεωρείται ο περιορισμός του όρου (με την κατάλληλη χρήση της συνάρτησης περιορισμού) που προστίθεται για τον υπολογισμό του $(w_{i,P})_{M'}^L$, στις προηγούμενες σχέσεις. Προσδιορίζεται ένα σύνολο κόμβων γειτονικών του P (δηλαδή κόμβοι με κοινές ακμές με τον κόμβο P και είναι διαφορετικοί από τον κόμβο Q), $l_j, j = 1, 2, 3$, οι οποίοι επίσης βρίσκονται στη διεύθυνση $\overline{DM'}$ (Σχήμα 2.8). Ως κόμβος αναφοράς επιλέγεται εκείνος για τον οποίο η γραμμή $\overline{Pl_j}$ σχηματίζει τη μικρότερη γωνία με την διεύθυνση $\overline{DM'}$ (στο Σχήμα 2.8 ο κόμβος αναφοράς είναι ο l_2). Στη συνέχεια προβάλλεται ο κόμβος αναφοράς στη διεύθυνση $\overline{DM'}$, οπότε προκύπτει η $\overline{Pk_2}$. Η τιμή της μεταβλητής στο σημείο k_2 υπολογίζεται με προεκβολή από το σημείο l_2 , ως:

$$w_{i,k_2} = w_{i,l_2} + \vec{r}_{l_2 k_2} \cdot (\nabla w_{i,l_2}). \quad (2.40)$$

Η κεντρική κλίση αναφοράς ορίζεται ως:

$$(\nabla w_{i,P})^{cent} \cdot \vec{r}_{Pk_2} = w_{i,k_2} - w_{i,P}, \quad (2.41)$$

και η upwind κλίση $w_{i,P} - w_{i,k'_2}$ βρίσκεται υπολογίζοντας την τιμή στο αντιδιαμετρικό σημείο k'_2 με την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε για το σημείο k_2 . Με τη διαδικασία αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε στο σημείο M' την περιορισμένη ανακατασκευασμένη τιμή ως:

$$(w_{i,P})_{M'}^L = (w_{i,P})_D^L + \frac{\|r_{DM'}\|}{\|r_{Pk_2}\|} L^{VA} \left((\nabla w_{i,P})^{upwind} \cdot \vec{r}_{Pk_2}, (\nabla w_{i,P})^{cent} \cdot \vec{r}_{Pk_2} \right) \quad (2.42)$$

όπου τώρα θα ισχύει:

$$(\nabla w_{i,P})^{upwind} = 2(\nabla w_{i,P}) - (\nabla w_{i,P})^{cent} \quad (2.43)$$

Με παρόμοιο τρόπο πραγματοποιείται και η (περιορισμένη) ανακατασκευή στο σημείο M' από τη δεξιά πλευρά.

γίνεται ένωση των μέσων τους με τα βαρύκεντρα των εκάστοτε εσωτερικών τριγώνων που επικοινωνούν. Για κάθε κόμβο εισόδου/εξόδου ροής θεωρείται τοπικά ένα μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann, μεταξύ των μεταβλητών κατάστασης του οριακού κόμβου και μιας υποθετικής κατάστασης στο εξωτερικό του χωρίου. Ορίζονται δυο καταστάσεις μεταξύ του οριακού κόμβου ($R:right$) και της επ' άπειρον ροής ($L:left$), όπου η τελευταία θα συμβολίζεται με το δείκτη out . Οι τιμές των μεταβλητών της υποθετικής κατάστασης υπολογίζονται με βάση τα μεγέθη της ροής που προδιαγράφονται από τις οριακές συνθήκες, ενώ η πληροφορία που λείπει λαμβάνεται από τον αντίστοιχο κόμβο. Το διάνυσμα της ροής εξαρτάται από το είδος της ροής και από τις οριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου. Για να υπολογιστεί χρησιμοποιείται το ανάντη σχήμα των Steger-Warming (Steger, Warming, 1981) με ακρίβεια πρώτης τάξης, όπου στον κόμβο P εφαρμόζεται:

$$\vec{H}_{P,out}^{inv} = \underline{A}_P^+ \vec{W}_P + \underline{A}_P^- \vec{W}_{out}, \quad (2.45)$$

$\underline{A}$: Ιακωβιανό μητρώο για το διάνυσμα μη συνεκτικής ροής, που βασίζεται στις θετικές (+) ή στις αρνητικές ιδιοτιμές (-) και με βάση το πρόσημό τους λαμβάνεται υπόψη η κατεύθυνση με την οποία θα διαδοθεί η πληροφορία.

2.6 Χρονική διακριτοποίηση

Όταν χρησιμοποιείται 1ης τάξης χωρική ολοκλήρωση η χρονική ολοκλήρωση πραγματοποιείται με τη χρήση πρώτης τάξης σχήματος ανάντη διαφόρισης του Euler:

$$\left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_P = \frac{d\vec{W}_P^{n+1}}{\Delta t_P}. \quad (2.46)$$

Για 2ης τάξης χωρική ολοκλήρωση χρησιμοποιείται σχήμα Runge-Kutta 4 βημάτων 2ης τάξης ακρίβειας (Lallemand, 1988), (Λυγιδάκης, 2009). Για την επίτευξη της γρήγορης σύγκλισης (για μόνιμα πεδία ροής) χρησιμοποιείται το τοπικό χρονικό βήμα (ψευδοχρονικό βήμα), το οποίο βελτιστοποιεί τοπικά την εξέλιξη της λύσης. Το τοπικό χρονικό βήμα υπολογίζεται για κάθε κόμβο P του πλέγματος ως:

$$\Delta t(P) = CFL \frac{\alpha_{min,P}}{|\vec{V}_P| + C_P}, \quad (2.47)$$

$\alpha_{min,P}$: το μισό της ακμής με το ελάχιστο μήκος από όλες στις οποίες ανήκει ο κόμβος P , $|\vec{V}_P|$: η κύρια συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού, C_P : η ταχύτητα του ήχου στον εν λόγω κόμβο, CFL : ο αριθμός Courant Friedrichs Levy, που πολλαπλασιάζει το τοπικό χρονικό βήμα και καθορίζει τη μέγιστη τιμή του ώστε να είναι ευσταθής η επίλυση. Το ολικό χρονικό βήμα υπολογίζεται ως το ελάχιστο από τα τοπικά χρονικά βήματα.

2.7 Μέθοδος Runge-Kutta 2ης τάξης

Στο ρητό σχήμα αριθμητικής επίλυσης, για την ανανέωση των μεταβλητών χρησιμοποιείται είτε η απλή ολοκλήρωση Euler πρώτης τάξης στο χρόνο είτε η πολυβηματική μέθοδος Runge-Kutta k_{max} βημάτων, η οποία θα συμβολίζεται με $(RK(k_{max}))$. Ο βηματικός αλγόριθμος της Runge-Kutta έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\vec{W}_P^{n+1,0} = \vec{W}_P^n, \quad (2.48)$$

$$\vec{W}_P^{n+1,k} = \vec{W}_P^n - \alpha_k \frac{\Delta t_P}{V_P} \vec{R}(\vec{W}_P^{n+1,k-1}), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (2.49)$$

$$\vec{W}_P^{n+1} = \vec{W}_P^{n+1,k_{max}}, \quad (2.50)$$

$\vec{R}(\vec{W}_P^{n+1,k-1})$: υπολογίζεται από τη σχέση

$$\vec{R}_P^m = \vec{R}(\vec{W}_P^m) = \sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m + \vec{S}_P V_P, \quad (2.51)$$

V_P : ο όγκος για τον όγκο ελέγχου του κόμβου P , δείκτης m : το χρονικό επίπεδο που είναι υπολογισμένη η ποσότητα-βάση. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ακόλουθη σχέση

$$V_P \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_P = -\vec{R}_P^m \quad (2.52)$$

περιγράφει τη μορφή των ρητών μεθόδων επίλυσης. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Runge-Kutta τεσσάρων βημάτων ($RK(4)$) και οι τιμές των συντελεστών α_k για $k = 4$ είναι οι εξής:

$\alpha_1 = 0.11, \alpha_2 = 0.26, \alpha_3 = 0.5, \alpha_4 = 1$. (Lallemand, 1988), (Λυγιδάκης, 2009)

3.1 Isentropic vortex case

Το συγκεκριμένο πρόβλημα αναφοράς χρησιμοποιείται πολύ συχνά στη βιβλιογραφία για τη σύγκριση μεθόδων επίλυσης ροών. Το πεδίο ροής είναι ομαλό χωρίς παρουσία ασυνεχειών και επιπλέον είναι γνωστή η αναλυτική του λύση (οπότε είναι δυνατός ο υπολογισμός του σφάλματος της αριθμητικής λύσης). Η μέση ροή έχει $\rho_\infty = 1$, $p_\infty = 1$ και $[u_\infty, v_\infty]^T = [1, 1]^T$. Το πεδίο ροής καταλαμβάνει το χώρο $\Omega = [-10, 10] \times [-10, 10]$ και εφαρμόζονται σε όλες τις πλευρές περιοδικές οριακές συνθήκες. Σε αυτή την επ' άπειρο ροή προστίθεται ένας ισεντροπικός στρόβιλος (Li, et al. 2011), (Park, et al., 2010), ο οποίος παρασύρεται από τη ροή και κινείται διαγώνια στο τετραγωνικό χωρίο της ροής. Η αναλυτική λύση σε κάθε χρονική στιγμή ισούται με την αρχική λύση, μετατοπισμένη κατά $(u_\infty t, v_\infty t)$, οπότε σε κάθε χρονική στιγμή είναι δυνατός ο υπολογισμός του σφάλματος της αριθμητικής λύσης. Ο υπολογισμός του σφάλματος γίνεται σε χρόνο 2s. Χρησιμοποιήθηκαν και οι 4 τύποι μη δομημένων πλεγμάτων (Type I έως Type IV) (Σχήμα 2.4), (Πίνακας 2.1), με διαφορετικές πυκνότητες (με συνεπή πύκνωση των πλεγμάτων) για να υπολογιστεί ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου (για το 2ης τάξης σχήμα διακριτοποίησης). Για κάθε τύπο πλέγματος κατασκευάστηκαν 5 διαφορετικά πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας. Ουσιαστικά, με το συγκεκριμένο πρόβλημα εξετάζεται (εκτός από το ρυθμό σύγκλισης) και το σφάλμα που εισάγεται από τη χρησιμοποίηση των συναρτήσεων περιορισμού.

Τα αποτελέσματα περιλαμβάνουν τους ρυθμούς σύγκλισης για τους 4 διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων, για τρεις από τις συντηρητικές μεταβλητές ρ , ρu , ρe (λόγω διαγώνιας συμμετρίας δεν περιλαμβάνεται η ρv), και για 3 διαφορετικές νόρμες του σφάλματος (L_1, L_2, L_∞). Χρησιμοποιούνται 2 διαφορετικοί προσεγγιστικοί επιλύτες του προβλήματος Riemann (του Roe και ο HLLC), ενώ το πρόβλημα λύνεται αρχικά χωρίς συνάρτηση περιορισμού και στη συνέχεια με τη συνάρτηση περιορισμού των Van Albada - Van Leer, προσαρμοσμένη στη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Για τους 4 τύπους μη δομημένων πλεγμάτων χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις ανακατασκευής, οι οποίες είναι οι εξής:

- 1) *Unlimited*: δεύτερης τάξης σχήμα χωρίς συνάρτηση περιορισμού με ανακατασκευή στο σημείο M' .
- 2) W_1 : δεύτερης τάξης σχήμα χωρίς συνάρτηση περιορισμού και ανακατασκευή στο σημείο D .
- 3) W_{1L} : δεύτερης τάξης σχήμα με συνάρτηση περιορισμού και ανακατασκευή στο σημείο D .
- 4) W_{2L} : δεύτερης τάξης σχήμα με συνάρτηση περιορισμού και ανακατασκευή στο σημείο M' .

Στα σχήματα 3.1 έως 3.6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ρυθμών σύγκλισης για την περίπτωση του *Unlimited* σχήματος για τους 2 προσεγγιστικούς επιλύτες Riemann και για τις 3 διαφορετικές νόρμες σφάλματος (L_1, L_2, L_∞). Κάθε σχήμα περιλαμβάνει τη συμπεριφορά για τους 4 διαφορετικούς τύπους πλέγματος. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι είναι ανεξάρτητα του προσεγγιστικού επιλύτη Riemann και επίσης επιτυγχάνεται η ονομαστική τάξη του σχήματος, όπως φαίνεται από τη σύγκριση με την ευθεία κλίσης 2 (και μάλιστα μεγαλύτερη από την ονομαστική, κάτι που αποδίδεται στη φύση του προβλήματος που επιλύεται). Τα αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα του τύπου του πλέγματος που χρησιμοποιείται.

Στα σχήματα 3.7 έως 3.12 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ρυθμών σύγκλισης για την περίπτωση του W_1 σχήματος (δεύτερης τάξης σχήμα χωρίς συνάρτηση περιορισμού και ανακατασκευή στο σημείο D) για τους 2 προσεγγιστικούς επιλύτες Riemann και για τις 3 διαφορετικές νόρμες σφάλματος (L_1, L_2, L_∞). Κάθε σχήμα περιλαμβάνει τη συμπεριφορά για τους 4 διαφορετικούς τύπους πλέγματος.

Στα σχήματα 3.13 έως 3.18 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ρυθμών σύγκλισης για την περίπτωση του W_{1L} σχήματος (δεύτερης τάξης σχήμα με συνάρτηση περιορισμού και

ανακατασκευή στο σημείο D) για τους 2 προσεγγιστικούς επιλύτες Riemann και για τις 3 διαφορετικές νόρμες σφάλματος (L_1, L_2, L_∞). Κάθε σχήμα περιλαμβάνει τη συμπεριφορά για τους 4 διαφορετικούς τύπους πλέγματος.

Στα σχήματα 3.19 έως 3.24 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ρυθμών σύγκλισης για την περίπτωση του W_{2L} σχήματος (δεύτερης τάξης σχήμα με συνάρτηση περιορισμού και ανακατασκευή στο σημείο M') για τους 2 προσεγγιστικούς επιλύτες Riemann και για τις 3 διαφορετικές νόρμες σφάλματος (L_1, L_2, L_∞). Κάθε σχήμα περιλαμβάνει τη συμπεριφορά για τους 4 διαφορετικούς τύπους πλέγματος.

Στα σχήματα 3.25 έως 3.27 παρουσιάζονται συγκρίσεις των ρυθμών σύγκλισης για τα 4 διαφορετικά σχήματα, με τη χρήση του HLLC επιλύτη Riemann και για τις 3 διαφορετικές νόρμες σφάλματος (L_1, L_2, L_∞). Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα τροποποιημένο Type IV Distorted (το οποίο αποκαλείται Distorted A) και το οποίο δημιουργήθηκε με μεγαλύτερο βαθμό διαταραχής και ανομοιομορφίας σε σχέση με το τυπικό Type IV Distorted, ώστε να γίνουν ιδιαίτερα εμφανείς οι επιδράσεις του τύπου του σχήματος που χρησιμοποιείται (οι οποίες εξαρτώνται από την ανομοιομορφία του πλέγματος και από την απόσταση μεταξύ των σημείων D και M'). Από τα παραπάνω σχήματα είναι φανερό η επίδραση της εισαγωγής συνάρτησης περιορισμού στην αύξηση του σφάλματος σε σχέση με την μη περιορισμένη περίπτωση ανακατασκευής. Παράλληλα όμως είναι σημαντικό να σημειωθεί η αύξηση της κλίσης (και η συνακόλουθη μείωση του σφάλματος) με την εισαγωγή της προτεινόμενης μεθοδολογίας W_{2L} σε σχέση με την ανακατασκευή στο σημείο D με το σχήμα W_{1L} .

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τον τύπο πλέγματος Type IV Distorted παρουσιάζονται στα σχήματα 3.28 έως 3.30. Είναι παρόμοια με τα προηγούμενα χωρίς όμως τόσο έντονη διαφοροποίηση, λόγω της μικρότερης ανομοιομορφίας του πλέγματος και της γενικά μικρότερης απόστασης μεταξύ των σημείων D και M' .

Στα σχήματα 3.31 έως 3.33 παρουσιάζονται συγκρίσεις των ρυθμών σύγκλισης για τα 4 διαφορετικά σχήματα, με τη χρήση του HLLC επιλύτη Riemann και για τις 3 διαφορετικές νόρμες σφάλματος (L_1, L_2, L_∞). Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα τροποποιημένο Type I Equilateral. Στο συγκεκριμένο πλέγμα, λόγω της χρήσης ισόπλευρων τριγώνων, τα σημεία D και M' ταυτίζονται. Για το λόγο αυτό ταυτίζονται τα αποτελέσματα μεταξύ του *Unlimited* και του W_1 σχήματος, καθώς και μεταξύ του W_{1L} και του W_{2L} σχήματος.

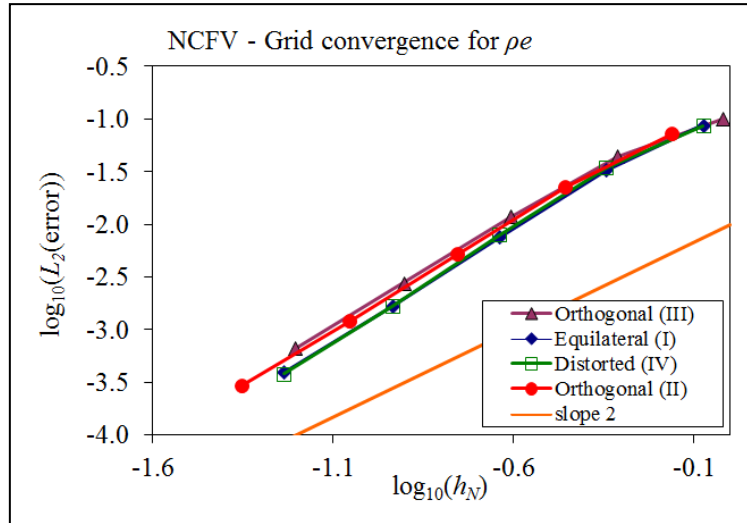
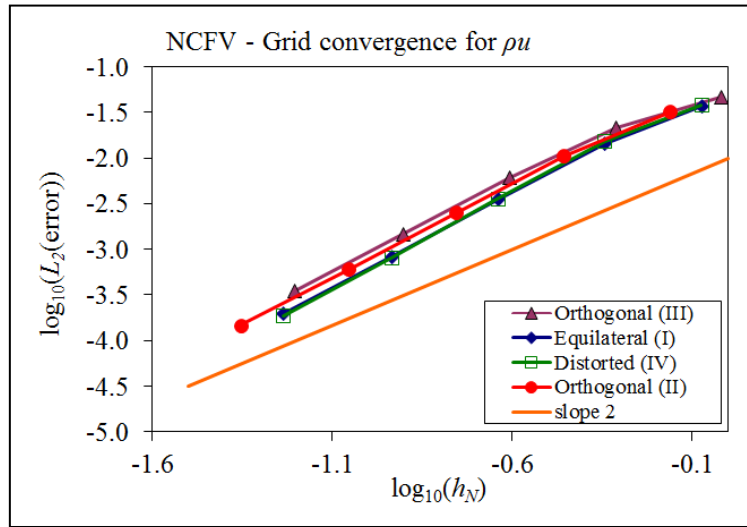
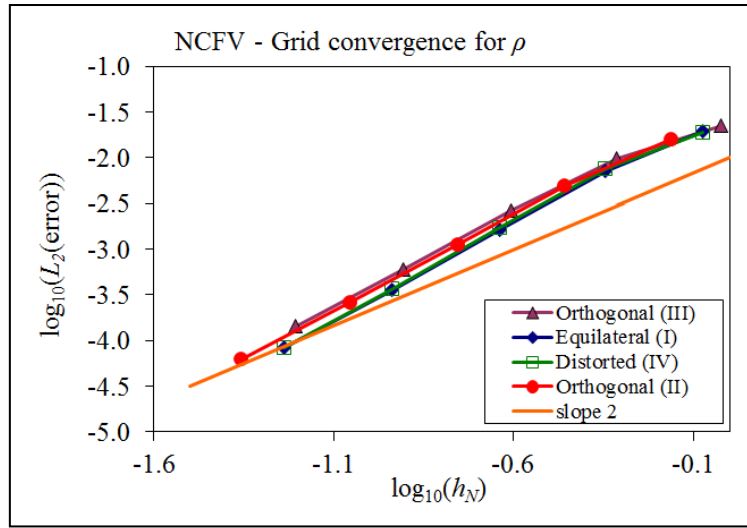
Στα σχήματα 3.34 έως 3.36 παρουσιάζονται συγκρίσεις των ρυθμών σύγκλισης για τα 4 διαφορετικά σχήματα, με τη χρήση του HLLC επιλύτη Riemann και για τις 3 διαφορετικές νόρμες σφάλματος (L_1, L_2, L_∞). Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα τροποποιημένο Type II Orthogonal. Στο συγκεκριμένο πλέγμα, λόγω της χρήσης συμμετρικών τριγώνων, τα σημεία D και M' ταυτίζονται. Για το λόγο αυτό ταυτίζονται τα αποτελέσματα μεταξύ του *Unlimited* και του W_1 σχήματος, καθώς και μεταξύ του W_{1L} και του W_{2L} σχήματος, όπως και προηγούμενως.

Στα σχήματα 3.37 έως 3.39 παρουσιάζονται συγκρίσεις των ρυθμών σύγκλισης για τα 4 διαφορετικά σχήματα, με τη χρήση του HLLC επιλύτη Riemann και για τις 3 διαφορετικές νόρμες σφάλματος (L_1, L_2, L_∞). Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα τροποποιημένο Type III Orthogonal. Στο συγκεκριμένο πλέγμα, όπως και προηγούμενως, λόγω της χρήσης συμμετρικών τριγώνων, τα σημεία D και M' ταυτίζονται. Για το λόγο αυτό ταυτίζονται τα αποτελέσματα μεταξύ του *Unlimited* και του W_1 σχήματος, καθώς και μεταξύ του W_{1L} και του W_{2L} σχήματος.

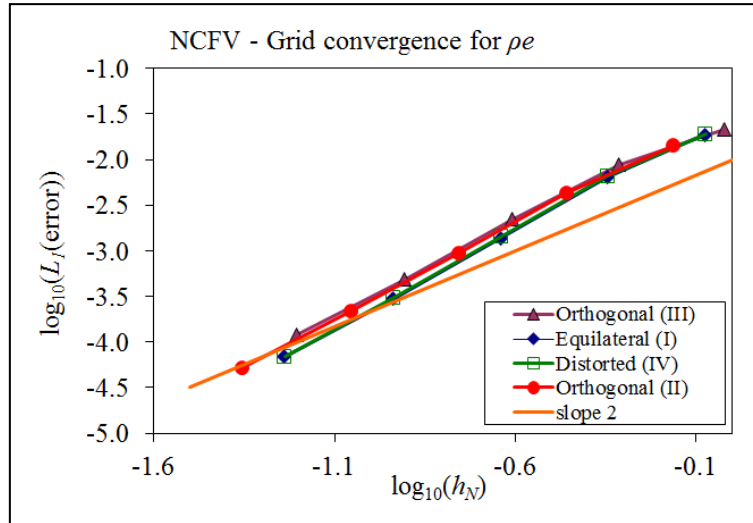
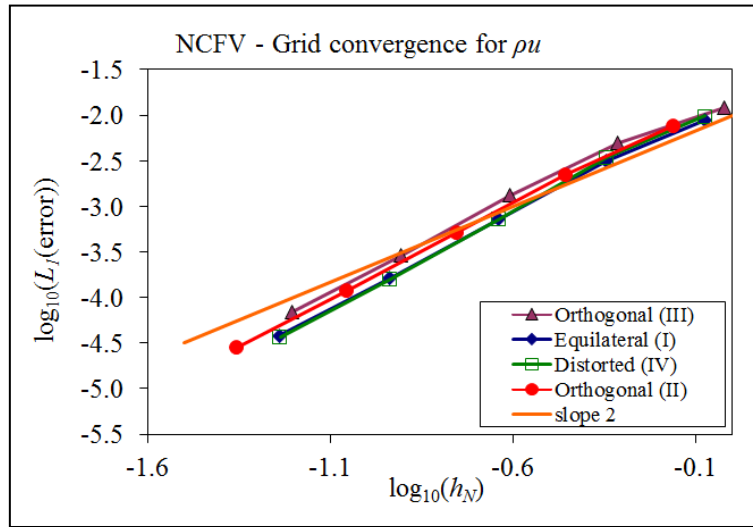
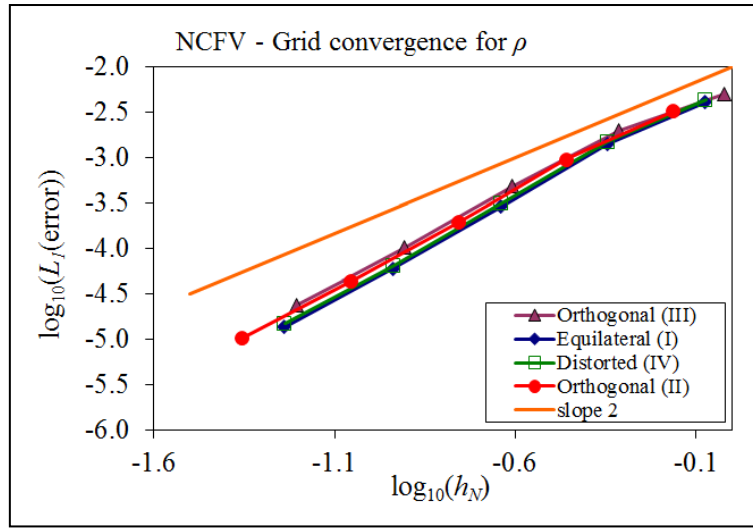
Στα σχήματα 3.40 έως 3.54 παρουσιάζονται συγκρίσεις των ρυθμών σύγκλισης για τα 4 διαφορετικά σχήματα, με τη χρήση του κατά Roe επιλύτη Riemann και για τις 3 διαφορετικές νόρμες σφάλματος (L_1, L_2, L_∞) και για τα 5 διαφορετικά πλέγματα που εξετάστηκαν και πριν με τον επιλύτη HLLC. Τα συμπεράσματα είναι απολύτως συγκρίσιμα με αυτά που εξήχθησαν και προηγούμενως, για τα αντίστοιχα πλέγματα.

Στα σχήματα 3.55 έως 3.58 παρουσιάζονται συγκριτικά αποτελέσματα κεντροκομβικής (NCa) και κεντροκυβελικής (CC) προσέγγισης 2ης τάξης σχήματος (Delis, Nikolos, 2013), για το *Unlimited* σχήμα, για τις νόρμες σφαλμάτων L_1 και L_2 , στους 4 διαφορετικούς τύπους πλέγματος για τον κατά Roe προσεγγιστικό επιλύτη Riemann. Στα σχήματα 3.59

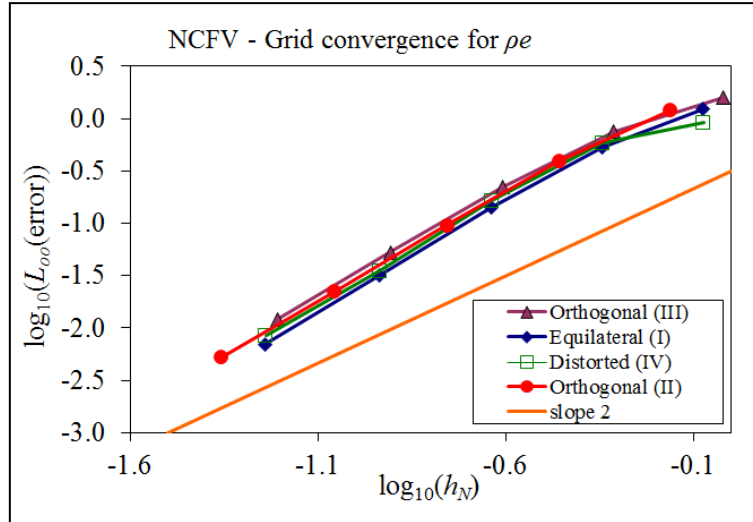
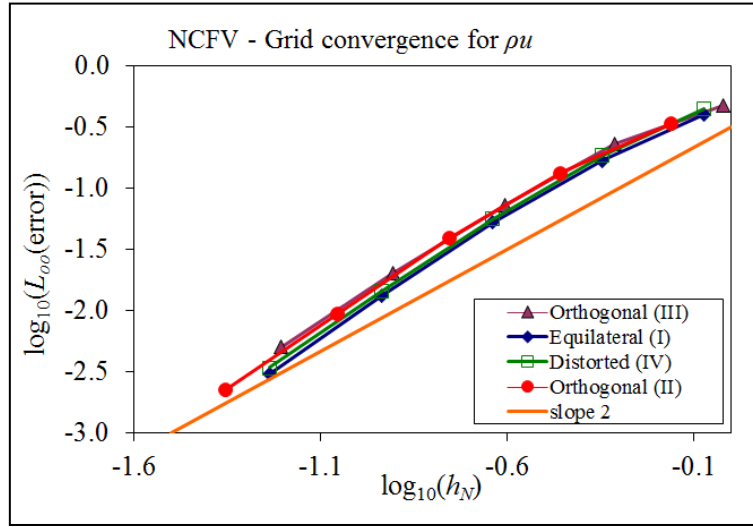
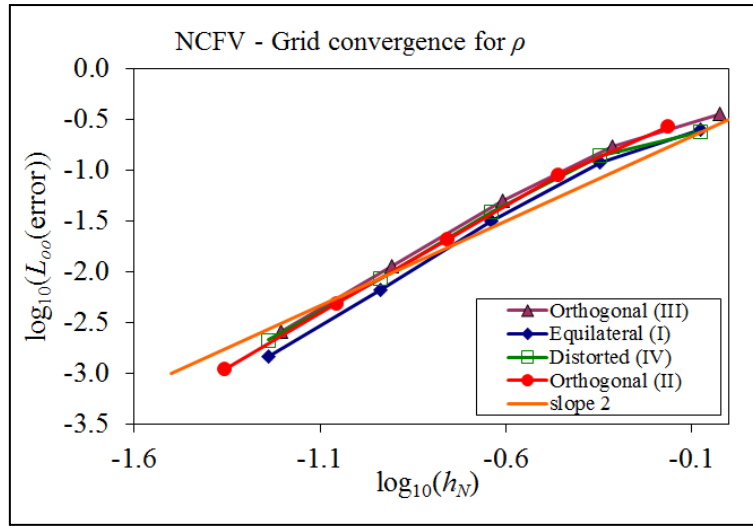
έως 3.62 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα συγκριτικά αποτελέσματα κεντροκομβικής (NCa) και κεντροκυψελικής (CC) προσέγγισης 2ης τάξης σχήματος, για το W_{2L} σχήμα, για τις νόρμες σφαλμάτων L_1 και L_2 , στους 4 διαφορετικούς τύπους πλέγματος για τον κατά Roe προσεγγιστικό επιλύτη Riemann. Από τα παραπάνω σχήματα είναι φανερή η ελαφρά υπεροχή του κεντροκυψελικού σχήματος σε σχέση με το centroid-dual κεντροκομβικό της παρούσας εργασίας. Η υπεροχή αυτή αποδίδεται στο πιο πυκνό stencil, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της κλίσης των μεγεθών της ροής για την περίπτωση του κεντροκυψελικού σχήματος (Delis, Nikolos, 2013), σε σχέση με το αντίστοιχο stencil για την περίπτωση του κεντροκομβικού σχήματος. Το γεγονός ότι παρατηρείται και για την Unlimited περίπτωση και για τα πλέγματα που εμφανίζουν ταύτιση μεταξύ των σημείων D και M' ενισχύει την παραπάνω παρατήρηση. Επιπλέον, η διαφορά αυτή μειώνεται για το Distorted Type IV πλέγμα, το οποίο αποδίδεται στο γεγονός ότι για τον τύπο αυτό η κεντροκομβική θεώρηση οδηγεί σε πιο ομαλούς όγκους ελέγχου και πιο ομοιόμορφους σε σχέση με τους αντίστοιχους για την κεντροκυψελική θεώρηση.



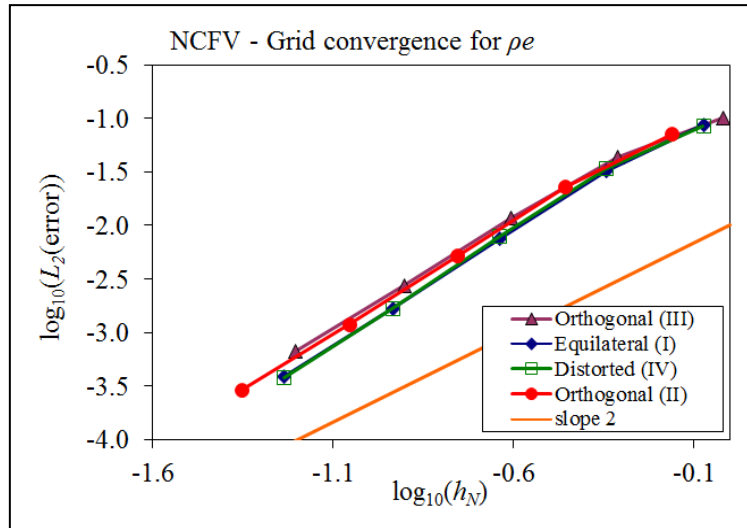
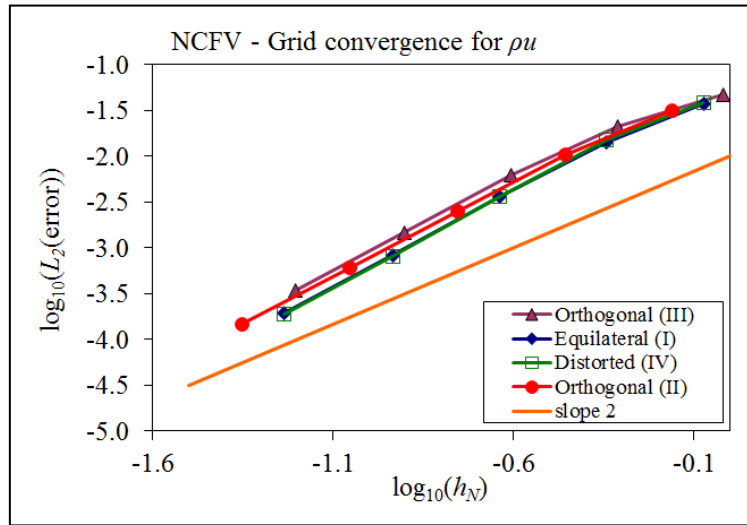
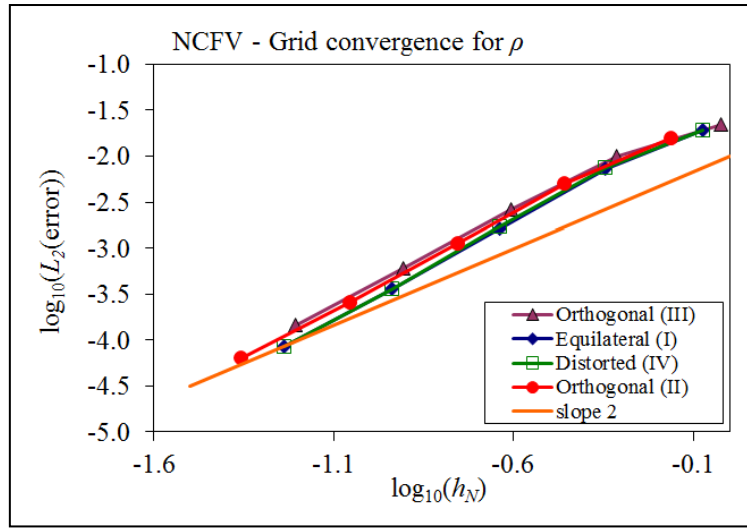
Σχήμα 3.1: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (Unlimited) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



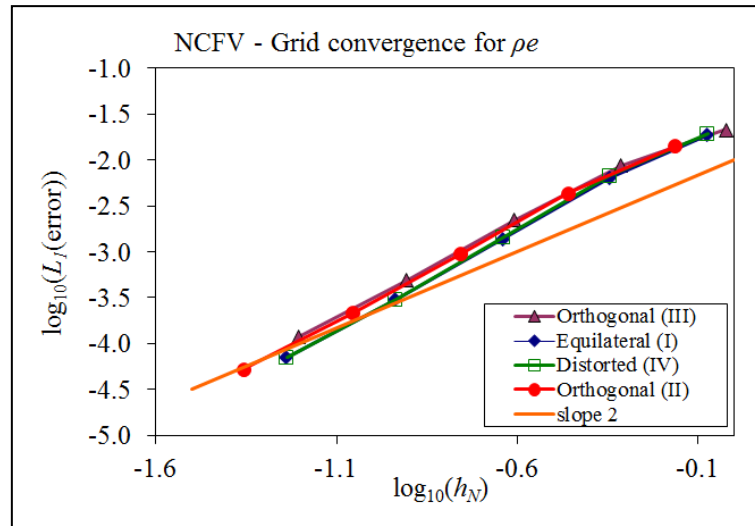
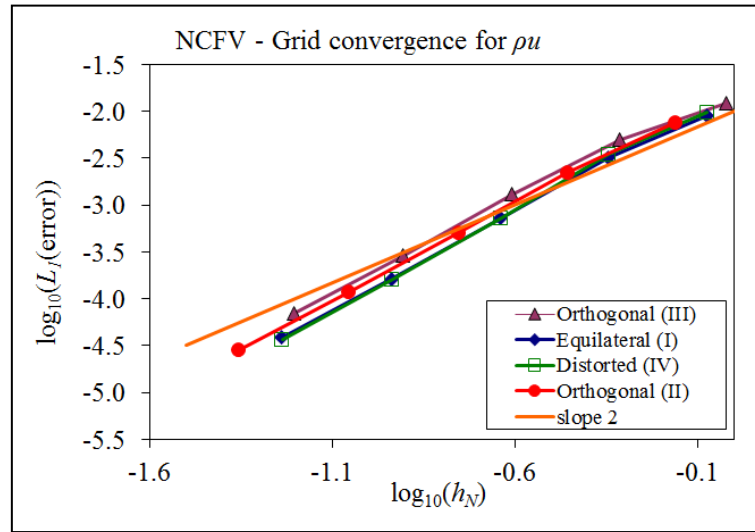
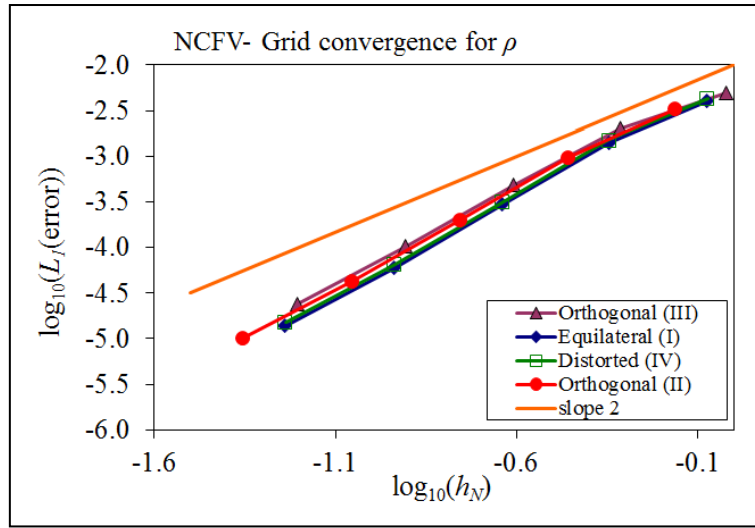
Σχήμα 3.2: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για το σχήμα 2ης τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (Unlimited) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



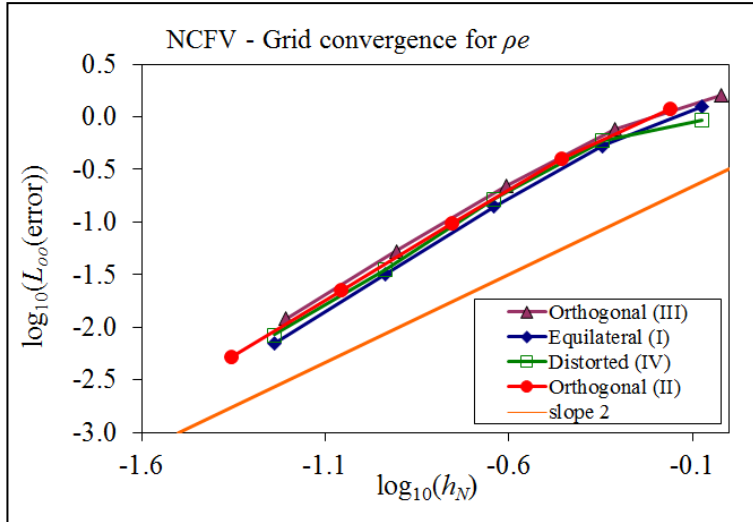
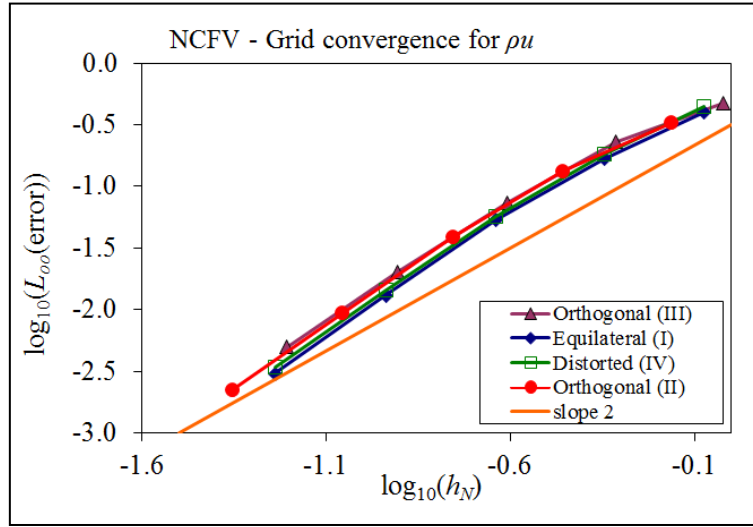
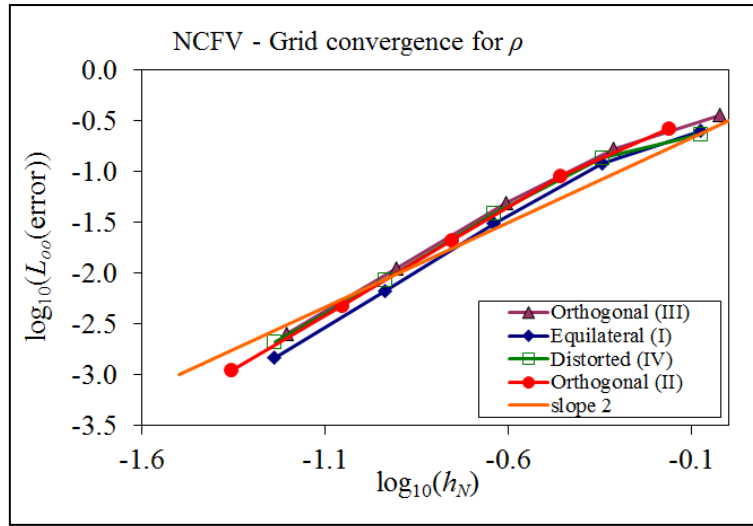
Σχήμα 3.3: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για το σχήμα 2^{th} τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (Unlimited) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



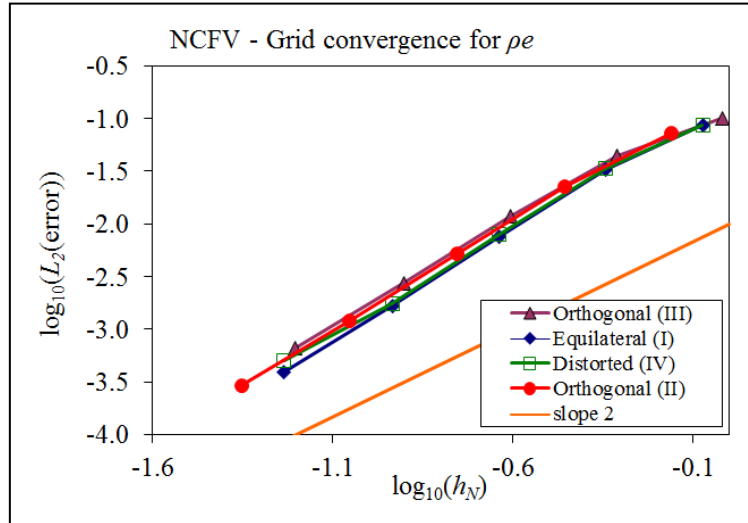
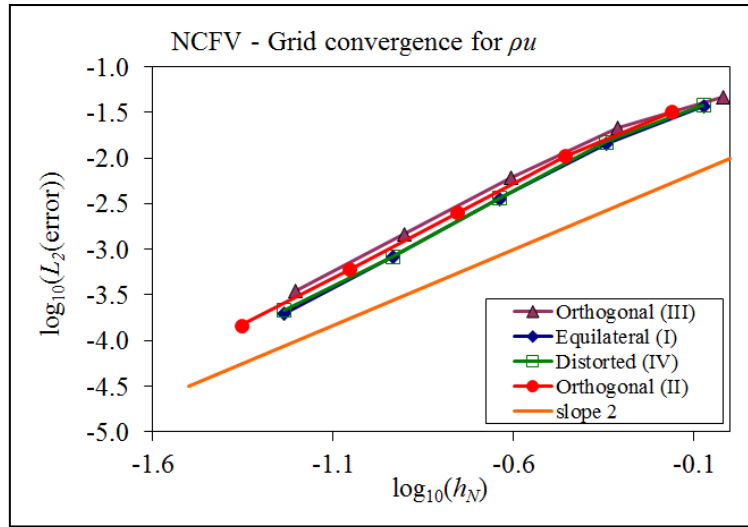
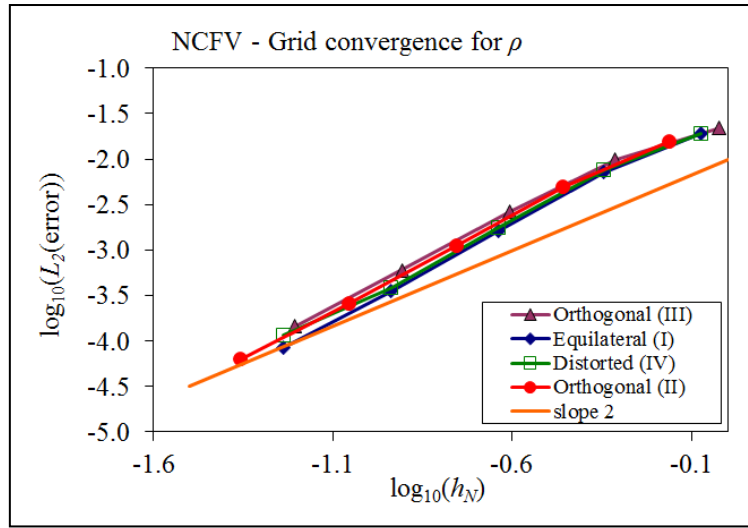
Σχήμα 3.4: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (Unlimited) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



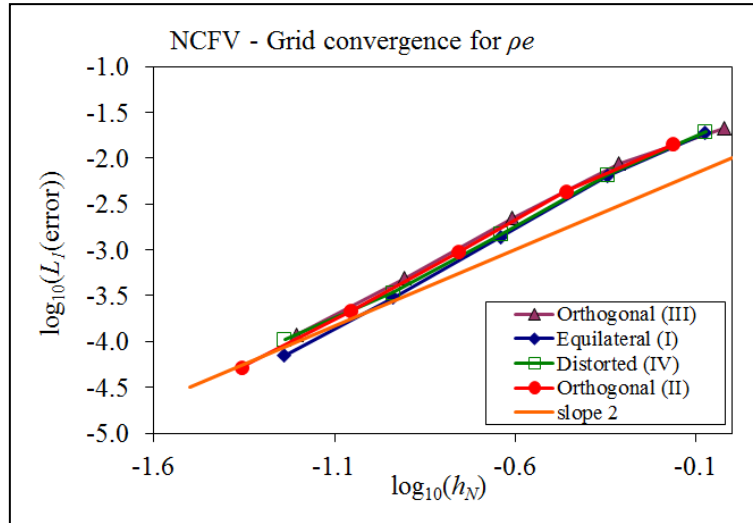
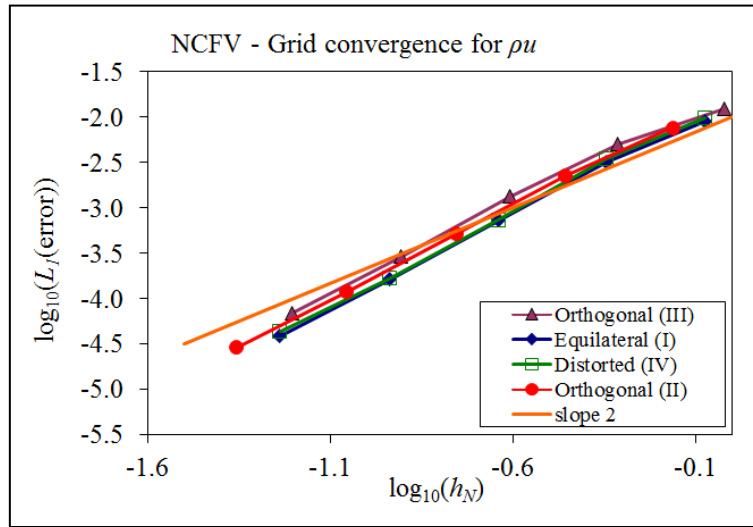
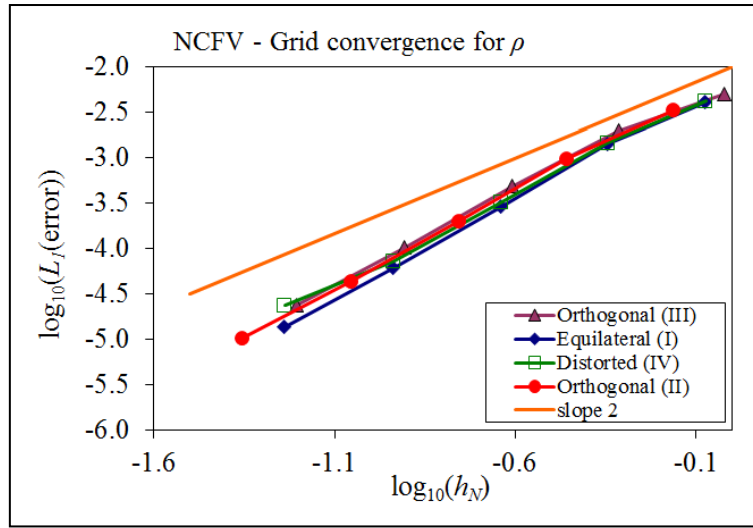
Σχήμα 3.5: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (Unlimited) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



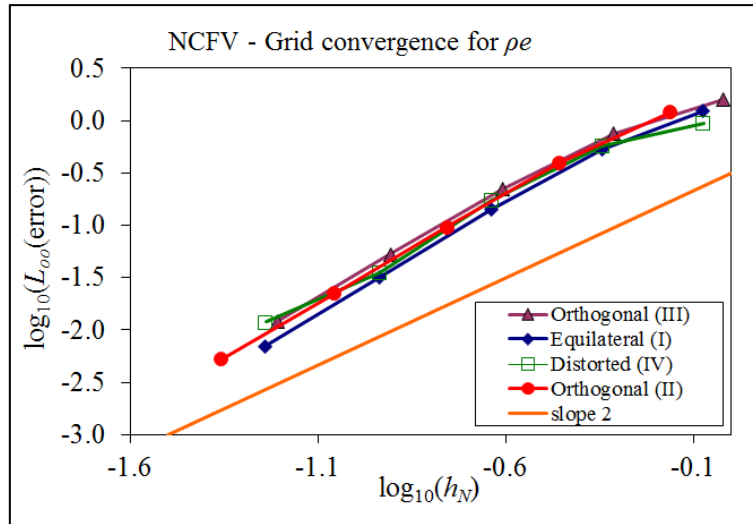
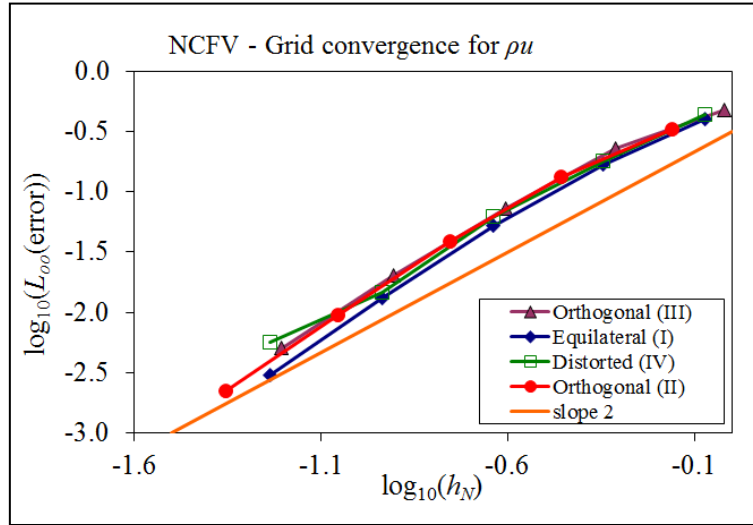
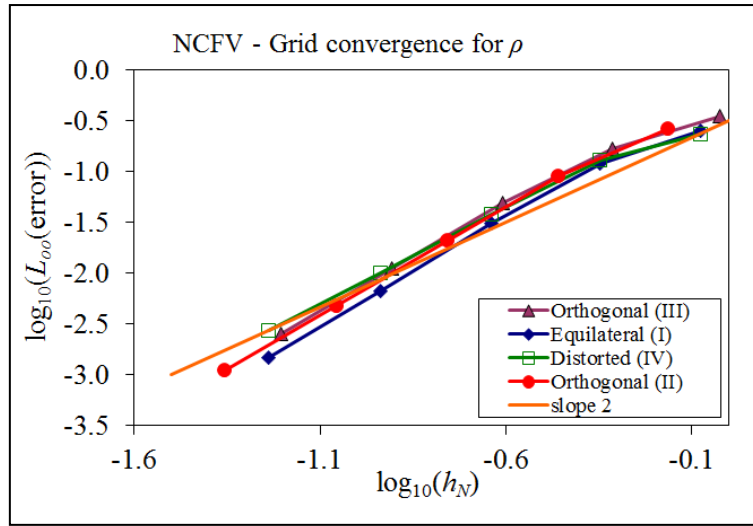
Σχήμα 3.6: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για το σχήμα 2^{th} τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (Unlimited) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



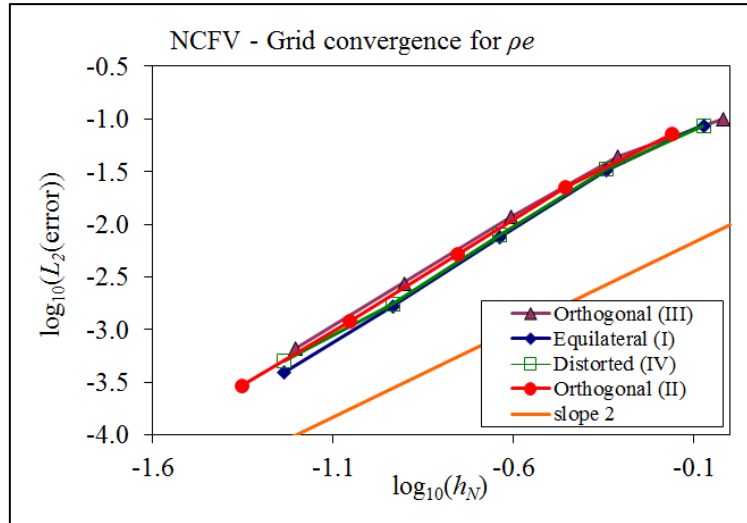
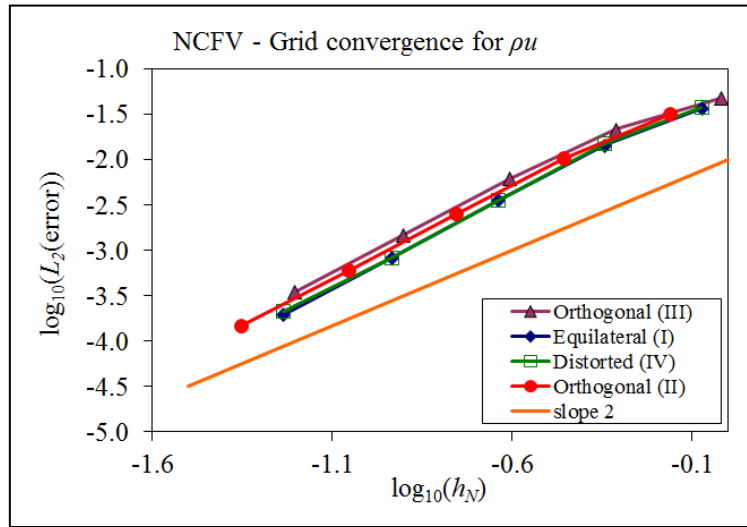
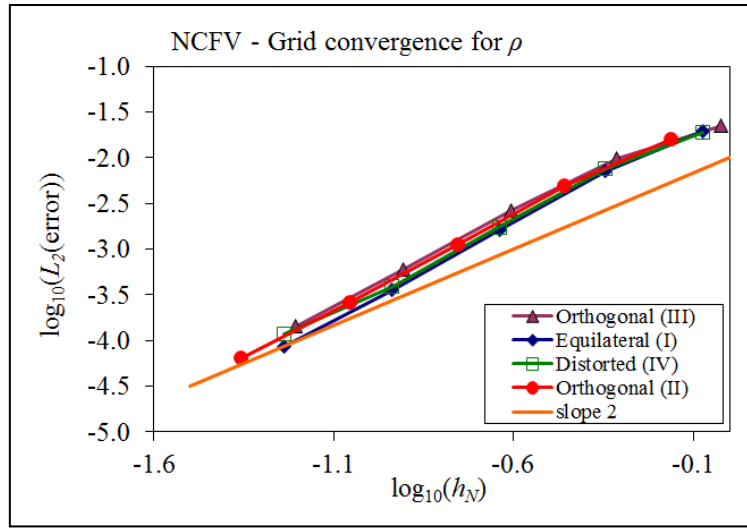
Σχήμα 3.7: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (W_1) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



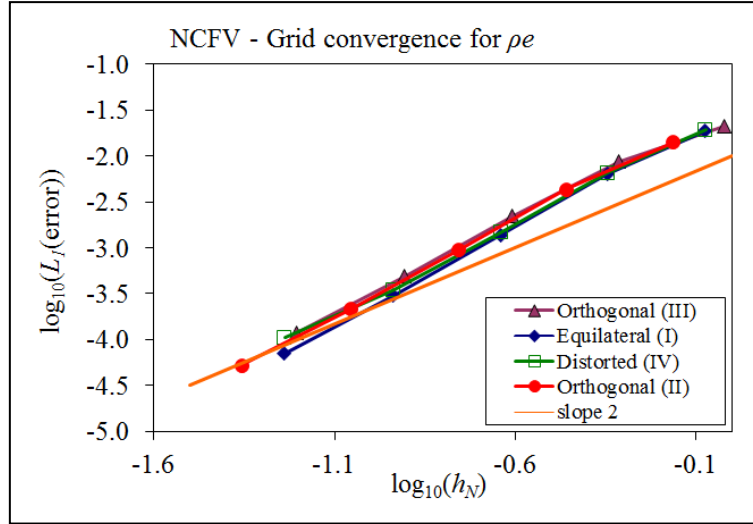
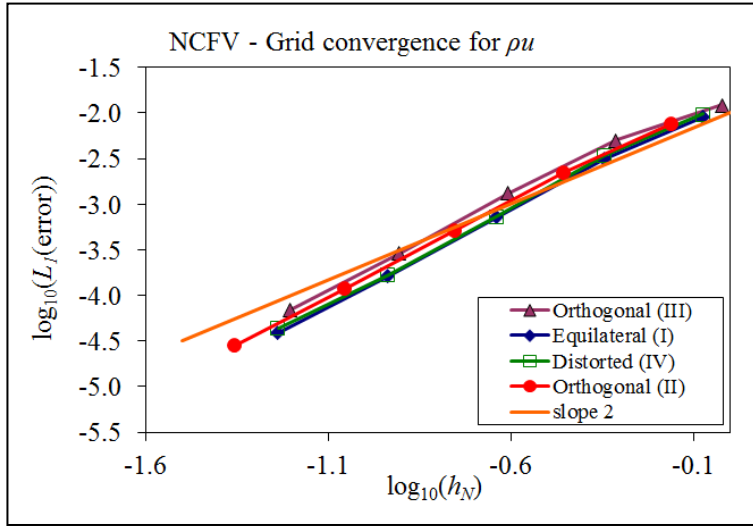
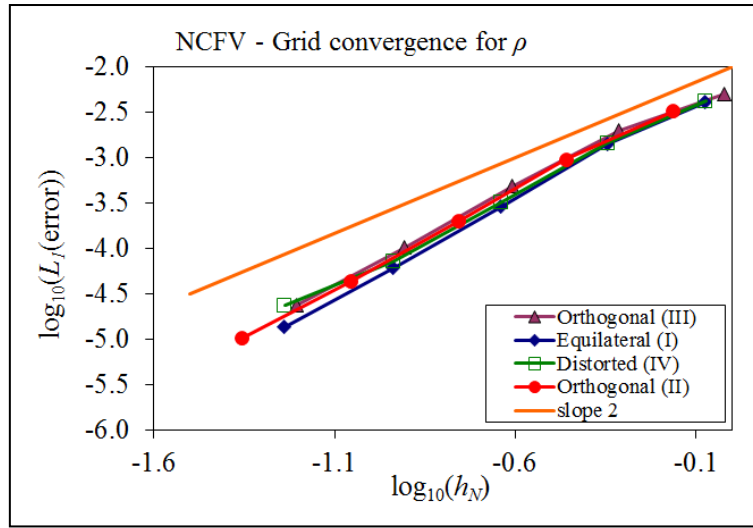
Σχήμα 3.8: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (W_1) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



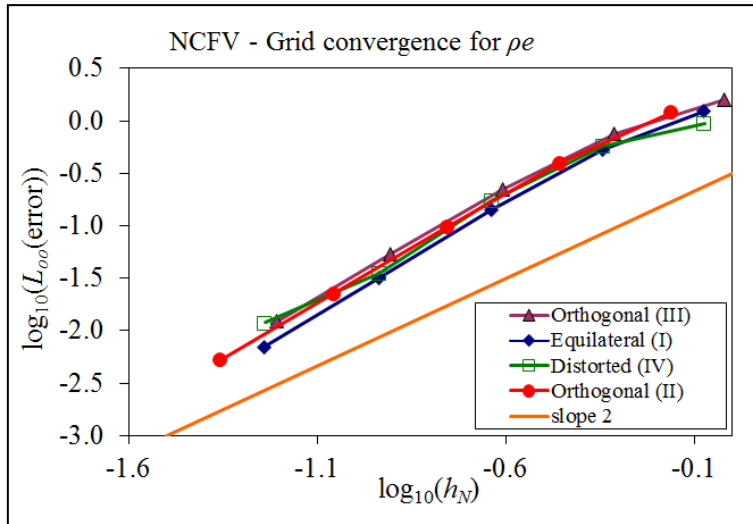
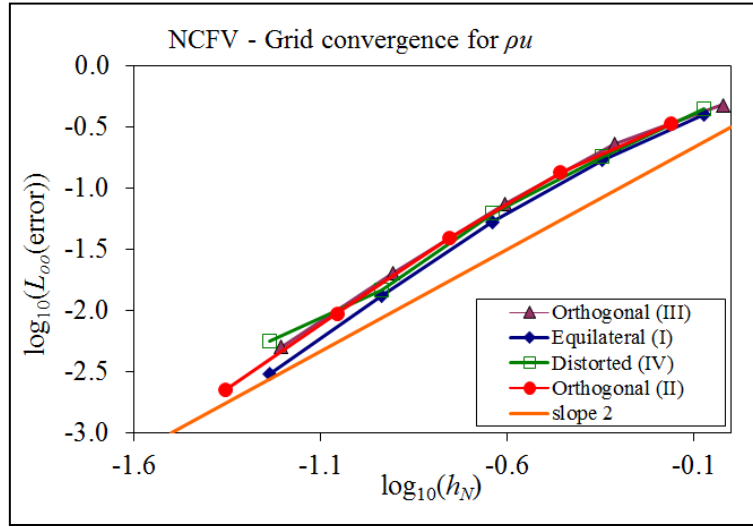
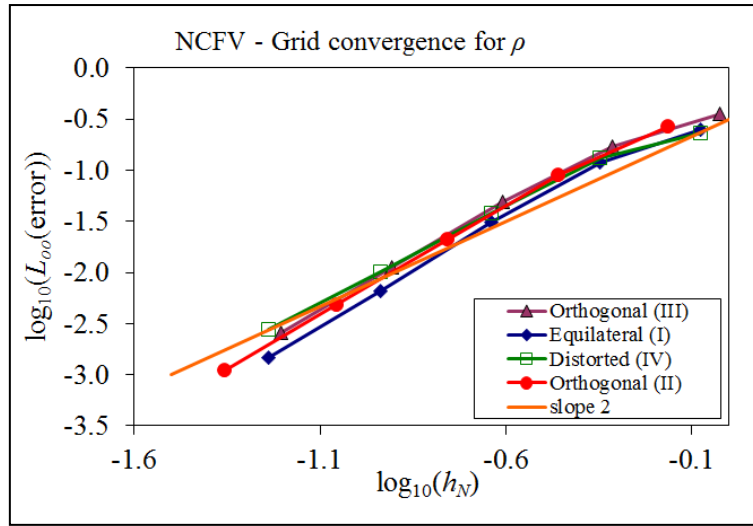
Σχήμα 3.9: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για το σχήμα 2^{th} τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (W_1) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



