ΑΘΗΝΑ ΠΑΛΙΕΡΑΚΗ
Μεταπτυχιακή φοιτήτρια
Γενικό Τμήμα
Πολυτεχνείο Κρήτης

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ MARTINGALES

1. ΤΥΧΑΙΟΙ ΠΕΡΙΠΑΤΟΙ
2. ΚΛΑΔΩΤΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

ΧΑΝΙΑ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΗΣ 2006

Αφιερώνεται

στους γονείς μου Στέφανο και Ελένη

και στο σύζυγό μου Νεκτάριο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΕΛΙΔΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Πολλές φορές, στην Βιολογία, στην Φυσική, στις Κοινωνικές Επιστήμες, στην Οικονομία θέλουμε να μελετήσουμε φαινόμενα ή συστήματα τα οποία εξελίσσονται αναφορικά με τον χρόνο (ή τον χώρο), των οποίων η μελλοντική συμπεριφορά δεν είναι τελείως καθορισμένη (προβλέψιμη) αλλά χαρακτηρίζεται από ένα είδος «τυχαιότητας». Τα συστήματα αυτά καλούνται ***Στοχαστικά*** και η Θεωρία των Πιθανοτήτων φαίνεται να είναι το κατάλληλο πλαίσιο για την μελέτη τους.

Πράγματι, τα Μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται τόσο για την περιγραφή όσο και για την μελέτη των Στοχαστικών αυτών συστημάτων κατασκευάζονται με την βοήθεια συγκεκριμένων οικογενειών συναρτήσεων (τυχαίες μεταβλητές), τις οποίες καλούμε ***Στοχαστικές Ανελίξεις*** (σ.α).

Οι Στοχαστικές Ανελίξεις χαρακτηρίζονται από τις **σχέσεις εξάρτησης** μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών τους. Τέτοιου είδους σχέσεις εξάρτησης είναι π.χ. η ιδιότητα Markov, η ιδιότητα των στάσιμων προσαυξήσεων, **η ιδιότητα των martingales** κ.α. Η τελευταία αυτή σχέση (ιδιότητα) ικανοποιείται από αρκετά συστήματα, οπότε η θεωρία των martingales έχει αναπτυχθεί σ' ένα βασικό «εργαλείο» στις Θεωρητικές και Εφαρμοσμένες Πιθανότητες αλλά και στην Στατιστική.

Στην παρούσα εργασία αναπτύσσουμε την θεωρία των martingales (διακριτού χρόνου) δίνοντας πριν όλα εκείνα τα «συστατικά» τα απαραίτητα για την ανάπτυξη της. Στην συνέχεια με την βοήθεια της θεωρίας αυτής αποδεικνύουμε προτάσεις που αφορούν δύο πολύ συγκεκριμένες εφαρμογές της, αυτή των **τυχαίων περιπάτων** και εκείνη των **κλαδωτών αλυσίδων**. Οι περισσότερες από τις προτάσεις αυτές έχουν αποδειχθεί σε προηγούμενα κεφάλαια με την βοήθεια της κλασσικής Πιθανοθεωρίας.

Μέσα από την σύγκριση των δύο μεθόδων απόδειξης, αυτής της κλασσικής Πιθανοθεωρίας και εκείνης των martingales φαίνεται το «δυναμικό» της δεύτερης θεωρίας (οι αποδείξεις στην πρώτη περίπτωση είναι μακροσκελείς και χρονοβόρες ενώ στην δεύτερη σχετικά σύντομες και «κομψές»). Ακόμα μέσα από την απόδειξη προτάσεων με την θεωρία των martingales, γίνεται φανερό πως μπορεί η εν λόγω θεωρία να εφαρμοστεί σε καταστάσεις και να επιλύσει προβλήματα τα οποία δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με την βοήθεια των κλασσικών πιθανοτήτων.

Πιο συγκεκριμένα, στην εργασία αυτή, παρουσιάζονται τα εξής. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στις (κλασσικές) Πιθανότητες. Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζεται η έννοια ενός τυχαίου περίπατου, δίνονται παραδείγματα τυχαίων περιπάτων και αποδεικνύονται προτάσεις σχετικές με αυτούς με σπουδαιότερη εκείνη της *καταστροφής ενός παίκτη*. Στο τρίτο κεφάλαιο δίνεται η έννοια μίας κλαδωτής αλυσίδας, αναφέρονται παραδείγματα κλαδωτών αλυσίδων και αποδεικνύονται προτάσεις σχετικές με αυτές με πιο σημαντική εκείνη του υπολογισμού της *πιθανότητας εξάλειψης ενός πληθυσμού*. Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνεται η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας, αναφέρονται παραδείγματα και αποδεικνύονται οι κυριότερες ιδιότητες της. Στο πέμπτο κεφάλαιο γενικεύοντας την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας παίρνουμε την έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής, η οποία είναι το βασικό σημείο αναφοράς για τον ορισμό ενός martingale. Αναφέρονται επίσης εφαρμογές και αποδεικνύονται βασικές ιδιότητές της. Στο έκτο κεφάλαιο ορίζεται η έννοια ενός martingale και γίνεται μια εκτενής αναφορά σε παραδείγματα των martingales, για να φανεί ότι η αντίστοιχή τους θεωρία, μπορεί να εφαρμοστεί και να μοντελοποιήσει συστήματα σε πολλούς κλάδους των επιστημών, επιλύνοντας αρκετά πραγματικά προβλήματα. Ορίζονται επίσης οι έννοιες ενός submartingale και ενός supermartingale. Τέλος αναφέρονται ιδιότητες και αποδεικνύονται οι κυριότερες προτάσεις των martingales. Το έβδομο κεφάλαιο χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο αποδεικνύονται, με την βοήθεια των martingales, προτάσεις για τους τυχαίους περίπατους (προτάσεις που όπως είπαμε έχουν αποδειχθεί με άλλη μέθοδο στο δεύτερο κεφάλαιο). Στο δεύτερο μέρος αποδεικνύονται, με την βοήθεια και πάλι των martingales, προτάσεις για τις κλαδωτές αλυσίδες (προτάσεις που έχουν αποδειχθεί με άλλη μέθοδο στο τρίτο κεφάλαιο).

Κλείνοντας αυτόν τον ενημερωτικό πρόλογο, θεωρώ καθήκον μου να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Τρύφωνα Δάρρα ο οποίος με την πολύτιμη βοήθειά του συνέβαλλε σημαντικά στην πορεία της παρούσας διπλωματική εργασίας. Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου οι οποίοι σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στήριξαν κάθε απόφασή μου, καθώς και το σύζυγό μου για την υπομονή και την κατανόηση που έδειξε κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρουμε ορισμένες από τις βασικές έννοιες και αποτελέσματα από την Θεωρία Πιθανοτήτων, αντικείμενα τα οποία είναι απαραίτητα για την κατανόηση όλων αυτών που περιγράφονται στα κεφάλαια που ακολουθούν.

1.1 Ορισμός Πιθανότητας

Στην Θεωρία Πιθανοτήτων, ξεκινάμε από το λεγόμενο **πείραμα** δηλαδή μία διαδικασία η οποία μπορεί να επαναληφθεί θεωρητικά άπειρες φορές, κάτω από τις ίδιες ουσιαστικά συνθήκες, και στο τέλος της οποίας παρατηρούμε ορισμένα αποτελέσματα π.χ. η ρίψη ενός νομίσματος με δύο όψεις, η ρίψη ενός συμμετρικού ζαριού, ο αριθμός των αυτοκινήτων που περνούν από μία διασταύρωση, το βάρος των παιδιών μίας τάξης ενός δημοτικού σχολείου ή ο αριθμός των γιατρών σε μία περιοχή της χώρας μπορούν να θεωρηθούν πειράματα.

Τα πειράματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τα **καθοριστικά** και τα λεγόμενα πειράματα **τύχης**.

Καθοριστικά λέγονται τα πειράματα εκείνα τα οποία έχουν ένα δυνατό αποτέλεσμα, το οποίο είναι γνωστό εκ των προτέρων , και έτσι είναι φυσικό να μην παρουσιάζουν ενδιαφέρον.

Πειράματα τύχης λέγονται εκείνα τα πειράματα τα οποία έχουν περισσότερα του ενός δυνατά αποτελέσματα και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατόν να είναι γνωστό το αποτέλεσμα πριν από την εκτέλεση του πειράματος (το αποτέλεσμα θα ανήκει σε ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων γνωστό εκ των προτέρων) π.χ. όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα με δύο όψεις. Με τέτοια πειράματα ασχολείται η **Θεωρία Πιθανοτήτων**.

Το σύνολο **Ω** όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης καλείται **δειγματοχώρος** του πειράματος, ενώ κάθε ένα από τα (δυνατά αυτά) αποτελέσματα καλείται **απλό γεγονός ή δειγματοσημείο**.

Υπάρχουν δύο είδη δειγματοχώρων, εκείνοι για τους οποίους το Ω είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο και οι οποίοι ονομάζονται **διακριτοί** και εκείνοι για τους οποίους το Ω είναι μη-αριθμήσιμο σύνολο και οι οποίοι ονομάζονται **συνεχείς.**

Αφού λοιπόν σ' ένα πείραμα τύχης δεν είναι δυνατόν να προβλεφθεί εκ των προτέρων το ποιό ακριβώς αποτέλεσμα θα συμβεί, θα ήθελε κάποιος να ήταν σε θέση να αντιστοιχήσει σε κάθε ένα από αυτά τα (δυνατά) αποτελέσματα έναν <u>αριθμό</u>, τον οποίο θα καλούμε **πιθανότητα του απλού γεγονότος** και ο οποίος θα μας φανερώνει *το πόσο δυνατόν είναι να συμβεί το εν λόγω γεγονός*.

Ορισμός Εάν ο δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης είναι ίσος με:

$$\Omega = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$$

τότε αντιστοιχούμε σε κάθε ένα από αυτά τ' αποτελέσματα α_j, $j = 1,2\cdots,n$ έναν αριθμό, **μεταξύ 0 και 1**, p_j, $j = 1,2\cdots,n$ (και τέτοιον ώστε το $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$) ο οποίος μας φανερώνει το πόσο δυνατόν είναι να συμβεί το γεγονός $\{\alpha_j\}$, $j = 1,2\cdots,n$, συμβολικά:

$$P(\{a_j\}) = p_j \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

και τον οποίο όπως είπαμε καλούμε **πιθανότητα του απλού γεγονότος** $\{\alpha_j\}$.

Αν τώρα $\mathrm{A} \subseteq \Omega$, το Α καλείται **γεγονός,** και εάν

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots a_{i_k}\}$$

τότε είναι φανερό ότι η (κατάλληλη αντιστοίχηση) πιθανότητα του είναι ίση με:

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k}$$

Στην πράξη αν $\mathrm{A} \subseteq \Omega$, τότε το Α καλείται **γεγονός** στην περίπτωση κατά την οποία το Α ανήκει σε μία ιδιαίτερη κλάση $\mathfrak{I}$ υποσυνόλων του δειγματοχώρου Ω, η οποία καλείται **σ-άλγεβρα** και ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις ιδιότητες:

(α) $\varnothing \in \mathfrak{I}$

(β) Αν $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{I}$ τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A \in \mathfrak{I}$

(γ) Αν $A \in \mathfrak{I}$ τότε $A' \in \mathfrak{I}$, όπου A' το συμπλήρωμα του συνόλου Α ως προς το σύνολο Ω..

Ορισμός (**Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας κατά Kolmogorov**)

Γενικότερα η **πιθανότητα** (ή ένα **πιθανοθεωρητικό μέτρο** ή ένα **μέτρο πιθανότητας**) μπορεί να θεωρηθεί σαν μια συνολοσυνάρτηση:

$$P : \mathfrak{I} \to [0,\ 1]$$

όπου $\mathfrak{I}$ η κλάση (σ-άλγεβρα) των γεγονότων του δειγματοχώρου Ω, και η οποία συνολοσυνάρτηση ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $P(\Omega) = 1$ (το σύνολο Ω καλείται **βέβαιο** γεγονός)

(2) αν $\{A_i\}_{i \in N}$ γεγονότα (δηλαδή $\{A_i\}_{i \in N} \subset \mathfrak{I}$) τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$ τότε:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Εάν $A \subseteq \Omega$ είναι ένα γεγονός, τότε λέμε ότι το A **πραγματοποιείται** σε μία εκτέλεση του πειράματος, εάν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι στοιχείο του A.