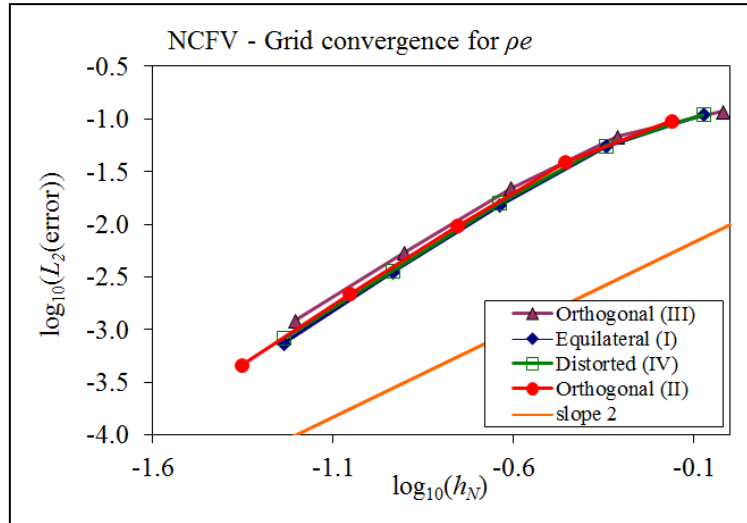
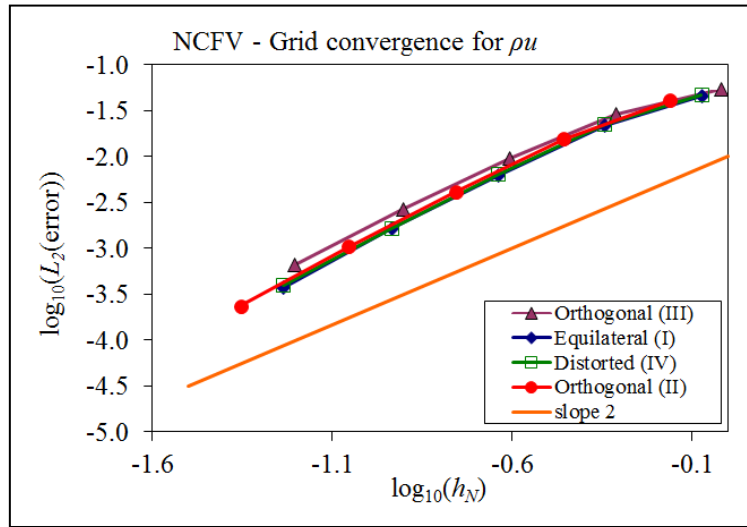
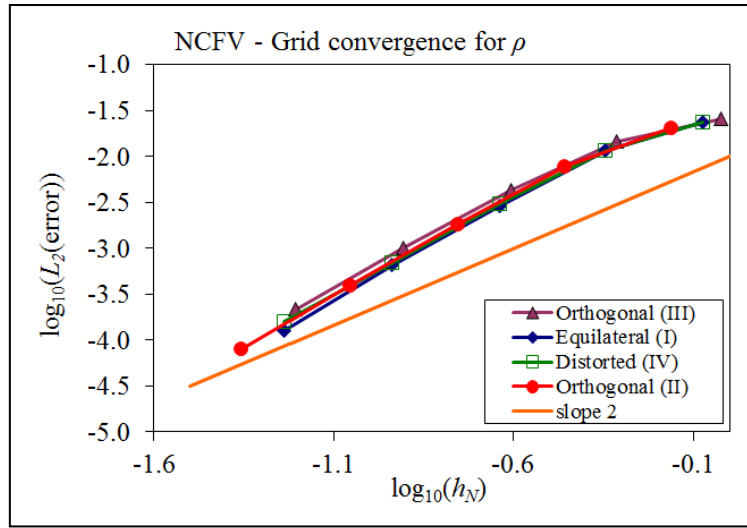
Σχήμα 3.10: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (W_1) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



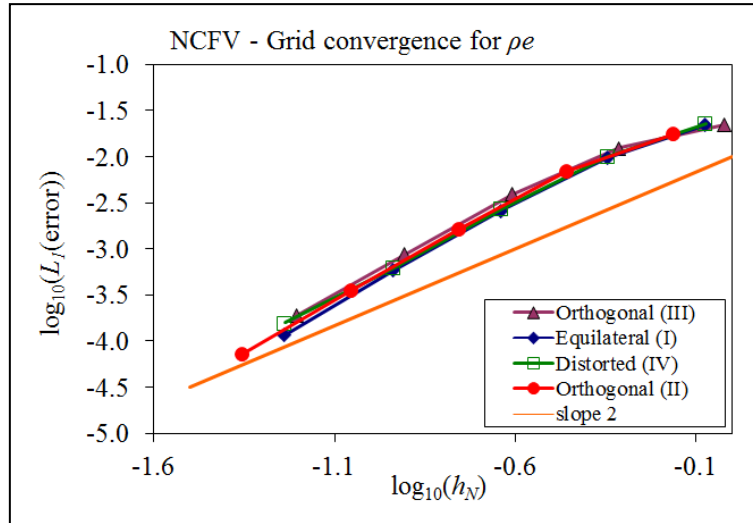
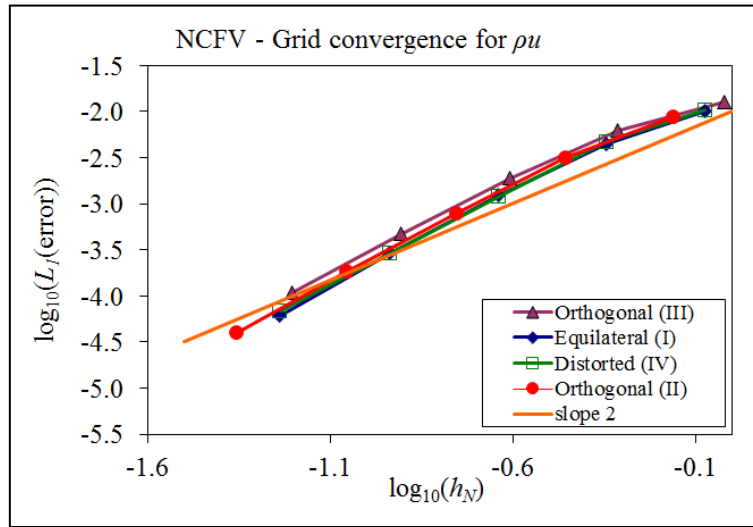
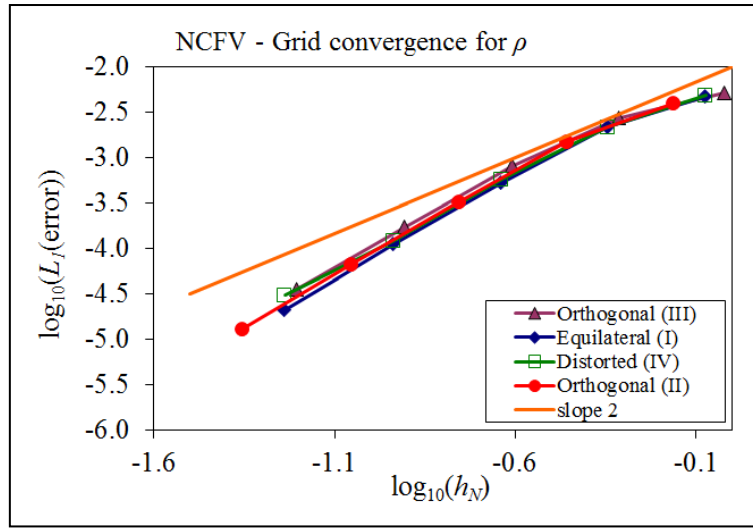
Σχήμα 3.11: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (W_1) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



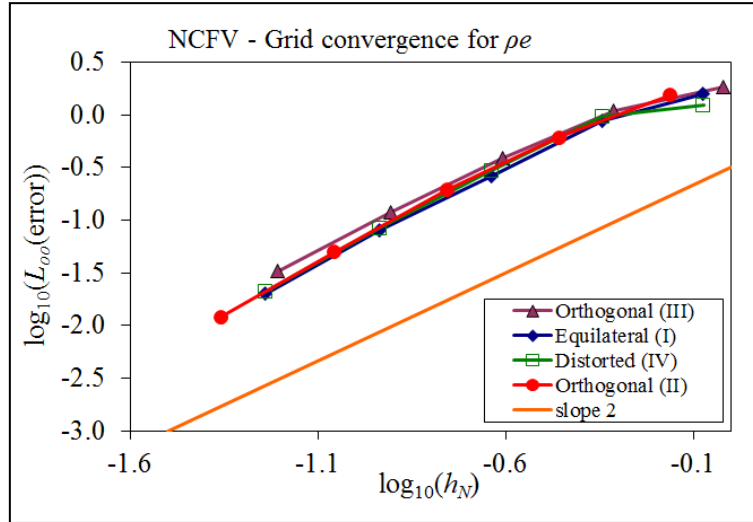
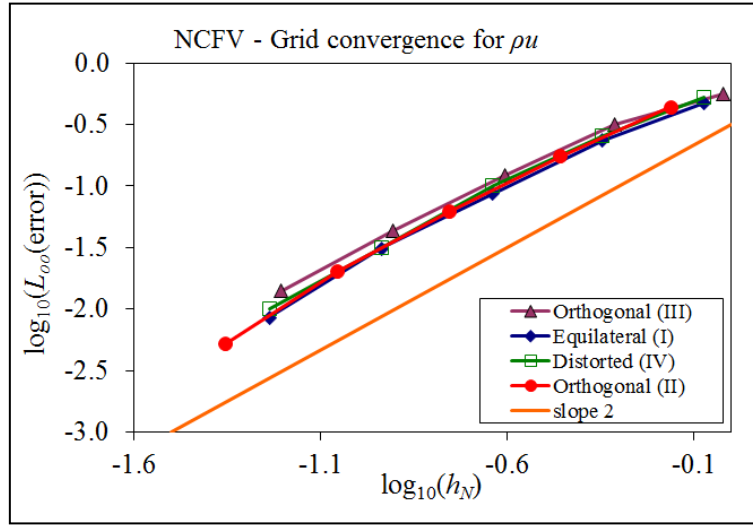
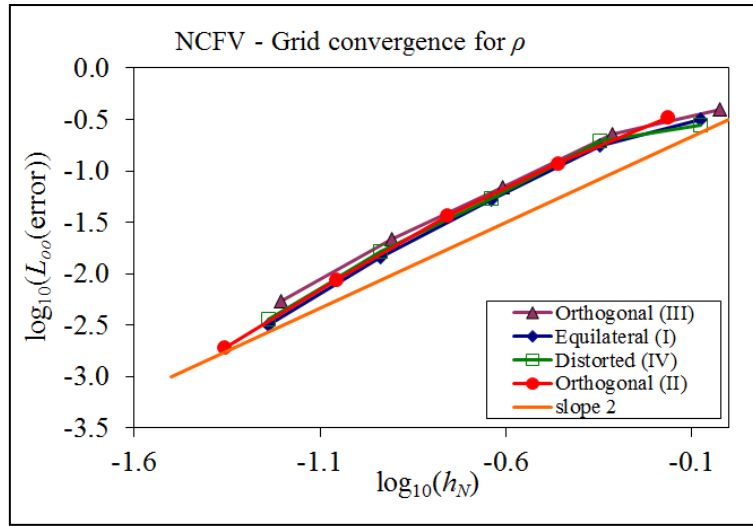
Σχήμα 3.12: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης χωρίς συνάρτηση περιορισμού (W_1) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



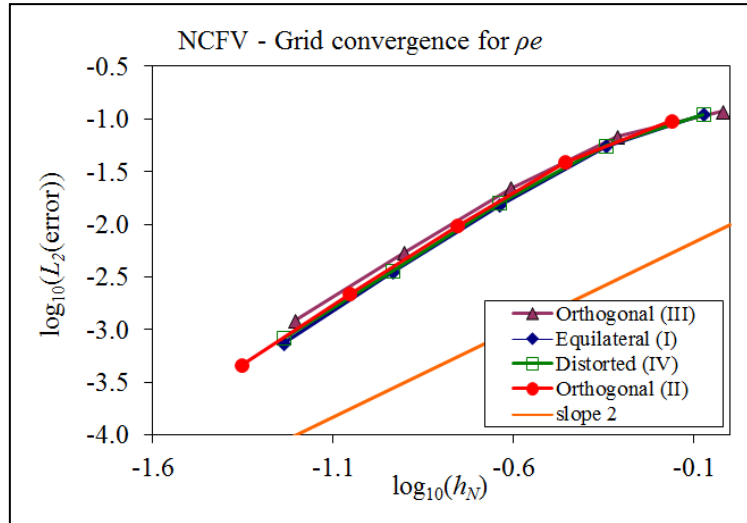
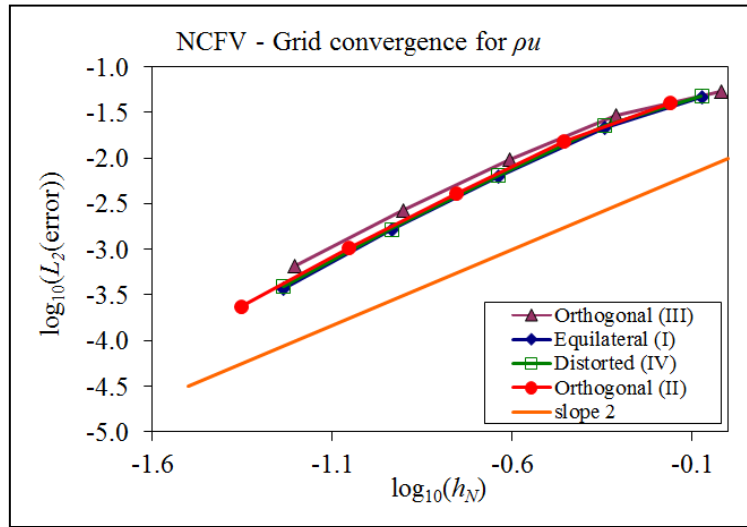
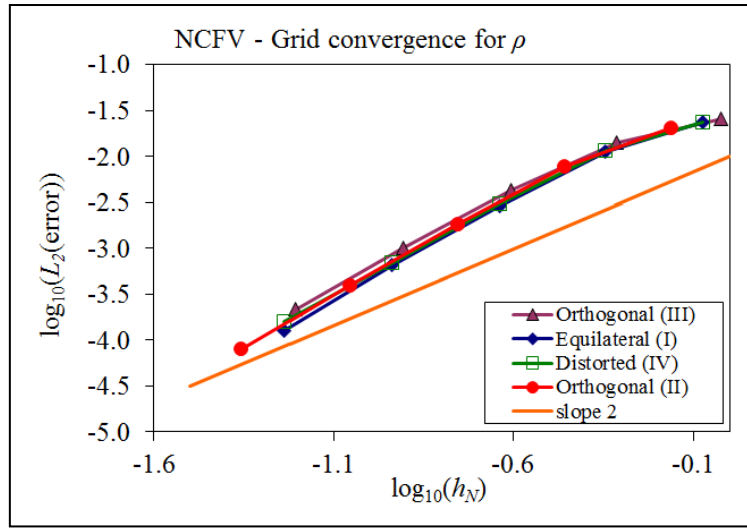
Σχήμα 3.13: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης με συνάρτηση περιορισμού (W_{1L}) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



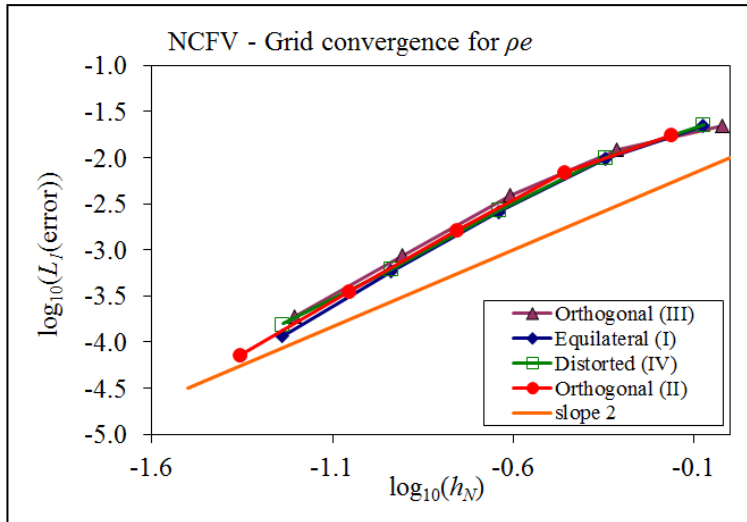
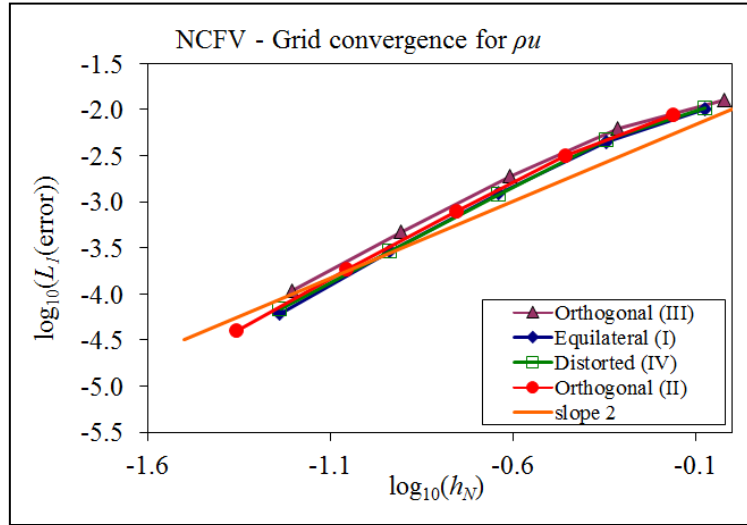
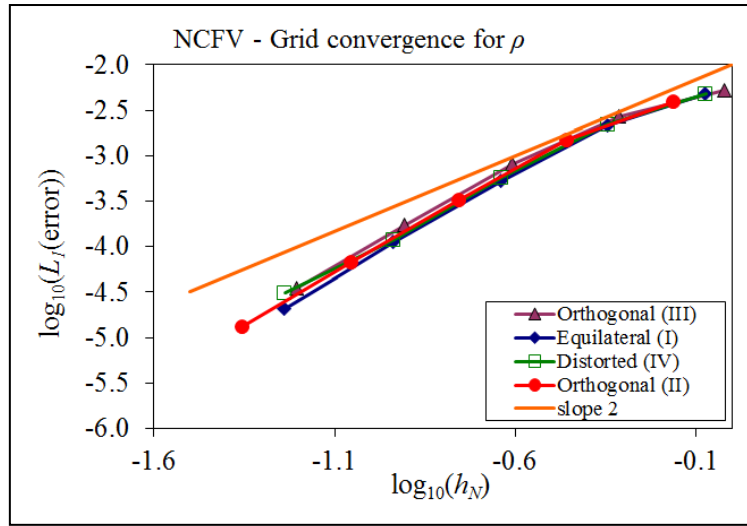
Σχήμα 3.14: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για το σχήμα 2^{75} τάξης με συνάρτηση περιορισμού (W_{1L}) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



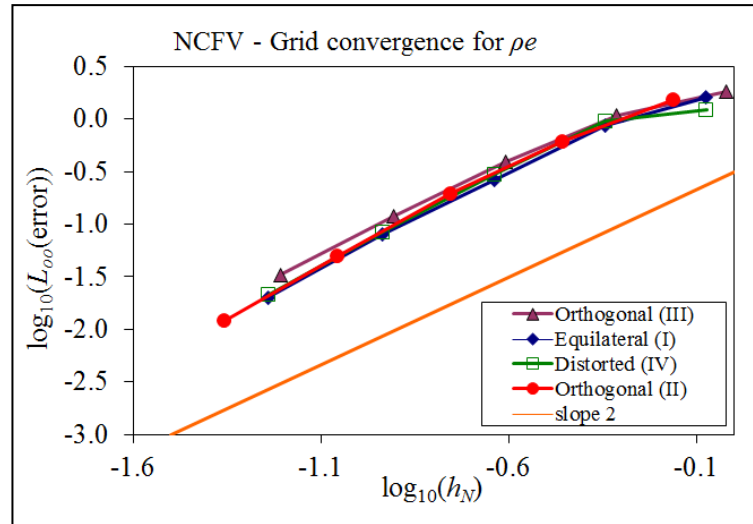
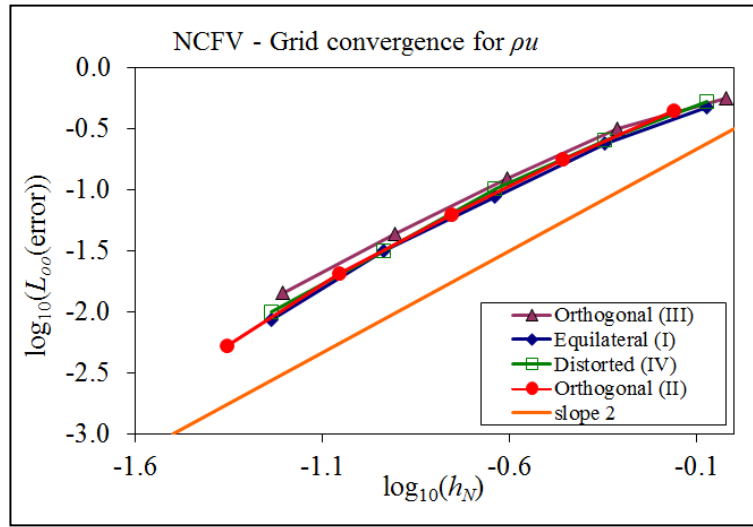
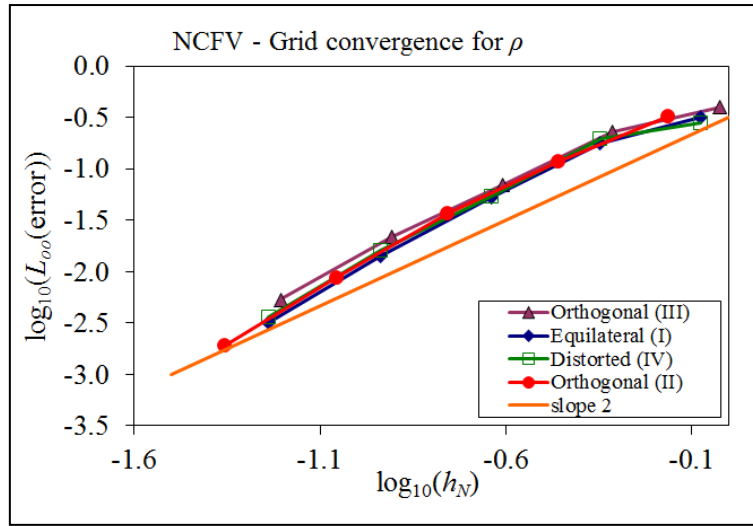
Σχήμα 3.15: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_{∞}) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης με συνάρτηση περι-ορισμού (W_{1L}) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



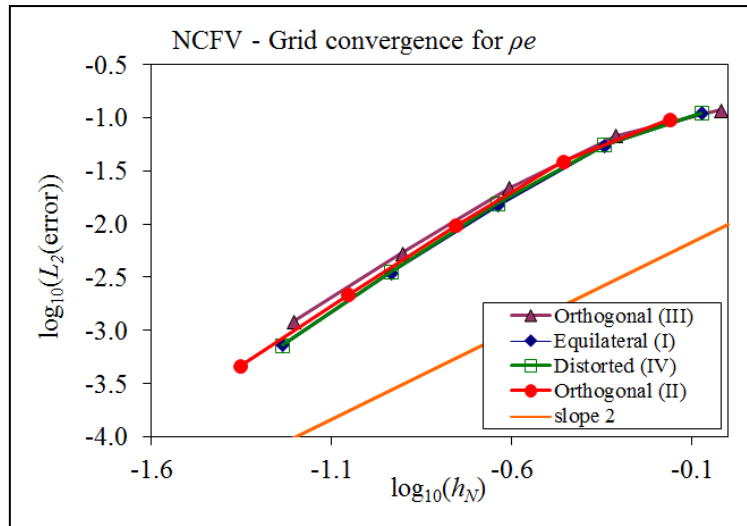
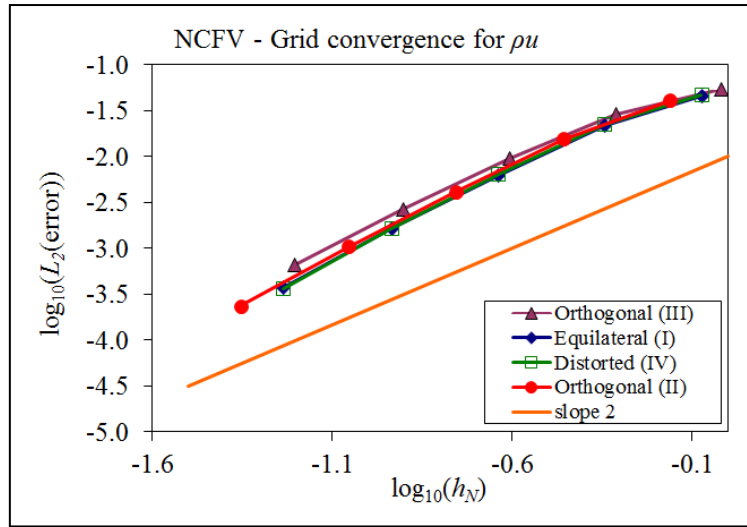
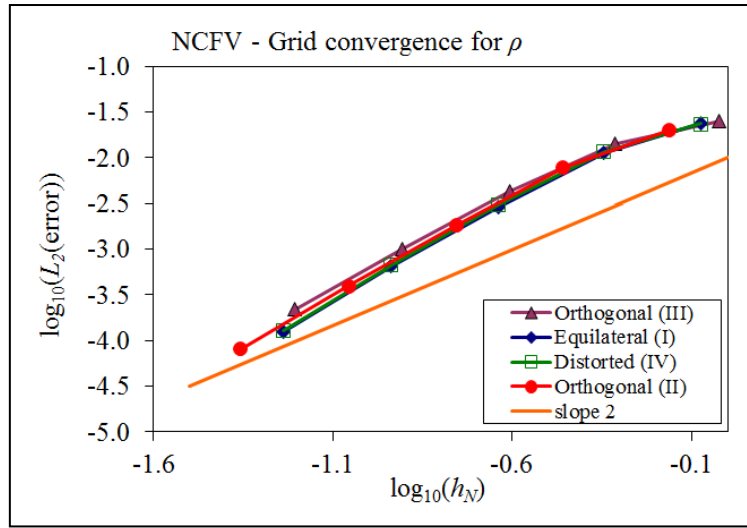
Σχήμα 3.16: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για το σχήμα 2^{ης} τάξης με συνάρτηση περιορισμού (W_{1L}) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



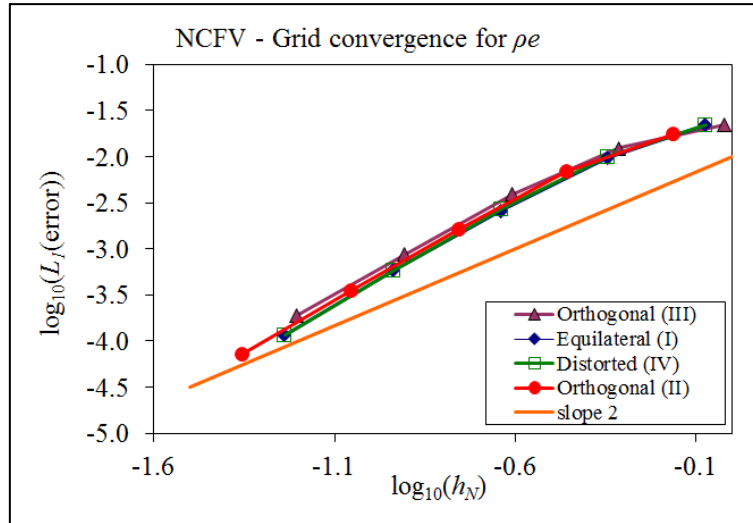
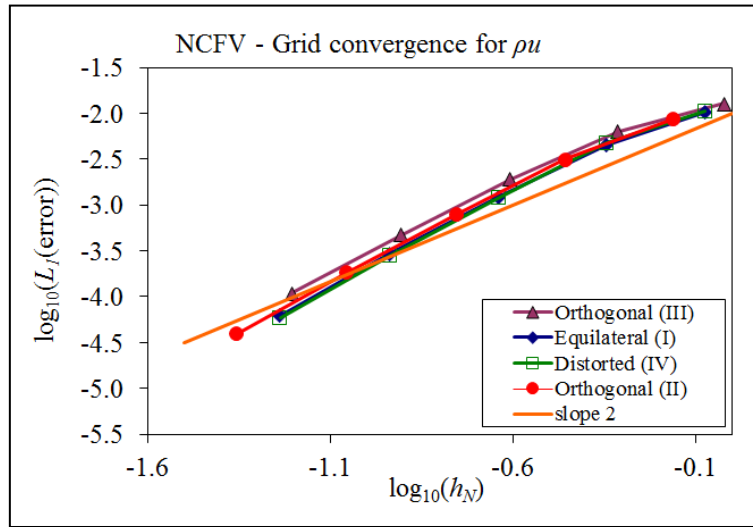
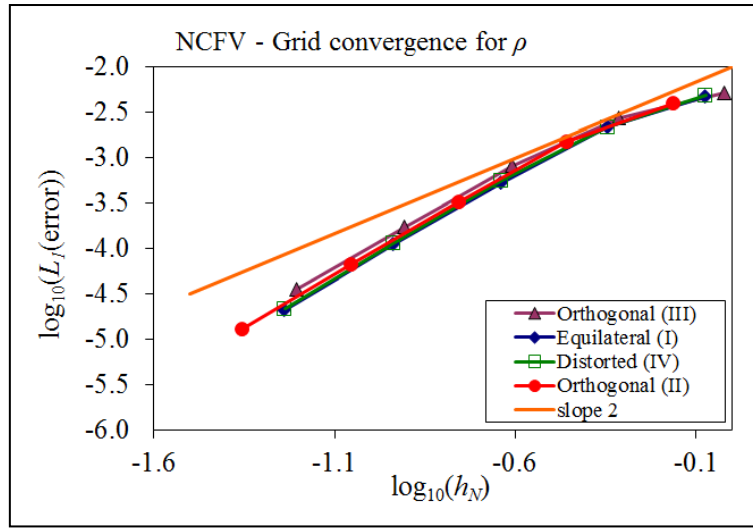
Σχήμα 3.17: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης με συνάρτηση περιορισμού (W_{1L}) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επίλυτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



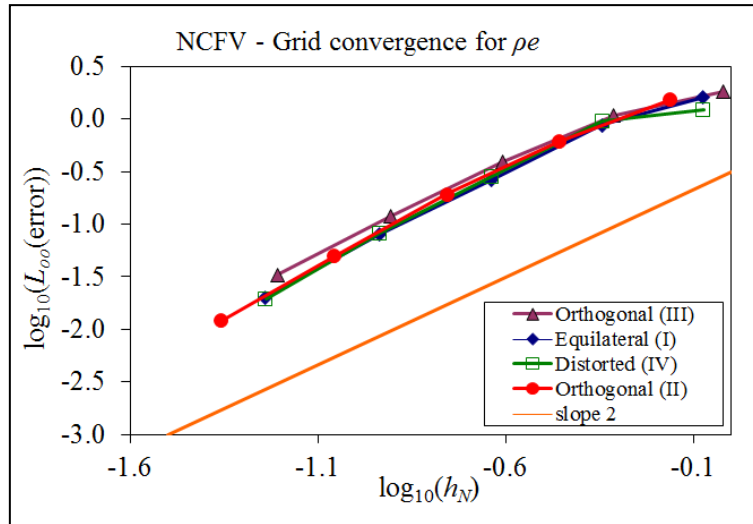
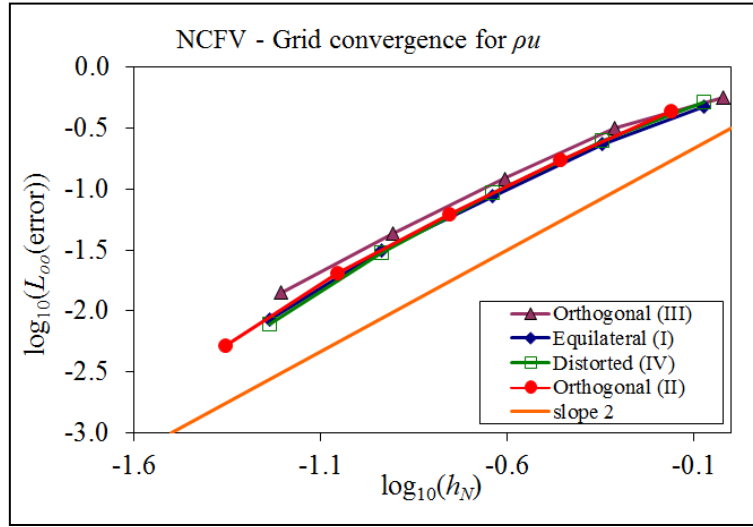
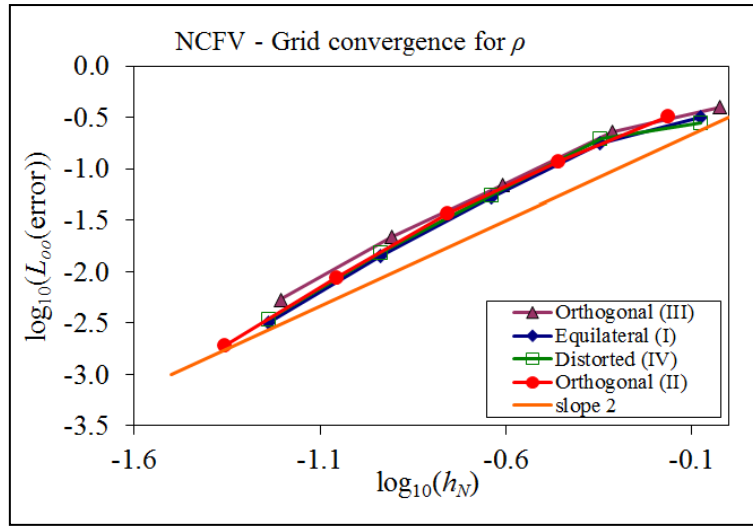
Σχήμα 3.18: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης με συνάρτηση περι-ορισμού (W_{1L}) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



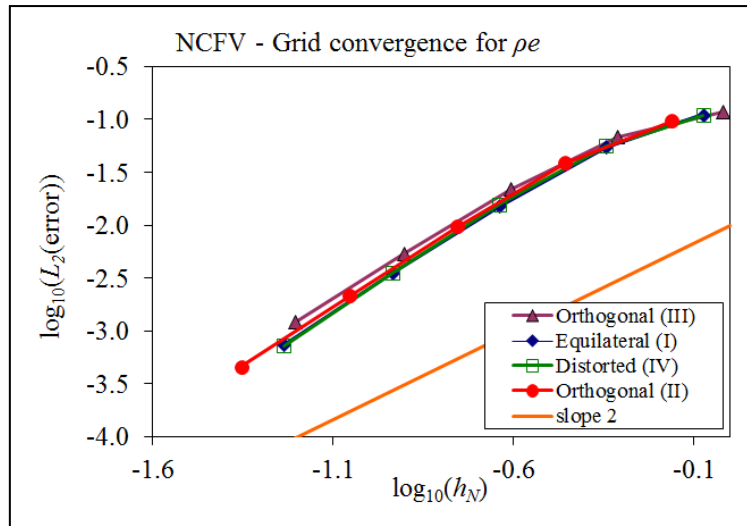
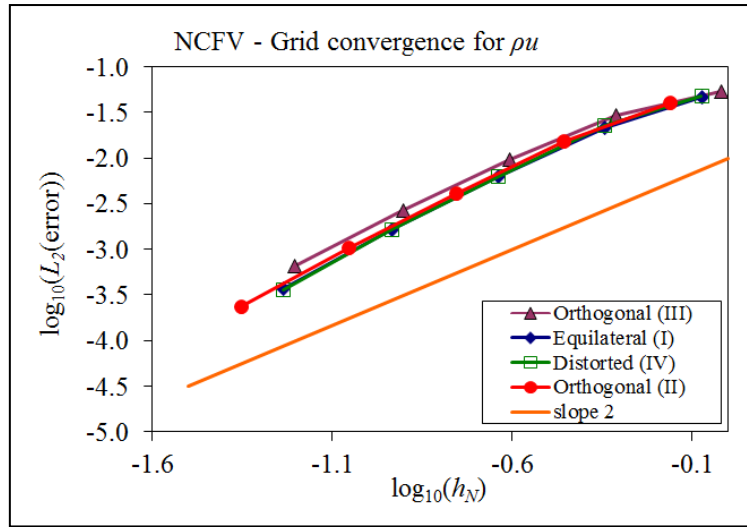
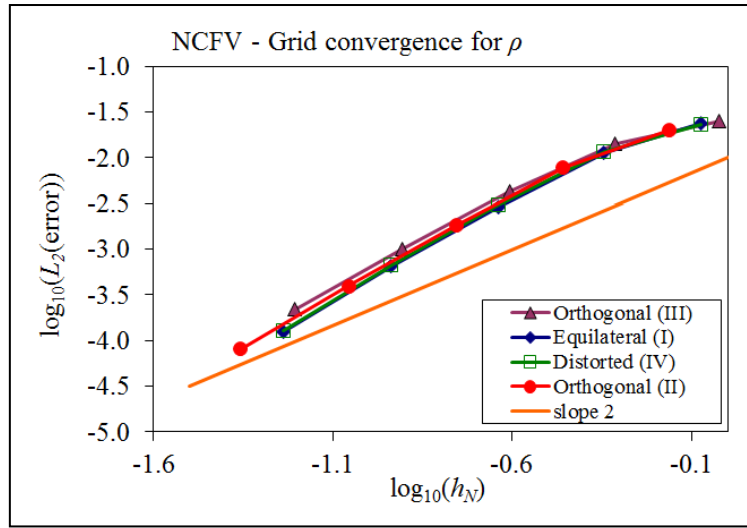
Σχήμα 3.19: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης με συνάρτηση περιορισμού (W_{2L}) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



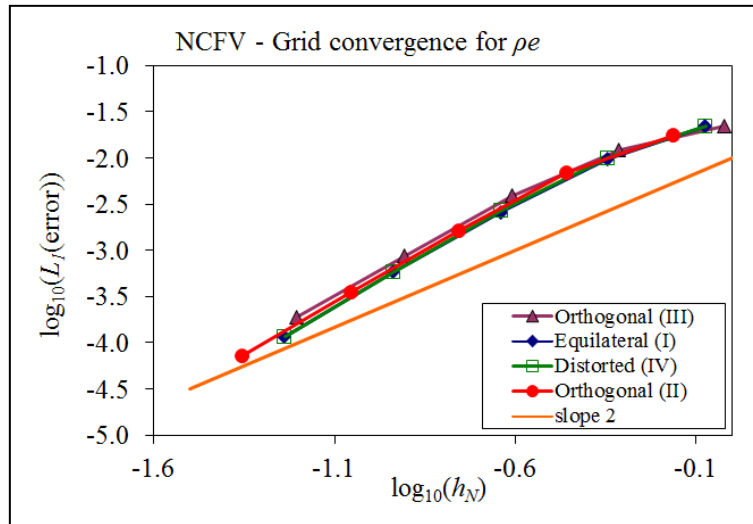
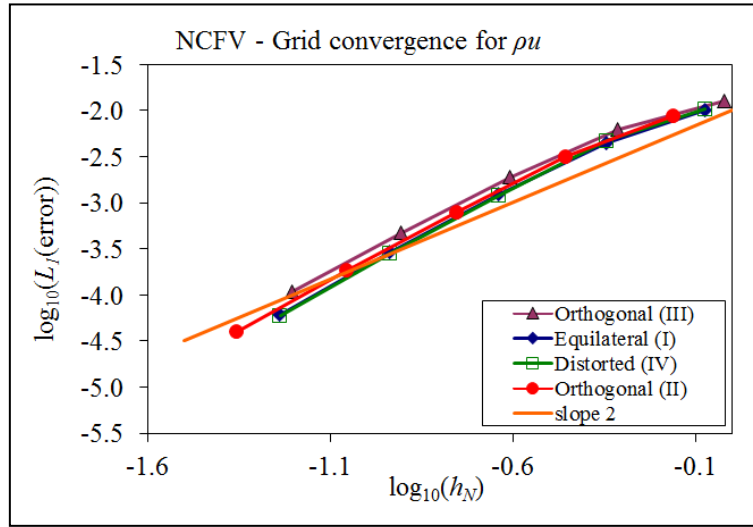
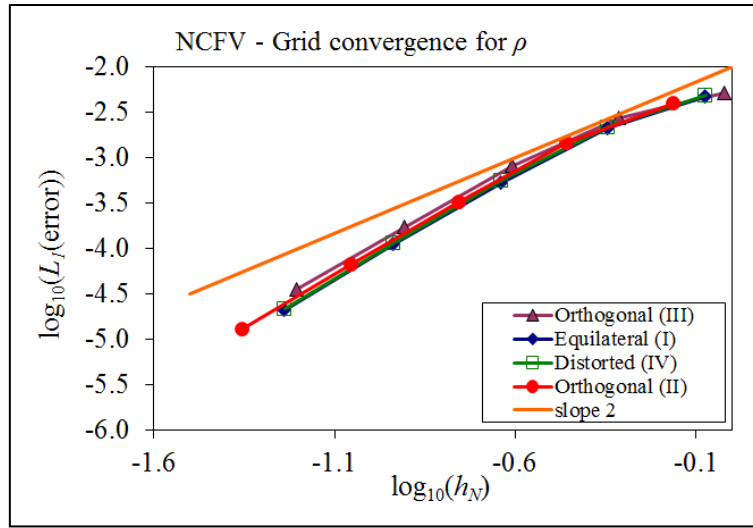
Σχήμα 3.20: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για το σχήμα 2^{75} τάξης με συνάρτηση περιορισμού (W_{2L}) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



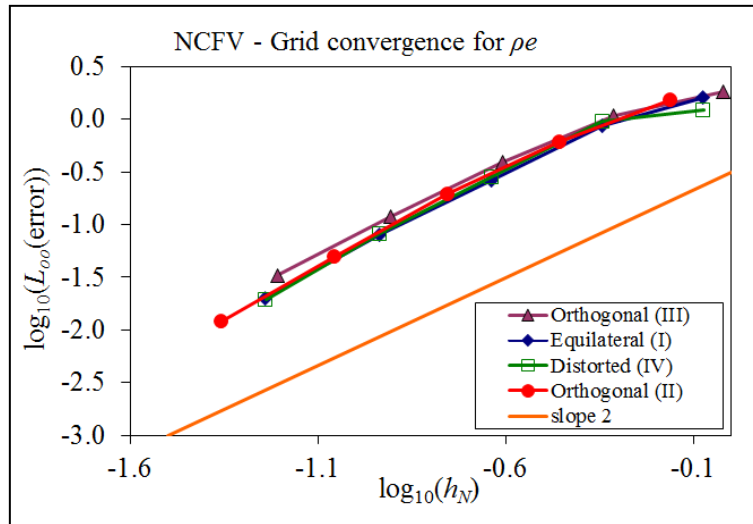
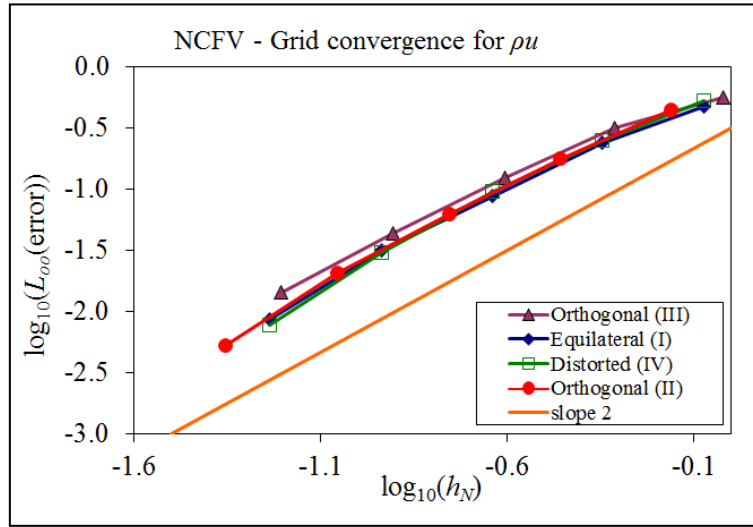
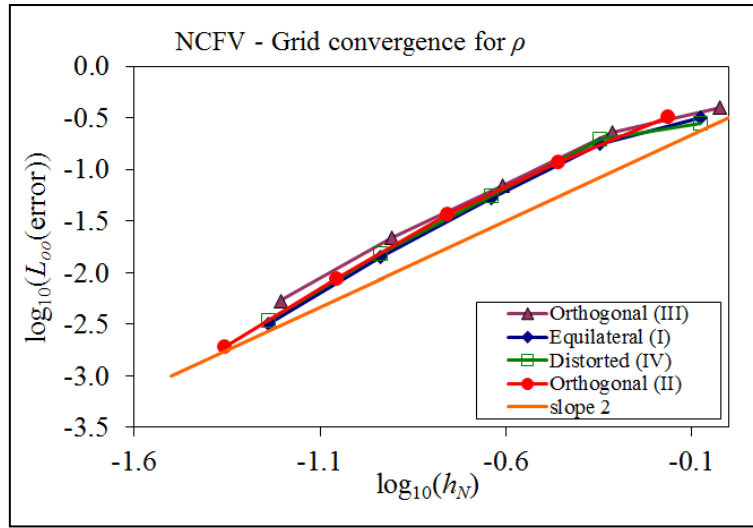
Σχήμα 3.21: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης με συνάρτηση περι-ορισμού (W_{2L}) με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



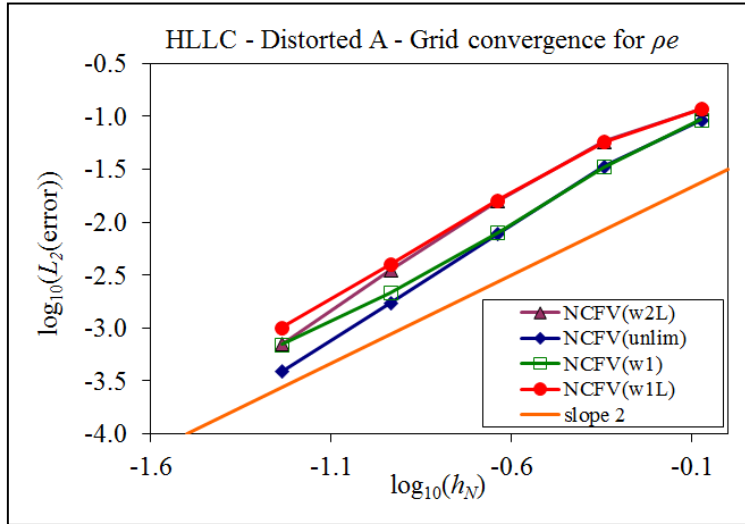
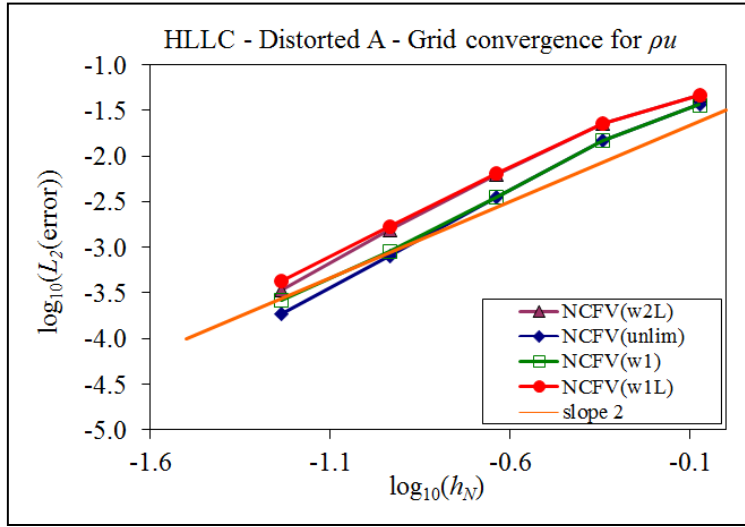
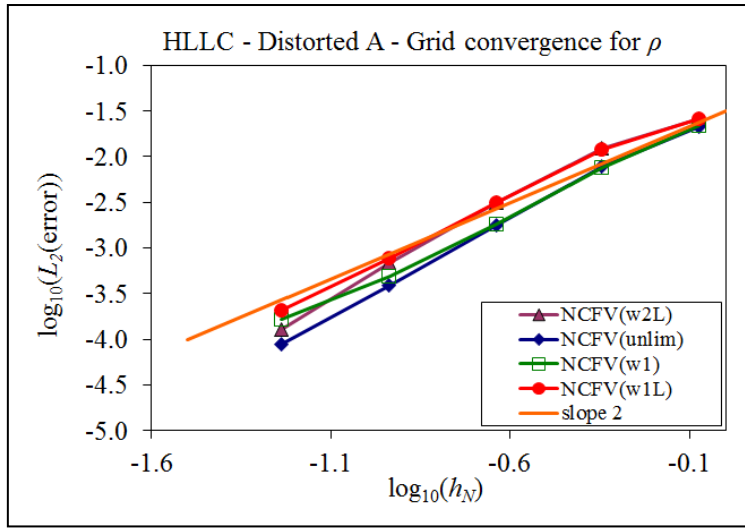
Σχήμα 3.22: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης με συνάρτηση περιορισμού (W_{2L}) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



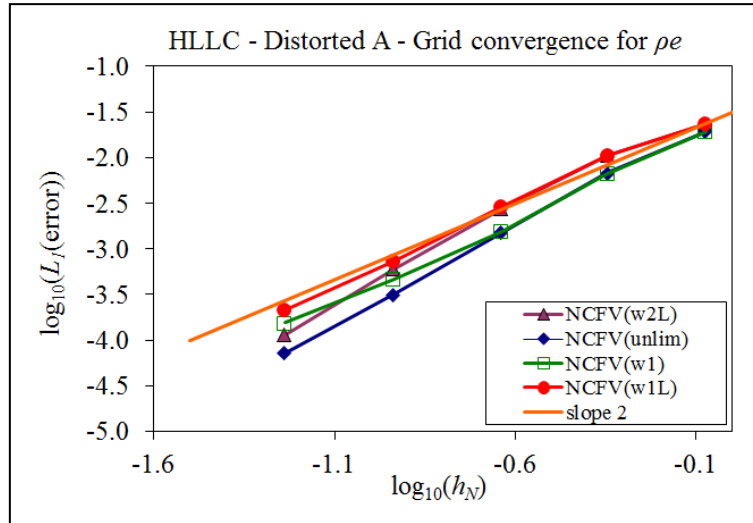
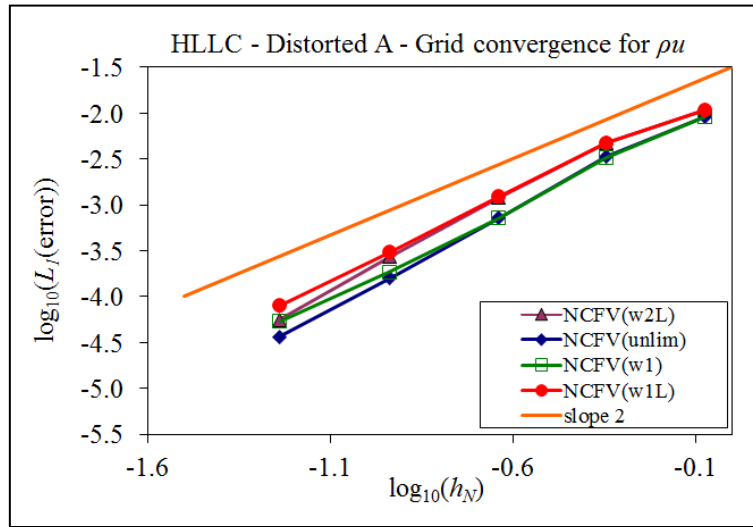
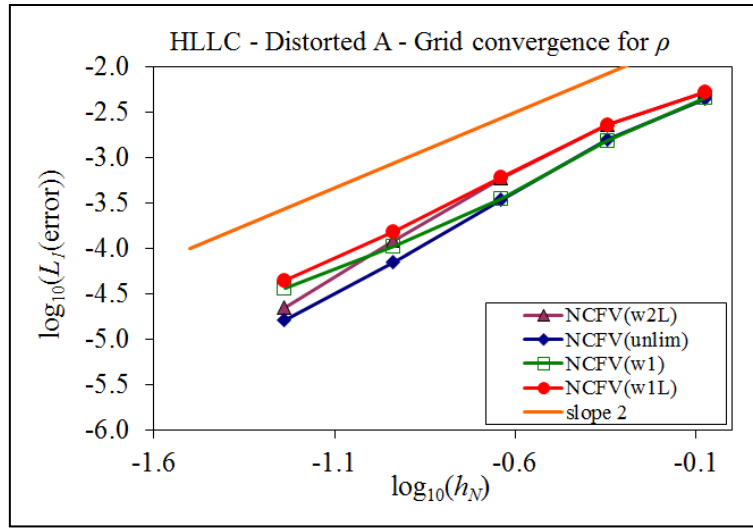
Σχήμα 3.23: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για το σχήμα 2^{ης} τάξης με συνάρτηση περιορισμού (W_{2L}) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επίλυτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



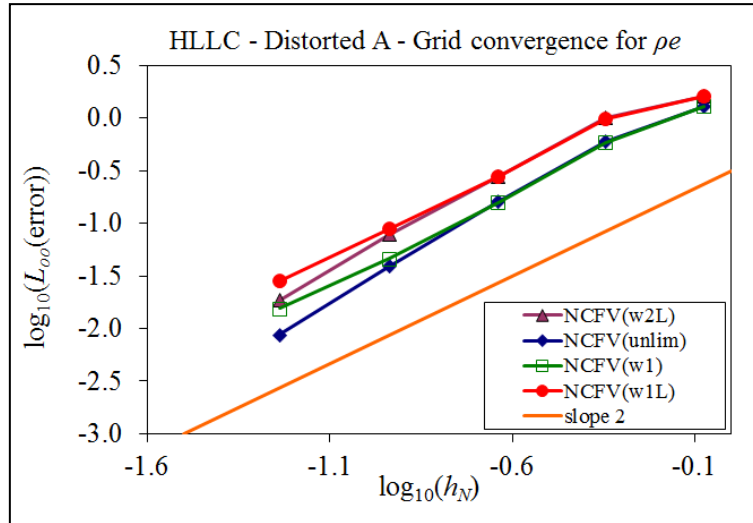
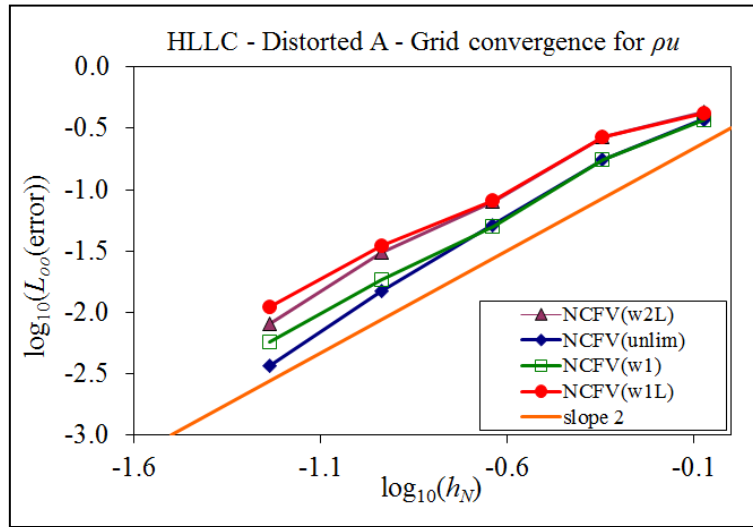
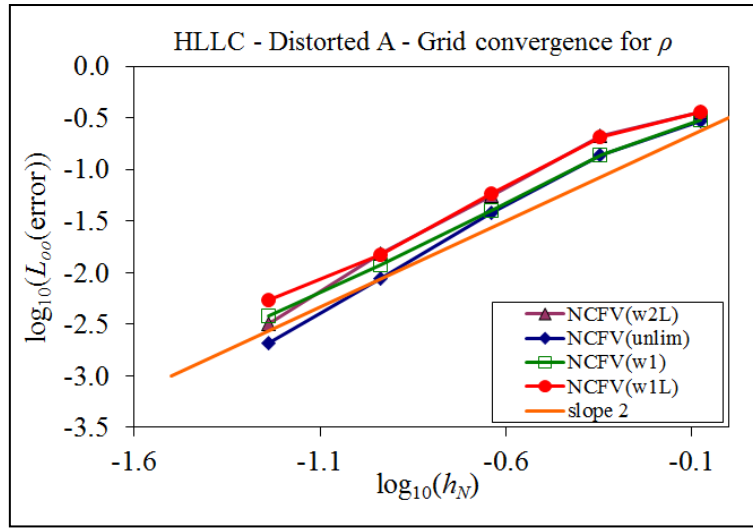
Σχήμα 3.24: Vortex case - Αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για το σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης με συνάρτηση περι-ορισμού (W_{2L}) με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann για διαφορετικούς τύπους πλεγμάτων.



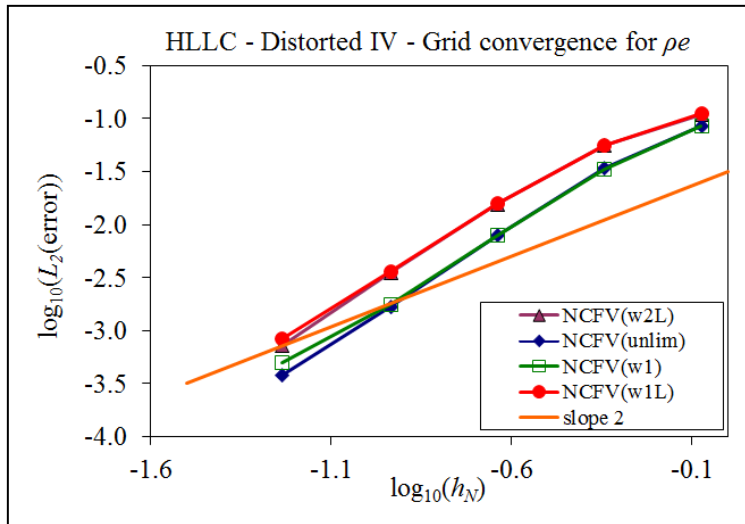
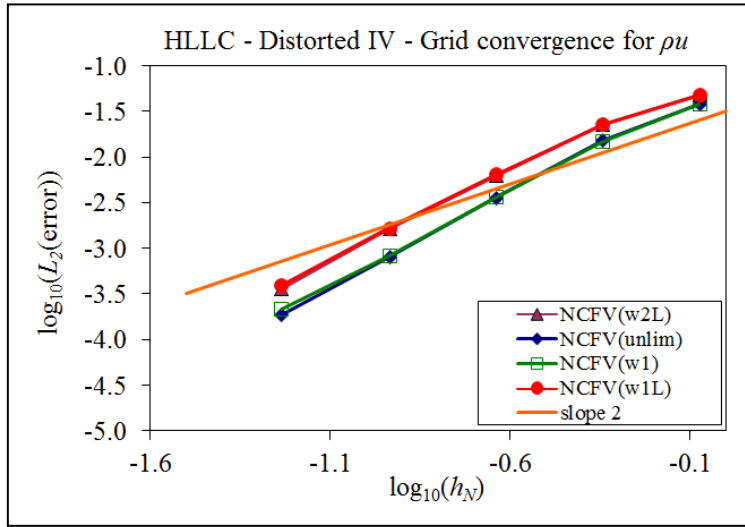
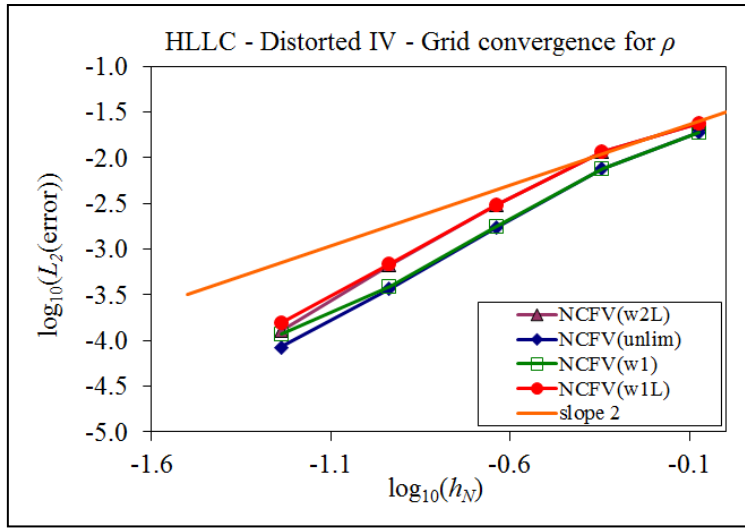
Σχήμα 3.25: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για σχήμα 2^{ης} τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_A.



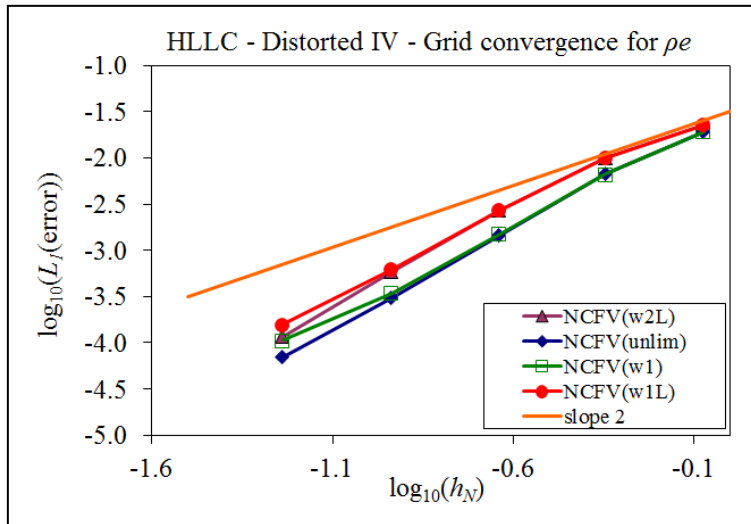
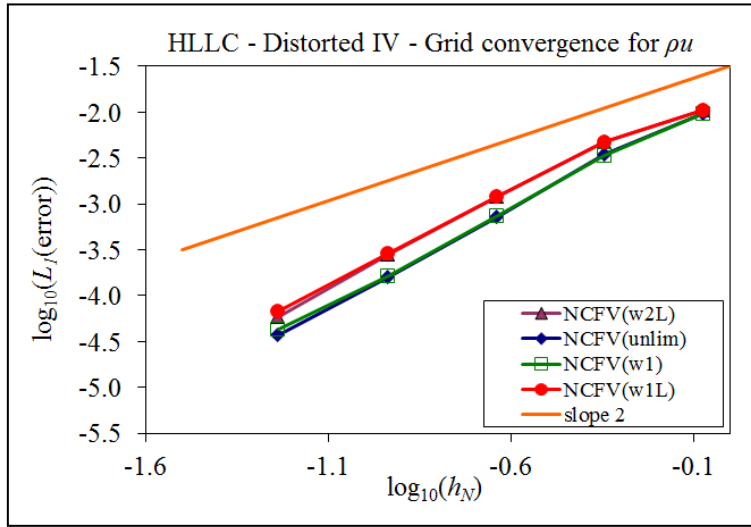
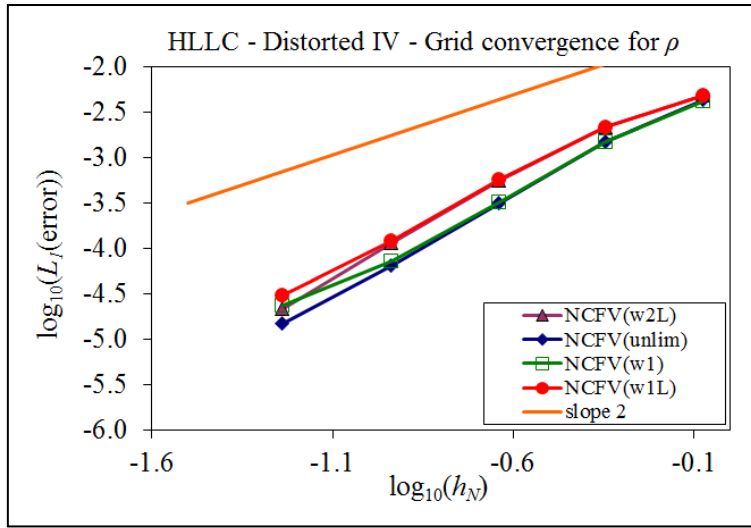
Σχήμα 3.26: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_A.