Πολλές φορές ασχολούμαστε με πειράματα τύχης των οποίων ο δειγματοχώρος είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, σαν σ-άλγεβρα έχουμε το **δυναμοσύνολο** $\wp(\Omega)$ του Ω (σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του Ω), και τα δειγματοσημεία έχουν την ίδια δυνατότητα να συμβούν (**ομοιόμορφη πιθανότητα**) και ως εκ τούτου, εάν:

$$\Omega = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$$

τότε:

$$P(\{a_j\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\#(\Omega)} \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

όπου με #(Ω) συμβολίζουμε τον αριθμό των στοιχείων του συνόλου Ω (πληθάριθμος του Ω) . Εάν:

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots a_{i_k}\}$$

τότε:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{k}{n} = \frac{\#(\mathrm{A})}{\#(\Omega)}$$

Ο παραπάνω ορισμός της πιθανότητας καλείται **κλασσικός ορισμός** (κατά **Laplace**).

Ένας τρίτος ορισμός της πιθανότητας, είναι αυτός που ακολουθεί με την βοήθεια της σχετικής συχνότητας.

Ορισμός (**Η σχετική συχνότητα σαν πιθανότητα**)

Έστω ότι ένα πείραμα τύχης, του οποίου ο δειγματοχώρος μπορεί να είναι είτε διακριτός είτε συνεχής, επαναλαμβάνεται *n* φορές και έστω ότι κάθε μία από αυτές τις επαναλήψεις είναι ανεξάρτητη από όλες τις προηγούμενες της. Για ένα γεγονός A, έστω $f(A)$ *ο αριθμός των φορών που πραγματοποιείται το A* στις *n* επαναλήψεις (**συχνότητα** του A). Η ποσότητα:

$$\mathrm{f_A} = \frac{\mathrm{f(A)}}{\mathrm{n}}$$

καλείται **σχετική συχνότητα** του γεγονότος Α. Εάν θεωρήσουμε ότι το όριο αυτής της ποσότητας του *n* τείνοντος στο άπειρο υπάρχει , τότε ο αριθμός αυτός καλείται (στην πράξη) **πιθανότητα του Α**.

Η σχετική συχνότητα ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $f_A \geq 0$

(2) $f_\Omega = 1$

(3) Εάν $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \Rightarrow f_{A\cup \mathrm{B}} = f_A + f_\mathrm{B}$

Οι παρακάτω τύποι είναι εύκολο να αποδειχθούν και ισχύουν γενικά για όλα τα πειράματα τύχης.

(i) $P(\mathrm{A}') = 1 - P(\mathrm{A})$

(ii) Αν $\mathrm{A},\mathrm{B} \subseteq \Omega$ τότε

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

Για τρία γεγονότα Α,Β,Γ η ταυτότητα αυτή γίνεται:

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) + P(\Gamma) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \Gamma) - P(\mathrm{B} \cap \Gamma) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma)$$

Γενικότερα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα (**Poincare**). Η πιθανότητα να συμβεί ένα τουλάχιστον από τα *n* γεγονότα $A_1, A_2, \cdots, A_n$ δίνεται από την σχέση:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) +$$
$$\sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \; - \cdots (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

(iii) Αν $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ τότε:

(α) $P(\mathrm{A}) \leq P(\mathrm{B})$ και

(β) Η **διαφορά** του γεγονότος Α από το Β ορίζεται από $B - A = \{x \in B, x \notin A\}$ παριστάνει δε το γεγονός «συμβαίνει μόνο το γεγονός Β». Ισχύει:

$$P(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A})$$

(iv) $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') = P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

(v) Η **συμμετρική διαφορά** των A και B ορίζεται σαν:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

και παριστάνει το γεγονός «συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A,B».
Αποδεικνύεται ότι:

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

(vi) Από την (ii) είναι φανερό ότι $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leq P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$

Γενικότερα, αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$, είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω, τότε:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(\mathrm{A}_k) \qquad \text{(υποπροσθετική ιδιότητα)}$$

1.2 Ανεξαρτησία

Μία από τις βασικές έννοιες που συναντά κανείς στην θεωρία των Πιθανοτήτων είναι εκείνη της **ανεξαρτησίας** δύο γεγονότων.

Ορισμός Δύο γεγονότα A,B , του ίδιου πειράματος τύχης, ονομάζονται (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητα** αν η πραγματοποίηση του ενός δεν μας δίνει πληροφορίες για την πραγματοποίηση του άλλου ή ισοδύναμα αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

π.χ. εάν ρίξουμε ένα ζάρι δύο φορές, το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης είναι ανεξάρτητο από το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης.

Ορισμός Τρία γεγονότα A,B,Γ καλούνται (στοχαστικά) **ανεξάρτητα** αν ισχύουν και οι τέσσερες παρακάτω συνθήκες:

(i) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}) \cdot \mathrm{P}(\Gamma)$ και
(ii) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B})$
(iii) $\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) \cdot \mathrm{P}(\Gamma)$
(iv) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\Gamma)$

δηλαδή πέρα από το ότι τα A,B,Γ θα πρέπει να είναι ανά δύο ανεξάρτητα (συνθήκες (ii), (iii), (iv)) θα πρέπει να ισχύει και η (i).

Παρατήρηση

Αν ισχύουν μόνο οι συνθήκες (ii),(iii), (iv) αλλά **όχι** η (i) τότε τα γεγονότα λέγονται **ανεξάρτητα κατά ζευγάρια.**

Ο ορισμός της ανεξαρτησίας δύο γεγονότων γενικεύεται και στην περίπτωση n γεγονότων.

Ορισμός Τα γεγονότα $A_1, A_2, \cdots, A_n$ καλούνται (στοχαστικά) **ανεξάρτητα** αν ισχύουν (όλες) οι παρακάτω συνθήκες:

$$P(A_{r_1} \cap A_{r_2} \cap \cdots \cap A_{r_k}) = P(A_{r_1}) \cdot P(A_{r_2}) \cdots P(A_{r_k})$$

με $1 \le r_1 < r_2 < \cdots < r_k \le n$ & $2 \le k \le n$ (δηλαδή η παραπάνω συνθήκη ισχύει για οποιοδήποτε k από τα n γεγονότα).

(Αντι) Παράδειγμα

Τα γεγονότα $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$P(A_i) = p_i, \quad P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i) = p_1 \cdot p_2 \cdots p_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

Τα $A_1, A_2, \cdots, A_n$ δεν είναι ανεξάρτητα.

1.3 Δεσμευμένη πιθανότητα

Ας υποθέσουμε ότι Α,Β είναι δύο γεγονότα ενός πειράματος τύχης. Μερικές φορές, όταν εκτελούμε το εν λόγω πείραμα, η πληροφορία που παίρνουμε από την πραγματοποίηση του γεγονότος Α μπορεί να μας δίνει την δυνατότητα να επαναπροσδιορίσουμε την πιθανότητα του γεγονότος Β. Η «νέα» αυτή πιθανότητα του γεγονότος Β καλείται **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος Β δοθέντος του γεγονότος Α**, συμβολικά:

$$P(B / A)$$

Ορισμός Η δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος Β **δοθέντος** του γεγονότος Α ορίζεται σαν:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι η ποσότητα του δεύτερου μέλους έχει νόημα, δηλαδή $P(A) > 0$.

Η $P(A)$ ονομάζεται πιθανότητα εκ των **προτέρων** (a priori), ενώ η $P(B/A)$ πιθανότητα εκ των **υστέρων** (a posteriori).

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποιά η πιθανότητα το $1^{ο}$ ζάρι να είναι 5 δοθέντος ότι το άθροισμα των ζαριών είναι 6 ;

Λύση
Ορίζουμε τα γεγονότα:

A= «το $1^{ο}$ ζάρι να είναι 5»={5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6}
B= «το άθροισμα των ζαριών είναι 6»={1-5, 2-4, 3-3, 4-2, 5-1} τότε:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{36},\ \mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{5}{36} \quad \text{οπότε} \quad \mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{1}{5}$$

#

Παρατήρηση
Η δεσμευμένη πιθανότητα $\mathrm{P}(\cdot\,|\,\mathrm{B})$ ικανοποιεί τις τρεις βασικές ιδιότητες του ορισμού της πιθανότητας, δηλαδή αν Α,Γ είναι γεγονότα:

(i) $0\le \mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B})\le 1$

(ii) $\mathrm{P}(\Omega\,|\,\mathrm{B})=1$

(iii) $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\Gamma\,|\,\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B})+\mathrm{P}(\Gamma\,|\,\mathrm{B})$ αν $\mathrm{A}\cap\Gamma=\varnothing$

δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι η $\mathrm{P}(\cdot\,|\,\mathrm{B})$ είναι ένα <u>μέτρο</u> <u>πιθανότητας</u> <u>στο</u> <u>Β</u>. Θα ισχύουν λοιπόν ιδιότητες όπως:

$$\mathrm{P}(A'\,|\,\mathrm{B})=1-\mathrm{P}(A\,|\,\mathrm{B})$$

Πράγματι:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}'\,|\,\mathrm{B})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}')}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}-\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B})$$

Παρατήρηση Η δεσμευμένη πιθανότητα συνδέεται στενά και με την ανεξαρτησία. Έτσι εάν:

$$P(\mathrm{B}/\mathrm{A})=P(\mathrm{B})$$

δηλαδή η πληροφορία ότι συνέβη το Α δεν αλλάζει την πιθανότητα του Β, τότε τα γεγονότα Α και Β θα πρέπει να είναι ανεξάρτητα. Πράγματι:

$$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})}{P(\mathrm{A})}\Rightarrow P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})=P(\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{A})$$

δηλαδή τα Α,Β είναι ανεξάρτητα.

Ισχύει και τι αντίστροφο, δηλαδή εάν τα Α,Β είναι ανεξάρτητα τότε $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$ (ισοδύναμα $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$). Πράγματι: αφού τα Α,Β είναι ανεξάρτητα

$$P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{A}) \Rightarrow P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} = \frac{P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} = P(\mathrm{B})$$

Έτσι ένας ισοδύναμος ορισμός της ανεξαρτησίας δύο γεγονότων είναι ο εξής:

Ορισμός Δύο γεγονότα Α,Β ονομάζονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητα** αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$$

(ισοδύναμα $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$).

Παρατήρηση (ανεξαρτησία υπό συνθήκη)
Αν δύο γεγονότα A_1,A_2 είναι ανεξάρτητα και Β ένα τρίτο γεγονός, τότε τα γεγονότα δεν είναι (απαραίτητα) **ανεξάρτητα υπό συνθήκη** (δεν ισχύει δηλαδή, εν γένει, $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 | \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 | \mathrm{B}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 | \mathrm{B})$).

1.4 Θεώρημα πολλαπλασιαστικό , ολικής πιθανότητας , Bayes

Πολλές φορές ο υπολογισμός της πιθανότητας της <u>τομής</u> δύο γεγονότων, με την χρήση του ορισμού της (ομοιόμορφης) πιθανότητας είναι αρκετά δύσκολος. Ο υπολογισμός γίνεται απλούστερος παίρνοντας την δεσμευμένη πιθανότητα του ενός από τα δύο γεγονότα αναφορικά με το άλλο.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν, μόνο τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα (Πολλαπλασιαστικό) Για τα γεγονότα Α,Β ισχύει:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B} | \mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A})$$

(ισοδύναμα $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} | \mathrm{B}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B})$).

Παράδειγμα
Ένα δοχείο περιέχει 7 μαύρες μπάλες και 5 άσπρες. Επιλέγουμε δύο μπάλες τυχαία , χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο μπάλες να είναι μαύρες;

Λύση
1^{ος} τρόπος: Χρησιμοποιώντας συνδυασμούς έχουμε:

$$\mathrm{P}\{\text{δυό μαύρες μπάλες}\} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{7!}{2!\,5!}}{\frac{12!}{2!\,10!}} = \frac{42}{105}$$

2ος τρόπος: Εάν ορίσουμε τα γεγονότα

M_j = «η j μπάλα που επιλέγουμε είναι μαύρη» j=1,2

τότε από το πολλαπλασιαστικό θεώρημα, έχουμε:

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{M}_2 \mid \mathrm{M}_1)\,\mathrm{P}(\mathrm{M}_1) = \frac{6}{11}\frac{7}{12} = \frac{42}{105}$$

#

Το παραπάνω (πολλαπλασιαστικό) θεώρημα γενικεύεται και σε περισσότερα από δύο γεγονότα. Η απόδειξή του και πάλι έπεται εύκολα από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας.

Θεώρημα (Πολλαπλασιαστικό) Για τα γεγονότα $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \cdots, \mathrm{E}_n$ ισχύει:

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{E}_n) = \mathrm{P}(\mathrm{E}_n \mid \mathrm{E}_{n-1} \cap \mathrm{E}_{n-2} \cap \cdots \mathrm{E}_1) \cdots \mathrm{P}(\mathrm{E}_3 \mid \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_1) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{E}_2 \mid \mathrm{E}_1) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{E}_1)$$

Στις δεσμευμένες πιθανότητες ισχύει επίσης το παρακάτω βασικό θεώρημα.

Θεώρημα (Bayes) Εάν Α,Β είναι δύο γεγονότα, του ίδιου δειγματοχώρου, και $P(\mathrm{B}) > 0$ τότε:

$$P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{B})}$$

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται και σε περισσότερα από δύο γεγονότα, ως εξής:

Αν $A_1, A_2, ..., A_n$, Β είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω, τέτοια ώστε:

(α) $\Omega = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \ldots \cup \mathrm{A}_n$

(β) $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1,2,\ldots,n$

(γεγονότα που ικανοποιούν τις ιδιότητες (α) και (β) λέμε ότι αποτελούν **διαμέριση** *του δειγματοχώρου Ω*) τότε:

Θεώρημα (Ολικής Πιθανότητας) Αν $A_1, A_2, ..., A_n$, B είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω, τα δε $A_1, A_2, ..., A_n$ αποτελούν διαμέριση του δειγματοχώρου Ω, τότε:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B \mid A_k)\ P(A_k)$$

Ακόμα, το θεώρημα Bayes στην γενικότερη αυτή περίπτωση γίνεται.

Θεώρημα (Bayes) Αν $A_1, A_2, ..., A_n$, B είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω, τα δε $A_1, A_2, ..., A_n$ αποτελούν διαμέριση του δειγματοχώρου Ω, τότε ισχύει η σχέση:

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B / A_j) \cdot P(A_j)}{P(B / A_1)P(A_1) + P(B / A_2)P(A_2) + \ldots + P(B / A_n)P(A_n)}$$

Παράδειγμα
Έστω ότι σε μία συγκεκριμένη διαδρομή η πιθανότητα ένα οποιοδήποτε φανάρι της τροχαίας να είναι του ίδιου χρώματος με το προηγούμενο είναι p. Αν το πρώτο φανάρι είναι πράσινο με πιθανότητα α και κόκκινο με πιθανότητα 1-α να υπολογιστεί (α) η πιθανότητα το δεύτερο φανάρι να είναι πράσινο και (β) η πιθανότητα το τρίτο φανάρι να είναι πράσινο.

Λύση
Ορίζουμε τα γεγονότα**:**

Π_j = «το j φανάρι της διαδρομής είναι πράσινο» με j=1,2,..., τότε $P(\Pi_1)=\alpha$.

(α) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας, έχουμε :

$$P(\Pi_2) = P(\Pi_2 \cap \Pi_1) + P(\Pi_2 \cap \Pi_1') = P(\Pi_2 \mid \Pi_1)\ P(\Pi_1) + P(\Pi_2 \mid \Pi_1')\ P(\Pi_1') =$$
$$= p\alpha + (1-p)(1-\alpha)$$

(β) Και πάλι από το θεώρημα ολικής πιθανότητας, έχουμε :

$$P(\Pi_3) = P(\Pi_3 \cap \Pi_2) + P(\Pi_3 \cap \Pi_2') = P(\Pi_3 \mid \Pi_2)\ P(\Pi_2) + P(\Pi_3 \mid \Pi_2')\ P(\Pi_2') =$$
$$= p\{p\alpha + (1-p)(1-\alpha)\} + (1-p)\{1 - p\alpha - (1-p)(1-\alpha)\} = \alpha + 2(2\alpha + 1)p(1-p)$$

#

Παράδειγμα
Σε 100 άτομα ενός χωριού τα 40 έχουν γρίπη. Ο γιατρός κάνει σωστή διάγνωση στα 92% των ατόμων που έχουν γρίπη και λάθος διάγνωση στα 2% των ατόμων που δεν έχουν γρίπη και λέει ότι έχουν γρίπη. Ποιά η πιθανότητα, αν πάρουμε τυχαία ένα

άτομο, ο γιατρός να διαγνώσει γρίπη; Αν ο γιατρός διαγνώσει γρίπη, ποιά η πιθανότητα το άτομο όντως να πάσχει από γρίπη;

Λύση
Ορίζουμε τα γεγονότα:

Γ= «το άτομο πάσχει από γρίπη»

Θ= «η διάγνωση του γιατρού είναι γρίπη»

Τότε, η πιθανότητα ο γιατρός να διαγνώσει γρίπη:

$$\mathrm{P}(\Theta)=\mathrm{P}(\Theta\,|\,\Gamma)\,\mathrm{P}(\Gamma)+\mathrm{P}(\Theta\,|\,\Gamma')\mathrm{P}(\Gamma')=0{,}92\cdot 0{,}4+0{,}02\cdot 0{,}6=0{,}380$$

Αν ο γιατρός διαγνώσει γρίπη, τότε η πιθανότητα το άτομο όντως να πάσχει από γρίπη

$$\mathrm{P}(\Gamma\,|\,\Theta)=\frac{\mathrm{P}(\Theta\,|\,\Gamma)\mathrm{P}(\Gamma)}{\mathrm{P}(\Theta)}=\frac{0{,}368}{0{,}38}=0{,}968$$

#

1.5 Τυχαίες μεταβλητές

Πολλές φορές σε ένα πείραμα τύχης δεν μας ενδιαφέρει ο δειγματοχώρος του (ο οποίος όπως είδαμε μπορεί να είναι και μη-αριθμητικό σύνολο), αλλά ένα σύνολο το οποίο είναι αποτέλεσμα μιάς απεικόνισης των στοιχείων του δειγματοχώρου στους πραγματικούς αριθμούς. Έτσι λοιπόν έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός Μία **τυχαία μεταβλητή X** (χάριν συντομίας τ.μ.), είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού έναν δειγματοχώρο Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών (δηλαδή η $X:\Omega\to\mathbb{R}$).

Παρατήρηση Αν θεωρήσουμε μιά συνάρτηση X με πεδίο ορισμού έναν δειγματοχώρο Ω (στον οποίο έχει οριστεί μιά σ-άλγεβρα γεγονότων $\Im$) και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε η εν λόγω συνάρτηση θεωρείται ότι είναι μιά **τυχαία μεταβλητή** εάν είναι μιά $\Im$-**μετρήσιμη** συνάρτηση, δηλαδή ικανοποιεί την συνθήκη: για κάθε πραγματικό αριθμό x το σύνολο:

$$X^{-1}((-\infty,x])=\{\omega\ /\ \mathrm{X}(\omega)\le x\}$$

είναι ένα γεγονός του Ω αναφορικά με την σ-άλγεβρα $\Im$ (δηλαδή $X^{-1}((-\infty,x])\in\Im$).

Εάν στον δειγματοχώρο Ω, μαζί με την σ-άλγεβρα του $\Im$, ορίζεται ένα «μέτρο» πιθανότητας P και μιά τυχαία μεταβλητή *X*, τότε με την βοήθεια της X ορίζουμε στο $\mathbb{R}$ (στον οποίο χώρο είναι ορισμένη μιά σ-άλγεβρα ***B*** καλούμενη **σ-άλγεβρα του Borel**) ένα μέτρο πιθανότητας ***L,*** ως εξής:

$$\boldsymbol{L}(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \,/\, X(\omega) \in A\})$$

για όλα τα A γεγονότα του $\mathbb{R}$. Το μέτρο πιθανότητας $\boldsymbol{L}$ καλείται **νόμος** ή **κατανομή** της τ.μ. X.

Η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$F(x) = L((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\})$$

καλείται **συνάρτηση κατανομής** της τ.μ. X. (συνήθως γράφουμε F_X).

Εάν δύο τ.μ. X και Y έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής, δηλαδή $F_X = F_Y$, τότε λέμε ότι οι τ.μ. είναι **ισόνομες** ή **ταυτοτικά κατανεμημένες**.

Παρατήρηση Είναι εύκολο να δει κανείς ότι, για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha<\beta$:

(α) $P\{\alpha<X \le \beta\}=P\{\{-\infty<X \le \beta\}-\{-\infty<X \le \alpha\}\}=F_X(\beta)-F_X(\alpha), \ \alpha \le \beta$

(β) $P\{\alpha \le X \le \beta\} = F_X(\beta)-F_X(\alpha^-)$

(γ) $P\{\alpha<X<\beta\} = F_X(\beta^-)-F_X(\alpha)$

(δ) $P\{\alpha \le X<\beta\} = F_X(\beta^-)-F_X(\alpha^-)$

1.6 Διακριτές, συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

(Α) Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Μιά τ.μ. X καλείται **διακριτή** αν το πλήθος των τιμών της είναι ένα πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο σύνολο και κάθε μιά από αυτές τις τιμές έχει θετική πιθανότητα. Δηλαδή αν η X είναι μιά διακριτή τ.μ. και παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (ας υποθέσουμε ακόμα ότι: $x_1 < x_2 < \cdots$) τότε οι πιθανότητες

$$P(\{X = x_k\}) = P(\{\omega \;\;/\;\; X(\omega) = x_k\}) = p_k > 0, \quad k = 1,\ 2,\ \cdots .$$

Είναι φανερό ότι: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(\{X=x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

Ορισμός Η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$f_X(x)=P\{X=x\}=\begin{cases} p_k & x=x_k, \ \ k=1,\ 2,\cdots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

καλείται (συνάρτηση) **πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. X . Είναι φανερό ότι η πυκνότητα πιθανότητας μιάς τ.μ. ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $f_X(x) \geq 0$

(β) $\sum_{n=1}^{\infty} f_X(x_n) = 1$

Η πυκνότητα πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής μιάς τ.μ. συνδέονται ως εξής:

$$F_X(x)=\sum_{x_k \leq x} f_X(x_k) \qquad \& \qquad f_X(x_k)=F_X(x_k)-F_X(x_{k-1})$$

Αναφέρουμε παρακάτω ορισμένες πυκνότητες πιθανότητας (διακριτών τ.μ.), οι οποίες εμφανίζονται συνήθως στην πράξη.

(α) **Σταθερή τ.μ** .Αν η τ.μ. παίρνει μιά μόνο τιμή, έστω την a , τότε η π.π. της είναι ίση με

$$f(a)=P\{X=a\}=1$$

η δε συνάρτηση κατανομής της είναι ίση με: $F_X(x)=\begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$

(β) **Ομοιόμορφη διακριτή κατανομή**

Αν η τ.μ X παίρνει κάθε μιά από τις τιμές 1,2,3,...,n με πιθανότητα $\frac{1}{n}$ δηλαδή η π.π. της είναι ίση με

$$f(k)=P\{X=k\}=\frac{1}{n}, \qquad k=1,2,...,n$$

τότε λέμε ότι ακολουθεί την **ομοιόμορφη διακριτή κατανομή**.