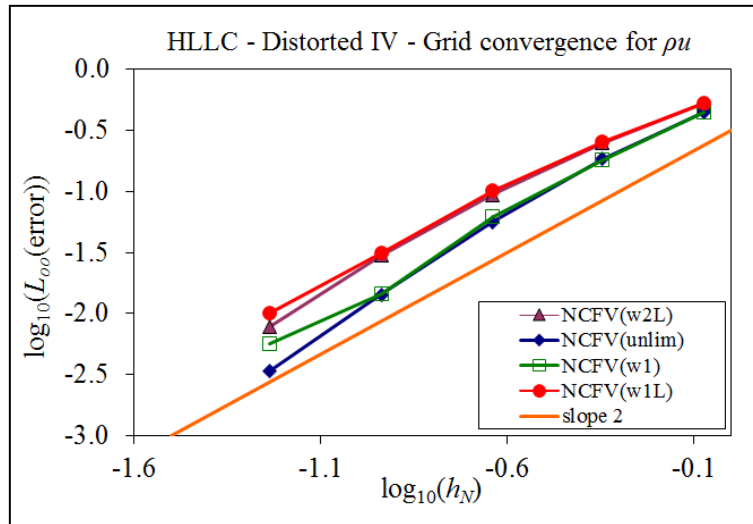
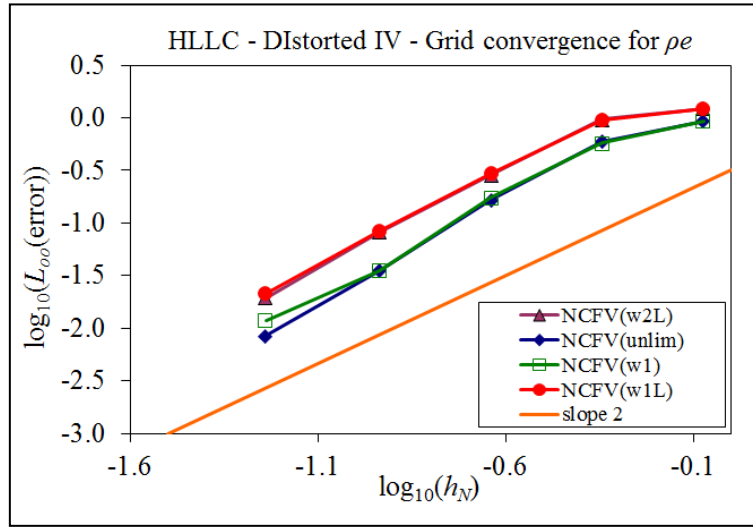
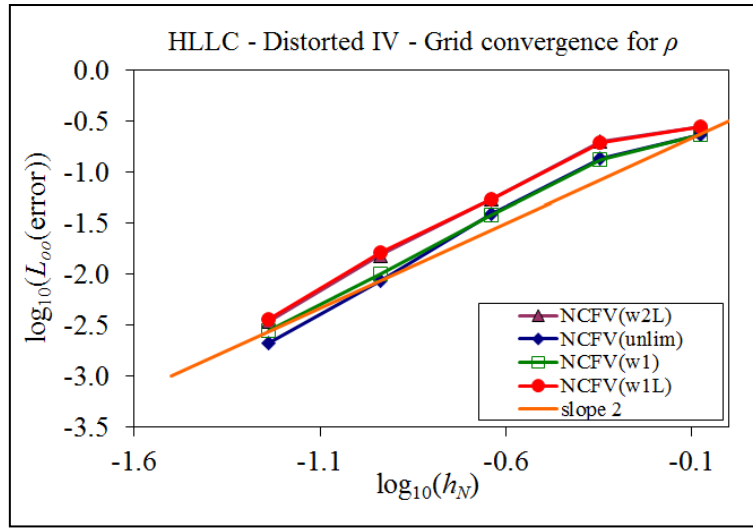
Σχήμα 3.27: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_A.



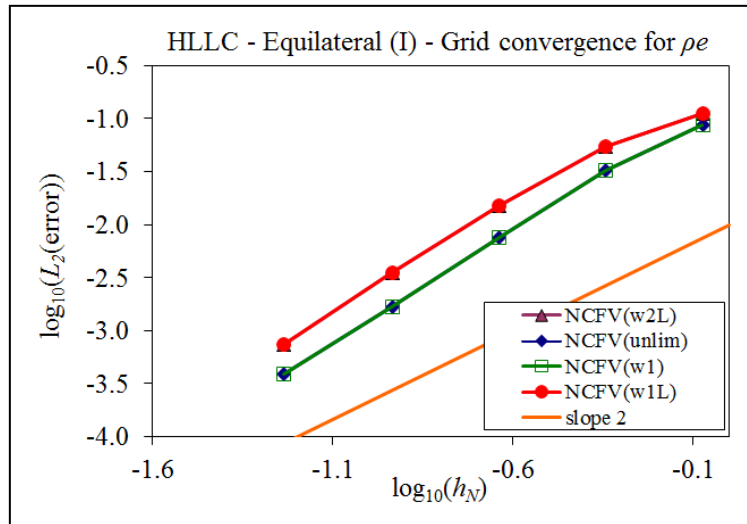
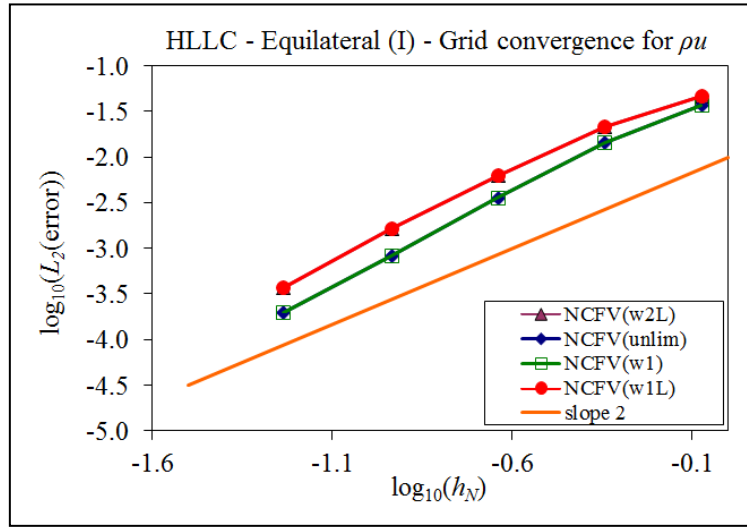
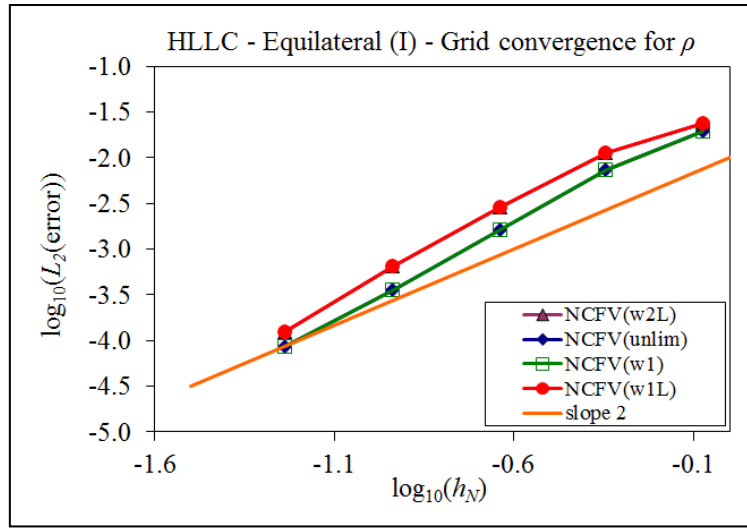
Σχήμα 3.28: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_IV.



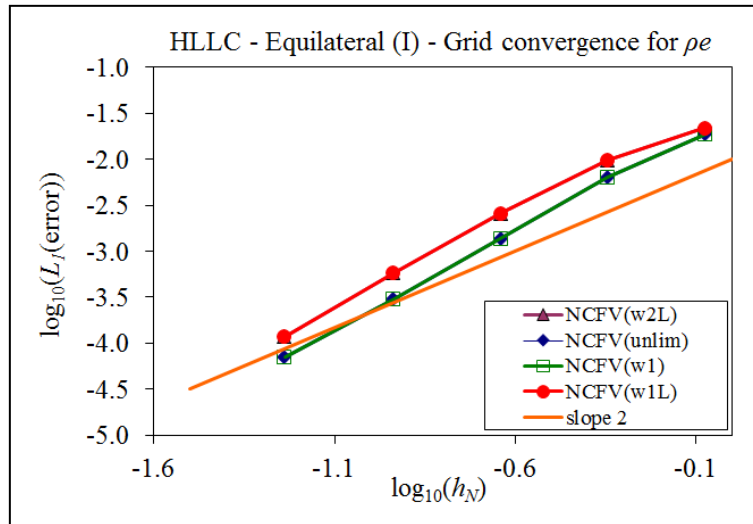
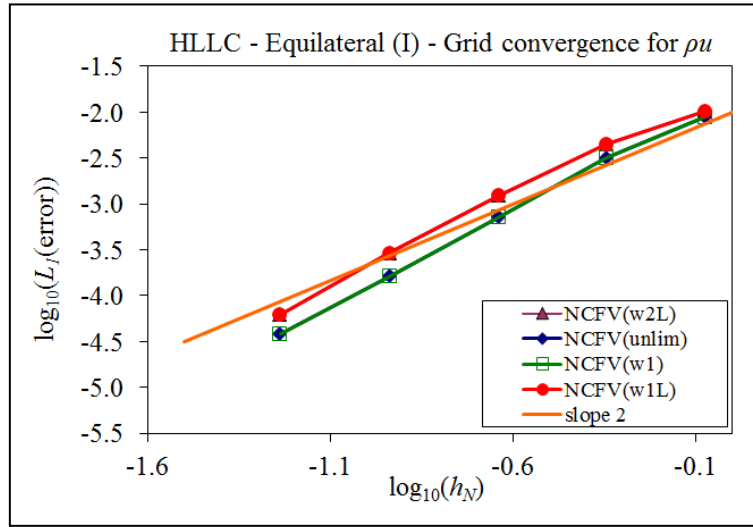
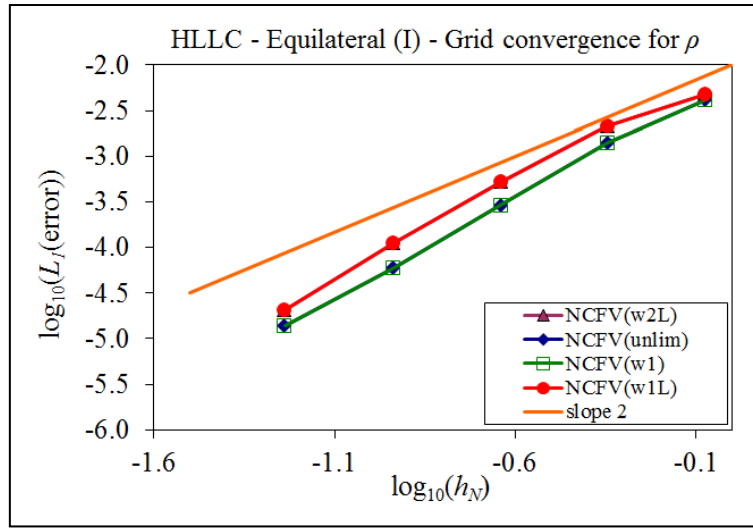
Σχήμα 3.29: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για σχήμα 2^{75} τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_IV.



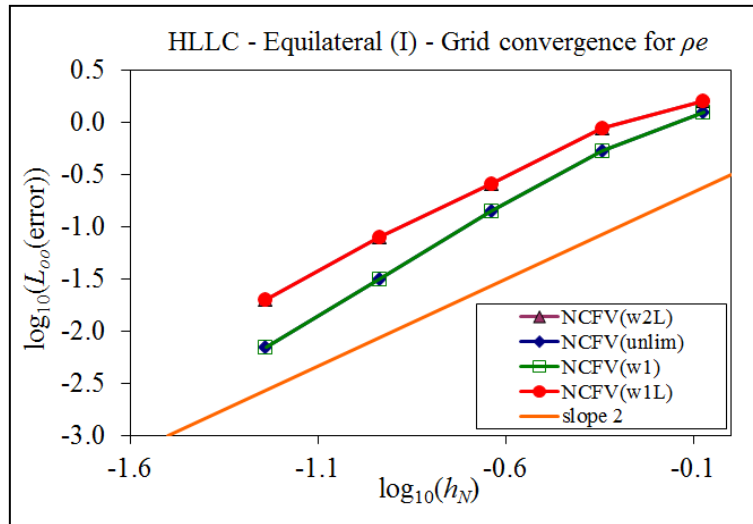
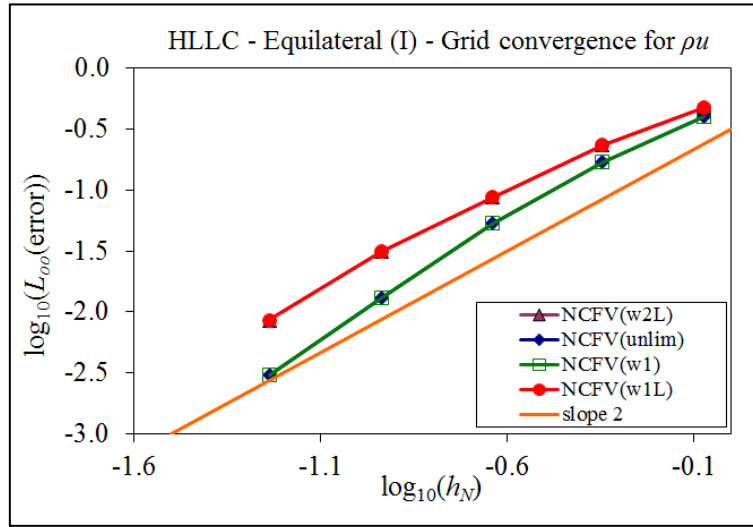
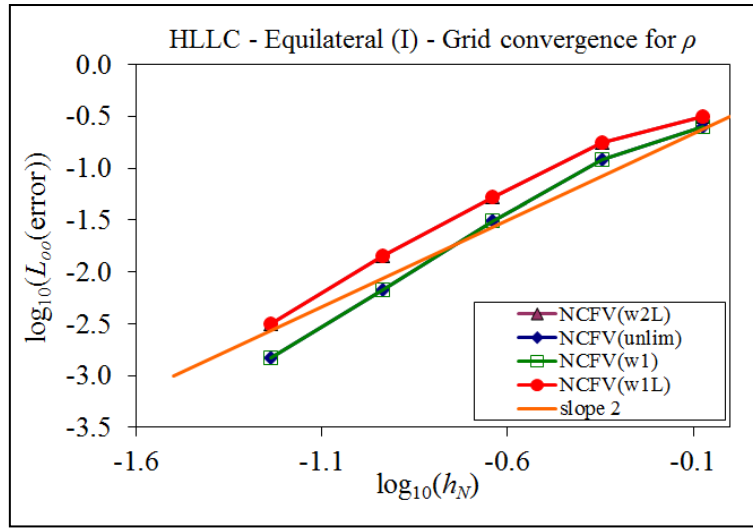
Σχήμα 3.30: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_IV.



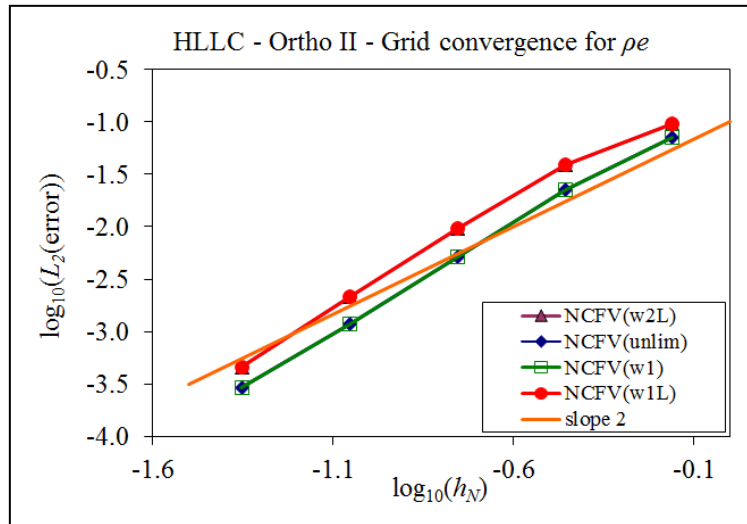
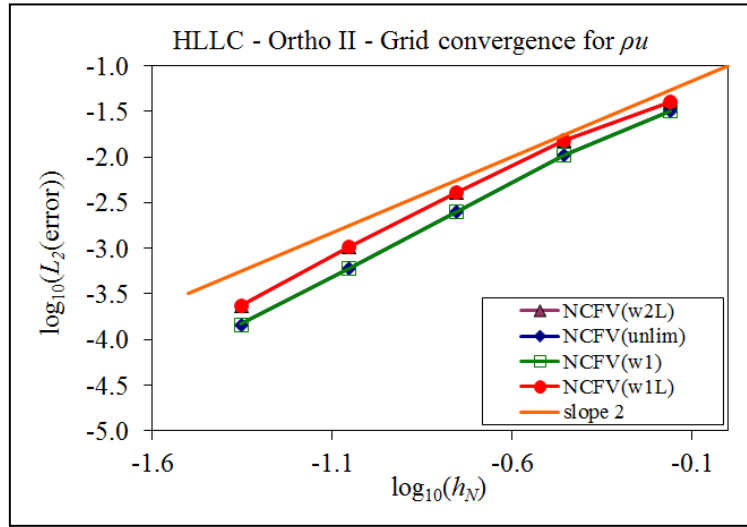
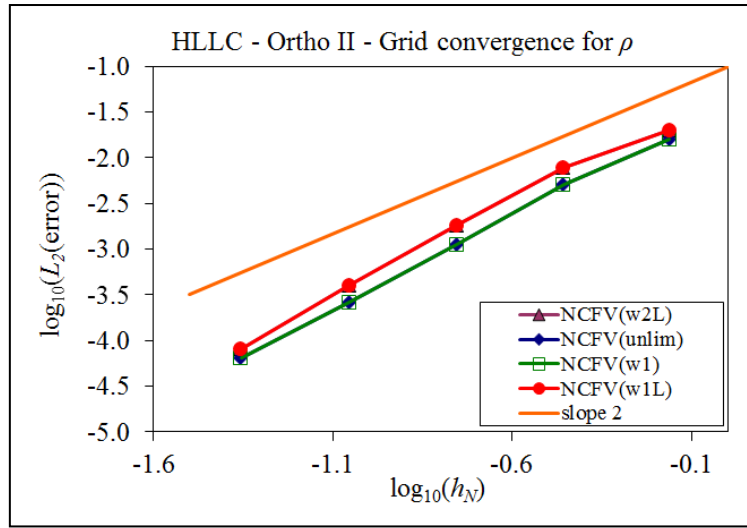
Σχήμα 3.31: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_1L – W_2L), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Equilateral_I.



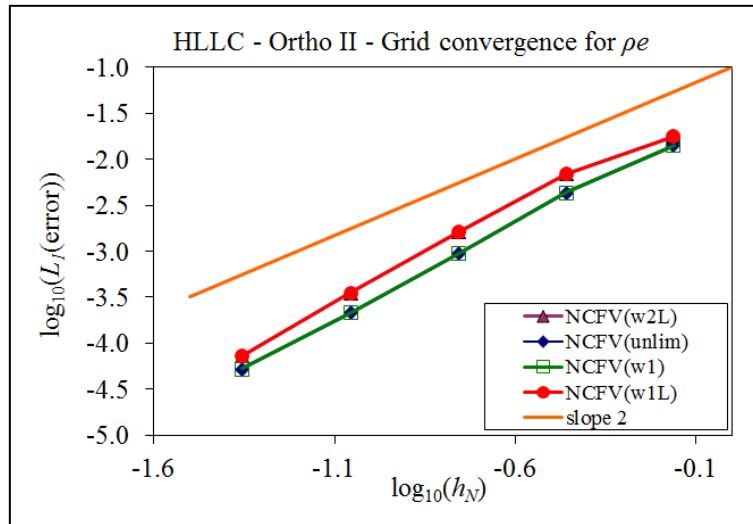
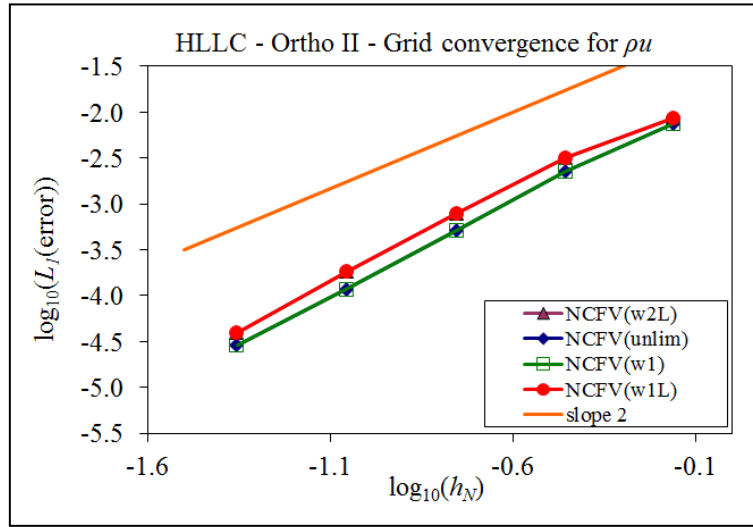
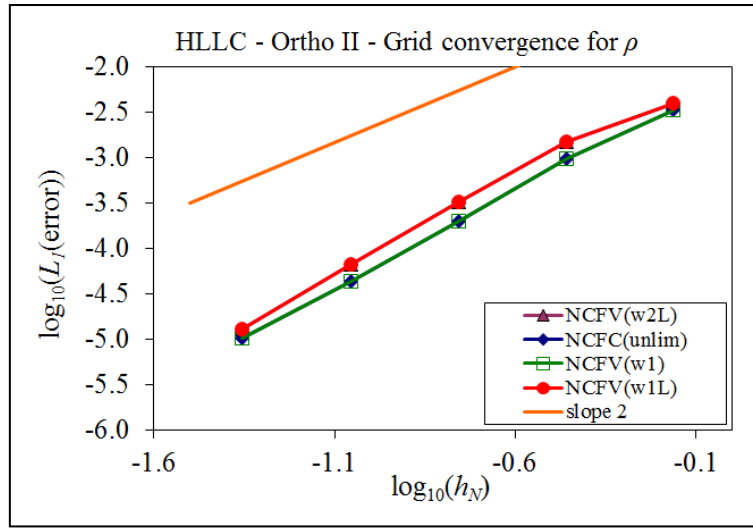
Σχήμα 3.32: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για σχήμα 2^{75} τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Equilateral_I.



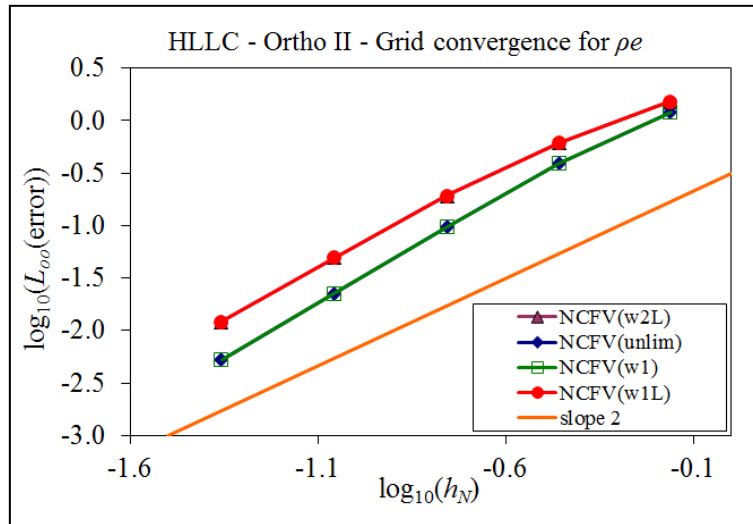
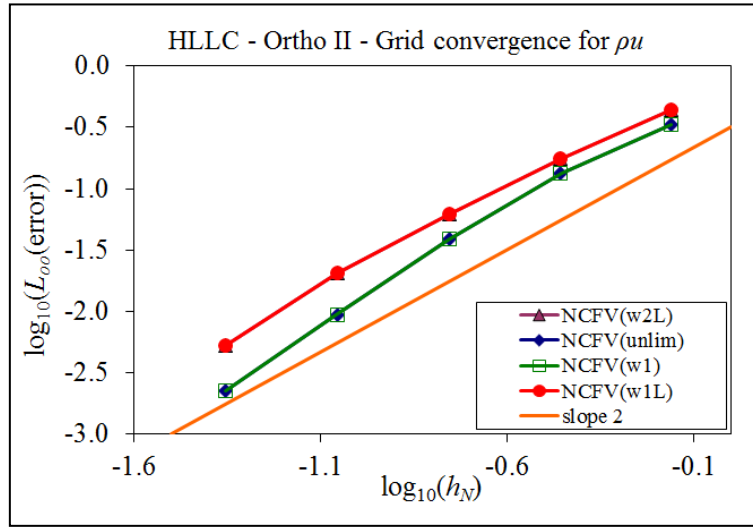
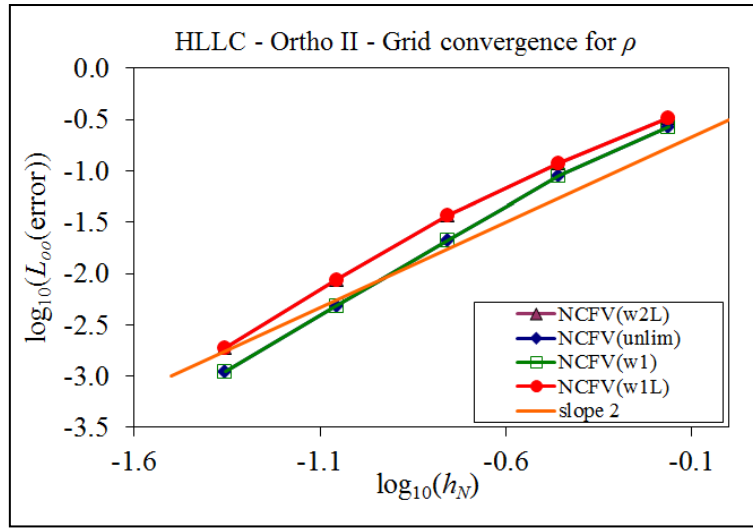
Σχήμα 3.33: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Equilateral_I.



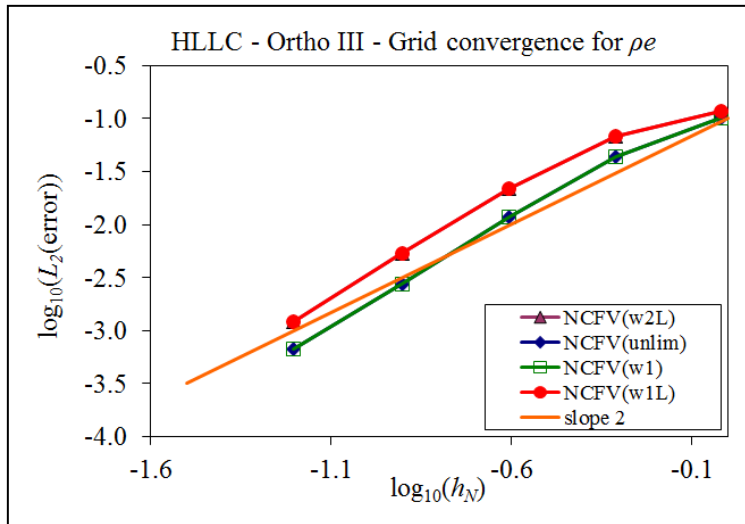
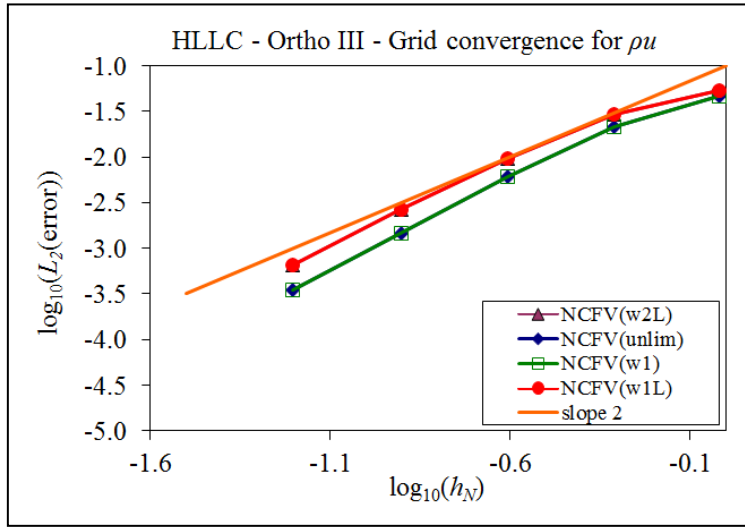
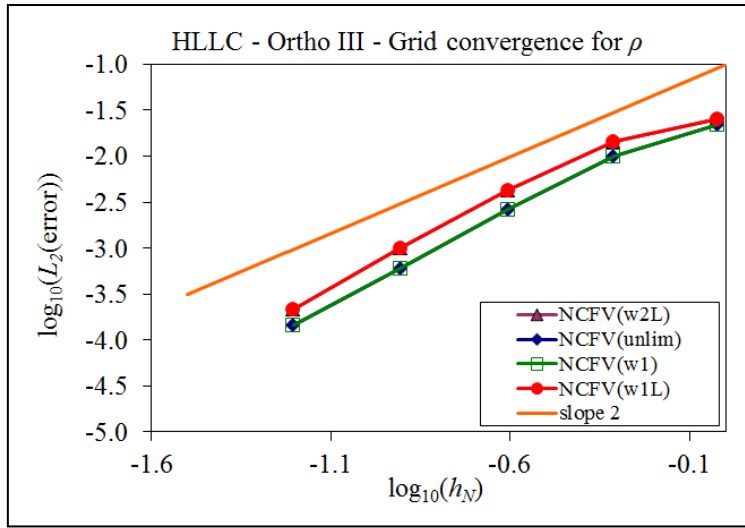
Σχήμα 3.34: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLHC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_II.



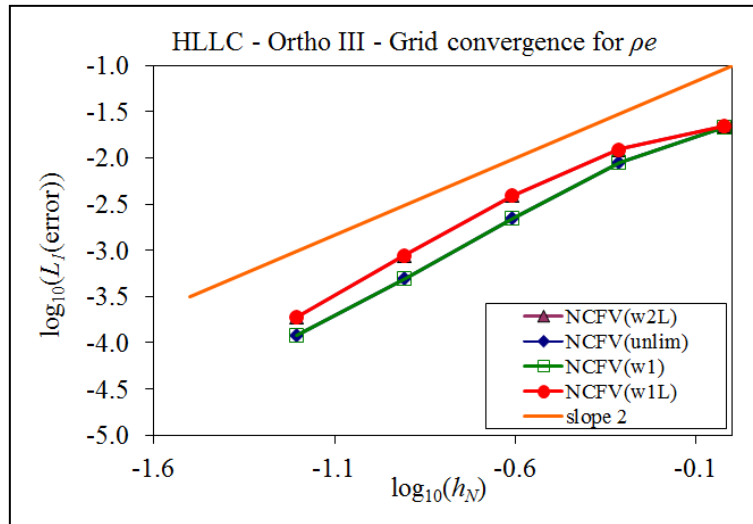
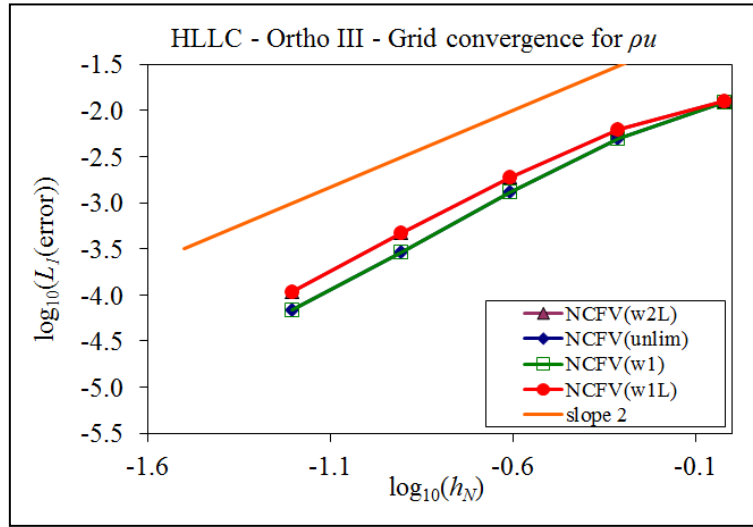
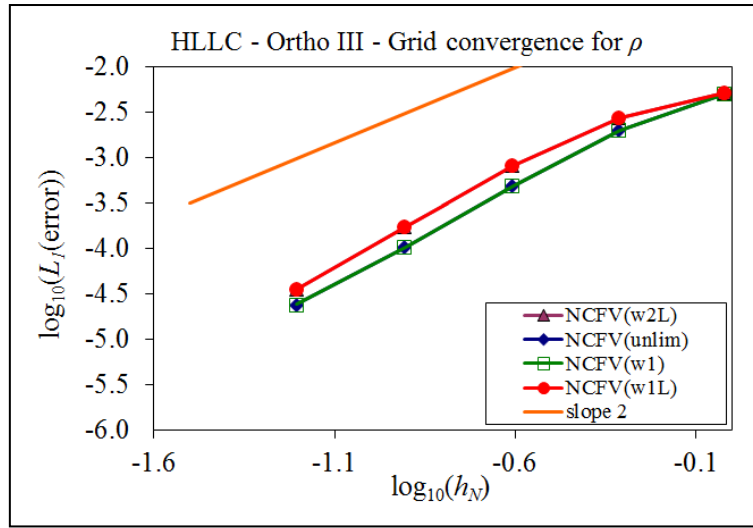
Σχήμα 3.35: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_II.



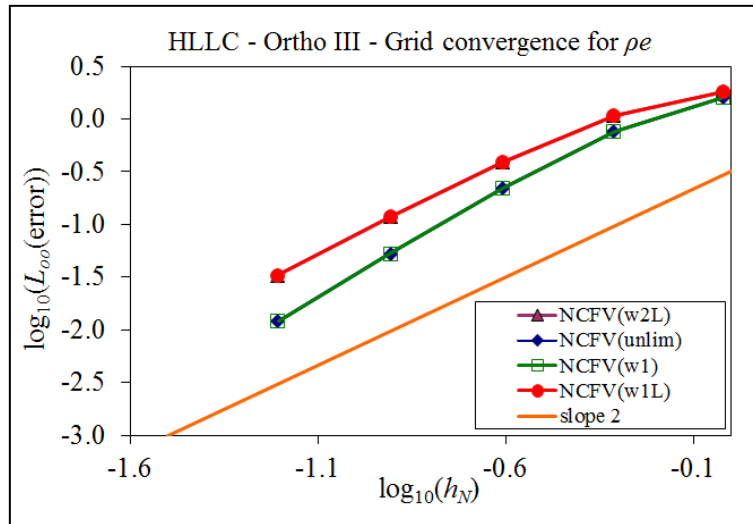
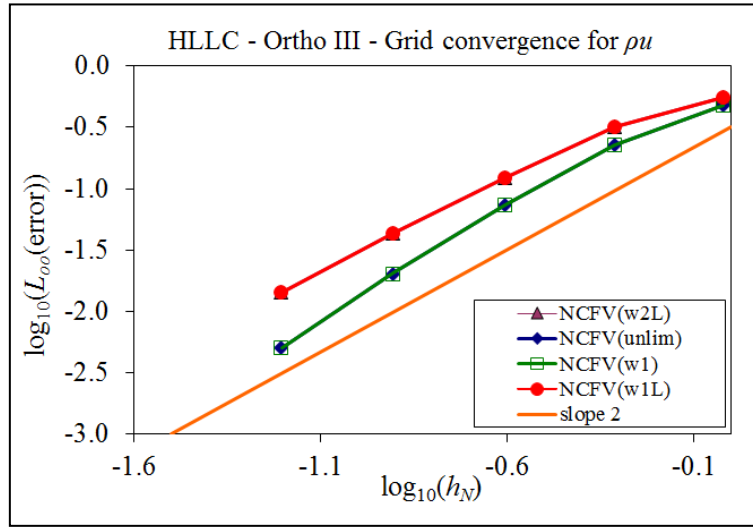
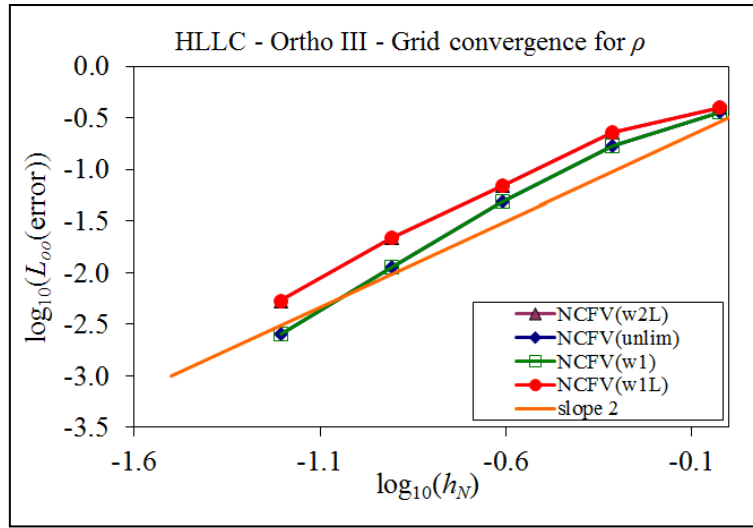
Σχήμα 3.36: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_II.



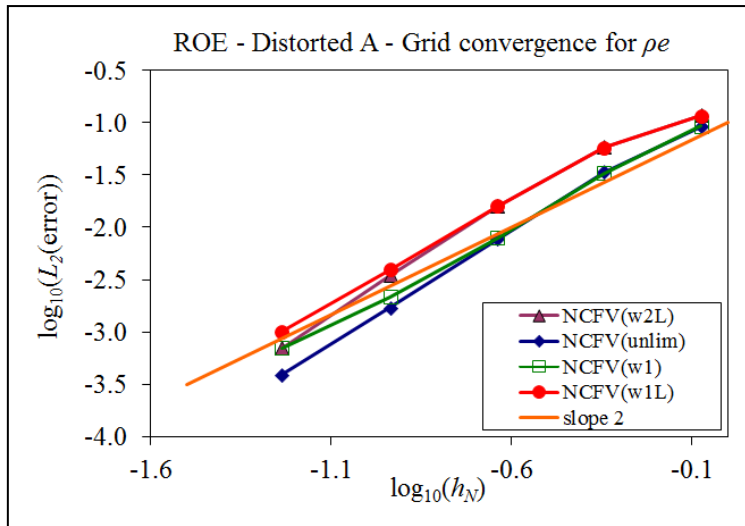
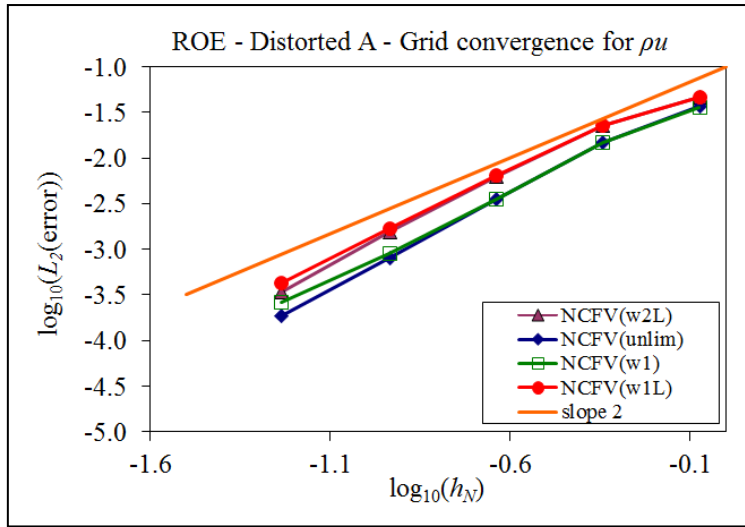
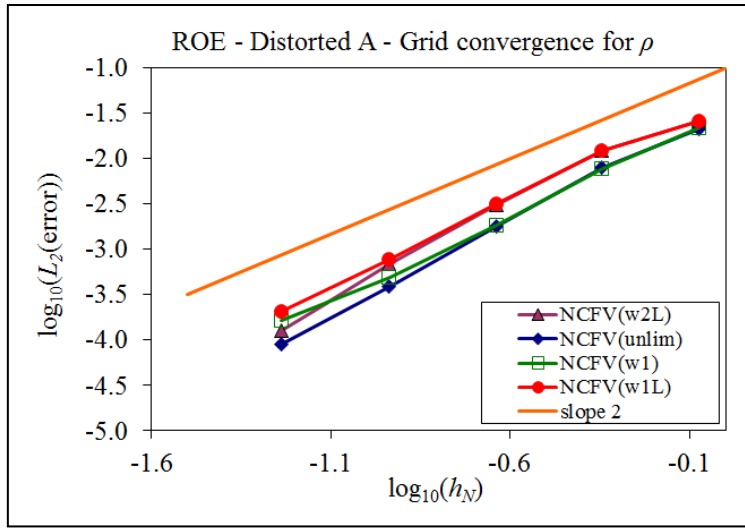
Σχήμα 3.37: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_III.



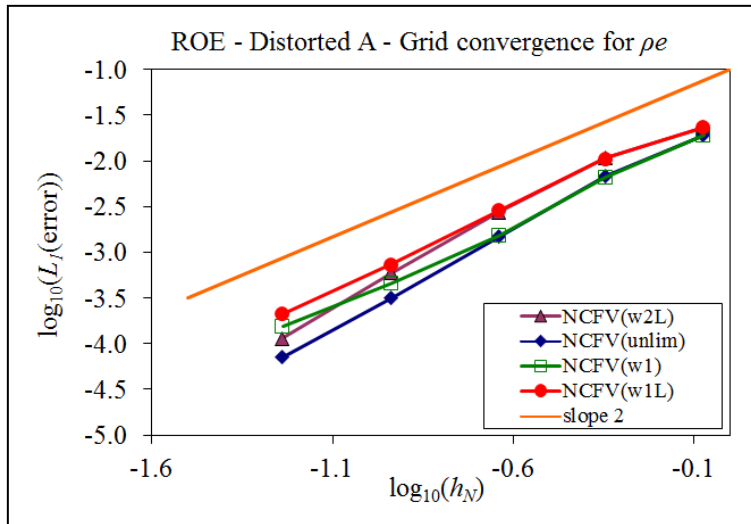
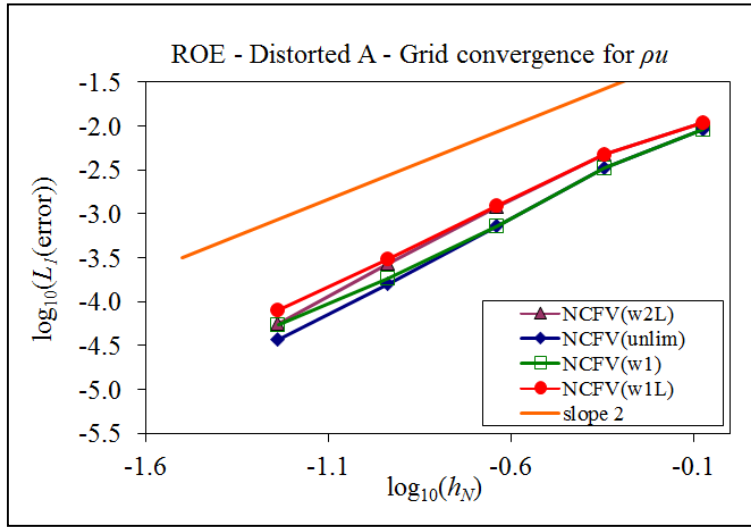
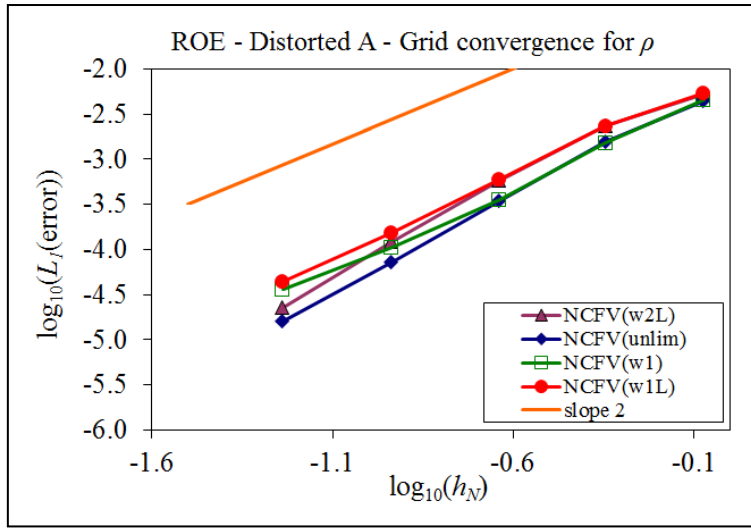
Σχήμα 3.38: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_III.



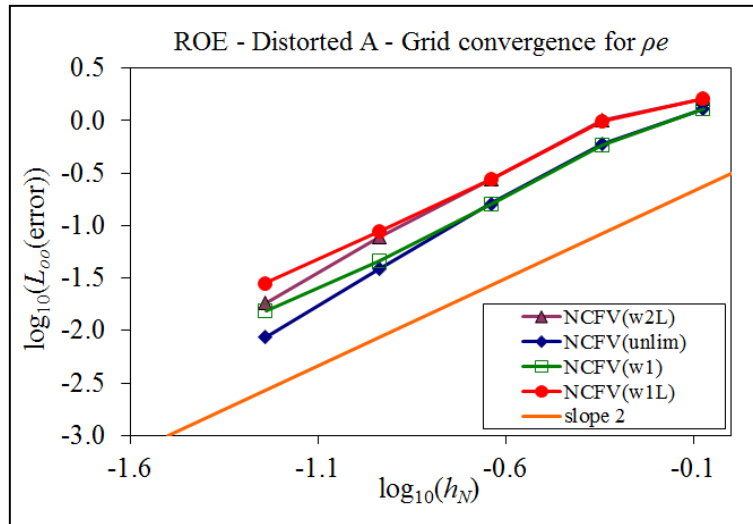
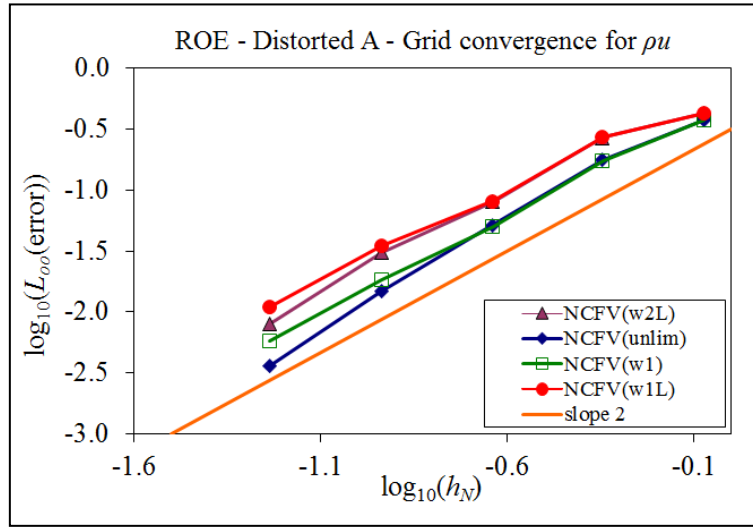
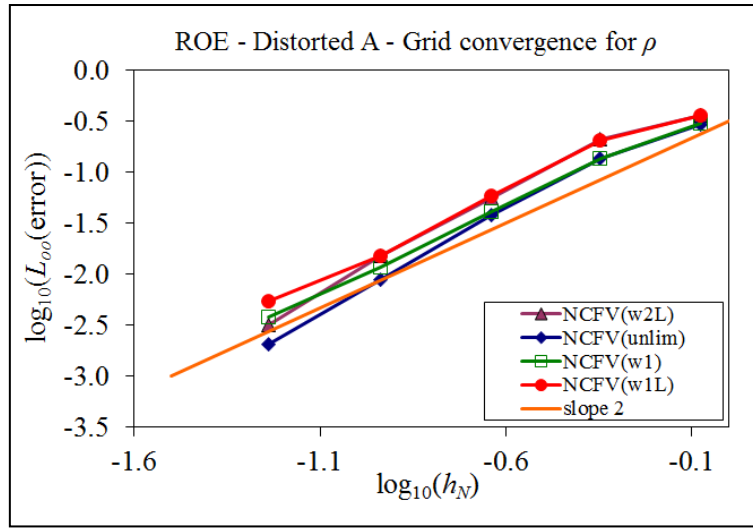
Σχήμα 3.39: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του HLLC προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_III.



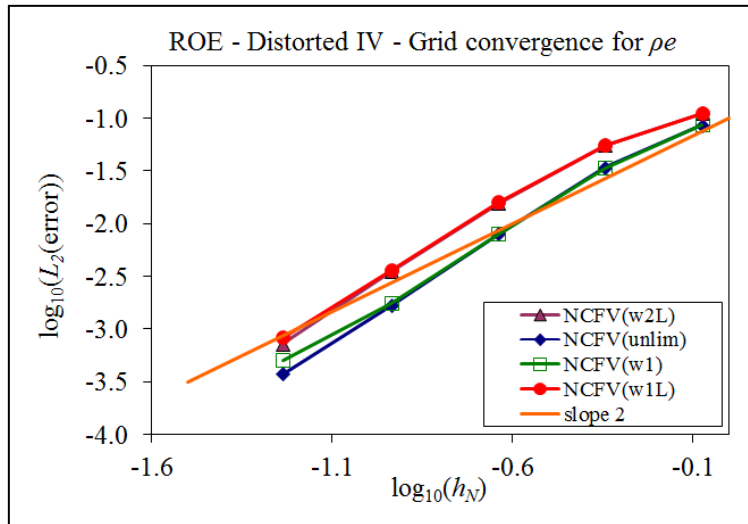
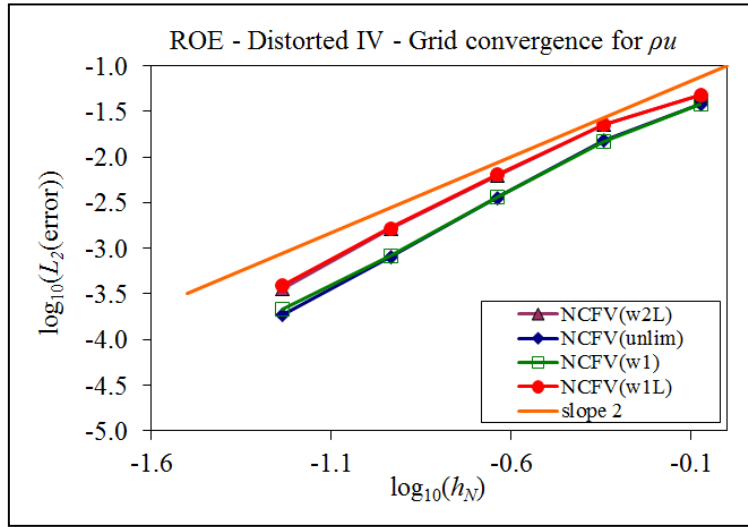
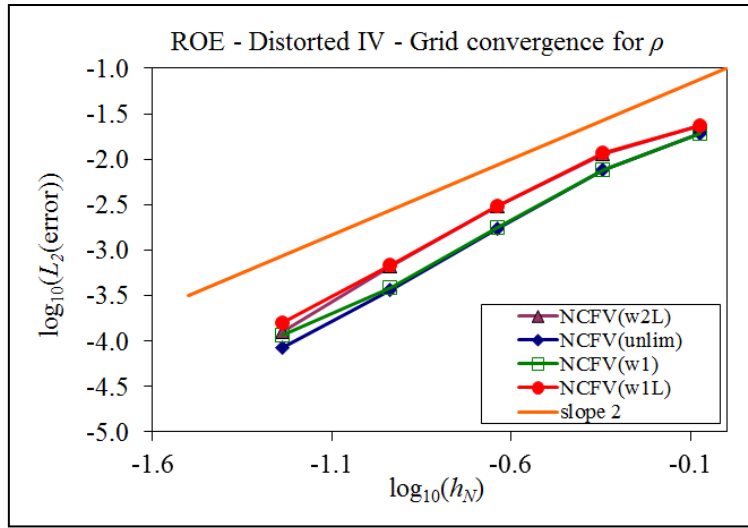
Σχήμα 3.40: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_A.



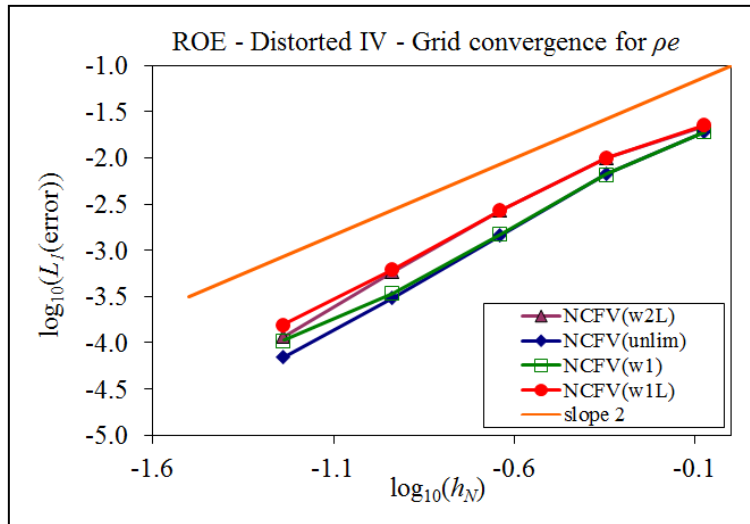
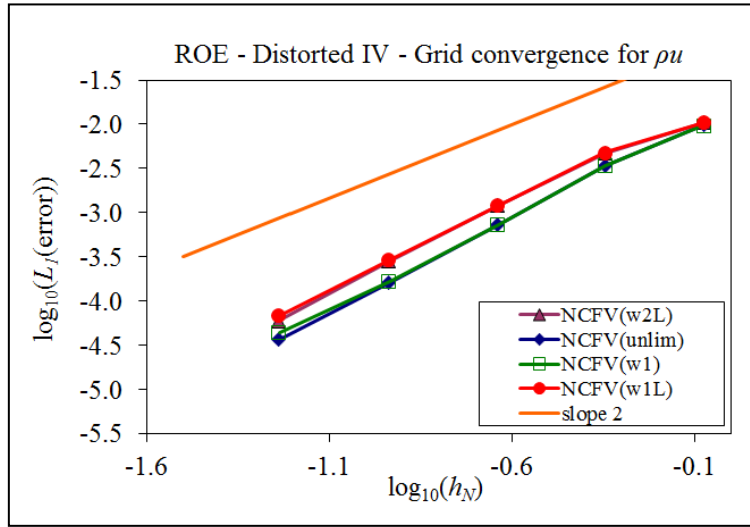
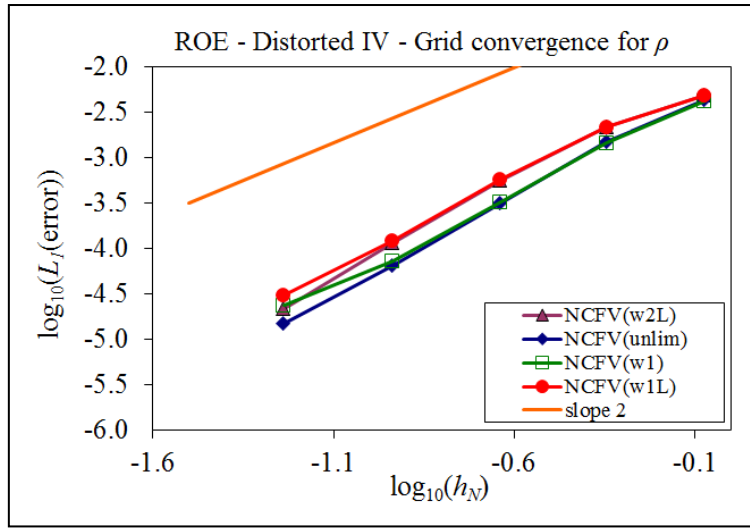
Σχήμα 3.41: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_A.



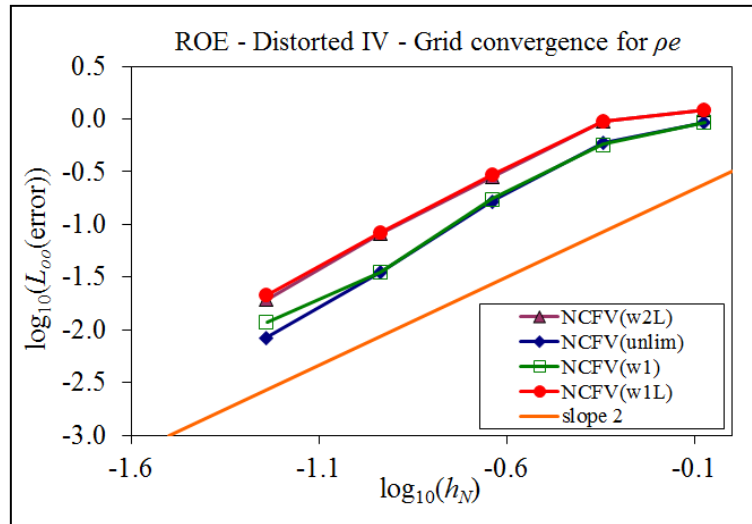
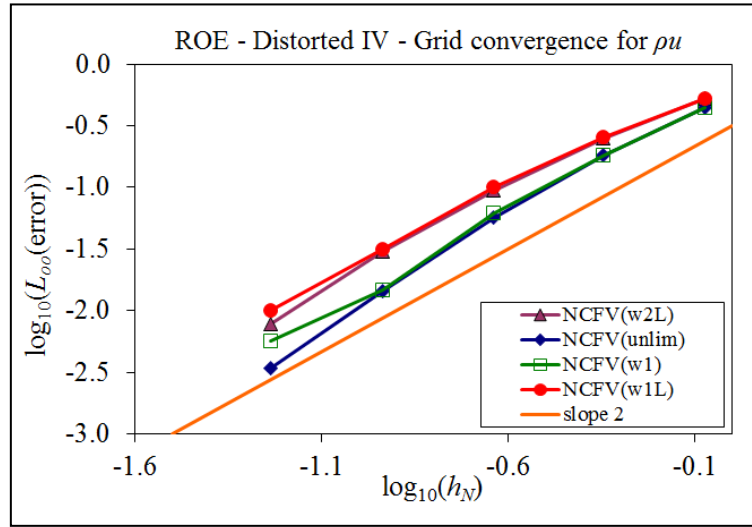
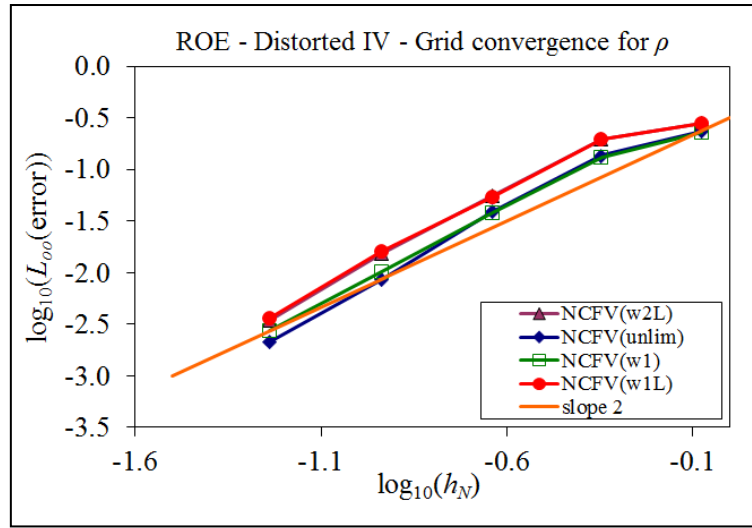
Σχήμα 3.42: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_{∞}) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_A.



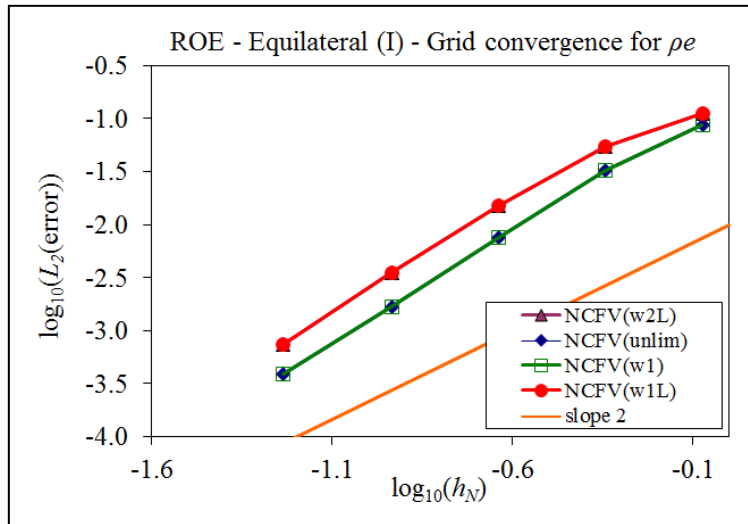
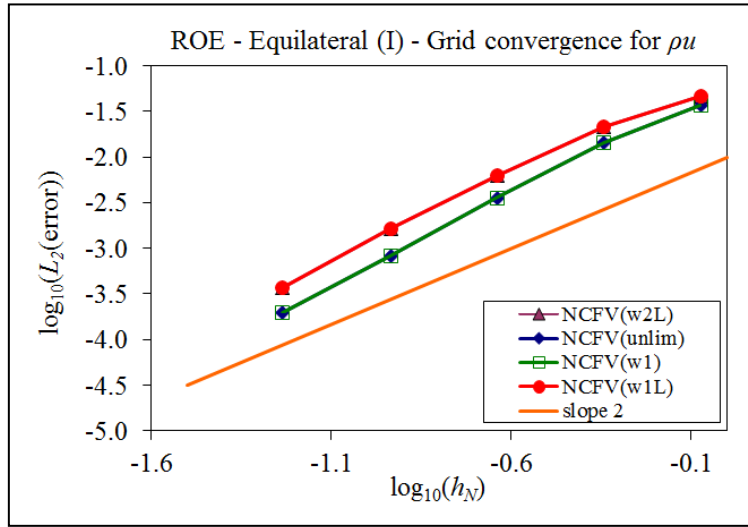
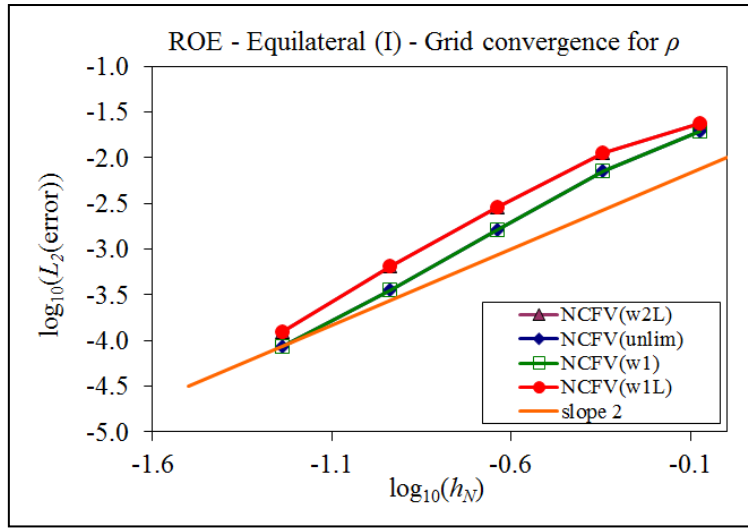
Σχήμα 3.43: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για σχήμα 2^{th} τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_IV.



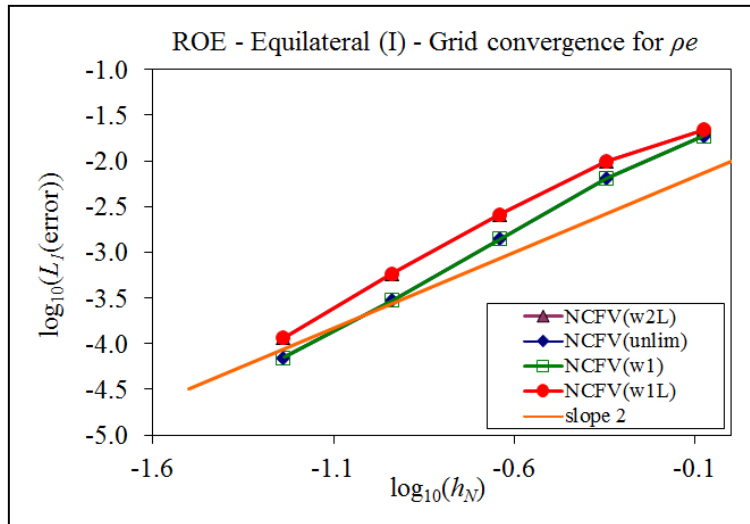
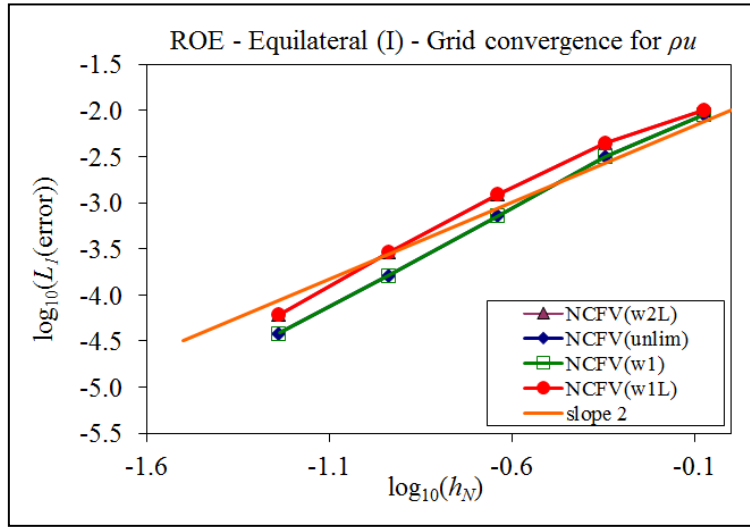
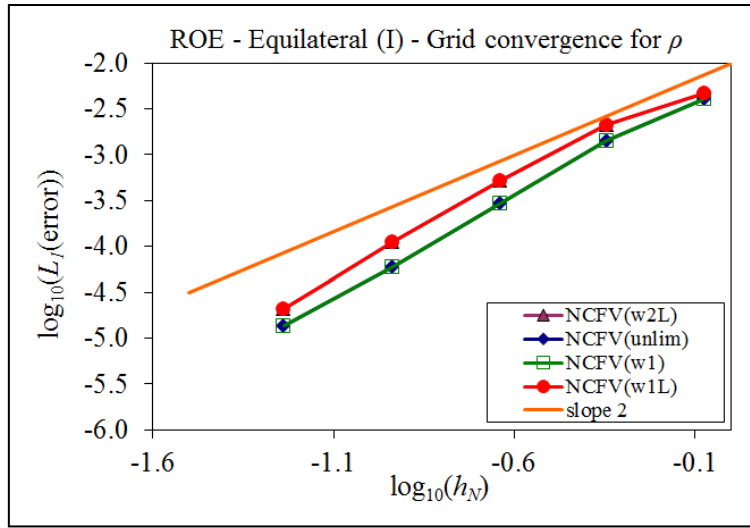
Σχήμα 3.44: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για σχήμα 2^{th} τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_IV.