(γ) **Κατανομή Bernoulli**

Αν μιά τ.μ. X παίρνει δύο τιμές 1 και 0 με αντίστοιχες πιθανότητες $p, 1\text{-}p$, τότε λέμε ότι ακολουθεί την **κατανομή Bernoulli** με παράμετρο **p.** Η συνάρτηση πιθανότητας μιάς τέτοιας τ.μ. είναι

$$f_X(k)=\begin{cases} 1\text{-}p & k=0 \\ p & k=1 \end{cases}$$

Μιά τ.μ. **Bernoulli** περιγράφει ένα πείραμα τύχης με δύο δυνατά αποτελέσματα, το λεγόμενο **διωνυμικό π.τ.**, τα οποία καλούμε *επιτυχία* και *αποτυχία* αντίστοιχα (η επιτυχία αντιστοιχεί στο 1 και η αποτυχία στο 0).

(δ) **Διωνυμική κατανομή**

Μιά τ.μ. X ακολουθεί την **διωνυμική κατανομή** με παραμέτρους **n** και **p** (συμβολικά $X \approx B(n;p)$), εάν η πυκνότητα πιθανότητας της δίνεται από την:

$$f_X(k)=P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \quad ,k=0,1,2,\cdots,n$$

Παρατήρηση
Έστω ότι έχουμε ένα διωνυμικό πείραμα τύχης με πιθανότητα επιτυχίας p και το οποίο επαναλαμβάνουμε κάτω από τις ίδιες θεωρητικά συνθήκες **n** φορές, οι δε επαναλήψεις είναι <u>ανεξάρτητες</u> μεταξύ τους και η πιθανότητα επιτυχίας **p** <u>παραμένει σταθερή</u>. Εάν Χ παριστάνει τον **αριθμό των επιτυχιών στις n επαναλήψεις** του διωνυμικού π.τ.,τότε η Χ ακολουθεί την **διωνυμική κατανομή.**

(ε) **Κατανομή Poisson**

Η τ.μ. X ακολουθεί την **κατανομή Poisson** με παράμετρο **λ** με $\lambda > 0$ (συμβ. $X \approx P(\lambda)$) , εάν η πυκνότητα πιθανότητας της ισούται με:

$$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,...$$

Παρατήρηση
Αν Χ είναι μιά τ.μ. (**απαρίθμησης**) που μετρά ποσότητες όπως (α) ο αριθμός των ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μιά συγκεκριμένη διασταύρωση κατά την διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος (β) ο αριθμός των πελατών που φτάνουν σ'ένα σημείο εξυπηρέτησης (π.χ. πελάτες στο ταμείο μιάς τράπεζας) (γ) ο αριθμός των αεροπλάνων που φτάνουν σ' ένα μεγάλο αεροδρόμιο (δ) ο αριθμός των τηλεφωνημάτων που φτάνουν σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο τότε η τ.μ. X ακολουθεί την **κατανομή Poisson**

(γ) **Γεωμετρική κατανομή**

Μιά τ.μ. Χ ακολουθεί την **γεωμετρική κατανομή** με παράμετρο **p** (με $0< p <1$), εάν η πυκνότητα πιθανότητας της ισούται με:

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, \quad k=1,2,\cdots$$

Παρατήρηση
Έστω ότι έχουμε ένα διωνυμικό πείραμα με πιθανότητα επιτυχίας **p** , και έστω ότι επαναλαμβάνουμε το εν λόγω πείραμα μέχρι να έχουμε την 1η επιτυχία. Αν X η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό **των επαναλήψεων** του πειράματος **μέχρι την 1η επιτυχία,** τότε η X ακολουθεί την **γεωμετρική κατανομή**.

(Β) Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Αν το πλήθος των τιμών μιάς τ.μ. X είναι ένα μη-αριθμήσιμο σύνολο S, τέτοιο ώστε $P\{X = x\} = 0, \ \forall x \in S$ τότε η τ.μ. X καλείται **συνεχής**.

Η **συνάρτηση κατανομής** μιάς συνεχούς τ.μ. είναι μιά συνεχής συνάρτηση. Ακόμα, αν δοθεί η σ.κ. μιάς συνεχούς τ.μ. πολλές φορές υπάρχει μιά πραγματική μη αρνητική συνάρτηση $f_X(x)$ τέτοια ώστε:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

Η $f_X(x)$ καλείται **πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ.

Η συνάρτηση κατανομής σαν συνεχής συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, εκτός ίσως από ένα αριθμήσιμο πλήθος σημείων . Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Αναφέρουμε παρακάτω ορισμένες πυκνότητες πιθανότητας (συνεχών τ.μ.), οι οποίες εμφανίζονται συνήθως στην πράξη.

(α) **Ομοιόμορφη κατανομή**

Μιά τ.μ. X ακολουθεί: την **ομοιόμορφη κατανομή** με παραμέτρους **α** και **β** (συμβολικά $X \approx U(\alpha, \beta)$), εάν η πυκνότητα πιθανότητας της ορίζεται από την:

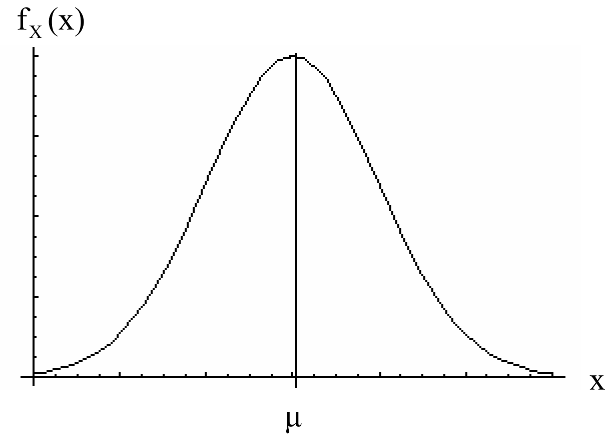
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & x \in [\alpha, \beta],\ \alpha < \beta \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

(β) **Κανονική κατανομή**

Μιά τ.μ. X ακολουθεί την **κανονική κατανομή** με παραμέτρους **μ (μέση τιμή)** και (**τυπική απόκλιση**) **σ** (συμβολικά $X \approx N(\mu, \sigma^2)$), εάν η πυκνότητα πιθανότητας της είναι ίση με:

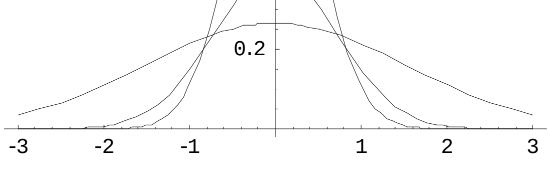
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , x \in \mathbb{R}, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0$$

Η γραφική παράσταση της $f_X(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το γράφημα είναι <u>συμμετρικό</u> γύρω από την ευθεία x = μ.



Παρατήρηση
Εάν **μ=0** και **σ=1,** τότε λέμε ότι η τ.μ. Χ ακολουθεί την **<u>τυπική</u> κανονική κατανομή,** $X \approx N(0, 1)$.

Η γραφική παράσταση της π.π. $f_X(x)$ μιάς τ.μ. $X \approx N(0, \sigma^2)$ για διάφορες τιμές του σ, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



σ=1,5 σ=1 σ=0,5

Η παρακάτω πρόταση βοηθά στον υπολογισμό πιθανοτήτων με την βοήθεια της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Πρόταση Αν η τ.μ. $X \approx N(\mu,\sigma^2)$ τότε η τ.μ. $\mathrm{Y}=\dfrac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} \approx \mathrm{N}(0,1)$.

(γ) **Αρνητική εκθετική κατανομή**

Μιά τ.μ. X ακολουθεί την **αρνητική εκθετική** με παράμετρο **λ** , με $\lambda > 0$, εάν η πυκνότητα πιθανότητας της είναι ίση με:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & x. > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

(δ) **Γάμα κατανομή**

Μιά τ.μ. X ακολουθεί την **γάμα** (συμβ. $\mathrm{X} \approx \mathrm{G}(\alpha,\beta)$) με παραμέτρους **α** και **β** με $\alpha, \beta>0$ εάν η πυκνότητα πιθανότητας της ορίζεται από την σχέση:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^a} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

όπου η συνάρτηση: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt$ καλείται **συνάρτηση γάμα**. Ισχύει :

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ απ' όπου παίρνουμε $\Gamma(n) = (n-1)!$, για n φυσικό.

Η γραφική παράσταση της π.π. $\mathrm{f_X(x)}$, μιάς τ.μ. $\mathrm{X} \approx \mathrm{G}(\alpha,1)$ (δηλ. β=1), για διάφορες τιμές του α, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

α=4 α=6 α=1

Τέλος, μιά χρήσιμη τιμή της συνάρτησης Γ(α) είναι η: $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ απ' όπου προκύπτει η σχέση $\Gamma(n+\frac{1}{2})=(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})...\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Παρατήρηση

(α) Η αρνητική εκθετική κατανομή είναι ειδική περίπτωση της γάμα κατανομής για **α**=1 και **β**=1/λ.

(β) Στην περίπτωση που το **α**=1/2 και **β**=2, τότε η γάμα κατανομή ονομάζεται **χι-τετράγωνο με έναν βαθμό ελευθερίας** (συμβολικά $\aleph_1^2$). Η π.π. σ' αυτή την περίπτωση είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})\, 2^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad x>0$$

Θεώρημα (**μετασχηματισμός** μιάς τυχαίας μεταβλητής)

Έστω η τ.μ. X με συνεχή (εκτός, ενδεχομένως, πεπερασμένου πλήθους σημείων) π.π. $f_X(x)$, η οποία είναι θετική για $x \in S$ και 0 για τα υπόλοιπα. Έστω $g: S \to T$ μιά αμφιμονοσήμαντη και επί συνάρτηση. Υποθέτουμε ακόμα ότι η (υπάρχουσα) αντί-στροφη συνάρτηση $g^{-1}: T \to S$ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι συνεχής. Εάν ορίσουμε την τ.μ. $Y = g(X)$, τότε η πυκνότητα πιθανότητας της δίνεται από την σχέση:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \cdot \left| \dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| & y \in T \\ 0 & y \in T' \end{cases}$$

1.7 Αριθμητικά χαρακτηριστικά μιάς τυχαίας μεταβλητής

Έστω X μιά τ.μ. και έστω ότι η πυκνότητα πιθανότητας της $f_X(x)$ είναι γνωστή. Τότε, τουλάχιστον θεωρητικά, μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις πιθανότητες οι οποίες μας ενδιαφέρουν. Από μαθηματική άποψη όμως, υπάρχουν πολλές φορές δυσκολίες που κάνουν αυτούς τους υπολογισμούς αδύνατους. Γι΄ αυτό, δίνουμε παρακάτω ορισμένους αριθμούς που χαρακτηρίζουν την τ.μ. X.

(α) Μέση τιμή

Ορισμός Η **μέση τιμή** ή **μαθηματική ελπίδα** μιάς τ.μ. X με πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ είναι ο αριθμός:

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_X(x_n) & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

με την προϋπόθεση ότι τόσο το άθροισμα όσο και το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένα.

Η μέση τιμή ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

Πρόταση
Αν X,Y είναι τ.μ. με πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε
(1) E(X+Y)=E(X)+E(Y)
(2) E(cX)=cE(X) σταθερά
(3) $|EX| \le E|X|$

Παρατήρηση
(α) Η μέση τιμή είναι δηλαδή μιά γενίκευση του μέσου όρου ενός (πεπερασμένου) συνόλου αριθμών. Στην πραγματικότητα είναι ένας ο σταθμισμένος (ζυγισμένος) μέσος όρος των σημείων $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ με βάρη $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ αντίστοιχα.

(β) **Φυσική ερμηνεία** (διακριτή περίπτωση) Αν θεωρήσουμε ότι τα $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ είναι σημεία μιάς ευθείας και στο σημείο x_k είναι κατανεμημένη μιά μάζα $f(x_k)$, τότε η μέση τιμή $\mu_X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_X(x_n)$ είναι το <u>κέντρο</u> <u>βάρους</u> της (μοναδιαίας) αυτής μάζας.

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της μέσης τιμής στην περίπτωση τ.μ που παίρνει ακέραιες τιμές.

<u>**Πρόταση**</u>
Αν X μη-αρνητική, διακριτή, τ.μ. που παίρνει ακέραιες τιμές τότε:

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X \ge n\}$$

Γενικότερα έχουμε τους παρακάτω ορισμούς.

(β) Ροπές

Εάν g είναι μιά πραγματική (μετρήσιμη) συνάρτηση, τότε η συνάρτηση Y=g(X) είναι μιά τ.μ. Η μέση τιμή της Y, όταν υπάρχει, (αποδεικνύεται εύκολα ότι) υπολογίζεται από την σχέση:

$$E(Y)=E[g(X)]=\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)f_X(x_n) & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Ορισμός (α) Εάν g(x)=$\mathbf{x^r}$, τότε η μέση τιμή της Y=g(X) καλείται **ροπή r-τάξεως** της τ.μ X., δηλαδή

$$\mu_r=E\left(X^r\right)=\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^r f_X(x_n) & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r\,f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

(β) Εάν g(x)=$\mathbf{(x-E(X))^r}$, τότε η μέση τιμή της Y=g(X) καλείται **κεντρική ροπή r-τάξεως** της τ.μ X. δηλαδή

$$E\left(X-\mu\right)^r=\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (x_n-\mu)^r\,f_X(x_n) & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r\,f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η ροπή πρώτης τάξεως μιάς τ.μ είναι η μέση της τιμή, ενώ η κεντρική ροπή πρώτης τάξης είναι πάντα μηδέν.

(γ) Εάν $g_r(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)$ τότε η μέση τιμή της Y=g(X) καλείται **παραγοντική ροπή r-τάξεως** της τ.μ X. δηλαδή

$$\mu_{(r)}=E\left(X(X-1)...(X-r+1)\right)=\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n(x_n-1)...(x_n-r+1)\,f_X(x_n) & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(x-1)...(x-r+1)\,f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η *κεντρική ροπή δεύτερης τάξης* μιάς τ.μ., η οποία καλείται **διασπορά** της τ.μ (συμβ. με $\sigma^2(X)$ ή V(X)) . Δηλαδή η **διασπορά** μιάς τ.μ. *X* δίνεται από την σχέση:

$$\sigma^2(X)= V(X)=E[(X-(EX))^2]=E(X^2)-(EX)^2$$

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς, $\sigma = \sqrt{V(X)}$, καλείται **τυπική απόκλιση** της τ.μ.

Παρατήρηση
Πολλές φορές η διασπορά μιάς τ.μ. υπολογίζεται από την σχέση

$$\sigma^2(X)=E[X(X-1)]-EX+(EX)^2$$

(γ) **Ροπογεννήτρια (συνάρτηση) μιάς τ.μ. X**

Ορισμός Η **Ροπογεννήτρια** (συνάρτηση) μιάς τ.μ. X ορίζεται από την σχέση

$$M_X(t)=Ee^{tX}$$

για όλα τα t για τα οποία η μέση τιμή (του δεύτερου μέλους) υπάρχει.

Εάν η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ μίας τ.μ. X υπάρχει για όλα τα σημεία ενός διαστήματος της μορφής $(-a,a)$, $a>0$, τότε μπορούμε να γράψουμε, για τα σημεία του διαστήματος σύγκλισης

$$M_X(t)=Ee^{tX}=E\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}X^r=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}EX^r$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι η r τάξης παράγωγος της $M_X(t)$ στο σημείο t=0, είναι η r-τάξης ροπή της τ.μ. X, δηλαδή

$$EX^r=M_X^{(r)}(0)$$

γεγονός που εξηγεί το όνομα ροπογεννήτρια της $M_X(t)$.

Η **από κοινού ροπογεννήτρια των τ.μ. X και Y** ορίζεται από την σχέση

$$M_{X,Y}(s,t)=Ee^{sX+tY}$$

1.8. Ανισότητες

Η παρακάτω ανισότητα δίνει ένα άνω φράγμα μιάς ενδιαφέρουσας πιθανότητας με την βοήθεια της μέσης τιμής και της διασποράς μιάς τ.μ.

Πρόταση (**Ανισότητα του Chebyshev**)
Έστω *X* μιά τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή *EX* και διασπορά $\sigma^2(X)$. Τότε για οιονδήποτε θετικό αριθμό *c*, έχουμε:

$$P\{\,|X-EX|\geq c\}\leq\frac{\sigma^2(X)}{c^2}$$

1.9. Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

(α) Διακριτές τ.μ.

Εάν X_1, X_2 είναι δύο διακριτές τ.μ. οι οποίες ορίζονται στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο Ω, και οι οποίες παίρνουν τιμές σ' ένα σύνολο *S*.

Ορισμός Η **από κοινού συνάρτηση κατανομής (α.κ.σ.κ.)** των τ.μ. X_1, X_2 ορίζεται από την σχέση:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)=\mathrm{P}\{\mathrm{X}_1 \le \mathrm{x}_1,\ \mathrm{X}_2 \le \mathrm{x}_2\}$$

Η σ.κ. $\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1}(\mathrm{x})$ καλείται **περιθωριακή συνάρτηση κατανομής της** $\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2}$.

Εάν ορίσουμε μιά συνάρτηση $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ στο *SxS*, από τον τύπο:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=P\{X_1=x_1,\ X_2=x_2\}$$

τότε η συνάρτηση αυτή καλείται **από κοινού πυκνότητα πιθανότητας** των τ.μ. X_1, X_2, έχει δε τις παρακάτω ιδιότητες:

(a) $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\ge 0 \qquad \forall (x_1,x_2)\in SxS$

(β) $P\{X_1\in B_1, X_2\in B_2\}=\sum_{X_1\in B_1}\sum_{X_2\in B_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \qquad \forall B_1,B_2\subset S$ γεγονότα

και ιδιαίτερα:

$$\sum_{x_1\in S}\sum_{x_2\in S} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=1$$

Παρατήρηση

(1) Η συνάρτηση $f_{X_1}(x)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$f_{X_1}(x_1)=\sum_{x_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

τότε η είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ X_1. Η π.π. $f_{X_1}(x)$, (αντ. $f_{X_2}(x)$) καλείται **περιθωριακή πυκνότητα πιθανότητας** της $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

(2) Η α.κ.σ.κ $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ συνδέεται με την α.κ.π.π. $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ με την σχέση:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=P\{X_1\le x_1,\ X_2\le x_2\}=\sum_{t_1\le x_1}\ \sum_{t_2\le x_2} f_{X_1,X_2}(t_1,t_2)$$

η δε α.κ.π.π. $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ συνδέεται με την α.κ.σ.κ $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ με την σχέση:

$$f_{X_1,X_2}(x_m,y_n)=F_{X_1,X_2}(x_m,y_n)-F_{X_1,X_2}(x_m-,y_n)-F_{X_1,X_2}(x_m,y_n-)-F_{X_1,X_2}(x_m-,y_n-)$$

(β) Συνεχείς τ.μ.

Έστω τώρα X_1, X_2 δύο <u>συνεχείς</u> τ.μ. οι οποίες ορίζονται στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο Ω, και οι οποίες παίρνουν τιμές σ' ένα σύνολο *S*.

Ορισμός Εάν υπάρχει μιά συνάρτηση $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ στο SxS τ.ω:

(a) $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \geq 0 \qquad \forall (x_1,x_2) \in SxS$

(β) $P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\} = \int_{B_1}\int_{B_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \qquad \forall B_1, B_2 \subset S$

(γεγονότα) και ιδιαίτερα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1$$

τότε η συνάρτηση $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ καλείται **από κοινού πυκνότητα πιθανότητας** των τ.μ. X_1, X_2.

Η **από κοινού συνάρτηση κατανομής (α.κ.σ.κ.)** των τ.μ. X_1, X_2 ορίζεται πάλι από την σχέση:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=P\{X_1 \leq x_1,\ X_2 \leq x_2\}$$

Είναι φανερό ότι:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2$$

και εάν η $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ είναι συνεχής στο σημείο (x_1,x_2), τότε:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

Παρατήρηση
Η συνάρτηση $f_{X_1}(x)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_2$$

είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ X_1.Η π.π. $f_{X_1}(x)$ (αντ. $f_{X_2}(x)$) καλείται **περιθωριακή πυκνότητα πιθανότητας** της $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

1.10 Στοχαστική Ανεξαρτησία τ.μ.

Ορισμός Οι τ.μ X_1, X_2 καλούνται (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητες** εάν:

$$P\{X_1 \in B_1, \quad X_2 \in B_2\} = P\{X_1 \in B_1\} \quad P\{X_2 \in B_2\}$$

για οποιαδήποτε υποσύνολα (γεγονότα) B_1, B_2 των πραγματικών αριθμών.

Το παρακάτω θεώρημα δίνει ισοδύναμους ορισμούς της ανεξαρτησίας δύο τ.μ.

Θεώρημα Οι τ.μ X_1, X_2 είναι (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητες** εάν και μόνον εάν ισχύει μιά από τις παρακάτω σχέσεις:

(α) $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$
(β) $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$
(γ) $M_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = M_{X_1}(t_1) M_{X_2}(t_2)$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού της ανεξαρτησίας δύο τυχαίων μεταβλητών δίνονται από την παρακάτω πρόταση

Πρόταση Εάν οι τ.μ. X_1, X_2 είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες, τότε:

(1) $E[g_1(X_1) g_2(X_2)] = E[g_1(X_1)] E[g_2(X_2)]$

(2) $M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$

(3) Εάν $Y_1 = g_1(X_1), Y_2 = g_2(X_2)$ τότε οι τ.μ. Y_1, Y_2 είναι και αυτές ανεξάρτητες.

1.11 Δεσμευμένες κατανομές

Εάν για κάθε x_2 τέτοιο ώστε $f_{X_2}(x_2)$>0 ορίσουμε την συνάρτηση $f_{X_1,X_2}(\cdot \mid x_2)$ από την σχέση:

$$f_{X_1,X_2}(x_1\,|x_2)=\frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}=P\{X_1=x_1\mid X_2=x_2\}$$

τότε η εν λόγω συνάρτηση καλείται **δεσμευμένη** (ή **υπό συνθήκες**) **πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. X_1 **δοθέντος** ότι $X_2=x_2$**.**

Ροπές

Εάν X_1,X_2 δυό τ.μ. και g(x,y) μια πραγματική συνάρτηση, τότε η $\mathrm{X}=\mathrm{g}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)$ είναι μία τ.μ.

Πρόταση Η **μέση τιμή** της τ.μ. $\mathrm{X}=\mathrm{g}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)$ αποδεικνύεται εύκολα ότι δίνεται από την σχέση

$$\mathrm{EX}=\mathrm{Eg}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)=\begin{cases}\sum\limits_{\mathrm{x}_1}\sum\limits_{\mathrm{x}_2}\mathrm{g}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\mathrm{f}_{\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) & \mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2\ \text{διακριτές}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{g}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\mathrm{f}_{\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\mathrm{dx}_1\mathrm{dx}_2 & \mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2\ \text{συνεχείς}\end{cases}$$

με την προϋπόθεση ότι οι ποσότητες του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένες.