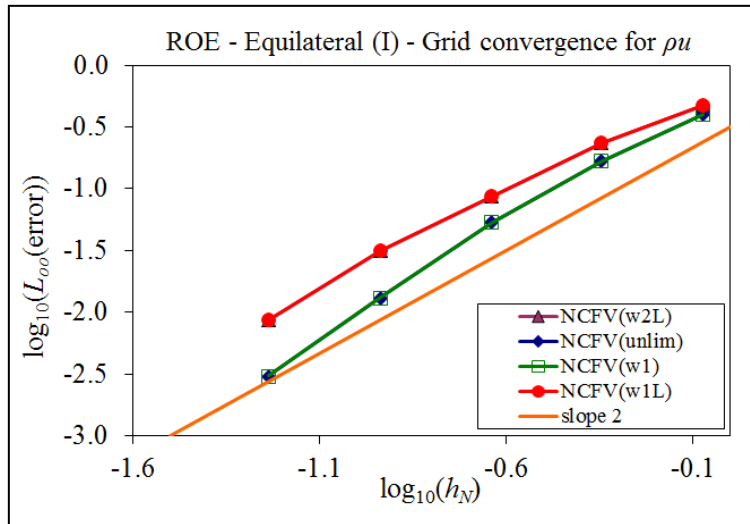
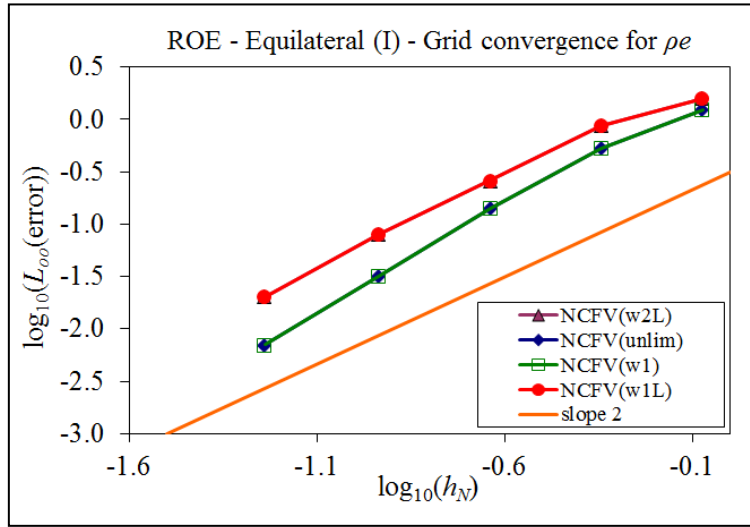
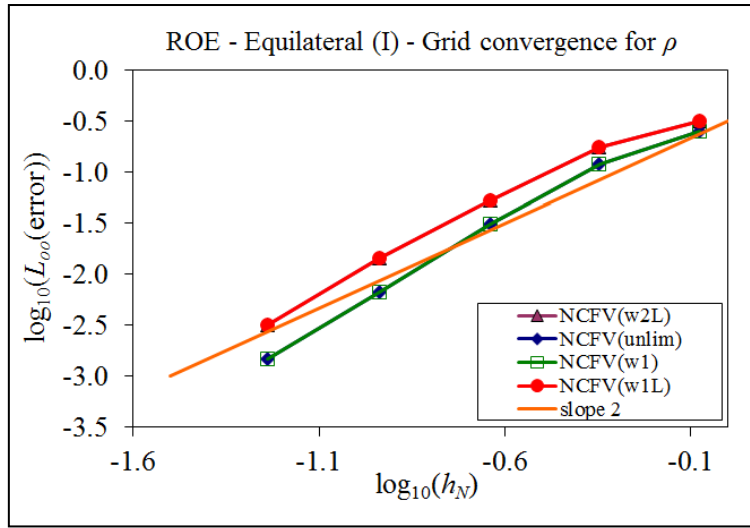
Σχήμα 3.45: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Distorted_IV.



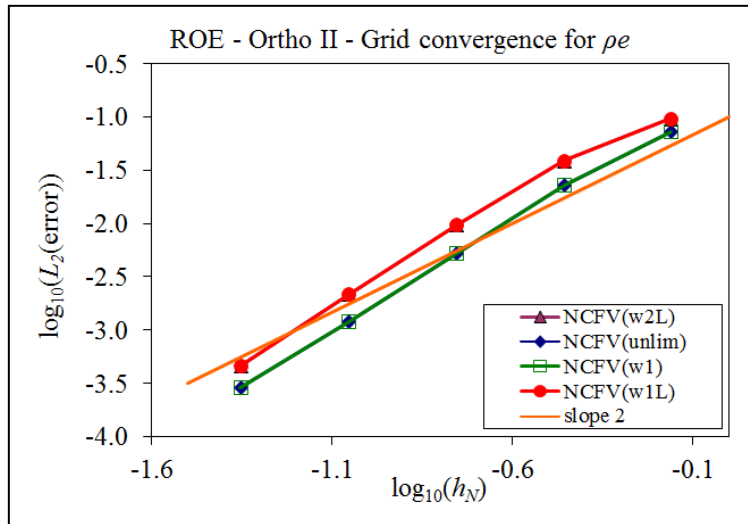
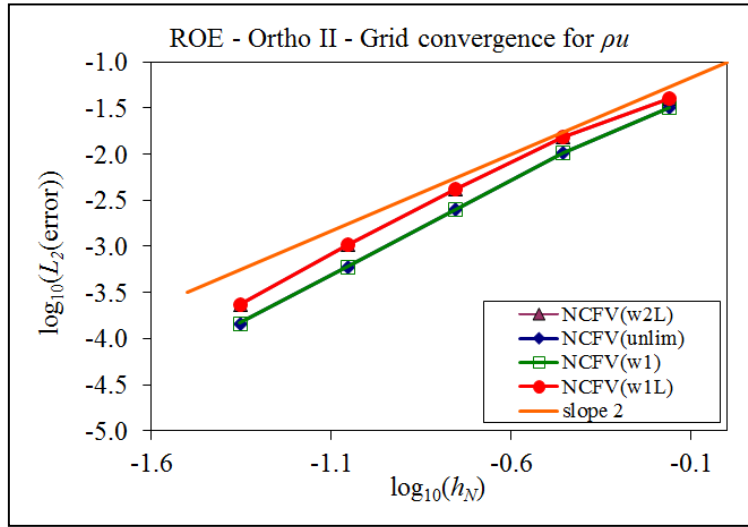
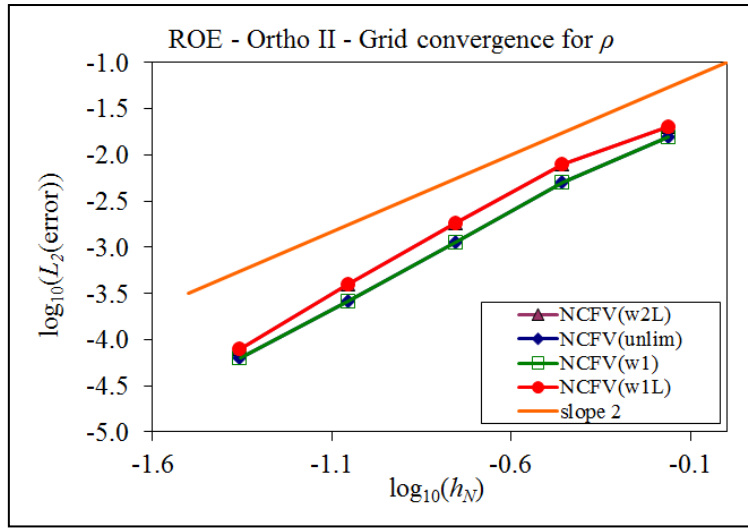
Σχήμα 3.46: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Equilateral_I.



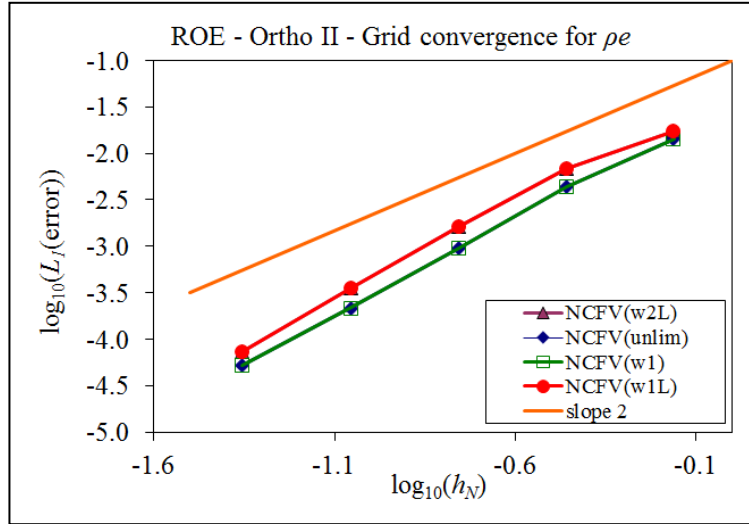
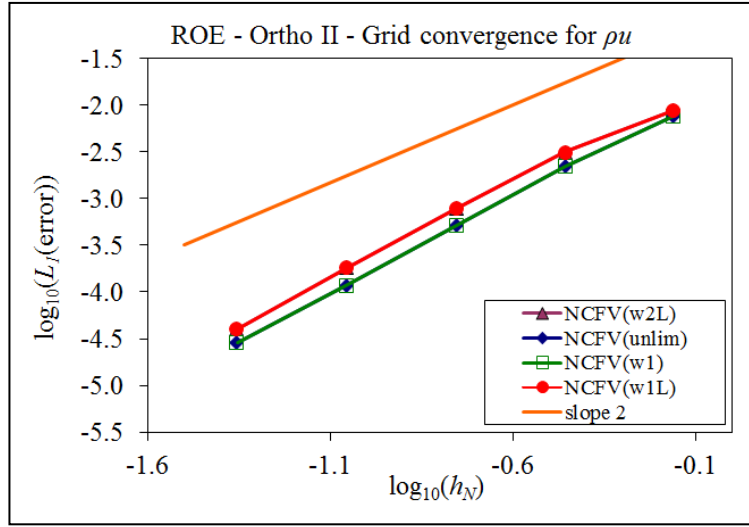
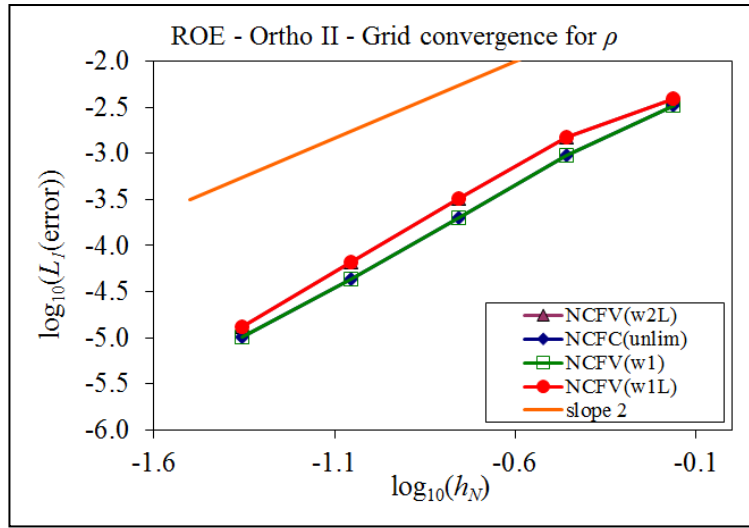
Σχήμα 3.47: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Equilateral_I.



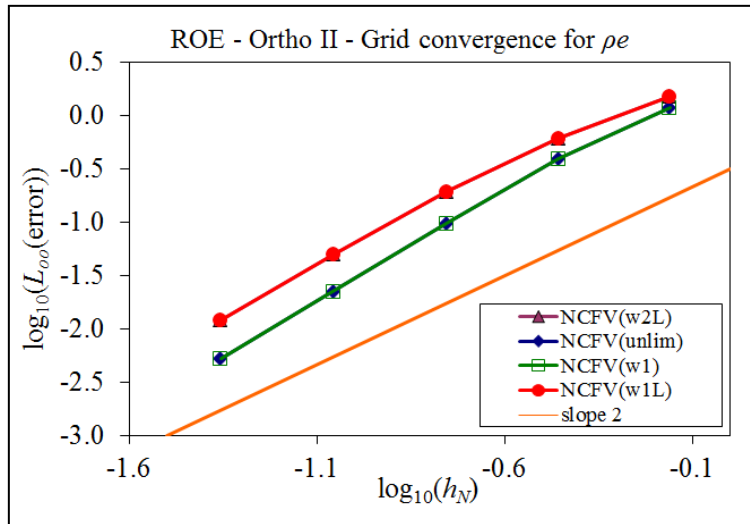
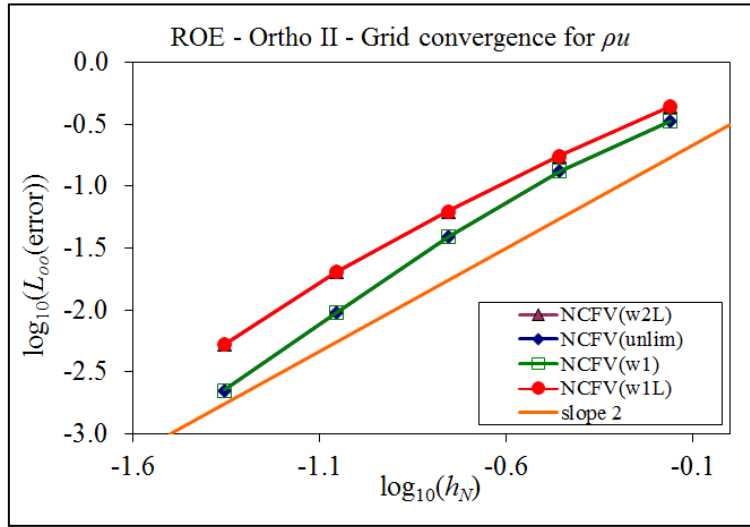
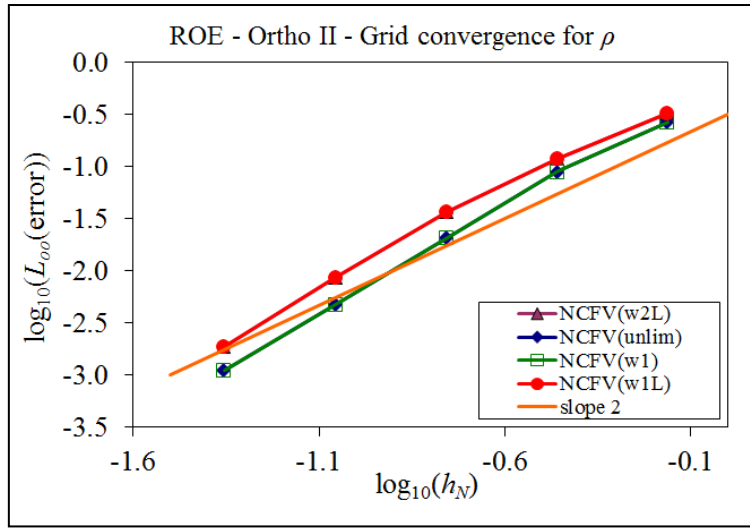
Σχήμα 3.48: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Equilateral_I.



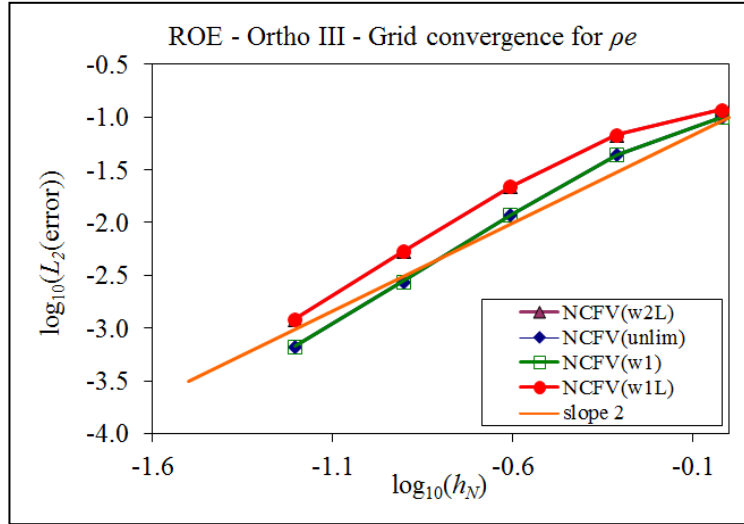
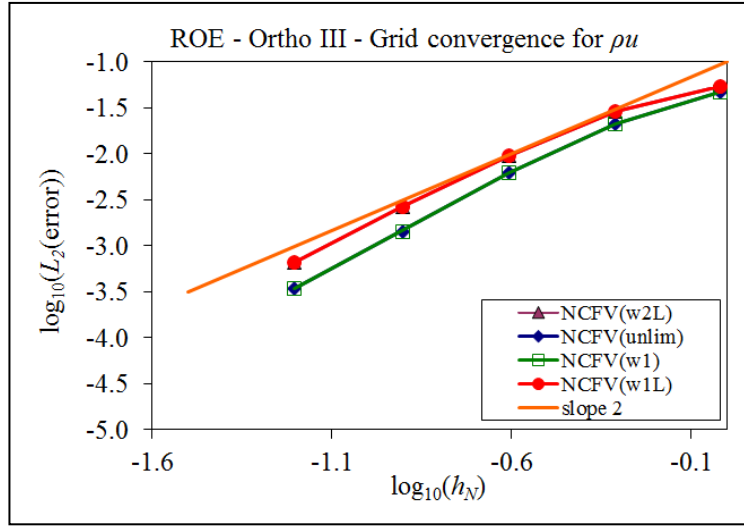
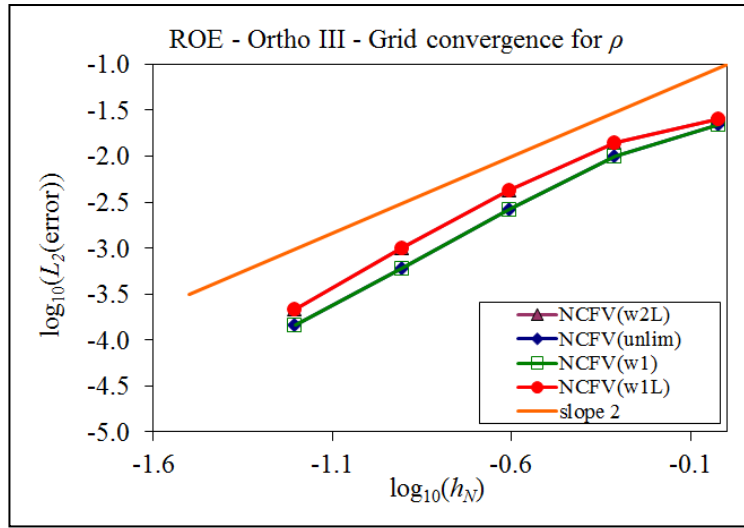
Σχήμα 3.49: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_II.



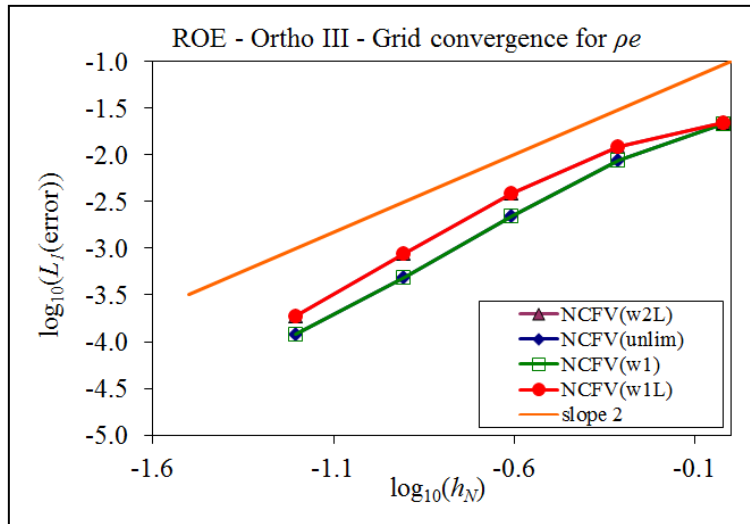
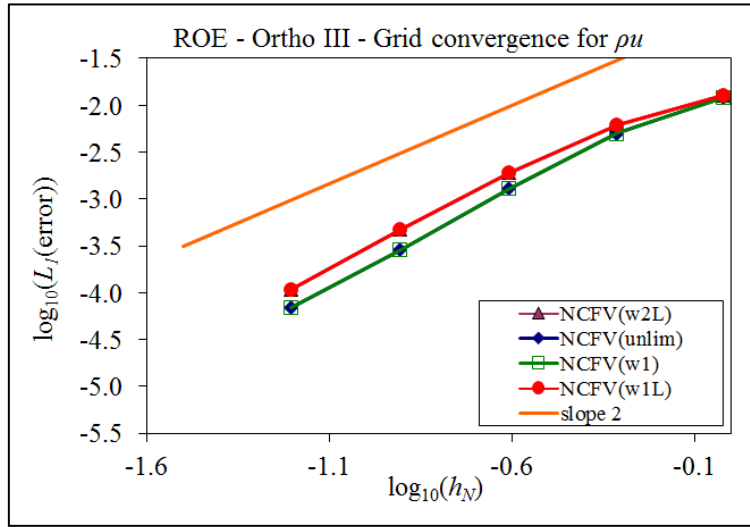
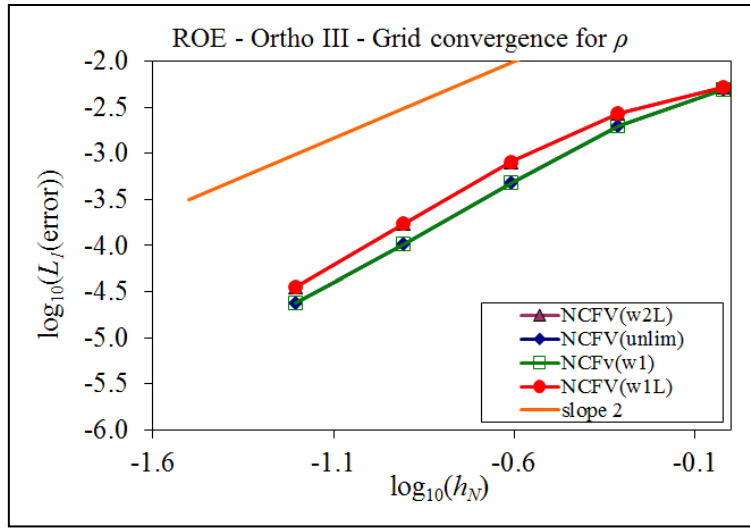
Σχήμα 3.50: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_II.



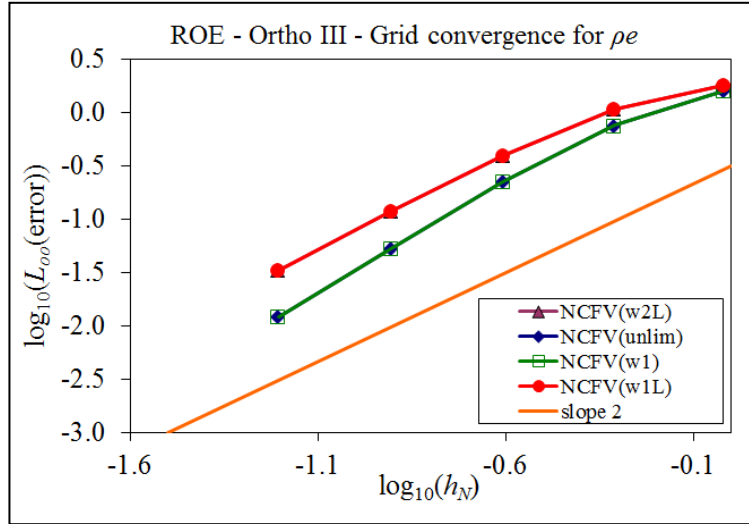
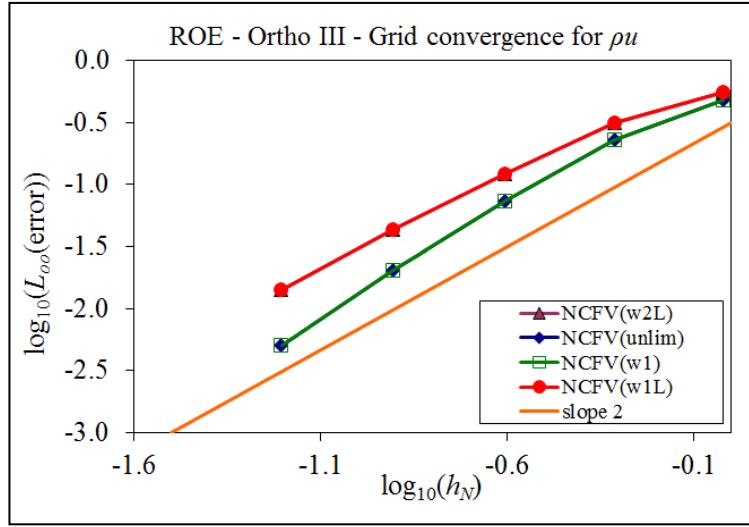
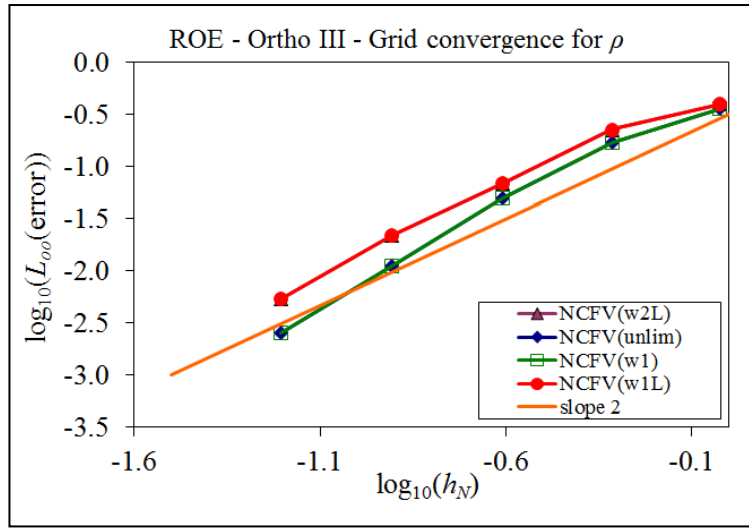
Σχήμα 3.51: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_II.



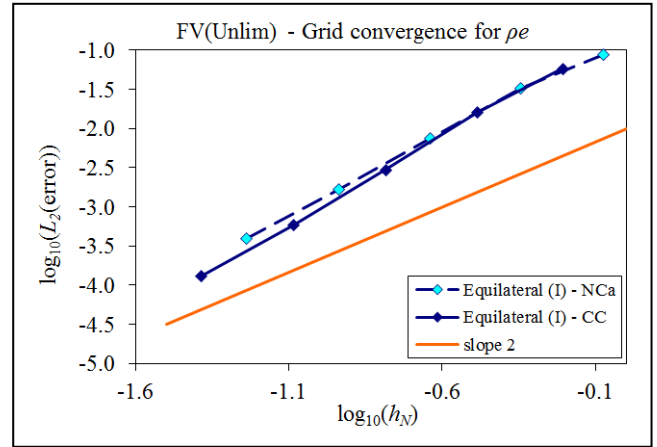
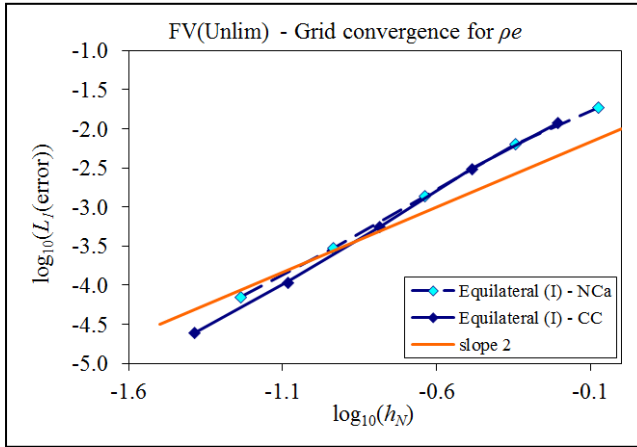
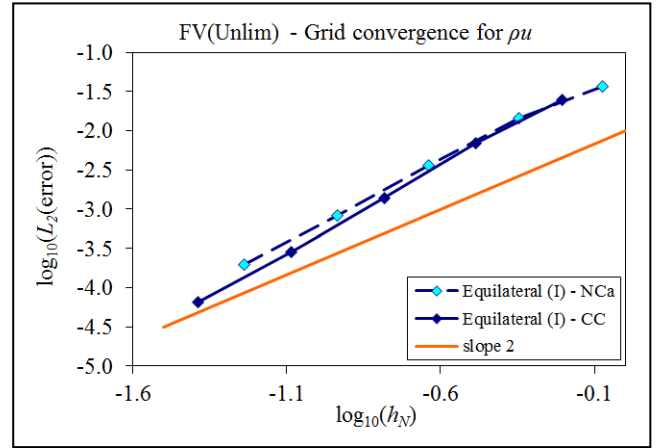
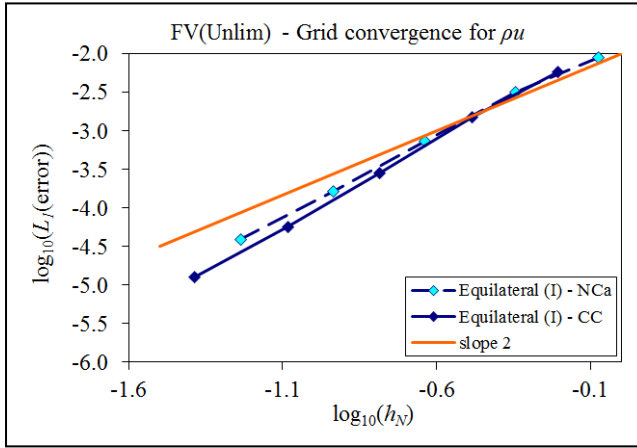
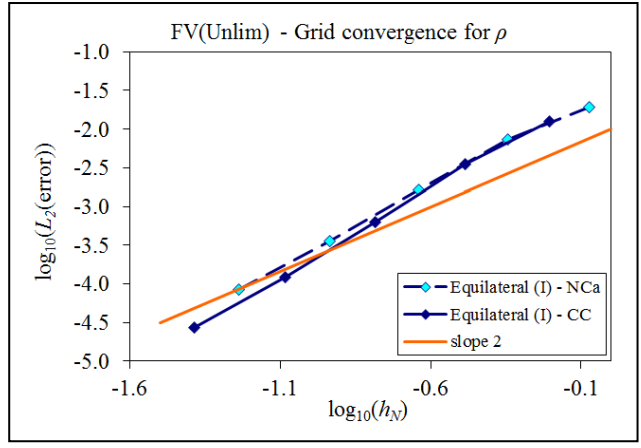
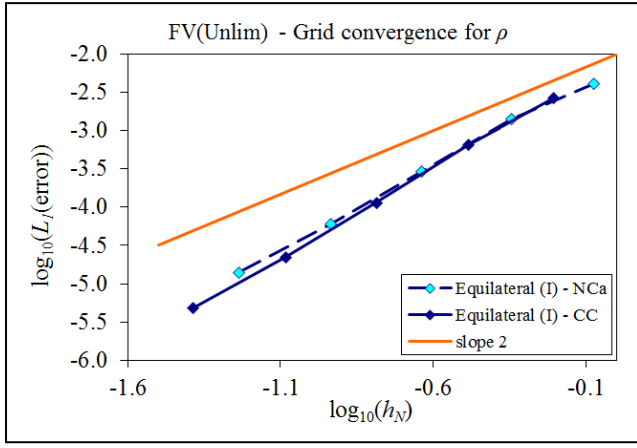
Σχήμα 3.52: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_2) για σχήμα $2^{\text{ης}}$ τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_III.



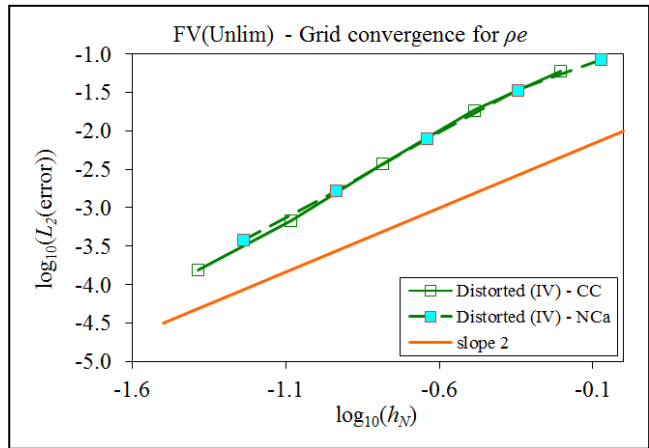
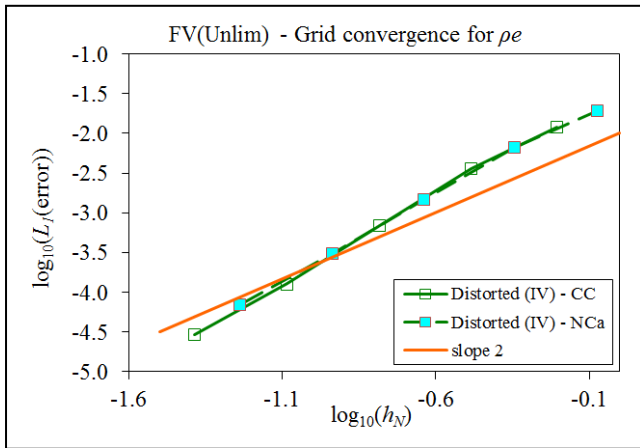
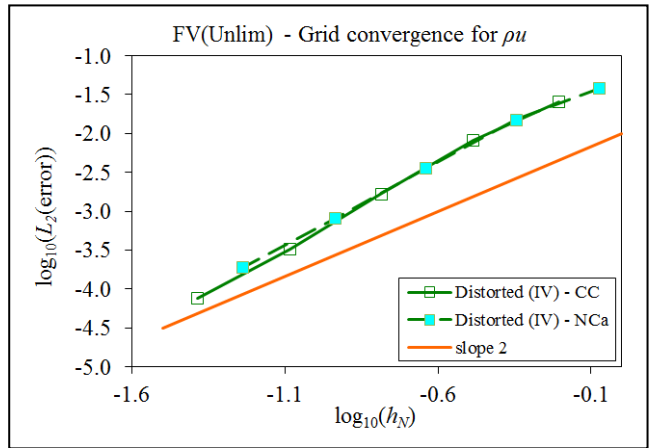
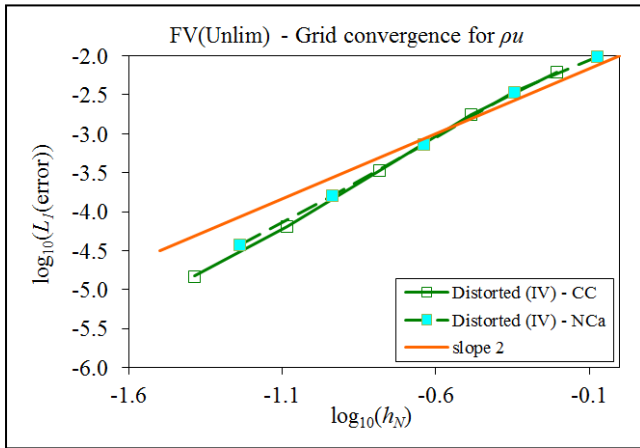
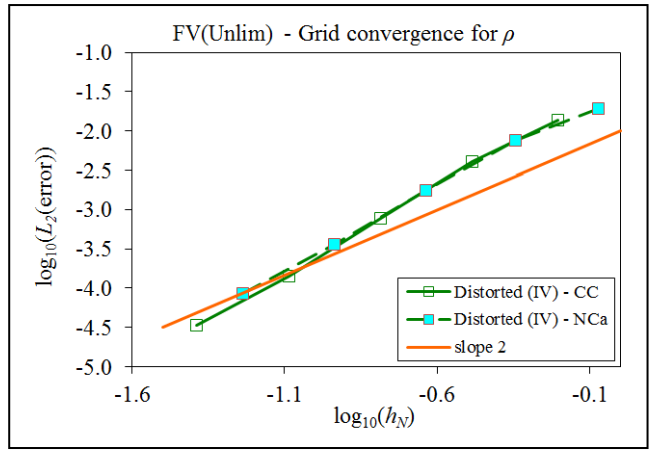
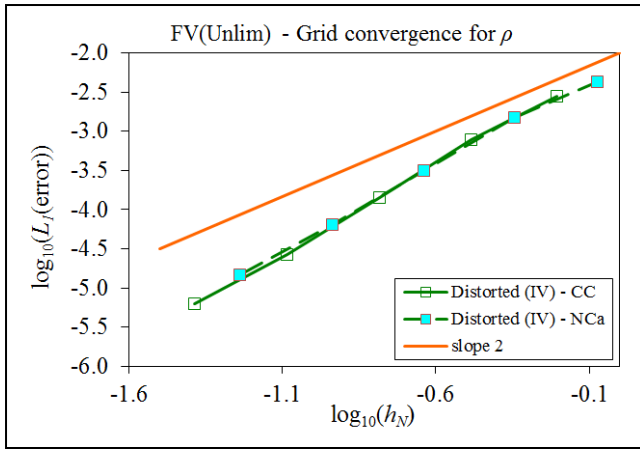
Σχήμα 3.53: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_1) για σχήμα 2_{η} τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_III.



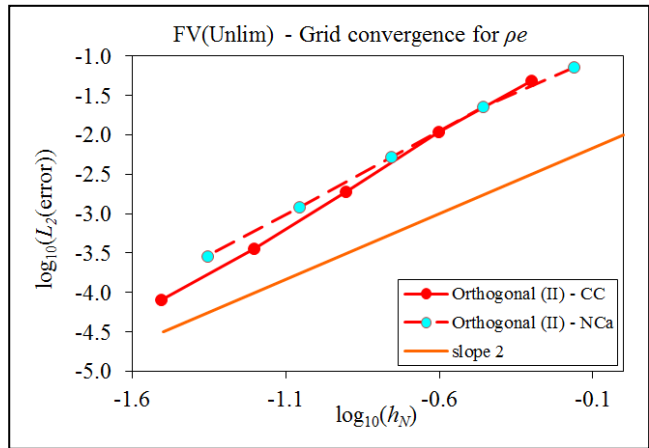
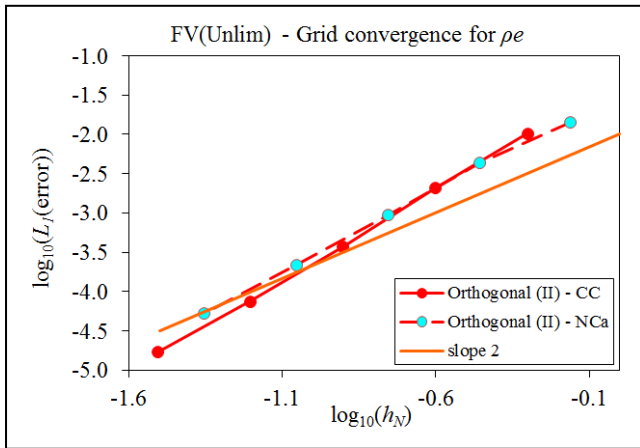
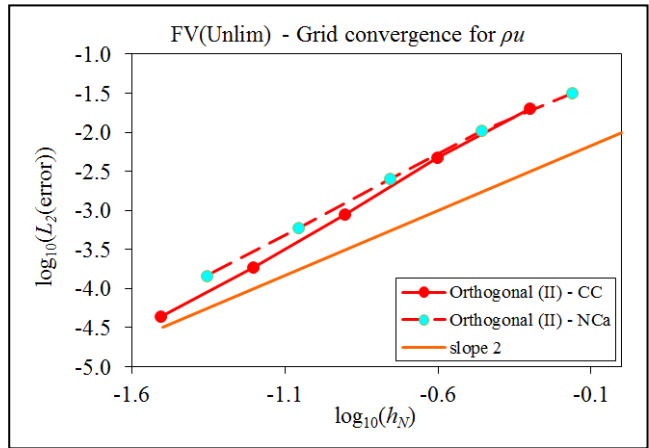
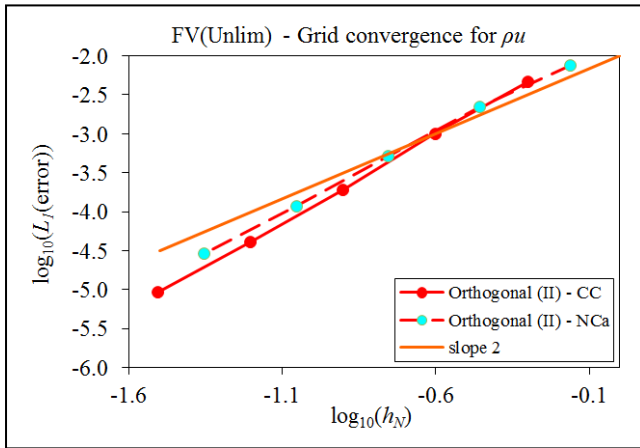
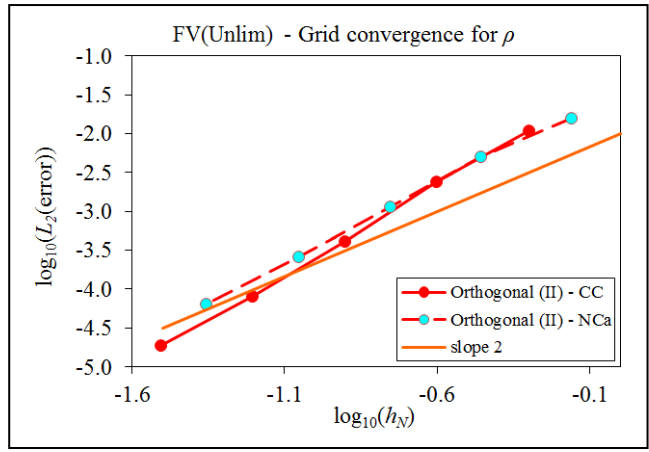
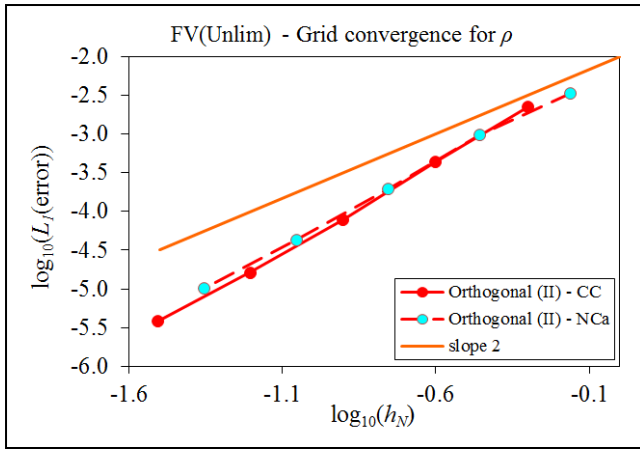
Σχήμα 3.54: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα ρυθμού σύγκλισης (L_∞) για σχήμα 2_{ης} τάξης, για όλες τις συναρτήσεις περιορισμού (Unlimited – W_1 – W_{1L} – W_{2L}), με χρήση του ROE προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, για τον τύπο πλέγματος Orthogonal_III.



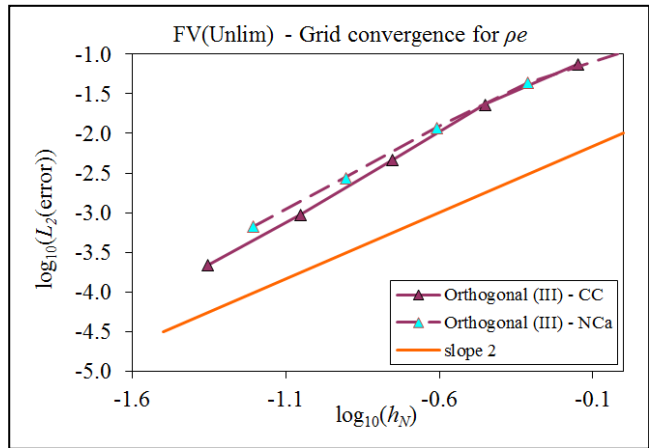
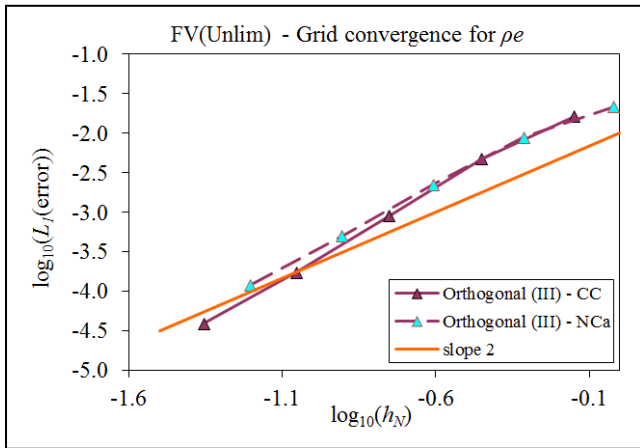
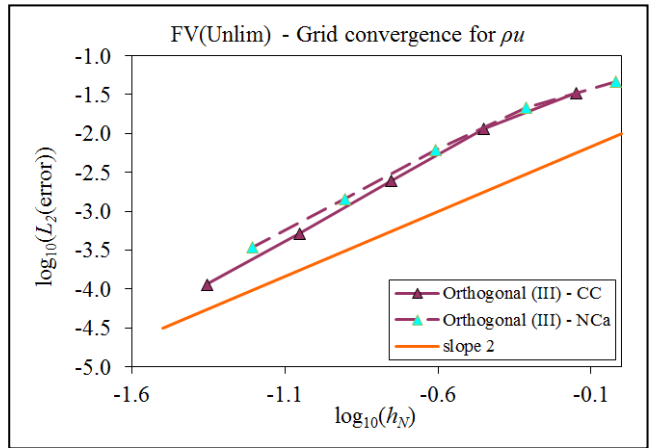
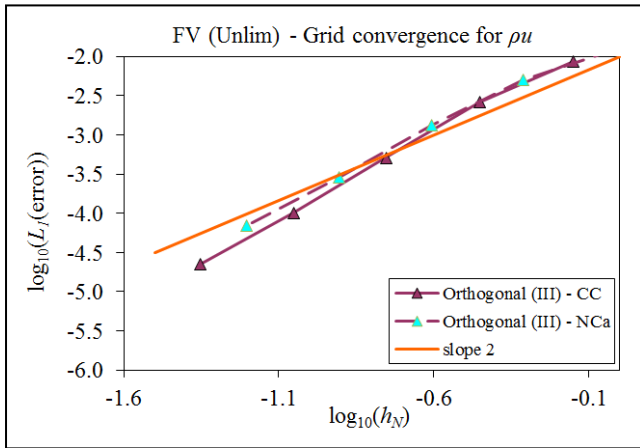
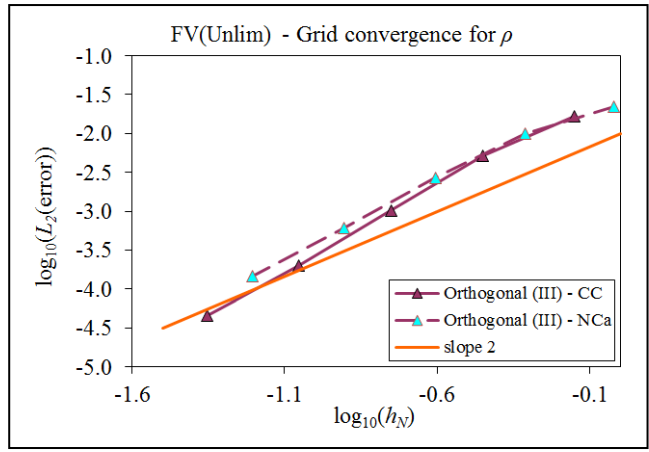
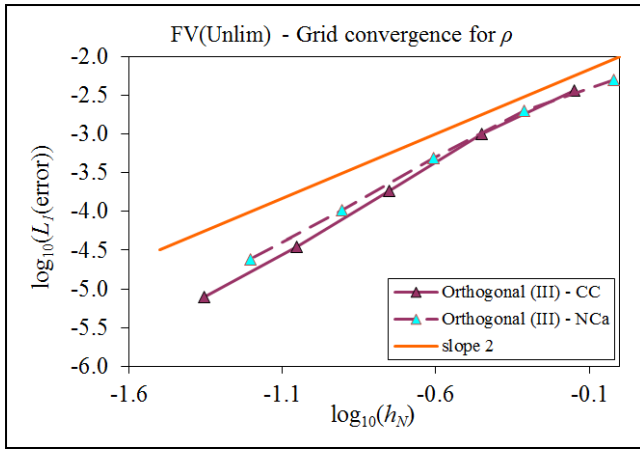
Σχήμα 3.55: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα κεντροκομβικής (NCa) και κεντροκυελικής (CC) προσέγγισης 2^{ης} τάξης σχήματος, για την Unlimited συνάρτηση ανακατασκευής, για τις νόρμες σφαλμάτων L_1 και L_2 , στον τύπο πλέγματος Equilateral_I, για τον ROE προσεγγιστικό επιλύτη Riemann.



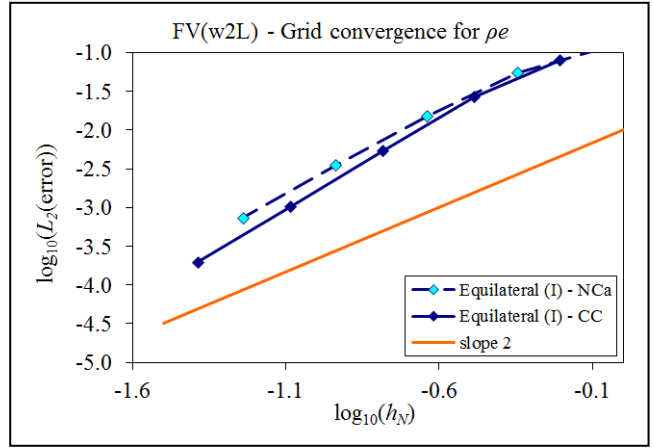
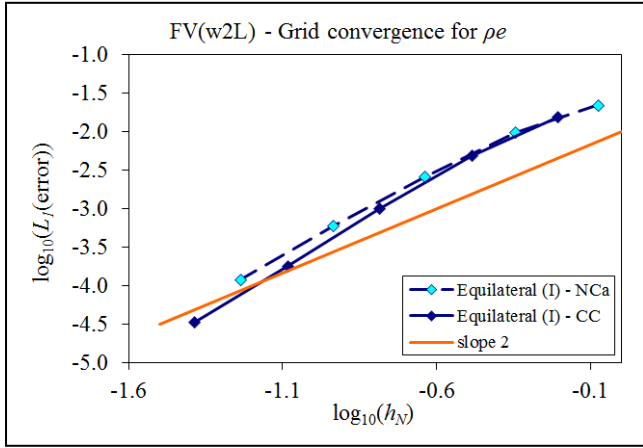
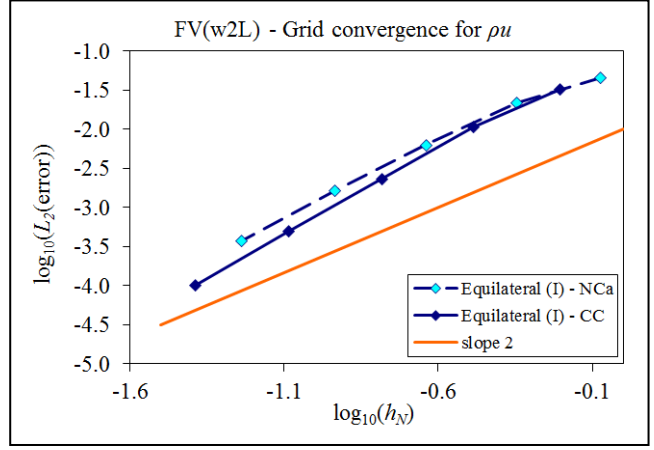
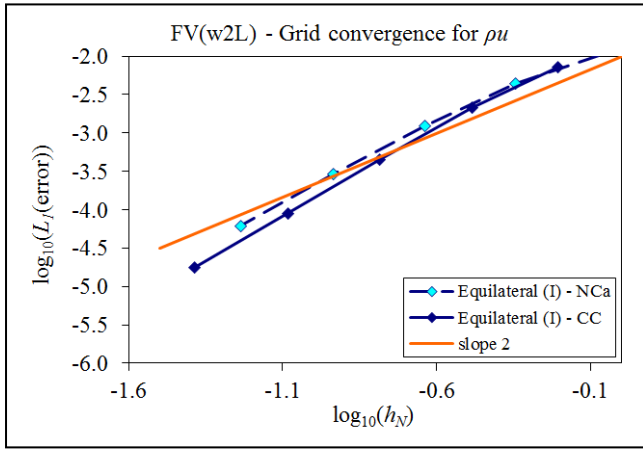
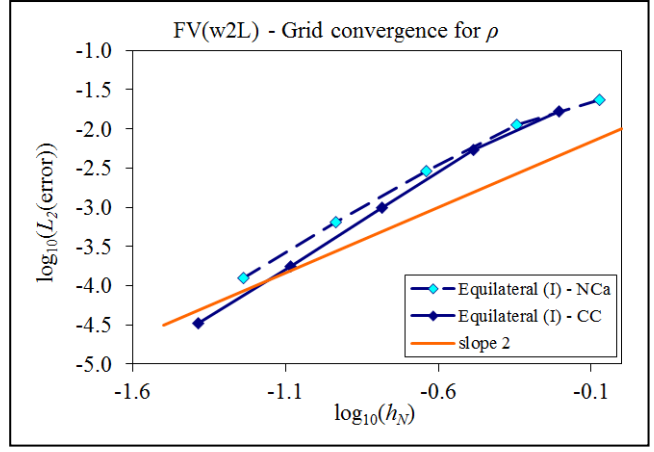
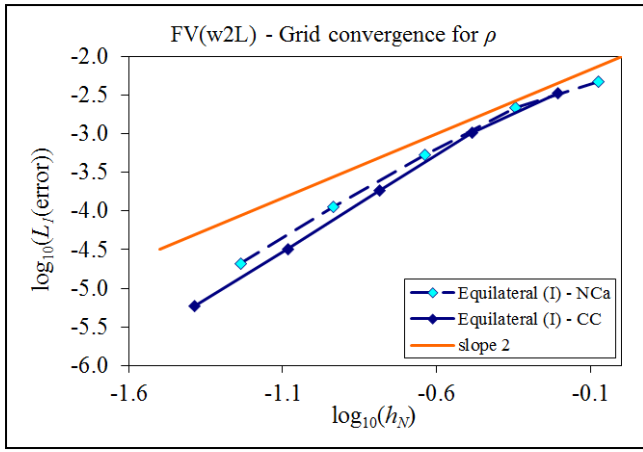
Σχήμα 3.56: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα κεντροκομβικής (NCa) και κεντροκυβελικής (CC) προσέγγισης $2^{\text{ης}}$ τάξης σχήματος, για την Unlimited συνάρτηση ανακατασκευής, για τις νόρμες σφαλμάτων L_1 και L_2 , στον τύπο πλέγματος Distorted_IV, για τον ROE προσεγγιστικό επιλύτη Riemann.



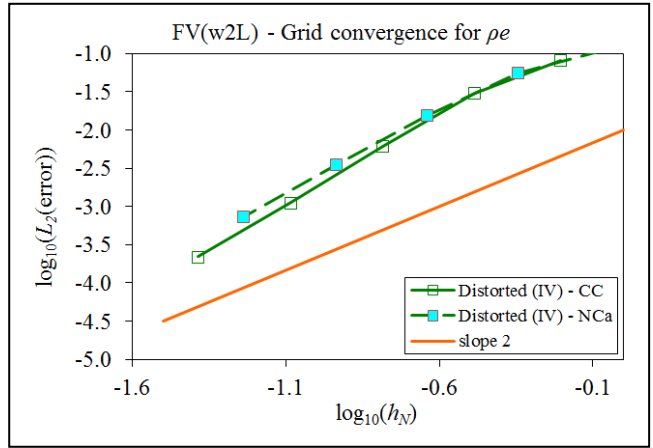
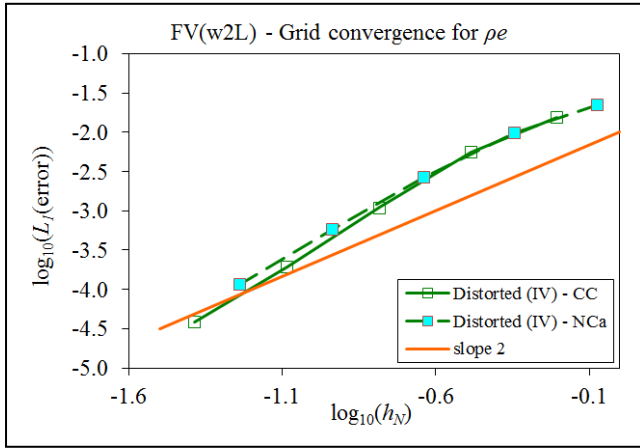
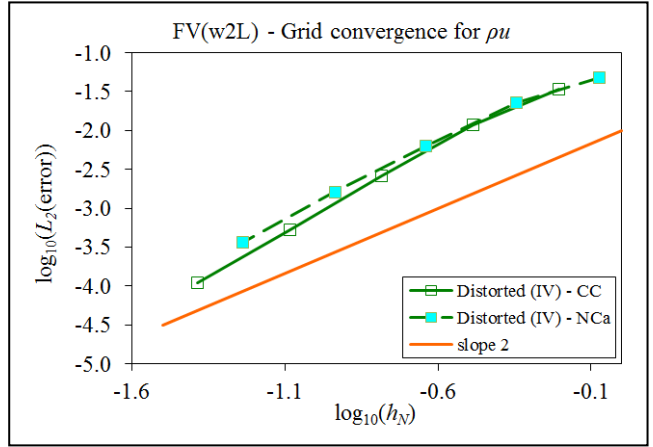
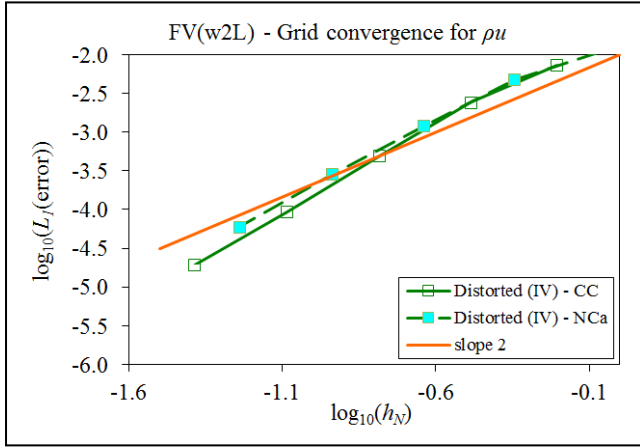
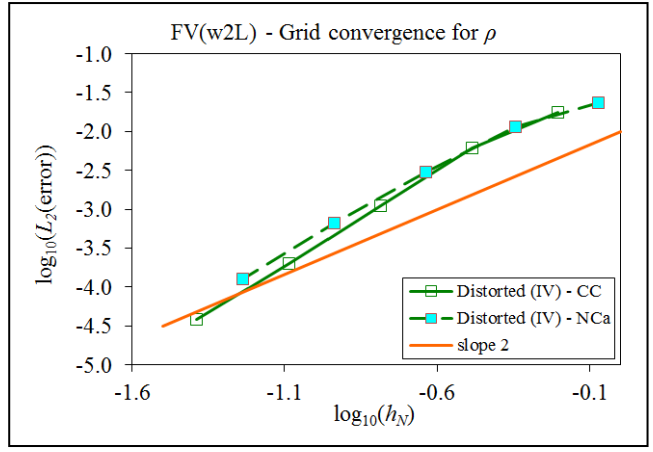
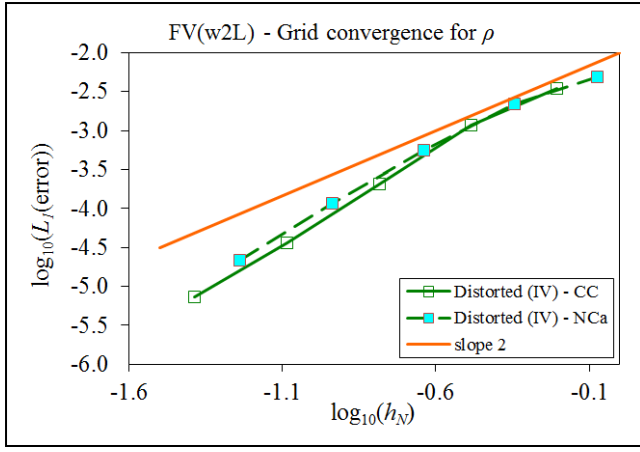
Σχήμα 3.57: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα κεντροκομβικής (NCa) και κεντροκυβελικής (CC) προσέγγισης $2^{\text{ης}}$ τάξης σχήματος, για την Unlimited συνάρτηση ανακατασκευής, για τις νόρμες σφαλμάτων L_1 και L_2 , στον τύπο πλέγματος Orthogonal_II, για τον ROE προσεγγιστικό επιλύτη Riemann.



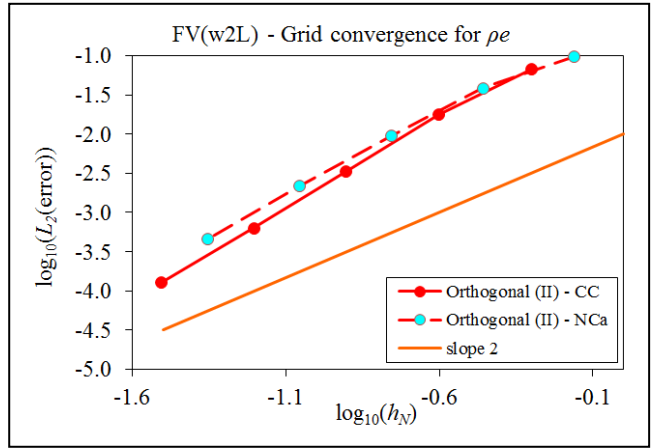
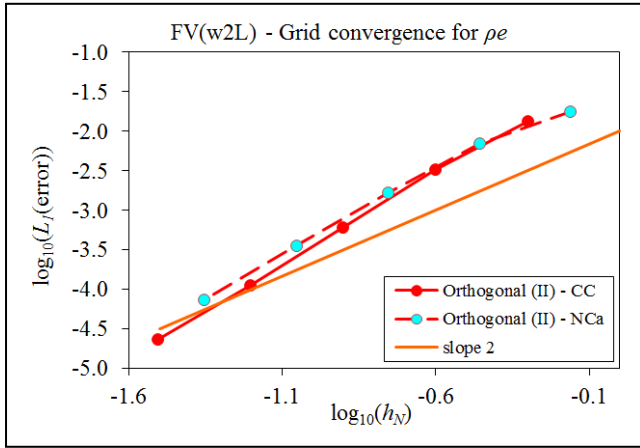
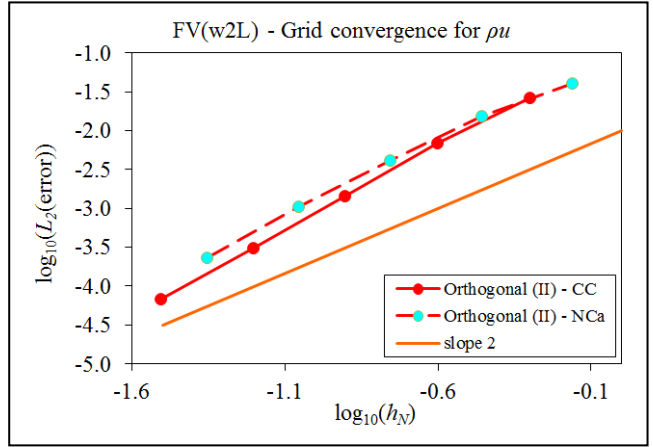
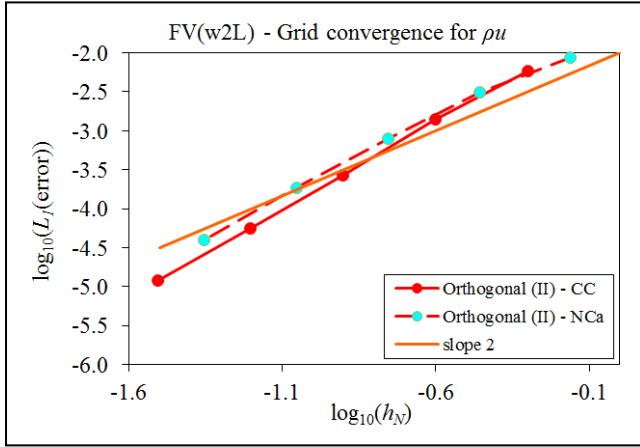
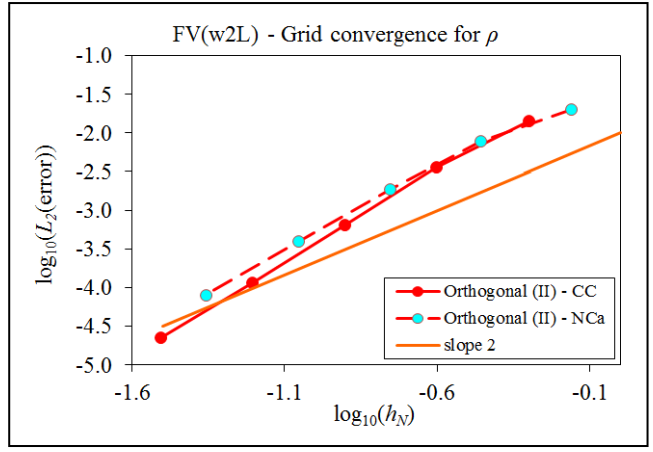
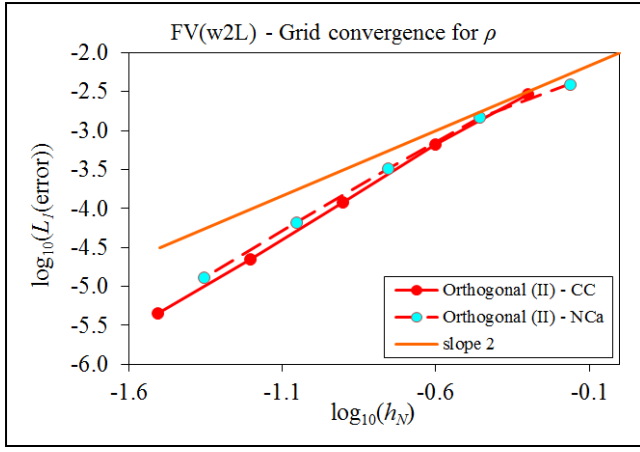
Σχήμα 3.58: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα κεντροκομβικής (NCa) και κεντροκυβελικής (CC) προσέγγισης 2^{ης} τάξης σχήματος, για την Unlimited συνάρτηση ανακατασκευής, για τις νόρμες σφαλμάτων L_1 και L_2 , στον τύπο πλέγματος Orthogonal_III, για τον ROE προσεγγιστικό επιλύτη Riemann.



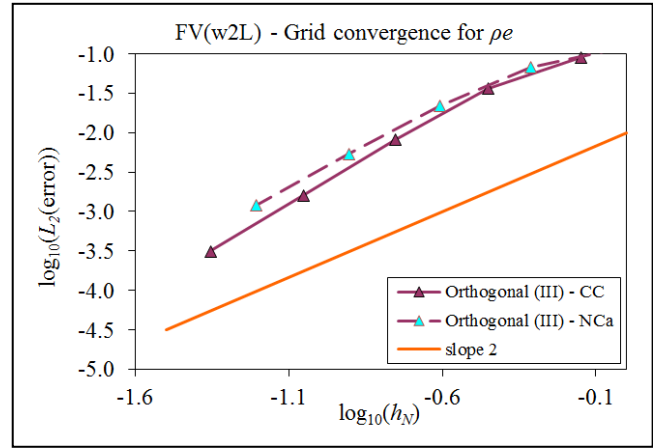
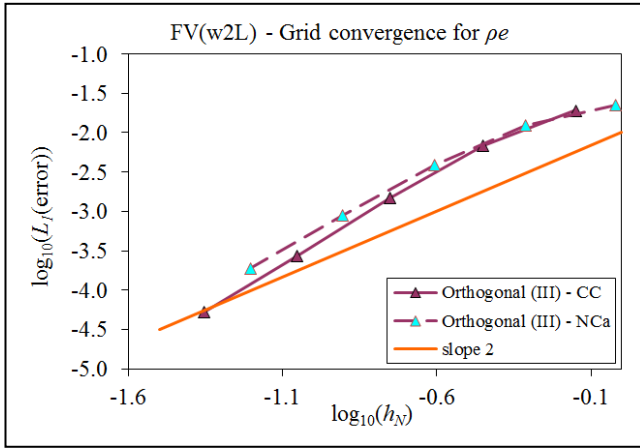
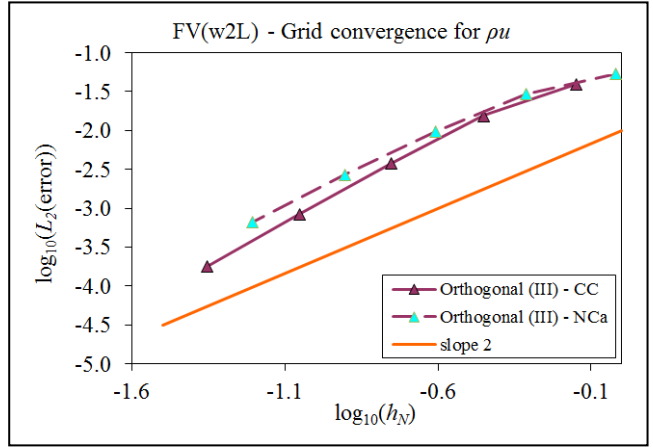
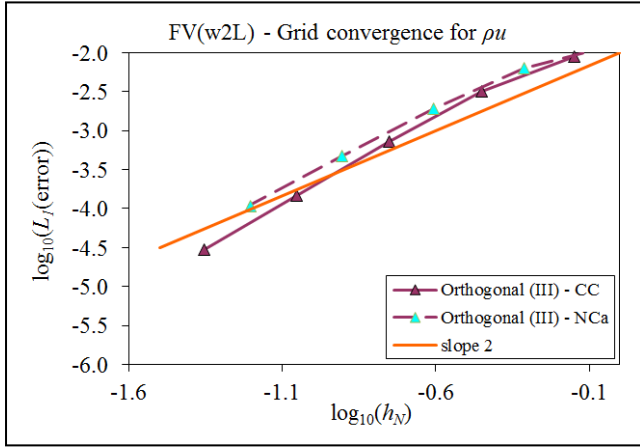
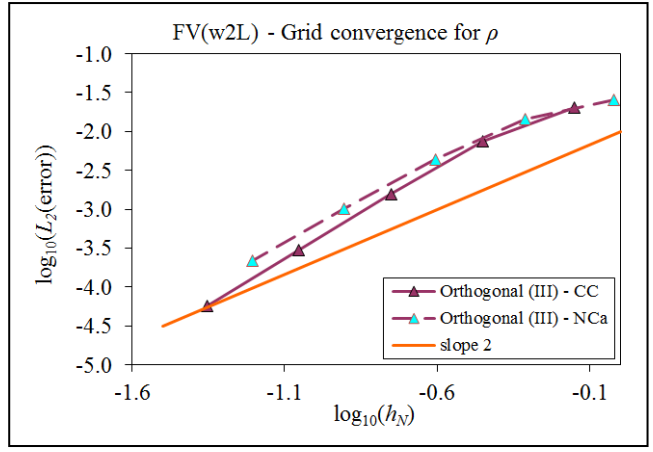
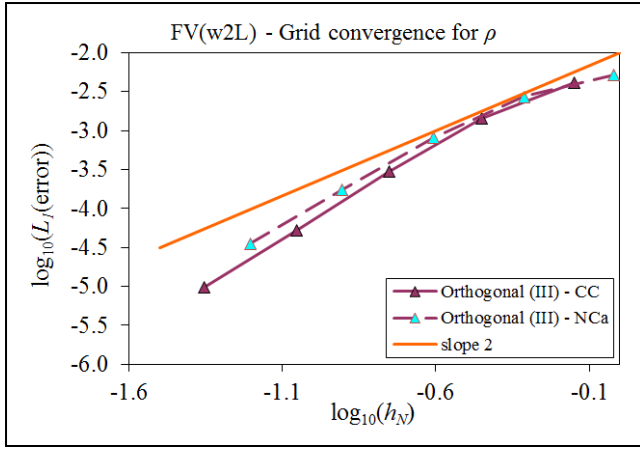
Σχήμα 3.59: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα κεντροκομβικής (NCa) και κεντροκυβελικής (CC) προσέγγισης 2^{15} τάξης σχήματος, για την W_{2L} συνάρτηση ανακατασκευής, για τις νόρμες σφαλμάτων L_1 και L_2 , στον τύπο πλέγματος Equilateral_I, για τον ROE προσεγγιστικό επιλύτη Riemann.



Σχήμα 3.60: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα κεντροκομβικής (NCa) και κεντροκυβελικής (CC) προσέγγισης 2^{75} τάξης σχήματος, για την W_{2L} συνάρτηση ανακατασκευής, για τις νόρμες σφαλμάτων L_1 και L_2 , στον τύπο πλέγματος Distorted_IV, για τον ROE προσεγγιστικό επιλύτη Riemann.



Σχήμα 3.61: Vortex case Συγκριτικά αποτελέσματα κεντροκομβικής (NCa) και κεντροκυψελικής (CC) προσέγγισης 2^{ης} τάξης σχήματος, για την W_{2L} συνάρτηση ανακατασκευής, για τις νόρμες σφαλμάτων L_1 και L_2 , στον τύπο πλέγματος Orthogonal_II, για τον ROE προσεγγιστικό επιλύτη Riemann.



Σχήμα 3.62: Vortex case – Συγκριτικά αποτελέσματα κεντροκομβικής (NCa) και κεντροκυβελικής (CC) προσέγγισης $2^{\text{ης}}$ τάξης σχήματος, για την W_{2L} συνάρτηση ανακατασκευής, για τις νόρμες σφαλμάτων L_1 και L_2 , στον τύπο πλέγματος Orthogonal_III, για τον ROE προσεγγιστικό επιλύτη Riemann.

3.2 Διηχητική ροή γύρω από την αεροτομή NACA0012

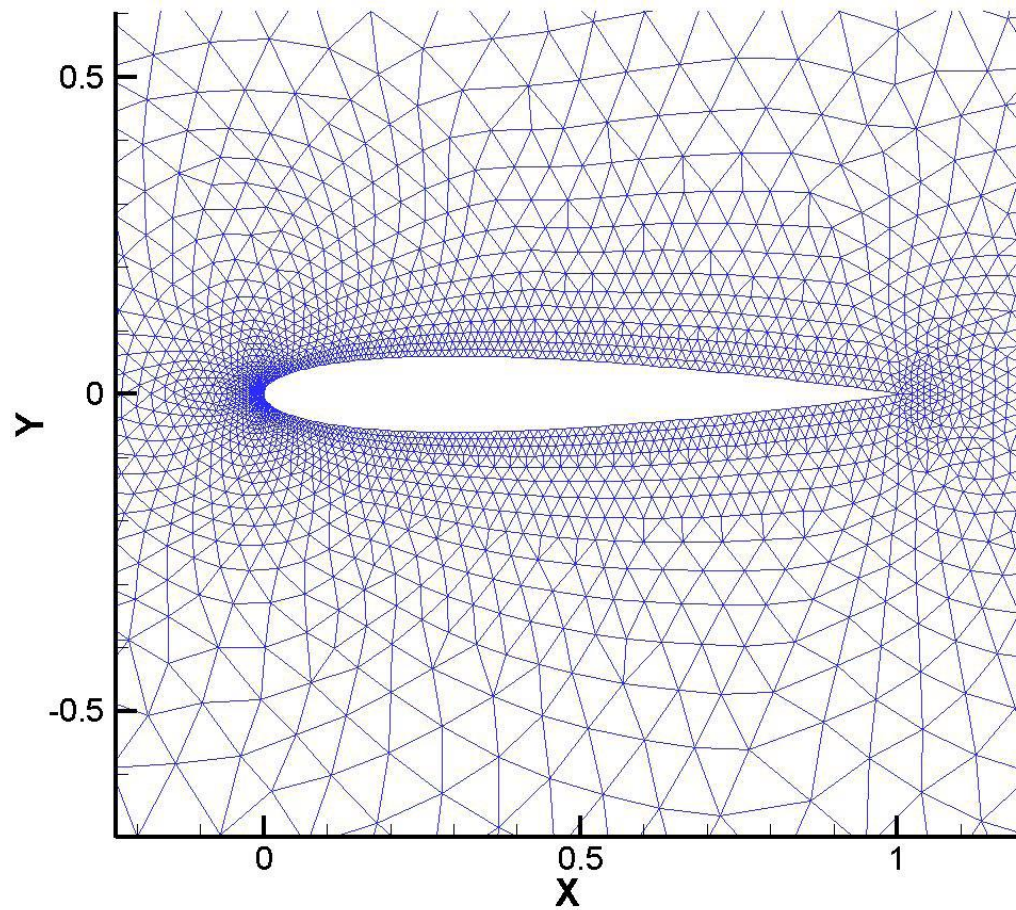
Το συγκεκριμένο πρόβλημα αναφέρεται στην επίλυση της συμπίεστης ατρίβους ροής γύρω από αεροτομή NACA0012 σε τρεις αριθμούς Mach (0.8, 0.85 και 2.0) με τις αντίστοιχες γωνίες προσβολής να είναι (1.25° , 1.0° , 0.0°). Το πλέγμα τριγωνικών στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από 6492 τριγωνικά στοιχεία και 3366 κόμβους, με 200 επιφανειακούς κόμβους πάνω στην αεροτομή (Σχήμα 3.62). Χρησιμοποιούνται 2 διαφορετικοί προσεγγιστικοί επιλύτες του προβλήματος Riemann (του Roe και ο HLLC), ενώ το πρόβλημα λύνεται με 5 διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού: Van Albada - Van Leer (VA), Minmod (MM), Super Bee (SB), MC, Van Leer (VL), προσαρμοσμένες όλες στη μεθοδολογία τμηματικής ανακατασκευής που αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Παρουσιάζονται για κάθε περίπτωση γραφήματα ιστορίας σύγκλισης της λύσης, καθώς και γραφήματα σύγκρισης του συντελεστή πίεσης C_p στην επιφάνεια της αεροτομής. Επιπρόσθετα, περιλαμβάνονται διδιάστατα γραφήματα διανομής του αριθμού Mach, σε διαφορετικές περιοχές ενδιαφέροντος, για να φανεί η επίδραση των διαφορετικών συναρτήσεων περιορισμού στην ποιότητα της λύσης.

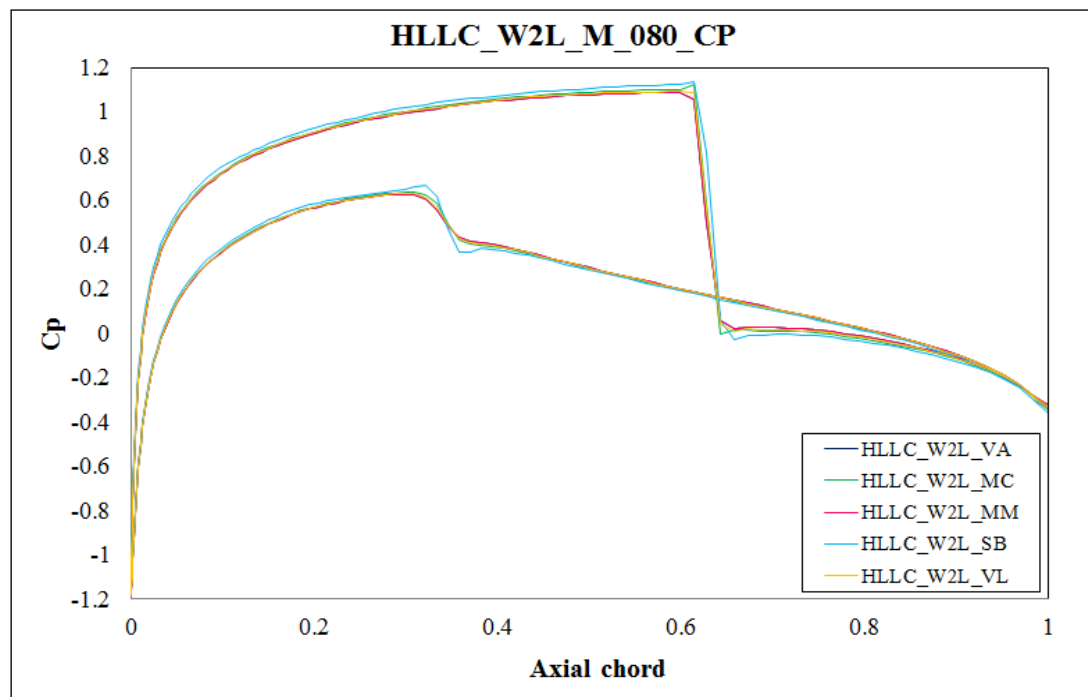
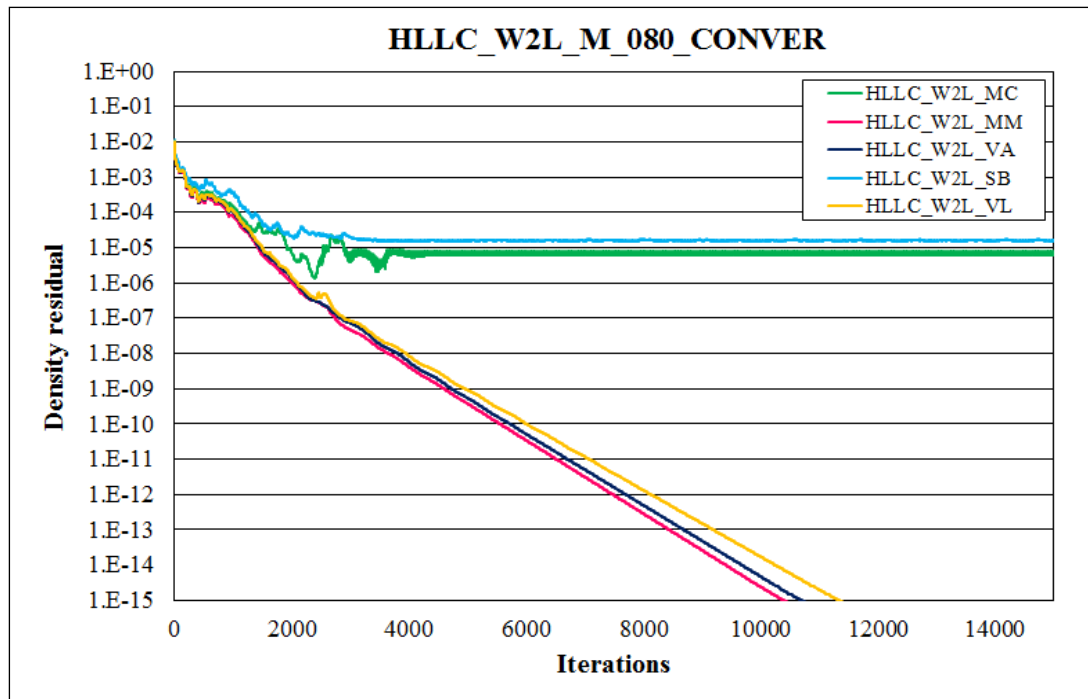
Στο σχήμα 3.63 παρουσιάζεται κοντινή άποψη του υπολογιστικού πλέγματος κοντά στην αεροτομή. Στα σχήματα 3.64 έως 3.69 παρουσιάζονται διαγράμματα σύγκλισης και διαγράμματα C_p για τους 2 προσεγγιστικούς επιλύτες (HLLC και Roe) και τις 3 διαφορετικές συνθήκες ροής. Από τα διαγράμματα ιστορίας της σύγκλισης φαίνεται ότι οι συναρτήσεις περιορισμού που έχουν πολύ απότομη (sharp) συμπεριφορά οδηγούν σε κακή σύγκλιση ή ακόμα και αποτυχία σύγκλισης (π.χ. Superbee και MC). Επίσης για τις "προβληματικές" συναρτήσεις περιορισμού η χρήση του HLLC επιλύτη οδηγεί σε καλύτερη συμπεριφορά σε σχέση με τον επιλύτη του Roe. Για τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν ο συνδυασμός της παρούσας μεθοδολογίας με την συνάρτηση περιορισμού Minmod αποδείχθηκε η πιο ασφαλής και στιβαρή, ενώ στις περισσότερες περιπτώσεις έδωσε και την ταχύτερη σύγκλιση. Αν παρατηρηθούν τα διαγράμματα C_p , για τις "προβληματικές" συναρτήσεις περιορισμού, παρουσιάζονται και (μη φυσικές) ταλαντώσεις πριν και μετά τα κύματα κρούσης. Το γενικότερο συμπέρασμα είναι ότι η παρούσα μεθοδολογία συνδυάζεται καλύτερα με ομαλές συναρτήσεις περιορισμού της κλίσης για την επίτευξη ανακατασκευής της λύσης με σχήματα 2ης τάξης σε κεντροκομβική centroid-dual θεώρηση. Σημειώνεται ότι για την περίπτωση Mach=2.0 και για τον προσεγγιστικό επιλύτη του Roe δεν υπήρξε δυνατότητα να τρέξει η μεθοδολογία για τη συνάρτηση περιορισμού SuperBee.

Στα σχήματα 3.70 έως 3.156 παρουσιάζονται οι ισογραμμές του αριθμού Mach σε συγκεκριμένες περιοχές της αεροτομής για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν (3 συνθήκες ροής, 2 προσεγγιστικοί επιλύτες για το πρόβλημα Riemann και 5 διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού). Από τα σχήματα αυτά είναι φανερό ότι η προτεινόμενη μεθοδολογία επιτυγχάνει τον υπολογισμό των κυμάτων κρούσης με ακρίβεια, χωρίς να εισάγεται τεχνητή εξομάλυνση (η απότομη μεταβολή των μεταβλητών της ροής επιτυγχάνεται μέσα σε ένα περίπου μήκος ακμής). Επίσης, στην περιοχή του στερεού τοιχώματος δεν εμφανίζεται το φαινόμενο της αριθμητικής διάχυσης.

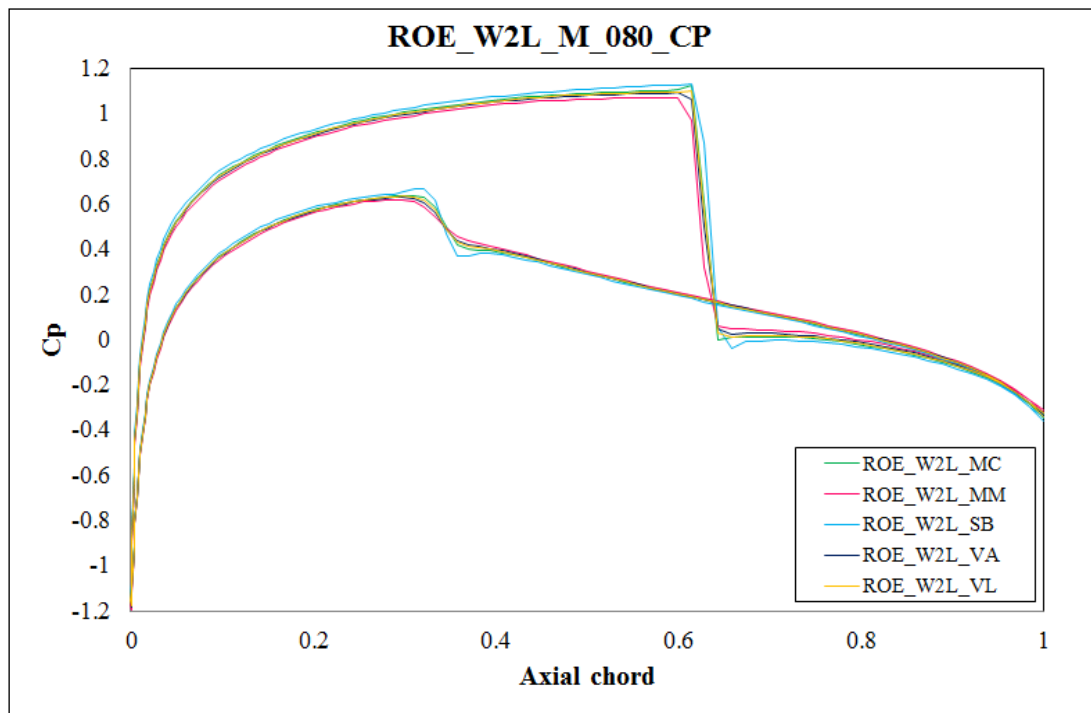
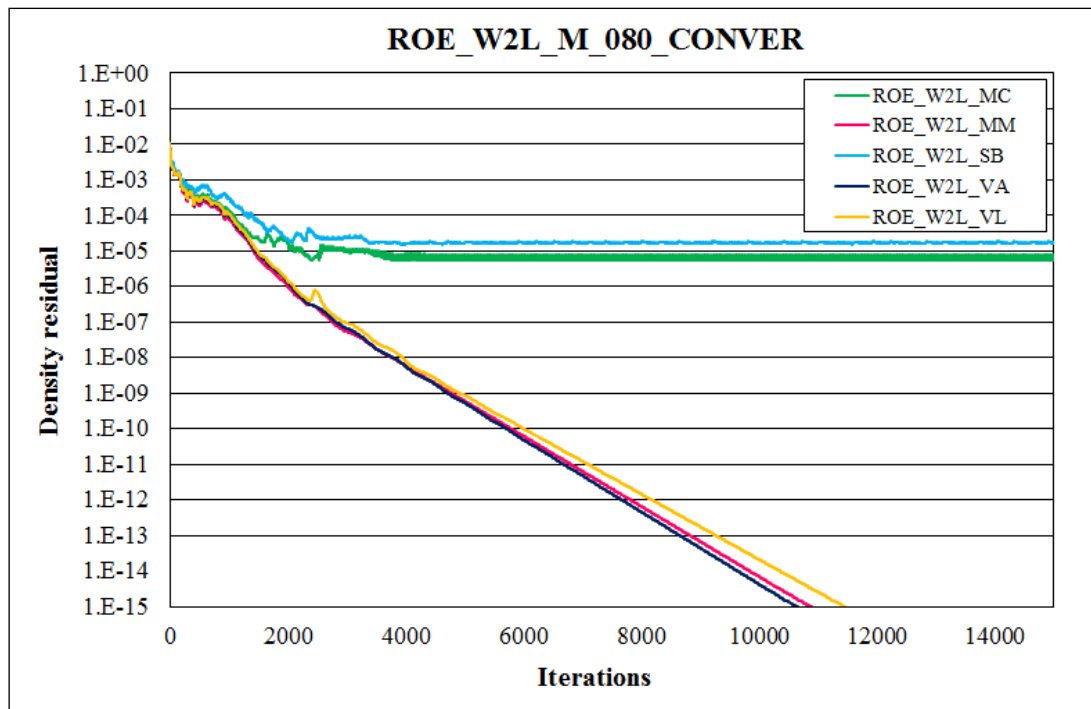
Χαρακτηριστική είναι η συμπεριφορά της συνάρτησης περιορισμού SuperBee για Mach=0.85 και για τους επιλύτες HLLC και Roe (σχήματα 3.107 και 3.122 αντίστοιχα) όπου μετά το κύμα κρούσης στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής εμφανίζονται χαρακτηριστικά μη φυσικές έντονες διακυμάνσεις της τιμής του αριθμού Mach. Για την περίπτωση με Mach = 2.0, στις εικόνες 3.132, 3.138, 3.147 παρουσιάζεται η περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής, πίσω ακριβώς από το κύμα κρούσης, όπου είναι φανερή η έντονη (μη φυσική) διακύμανση των τιμών του αριθμού Mach για τις συναρτήσεις περιορισμού SuperBee και MC και για τους δύο προσεγγιστικούς επιλύτες HLLC και Roe. Η καλύτερη συμπεριφορά, όσον αφορά στη διανομή των μεγεθών στην περιοχή αυτή φαίνεται να επιτυγχάνεται με τη χρήση της συνάρτησης περιορισμού Minmod (σχήματα 3.135, 3.150), όπως φάνηκε και από τα διαγράμματα ιστορίας της σύγκλισης.



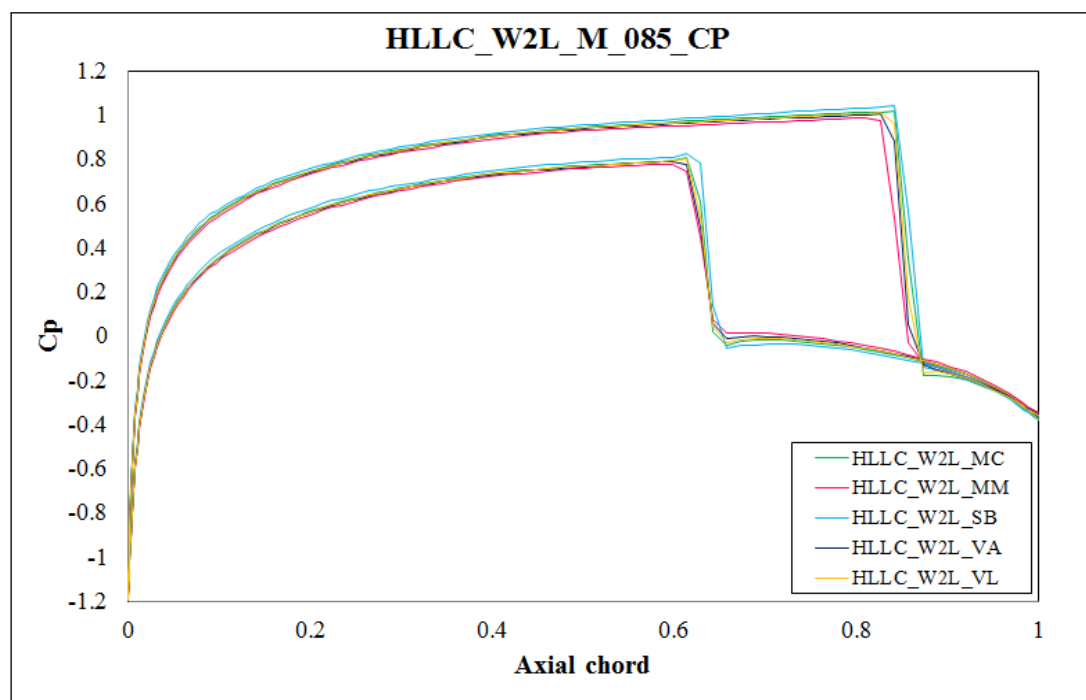
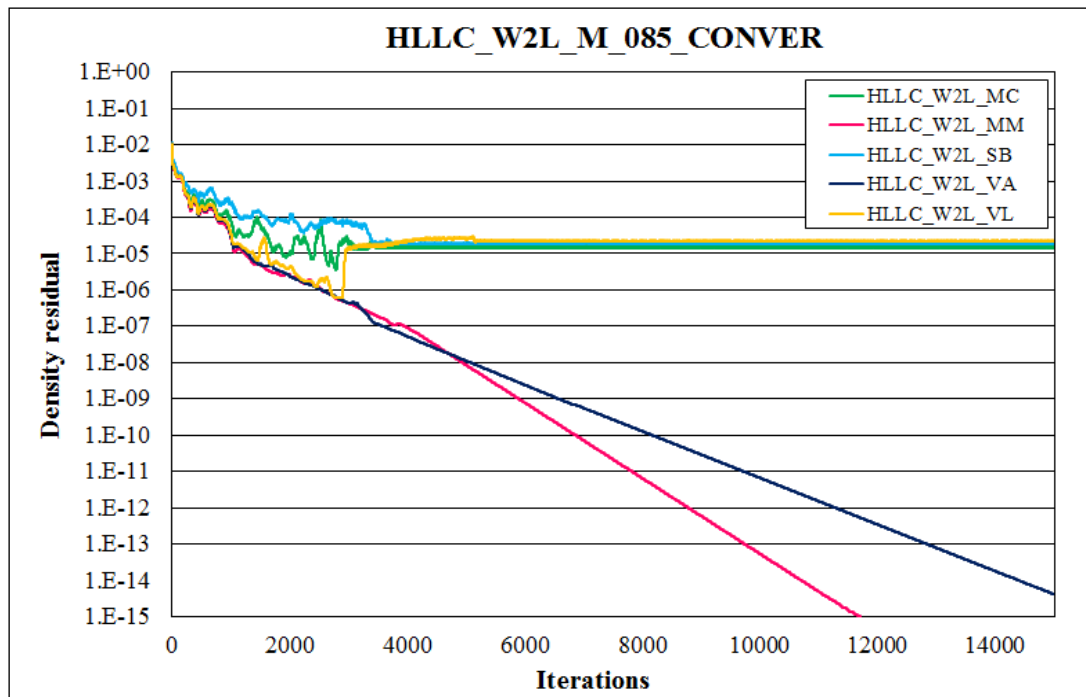
Σχήμα 3.63: Το υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA0012.



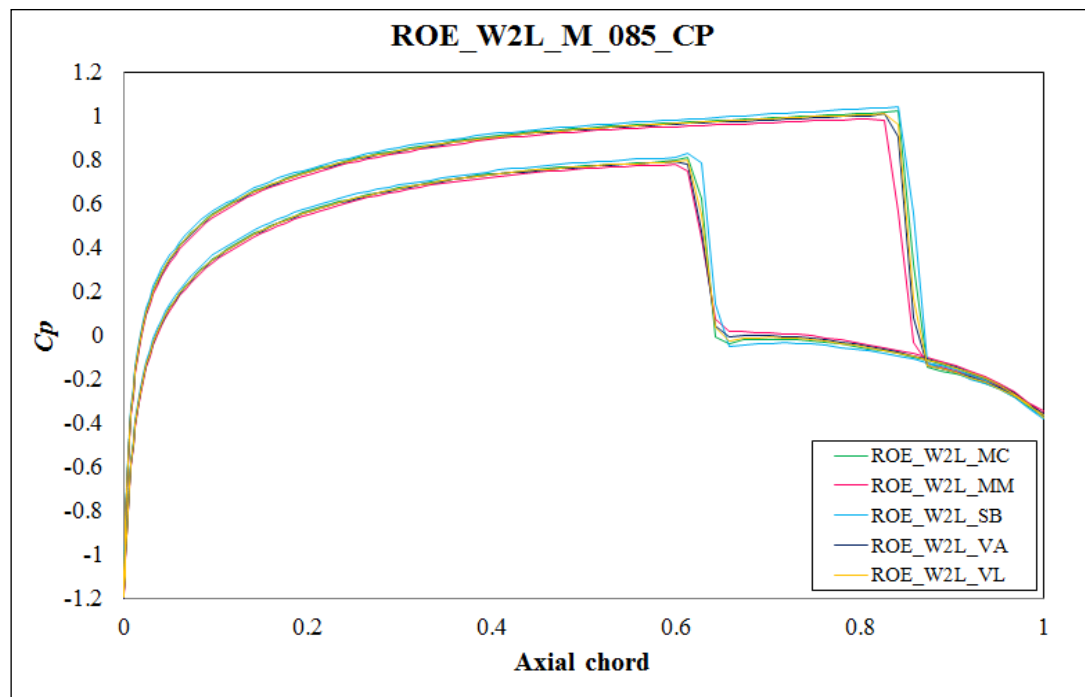
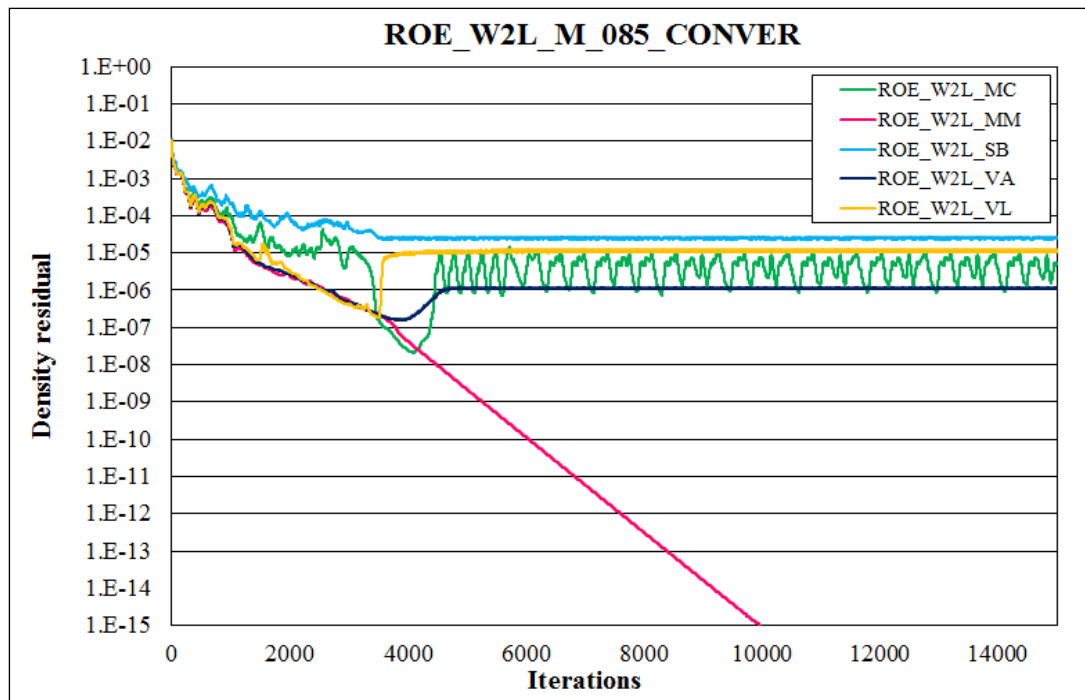
Σχήμα 3.64: NACA0012 case, $M=0.8$, HLLC: (Πάνω) συγκριτικά αποτελέσματα σύγκλισης για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού. (Κάτω) συγκριτικά αποτελέσματα διανομής C_p για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού.



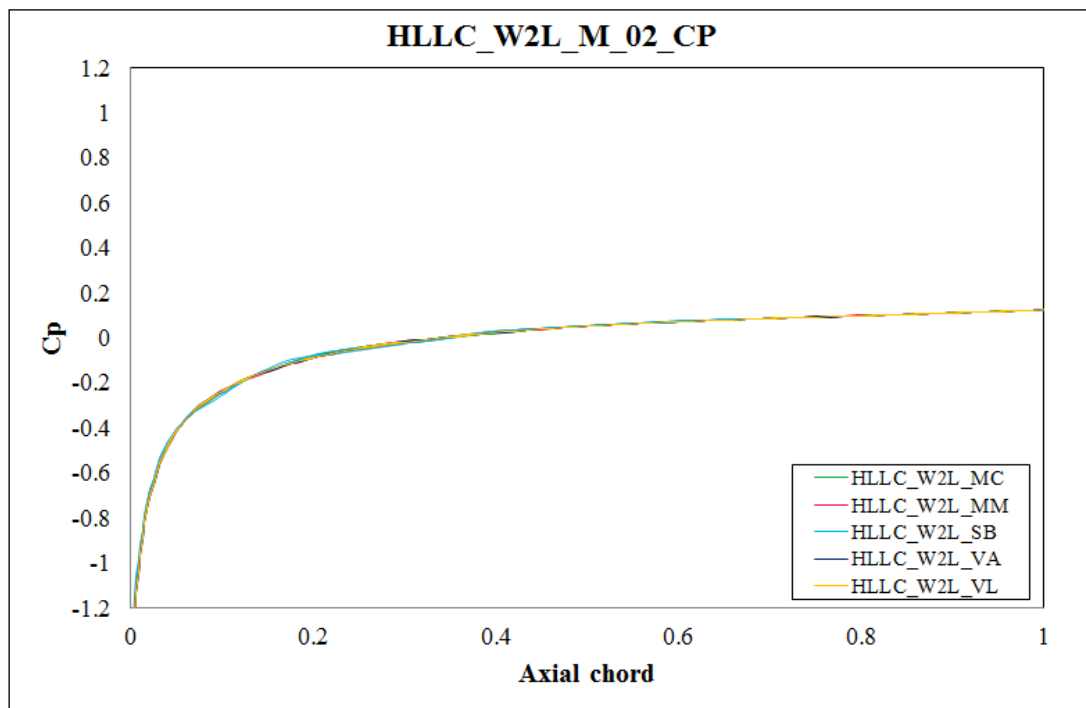
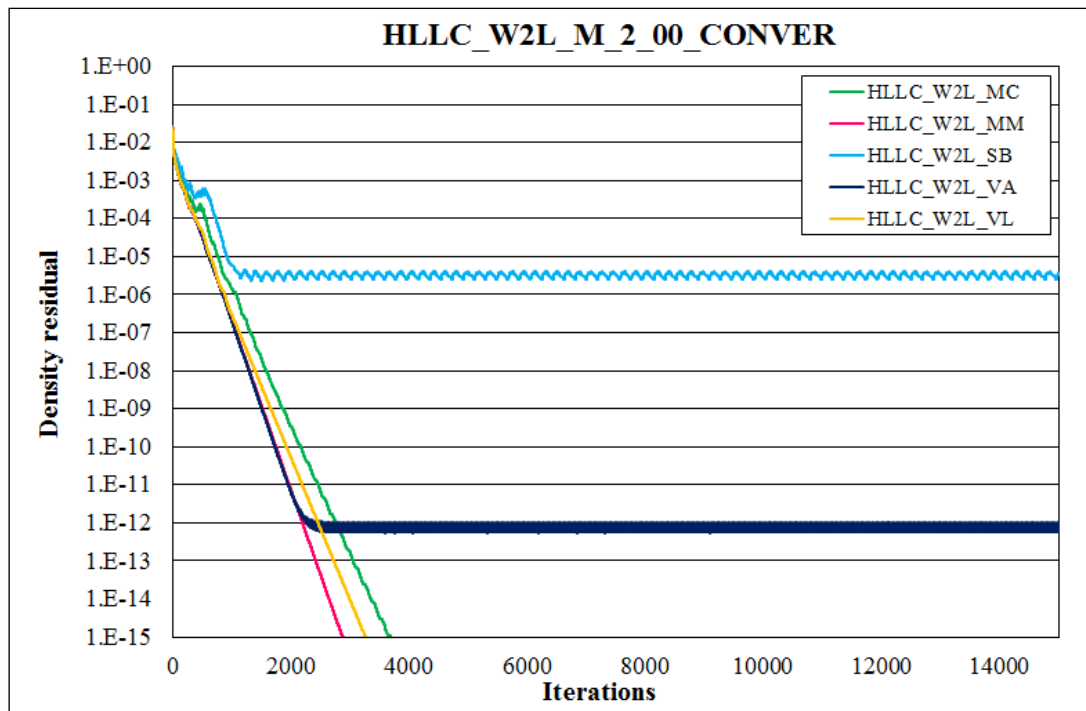
Σχήμα 3.65: NACA0012 case, $M=0.8$, ROE: (Πάνω) συγκριτικά αποτελέσματα σύγκλισης για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού. (Κάτω) συγκριτικά αποτελέσματα διανομής C_p για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού.



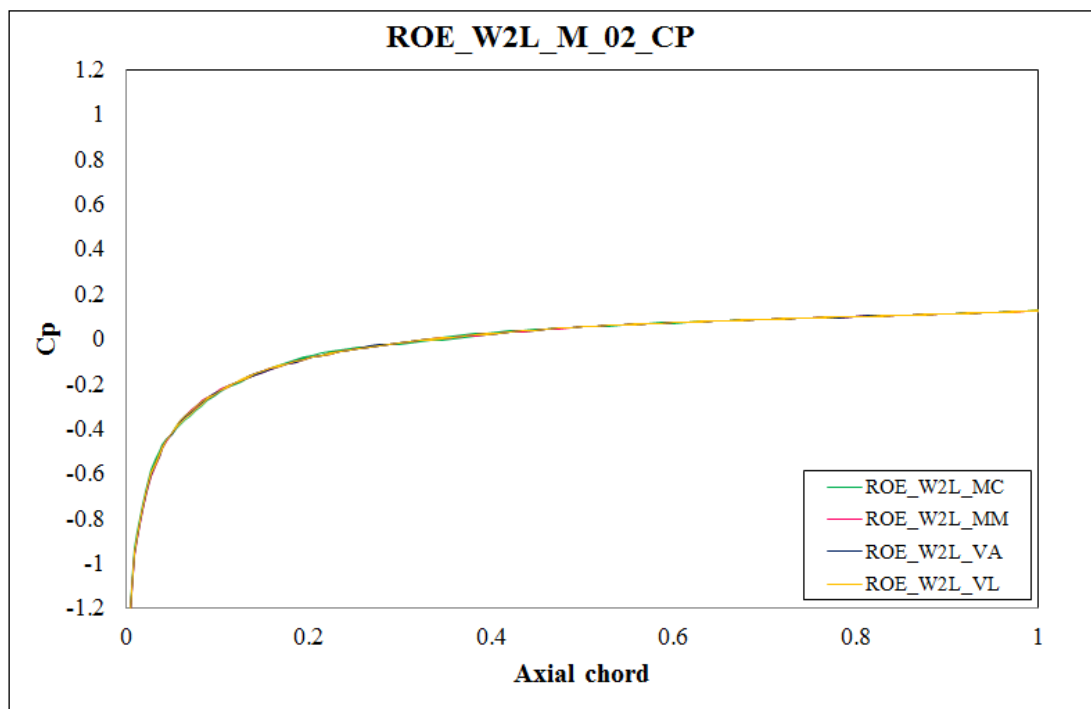
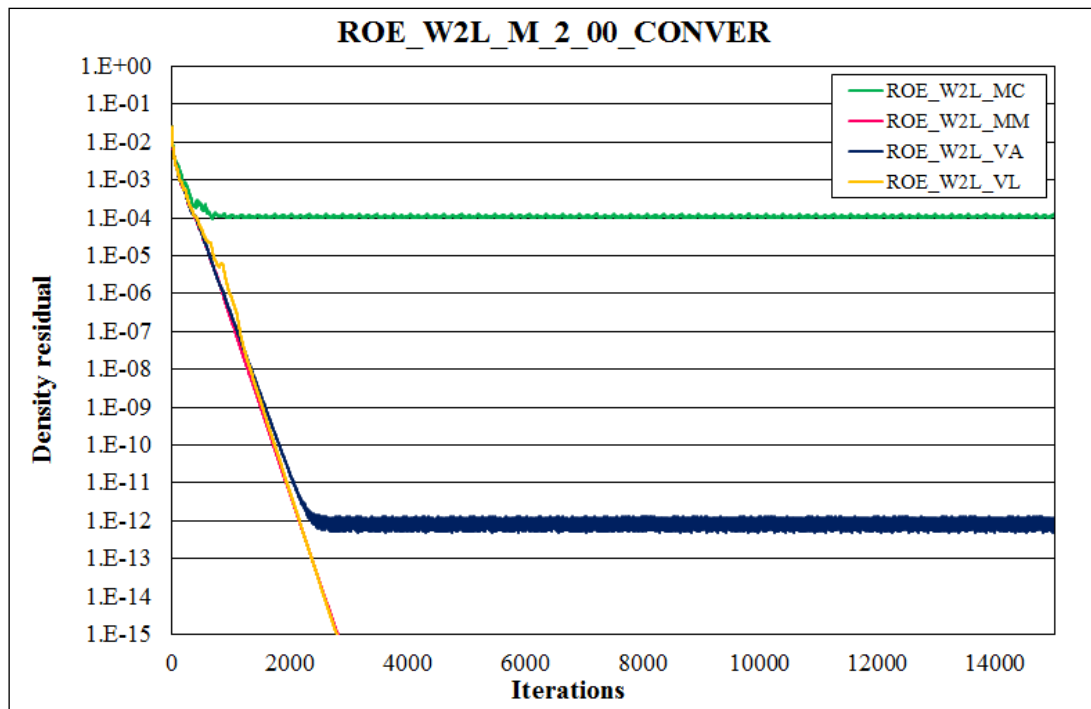
Σχήμα 3.66: NACA0012 case, $M=0.85$, HLLC: (Πάνω) συγκριτικά αποτελέσματα σύγκλισης για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού. (Κάτω) συγκριτικά αποτελέσματα διανομής C_p για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού.



Σχήμα 3.67: NACA0012 case, $M=0.85$, ROE: (Πάνω) συγκριτικά αποτελέσματα σύγκλισης για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού. (Κάτω) συγκριτικά αποτελέσματα διανομής C_p για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού.

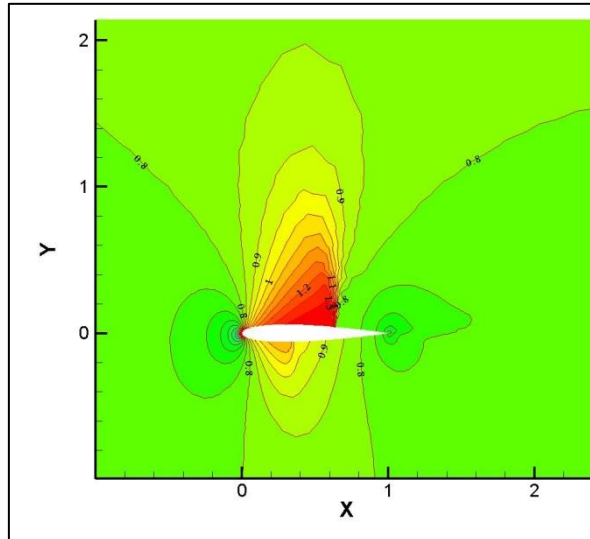


Σχήμα 3.68: NACA0012 case, $M=2.00$, HLLC: (Πάνω) συγκριτικά αποτελέσματα σύγκλισης για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού. (Κάτω) συγκριτικά αποτελέσματα διανομής C_p για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού.

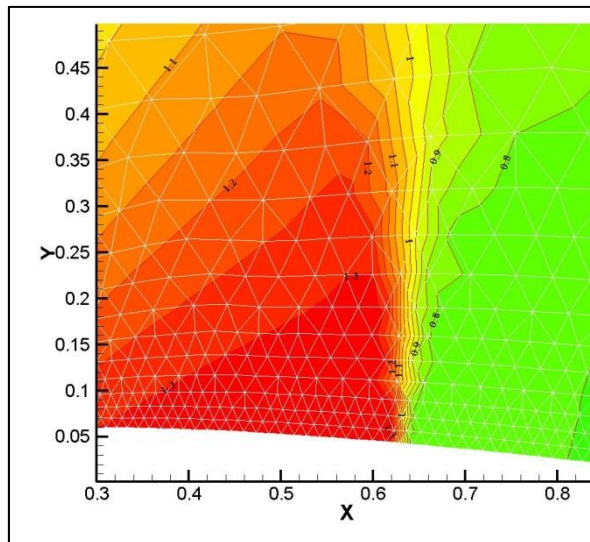


Σχήμα 3.69: NACA0012 case, $M=2.00$, ROE: (Πάνω) συγκριτικά αποτελέσματα σύγκλισης για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού. (Κάτω) συγκριτικά αποτελέσματα διανομής C_p για διαφορετικές συναρτήσεις περιορισμού.

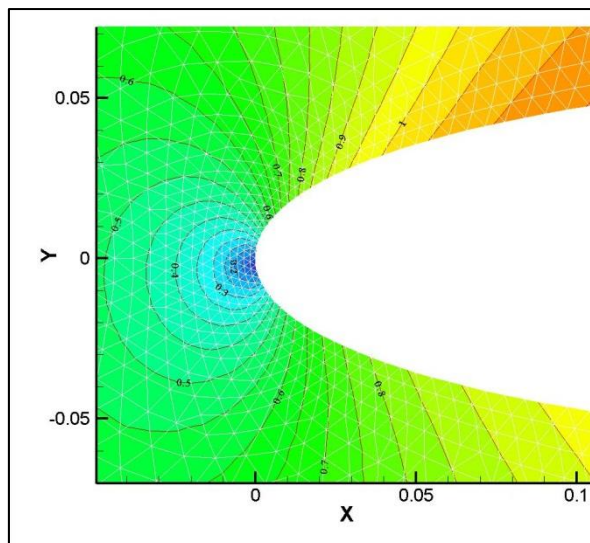
Mach number= 0.8
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L} , MC (Monotonized Central)



Σχήμα 3.70: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

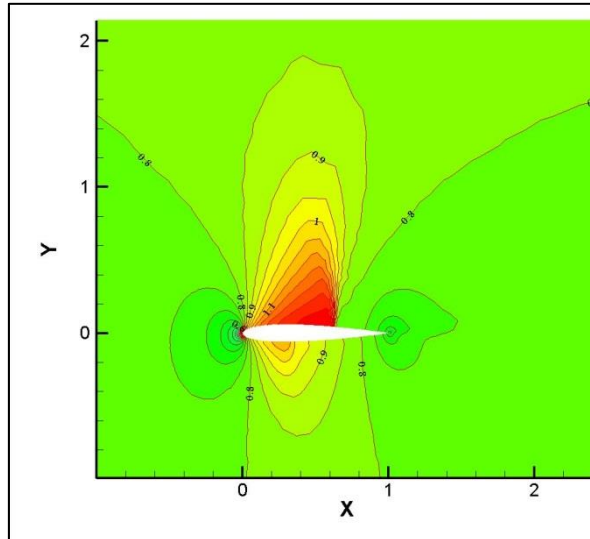


Σχήμα 3.71: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

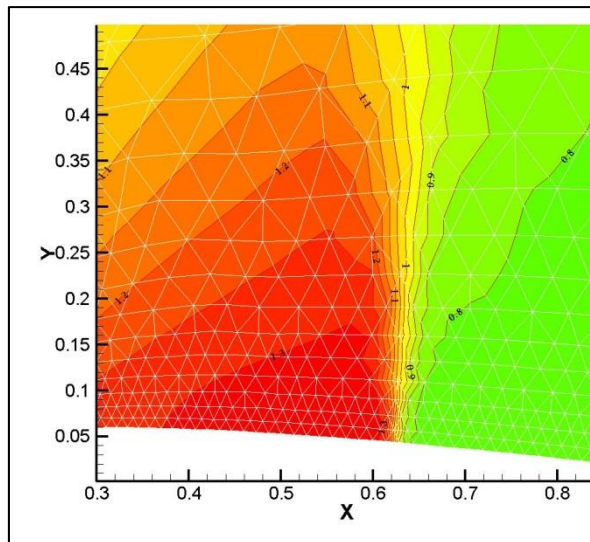


Σχήμα 3.72: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

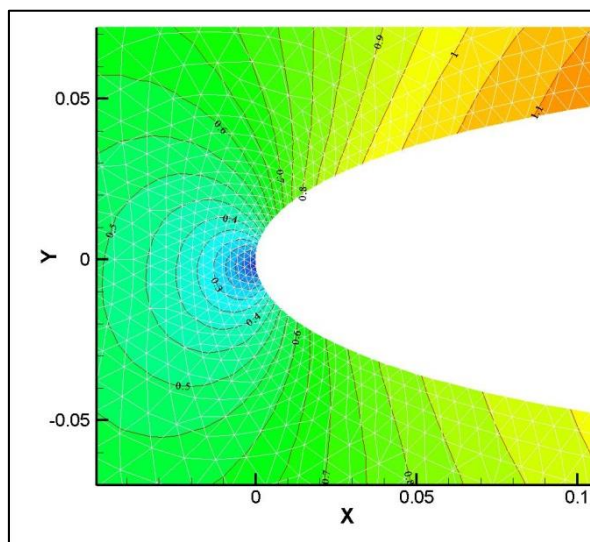
Mach number= 0.8
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L}, MM (MinMod)



Σχήμα 3.73: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

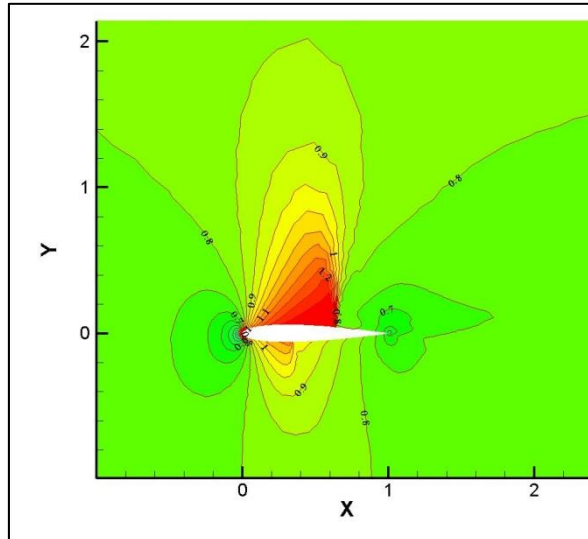


Σχήμα 3.74: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

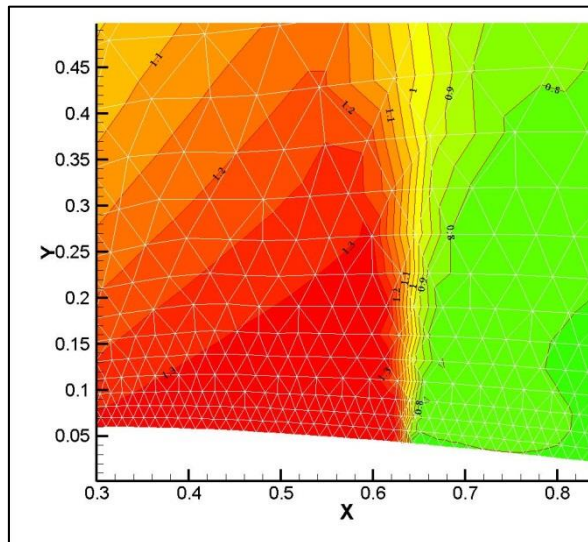


Σχήμα 3.75: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

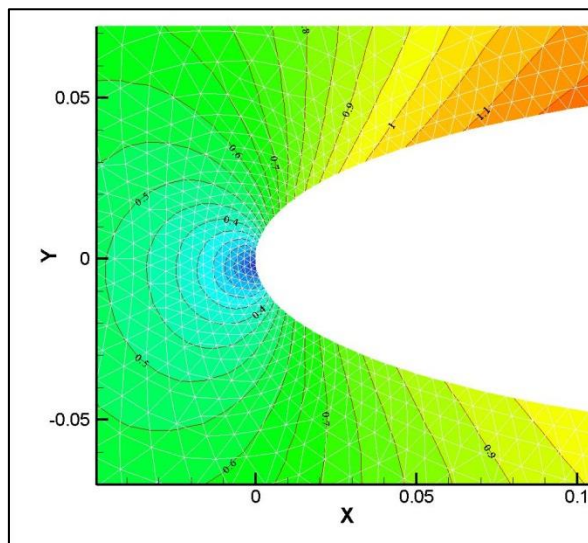
Mach number= 0.8
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L}, SB (SuperBee)



Σχήμα 3.76: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

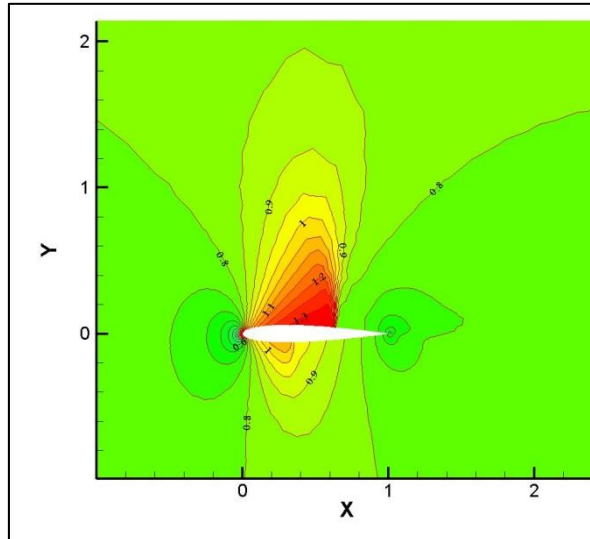


Σχήμα 3.77: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

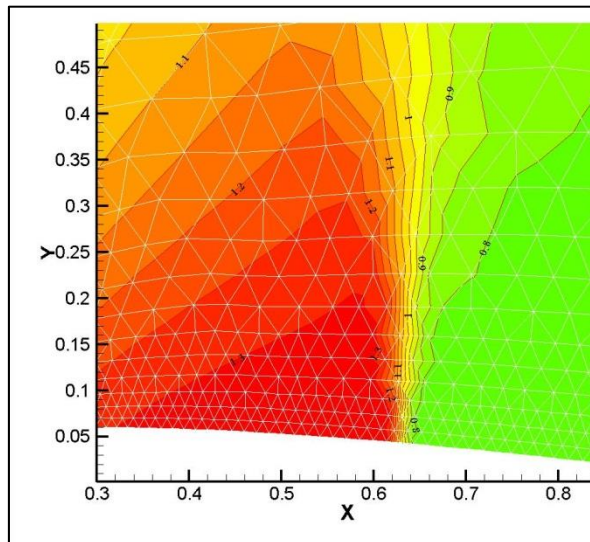


Σχήμα 3.78: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

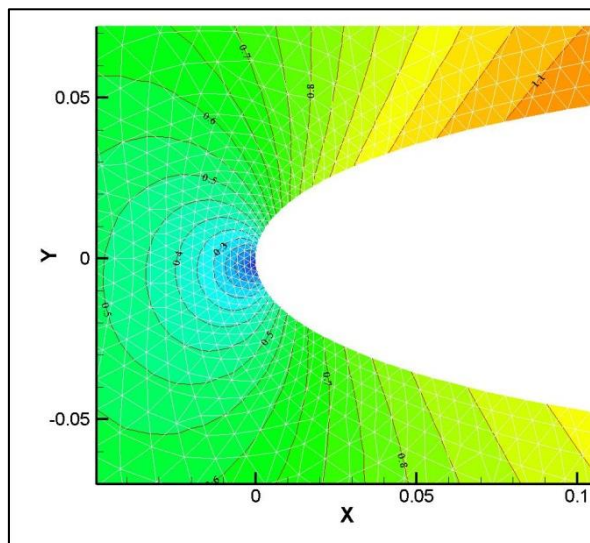
Mach number= 0.8
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L} , VA (Van Albada)



Σχήμα 3.79: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

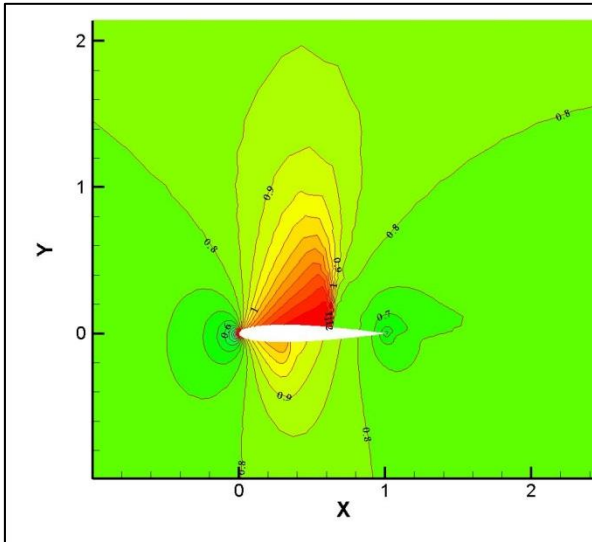


Σχήμα 3.80: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

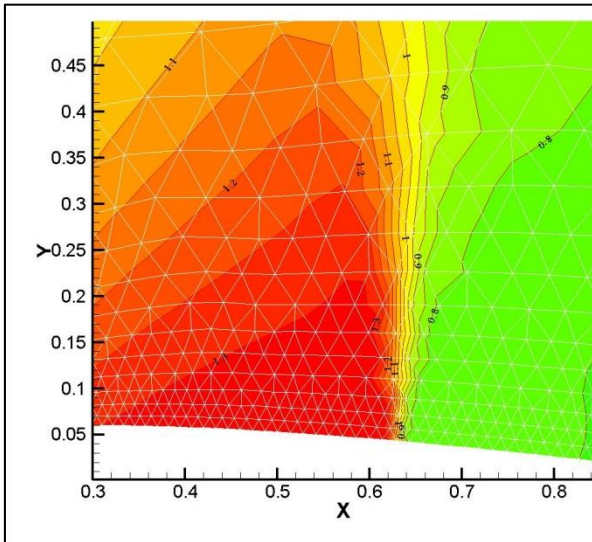


Σχήμα 3.81: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

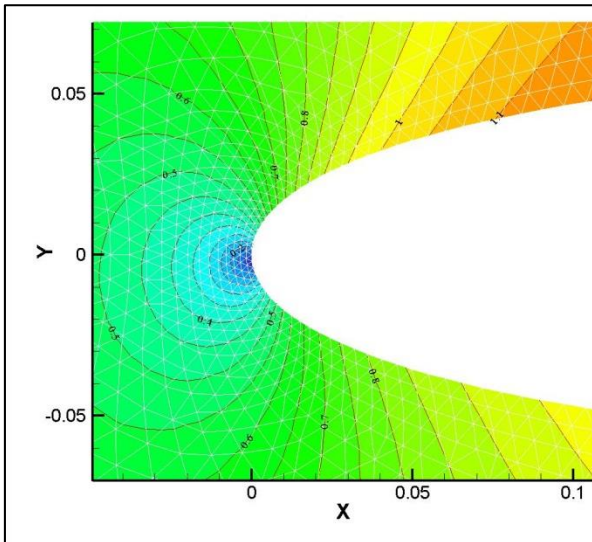
Limiter: W_{2L} , VL (Van Leer)