Πρόταση Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, με την προϋπόθεση ότι οι (αντίστοιχες) ποσότητες έχουν νόημα

(α) Εάν α,β σταθερές και g(x,y), h(x,y) τότε:

$$\mathrm{E}[\alpha\cdot\mathrm{g}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)+\beta\cdot\mathrm{h}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)]=\alpha\cdot\mathrm{E}[\mathrm{g}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)]+\beta\cdot\mathrm{E}[\mathrm{h}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)]$$

(β) Αν οι τ.μ. X_1,X_2 είναι <u>ανεξάρτητες</u> και g(x), h(x) πραγματικές συναρτήσεις (πραγματικής μεταβλητής), τότε:

$$\mathrm{E}[\mathrm{g}(\mathrm{X}_1)\cdot\mathrm{h}(\mathrm{X}_2)]=\mathrm{E}[\mathrm{g}(\mathrm{X}_1)]\cdot\mathrm{E}[\mathrm{h}(\mathrm{X}_2)]$$

Ιδιαίτερα, αν X_1,X_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ., τότε:

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_1\cdot\mathrm{X}_2]=\mathrm{E}[\mathrm{X}_1]\cdot\mathrm{E}[\mathrm{X}_2]$$

(γ) (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) $\left(\mathrm{E}[\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2]\right)^2\le\mathrm{E}[\mathrm{X}_1^2]\cdot\mathrm{E}[\mathrm{X}_2^2]$

<u>**Ορισμός**</u> Η **διασπορά** της τ.μ. $Y=g(X_1,X_2)$ ορίζεται από την σχέση

$$\sigma^2(Y) = \begin{cases} \sum_{x_1}\sum_{x_2}[[g(x_1,x_2) - Eg(X_1,X_2)]^2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) & X_1, X_2 \ \delta\iota\alpha\kappa\rho\iota\tau\acute{\varepsilon}\varsigma \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[g(x_1,x_2) - Eg(X_1,X_2)]^2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 & X_1, X_2 \ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\varepsilon\acute{\iota}\varsigma \end{cases}$$

όταν οι ποσότητες του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένες.

Ορισμός Η **συνδιασπορά** των τ.μ X_1, X_2 ορίζεται να είναι ο αριθμός:

$$C(X_1,X_2) = E[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)] = E(X_1X_2) - EX_1EX_2$$

με την προϋπόθεση ότι οι ποσότητες στο δεξί μέλος έχουν νόημα. Εάν $C(X_1,X_2) = 0$ τότε οι τ.μ. X_1, X_2 καλούνται **ασυσχέτιστες.**

Οι ιδιότητες της συνδιασποράς δυό τ.μ. περιγράφονται στην παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση</u>
Με την προϋπόθεση ότι όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται στην πρόταση έχουν νόημα, ισχύει:

(α) Εάν α,β,γ σταθερές , τότε: $\mathrm{C}(\alpha \mathrm{X}_1+\beta, \gamma \mathrm{X}_2)=\alpha\,\gamma\,\mathrm{C}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)$
(β) $\mathrm{C}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_3,\mathrm{X}_2)= \mathrm{C}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)+ \mathrm{C}(\mathrm{X}_3,\mathrm{X}_2)$
(γ) Αν X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ., τότε $C(X_1,X_2) = 0$.

Οι διασπορές τ.μ και ο συντελεστής συσχέτισής τους συνδέονται με την εξής σχέση.

Πρόταση
Εάν X_1, X_2 είναι δύο τ.μ. τ.ω. $\mathrm{EX}_1^2 < \infty, \mathrm{EX}_2^2 < \infty$, τότε:

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2)=\mathrm{V}(\mathrm{X}_1)+\mathrm{V}(\mathrm{X}_2)+2\,\mathrm{C}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)$$

ή γενικότερα

Θεώρημα (Ισότητα του Bienayme) Εάν $X_j, j = 1,\cdots,n$ τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά, τότε

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{V}(\mathrm{X}_j)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{C}(\mathrm{X}_i,\mathrm{X}_j)$$

Εάν οι τ.μ. $X_j, j = 1,\cdots,n$ είναι ανά δύο ασυσχέτιστες, τότε έχουμε:

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{V}(\mathrm{X}_j)$$

Εάν στους παραπάνω ορισμούς η π.π. αντικατασταθεί από μιά δεσμευμένη πυκνότητα, τότε η αντίστοιχη μέση τιμή και διασπορά λέγονται **δεσμευμένη μέση τιμή** και **δεσμευμένη διασπορά** αντίστοιχα, δηλαδή έχουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός Η **δεσμευμένη** (ή **υπό συνθήκες**) **μέση τιμή** της τ.μ. X_1 **δοθέντος ότι** $X_2 = x_2$ ορίζεται από την σχέση:

$$E(X_1 \,|\, X_2 = x_2) = \begin{cases} \sum\limits_{x_1} x_1 f_{X_1,X_2}(x_1 \,|\, x_2) & X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1,X_2}(x_1 \,|\, x_2) dx_1 & X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

επίσης:

Ορισμός Η **δεσμευμένη** (ή **υπό συνθήκες**) **διασπορά** της τ.μ. X_1 **δοθέντος** ότι $X_2 = x_2$ ορίζεται από την σχέση

$$\sigma^2((X_1 \,|\, X_2 = x_2)) = \begin{cases} \sum\limits_{x_1} [x_1 - E(X_1 \,|\, X_2 = x_2)]^2 f_{X_1,X_2}(x_1 \,|\, x_2) & \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \text{ διακριτές} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - E(X_1 \,|\, X_2 = x_2)]^2 f_{X_1,X_2}(x_1 \,|\, x_2) dx_1 & \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

Παρατήρηση

Είναι φανερό από τον παραπάνω ορισμό ότι η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2$, είναι μιά συνάρτηση του x_2 έστω $\varphi(x)$, δηλαδή:

$$\phi(x_2) = E(X_1 \,|\, X_2 = x_2)$$

Η τ.μ. $\phi(X_2)$ παριστάνεται επίσης και σαν $E(X_1 \,|\, X_2)$. Δηλαδή η τ.μ $E(X_1 \,|\, X_2)$ ορίζεται από την σχέση:

$$E(X_1 \,|\, X_2)(x) = \phi(x) = E(X_1 \,|\, X_2 = x)$$

Επειδή η $E(X_1 \,|\, X_2)$ είναι μιά τ.μ. έχει νόημα να μιλάμε για την μέση τιμή της.

Θεώρημα Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(*i*) $E\{E[g(X_1, X_2) | X_1]\} = E[g(X_1, X_2)]$

(*ii*) $E[g_1(X_1) g_2(X_1, X_2) | X_1] = g_1(X_1) E[g_2(X_1, X_2) | X_1]$

(*iii*) $\sigma^2[E(X_1 | X_2)] \leq \sigma^2(X_1)$

με την προϋπόθεση ότι όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται παραπάνω έχουν νόημα.

1.12 Στοχαστικές Ανελίξεις

Πολλές φορές θέλουμε να περιγράψουμε φαινόμενα τα οποία εξελίσσονται σε σχέση με τον χρόνο ή τον χώρο, φαινόμενα όπως η μεταβολή του πληθυσμού σε μια συγκεκριμένη περιοχή της χώρας, ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σ' ένα αεροδρόμιο κατά την διάρκεια ενός ορισμένου χρονικού διαστήματος κ.α.. Η μελέτη αυτών των φαινομένων είναι δυνατόν να γίνει με την βοήθεια της Θεωρίας Πιθανοτήτων και την κατασκευή μαθηματικών μοντέλων με την χρήση οικογενειών τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες ικανοποιούν κάθε φορά ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες.

Ορισμός Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t\in T}$, οι οποίες ορίζονται συνήθως στον ίδιο πιθανοθεωριτικό χώρο Ω, καλείται **στοχαστική ανέλιξη**. Δηλαδή $\forall t \in T$, η συνάρτηση X_t είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Παρατήρηση
Ο όρος «στοχαστική», προέρχεται από το γεγονός ότι το φαινόμενο που θέλουμε να περιγράψουμε επηρεάζεται σημαντικά από τον παράγοντα τύχη και έτσι δεν μπορούμε να προβλέψουμε την (μελλοντική) συμπεριφορά του με ακρίβεια. Στην πραγματικότητα, η λέξη «στοχαστική» προέρχεται από την Ελληνική ρίζα «στόχος» που σημαίνει *στοχεύω σε κάτι* ή *μαντεύω*. Το επίθετο «στοχαστικός», χρησιμοποιούταν από τον Πλάτωνα, να σημαίνει *αυτός που ενεργεί μαντεύοντας*.

Δεν είναι απαραίτητο η μεταβλητή t να παριστά τον χρόνο. Για παράδειγμα, ο αριθμός των γαλαξιών σε μια περιοχή του χώρου (σύμπαντος) μπορεί να θεωρηθεί σαν μια στοχαστική ανέλιξη, με τον όγκο σαν παράμετρο. Στην πλειονότητα όμως των προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε, παίρνουμε σαν παράμετρο t τον χρόνο.

Το σύνολο T καλείται **παραμετρικός χώρος** της ανέλιξης, ενώ εάν υποθέσουμε ότι κάθε μία από τις τ.μ. X_t παίρνει τιμές μέσα σε ένα σύνολο S τότε καλούμε το S **χώρο καταστάσεων** της ανέλιξης.

(α) Ταξινόμηση των Στοχαστικών Ανελίξεων

Τα τρία κύρια χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τις στοχαστικές ανελίξεις είναι ο παραμετρικός χώρος, ο χώρος καταστάσεων και οι σχέσεις εξάρτησης μεταξύ των τ.μ. X_t. Με βάση καθένα από αυτά τα τρία χαρακτηριστικά, έχουμε τις εξής ταξινομήσεις των στοχαστικών ανελίξεων.

(A) Ταξινόμηση με βάση τον χώρο καταστάσεων.

Εάν το σύνολο S είναι ένα (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο , τότε η ανέλιξη καλείται σ.α. **διακριτού χώρου καταστάσεων**, ενώ εάν το S δεν είναι αριθμήσιμο καλείται σ.α. **συνεχούς χώρου καταστάσεων**.

Στην περίπτωση σ.α. με διακριτό χώρο καταστάσεων, χωρίς βλάβη της γενικότητας, παίρνουμε το σύνολο $S = N_0 = \{0,1,2,\cdots\}$.

(B) Ταξινόμηση με βάση τον παραμετρικό χώρο.

Εάν τώρα το σύνολο T είναι ένα (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο , τότε η σ.α. καλείται ανέλιξη σε **διακριτό χρόνο** ή **αλυσίδα**, ενώ εάν το T δεν είναι αριθμήσιμο η σ.α. καλείται ανέλιξη σε **συνεχή χρόνο**.

Στην περίπτωση αλυσίδας, παίρνουμε σαν T το σύνολο $N_0 = \{0,1,2,\cdots\}$, η δε τ.μ. X_i (συνήθως) παριστάνει ένα μετρήσιμο χαρακτηριστικό που αναφέρεται στον χρόνο i.

(Γ) Ταξινόμηση με βάση τις σχέσεις εξάρτησης.

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t\in T}$, καλείται:

(1) ***Ανέλιξη με ανεξάρτητες προσαυξήσεις***

Εάν οι τ.μ

$$X_{t_2} - X_{t_1},\, X_{t_3} - X_{t_2},\, \cdots\, ,X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες $\forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in S$ τ.ω. $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

Εάν το σύνολο T περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο t_0 (στις περισσότερες περιπτώσεις t_0=0), πρέπει επιπλέον οι τ.μ.

$$X_{t_0},\, X_{t_1} - X_{t_0},\, X_{t_2} - X_{t_1},\, X_{t_3} - X_{t_2},\, \cdots\, ,X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

να είναι ανεξάρτητες.

(2) (α) ***Αυστηρά στάσιμη***

Εάν, οι από κοινού συναρτήσεις κατανομών των οικογενειών τ.μ.

$$\{X_{t_1+h},\, X_{t_2+h},\, X_{t_3+h},\, \cdots\,, X_{t_n+h}\},\ \{X_{t_1},\, X_{t_2},\, X_{t_3},\, \cdots\,, X_{t_n}\}$$

με $t_i + h \in T,\ i = 1, 2, \cdots, n$ είναι ίδιες $\forall h > 0$ & $t_1, t_2, \cdots, t_n \in S$.

(β) Στάσιμη με την ευρεία έννοια

Εάν (ι) η ανέλιξη έχει πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης

(ιι) η συνδιασπορά $C(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) - EX_t \cdot EX_{t+h}$

εξαρτάται μόνον από το $h, \forall t \in T$ (δηλαδή $C(X_t, X_{t+h}) = \varphi(h)$).

Οι στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις είναι κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή φαινομένων που συναντά κανείς στην αστρονομία, την βιολογία, στην θεωρία επικοινωνιών, στην οικονομία κ.λ.π.

(β) Παραδείγματα στοχαστικών ανελίξεων

1 Στοχαστική ανέλιξη του Wiener

Έστω ότι παρατηρούμε ένα μικροσκοπικό σωματίδιο το οποίο βρίσκεται «βυθισμένο» μέσα σ' ένα υγρό ή αέριο. Το σωματίδιο, λόγω του ότι συγκρούεται με τα μόρια του υγρού ή του αέριου, δέχεται έναν μεγάλο αριθμό από τυχαίες και ανεξάρτητες ωθήσεις και εκτελεί μια κίνηση η οποία καλείται **κίνηση του Brown**. Η κίνηση αυτή μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια μιας τριάδας τ.μ. (X_t, Y_t, Z_t), η οποία τ.μ. παριστάνει την θέση του σωματιδίου τον χρόνο t (η σ.δ $\{(X_t, Y_t, Z_t), t \in T\}$ είναι η κίνηση του Brown).

Γενικότερα τώρα, μια σ.α. $\{X_t\}_{t\in T}$ καλείται **ανέλιξη Wiener** ή ανέλιξη της **κίνησης του Brown** με **συντελεστή ώθησης** μ, εάν:

(α) $X(0) = 0$

(β) η $\{X_t\}_{t\in T}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις

(γ) για κάθε $t > 0$, η X_t είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή μt .

Η ανέλιξη Wiener είναι από τις πιο χρήσιμες σ.α. της Θεωρίας Πιθανοτήτων με εφαρμογές στην Κβαντική Μηχανική, την ανάλυση τιμών μετοχών κ.λ.π.

2. Στοχαστικές Ανελίξεις σε Ουρές

Ας υποθέσουμε ότι «πελάτες» φθάνουν σ'ένα σημείο εξυπηρέτησης , π.χ τα γκισέ μιας τράπεζας, τα ταμεία ενός super market θέλουν να εξυπηρετηθούν. Εάν οι «εξυπηρετητές» είναι απασχολημένοι, τότε σχηματίζουν μιαν ουρά. Υπάρχουν πολλές στοχαστικές ανελίξεις οι οποίες σχετίζονται μ' ένα σύστημα ουράς. Για παράδειγμα, η X_t μπορεί να παριστάνει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα τον χρόνο t ή τον αριθμό των πελατών που έχουν εξυπηρετηθεί μέχρι τον χρόνο t.

3. Ανελίξεις απαρίθμησης

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{N_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **ανέλιξη απαρίθμησης** εάν η N_t παριστάνει τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα (0, t]. Π.χ. οι ανελίξεις που μετρούν τον αριθμό των τηλεφωνημάτων που φθάνουν σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο, τον αριθμό των δυστυχημάτων που γίνονται σε μια διασταύρωση είναι ανελίξεις απαρίθμησης.

Μια ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **ανέλιξη Poisson**, εάν ισχύει:

$$P\{N_t = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

Η παράμετρος $\lambda > 0$ είναι ο μέσος αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν στην μονάδα του χρόνου και καλείται **τάση** ή **ένταση** ή **ρυθμός** της ανέλιξης.

1.13 Σύγκλιση ακολουθιών τ.μ.

Είναι γνωστό ότι αρκετά φυσικά συστήματα, φτάνουν σε μιά «κατάσταση ισορροπίας» μετά από μιά μεγάλη χρονική περίοδο π.χ οι πλανήτες έχουν καταλήξει,τελικά, σε ελλειπτικές τροχιές γύρω από τον ήλιο. Σε μιά στοχαστική ανέλιξη, δεν θα περίμενε κανείς να καταλήξουμε σε μια μη-τυχαία «συμπεριφορά». Από την άλλη μεριά είναι γνωστό ότι «μέσοι όροι» ανελίξεων μερικές φορές επιδεικνύουν κάποιου είδους κανονικότητα π.χ το ποσοστό των κεφαλών σε επαναληπτικές ρίψεις ενός νομίσματος.

Πρέπει λοιπόν να είμαστε προσεκτικοί όταν προσπαθούμε να ορίσουμε την έννοια της σύγκλισης στοχαστικών ανελίξεων. Για τον σκοπό αυτό δίνουμε περισσότερους από έναν ορισμούς σύγκλισης.

Έστω λοιπόν $\{\mathrm{X_n}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ μια ακολουθία τ.μ. που ορίζονται στον πιθανοθεωρητικό χώρο $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Ορισμός (σύγκλιση σ.β.)

Η ακολουθία των τ.μ. $\left\{X_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει **σχεδόν βέβαια** (σ.β.) στην τ.μ. Χ (συμβ. $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X$), αν υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε P(A)=0 και $\forall \omega \in A'$, $X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} X(\omega)$.

Ορισμός (σύγκλιση κατά πιθανότητα)

Η ακολουθία των τ.μ. $\left\{X_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει **κατά πιθανότητα** στην τ.μ. Χ (συμβ. $X_n \xrightarrow{P} X$), αν $\forall \varepsilon>0$ η

$$P\left\{\omega / \left|X_n(\omega) - X(\omega)\right| > \varepsilon\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Πρόταση

Η σχεδόν βέβαια σύγκλιση συνεπάγεται την σύγκλιση κατά πιθανότητα.

Μια από τις πιο χρήσιμες ανισότητες στην Θεωρία Πιθανοτήτων είναι αυτή που ακολουθεί.

Πρόταση (ανισότητα του Chebyshev)

Αν Χ είναι μια τ.μ. ορισμένη στον πιθανοθεωρητικό χώρο (Ω, $\mathcal{A}$, P), τότε

$$P\left\{\left|X\right| \geq a\right\} \leq \frac{EX^2}{a^2}, \quad a > 0$$

Ορισμός (σύγκλιση υπό την έννοια του τετραγωνικού μέσου)

Η ακολουθία των τ.μ. $\left\{X_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει **υπό την έννοια του τετραγωνικού μέσου** (τ.μ.) στην τ.μ. Χ (συμβ. $X_n \xrightarrow{\tau.\mu.} X$), αν

$$E\left|X_n - X\right|^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Πρόταση

Η σύγκλιση υπό την έννοια του τετραγωνικού μέσου συνεπάγεται την σύγκλιση κατά πιθανότητα.

Απόδειξη

Απλή εφαρμογή της ανισότητας του Chebyshev.

#

Έστω τώρα ότι οι τ.μ. X_n, X έχουν αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομών F_n, F.

Ορισμός (σύγκλιση κατά κατανομή)
Η ακολουθία των τ.μ. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει **κατά κατανομή** στην τ.μ. X (συμβ. $X_n \xrightarrow{d} X$) εάν $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} F(x)$ για όλα τα σημεία x, για τα οποία η $F(x)$ είναι συνεχής

Πρόταση
Η σύγκλιση κατά πιθανότητα συνεπάγεται την σύγκλιση κατά κατανομή.

Τα παρακάτω θεωρήματα είναι από τα βασικότερα στην Θεωρία των Πιθανοτήτων. Αναφέρονται εδώ χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα (μονότονης σύγκλισης)
Εάν η $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X$ και η ακολουθία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μονότονη, τότε $EX_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} EX$.

Θεώρημα (κυρίαρχης σύγκλισης)
Εάν η $X_n \xrightarrow{P} X$ και $|X_n| \le Z, \forall n$ όπου Z τ.μ. τ.ω. $EZ < \infty$ τότε $E|X_n - X| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

Θεώρημα (ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών)
Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μιά ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. και $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Εάν $E|X_n| < \infty$, τότε

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\sigma.\beta.} EX_1$$

1.14 Θεώρημα Radon-Nikodym

Ο υπολογισμός αρκετών πιθανοτήτων που αφορούν μιά τ.μ. γίνεται ευκολότερος αν είναι γνωστή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της. Το θεώρημα που ακολουθεί περιγράφει τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες υπάρχει ένα είδος τέτοιας συνάρτησης.

Έστω (Ω, $\mathcal{A}$, P) ένας πιθανοθεωρητικός χώρος και ν ένα μέτρο πιθανότητας ορισμένο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$.

Ορισμός
Το μέτρο πιθανότητας ν είναι **απόλυτα συνεχές** ως προς το P (συμβ. $\nu \ll P$), αν και μόνον αν, $\forall A$ για το οποίο

$$P(A) = 0 \Rightarrow \nu(A)=0$$

Θεώρημα (Radon-Nikodym)
Αν ν, P είναι δύο μέτρα πιθανότητας ορισμένα στον χώρο (Ω, $\mathcal{A}$) και το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το P, τότε υπάρχει μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση f ορισμένη στον Ω, τέτοια ώστε

$$\mathrm{v(A)}=\int_{\mathrm{A}} \mathrm{fdP}$$

Η συνάρτηση f , συμβολίζεται με $\mathrm{f} = \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dP}}$, καλείται δε **Radon-Nikodym παράγωγος** του μέτρου ν ως προς το P.

1.15 Αλυσίδες Markov

Μια σχέση εξάρτησης μεταξύ των τ.μ μιας στοχαστικής ανέλιξης είναι η λεγόμενη **ιδιότητα Markov.**

Ορισμός
Εάν μιά στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}_{n\geq 0}$, με χώρο καταστάσεων S, ικανοποιεί την σχέση:

$$P\{X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\} = P\{X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n\}$$

$$\forall n \in N \qquad\qquad \forall\, x_0, x_1, \ldots x_n, x_{n+1} \in S$$

τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n \,/\, n = 0,1,2,\ldots\}$ καλείται **αλυσίδα Markov.**

Σχόλιο
Εάν θεωρήσουμε ότι το γεγονός $\{X_n = x_n\}$ παριστάνει το <u>παρόν</u>, το $\{X_{n+1} = x_{n+1}\}$ το <u>μέλλον</u> και το $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots\ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$ το <u>παρελθόν</u>, τότε η ιδιότητα Markov μας αναφέρει ότι το μέλλον δοθέντος του παρόντος και του παρελθόντος, εξαρτάται μόνο από το παρόν.

Το παρακάτω γεγονός είναι γενικότερο του ορισμού μιάς αλυσίδα Markov.

Πρόταση
Εάν η διαδικασία $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μιά αλυσίδα Markov, με χώρο καταστάσεων S, τότε ισχύει:

$$P\{X_{t_{n+1}} = x_{t_{n+1}}, \ldots, X_{t_{n+m}} = x_{t_{n+m}} \,/\, X_{t_0} = x_{t_0}, X_{t_1} = x_{t_1}, \ldots, X_{t_n} = x_{t_n}\} = P\{X_{t_{n+1}} = x_{t_{n+1}}, \ldots, X_{t_{n+m}} = x_{t_{n+m}} \,/\, X_{t_n} = x_{t_n}\}$$

$$\forall n \geq 0,\, m \geq 1 \qquad \forall\, x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_{n+m}} \in S, \qquad 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+m}$$

Εάν η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μιά αλυσίδα Markov, τότε κάθε μιά από τις ποσότητες:

$$p_{n,n+1}(x,y) = P\{X_{n+1} = y \,/\, X_n = x\} \qquad x, y \in S \quad n \in N_0$$

καλείται **πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος τον χρόνο *n*,** *από την κατάσταση x στην κατάσταση y,* είναι δε *η πιθανότητα να κάνει το σύστημα μιά μετάβαση στην κατάσταση* y *, την χρονική στιγμή* $n+1$*, δοθέντος ότι την χρονική στιγμή n ήταν στην κατάσταση* x.