Σχήμα 3.82: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

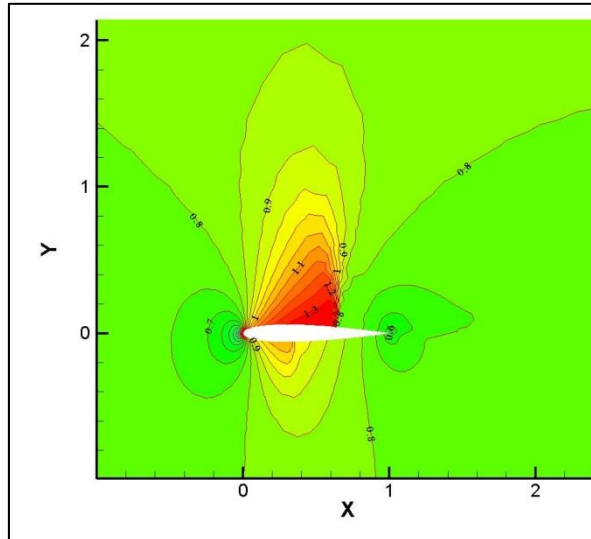


Σχήμα 3.83: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

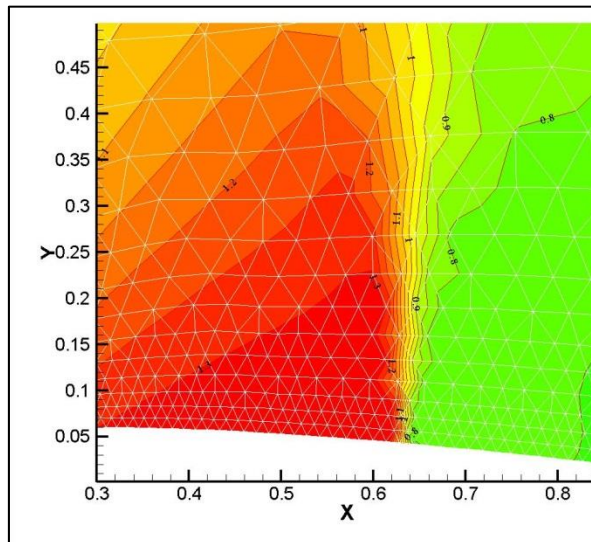


Σχήμα 3.84: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

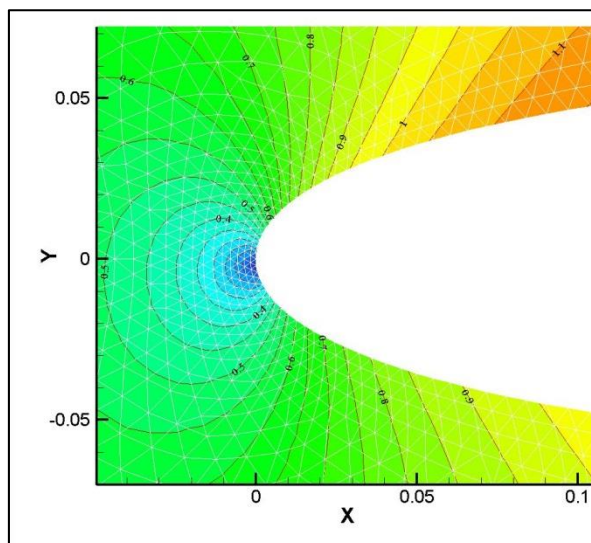
Mach number= 0.8
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L} , MC (Monotonized Central)



Σχήμα 3.85: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

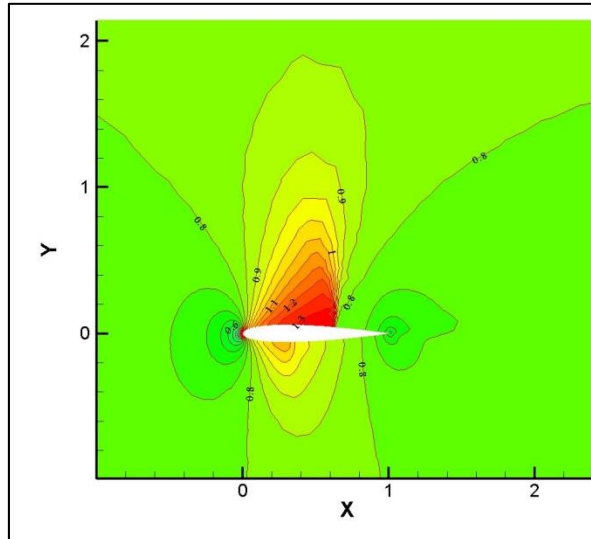


Σχήμα 3.86: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

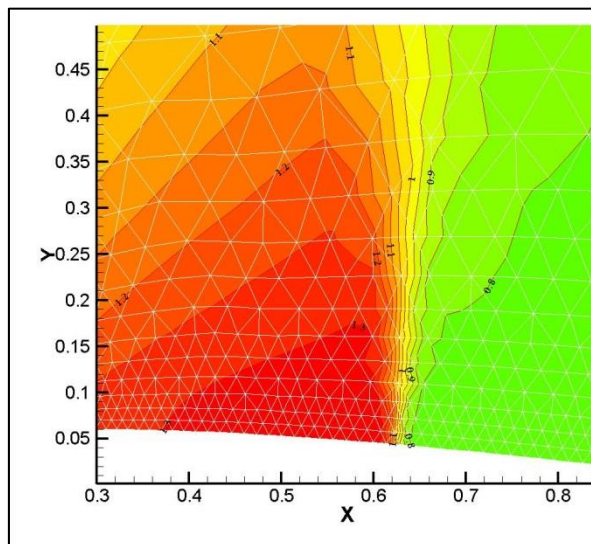


Σχήμα 3.87: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

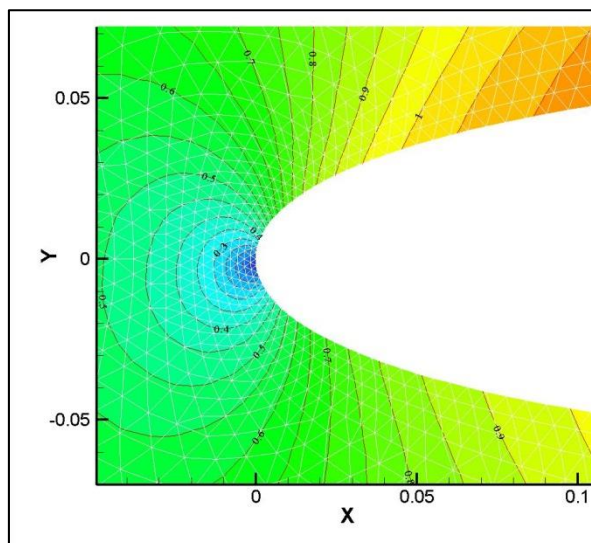
Mach number= 0.8
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L}, MM (MinMod)



Σχήμα 3.88: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

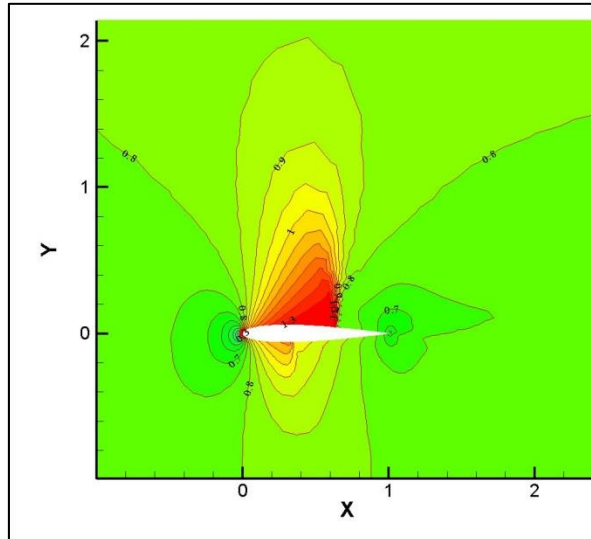


Σχήμα 3.89: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

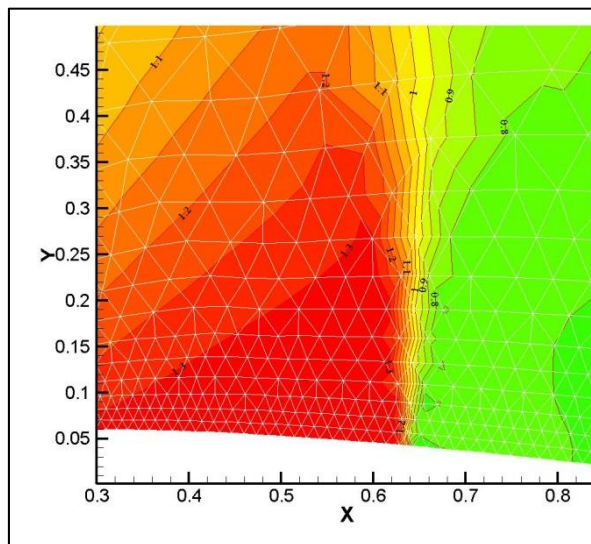


Σχήμα 3.90: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

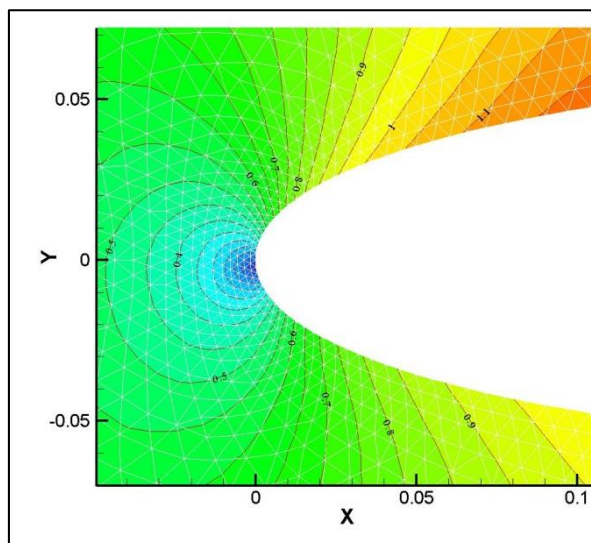
Mach number= 0.8
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L}, SB (SuperBee)



Σχήμα 3.91: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

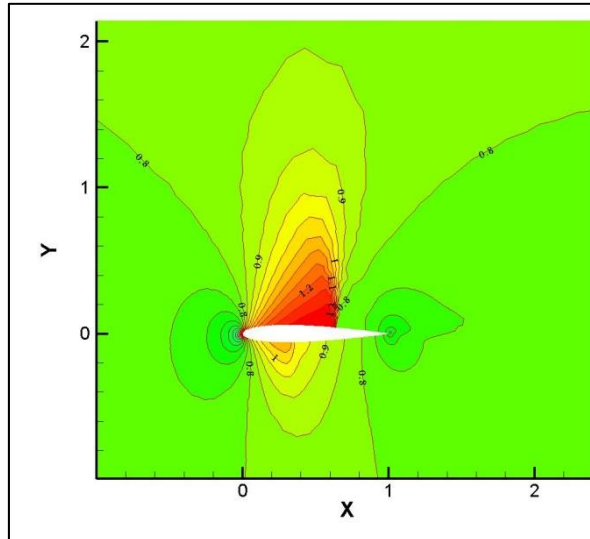


Σχήμα 3.92: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

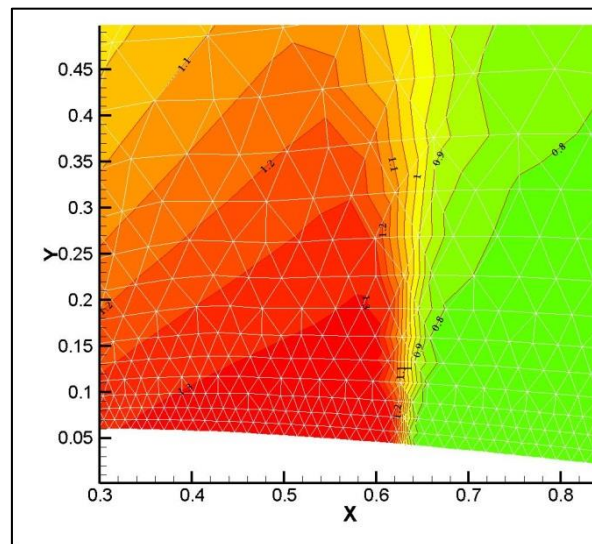


Σχήμα 3.93: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

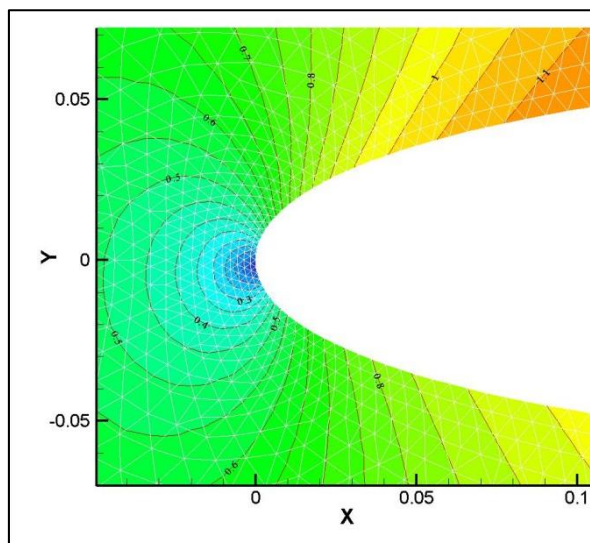
Mach number= 0.8
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L} , VA (Van Albada)



Σχήμα 3.94: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

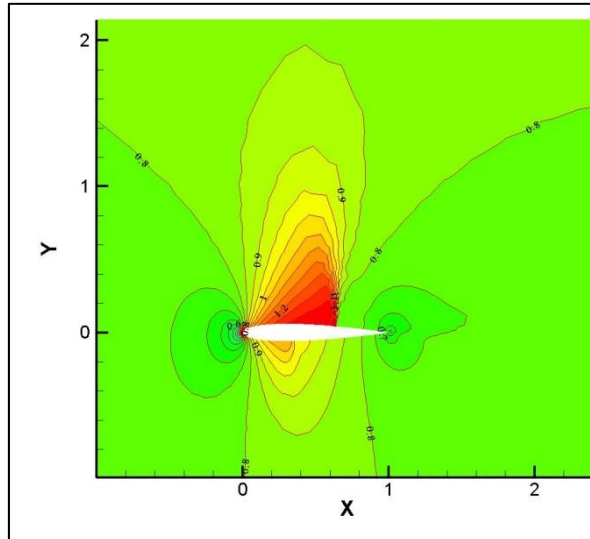


Σχήμα 3.95: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

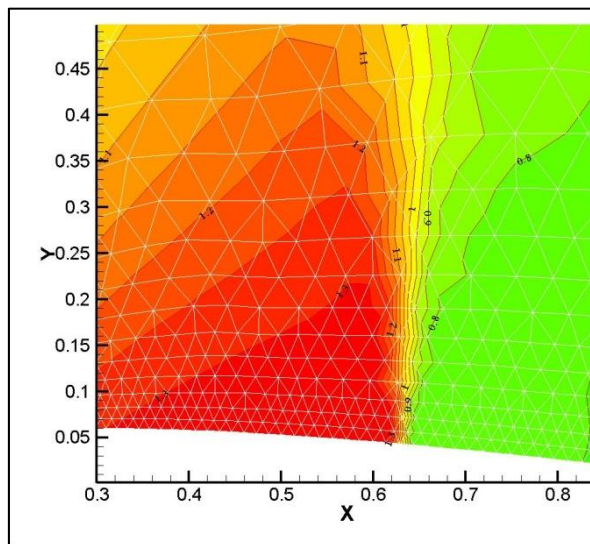


Σχήμα 3.96: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

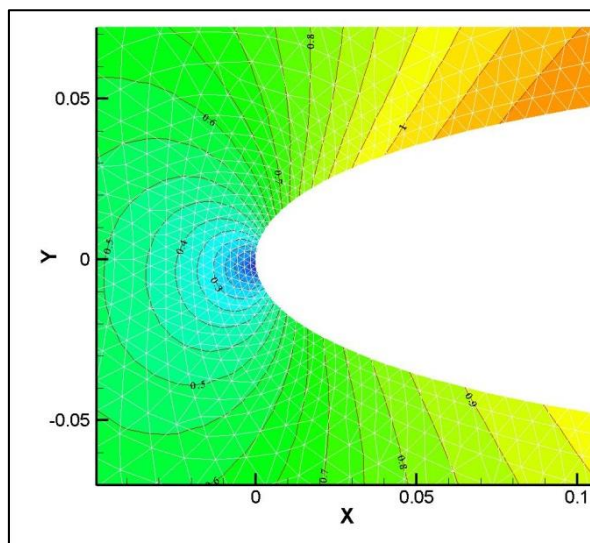
Mach number= 0.8
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L}, VL (Van Leer)



Σχήμα 3.97: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

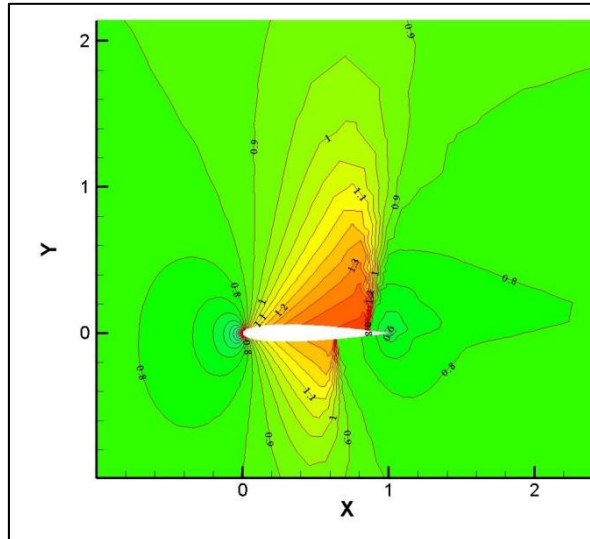


Σχήμα 3.98: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

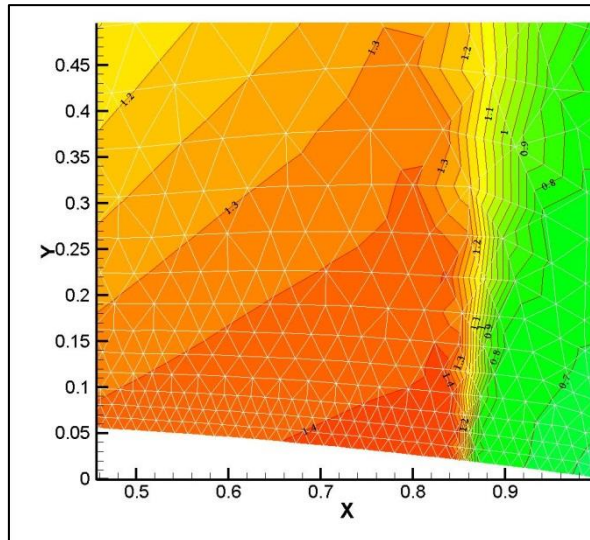


Σχήμα 3.99: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

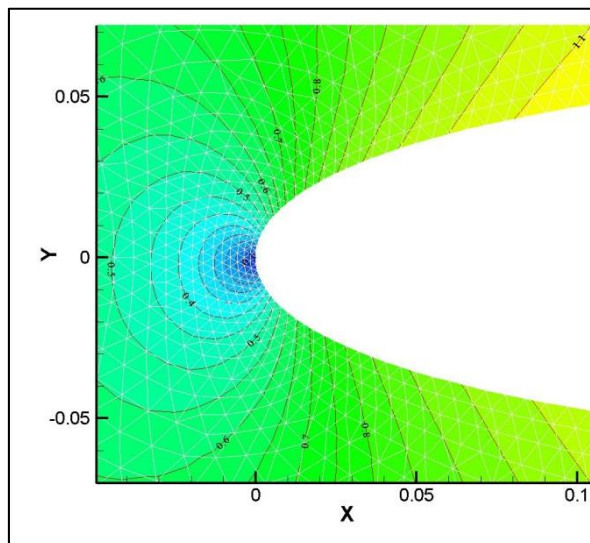
Mach number= 0.85
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L} , MC (Monotonized Central)



Σχήμα 3.100: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

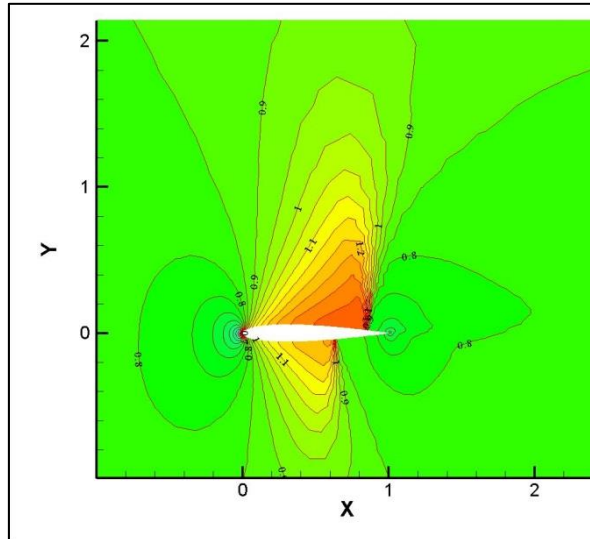


Σχήμα 3.101: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

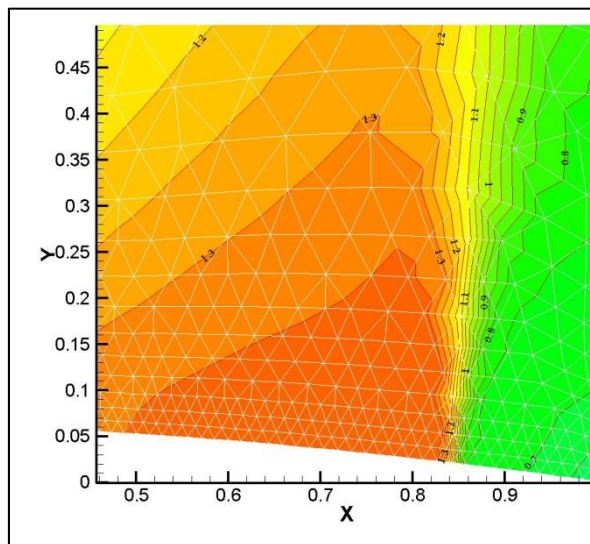


Σχήμα 3.102: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

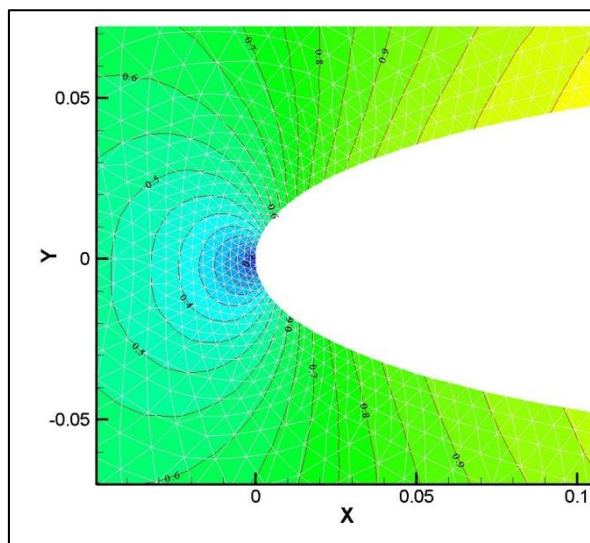
Mach number= 0.85
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L}, MM (MinMod)



Σχήμα 3.103: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

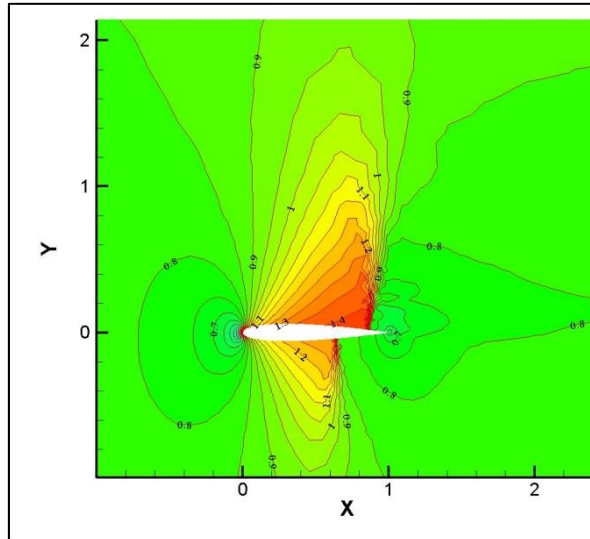


Σχήμα 3.104: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

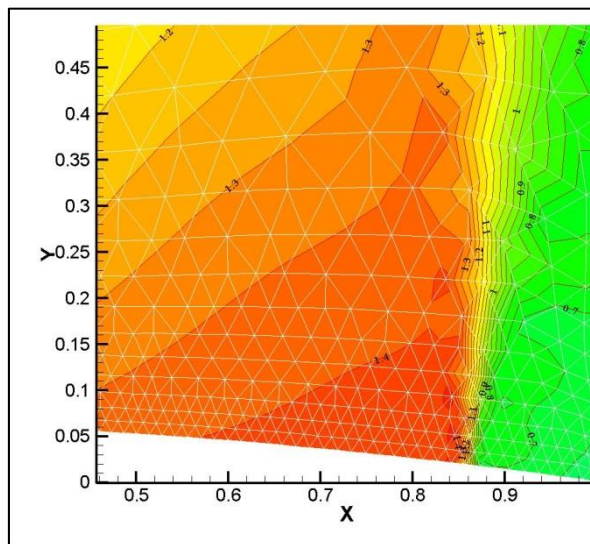


Σχήμα 3.105: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

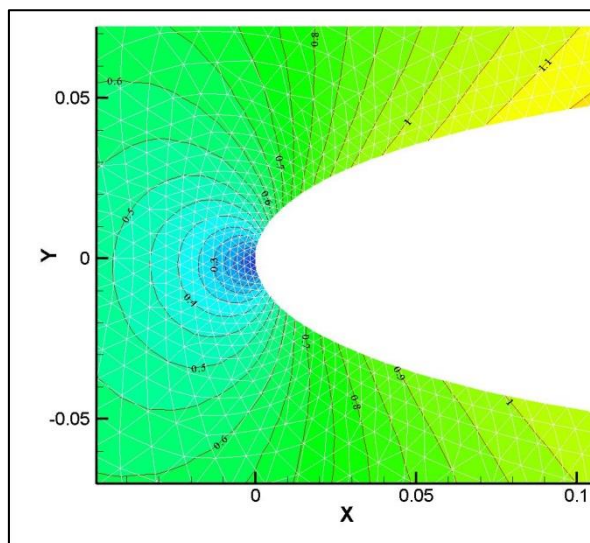
Mach number= 0.85
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L}, SB (SuperBee)



Σχήμα 3.106: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

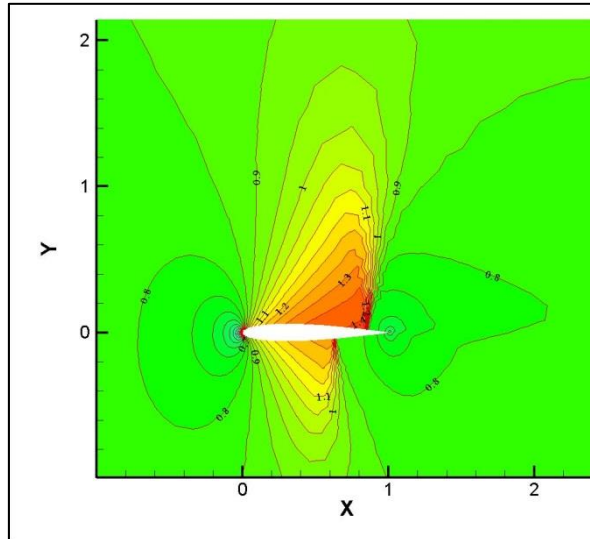


Σχήμα 3.107: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

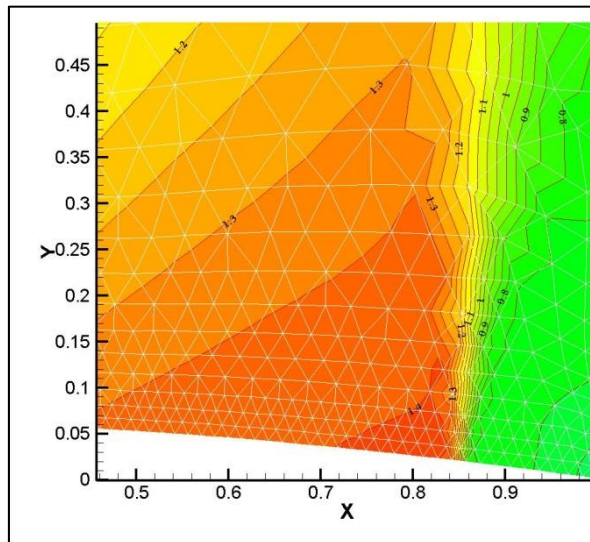


Σχήμα 3.108: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

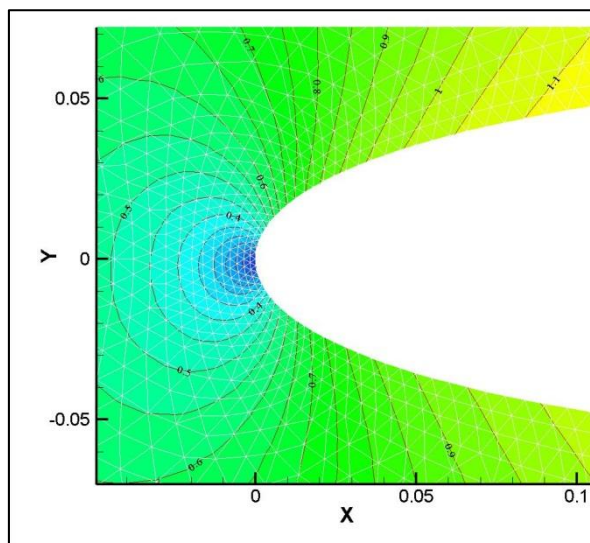
Mach number= 0.85
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L} , VA (Van Albada)



Σχήμα 3.109: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

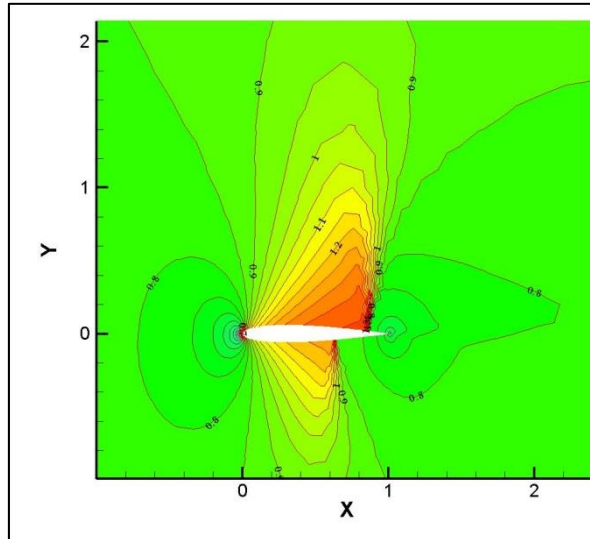


Σχήμα 3.110: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

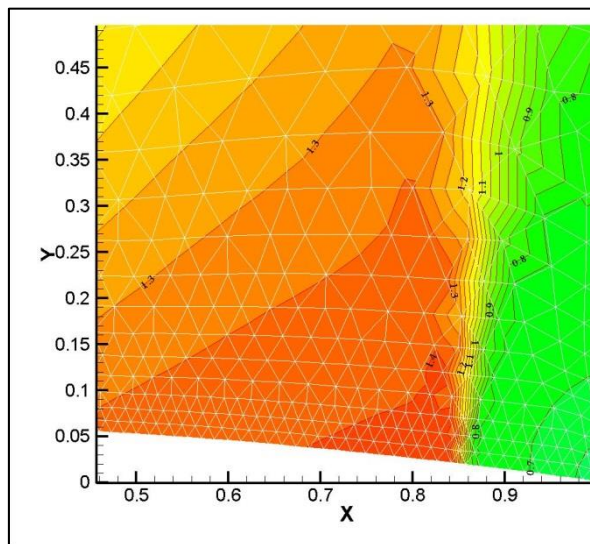


Σχήμα 3.111: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

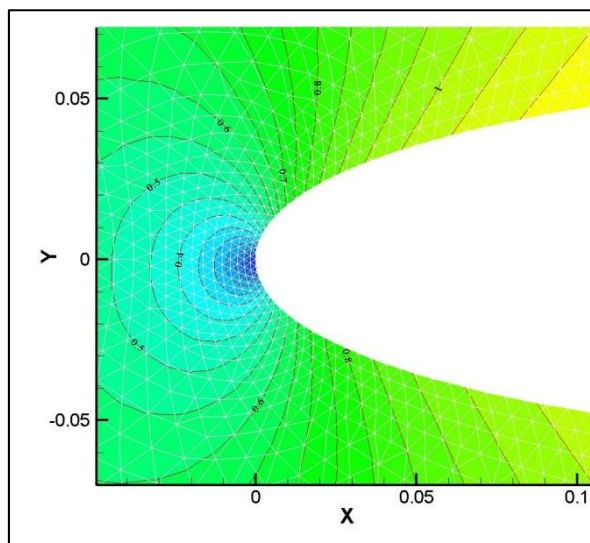
Mach number= 0.85
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L}, VL (Van Leer)



Σχήμα 3.112: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

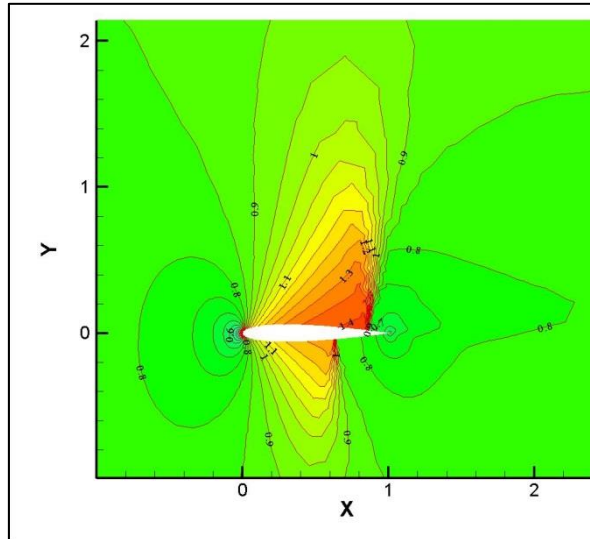


Σχήμα 3.113: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

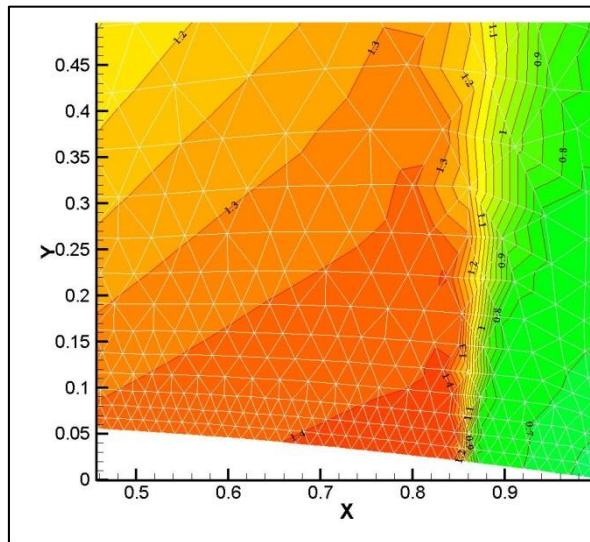


Σχήμα 3.114: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

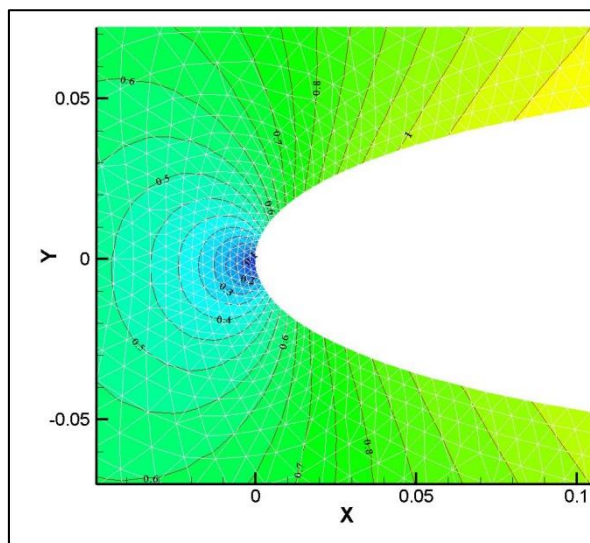
Mach number= 0.85
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L} , MC (Monotonized Central)



Σχήμα 3.115: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

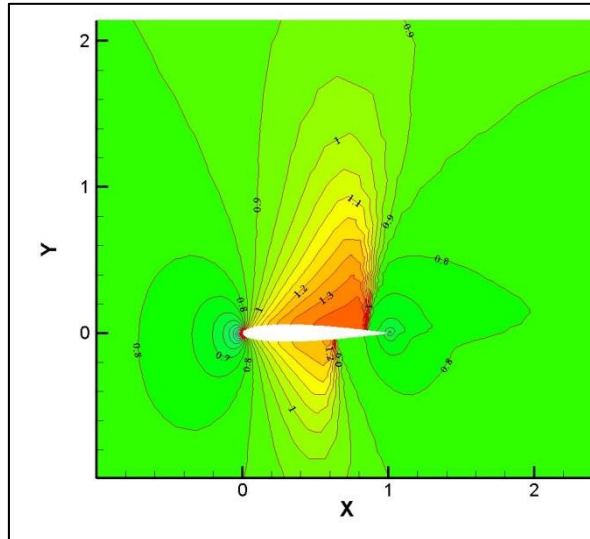


Σχήμα 3.116: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

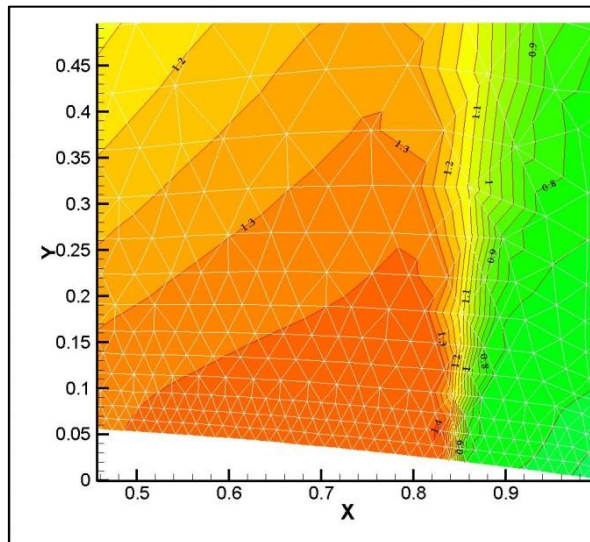


Σχήμα 3.117: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

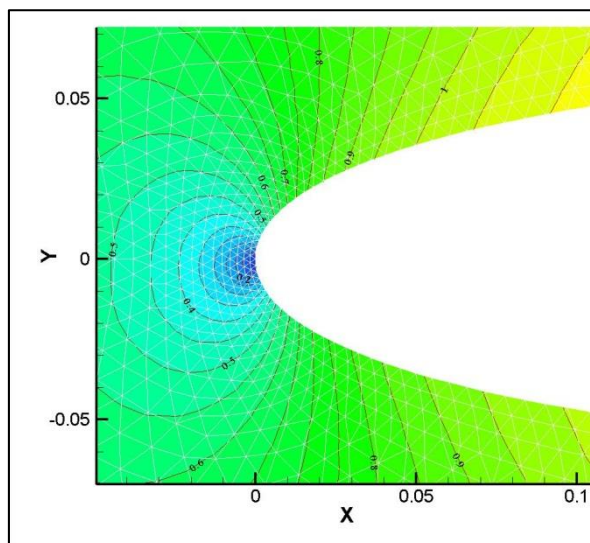
Mach number= 0.85
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L} , MM (MinMod)



Σχήμα 3.118: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

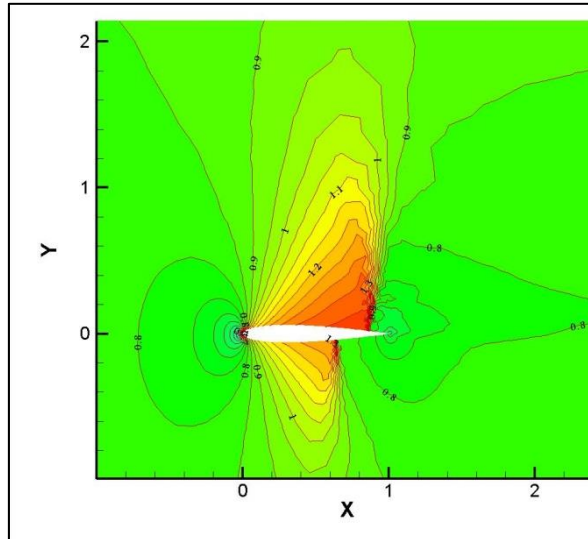


Σχήμα 3.119: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

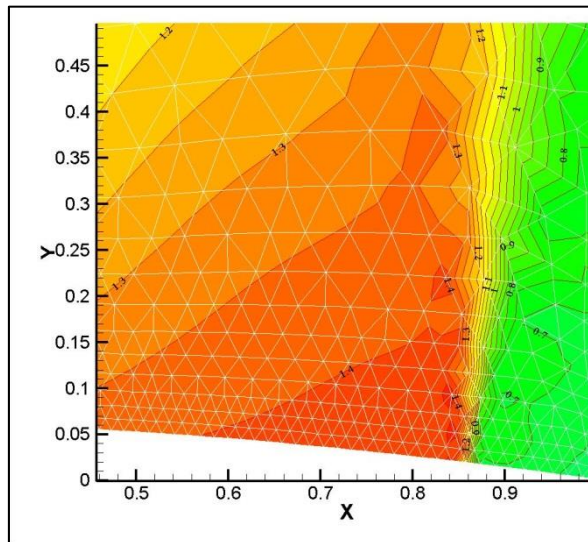


Σχήμα 3.120: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

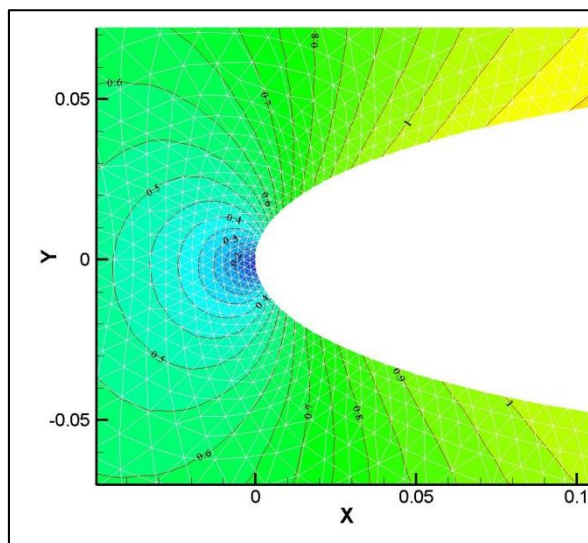
Mach number= 0.85
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L}, SB (SuperBee)



Σχήμα 3.121: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

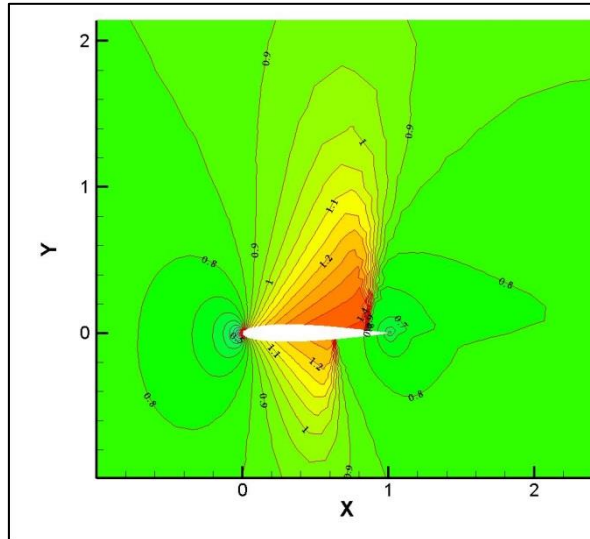


Σχήμα 3.122: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

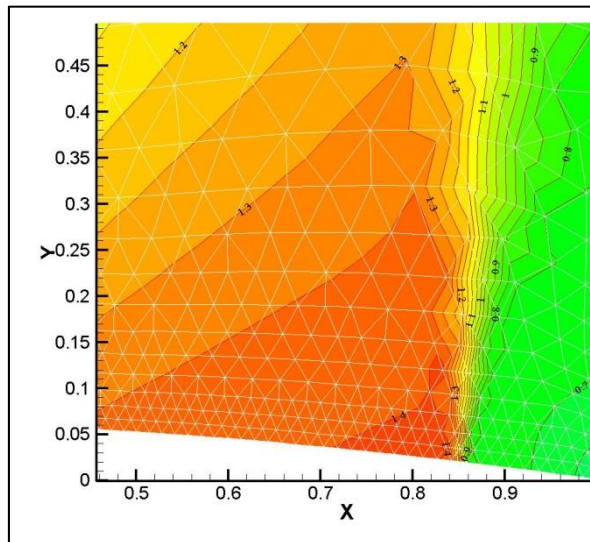


Σχήμα 3.123: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

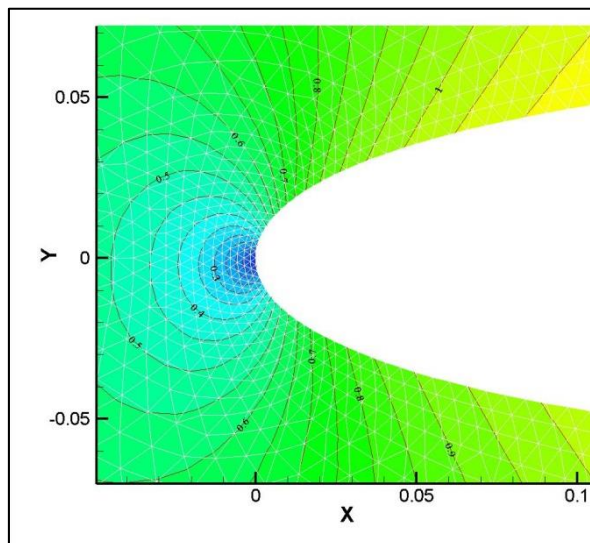
Mach number= 0.85
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L} , VA (Van Albada)



Σχήμα 3.124: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

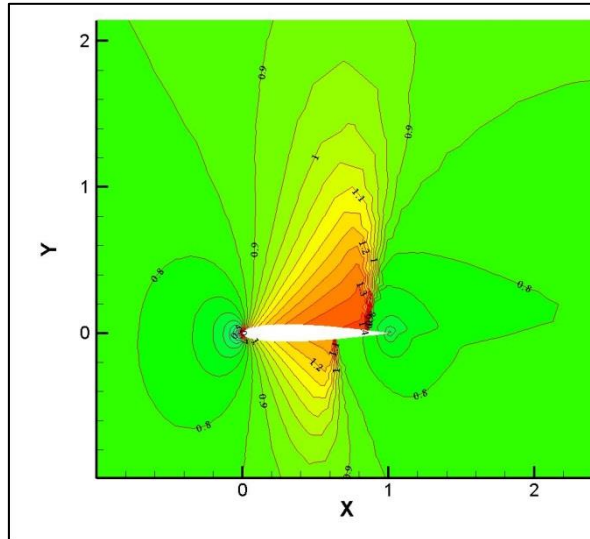


Σχήμα 3.125: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

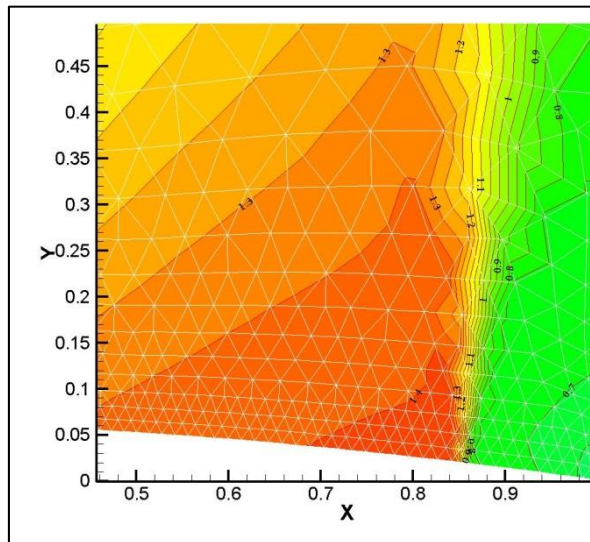


Σχήμα 3.126: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

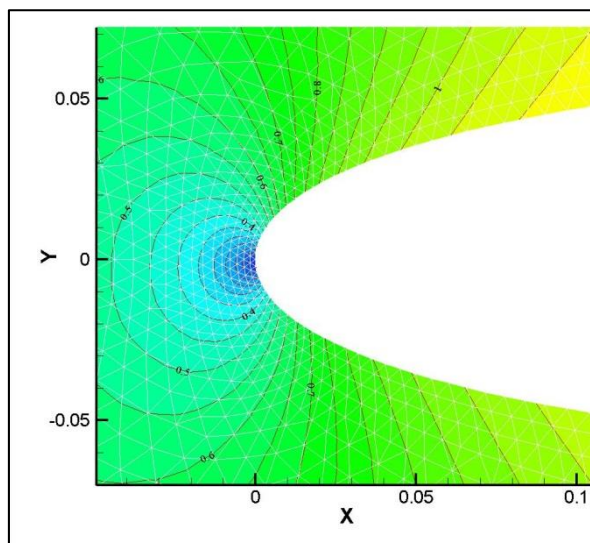
Mach number= 0.85
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L}, VL (Van Leer)



Σχήμα 3.127: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

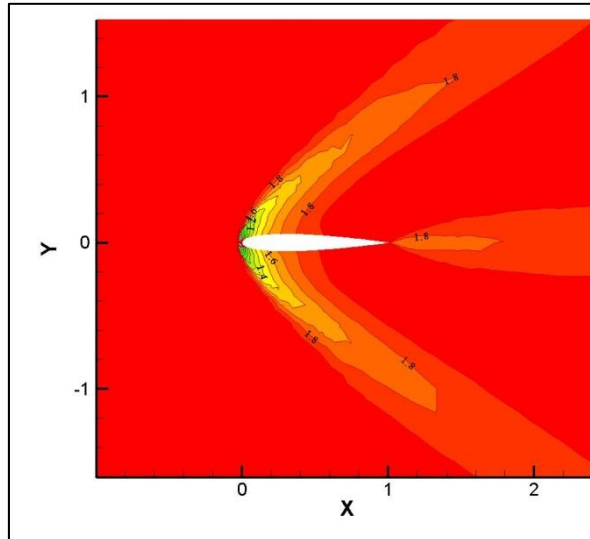


Σχήμα 3.128: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

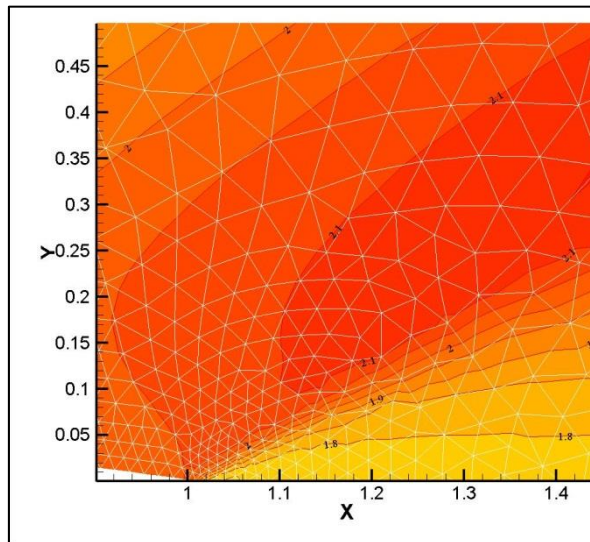


Σχήμα 3.129: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

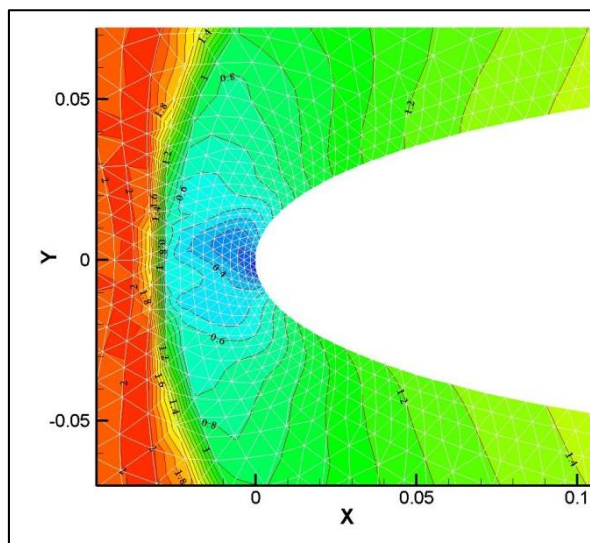
Mach number= 2.00
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L} , MC (Monotonized Central)



Σχήμα 3.130: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

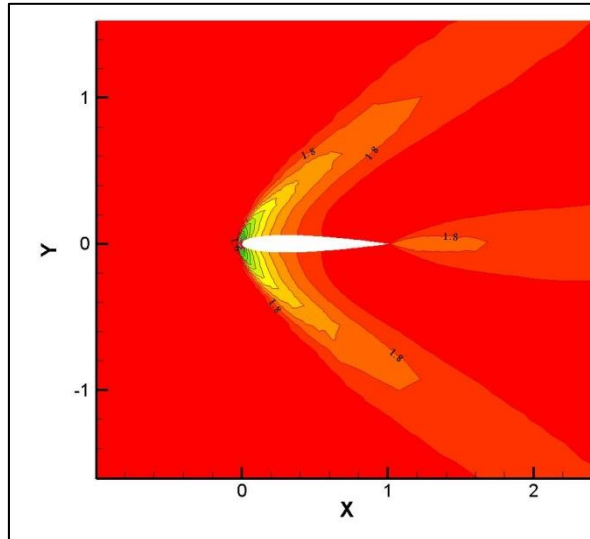


Σχήμα 3.131: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

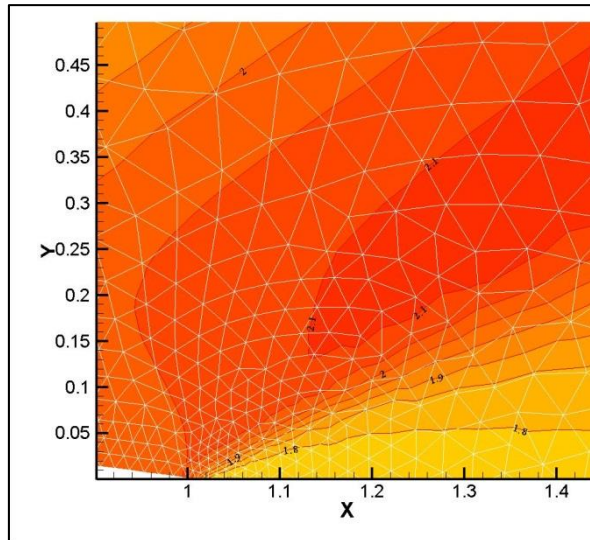


Σχήμα 3.132: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

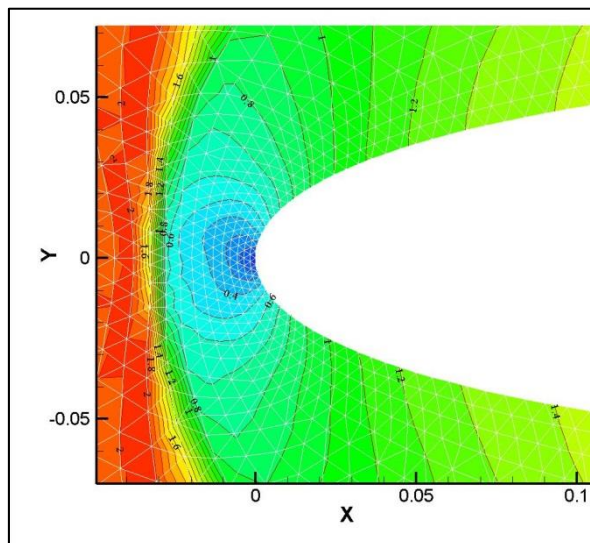
Mach number= 2.00
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L}, MM (MinMod)



Σχήμα 3.133: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

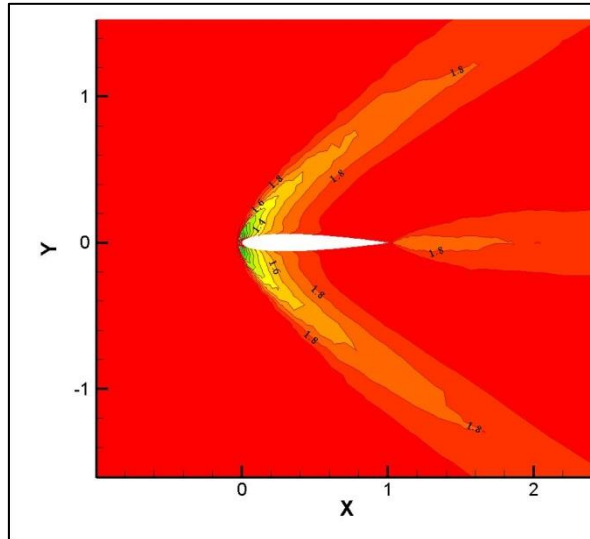


Σχήμα 3.134: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

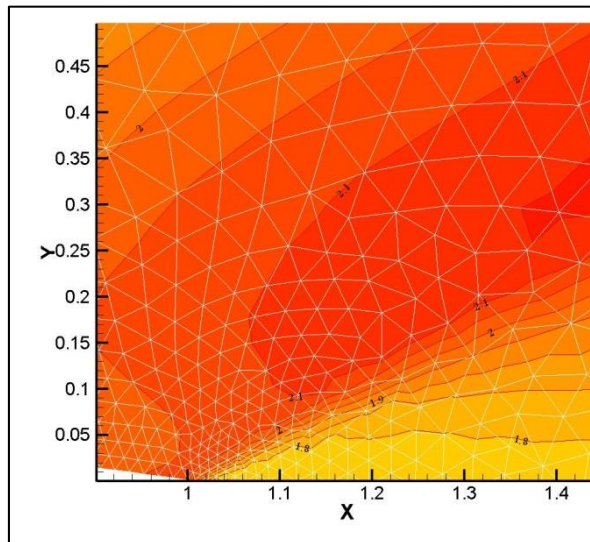


Σχήμα 3.135: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

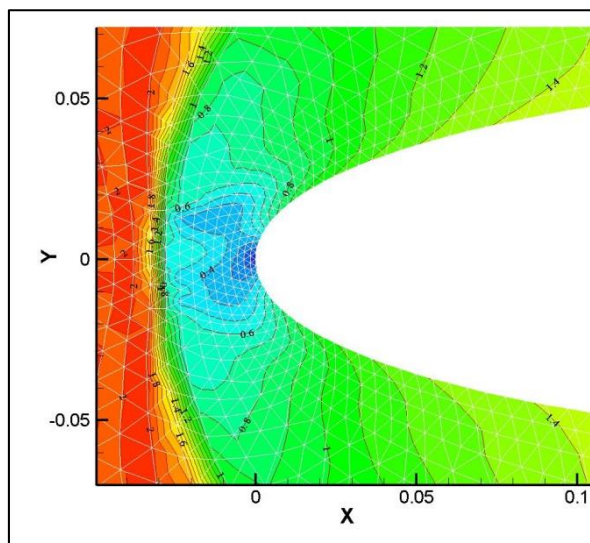
Mach number= 2.00
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L}, SB (SuperBee)



Σχήμα 3.136: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

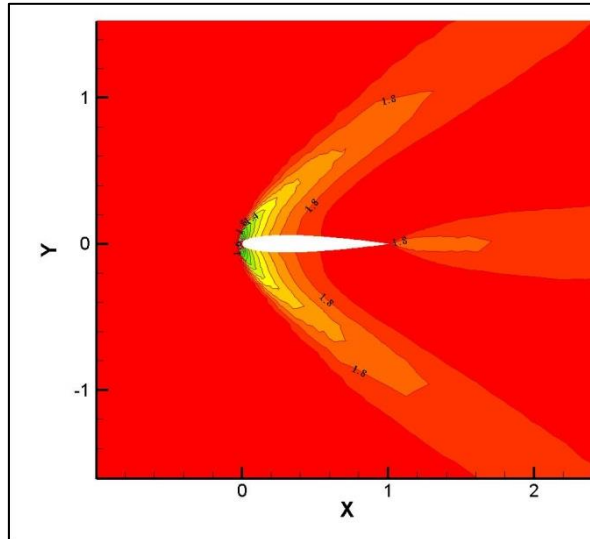


Σχήμα 3.137: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

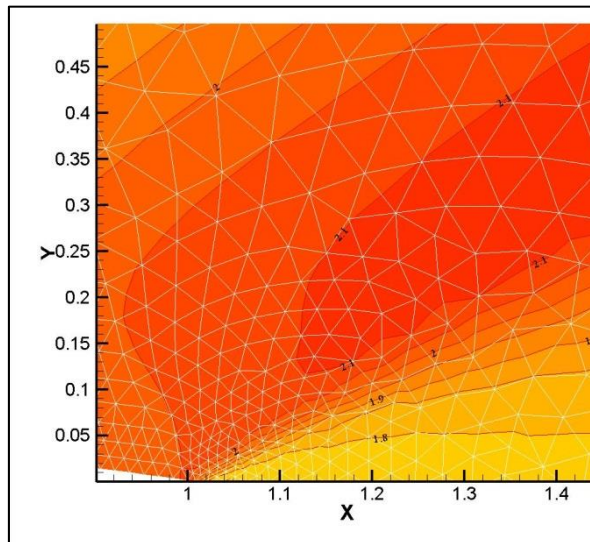


Σχήμα 3.138: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

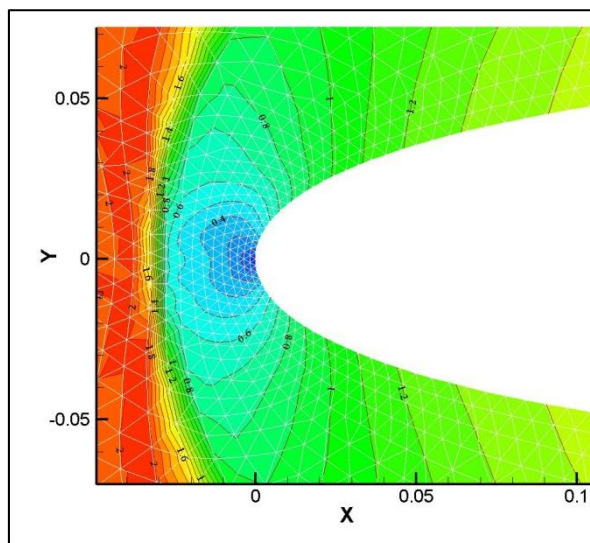
Mach number= 2.00
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L} , VA (Van Albada)



Σχήμα 3.139: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

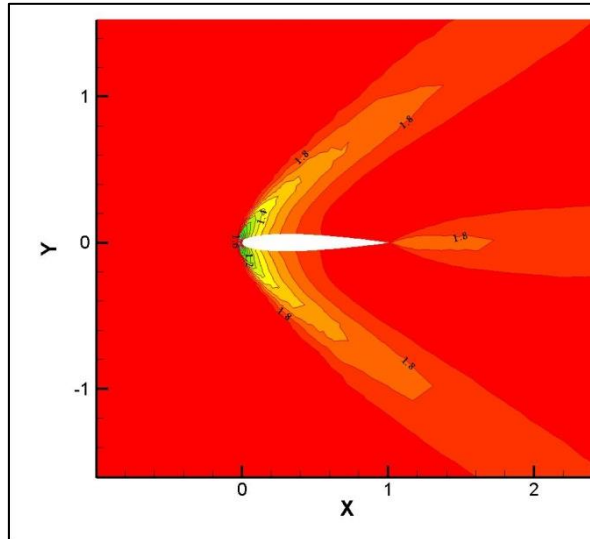


Σχήμα 3.140: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

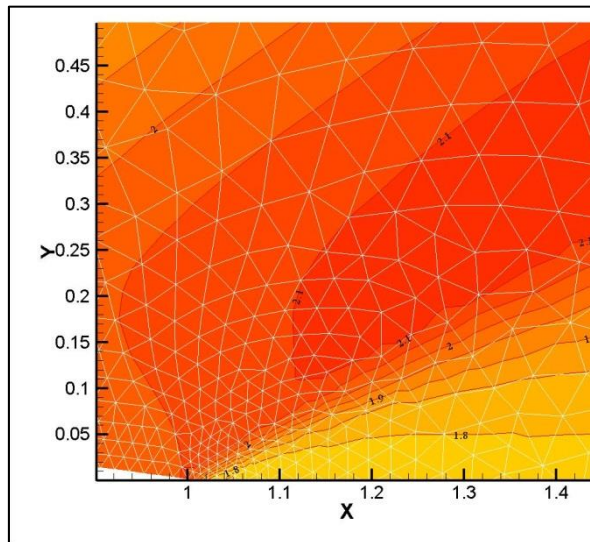


Σχήμα 3.141: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

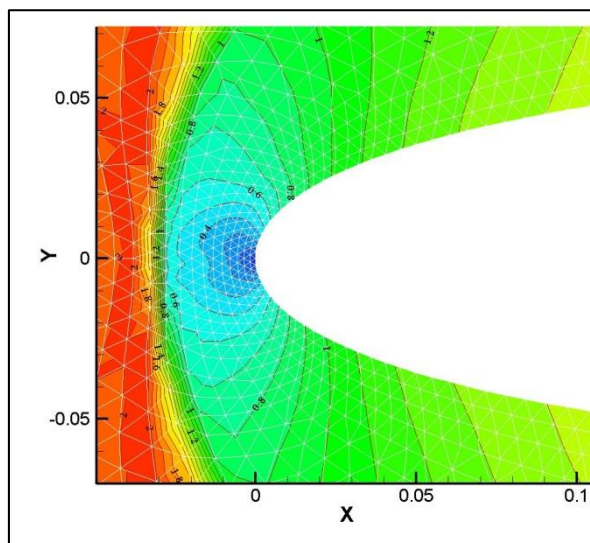
Mach number= 2.00
Riemann solver: HLLC
Limiter: W_{2L} , VL (Van Leer)



Σχήμα 3.142: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

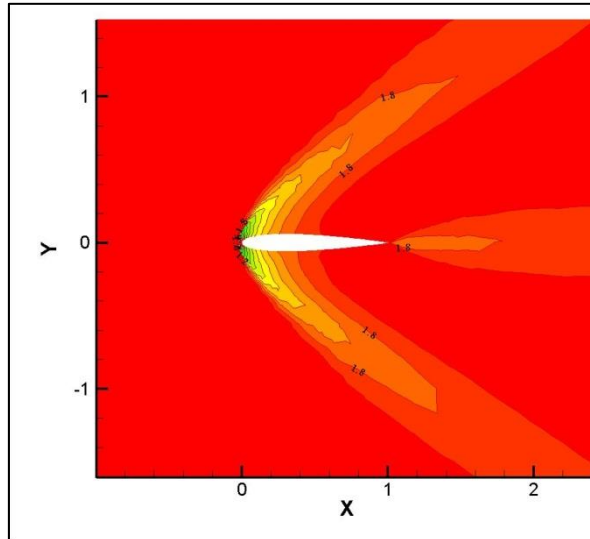


Σχήμα 3.143: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

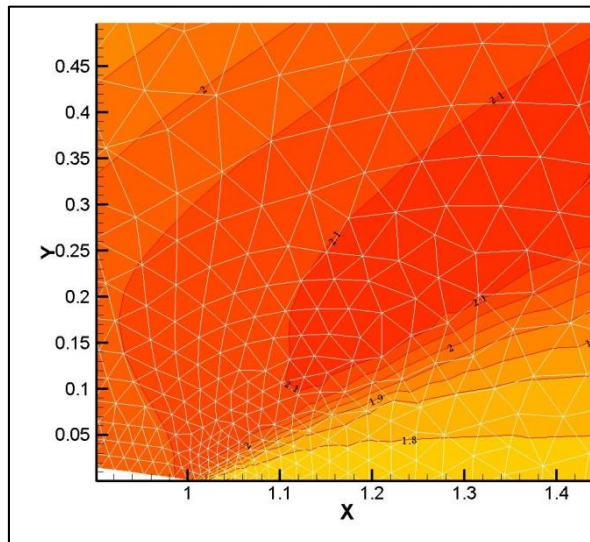


Σχήμα 3.144: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

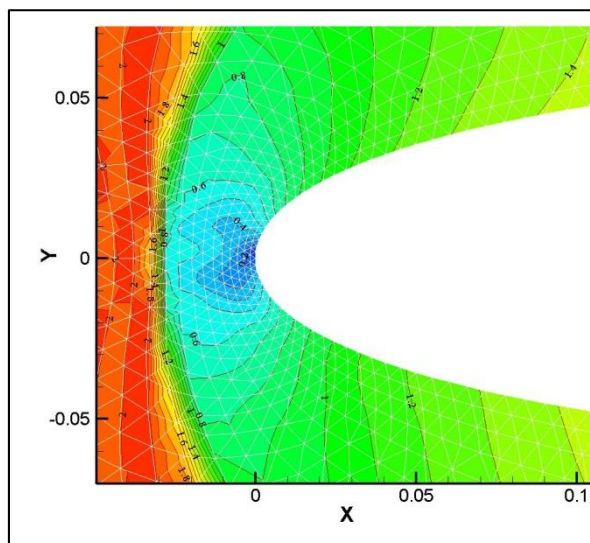
Mach number= 2.00
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L} , MC (Monotonized Central)



Σχήμα 3.145: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

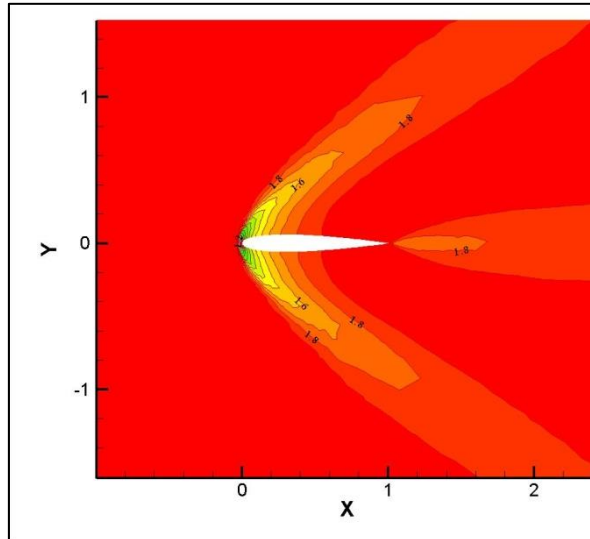


Σχήμα 3.146: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

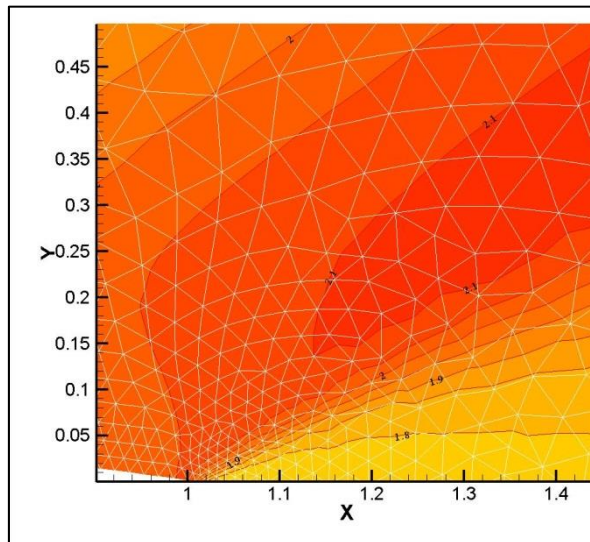


Σχήμα 3.147: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

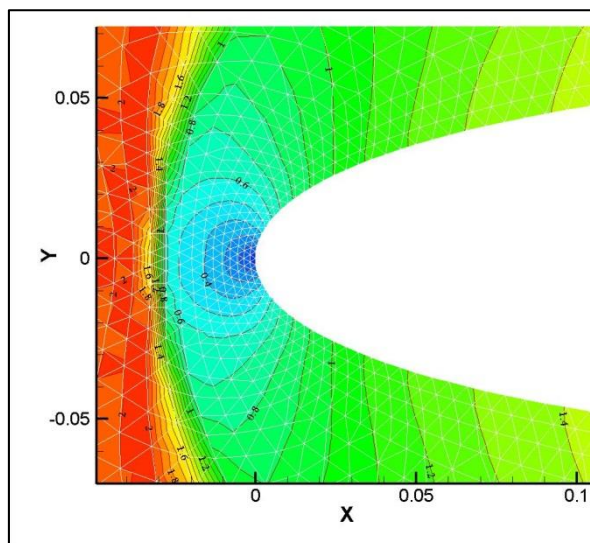
Mach number= 2.00
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L}, MM (MinMod)



Σχήμα 3.148: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

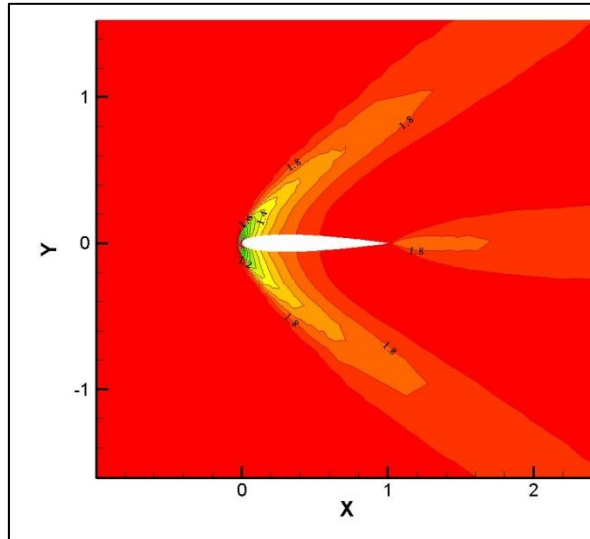


Σχήμα 3.149: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

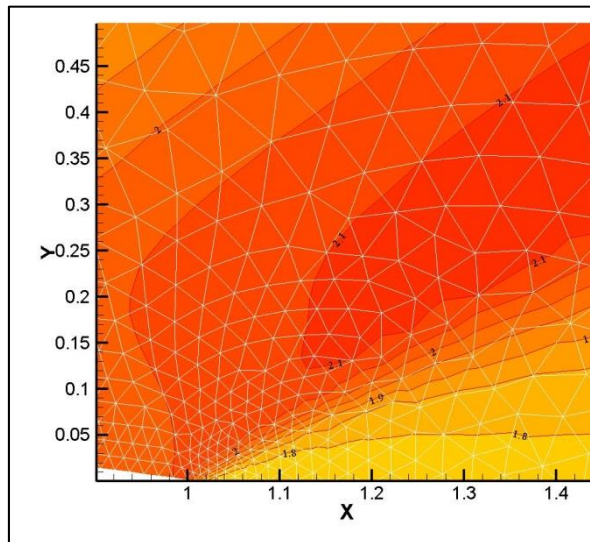


Σχήμα 3.150: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

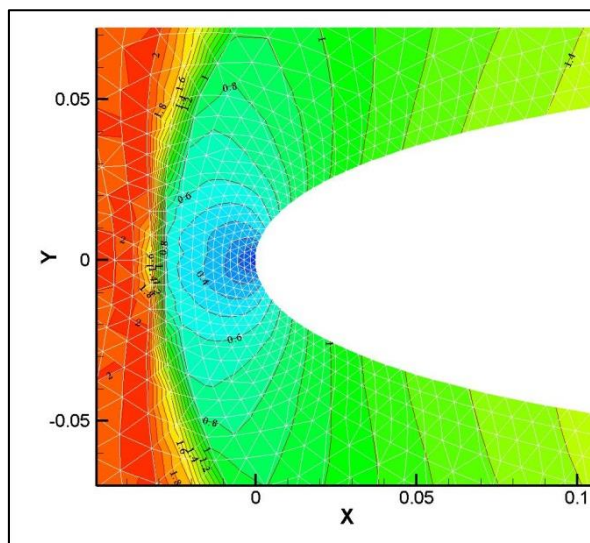
Mach number= 2.00
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L} , VA (Van Albada)



Σχήμα 3.151: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.

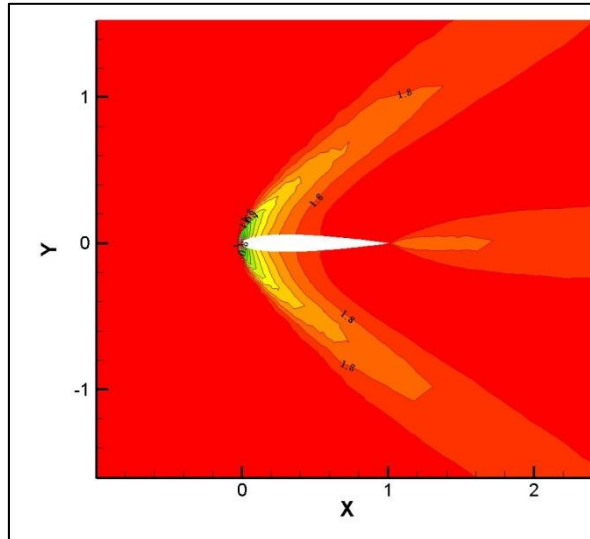


Σχήμα 3.152: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.

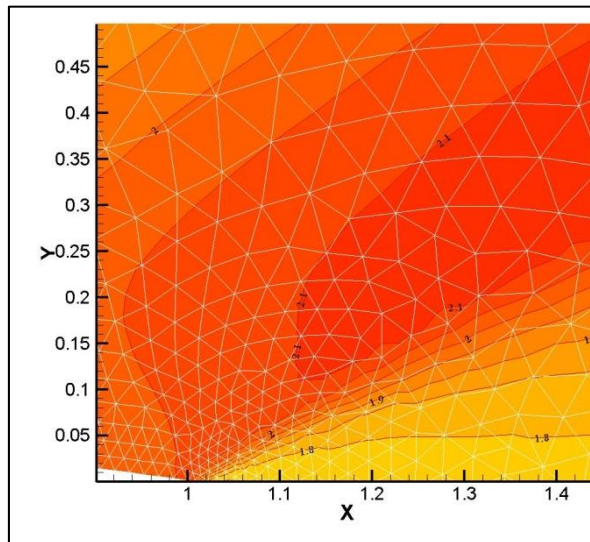


Σχήμα 3.153: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

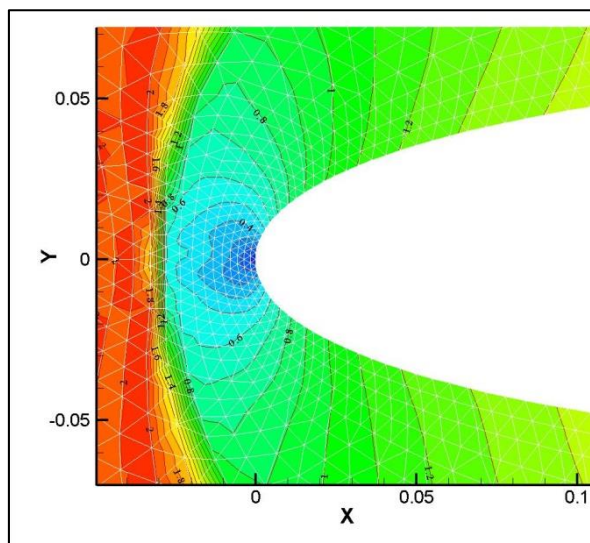
Mach number= 2.00
Riemann solver: ROE
Limiter: W_{2L}, VL (Van Leer)



Σχήμα 3.154: Ισογραμμές αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA0012.



Σχήμα 3.155: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή του άνω τμήματος της αεροτομής.



Σχήμα 3.156: Κοντινή άποψη των ισογραμμών αριθμού Mach για την αεροτομή NACA0012 στην περιοχή της ακμής προσβολής της αεροτομής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διατριβή παρουσιάστηκε η εφαρμογή μίας νέας μεθοδολογίας πολυδιάστατου-τύπου ανακατασκευής και περιορισμού των μεγεθών της ροής, για την επίλυση των εξισώσεων Euler, του συμπιεστού μη συνεκτικού ρευστού, σε διδιάστατα μη δομημένα πλέγματα τριγωνικών στοιχείων με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Όγκων. Η μεθοδολογία εφαρμόστηκε για κεντροκομβική θεώρηση με δυϊκά πλέγματα τύπου centroid-dual, τα οποία προκύπτουν από την ένωση των βαρυκέντρων γειτονικών τριγώνων με ευθύγραμμα τμήματα. Η μεθοδολογία όμως είναι άμεσα εφαρμόσιμη και σε υβριδικά πλέγματα, που αποτελούνται από συνδυασμό τριγωνικών και τετραπλευρικών στοιχείων (στις 2 διαστάσεις) ενώ είναι επεκτάσιμη και στις 3 διαστάσεις. Η μεθοδολογία είναι ανεξάρτητη του προσεγγιστικού επιλύτη Riemann που χρησιμοποιείται και εφαρμόστηκε επιτυχώς στην παρούσα διατριβή για δύο διαφορετικούς προσεγγιστικούς επιλύτες (Roe και HLLC). Η ανακατασκευή των τιμών των πρωτεύουσών μεταβλητών της ροής πραγματοποιείται τμηματικά, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι το μέσον κάθε πλευράς του όγκου ελέγχου δεν ταυτίζεται με το μέσον της αντίστοιχης ακμής, ούτε γενικά εντοπίζεται πάνω στην ακμή που συνδέει του αντίστοιχους γειτονικούς κόμβους του τριγωνικού πλέγματος. Για το λόγο αυτό η ανακατασκευή των τιμών πραγματοποιείται κατά τμήματα και με τον ίδιο τρόπο πραγματοποιείται και η εφαρμογή των συναρτήσεων περιορισμού στις κλίσεις των μεγεθών της ροής. Η μεθοδολογία συνδυάστηκε στην παρούσα διατριβή με 5 διαφορετικές edge-based συναρτήσεις περιορισμού, οι οποίες και αξιολογήθηκαν, όσον αφορά το βαθμό της συμβατότητάς τους με την συγκεκριμένη μεθοδολογία. Τα αποτελέσματα της αξιολόγησης έδειξαν ότι η συγκεκριμένη μεθοδολογία συνδυάζεται καλύτερα με πιο ομαλές συναρτήσεις περιορισμού (π.χ. MinMod), ενώ ο συνδυασμός της μεθοδολογίας με πιο απότομες συναρτήσεις περιορισμού οδηγεί σε ψευδείς υπερακοντίσεις και ταλαντώσεις στην περιοχή των ασυνεχειών της ροής (στα κύματα κρούσης).

Η εφαρμογή της μεθοδολογίας σε διαφορετικούς τύπους πλέγματος (συμμετρικά και μη συμμετρικά - με μεγάλες παραμορφώσεις τα τελευταία) έδειξε ότι τα αποτελέσματα των ελέγχων σύγκλισης είναι ανεξάρτητα του τύπου του πλέγματος, ακόμη και για πλέγματα που διαθέτουν κακή συνδεσμολογία μεταξύ των γειτονικών κόμβων και οδηγούν σε άσχημες θέσεις τα μέσα των πλευρών των όγκων ελέγχου του πλέγματος. Η συμπεριφορά αυτή είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι η συγκεκριμένη μεθοδολογία λαμβάνει υπόψη τη γεωμετρική πληροφορία της τοπολογίας του πλέγματος. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά είναι απολύτως συμβατή με την αντίστοιχη συμπεριφορά της μεθόδου σε κεντροκυβελικές θεωρήσεις σε προηγούμενες εργασίες. Είναι η πρώτη φορά που η συγκεκριμένη μεθοδολογία εφαρμόζεται σε πλέγματα centroid-dual, ενώ προηγουμένως έχει εφαρμοστεί επιτυχώς σε κεντροκυβελικές θεωρήσεις τριγωνικών πλεγμάτων. Με την εργασία αυτή αποδεικνύεται η γενικότητα της μεθοδολογίας και η δυνατότητα εφαρμογής της, τόσο σε κεντροκυβελικές όσο και σε κεντροκομβικές θεωρήσεις, για μη δομημένα (υβριδικά ή μη πλέγματα) για την επίλυση υπερβολικού τύπου προβλημάτων.

Από την παρούσα εργασία, σε σύγκριση με την κεντροκυβελική θεώρηση για ίδια ακριβώς πλέγματα φάνηκε η ελεφρά υπεροχή της κεντροκυβελικής θεώρησης, όσον αφορά το σφάλμα και την τάξη σύγκλισης που επιτυγχάνεται. Αυτό αποδίδεται στο πιο πυκνό stencil για τον υπολογισμό της κλίσης των μεγεθών της ροής στην περίπτωση της κεντροκυβελικής θεώρησης, σε σχέση με την αντίστοιχη κεντροκομβική που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία.

Άμεση επέκταση της εργασίας είναι η εφαρμογή της σε centroid-dual κεντροκομβικές θεωρήσεις αλλά σε υβριδικά πλέγματα αποτελούμενα από τριγωνικά και τετραπλευρικά στοιχεία. Τα τελευταία απαιτούνται να χρησιμοποιηθούν κατά την επίλυση της συνεκτικής ροής κοντά σε στερεά τοιχώματα για την καλή προσομοίωση

της ανάπτυξης των αντίστοιχων οριακών στρωμάτων. Επίσης, η παρούσα μεθοδολογία πρέπει να δοκιμαστεί και σε άλλες περιπτώσεις αναφοράς, ώστε να εξαχθούν στιβαρά συμπεράσματα για τις ιδιότητες και τις δυνατότητές της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clain, S. and Clauzon, V. (2010), "Monoslope and multislope MUSCL methods for unstructured meshes", *Journal of Computational Physics*, 229, pp. 3745-3776.

Berger, M., Aftosmis, M.J., Murman, S.M. (2005), "Analysis of slope limiters on irregular grids", *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV.

Delis, A.I., Nikolos, I.K., and Kazolea, M. (2011), "Performance and comparison of cell-centered and node centered unstructured finite volume discretizations for shallow water free surface flows", *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18, pp. 57-108.

Delis, A.I. and Nikolos, I.K. (2013), "A novel multi-dimensional solution reconstruction and edge-based limiting procedure for unstructured cell-centered finite volumes with application to shallow water dynamics", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(5), pp. 584-633.

Diskin, B., Thomas, J.L. (2010), "Comparison of node-centered and cell-centered unstructured finite volume discretizations: inviscid fluxes", *48th AIAA Aerospace sciences meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, Orlando, Florida, AIAA paper 2010-1079.

Goodman, J.B., LeVeque, R.J. (1985), "On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservative laws", *Mathematics of Computation*, Vol. 45, No 171, pp. 15-21.

Hubbard, M.E. (1999), "Multi-dimensional slope limiters for MUSCL-type finite volume schemes on unstructured grids", *Journal of Computational Physics*, 155, pp. 54-74.

Jawahar, P., Kamath, H. (2000), "A High-Resolution Procedure for Euler & Navier Stokes Computations on unstructured grids", *Journal of Computational Physics*, 164, pp. 165-203.

Li, W., Ren, Y.-X., Lei, G., Luo, H. (2011), "The multi-dimensional limiters for solving hyperbolic conservation laws on unstructured grids", *Journal of Computational Physics*, 230, pp. 7775-7795.

Park, J.S., Yoon, S.-H., Kim, C. (2010), "Multi-dimensional limiting process for hyperbolic conservation laws on unstructured grids", *Journal of Computational Physics*, 229, pp. 788-812.

Roe, P.L. (1981), "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes", *Journal of Computational Physics*, 43, pp. 357-372.

Toro, E.F. (1997), *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer, Berlin.

Van Albada, G.D., Van Leer, B., Roberts, W.W. (1982), "A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics", *Astronomy and Astrophysics*, 108, pp. 46-84.

Van Leer, B. (1979), "Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method", *Journal of Computational Physics*, 32, pp. 101-136.

Vilsmeier, R., Hänel, D. (1993), "Adaptive methods on unstructured grids for Euler and Navier Stokes equations", *Computers Fluid Vol.* 22, No. 44/45, pp. 485-499.

Κουμπογιάννης, Δ.Γ. (1998), *Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes με χρήση μη δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Αθήνα.

Λυγιδάκης Γ. (2009), *Ανάπτυξη μεθοδολογίας αυτόματης πύκνωσης μη δομημένου πλέγματος κατά την αριθμητική επίλυση εξισώσεων Euler στις τρεις διαστάσεις*, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.

Φωταράς, Μ. (2005), *Προγραμματισμός κώδικα επίλυσης διδιάστατων ατρίβων πεδίων ροής με χρήση υβριδικών πλεγμάτων και εφαρμογή στις θερμικές στροβιλομηχανές*, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Αθήνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1:

Αποτελέσματα ελέγχου ρυθμού σύγκλισης (Isentropic Vortex Case)

Limiter: Unlimited, Van Leer-Van Albada

Riemann Solver: HLLC

Grid: Equilateral I

EQUILATERAL I			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	$\log_{10}(\text{error}(p))$	$\log_{10}(\text{error}(pu))$	$\log_{10}(\text{error}(pe))$	(p)	(pu)	(pe)
1.936E-02	3.691E-02	8.713E-02	-1.713E+00	-1.433E+00	-1.060E+00	slope	slope	slope
7.286E-03	1.431E-02	3.261E-02	-2.138E+00	-1.844E+00	-1.487E+00	1.57	1.52	1.58
1.641E-03	3.587E-03	7.549E-03	-2.785E+00	-2.445E+00	-2.122E+00	2.20	2.04	2.16
3.591E-04	8.299E-04	1.664E-03	-3.445E+00	-3.081E+00	-2.779E+00	2.22	2.13	2.21
8.492E-05	1.965E-04	3.903E-04	-4.071E+00	-3.707E+00	-3.409E+00	2.08	2.08	2.09
Average slope						2.02	1.94	2.01

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	$\log_{10}(\text{error}(p))$	$\log_{10}(\text{error}(pu))$	$\log_{10}(\text{error}(pe))$	(p)	(pu)	(pe)
4.102E-03	8.943E-03	1.885E-02	-2.387E+00	-2.049E+00	-1.725E+00	slope	slope	slope
1.415E-03	3.164E-03	6.370E-03	-2.849E+00	-2.500E+00	-2.196E+00	1.71	1.67	1.74
2.940E-04	7.326E-04	1.394E-03	-3.532E+00	-3.135E+00	-2.856E+00	2.31	2.16	2.24
6.054E-05	1.635E-04	3.009E-04	-4.218E+00	-3.786E+00	-3.522E+00	2.30	2.19	2.24
1.377E-05	3.853E-05	7.045E-05	-4.861E+00	-4.414E+00	-4.152E+00	2.13	2.08	2.09
Average slope						2.12	2.02	2.08

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	$\log_{10}(\text{error}(p))$	$\log_{10}(\text{error}(pu))$	$\log_{10}(\text{error}(pe))$	(p)	(pu)	(pe)
2.513E-01	3.998E-01	1.246E+00	-5.998E-01	-3.981E-01	9.561E-02	slope	slope	slope
1.197E-01	1.682E-01	5.326E-01	-9.217E-01	-7.739E-01	-2.735E-01	1.19	1.39	1.37
3.114E-02	5.304E-02	1.420E-01	-1.506E+00	-1.275E+00	-8.476E-01	1.98	1.70	1.95
6.661E-03	1.307E-02	3.175E-02	-2.176E+00	-1.883E+00	-1.498E+00	2.25	2.04	2.18
1.474E-03	3.038E-03	7.066E-03	-2.831E+00	-2.517E+00	-2.150E+00	2.17	2.10	2.17
Average slope						1.90	1.81	1.92

Limiter: Unlimited, Van Leer-Van Albada

Riemann Solver: HLLC

Grid: Distorted IV

DISTORTED IV			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
1.913E-02	3.795E-02	8.536E-02	-1.718E+00	-1.421E+00	-1.069E+00	slope	slope	slope
7.655E-03	1.504E-02	3.401E-02	-2.116E+00	-1.823E+00	-1.468E+00	1.47	1.49	1.48
1.740E-03	3.594E-03	7.943E-03	-2.759E+00	-2.444E+00	-2.100E+00	2.18	2.11	2.14
3.647E-04	8.084E-04	1.658E-03	-3.438E+00	-3.092E+00	-2.780E+00	2.28	2.18	2.28
8.484E-05	1.870E-04	3.783E-04	-4.071E+00	-3.728E+00	-3.422E+00	2.10	2.11	2.13
Average slope						2.01	1.97	2.01

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.313E-03	9.766E-03	1.929E-02	-2.365E+00	-2.010E+00	-1.715E+00	slope	slope	slope
1.505E-03	3.436E-03	6.689E-03	-2.822E+00	-2.464E+00	-2.175E+00	1.69	1.68	1.70
3.170E-04	7.285E-04	1.462E-03	-3.499E+00	-3.138E+00	-2.835E+00	2.29	2.28	2.24
6.461E-05	1.598E-04	3.054E-04	-4.190E+00	-3.796E+00	-3.515E+00	2.32	2.21	2.28
1.494E-05	3.703E-05	7.033E-05	-4.826E+00	-4.431E+00	-4.153E+00	2.11	2.11	2.12
Average slope						2.10	2.07	2.09

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.3546E-01	4.4278E-01	9.2395E-01	-6.2809E-01	-3.5381E-01	-3.4351E-02	slope	slope	slope
1.3664E-01	1.8436E-01	5.9255E-01	-8.6441E-01	-7.3434E-01	-2.2728E-01	0.87	1.41	0.71
3.8832E-02	5.6488E-02	1.6651E-01	-1.4108E+00	-1.2480E+00	-7.7857E-01	1.85	1.74	1.87
8.6133E-03	1.4334E-02	3.5399E-02	-2.0648E+00	-1.8436E+00	-1.4510E+00	2.20	2.00	2.26
2.1147E-03	3.4021E-03	8.4920E-03	-2.6748E+00	-2.4682E+00	-2.0710E+00	2.02	2.07	2.06
Average slope						1.74	1.81	1.72

Limiter: Unlimited, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Orthogonal II

ORTHOGONAL II			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.6897	-0.1614
1	40	0.3492	-0.4570
1	80	0.1757	-0.7553
1	160	0.0881	-1.0550
1	320	0.0441	-1.3553

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	$\log_{10}(\text{error}(p))$	$\log_{10}(\text{error}(pu))$	$\log_{10}(\text{error}(pe))$	(p)	(pu)	(pe)
1.583E-02	3.162E-02	7.182E-02	-1.801E+00	-1.500E+00	-1.144E+00	slope	slope	slope
5.030E-03	1.038E-02	2.270E-02	-2.298E+00	-1.984E+00	-1.644E+00	1.68	1.64	1.69
1.130E-03	2.536E-03	5.201E-03	-2.947E+00	-2.596E+00	-2.284E+00	2.17	2.05	2.15
2.606E-04	6.004E-04	1.197E-03	-3.584E+00	-3.222E+00	-2.922E+00	2.13	2.09	2.13
6.382E-05	1.462E-04	2.906E-04	-4.195E+00	-3.835E+00	-3.537E+00	2.03	2.04	2.05
Average slope						2.00	1.95	2.00

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	$\log_{10}(\text{error}(p))$	$\log_{10}(\text{error}(pu))$	$\log_{10}(\text{error}(pe))$	(p)	(pu)	(pe)
3.319E-03	7.583E-03	1.433E-02	-2.479E+00	-2.120E+00	-1.844E+00	slope	slope	slope
9.630E-04	2.243E-03	4.359E-03	-3.016E+00	-2.649E+00	-2.361E+00	1.82	1.79	1.75
1.972E-04	5.123E-04	9.540E-04	-3.705E+00	-3.290E+00	-3.020E+00	2.31	2.15	2.21
4.304E-05	1.184E-04	2.172E-04	-4.366E+00	-3.927E+00	-3.663E+00	2.21	2.12	2.14
1.025E-05	2.880E-05	5.259E-05	-4.989E+00	-4.541E+00	-4.279E+00	2.07	2.04	2.05
Average slope						2.10	2.03	2.04

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	$\log_{10}(\text{error}(p))$	$\log_{10}(\text{error}(pu))$	$\log_{10}(\text{error}(pe))$	(p)	(pu)	(pe)
2.697E-01	3.333E-01	1.20E+00	-5.690E-01	-4.770E-01	8.019E-02	slope	slope	slope
9.013E-02	1.329E-01	3.972E-01	-1.045E+00	-8.762E-01	-4.009E-01	1.61	1.35	1.63
2.104E-02	3.886E-02	9.681E-02	-1.676E+00	-1.410E+00	-1.014E+00	2.12	1.79	2.06
4.816E-03	9.444E-03	2.272E-02	-2.317E+00	-2.024E+00	-1.643E+00	2.14	2.05	2.10
1.109E-03	2.246E-03	5.250E-03	-2.954E+00	-2.648E+00	-2.279E+00	2.12	2.08	2.12
Average slope						2.00	1.82	1.98

Limiter: Unlimited, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Orthogonal III

ORTHOGONAL III			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.9524	-0.0212
1	40	0.4878	-0.3118
1	80	0.2469	-0.6075
1	160	0.1242	-0.9058
1	320	0.0623	-1.2055

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.234E-02	4.670E-02	1.002E-01	-1.651E+00	-1.331E+00	-9.990E-01	slope	slope	slope
9.921E-03	2.141E-02	4.392E-02	-2.003E+00	-1.669E+00	-1.357E+00	1.21	1.17	1.23
2.655E-03	6.163E-03	1.184E-02	-2.576E+00	-2.210E+00	-1.927E+00	1.94	1.83	1.93
6.031E-04	1.443E-03	2.751E-03	-3.220E+00	-2.841E+00	-2.560E+00	2.16	2.11	2.12
1.448E-04	3.469E-04	6.673E-04	-3.839E+00	-3.460E+00	-3.176E+00	2.07	2.07	2.05
Average slope						1.84	1.79	1.83

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
5.008E-03	1.223E-02	2.149E-02	-2.300E+00	-1.913E+00	-1.668E+00	slope	slope	slope
2.010E-03	5.031E-03	8.853E-03	-2.697E+00	-2.298E+00	-2.053E+00	1.36	1.33	1.33
4.856E-04	1.313E-03	2.230E-03	-3.314E+00	-2.882E+00	-2.652E+00	2.09	1.97	2.03
1.027E-04	2.902E-04	4.921E-04	-3.988E+00	-3.537E+00	-3.308E+00	2.26	2.20	2.20
2.403E-05	6.915E-05	1.190E-04	-4.619E+00	-4.160E+00	-3.924E+00	2.11	2.08	2.06
Average slope						1.95	1.89	1.90

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.5701E-01	4.7558E-01	1.5948E+00	-0.44731548	-0.322777433	0.202715581	slope	slope	slope
1.7010E-01	2.2915E-01	7.5615E-01	-0.769302628	-0.639872446	-0.121392242	1.11	1.09	1.12
4.9386E-02	7.3139E-02	2.2286E-01	-1.306397996	-1.135848852	-0.651964487	1.82	1.68	1.79
1.1230E-02	2.0292E-02	5.3211E-02	-1.949621785	-1.692684438	-1.273994685	2.16	1.87	2.08
2.5565E-03	5.0275E-03	1.2237E-02	-2.592362145	-2.29864602	-1.912329103	2.14	2.02	2.13
Average slope						1.81	1.66	1.78

Limiter: Unlimited, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Distorted A

DISTORTED A			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(pu)	Error(pe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\text{pu}))$	$\log_{10}(\text{error}(\text{pe}))$	(ρ)	(pu)	(pe)
2.138E-02	3.666E-02	9.211E-02	-1.670E+00	-1.436E+00	-1.036E+00	slope	slope	slope
7.853E-03	1.466E-02	3.362E-02	-2.105E+00	-1.834E+00	-1.473E+00	1.61	1.47	1.62
1.772E-03	3.561E-03	7.730E-03	-2.751E+00	-2.448E+00	-2.112E+00	2.19	2.08	2.17
3.863E-04	8.010E-04	1.698E-03	-3.413E+00	-3.096E+00	-2.770E+00	2.22	2.18	2.21
8.834E-05	1.888E-04	3.897E-04	-4.054E+00	-3.724E+00	-3.409E+00	2.13	2.08	2.12
Average slope						2.04	1.95	2.03

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(pu)	Error(pe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\text{pu}))$	$\log_{10}(\text{error}(\text{pe}))$	(ρ)	(pu)	(pe)
4.509E-03	9.238E-03	1.925E-02	-2.346E+00	-2.034E+00	-1.715E+00	slope	slope	slope
1.570E-03	3.363E-03	6.756E-03	-2.804E+00	-2.473E+00	-2.170E+00	1.70	1.62	1.68
3.448E-04	7.329E-04	1.493E-03	-3.462E+00	-3.135E+00	-2.826E+00	2.23	2.24	2.22
7.178E-05	1.592E-04	3.160E-04	-4.144E+00	-3.798E+00	-3.500E+00	2.29	2.23	2.26
1.623E-05	3.689E-05	7.222E-05	-4.790E+00	-4.433E+00	-4.141E+00	2.14	2.11	2.13
Average slope						2.09	2.05	2.07

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(pu)	Error(pe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\text{pu}))$	$\log_{10}(\text{error}(\text{pe}))$	(ρ)	(pu)	(pe)
2.9725E-01	3.7485E-01	1.2999E+00	-5.2688E-01	-4.2614E-01	1.1392E-01	slope	slope	slope
1.3832E-01	1.7610E-01	6.0153E-01	-8.5910E-01	-7.5423E-01	-2.2075E-01	1.23	1.21	1.24
3.7639E-02	5.1835E-02	1.6217E-01	-1.4244E+00	-1.2854E+00	-7.9002E-01	1.92	1.80	1.93
8.7883E-03	1.4838E-02	3.8972E-02	-2.0561E+00	-1.8286E+00	-1.4092E+00	2.12	1.82	2.08
2.0645E-03	3.6336E-03	8.7492E-03	-2.6852E+00	-2.4397E+00	-2.0580E+00	2.09	2.03	2.15
Average slope						1.84	1.72	1.85

Limiter: Unlimited, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: ROE
 Grid: Equilateral I

EQUILATERAL I			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
1.929E-02	3.690E-02	8.701E-02	-1.715E+00	-1.433E+00	-1.060E+00	slope	slope	slope
7.266E-03	1.431E-02	3.260E-02	-2.139E+00	-1.844E+00	-1.487E+00	1.57	1.52	1.58
1.640E-03	3.587E-03	7.550E-03	-2.785E+00	-2.445E+00	-2.122E+00	2.19	2.04	2.16
3.591E-04	8.299E-04	1.664E-03	-3.445E+00	-3.081E+00	-2.779E+00	2.22	2.13	2.21
8.492E-05	1.965E-04	3.903E-04	-4.071E+00	-3.707E+00	-3.409E+00	2.08	2.08	2.09
Average slope						2.01	1.94	2.01

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.084E-03	8.941E-03	1.882E-02	-2.389E+00	-2.049E+00	-1.725E+00	slope	slope	slope
1.411E-03	3.163E-03	6.366E-03	-2.850E+00	-2.500E+00	-2.196E+00	1.71	1.67	1.74
2.939E-04	7.325E-04	1.394E-03	-3.532E+00	-3.135E+00	-2.856E+00	2.31	2.15	2.24
6.054E-05	1.635E-04	3.009E-04	-4.218E+00	-3.786E+00	-3.522E+00	2.30	2.19	2.24
1.377E-05	3.853E-05	7.045E-05	-4.861E+00	-4.414E+00	-4.152E+00	2.13	2.08	2.09
Average slope						2.11	2.02	2.08

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.5098E-01	3.9980E-01	1.2456E+00	-6.0037E-01	-3.9816E-01	9.5363E-02	slope	slope	slope
1.1949E-01	1.6820E-01	5.3244E-01	-9.2265E-01	-7.7418E-01	-2.7373E-01	1.19	1.39	1.37
3.1142E-02	5.3046E-02	1.4202E-01	-1.5066E+00	-1.2753E+00	-8.4765E-01	1.98	1.70	1.95
6.6611E-03	1.3077E-02	3.1755E-02	-2.1765E+00	-1.8835E+00	-1.4982E+00	2.25	2.04	2.18
1.4742E-03	3.0385E-03	7.0665E-03	-2.8314E+00	-2.5173E+00	-2.1508E+00	2.17	2.10	2.17
Average slope						1.90	1.81	1.92

Limiter: Unlimited, Van Leer-Van Albada
Riemann Solver: ROE
Grid: Distorted IV

DISTORTED IV			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
1.905E-02	3.797E-02	8.531E-02	-1.720E+00	-1.421E+00	-1.069E+00	slope	slope	slope
7.639E-03	1.504E-02	3.399E-02	-2.117E+00	-1.823E+00	-1.469E+00	1.47	1.49	1.48
1.740E-03	3.594E-03	7.944E-03	-2.759E+00	-2.444E+00	-2.100E+00	2.18	2.11	2.14
3.647E-04	8.085E-04	1.658E-03	-3.438E+00	-3.092E+00	-2.780E+00	2.28	2.18	2.28
8.485E-05	1.870E-04	3.783E-04	-4.071E+00	-3.728E+00	-3.422E+00	2.10	2.11	2.13
Average slope						2.01	1.97	2.01

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.298E-03	9.764E-03	1.929E-02	-2.367E+00	-2.010E+00	-1.715E+00	slope	slope	slope
1.503E-03	3.436E-03	6.689E-03	-2.823E+00	-2.464E+00	-2.175E+00	1.69	1.68	1.70
3.170E-04	7.284E-04	1.462E-03	-3.499E+00	-3.138E+00	-2.835E+00	2.29	2.29	2.24
6.461E-05	1.598E-04	3.054E-04	-4.190E+00	-3.796E+00	-3.515E+00	2.32	2.21	2.28
1.494E-05	3.703E-05	7.032E-05	-4.826E+00	-4.431E+00	-4.153E+00	2.11	2.11	2.12
Average slope						2.10	2.07	2.09

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.3419E-01	4.4300E-01	9.2142E-01	-6.3044E-01	-3.5359E-01	-3.5541E-02	slope	slope	slope
1.3637E-01	1.8425E-01	5.9245E-01	-8.6527E-01	-7.3459E-01	-2.2735E-01	0.87	1.41	0.71
3.8835E-02	5.6479E-02	1.6655E-01	-1.4108E+00	-1.2481E+00	-7.7845E-01	1.85	1.74	1.87
8.6288E-03	1.4334E-02	3.5442E-02	-2.0640E+00	-1.8436E+00	-1.4505E+00	2.19	2.00	2.26
2.1154E-03	3.4030E-03	8.4935E-03	-2.6746E+00	-2.4681E+00	-2.0709E+00	2.03	2.07	2.06
Average slope						1.73	1.81	1.72

Limiter: Unlimited, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: ROE
 Grid: Orthogonal II

ORTHOGONAL II			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.6897	-0.1614
1	40	0.3492	-0.4570
1	80	0.1757	-0.7553
1	160	0.0881	-1.0550
1	320	0.0441	-1.3553

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
1.576E-02	3.162E-02	7.173E-02	-1.802E+00	-1.500E+00	-1.144E+00	slope	slope	slope
5.020E-03	1.038E-02	2.269E-02	-2.299E+00	-1.984E+00	-1.644E+00	1.68	1.64	1.69
1.130E-03	2.536E-03	5.201E-03	-2.947E+00	-2.596E+00	-2.284E+00	2.17	2.05	2.14
2.606E-04	6.004E-04	1.197E-03	-3.584E+00	-3.222E+00	-2.922E+00	2.13	2.09	2.13
6.382E-05	1.462E-04	2.906E-04	-4.195E+00	-3.835E+00	-3.537E+00	2.03	2.04	2.05
Average slope						2.00	1.95	2.00

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.302E-03	7.576E-03	1.430E-02	-2.481E+00	-2.121E+00	-1.845E+00	slope	slope	slope
9.606E-04	2.242E-03	4.355E-03	-3.017E+00	-2.649E+00	-2.361E+00	1.81	1.79	1.75
1.971E-04	5.122E-04	9.538E-04	-3.705E+00	-3.291E+00	-3.021E+00	2.31	2.15	2.21
4.303E-05	1.184E-04	2.172E-04	-4.366E+00	-3.927E+00	-3.663E+00	2.21	2.12	2.14
1.025E-05	2.880E-05	5.259E-05	-4.989E+00	-4.541E+00	-4.279E+00	2.07	2.04	2.05
Average slope						2.10	2.03	2.04

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.6903E-01	3.3342E-01	1.2019E+00	-5.7019E-01	-4.7700E-01	7.9870E-02	slope	slope	slope
9.0031E-02	1.3297E-01	3.9711E-01	-1.0456E+00	-8.7624E-01	-4.0108E-01	1.61	1.35	1.63
2.1055E-02	3.8879E-02	9.6857E-02	-1.6766E+00	-1.4103E+00	-1.0139E+00	2.12	1.79	2.05
4.8178E-03	9.4449E-03	2.2724E-02	-2.3172E+00	-2.0248E+00	-1.6435E+00	2.14	2.05	2.10
1.1097E-03	2.2466E-03	5.2511E-03	-2.9548E+00	-2.6485E+00	-2.2797E+00	2.12	2.08	2.12
Average slope						2.00	1.82	1.98

Limiter: Unlimited, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: ROE
 Grid: Orthogonal III

ORTHOGONAL III			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.9524	-0.0212
1	40	0.4878	-0.3118
1	80	0.2469	-0.6075
1	160	0.1242	-0.9058
1	320	0.0623	-1.2055

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.227E-02	4.665E-02	1.001E-01	-1.652E+00	-1.331E+00	-9.996E-01	slope	slope	slope
9.894E-03	2.138E-02	4.388E-02	-2.005E+00	-1.670E+00	-1.358E+00	1.21	1.17	1.23
2.654E-03	6.160E-03	1.184E-02	-2.576E+00	-2.210E+00	-1.927E+00	1.93	1.83	1.92
6.031E-04	1.443E-03	2.751E-03	-3.220E+00	-2.841E+00	-2.560E+00	2.16	2.11	2.12
1.448E-04	3.469E-04	6.673E-04	-3.839E+00	-3.460E+00	-3.176E+00	2.07	2.07	2.05
Average slope						1.84	1.79	1.83

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.976E-03	1.222E-02	2.142E-02	-2.303E+00	-1.913E+00	-1.669E+00	slope	slope	slope
2.003E-03	5.020E-03	8.839E-03	-2.698E+00	-2.299E+00	-2.054E+00	1.36	1.33	1.32
4.853E-04	1.313E-03	2.229E-03	-3.314E+00	-2.882E+00	-2.652E+00	2.08	1.97	2.02
1.027E-04	2.902E-04	4.921E-04	-3.988E+00	-3.537E+00	-3.308E+00	2.26	2.20	2.20
2.403E-05	6.914E-05	1.190E-04	-4.619E+00	-4.160E+00	-3.924E+00	2.11	2.08	2.06
Average slope						1.95	1.89	1.90

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.5655E-01	4.7544E-01	1.5939E+00	-0.447885328	-0.322904484	0.202454707	slope	slope	slope
1.6980E-01	2.2895E-01	7.5582E-01	-0.770063045	-0.640252822	-0.121583994	1.11	1.09	1.12
4.9422E-02	7.3152E-02	2.2285E-01	-1.306083298	-1.13577361	-0.651995774	1.81	1.68	1.79
1.1235E-02	2.0295E-02	5.3216E-02	-1.949429323	-1.692602317	-1.273959013	2.16	1.87	2.08
2.5566E-03	5.0277E-03	1.2237E-02	-2.59233256	-2.298634152	-1.912327216	2.15	2.02	2.13
Average slope						1.81	1.66	1.78

Limiter: Unlimited, Van Leer-Van Albada
Riemann Solver: ROE
Grid: Distorted A

DISTORTED A			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.127E-02	3.661E-02	9.195E-02	-1.672E+00	-1.436E+00	-1.036E+00	slope	slope	slope
7.842E-03	1.466E-02	3.361E-02	-2.106E+00	-1.834E+00	-1.474E+00	1.60	1.47	1.62
1.773E-03	3.561E-03	7.731E-03	-2.751E+00	-2.448E+00	-2.112E+00	2.19	2.08	2.17
3.864E-04	8.012E-04	1.698E-03	-3.413E+00	-3.096E+00	-2.770E+00	2.22	2.17	2.21
8.836E-05	1.888E-04	3.897E-04	-4.054E+00	-3.724E+00	-3.409E+00	2.13	2.08	2.12
Average slope						2.04	1.95	2.03

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.476E-03	9.221E-03	1.916E-02	-2.349E+00	-2.035E+00	-1.718E+00	slope	slope	slope
1.568E-03	3.363E-03	6.756E-03	-2.805E+00	-2.473E+00	-2.170E+00	1.69	1.62	1.68
3.450E-04	7.326E-04	1.493E-03	-3.462E+00	-3.135E+00	-2.826E+00	2.23	2.25	2.22
7.181E-05	1.592E-04	3.160E-04	-4.144E+00	-3.798E+00	-3.500E+00	2.29	2.23	2.26
1.623E-05	3.690E-05	7.222E-05	-4.790E+00	-4.433E+00	-4.141E+00	2.14	2.11	2.13
Average slope						2.09	2.05	2.07

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.9638E-01	3.7430E-01	1.2991E+00	-5.2816E-01	-4.2678E-01	1.1365E-01	slope	slope	slope
1.3824E-01	1.7617E-01	6.0175E-01	-8.5937E-01	-7.5407E-01	-2.2058E-01	1.23	1.21	1.24
3.7697E-02	5.1798E-02	1.6232E-01	-1.4237E+00	-1.2857E+00	-7.8964E-01	1.91	1.80	1.93
8.7833E-03	1.4866E-02	3.8959E-02	-2.0563E+00	-1.8278E+00	-1.4094E+00	2.12	1.82	2.08
2.0642E-03	3.6362E-03	8.7525E-03	-2.6852E+00	-2.4394E+00	-2.0579E+00	2.09	2.03	2.15
Average slope						1.84	1.72	1.85

Limiter: W₁, Van Leer-Van Albada
Riemann Solver: HLLC
Grid: Equilateral I

EQUILATERAL I			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
1.936E-02	3.691E-02	8.713E-02	-1.713E+00	-1.433E+00	-1.060E+00	slope	slope	slope
7.286E-03	1.431E-02	3.261E-02	-2.138E+00	-1.844E+00	-1.487E+00	1.57	1.52	1.58
1.641E-03	3.587E-03	7.549E-03	-2.785E+00	-2.445E+00	-2.122E+00	2.20	2.04	2.16
3.591E-04	8.299E-04	1.664E-03	-3.445E+00	-3.081E+00	-2.779E+00	2.22	2.13	2.21
8.492E-05	1.965E-04	3.903E-04	-4.071E+00	-3.707E+00	-3.409E+00	2.08	2.08	2.09
Average slope						2.02	1.94	2.01

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
4.102E-03	8.943E-03	1.885E-02	-2.387E+00	-2.049E+00	-1.725E+00	slope	slope	slope
1.415E-03	3.164E-03	6.371E-03	-2.849E+00	-2.500E+00	-2.196E+00	1.71	1.67	1.74
2.940E-04	7.326E-04	1.394E-03	-3.532E+00	-3.135E+00	-2.856E+00	2.31	2.16	2.24
6.054E-05	1.635E-04	3.009E-04	-4.218E+00	-3.786E+00	-3.522E+00	2.30	2.19	2.24
1.377E-05	3.853E-05	7.045E-05	-4.861E+00	-4.414E+00	-4.152E+00	2.13	2.08	2.09
Average slope						2.12	2.02	2.08

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.513E-01	3.998E-01	1.246E+00	-5.9981E-01	-3.9810E-01	9.5610E-02	slope	slope	slope
1.197E-01	1.682E-01	5.326E-01	-9.2171E-01	-7.7395E-01	-2.7354E-01	1.19	1.39	1.37
3.114E-02	5.304E-02	1.420E-01	-1.5066E+00	-1.2754E+00	-8.4766E-01	1.98	1.70	1.95
6.661E-03	1.307E-02	3.175E-02	-2.1764E+00	-1.8834E+00	-1.4982E+00	2.25	2.04	2.18
1.474E-03	3.038E-03	7.066E-03	-2.8314E+00	-2.5173E+00	-2.1508E+00	2.17	2.10	2.17
Average slope						1.90	1.81	1.92

Limiter: W₁, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Distorted IV

DISTORTED IV			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
1.917E-02	3.781E-02	8.553E-02	-1.717E+00	-1.422E+00	-1.068E+00	slope	slope	slope
7.562E-03	1.496E-02	3.340E-02	-2.121E+00	-1.825E+00	-1.476E+00	1.50	1.49	1.51
1.748E-03	3.599E-03	7.929E-03	-2.757E+00	-2.444E+00	-2.101E+00	2.16	2.10	2.12
3.870E-04	8.286E-04	1.746E-03	-3.412E+00	-3.082E+00	-2.758E+00	2.20	2.14	2.21
1.167E-04	2.153E-04	5.014E-04	-3.933E+00	-3.667E+00	-3.300E+00	1.73	1.94	1.80
Average slope						1.89	1.92	1.91

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
4.289E-03	9.711E-03	1.928E-02	-2.368E+00	-2.013E+00	-1.715E+00	slope	slope	slope
1.478E-03	3.411E-03	6.636E-03	-2.830E+00	-2.467E+00	-2.178E+00	1.71	1.68	1.71
3.240E-04	7.367E-04	1.495E-03	-3.489E+00	-3.133E+00	-2.825E+00	2.24	2.26	2.20
7.384E-05	1.664E-04	3.454E-04	-4.132E+00	-3.779E+00	-3.462E+00	2.16	2.17	2.14
2.401E-05	4.327E-05	1.057E-04	-4.620E+00	-4.364E+00	-3.976E+00	1.62	1.94	1.71
Average slope						1.93	2.01	1.94

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.3276E-01	4.4089E-01	9.3614E-01	-6.3309E-01	-3.5567E-01	-2.8660E-02	slope	slope	slope
1.3176E-01	1.8134E-01	5.7417E-01	-8.8022E-01	-7.4152E-01	-2.4096E-01	0.91	1.43	0.79
3.8115E-02	6.2315E-02	1.7477E-01	-1.4189E+00	-1.2054E+00	-7.5753E-01	1.83	1.57	1.75
1.0211E-02	1.4591E-02	3.5260E-02	-1.9909E+00	-1.8359E+00	-1.4527E+00	1.92	2.12	2.33
2.7783E-03	5.6241E-03	1.1922E-02	-2.5562E+00	-2.2499E+00	-1.9236E+00	1.88	1.37	1.56
Average slope						1.63	1.62	1.61

Limiter: W₁, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Orthogonal II

ORTHOGONAL II			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.6897	-0.1614
1	40	0.3492	-0.4570
1	80	0.1757	-0.7553
1	160	0.0881	-1.0550
1	320	0.0441	-1.3553

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
1.583E-02	3.162E-02	7.182E-02	-1.801E+00	-1.500E+00	-1.144E+00	slope	slope	slope
5.030E-03	1.038E-02	2.270E-02	-2.298E+00	-1.984E+00	-1.644E+00	1.68	1.64	1.69
1.130E-03	2.536E-03	5.201E-03	-2.947E+00	-2.596E+00	-2.284E+00	2.17	2.05	2.15
2.606E-04	6.004E-04	1.197E-03	-3.584E+00	-3.222E+00	-2.922E+00	2.13	2.09	2.13
6.382E-05	1.462E-04	2.906E-04	-4.195E+00	-3.835E+00	-3.537E+00	2.03	2.04	2.05
Average slope						2.00	1.95	2.00

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
3.319E-03	7.583E-03	1.433E-02	-2.479E+00	-2.120E+00	-1.844E+00	slope	slope	slope
9.630E-04	2.243E-03	4.359E-03	-3.016E+00	-2.649E+00	-2.361E+00	1.82	1.79	1.75
1.972E-04	5.123E-04	9.540E-04	-3.705E+00	-3.290E+00	-3.020E+00	2.31	2.15	2.21
4.304E-05	1.184E-04	2.172E-04	-4.366E+00	-3.927E+00	-3.663E+00	2.21	2.12	2.14
1.025E-05	2.880E-05	5.259E-05	-4.989E+00	-4.541E+00	-4.279E+00	2.07	2.04	2.05
Average slope						2.10	2.03	2.04

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.6976E-01	3.3338E-01	1.2028E+00	-5.6902E-01	-4.7706E-01	8.0192E-02	slope	slope	slope
9.0131E-02	1.3298E-01	3.9720E-01	-1.0451E+00	-8.7620E-01	-4.0099E-01	1.61	1.35	1.63
2.1044E-02	3.8865E-02	9.6816E-02	-1.6769E+00	-1.4104E+00	-1.0141E+00	2.12	1.79	2.06
4.8162E-03	9.4444E-03	2.2720E-02	-2.3173E+00	-2.0248E+00	-1.6436E+00	2.14	2.05	2.10
1.1095E-03	2.2464E-03	5.2506E-03	-2.9549E+00	-2.6485E+00	-2.2798E+00	2.12	2.08	2.12
Average slope						2.00	1.82	1.98

Limiter: W₁, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Orthogonal III

ORTHOGONAL III			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.9524	-0.0212
1	40	0.4878	-0.3118
1	80	0.2469	-0.6075
1	160	0.1242	-0.9058
1	320	0.0623	-1.2055

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(ρ)	(pu)	(pe)
2.234E-02	4.670E-02	1.002E-01	-1.651E+00	-1.331E+00	-9.990E-01	slope	slope	slope
9.921E-03	2.141E-02	4.392E-02	-2.003E+00	-1.669E+00	-1.357E+00	1.21	1.17	1.23
2.655E-03	6.163E-03	1.184E-02	-2.576E+00	-2.210E+00	-1.927E+00	1.94	1.83	1.93
6.031E-04	1.443E-03	2.751E-03	-3.220E+00	-2.841E+00	-2.560E+00	2.16	2.11	2.12
1.448E-04	3.469E-04	6.673E-04	-3.839E+00	-3.460E+00	-3.176E+00	2.07	2.07	2.05
Average slope						1.84	1.79	1.83

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(ρ)	(pu)	(pe)
5.008E-03	1.223E-02	2.149E-02	-2.300E+00	-1.913E+00	-1.668E+00	slope	slope	slope
2.010E-03	5.031E-03	8.853E-03	-2.697E+00	-2.298E+00	-2.053E+00	1.36	1.33	1.33
4.856E-04	1.313E-03	2.230E-03	-3.314E+00	-2.882E+00	-2.652E+00	2.09	1.97	2.03
1.027E-04	2.902E-04	4.921E-04	-3.988E+00	-3.537E+00	-3.308E+00	2.26	2.20	2.20
2.403E-05	6.915E-05	1.190E-04	-4.619E+00	-4.160E+00	-3.924E+00	2.11	2.08	2.06
Average slope						1.95	1.89	1.90

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(ρ)	(pu)	(pe)
3.5701E-01	4.7558E-01	1.5948E+00	-0.44731548	-0.322777433	0.202715581	slope	slope	slope
1.7010E-01	2.2915E-01	7.5615E-01	-0.769302628	-0.639872446	-0.121392242	1.11	1.09	1.12
4.9386E-02	7.3139E-02	2.2286E-01	-1.306397996	-1.135848852	-0.651964487	1.82	1.68	1.79
1.1230E-02	2.0292E-02	5.3211E-02	-1.949621785	-1.692684438	-1.273994685	2.16	1.87	2.08
2.5565E-03	5.0275E-03	1.2237E-02	-2.592362145	-2.29864602	-1.912329103	2.14	2.02	2.13
Average slope						1.81	1.66	1.78

Limiter: W₁, Van Leer-Van Albada
Riemann Solver: HLLC
Grid: Distorted A

DISTORTED A			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.169E-02	3.633E-02	9.243E-02	-1.664E+00	-1.440E+00	-1.034E+00	slope	slope	slope
7.698E-03	1.467E-02	3.310E-02	-2.114E+00	-1.834E+00	-1.480E+00	1.67	1.46	1.65
1.843E-03	3.577E-03	7.940E-03	-2.735E+00	-2.446E+00	-2.100E+00	2.11	2.08	2.10
4.934E-04	9.001E-04	2.150E-03	-3.307E+00	-3.046E+00	-2.668E+00	1.92	2.01	1.91
1.648E-04	2.632E-04	6.966E-04	-3.783E+00	-3.580E+00	-3.157E+00	1.58	1.77	1.62
Average slope						1.82	1.83	1.82

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
4.601E-03	9.201E-03	1.941E-02	-2.337E+00	-2.036E+00	-1.712E+00	slope	slope	slope
1.533E-03	3.317E-03	6.635E-03	-2.814E+00	-2.479E+00	-2.178E+00	1.77	1.64	1.73
3.522E-04	7.198E-04	1.549E-03	-3.453E+00	-3.143E+00	-2.810E+00	2.17	2.25	2.14
1.067E-04	1.870E-04	4.653E-04	-3.972E+00	-3.728E+00	-3.332E+00	1.74	1.97	1.75
3.657E-05	5.427E-05	1.545E-04	-4.437E+00	-4.265E+00	-3.811E+00	1.54	1.78	1.59
Average slope						1.80	1.91	1.80

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.9967E-01	3.7205E-01	1.3040E+00	-5.2336E-01	-4.2940E-01	1.1527E-01	slope	slope	slope
1.3649E-01	1.7513E-01	5.9065E-01	-8.6489E-01	-7.5663E-01	-2.2867E-01	1.26	1.21	1.27
4.0353E-02	5.0456E-02	1.5819E-01	-1.3941E+00	-1.2971E+00	-8.0081E-01	1.80	1.83	1.94
1.1820E-02	1.8363E-02	4.6012E-02	-1.9274E+00	-1.7361E+00	-1.3371E+00	1.79	1.47	1.80
3.8312E-03	5.7766E-03	1.5478E-02	-2.4167E+00	-2.2383E+00	-1.8103E+00	1.62	1.67	1.57
Average slope						1.62	1.55	1.65

Limiter: W₁, Van Leer-Van Albada

Riemann Solver: ROE

Grid: Equilateral I

EQUILATERAL I			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
1.929E-02	3.690E-02	8.701E-02	-1.715E+00	-1.433E+00	-1.060E+00	slope	slope	slope
7.266E-03	1.431E-02	3.260E-02	-2.139E+00	-1.844E+00	-1.487E+00	1.57	1.52	1.58
1.640E-03	3.587E-03	7.550E-03	-2.785E+00	-2.445E+00	-2.122E+00	2.19	2.04	2.16
3.591E-04	8.299E-04	1.664E-03	-3.445E+00	-3.081E+00	-2.779E+00	2.22	2.13	2.21
8.492E-05	1.965E-04	3.903E-04	-4.071E+00	-3.707E+00	-3.409E+00	2.08	2.08	2.09
Average slope						2.01	1.94	2.01

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
4.084E-03	8.941E-03	1.882E-02	-2.389E+00	-2.049E+00	-1.725E+00	slope	slope	slope
1.411E-03	3.163E-03	6.366E-03	-2.850E+00	-2.500E+00	-2.196E+00	1.71	1.67	1.74
2.939E-04	7.325E-04	1.394E-03	-3.532E+00	-3.135E+00	-2.856E+00	2.31	2.15	2.24
6.054E-05	1.635E-04	3.009E-04	-4.218E+00	-3.786E+00	-3.522E+00	2.30	2.19	2.24
1.377E-05	3.853E-05	7.045E-05	-4.861E+00	-4.414E+00	-4.152E+00	2.13	2.08	2.09
Average slope						2.11	2.02	2.08

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.5098E-01	3.9980E-01	1.2456E+00	-6.0037E-01	-3.9816E-01	9.5363E-02	slope	slope	slope
1.1949E-01	1.6820E-01	5.3244E-01	-9.2265E-01	-7.7418E-01	-2.7373E-01	1.19	1.39	1.37
3.1142E-02	5.3046E-02	1.4202E-01	-1.5066E+00	-1.2753E+00	-8.4765E-01	1.98	1.70	1.95
6.6611E-03	1.3077E-02	3.1755E-02	-2.1765E+00	-1.8835E+00	-1.4982E+00	2.25	2.04	2.18
1.4742E-03	3.0385E-03	7.0665E-03	-2.8314E+00	-2.5173E+00	-2.1508E+00	2.17	2.10	2.17
Average slope						1.90	1.81	1.92

Limiter: W_1 , Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: ROE
 Grid: Distorted IV

DISTORTED IV			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
1.909E-02	3.783E-02	8.551E-02	-1.719E+00	-1.422E+00	-1.068E+00	slope	slope	slope
7.541E-03	1.496E-02	3.339E-02	-2.123E+00	-1.825E+00	-1.476E+00	1.49	1.49	1.51
1.748E-03	3.597E-03	7.929E-03	-2.757E+00	-2.444E+00	-2.101E+00	2.15	2.10	2.12
3.873E-04	8.285E-04	1.746E-03	-3.412E+00	-3.082E+00	-2.758E+00	2.20	2.14	2.21
1.168E-04	2.153E-04	5.014E-04	-3.933E+00	-3.667E+00	-3.300E+00	1.73	1.94	1.80
Average slope						1.89	1.92	1.91

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.269E-03	9.713E-03	1.928E-02	-2.370E+00	-2.013E+00	-1.715E+00	slope	slope	slope
1.475E-03	3.410E-03	6.634E-03	-2.831E+00	-2.467E+00	-2.178E+00	1.71	1.68	1.72
3.241E-04	7.362E-04	1.495E-03	-3.489E+00	-3.133E+00	-2.825E+00	2.23	2.26	2.19
7.387E-05	1.664E-04	3.455E-04	-4.132E+00	-3.779E+00	-3.462E+00	2.16	2.17	2.14
2.402E-05	4.326E-05	1.057E-04	-4.619E+00	-4.364E+00	-3.976E+00	1.62	1.94	1.71
Average slope						1.93	2.01	1.94

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.3135E-01	4.4125E-01	9.3411E-01	-6.3572E-01	-3.5532E-01	-2.9602E-02	slope	slope	slope
1.3149E-01	1.8128E-01	5.7427E-01	-8.8110E-01	-7.4164E-01	-2.4088E-01	0.91	1.43	0.78
3.8076E-02	6.2281E-02	1.7476E-01	-1.4193E+00	-1.2056E+00	-7.5757E-01	1.83	1.57	1.75
1.0252E-02	1.4590E-02	3.5352E-02	-1.9892E+00	-1.8359E+00	-1.4516E+00	1.91	2.12	2.33
2.7795E-03	5.6292E-03	1.1908E-02	-2.5560E+00	-2.2496E+00	-1.9242E+00	1.88	1.37	1.57
Average slope						1.63	1.62	1.61

Limiter: W₁, Van Leer-Van Albada

Riemann Solver: ROE

Grid: Orthogonal II

ORTHOGONAL II			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.6897	-0.1614
1	40	0.3492	-0.4570
1	80	0.1757	-0.7553
1	160	0.0881	-1.0550
1	320	0.0441	-1.3553

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
1.576E-02	3.162E-02	7.173E-02	-1.802E+00	-1.500E+00	-1.144E+00	slope	slope	slope
5.020E-03	1.038E-02	2.269E-02	-2.299E+00	-1.984E+00	-1.644E+00	1.68	1.64	1.69
1.130E-03	2.536E-03	5.201E-03	-2.947E+00	-2.596E+00	-2.284E+00	2.17	2.05	2.14
2.606E-04	6.004E-04	1.197E-03	-3.584E+00	-3.222E+00	-2.922E+00	2.13	2.09	2.13
6.382E-05	1.462E-04	2.906E-04	-4.195E+00	-3.835E+00	-3.537E+00	2.03	2.04	2.05
Average slope						2.00	1.95	2.00

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
3.302E-03	7.576E-03	1.430E-02	-2.481E+00	-2.121E+00	-1.845E+00	slope	slope	slope
9.606E-04	2.242E-03	4.355E-03	-3.017E+00	-2.649E+00	-2.361E+00	1.81	1.79	1.75
1.971E-04	5.122E-04	9.538E-04	-3.705E+00	-3.291E+00	-3.021E+00	2.31	2.15	2.21
4.303E-05	1.184E-04	2.172E-04	-4.366E+00	-3.927E+00	-3.663E+00	2.21	2.12	2.14
1.025E-05	2.880E-05	5.259E-05	-4.989E+00	-4.541E+00	-4.279E+00	2.07	2.04	2.05
Average slope						2.10	2.03	2.04

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.6903E-01	3.3342E-01	1.2019E+00	-5.7019E-01	-4.7700E-01	7.9870E-02	slope	slope	slope
9.0031E-02	1.3297E-01	3.9711E-01	-1.0456E+00	-8.7624E-01	-4.0108E-01	1.61	1.35	1.63
2.1055E-02	3.8879E-02	9.6857E-02	-1.6766E+00	-1.4103E+00	-1.0139E+00	2.12	1.79	2.05
4.8178E-03	9.4449E-03	2.2724E-02	-2.3172E+00	-2.0248E+00	-1.6435E+00	2.14	2.05	2.10
1.1097E-03	2.2466E-03	5.2511E-03	-2.9548E+00	-2.6485E+00	-2.2797E+00	2.12	2.08	2.12
Average slope						2.00	1.82	1.98

Limiter: W₁, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: ROE
 Grid: Orthogonal III

ORTHOGONAL III			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.9524	-0.0212
1	40	0.4878	-0.3118
1	80	0.2469	-0.6075
1	160	0.1242	-0.9058
1	320	0.0623	-1.2055

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.227E-02	4.665E-02	1.001E-01	-1.652E+00	-1.331E+00	-9.996E-01	slope	slope	slope
9.894E-03	2.138E-02	4.388E-02	-2.005E+00	-1.670E+00	-1.358E+00	1.21	1.17	1.23
2.654E-03	6.160E-03	1.184E-02	-2.576E+00	-2.210E+00	-1.927E+00	1.93	1.83	1.92
6.031E-04	1.443E-03	2.751E-03	-3.220E+00	-2.841E+00	-2.560E+00	2.16	2.11	2.12
1.448E-04	3.469E-04	6.673E-04	-3.839E+00	-3.460E+00	-3.176E+00	2.07	2.07	2.05
Average slope						1.84	1.79	1.83

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
4.976E-03	1.222E-02	2.142E-02	-2.303E+00	-1.913E+00	-1.669E+00	slope	slope	slope
2.003E-03	5.020E-03	8.839E-03	-2.698E+00	-2.299E+00	-2.054E+00	1.36	1.33	1.32
4.853E-04	1.313E-03	2.229E-03	-3.314E+00	-2.882E+00	-2.652E+00	2.08	1.97	2.02
1.027E-04	2.902E-04	4.921E-04	-3.988E+00	-3.537E+00	-3.308E+00	2.26	2.20	2.20
2.403E-05	6.914E-05	1.190E-04	-4.619E+00	-4.160E+00	-3.924E+00	2.11	2.08	2.06
Average slope						1.95	1.89	1.90

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
3.5655E-01	4.7544E-01	1.5939E+00	-0.447885328	-0.322904484	0.202454707	slope	slope	slope
1.6980E-01	2.2895E-01	7.5582E-01	-0.770063045	-0.640252822	-0.121583994	1.11	1.09	1.12
4.9422E-02	7.3152E-02	2.2285E-01	-1.306083298	-1.13577361	-0.651995774	1.81	1.68	1.79
1.1235E-02	2.0295E-02	5.3216E-02	-1.949429323	-1.692602317	-1.273959013	2.16	1.87	2.08
2.5566E-03	5.0277E-03	1.2237E-02	-2.59233256	-2.298634152	-1.912327216	2.15	2.02	2.13
Average slope						1.81	1.66	1.78

Limiter: W₁, Van Leer-Van Albada
 Riemann Solver: ROE
 Grid: Distorted A

DISTORTED A			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(ρ)	(pu)	(pe)
2.159E-02	3.628E-02	9.226E-02	-1.666E+00	-1.440E+00	-1.035E+00	slope	slope	slope
7.678E-03	1.466E-02	3.309E-02	-2.115E+00	-1.834E+00	-1.480E+00	1.66	1.46	1.65
1.846E-03	3.575E-03	7.941E-03	-2.734E+00	-2.447E+00	-2.100E+00	2.10	2.08	2.10
4.939E-04	9.000E-04	2.149E-03	-3.306E+00	-3.046E+00	-2.668E+00	1.92	2.01	1.91
1.649E-04	2.632E-04	6.967E-04	-3.783E+00	-3.580E+00	-3.157E+00	1.58	1.77	1.62
Average slope						1.82	1.83	1.82

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(ρ)	(pu)	(pe)
4.575E-03	9.184E-03	1.933E-02	-2.340E+00	-2.037E+00	-1.714E+00	slope	slope	slope
1.530E-03	3.315E-03	6.632E-03	-2.815E+00	-2.479E+00	-2.178E+00	1.76	1.64	1.72
3.524E-04	7.188E-04	1.548E-03	-3.453E+00	-3.143E+00	-2.810E+00	2.16	2.25	2.14
1.068E-04	1.870E-04	4.653E-04	-3.971E+00	-3.728E+00	-3.332E+00	1.74	1.96	1.75
3.658E-05	5.428E-05	1.545E-04	-4.437E+00	-4.265E+00	-3.811E+00	1.54	1.78	1.59
Average slope						1.80	1.91	1.80

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(ρ)	(pu)	(pe)
2.9879E-01	3.7156E-01	1.3025E+00	-5.2463E-01	-4.2997E-01	1.1476E-01	slope	slope	slope
1.3626E-01	1.7490E-01	5.9017E-01	-8.6564E-01	-7.5722E-01	-2.2902E-01	1.26	1.21	1.27
4.0700E-02	5.0398E-02	1.5903E-01	-1.3904E+00	-1.2976E+00	-7.9851E-01	1.78	1.83	1.93
1.1862E-02	1.8371E-02	4.6152E-02	-1.9258E+00	-1.7359E+00	-1.3358E+00	1.80	1.47	1.80
3.8315E-03	5.7815E-03	1.5477E-02	-2.4166E+00	-2.2380E+00	-1.8103E+00	1.63	1.67	1.57
Average slope						1.62	1.55	1.65

Limiter: W_{1L} , Van Leer - Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Equilateral I

EQUILATERAL I			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.364E-02	4.615E-02	1.106E-01	-1.626E+00	-1.336E+00	-9.563E-01	slope	slope	slope
1.141E-02	2.156E-02	5.458E-02	-1.943E+00	-1.666E+00	-1.263E+00	1.17	1.22	1.13
2.907E-03	6.309E-03	1.500E-02	-2.537E+00	-2.200E+00	-1.824E+00	2.01	1.81	1.90
6.485E-04	1.654E-03	3.484E-03	-3.188E+00	-2.781E+00	-2.458E+00	2.19	1.95	2.13
1.260E-04	3.730E-04	7.379E-04	-3.900E+00	-3.428E+00	-3.132E+00	2.36	2.15	2.24
Average slope						1.93	1.78	1.85

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.780E-03	1.017E-02	2.210E-02	-2.321E+00	-1.992E+00	-1.656E+00	slope	slope	slope
2.159E-03	4.459E-03	9.809E-03	-2.666E+00	-2.351E+00	-2.008E+00	1.28	1.33	1.31
5.312E-04	1.228E-03	2.608E-03	-3.275E+00	-2.911E+00	-2.584E+00	2.07	1.90	1.95
1.118E-04	2.951E-04	5.879E-04	-3.952E+00	-3.530E+00	-3.231E+00	2.27	2.08	2.17
2.087E-05	6.196E-05	1.178E-04	-4.681E+00	-4.208E+00	-3.929E+00	2.42	2.25	2.32
Average slope						2.01	1.89	1.94

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.1495E-01	4.7198E-01	1.5940E+00	-5.0176E-01	-3.2607E-01	2.0248E-01	slope	slope	slope
1.7811E-01	2.3588E-01	8.7493E-01	-7.4932E-01	-6.2731E-01	-5.8028E-02	0.92	1.12	0.96
5.2641E-02	8.7733E-02	2.6123E-01	-1.2787E+00	-1.0568E+00	-5.8298E-01	1.80	1.46	1.78
1.4305E-02	3.1205E-02	7.9614E-02	-1.8445E+00	-1.5058E+00	-1.0990E+00	1.90	1.51	1.73
3.1625E-03	8.5791E-03	2.0239E-02	-2.5000E+00	-2.0666E+00	-1.6938E+00	2.18	1.86	1.97
Average slope						1.70	1.49	1.61

Limiter: W_{1L} , Van Leer - Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Distorted IV

DISTORTED IV			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.358E-02	4.724E-02	1.104E-01	-1.628E+00	-1.326E+00	-9.570E-01	slope	slope	slope
1.162E-02	2.267E-02	5.568E-02	-1.935E+00	-1.645E+00	-1.254E+00	1.14	1.18	1.10
3.064E-03	6.429E-03	1.580E-02	-2.514E+00	-2.192E+00	-1.801E+00	1.96	1.86	1.86
6.875E-04	1.660E-03	3.587E-03	-3.163E+00	-2.780E+00	-2.445E+00	2.18	1.97	2.16
1.572E-04	3.915E-04	8.314E-04	-3.804E+00	-3.407E+00	-3.080E+00	2.13	2.08	2.11
Average slope						1.85	1.77	1.81

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.883E-03	1.054E-02	2.263E-02	-2.311E+00	-1.977E+00	-1.645E+00	slope	slope	slope
2.204E-03	4.760E-03	9.994E-03	-2.657E+00	-2.322E+00	-2.000E+00	1.28	1.28	1.31
5.747E-04	1.216E-03	2.731E-03	-3.241E+00	-2.915E+00	-2.564E+00	1.98	2.01	1.91
1.210E-04	2.923E-04	6.172E-04	-3.917E+00	-3.534E+00	-3.210E+00	2.27	2.08	2.17
3.080E-05	6.873E-05	1.572E-04	-4.511E+00	-4.163E+00	-3.803E+00	1.97	2.09	1.97
Average slope						1.88	1.86	1.84

$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$	$L_{\max}$
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.8025E-01	5.2364E-01	1.2302E+00	-5.5245E-01	-2.8097E-01	8.9972E-02	slope	slope	slope
1.9668E-01	2.5437E-01	9.6352E-01	-7.0623E-01	-5.9453E-01	-1.6141E-02	0.57	1.16	0.39
5.3884E-02	1.0101E-01	2.9891E-01	-1.2685E+00	-9.9561E-01	-5.2447E-01	1.91	1.36	1.72
1.6286E-02	3.1282E-02	8.4663E-02	-1.7882E+00	-1.5047E+00	-1.0723E+00	1.74	1.71	1.84
3.6152E-03	9.9999E-03	2.1405E-02	-2.4419E+00	-2.0000E+00	-1.6695E+00	2.17	1.64	1.98
Average slope						1.60	1.47	1.48

Limiter: W_{1L}, Van Leer - Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Orthogonal II

ORTHOGONAL II			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.6897	-0.1614
1	40	0.3492	-0.4570
1	80	0.1757	-0.7553
1	160	0.0881	-1.0550
1	320	0.0441	-1.3553

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.025E-02	4.042E-02	9.614E-02	-1.694E+00	-1.393E+00	-1.017E+00	slope	slope	slope
7.835E-03	1.534E-02	3.877E-02	-2.106E+00	-1.814E+00	-1.411E+00	1.40	1.42	1.33
1.834E-03	4.129E-03	9.567E-03	-2.737E+00	-2.384E+00	-2.019E+00	2.11	1.91	2.04
3.962E-04	1.037E-03	2.158E-03	-3.402E+00	-2.984E+00	-2.666E+00	2.22	2.00	2.16
8.028E-05	2.336E-04	4.570E-04	-4.095E+00	-3.632E+00	-3.340E+00	2.31	2.16	2.24
Average slope						2.01	1.87	1.94

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
3.964E-03	8.700E-03	1.768E-02	-2.402E+00	-2.060E+00	-1.753E+00	slope	slope	slope
1.481E-03	3.149E-03	6.938E-03	-2.829E+00	-2.502E+00	-2.159E+00	1.45	1.49	1.37
3.257E-04	7.838E-04	1.646E-03	-3.487E+00	-3.106E+00	-2.784E+00	2.20	2.02	2.09
6.660E-05	1.844E-04	3.548E-04	-4.177E+00	-3.734E+00	-3.450E+00	2.30	2.10	2.22
1.309E-05	4.001E-05	7.299E-05	-4.883E+00	-4.398E+00	-4.137E+00	2.35	2.21	2.29
Average slope						2.08	1.96	1.99

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
3.3008E-01	4.4068E-01	1.5318E+00	-4.8138E-01	-3.5588E-01	1.8519E-01	slope	slope	slope
1.1943E-01	1.7525E-01	6.1201E-01	-9.2288E-01	-7.5634E-01	-2.1324E-01	1.49	1.35	1.35
3.6702E-02	6.2675E-02	1.9343E-01	-1.4353E+00	-1.2029E+00	-7.1348E-01	1.72	1.50	1.68
8.7536E-03	2.0393E-02	4.9974E-02	-2.0578E+00	-1.6905E+00	-1.3013E+00	2.08	1.63	1.96
1.9114E-03	5.2343E-03	1.2204E-02	-2.7186E+00	-2.2811E+00	-1.9135E+00	2.20	1.97	2.04
Average slope						1.87	1.61	1.76

Limiter: W_{1L}, Van Leer - Van Albada
Riemann Solver: HLLC
Grid: Orthogonal III

ORTHOGONAL III			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.9524	-0.0212
1	40	0.4878	-0.3118
1	80	0.2469	-0.6075
1	160	0.1242	-0.9058
1	320	0.0623	-1.2055

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.543E-02	5.370E-02	1.172E-01	-1.595E+00	-1.270E+00	-9.309E-01	slope	slope	slope
1.432E-02	2.915E-02	6.790E-02	-1.844E+00	-1.535E+00	-1.168E+00	0.86	0.91	0.82
4.304E-03	9.603E-03	2.193E-02	-2.366E+00	-2.018E+00	-1.659E+00	1.77	1.63	1.66
1.011E-03	2.649E-03	5.294E-03	-2.995E+00	-2.577E+00	-2.276E+00	2.11	1.87	2.07
2.183E-04	6.639E-04	1.212E-03	-3.661E+00	-3.178E+00	-2.917E+00	2.22	2.01	2.14
Average slope						1.74	1.61	1.67

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
5.225E-03	1.271E-02	2.230E-02	-2.282E+00	-1.896E+00	-1.652E+00	slope	slope	slope
2.727E-03	6.281E-03	1.238E-02	-2.564E+00	-2.202E+00	-1.907E+00	0.97	1.05	0.88
8.133E-04	1.902E-03	3.910E-03	-3.090E+00	-2.721E+00	-2.408E+00	1.78	1.75	1.69
1.729E-04	4.745E-04	8.846E-04	-3.762E+00	-3.324E+00	-3.053E+00	2.25	2.02	2.16
3.525E-05	1.088E-04	1.899E-04	-4.453E+00	-3.963E+00	-3.721E+00	2.30	2.13	2.23
Average slope						1.83	1.74	1.74

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
4.0096E-01	5.5932E-01	1.8179E+00	-0.396894466	-0.252340337	0.259571252	slope	slope	slope
2.2756E-01	3.1673E-01	1.0864E+00	-0.64289565	-0.499317043	0.035984019	0.85	0.85	0.77
6.9172E-02	1.2219E-01	3.9089E-01	-1.160072758	-0.912952482	-0.407950598	1.75	1.40	1.50
2.1934E-02	4.3060E-02	1.1981E-01	-1.658878212	-1.365922403	-0.921495848	1.67	1.52	1.72
5.3681E-03	1.4195E-02	3.3249E-02	-2.270176195	-1.847879408	-1.47821717	2.04	1.61	1.86
Average slope						1.58	1.34	1.46

Limiter: W_{1L} , Van Leer - Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Distorted A

DISTORTED A			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.619E-02	4.590E-02	1.160E-01	-1.582E+00	-1.338E+00	-9.357E-01	slope	slope	slope
1.215E-02	2.287E-02	5.754E-02	-1.916E+00	-1.641E+00	-1.240E+00	1.24	1.12	1.13
3.155E-03	6.390E-03	1.602E-02	-2.501E+00	-2.195E+00	-1.795E+00	1.99	1.88	1.88
7.820E-04	1.683E-03	3.929E-03	-3.107E+00	-2.774E+00	-2.406E+00	2.03	1.95	2.05
2.062E-04	4.255E-04	1.008E-03	-3.686E+00	-3.371E+00	-2.997E+00	1.92	1.98	1.96
Average slope						1.79	1.73	1.76

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
5.356E-03	1.093E-02	2.329E-02	-2.271E+00	-1.961E+00	-1.633E+00	slope	slope	slope
2.325E-03	4.721E-03	1.063E-02	-2.634E+00	-2.326E+00	-1.974E+00	1.34	1.35	1.26
6.068E-04	1.231E-03	2.878E-03	-3.217E+00	-2.910E+00	-2.541E+00	1.98	1.98	1.92
1.532E-04	3.058E-04	7.410E-04	-3.815E+00	-3.515E+00	-3.130E+00	2.01	2.03	1.98
4.456E-05	8.098E-05	2.130E-04	-4.351E+00	-4.092E+00	-3.672E+00	1.78	1.92	1.80
Average slope						1.78	1.82	1.74

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.5977E-01	4.2477E-01	1.6199E+00	-4.4398E-01	-3.7184E-01	2.0948E-01	slope	slope	slope
2.0527E-01	2.6868E-01	9.9357E-01	-6.8767E-01	-5.7077E-01	-2.8012E-03	0.90	0.74	0.79
5.8858E-02	8.1241E-02	2.7795E-01	-1.2302E+00	-1.0902E+00	-5.5603E-01	1.84	1.76	1.88
1.5114E-02	3.4815E-02	8.8346E-02	-1.8206E+00	-1.4582E+00	-1.0538E+00	1.98	1.24	1.67
5.4815E-03	1.1014E-02	2.8388E-02	-2.2611E+00	-1.9581E+00	-1.5469E+00	1.46	1.66	1.64
Average slope						1.55	1.35	1.49

Limiter: W_{1L}, Van Leer - Van Albada
 Riemann Solver: ROE
 Grid: Equilateral I

EQUILATERAL I			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.359E-02	4.609E-02	1.103E-01	-1.627E+00	-1.336E+00	-9.573E-01	slope	slope	slope
1.138E-02	2.155E-02	5.452E-02	-1.944E+00	-1.667E+00	-1.263E+00	1.17	1.22	1.13
2.906E-03	6.313E-03	1.500E-02	-2.537E+00	-2.200E+00	-1.824E+00	2.01	1.81	1.90
6.487E-04	1.655E-03	3.486E-03	-3.188E+00	-2.781E+00	-2.458E+00	2.19	1.95	2.13
1.260E-04	3.730E-04	7.380E-04	-3.900E+00	-3.428E+00	-3.132E+00	2.36	2.15	2.24
Average slope						1.93	1.78	1.85

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
4.774E-03	1.015E-02	2.205E-02	-2.321E+00	-1.994E+00	-1.657E+00	slope	slope	slope
2.151E-03	4.456E-03	9.789E-03	-2.667E+00	-2.351E+00	-2.009E+00	1.28	1.32	1.31
5.307E-04	1.229E-03	2.607E-03	-3.275E+00	-2.911E+00	-2.584E+00	2.06	1.90	1.95
1.117E-04	2.952E-04	5.880E-04	-3.952E+00	-3.530E+00	-3.231E+00	2.27	2.08	2.17
2.086E-05	6.197E-05	1.178E-04	-4.681E+00	-4.208E+00	-3.929E+00	2.42	2.25	2.32
Average slope						2.01	1.89	1.94

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
3.1457E-01	4.7203E-01	1.5922E+00	-5.0228E-01	-3.2603E-01	2.0200E-01	slope	slope	slope
1.7791E-01	2.3573E-01	8.7267E-01	-7.4980E-01	-6.2759E-01	-5.9150E-02	0.92	1.12	0.97
5.2593E-02	8.7774E-02	2.6113E-01	-1.2791E+00	-1.0566E+00	-5.8314E-01	1.80	1.46	1.78
1.4311E-02	3.1221E-02	7.9632E-02	-1.8443E+00	-1.5056E+00	-1.0989E+00	1.90	1.51	1.73
3.1634E-03	8.5804E-03	2.0242E-02	-2.4998E+00	-2.0665E+00	-1.6937E+00	2.18	1.86	1.97
Average slope						1.70	1.49	1.61

Limiters: W_{1L}, Van Leer - Van Albada

Riemann Solver: ROE

Grid: Distorted IV

DISTORTED IV			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.352E-02	4.722E-02	1.103E-01	-1.629E+00	-1.326E+00	-9.575E-01	slope	slope	slope
1.161E-02	2.267E-02	5.565E-02	-1.935E+00	-1.645E+00	-1.255E+00	1.14	1.18	1.10
3.063E-03	6.432E-03	1.580E-02	-2.514E+00	-2.192E+00	-1.801E+00	1.96	1.86	1.86
6.877E-04	1.660E-03	3.588E-03	-3.163E+00	-2.780E+00	-2.445E+00	2.18	1.97	2.16
1.572E-04	3.916E-04	8.316E-04	-3.803E+00	-3.407E+00	-3.080E+00	2.13	2.08	2.11
Average slope						1.85	1.77	1.81

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
4.865E-03	1.053E-02	2.258E-02	-2.313E+00	-1.978E+00	-1.646E+00	slope	slope	slope
2.204E-03	4.763E-03	9.992E-03	-2.657E+00	-2.322E+00	-2.000E+00	1.27	1.27	1.31
5.743E-04	1.216E-03	2.730E-03	-3.241E+00	-2.915E+00	-2.564E+00	1.98	2.01	1.91
1.210E-04	2.923E-04	6.172E-04	-3.917E+00	-3.534E+00	-3.210E+00	2.27	2.08	2.17
3.080E-05	6.874E-05	1.573E-04	-4.511E+00	-4.163E+00	-3.803E+00	1.97	2.09	1.97
Average slope						1.87	1.86	1.84

L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}	L _{max}
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
2.7983E-01	5.2359E-01	1.2280E+00	-5.5311E-01	-2.8101E-01	8.9201E-02	slope	slope	slope
1.9647E-01	2.5411E-01	9.6144E-01	-7.0671E-01	-5.9497E-01	-1.7078E-02	0.57	1.16	0.39
5.3910E-02	1.0106E-01	2.9882E-01	-1.2683E+00	-9.9543E-01	-5.2459E-01	1.91	1.36	1.72
1.6283E-02	3.1291E-02	8.4686E-02	-1.7883E+00	-1.5046E+00	-1.0722E+00	1.75	1.71	1.84
3.6168E-03	1.0001E-02	2.1413E-02	-2.4417E+00	-2.0000E+00	-1.6693E+00	2.17	1.64	1.98
Average slope						1.60	1.47	1.48

Limiter: W_{1L} , Van Leer - Van Albada
 Riemann Solver: ROE
 Grid: Orthogonal II

ORTHOGONAL II			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.6897	-0.1614
1	40	0.3492	-0.4570
1	80	0.1757	-0.7553
1	160	0.0881	-1.0550
1	320	0.0441	-1.3553

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.019E-02	4.039E-02	9.595E-02	-1.695E+00	-1.394E+00	-1.018E+00	slope	slope	slope
7.817E-03	1.533E-02	3.874E-02	-2.107E+00	-1.814E+00	-1.412E+00	1.39	1.42	1.33
1.833E-03	4.128E-03	9.564E-03	-2.737E+00	-2.384E+00	-2.019E+00	2.11	1.91	2.04
3.961E-04	1.038E-03	2.157E-03	-3.402E+00	-2.984E+00	-2.666E+00	2.22	2.00	2.16
8.027E-05	2.336E-04	4.570E-04	-4.095E+00	-3.632E+00	-3.340E+00	2.31	2.16	2.24
Average slope						2.01	1.87	1.94

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.949E-03	8.690E-03	1.762E-02	-2.404E+00	-2.061E+00	-1.754E+00	slope	slope	slope
1.477E-03	3.147E-03	6.929E-03	-2.831E+00	-2.502E+00	-2.159E+00	1.44	1.49	1.37
3.255E-04	7.835E-04	1.646E-03	-3.487E+00	-3.106E+00	-2.784E+00	2.20	2.02	2.09
6.658E-05	1.843E-04	3.548E-04	-4.177E+00	-3.734E+00	-3.450E+00	2.30	2.10	2.22
1.309E-05	4.001E-05	7.298E-05	-4.883E+00	-4.398E+00	-4.137E+00	2.35	2.21	2.29
Average slope						2.07	1.96	1.99

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.2929E-01	4.3974E-01	1.5312E+00	-4.8242E-01	-3.5680E-01	1.8502E-01	slope	slope	slope
1.1896E-01	1.7586E-01	6.1215E-01	-9.2461E-01	-7.5482E-01	-2.1314E-01	1.50	1.35	1.35
3.6716E-02	6.2606E-02	1.9346E-01	-1.4351E+00	-1.2034E+00	-7.1340E-01	1.71	1.50	1.68
8.7467E-03	2.0410E-02	4.9975E-02	-2.0582E+00	-1.6902E+00	-1.3012E+00	2.08	1.62	1.96
1.9114E-03	5.2356E-03	1.2206E-02	-2.7186E+00	-2.2810E+00	-1.9134E+00	2.20	1.97	2.04
Average slope						1.87	1.61	1.76

Limiter: W_{1L}, Van Leer - Van Albada
Riemann Solver: ROE
Grid: Orthogonal III

ORTHOGONAL III			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.9524	-0.0212
1	40	0.4878	-0.3118
1	80	0.2469	-0.6075
1	160	0.1242	-0.9058
1	320	0.0623	-1.2055

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
2.541E-02	5.356E-02	1.171E-01	-1.595E+00	-1.271E+00	-9.315E-01	slope	slope	slope
1.427E-02	2.906E-02	6.776E-02	-1.845E+00	-1.537E+00	-1.169E+00	0.86	0.91	0.82
4.301E-03	9.597E-03	2.191E-02	-2.366E+00	-2.018E+00	-1.659E+00	1.76	1.63	1.66
1.011E-03	2.650E-03	5.294E-03	-2.995E+00	-2.577E+00	-2.276E+00	2.11	1.87	2.07
2.183E-04	6.640E-04	1.212E-03	-3.661E+00	-3.178E+00	-2.916E+00	2.22	2.01	2.14
Average slope						1.74	1.61	1.67

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
5.210E-03	1.270E-02	2.227E-02	-2.283E+00	-1.896E+00	-1.652E+00	slope	slope	slope
2.717E-03	6.262E-03	1.234E-02	-2.566E+00	-2.203E+00	-1.909E+00	0.97	1.06	0.88
8.122E-04	1.900E-03	3.907E-03	-3.090E+00	-2.721E+00	-2.408E+00	1.77	1.75	1.69
1.729E-04	4.745E-04	8.845E-04	-3.762E+00	-3.324E+00	-3.053E+00	2.25	2.02	2.16
3.525E-05	1.088E-04	1.899E-04	-4.453E+00	-3.963E+00	-3.721E+00	2.30	2.13	2.23
Average slope						1.83	1.74	1.74

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
4.0054E-01	5.5886E-01	1.8163E+00	-0.39735002	-0.252696187	0.259180278	slope	slope	slope
2.2702E-01	3.1616E-01	1.0847E+00	-0.643932891	-0.50009593	0.035296107	0.85	0.85	0.77
6.9133E-02	1.2205E-01	3.9138E-01	-1.160314027	-0.91345855	-0.407404079	1.75	1.40	1.50
2.1948E-02	4.3035E-02	1.1980E-01	-1.658602143	-1.366181643	-0.92154032	1.67	1.52	1.72
5.3686E-03	1.4196E-02	3.3250E-02	-2.270136116	-1.84783303	-1.478210676	2.04	1.61	1.86
Average slope						1.58	1.34	1.46

Limiter: W_{1L}, Van Leer - Van Albada

Riemann Solver: ROE

Grid: Distorted A

DISTORTED A			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
2.619E-02	4.586E-02	1.158E-01	-1.582E+00	-1.339E+00	-9.361E-01	slope	slope	slope
1.214E-02	2.289E-02	5.754E-02	-1.916E+00	-1.640E+00	-1.240E+00	1.24	1.12	1.12
3.156E-03	6.392E-03	1.602E-02	-2.501E+00	-2.194E+00	-1.795E+00	1.99	1.88	1.88
7.821E-04	1.683E-03	3.929E-03	-3.107E+00	-2.774E+00	-2.406E+00	2.03	1.95	2.05
2.063E-04	4.256E-04	1.008E-03	-3.686E+00	-3.371E+00	-2.996E+00	1.92	1.98	1.96
Average slope						1.79	1.73	1.75

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
5.359E-03	1.091E-02	2.322E-02	-2.271E+00	-1.962E+00	-1.634E+00	slope	slope	slope
2.322E-03	4.721E-03	1.062E-02	-2.634E+00	-2.326E+00	-1.974E+00	1.34	1.35	1.26
6.067E-04	1.231E-03	2.876E-03	-3.217E+00	-2.910E+00	-2.541E+00	1.98	1.98	1.92
1.532E-04	3.058E-04	7.411E-04	-3.815E+00	-3.515E+00	-3.130E+00	2.01	2.03	1.98
4.457E-05	8.099E-05	2.130E-04	-4.351E+00	-4.092E+00	-3.672E+00	1.78	1.92	1.80
Average slope						1.78	1.82	1.74

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
3.5949E-01	4.2455E-01	1.6179E+00	-4.4431E-01	-3.7207E-01	2.0896E-01	slope	slope	slope
2.0538E-01	2.6947E-01	9.9526E-01	-6.8743E-01	-5.6948E-01	-2.0628E-03	0.90	0.73	0.78
5.8923E-02	8.1155E-02	2.7840E-01	-1.2297E+00	-1.0907E+00	-5.5534E-01	1.84	1.77	1.88
1.5111E-02	3.4812E-02	8.8347E-02	-1.8207E+00	-1.4583E+00	-1.0538E+00	1.98	1.23	1.67
5.4788E-03	1.1016E-02	2.8390E-02	-2.2613E+00	-1.9580E+00	-1.5468E+00	1.46	1.66	1.64
Average slope						1.55	1.35	1.49

Limiter: W_{2L}, Van Leer - Van Albada
Riemann Solver: HLLC
Grid: Equilateral I

EQUILATERAL I			
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
2.364E-02	4.615E-02	1.106E-01	-1.626E+00	-1.336E+00	-9.563E-01	slope	slope	slope
1.141E-02	2.156E-02	5.458E-02	-1.943E+00	-1.666E+00	-1.263E+00	1.17	1.22	1.13
2.907E-03	6.309E-03	1.500E-02	-2.537E+00	-2.200E+00	-1.824E+00	2.01	1.81	1.90
6.485E-04	1.654E-03	3.484E-03	-3.188E+00	-2.781E+00	-2.458E+00	2.19	1.95	2.13
1.260E-04	3.730E-04	7.379E-04	-3.900E+00	-3.428E+00	-3.132E+00	2.36	2.15	2.24
Average slope						1.93	1.78	1.85

L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
4.780E-03	1.017E-02	2.210E-02	-2.321E+00	-1.992E+00	-1.656E+00	slope	slope	slope
2.159E-03	4.459E-03	9.809E-03	-2.666E+00	-2.351E+00	-2.008E+00	1.28	1.33	1.31
5.312E-04	1.228E-03	2.608E-03	-3.275E+00	-2.911E+00	-2.584E+00	2.07	1.90	1.95
1.118E-04	2.951E-04	5.879E-04	-3.952E+00	-3.530E+00	-3.231E+00	2.27	2.08	2.17
2.087E-05	6.196E-05	1.178E-04	-4.681E+00	-4.208E+00	-3.929E+00	2.42	2.25	2.32
Average slope						2.01	1.89	1.94

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
3.1495E-01	4.7198E-01	1.5940E+00	-5.0176E-01	-3.2607E-01	2.0248E-01	slope	slope	slope
1.7811E-01	2.3588E-01	8.7493E-01	-7.4932E-01	-6.2731E-01	-5.8028E-02	0.92	1.12	0.96
5.2641E-02	8.7733E-02	2.6123E-01	-1.2787E+00	-1.0568E+00	-5.8298E-01	1.80	1.46	1.78
1.4305E-02	3.1205E-02	7.9614E-02	-1.8445E+00	-1.5058E+00	-1.0990E+00	1.90	1.51	1.73
3.1625E-03	8.5791E-03	2.0239E-02	-2.5000E+00	-2.0666E+00	-1.6938E+00	2.18	1.86	1.97
Average slope						1.70	1.49	1.61

Limiter: W_{2L} , Van Leer - Van Albada

Riemann Solver: HLLC

Grid: Distorted IV

DISTORTED IV			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.347E-02	4.725E-02	1.098E-01	-1.630E+00	-1.326E+00	-9.594E-01	slope	slope	slope
1.157E-02	2.261E-02	5.546E-02	-1.937E+00	-1.646E+00	-1.256E+00	1.14	1.18	1.10
3.015E-03	6.338E-03	1.562E-02	-2.521E+00	-2.198E+00	-1.806E+00	1.98	1.87	1.87
6.687E-04	1.628E-03	3.501E-03	-3.175E+00	-2.788E+00	-2.456E+00	2.20	1.98	2.18
1.273E-04	3.613E-04	7.246E-04	-3.895E+00	-3.442E+00	-3.140E+00	2.39	2.17	2.27
Average slope						1.93	1.80	1.85

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.858E-03	1.054E-02	2.239E-02	-2.314E+00	-1.977E+00	-1.650E+00	slope	slope	slope
2.193E-03	4.742E-03	9.904E-03	-2.659E+00	-2.324E+00	-2.004E+00	1.28	1.28	1.31
5.584E-04	1.200E-03	2.702E-03	-3.253E+00	-2.921E+00	-2.568E+00	2.02	2.02	1.91
1.156E-04	2.850E-04	5.867E-04	-3.937E+00	-3.545E+00	-3.232E+00	2.30	2.10	2.23
2.184E-05	5.952E-05	1.161E-04	-4.661E+00	-4.225E+00	-3.935E+00	2.40	2.26	2.34
Average slope						2.00	1.92	1.95

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.791E-01	5.228E-01	1.2187E+00	-5.5423E-01	-2.8160E-01	8.5891E-02	slope	slope	slope
1.984E-01	2.508E-01	9.6479E-01	-7.0229E-01	-6.0068E-01	-1.5569E-02	0.55	1.18	0.38
5.507E-02	9.430E-02	2.8637E-01	-1.2590E+00	-1.0255E+00	-5.4307E-01	1.89	1.44	1.79
1.538E-02	3.030E-02	8.1564E-02	-1.8130E+00	-1.5185E+00	-1.0885E+00	1.86	1.66	1.83
3.421E-03	7.738E-03	1.9340E-02	-2.4658E+00	-2.1114E+00	-1.7135E+00	2.17	1.97	2.07
Average slope						1.62	1.56	1.52

Limiter: W_{2L} , Van Leer - Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Orthogonal II

ORTHOGONAL II			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.6897	-0.1614
1	40	0.3492	-0.4570
1	80	0.1757	-0.7553
1	160	0.0881	-1.0550
1	320	0.0441	-1.3553

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.025E-02	4.042E-02	9.614E-02	-1.694E+00	-1.393E+00	-1.017E+00	slope	slope	slope
7.835E-03	1.534E-02	3.877E-02	-2.106E+00	-1.814E+00	-1.411E+00	1.40	1.42	1.33
1.834E-03	4.129E-03	9.567E-03	-2.737E+00	-2.384E+00	-2.019E+00	2.11	1.91	2.04
3.962E-04	1.037E-03	2.158E-03	-3.402E+00	-2.984E+00	-2.666E+00	2.22	2.00	2.16
8.028E-05	2.336E-04	4.570E-04	-4.095E+00	-3.632E+00	-3.340E+00	2.31	2.16	2.24
Average slope						2.01	1.87	1.94

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.964E-03	8.700E-03	1.768E-02	-2.402E+00	-2.060E+00	-1.753E+00	slope	slope	slope
1.481E-03	3.149E-03	6.938E-03	-2.829E+00	-2.502E+00	-2.159E+00	1.45	1.49	1.37
3.257E-04	7.838E-04	1.646E-03	-3.487E+00	-3.106E+00	-2.784E+00	2.20	2.02	2.09
6.660E-05	1.844E-04	3.548E-04	-4.177E+00	-3.734E+00	-3.450E+00	2.30	2.10	2.22
1.309E-05	4.001E-05	7.299E-05	-4.883E+00	-4.398E+00	-4.137E+00	2.35	2.21	2.29
Average slope						2.08	1.96	1.99

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.3008E-01	4.4068E-01	1.5318E+00	-4.8138E-01	-3.5588E-01	1.8519E-01	slope	slope	slope
1.1943E-01	1.7525E-01	6.1201E-01	-9.2288E-01	-7.5634E-01	-2.1324E-01	1.49	1.35	1.35
3.6702E-02	6.2675E-02	1.9343E-01	-1.4353E+00	-1.2029E+00	-7.1348E-01	1.72	1.50	1.68
8.7536E-03	2.0393E-02	4.9974E-02	-2.0578E+00	-1.6905E+00	-1.3013E+00	2.08	1.63	1.96
1.9114E-03	5.2343E-03	1.2204E-02	-2.7186E+00	-2.2811E+00	-1.9135E+00	2.20	1.97	2.04
Average slope						1.87	1.61	1.76

Limiter: W_{2L} , Van Leer - Van Albada
 Riemann Solver: HLLC
 Grid: Orthogonal III

ORTHOGONAL III			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.9524	-0.0212
1	40	0.4878	-0.3118
1	80	0.2469	-0.6075
1	160	0.1242	-0.9058
1	320	0.0623	-1.2055

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.543E-02	5.370E-02	1.172E-01	-1.595E+00	-1.270E+00	-9.309E-01	slope	slope	slope
1.432E-02	2.915E-02	6.790E-02	-1.844E+00	-1.535E+00	-1.168E+00	0.86	0.91	0.82
4.304E-03	9.603E-03	2.193E-02	-2.366E+00	-2.018E+00	-1.659E+00	1.77	1.63	1.66
1.011E-03	2.649E-03	5.294E-03	-2.995E+00	-2.577E+00	-2.276E+00	2.11	1.87	2.07
2.183E-04	6.639E-04	1.212E-03	-3.661E+00	-3.178E+00	-2.917E+00	2.22	2.01	2.14
Average slope						1.74	1.61	1.67

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
5.225E-03	1.271E-02	2.230E-02	-2.282E+00	-1.896E+00	-1.652E+00	slope	slope	slope
2.727E-03	6.281E-03	1.238E-02	-2.564E+00	-2.202E+00	-1.907E+00	0.97	1.05	0.88
8.133E-04	1.902E-03	3.910E-03	-3.090E+00	-2.721E+00	-2.408E+00	1.78	1.75	1.69
1.729E-04	4.745E-04	8.846E-04	-3.762E+00	-3.324E+00	-3.053E+00	2.25	2.02	2.16
3.525E-05	1.088E-04	1.899E-04	-4.453E+00	-3.963E+00	-3.721E+00	2.30	2.13	2.23
Average slope						1.83	1.74	1.74

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.0096E-01	5.5932E-01	1.8179E+00	-0.396894466	-0.252340337	0.259571252	slope	slope	slope
2.2756E-01	3.1673E-01	1.0864E+00	-0.64289565	-0.499317043	0.035984019	0.85	0.85	0.77
6.9172E-02	1.2219E-01	3.9089E-01	-1.160072758	-0.912952482	-0.407950598	1.75	1.40	1.50
2.1934E-02	4.3060E-02	1.1981E-01	-1.658878212	-1.365922403	-0.921495848	1.67	1.52	1.72
5.3681E-03	1.4195E-02	3.3249E-02	-2.270176195	-1.847879408	-1.47821717	2.04	1.61	1.86
Average slope						1.58	1.34	1.46

Limiter: W_{2L} , Van Leer - Van Albada

Riemann Solver: HLLC

Grid: Distorted A

DISTORTED A			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.608E-02	4.620E-02	1.167E-01	-1.584E+00	-1.335E+00	-9.331E-01	slope	slope	slope
1.228E-02	2.285E-02	5.797E-02	-1.911E+00	-1.641E+00	-1.237E+00	1.21	1.13	1.12
3.111E-03	6.276E-03	1.576E-02	-2.507E+00	-2.202E+00	-1.803E+00	2.02	1.90	1.92
6.853E-04	1.557E-03	3.487E-03	-3.164E+00	-2.808E+00	-2.458E+00	2.21	2.03	2.20
1.274E-04	3.419E-04	6.985E-04	-3.895E+00	-3.466E+00	-3.156E+00	2.43	2.18	2.32
Average slope						1.97	1.81	1.89

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
5.277E-03	1.089E-02	2.320E-02	-2.278E+00	-1.963E+00	-1.634E+00	slope	slope	slope
2.328E-03	4.736E-03	1.066E-02	-2.633E+00	-2.325E+00	-1.972E+00	1.32	1.34	1.25
5.888E-04	1.200E-03	2.766E-03	-3.230E+00	-2.921E+00	-2.558E+00	2.03	2.02	1.99
1.212E-04	2.714E-04	5.943E-04	-3.916E+00	-3.566E+00	-3.226E+00	2.30	2.17	2.24
2.259E-05	5.645E-05	1.150E-04	-4.646E+00	-4.248E+00	-3.939E+00	2.42	2.26	2.37
Average slope						2.02	1.95	1.96

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax _x	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.594E-01	4.266E-01	1.6270E+00	-4.443E-01	-3.699E-01	2.114E-01	slope	slope	slope
2.097E-01	2.684E-01	1.0046E+00	-6.782E-01	-5.711E-01	1.980E-03	0.87	0.74	0.78
5.566E-02	8.077E-02	2.7637E-01	-1.254E+00	-1.092E+00	-5.585E-01	1.95	1.77	1.90
1.534E-02	3.064E-02	7.8560E-02	-1.814E+00	-1.513E+00	-1.104E+00	1.88	1.41	1.83
3.210E-03	7.995E-03	1.8541E-02	-2.493E+00	-2.097E+00	-1.731E+00	2.25	1.94	2.08
Average slope						1.74	1.47	1.65

Limiter: W_{2L} , Van Leer - Van Albada
Riemann Solver: ROE
Grid: Equilateral I

EQUILATERAL I			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.359E-02	4.609E-02	1.103E-01	-1.627E+00	-1.336E+00	-9.573E-01	slope	slope	slope
1.138E-02	2.155E-02	5.452E-02	-1.944E+00	-1.667E+00	-1.263E+00	1.17	1.22	1.13
2.906E-03	6.313E-03	1.500E-02	-2.537E+00	-2.200E+00	-1.824E+00	2.01	1.81	1.90
6.487E-04	1.655E-03	3.486E-03	-3.188E+00	-2.781E+00	-2.458E+00	2.19	1.95	2.13
1.260E-04	3.730E-04	7.380E-04	-3.900E+00	-3.428E+00	-3.132E+00	2.36	2.15	2.24
Average slope						1.93	1.78	1.85

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.774E-03	1.015E-02	2.205E-02	-2.321E+00	-1.994E+00	-1.657E+00	slope	slope	slope
2.151E-03	4.456E-03	9.789E-03	-2.667E+00	-2.351E+00	-2.009E+00	1.28	1.32	1.31
5.307E-04	1.229E-03	2.607E-03	-3.275E+00	-2.911E+00	-2.584E+00	2.06	1.90	1.95
1.117E-04	2.952E-04	5.880E-04	-3.952E+00	-3.530E+00	-3.231E+00	2.27	2.08	2.17
2.086E-05	6.197E-05	1.178E-04	-4.681E+00	-4.208E+00	-3.929E+00	2.42	2.25	2.32
Average slope						2.01	1.89	1.94

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.1457E-01	4.7203E-01	1.5922E+00	-5.0228E-01	-3.2603E-01	2.0200E-01	slope	slope	slope
1.7791E-01	2.3573E-01	8.7267E-01	-7.4980E-01	-6.2759E-01	-5.9150E-02	0.92	1.12	0.97
5.2593E-02	8.7774E-02	2.6113E-01	-1.2791E+00	-1.0566E+00	-5.8314E-01	1.80	1.46	1.78
1.4311E-02	3.1221E-02	7.9632E-02	-1.8443E+00	-1.5056E+00	-1.0989E+00	1.90	1.51	1.73
3.1634E-03	8.5804E-03	2.0242E-02	-2.4998E+00	-2.0665E+00	-1.6937E+00	2.18	1.86	1.97
Average slope						1.70	1.49	1.61

Limiter: W_{2L} , Van Leer - Van Albada

Riemann Solver: ROE

Grid: Distorted IV

DISTORTED IV			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.342E-02	4.723E-02	1.097E-01	-1.630E+00	-1.326E+00	-9.598E-01	slope	slope	slope
1.156E-02	2.261E-02	5.540E-02	-1.937E+00	-1.646E+00	-1.256E+00	1.14	1.18	1.10
3.016E-03	6.342E-03	1.562E-02	-2.521E+00	-2.198E+00	-1.806E+00	1.98	1.87	1.86
6.689E-04	1.629E-03	3.502E-03	-3.175E+00	-2.788E+00	-2.456E+00	2.20	1.98	2.18
1.273E-04	3.614E-04	7.248E-04	-3.895E+00	-3.442E+00	-3.140E+00	2.39	2.17	2.27
Average slope						1.93	1.80	1.85

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.842E-03	1.053E-02	2.235E-02	-2.315E+00	-1.978E+00	-1.651E+00	slope	slope	slope
2.193E-03	4.744E-03	9.901E-03	-2.659E+00	-2.324E+00	-2.004E+00	1.27	1.28	1.31
5.580E-04	1.200E-03	2.700E-03	-3.253E+00	-2.921E+00	-2.569E+00	2.02	2.03	1.91
1.156E-04	2.850E-04	5.868E-04	-3.937E+00	-3.545E+00	-3.232E+00	2.29	2.10	2.23
2.184E-05	5.953E-05	1.161E-04	-4.661E+00	-4.225E+00	-3.935E+00	2.40	2.26	2.34
Average slope						2.00	1.92	1.95

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.7881E-01	5.2278E-01	1.2167E+00	-5.5469E-01	-2.8168E-01	8.5195E-02	slope	slope	slope
1.9822E-01	2.5051E-01	9.6242E-01	-7.0286E-01	-6.0118E-01	-1.6638E-02	0.55	1.18	0.38
5.5114E-02	9.4272E-02	2.8621E-01	-1.2587E+00	-1.0256E+00	-5.4332E-01	1.89	1.44	1.79
1.5395E-02	3.0325E-02	8.1591E-02	-1.8126E+00	-1.5182E+00	-1.0884E+00	1.86	1.65	1.83
3.4222E-03	7.7413E-03	1.9343E-02	-2.4657E+00	-2.1112E+00	-1.7135E+00	2.17	1.97	2.07
Average slope						1.62	1.56	1.52

Limiter: W_{2L} , Van Leer - Van Albada
Riemann Solver: ROE
Grid: Orthogonal II

ORTHOGONAL II			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.6897	-0.1614
1	40	0.3492	-0.4570
1	80	0.1757	-0.7553
1	160	0.0881	-1.0550
1	320	0.0441	-1.3553

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.019E-02	4.039E-02	9.595E-02	-1.695E+00	-1.394E+00	-1.018E+00	slope	slope	slope
7.817E-03	1.533E-02	3.874E-02	-2.107E+00	-1.814E+00	-1.412E+00	1.39	1.42	1.33
1.833E-03	4.128E-03	9.564E-03	-2.737E+00	-2.384E+00	-2.019E+00	2.11	1.91	2.04
3.961E-04	1.038E-03	2.157E-03	-3.402E+00	-2.984E+00	-2.666E+00	2.22	2.00	2.16
8.027E-05	2.336E-04	4.570E-04	-4.095E+00	-3.632E+00	-3.340E+00	2.31	2.16	2.24
Average slope						2.01	1.87	1.94

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.949E-03	8.690E-03	1.762E-02	-2.404E+00	-2.061E+00	-1.754E+00	slope	slope	slope
1.477E-03	3.147E-03	6.929E-03	-2.831E+00	-2.502E+00	-2.159E+00	1.44	1.49	1.37
3.255E-04	7.835E-04	1.646E-03	-3.487E+00	-3.106E+00	-2.784E+00	2.20	2.02	2.09
6.658E-05	1.843E-04	3.548E-04	-4.177E+00	-3.734E+00	-3.450E+00	2.30	2.10	2.22
1.309E-05	4.001E-05	7.298E-05	-4.883E+00	-4.398E+00	-4.137E+00	2.35	2.21	2.29
Average slope						2.07	1.96	1.99

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.2929E-01	4.3974E-01	1.5312E+00	-4.8242E-01	-3.5680E-01	1.8502E-01	slope	slope	slope
1.1896E-01	1.7586E-01	6.1215E-01	-9.2461E-01	-7.5482E-01	-2.1314E-01	1.50	1.35	1.35
3.6716E-02	6.2606E-02	1.9346E-01	-1.4351E+00	-1.2034E+00	-7.1340E-01	1.71	1.50	1.68
8.7467E-03	2.0410E-02	4.9975E-02	-2.0582E+00	-1.6902E+00	-1.3012E+00	2.08	1.62	1.96
1.9114E-03	5.2356E-03	1.2206E-02	-2.7186E+00	-2.2810E+00	-1.9134E+00	2.20	1.97	2.04
Average slope						1.87	1.61	1.76

Limiter: W_{2L} , Van Leer - Van Albada
Riemann Solver: ROE
Grid: Orthogonal III

ORTHOGONAL III			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.9524	-0.0212
1	40	0.4878	-0.3118
1	80	0.2469	-0.6075
1	160	0.1242	-0.9058
1	320	0.0623	-1.2055

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.541E-02	5.356E-02	1.171E-01	-1.595E+00	-1.271E+00	-9.315E-01	slope	slope	slope
1.427E-02	2.906E-02	6.776E-02	-1.845E+00	-1.537E+00	-1.169E+00	0.86	0.91	0.82
4.301E-03	9.597E-03	2.191E-02	-2.366E+00	-2.018E+00	-1.659E+00	1.76	1.63	1.66
1.011E-03	2.650E-03	5.294E-03	-2.995E+00	-2.577E+00	-2.276E+00	2.11	1.87	2.07
2.183E-04	6.640E-04	1.212E-03	-3.661E+00	-3.178E+00	-2.916E+00	2.22	2.01	2.14
Average slope						1.74	1.61	1.67

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
5.210E-03	1.270E-02	2.227E-02	-2.283E+00	-1.896E+00	-1.652E+00	slope	slope	slope
2.717E-03	6.262E-03	1.234E-02	-2.566E+00	-2.203E+00	-1.909E+00	0.97	1.06	0.88
8.122E-04	1.900E-03	3.907E-03	-3.090E+00	-2.721E+00	-2.408E+00	1.77	1.75	1.69
1.729E-04	4.745E-04	8.845E-04	-3.762E+00	-3.324E+00	-3.053E+00	2.25	2.02	2.16
3.525E-05	1.088E-04	1.899E-04	-4.453E+00	-3.963E+00	-3.721E+00	2.30	2.13	2.23
Average slope						1.83	1.74	1.74

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
4.0054E-01	5.5886E-01	1.8163E+00	-0.39735002	-0.252696187	0.259180278	slope	slope	slope
2.2702E-01	3.1616E-01	1.0847E+00	-0.643932891	-0.50009593	0.035296107	0.85	0.85	0.77
6.9133E-02	1.2205E-01	3.9138E-01	-1.160314027	-0.91345855	-0.407404079	1.75	1.40	1.50
2.1948E-02	4.3035E-02	1.1980E-01	-1.658602143	-1.366181643	-0.92154032	1.67	1.52	1.72
5.3686E-03	1.4196E-02	3.3250E-02	-2.270136116	-1.84783303	-1.478210676	2.04	1.61	1.86
Average slope						1.58	1.34	1.46

Limiter: W_{2L} , Van Leer - Van Albada

Riemann Solver: ROE

Grid: Distorted A

DISTORTED A			
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$
1	20	0.8436	-0.0738
1	40	0.4529	-0.3440
1	80	0.2297	-0.6388
1	160	0.1157	-0.9366
1	320	0.0578	-1.2379

L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
2.606E-02	4.617E-02	1.166E-01	-1.584E+00	-1.336E+00	-9.335E-01	slope	slope	slope
1.228E-02	2.287E-02	5.795E-02	-1.911E+00	-1.641E+00	-1.237E+00	1.21	1.13	1.12
3.113E-03	6.280E-03	1.576E-02	-2.507E+00	-2.202E+00	-1.803E+00	2.02	1.90	1.92
6.857E-04	1.557E-03	3.488E-03	-3.164E+00	-2.808E+00	-2.457E+00	2.21	2.03	2.20
1.274E-04	3.420E-04	6.986E-04	-3.895E+00	-3.466E+00	-3.156E+00	2.43	2.19	2.32
Average slope						1.97	1.81	1.89

L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
5.272E-03	1.088E-02	2.313E-02	-2.278E+00	-1.963E+00	-1.636E+00	slope	slope	slope
2.325E-03	4.737E-03	1.065E-02	-2.634E+00	-2.325E+00	-1.973E+00	1.32	1.34	1.25
5.889E-04	1.200E-03	2.765E-03	-3.230E+00	-2.921E+00	-2.558E+00	2.02	2.02	1.99
1.213E-04	2.714E-04	5.944E-04	-3.916E+00	-3.566E+00	-3.226E+00	2.30	2.17	2.24
2.259E-05	5.646E-05	1.150E-04	-4.646E+00	-4.248E+00	-3.939E+00	2.42	2.26	2.37
Average slope						2.02	1.95	1.96

Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax	Lmax
Error(ρ)	Error(ρu)	Error(ρe)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho e))$	(ρ)	(ρu)	(ρe)
3.5913E-01	4.2631E-01	1.6255E+00	-4.4474E-01	-3.7028E-01	2.1099E-01	slope	slope	slope
2.1003E-01	2.6932E-01	1.0065E+00	-6.7773E-01	-5.6973E-01	2.7985E-03	0.86	0.74	0.77
5.5900E-02	8.0765E-02	2.7643E-01	-1.2526E+00	-1.0928E+00	-5.5841E-01	1.95	1.77	1.90
1.5348E-02	3.0632E-02	7.8543E-02	-1.8140E+00	-1.5138E+00	-1.1049E+00	1.88	1.41	1.83
3.2110E-03	7.9976E-03	1.8545E-02	-2.4934E+00	-2.0970E+00	-1.7318E+00	2.26	1.94	2.08
Average slope						1.74	1.47	1.65

Finite Volume: CC
 Limiter: W_{2L}, Van Leer - Van Albada
 Riemann Solver: ROE (COMPARISON)
 Grids: Equilateral , Distorted , Orthogonal, Orthogonal II

EQUILATERAL								
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)					
1	20	0.6226	-0.2058					
1	40	0.3276	-0.4846					
1	80	0.1643	-0.7843					
1	160	0.0823	-1.0846					
1	320	0.0410	-1.3872					
L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
1.652E-02	3.269E-02	7.865E-02	-1.782E+00	-1.486E+00	-1.104E+00	slope	slope	slope
5.347E-03	1.056E-02	2.668E-02	-2.272E+00	-1.976E+00	-1.574E+00	1.76	1.76	1.68
9.809E-04	2.309E-03	5.355E-03	-3.008E+00	-2.637E+00	-2.271E+00	2.46	2.20	2.33
1.757E-04	4.932E-04	1.021E-03	-3.755E+00	-3.307E+00	-2.991E+00	2.49	2.23	2.40
3.316E-05	1.018E-04	1.974E-04	-4.479E+00	-3.992E+00	-3.705E+00	2.39	2.26	2.36
Average slope						2.27	2.12	2.19
L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
3.325E-03	7.109E-03	1.532E-02	-2.478E+00	-2.148E+00	-1.815E+00	slope	slope	slope
1.020E-03	2.141E-03	4.913E-03	-2.991E+00	-2.669E+00	-2.309E+00	1.84	1.87	1.77
1.853E-04	4.460E-04	9.849E-04	-3.732E+00	-3.351E+00	-3.007E+00	2.47	2.27	2.33
3.193E-05	8.901E-05	1.783E-04	-4.496E+00	-4.051E+00	-3.749E+00	2.54	2.33	2.47
5.932E-06	1.785E-05	3.354E-05	-5.227E+00	-4.748E+00	-4.474E+00	2.42	2.31	2.40
Average slope						2.32	2.19	2.24

DISTORTED								
L	N	h _N	log ₁₀ (h _N)					
1	20	0.6226	-0.2058					
1	40	0.3276	-0.4846					
1	80	0.1643	-0.7843					
1	160	0.0823	-1.0846					
1	320	0.0410	-1.3872					
L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
1.759E-02	3.350E-02	8.133E-02	-1.755E+00	-1.475E+00	-1.090E+00	slope	slope	slope
6.165E-03	1.196E-02	3.038E-02	-2.210E+00	-1.922E+00	-1.517E+00	1.63	1.60	1.53
1.123E-03	2.634E-03	6.081E-03	-2.949E+00	-2.579E+00	-2.216E+00	2.47	2.19	2.33
1.981E-04	5.286E-04	1.116E-03	-3.703E+00	-3.277E+00	-2.952E+00	2.51	2.32	2.45
3.858E-05	1.100E-04	2.186E-04	-4.414E+00	-3.959E+00	-3.660E+00	2.35	2.25	2.34
Average slope						2.24	2.09	2.16
L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ _u)	Error(ρ _e)	log ₁₀ (error(ρ))	log ₁₀ (error(ρ _u))	log ₁₀ (error(ρ _e))	(ρ)	(ρ _u)	(ρ _e)
3.477E-03	7.276E-03	1.528E-02	-2.459E+00	-2.138E+00	-1.816E+00	slope	slope	slope
1.180E-03	2.403E-03	5.526E-03	-2.928E+00	-2.619E+00	-2.258E+00	1.68	1.73	1.58
2.084E-04	4.927E-04	1.096E-03	-3.681E+00	-3.307E+00	-2.960E+00	2.51	2.30	2.34
3.646E-05	9.402E-05	1.951E-04	-4.438E+00	-4.027E+00	-3.710E+00	2.52	2.40	2.50
7.295E-06	1.943E-05	3.828E-05	-5.137E+00	-4.712E+00	-4.417E+00	2.31	2.26	2.34
Average slope						2.26	2.17	2.19

ORTHOGONAL								
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$					
1	20	0.5000	-0.3010					
1	40	0.2500	-0.6021					
1	80	0.1250	-0.9031					
1	160	0.0625	-1.2041					
1	320	0.0313	-1.5051					
L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ_u)	Error(ρ_e)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho_u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho_e))$	(ρ)	(ρ_u)	(ρ_e)
1.424E-02	2.639E-02	6.639E-02	-1.846E+00	-1.579E+00	-1.178E+00	slope	slope	slope
3.549E-03	6.979E-03	1.777E-02	-2.450E+00	-2.156E+00	-1.750E+00	2.00	1.92	1.90
6.418E-04	1.431E-03	3.347E-03	-3.193E+00	-2.844E+00	-2.475E+00	2.47	2.29	2.41
1.156E-04	3.104E-04	6.348E-04	-3.937E+00	-3.508E+00	-3.197E+00	2.47	2.21	2.40
2.263E-05	6.742E-05	1.281E-04	-4.645E+00	-4.171E+00	-3.893E+00	2.35	2.20	2.31
						Average slope	2.32	2.15
							2.25	
L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ_u)	Error(ρ_e)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho_u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho_e))$	(ρ)	(ρ_u)	(ρ_e)
2.890E-03	5.839E-03	1.323E-02	-2.539E+00	-2.234E+00	-1.879E+00	slope	slope	slope
6.724E-04	1.417E-03	3.231E-03	-3.172E+00	-2.849E+00	-2.491E+00	2.10	2.04	2.03
1.212E-04	2.689E-04	6.015E-04	-3.917E+00	-3.570E+00	-3.221E+00	2.47	2.40	2.43
2.225E-05	5.537E-05	1.126E-04	-4.653E+00	-4.257E+00	-3.948E+00	2.45	2.28	2.42
4.540E-06	1.206E-05	2.292E-05	-5.343E+00	-4.919E+00	-4.640E+00	2.29	2.20	2.30
						Average slope	2.33	2.23
							2.29	

ORTHOGONAL 2								
L	N	h_N	$\log_{10}(h_N)$					
1	20	0.7071	-0.1505					
1	40	0.3536	-0.4515					
1	80	0.1768	-0.7526					
1	160	0.0884	-1.0536					
1	320	0.0442	-1.3546					
L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(ρ)	Error(ρ_u)	Error(ρ_e)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho_u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho_e))$	(ρ)	(ρ_u)	(ρ_e)
2.008E-02	3.907E-02	9.054E-02	-1.697E+00	-1.408E+00	-1.043E+00	slope	slope	slope
7.497E-03	1.551E-02	3.660E-02	-2.125E+00	-1.809E+00	-1.437E+00	1.42	1.33	1.31
1.544E-03	3.809E-03	8.161E-03	-2.811E+00	-2.419E+00	-2.088E+00	2.28	2.03	2.17
2.967E-04	8.343E-04	1.596E-03	-3.528E+00	-3.079E+00	-2.797E+00	2.38	2.19	2.35
5.656E-05	1.776E-04	3.155E-04	-4.247E+00	-3.751E+00	-3.501E+00	2.39	2.23	2.34
						Average slope	2.12	1.95
							2.04	
L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(ρ)	Error(ρ_u)	Error(ρ_e)	$\log_{10}(\text{error}(\rho))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho_u))$	$\log_{10}(\text{error}(\rho_e))$	(ρ)	(ρ_u)	(ρ_e)
4.132E-03	8.929E-03	1.914E-02	-2.384E+00	-2.049E+00	-1.718E+00	slope	slope	slope
1.432E-03	3.178E-03	6.784E-03	-2.844E+00	-2.498E+00	-2.169E+00	1.53	1.49	1.50
2.943E-04	7.248E-04	1.478E-03	-3.531E+00	-3.140E+00	-2.830E+00	2.28	2.13	2.20
5.198E-05	1.472E-04	2.733E-04	-4.284E+00	-3.832E+00	-3.563E+00	2.50	2.30	2.43
9.699E-06	2.971E-05	5.223E-05	-5.013E+00	-4.527E+00	-4.282E+00	2.42	2.31	2.39
						Average slope	2.18	2.06
							2.13	

Grids: Equilateral, Distorted, Orthogonal, Orthogonal III

EQUILATERAL								
L		N	h _N	log ₁₀ (h _N)				
1		20	0.6226	-0.2058				
1		40	0.3276	-0.4846				
1		80	0.1643	-0.7843				
1		160	0.0823	-1.0846				
1		320	0.0410	-1.3872				
L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
1.270E-02	2.461E-02	5.813E-02	-1.896E+00	-1.609E+00	-1.236E+00	slope	slope	slope
3.487E-03	6.939E-03	1.610E-02	-2.458E+00	-2.159E+00	-1.793E+00	2.01	1.97	2.00
6.300E-04	1.376E-03	2.982E-03	-3.201E+00	-2.861E+00	-2.525E+00	2.48	2.34	2.44
1.225E-04	2.853E-04	5.840E-04	-3.912E+00	-3.545E+00	-3.234E+00	2.37	2.27	2.36
2.754E-05	6.482E-05	1.305E-04	-4.560E+00	-4.188E+00	-3.884E+00	2.14	2.13	2.15
					Average slope	2.25	2.18	2.24
L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
2.619E-03	5.839E-03	1.185E-02	-2.582E+00	-2.234E+00	-1.926E+00	slope	slope	slope
6.559E-04	1.513E-03	3.090E-03	-3.183E+00	-2.820E+00	-2.510E+00	2.16	2.10	2.09
1.148E-04	2.813E-04	5.563E-04	-3.940E+00	-3.551E+00	-3.255E+00	2.53	2.44	2.48
2.188E-05	5.700E-05	1.092E-04	-4.660E+00	-4.244E+00	-3.962E+00	2.40	2.31	2.35
4.779E-06	1.285E-05	2.435E-05	-5.321E+00	-4.891E+00	-4.613E+00	2.18	2.14	2.15
					Average slope	2.32	2.25	2.27
DISTORTED								
L		N	h _N	log ₁₀ (h _N)				
1		20	0.6226	-0.2058				
1		40	0.3276	-0.4846				
1		80	0.1643	-0.7843				
1		160	0.0823	-1.0846				
1		320	0.0410	-1.3872				
L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂	L ₂
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
1.358E-02	2.576E-02	6.018E-02	-1.867E+00	-1.589E+00	-1.221E+00	slope	slope	slope
4.091E-03	8.074E-03	1.852E-02	-2.388E+00	-2.093E+00	-1.732E+00	1.87	1.81	1.84
7.819E-04	1.675E-03	3.683E-03	-3.107E+00	-2.776E+00	-2.434E+00	2.40	2.28	2.34
1.438E-04	3.270E-04	6.750E-04	-3.842E+00	-3.485E+00	-3.171E+00	2.45	2.36	2.45
3.361E-05	7.516E-05	1.543E-04	-4.474E+00	-4.124E+00	-3.812E+00	2.09	2.11	2.12
					Average slope	2.20	2.14	2.19
L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁	L ₁
Error(p)	Error(pu)	Error(pe)	log ₁₀ (error(p))	log ₁₀ (error(pu))	log ₁₀ (error(pe))	(p)	(pu)	(pe)
2.780E-03	6.085E-03	1.187E-02	-2.556E+00	-2.216E+00	-1.925E+00	slope	slope	slope
7.886E-04	1.744E-03	3.615E-03	-3.103E+00	-2.758E+00	-2.442E+00	1.96	1.95	1.85
1.433E-04	3.345E-04	6.931E-04	-3.844E+00	-3.476E+00	-3.159E+00	2.47	2.39	2.39
2.662E-05	6.477E-05	1.273E-04	-4.575E+00	-4.189E+00	-3.895E+00	2.43	2.37	2.45
6.293E-06	1.482E-05	2.936E-05	-5.201E+00	-4.829E+00	-4.532E+00	2.07	2.12	2.11
					Average slope	2.23	2.21	2.20