Συνήθως υποθέτουμε ότι όλες αυτές οι πιθανότητες είναι <u>ανεξάρτητες</u> <u>του χρόνου</u> *n*. Μια τέτοια αλυσίδα Markov καλείται χρονικά **ομογενής**.

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος, αποτελούν τα στοιχεία ενός πίνακα:

$$P = [p(x,y)]_{x,y\in S}$$

ο οποίος καλείται **πίνακας μετάβασης ενός βήματος** της αλυσίδας**.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΥΧΑΙΟΙ ΠΕΡΙΠΑΤΟΙ

2.1 Ορισμός τυχαίου περίπατου

Οι τυχαίοι περίπατοι είναι η απλούστερη μορφή Στοχαστικών Ανελίξεων. Έχουν αναπτυχθεί σε μία πλούσια θεωρία, η οποία βρίσκει εφαρμογή σ' ένα ευρύ φάσμα πολλών επιστημονικών περιοχών. Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας του τυχαίου περίπατου, δίνουμε δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1
Έστω ένας παίχτης με αρχικό κεφάλαιο X_o. Στο τέλος κάθε παιχνιδιού ή κερδίζει ή χάνει ένα ευρώ με πιθανότητα p (ένα μέτρο της δεξιοτεχνίας του) και q αντίστοιχα, όπου $p \geq 0, \quad q \leq 1$ και $p+q=1$. Κάθε παιχνίδι παίζεται ανεξάρτητα από τα άλλα παιχνίδια. Αν η τυχαία μεταβλητή $J_n, \quad n \geq 1$ συμβολίζει τα *κέρδη του παίχτη κατά το $n^{\sigma\tau o}$ παιχνίδι*, τότε οι τυχαίες μεταβλητές $J_1, J_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες με κοινή κατανομή:

$$\mathrm{P}(J_n = 1) = p, \quad \mathrm{P}(J_n = -1) = q, \quad p + q = 1$$

Αν θεωρήσουμε ότι

$$\mathrm{X}_n = \mathrm{X}_o + J_1 + \ldots + J_n$$

τότε η ακολουθία των τ.μ. $\{\mathrm{X}_n\}_{n\geq 0}$ είναι μία διακριτού χρόνου και διακριτού χώρου καταστάσεων στοχαστική ανέλιξη, που υποδηλώνει το *αθροιστικό κεφάλαιο του παίχτη στο τέλος του $n^{\sigma\tau o\upsilon}$ παιχνιδιού*.

Παράδειγμα 2
Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα της διαφυγής κομητών από το ηλιακό σύστημα (Kendall 1961) και πιο συγκεκριμένα την κίνηση ενός κομήτη γύρω από τη γη. Κατά τη διάρκεια κάθε μιας περιστροφής η ενέργεια του κομήτη αλλάζει. Η αλλαγή αυτή οφείλεται στη διαπέραση μέσα από την πλανητική ζώνη. Σε διαδοχικές περιστροφές οι *αλλαγές* $J_n, \quad n \geq 1$ της *ενέργειας του κομήτη* υποτίθεται ότι είναι ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές. Αν η τυχαία μεταβλητή X_o υποδηλώνει την *αρχική ενέργεια του κομήτη*, τότε η

$$\mathrm{X}_n = \mathrm{X}_o + J_1 + \ldots + J_n$$

υποδηλώνει την *ενέργεια του κομήτη στο τέλος του $n^{\sigma\tau\eta\varsigma}$ περιστροφής*.

Το πρόβλημα που μελετήθηκε από τον Kendall είναι αυτό της διαφυγής του κομήτη από το ηλιακό σύστημα. Για θετική ενέργεια ο κομήτης είναι φραγμένος και ακολουθεί μια ελλειπτική τροχιά. Τη στιγμή που η ενέργεια του κομήτη γίνεται μηδέν, ο κομήτης διαφεύγει από το ηλιακό σύστημα (το οποίο αυτόματα σκοτώνει, για το σκοπό μας, την ανέλιξη $\{\mathrm{X}_n\}_{n\geq 0}$ σ' αυτόν τον τυχαίο χρόνο που η ενέργεια γίνεται μηδέν). Στην προκειμένη περίπτωση, η ακολουθία των τ.μ. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μία διακριτού χρόνου και συνεχούς χώρου καταστάσεων στοχαστική ανέλιξη.

Όλες οι τυχαίες μεταβλητές μπορούν να ορισθούν σε ένα πιθανοθεωρητικό χώρο (Ω, $\mathcal{A}$, P). Συνήθως αγνοούμε την δειγματική μεταβλητή στην $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ και γράφουμε απλά X. Κάνοντας αφαίρεση όλων των ιδεών που είναι κοινές στα προηγούμενα παραδείγματα, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός

Έστω $\{J_n\}_{n\geq 1}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές,ορισμένες στον χώρο πιθανότητας (Ω, $\mathcal{A}$, P), με τιμές στον d-διαστάσεων Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$ και X_o ένα σταθερό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^d$. Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}_{n\geq 0}$ που ορίζεται σαν:

$$X_n = X_o + J_1 + \ldots + J_n, \; n \geq 1$$

ονομάζεται ένας **d-διαστάσεων τυχαίος περίπατος**.

Παρατήρηση

1) Αν το διάνυσμα X_o και οι τυχαίες μεταβλητές J_n, $n \geq 1$, παίρνουν τιμές στο χώρο $\mathbb{Z}^d$, όπου $\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο των ακεραίων, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}_{n\geq 0}$ καλείται ένας **d-διαστάσεων <u>δικτυωτός</u> τυχαίος περίπατος**.

2) Αν στην περίπτωση του δικτυωτού περιπάτου επιτραπούν μόνο πηδήματα J_n από το $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ στο $\vec{y} = (x_1 + \varepsilon_1, \ldots, x_d + \varepsilon_d)$, όπου $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$ και $\varepsilon_\kappa = -1$ ή $\varepsilon_\kappa = 1$ με $1 \leq \kappa \leq d$, τότε ο αντίστοιχος περίπατος καλείται **απλός τυχαίος περίπατος**.

3) Αν κάθε μία από τις 2d κινήσεις σε κάθε δοσμένο πήδημα ενός απλού τυχαίου περίπατου εμφανίζεται με ίση πιθανότητα $p = \dfrac{1}{2d}$, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}_{n\geq 0}$ καλείται **συμμετρικός τυχαίος περίπατος**.

4) Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις αν τα πηδήματα J_n είναι μόνο ανεξάρτητα και <u>όχι</u> αναγκαία ταυτοτικά κατανεμημένα, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}_{n\geq 0}$ λέγεται **μη ομογενής τυχαίος περίπατος**.

Για να γίνει φανερό το ότι η θεωρία των τυχαίων περιπάτων, όπως είπαμε παραπάνω, εφαρμόζεται σε πάρα πολλές περιοχές των (φυσικών) επιστημών δίνουμε δύο επιπλέον παραδείγματα.

Παράδειγμα 3 (Παραγωγή Δυναμικού Κορυφής από ένα νεύρο)
Διεγερσιμότητα ενός νεύρου είναι η *ικανότητά του να αντιδρά σε ερεθισμούς*. Μία διέγερση με ένα αρκετά δυνατό ερεθισμό μεταδίδεται κατά μήκους του νευρικού ινιδίου (μία κίνηση ιόντων κατά μήκος της μεμβράνης του νευράξονα). Αυτή η μετάδοση καλείται **νευρική ώση** και το αντίστοιχο ηλεκτρικό φαινόμενο που ακολουθεί είναι γνωστό σαν ενεργό δυναμικό.

Εδώ περιγράφεται ένα μοντέλο τυχαίου περιπάτου του δυναμικού κορυφής ενός απλού νεύρου. Η ηλεκτρική κατάσταση της πολωμένης (σωματική δενδριτική) μεμβράνης του νεύρου καθορίζεται από ένα νούμερο. Καθώς η ηλεκτρική κατάσταση της μεμβράνης ποικίλει (σε σχέση με το χρόνο) το ηλεκτρικό κύμα βαδίζει (πίσω και μπρος) κατά μήκος μιας γραμμής. Θεωρείστε ένα σημείο πάνω σ' αυτή τη γραμμή σαν δυναμικό ηρεμίας και ένα άλλο σημείο σαν σταθερή μονάδα πέρα του δυναμικού ηρεμίας που καλείται επίπεδο ηρεμίας. Κάθε φορά που η ηλεκτρική κατάσταση φθάνει το επίπεδο πυροδοτήσεως, το νεύρο πυροδοτεί. Θεωρείστε ότι κάθε εισερχόμενο διεγερτικό μετασυναπτικό δυναμικό (αντίστοιχα ανασταλτικό μετασυναπτικό δυναμικό) μετακινεί το ηλεκτρικό κύμα κατά μία μονάδα μπρος (αντίστοιχα μία μονάδα πίσω) από το επίπεδο πυροδοτήσεως. Έστω ότι τα βήματα μπρος και πίσω από το επίπεδο πυροδοτήσεως γίνονται με ίση πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Κάθε φορά που το ηλεκτρικό κύμα φτάνει το επίπεδο πυροδοτήσεως, επιστρέφει στο δυναμικό ηρεμίας και αρχίζει την πορεία του από την αρχή.

Παράδειγμα 4 (**Αποθήκευση**)
Θεωρούμε το <u>περιεχόμενο</u> ενός υδροφράγματος σαν ένα τυχαίο περίπατο. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_κ συμβολίζει *το ποσό του νερού στο φράγμα κατά το τέλος της* $\kappa^{\sigma\tau\eta\varsigma}$ μέρας. Κατά τη διάρκεια της κ+1 μέρας ένα τυχαίο ποσό $\mathrm{I}_{\kappa+1}$ μονάδων νερού προστίθεται στο φράγμα οφειλόμενο σε βροχοπτώσεις κτλ. Αν

$$\mathrm{X}_{\kappa+1} = \mathrm{X}_\kappa + \mathrm{I}_{\kappa+1}$$

είναι μεγαλύτερο από έναν σταθερό αριθμό α, τότε α μονάδες νερού ελευθερώνονται κατά τη διάρκεια της μέρας. Αν $\mathrm{X}_\kappa + \mathrm{I}_{\kappa+1} \le a$ το φράγμα είναι άδειο. Για να διευκολύνουμε την υπερχείλιση συμβολίζουμε με c την πλήρη χωρητικότητα του φράγματος. Αν $\mathrm{X}_\kappa + \mathrm{I}_{\kappa+1} - a > c$, τότε έχουμε **υπερχείλιση**. Θεωρώντας $J_\kappa = \mathrm{I}_\kappa - a$ προκύπτει ότι

$$\mathrm{X}_n = \begin{cases} \mathrm{X}_{n-1} + J_n, & \text{για} \quad 0 < \mathrm{X}_{n-1} + J_n < c \\ 0, & \text{για} \quad \mathrm{X}_{n-1} + J_n \le 0 \\ \mathrm{c}, & \text{αν} \quad \text{έχουμε υπερχείλιση} \end{cases}$$

Αν $\{J_n\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές τότε η ακολουθία $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι ένας τυχαίος περίπατος.

2.2 Καταστροφή του Παίχτη

Αποδεικνύουμε παρακάτω μερικές βασικές προτάσεις στην θεωρία των απλών τυχαίων περιπάτων. Για να γίνουν ευκολότερα κατανοητά τα αποτελέσματα, περιγράφονται σαν αποτελέσματα στο παράδειγμα του παίκτη που παίζει παιγνίδια ενάντια σε έναν άλλο παίκτη ή καζίνο. Είναι εύκολα φανερό πως τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να ερμηνευτούν (και να γενικευτούν) στο πλαίσιο οποιουδήποτε άλλου παραδείγματος (τυχαίου περίπατου). Ακόμα όλα αυτά τα αποτελέσματα αν και αποδεικνύονται στην μονοδιάστατη περίπτωση, ισχύουν και σε d-διαστάσεων τυχαίους περίπατους.

Έστω J_o ένας σταθερός θετικός ακέραιος αριθμός και $J_n, n\geq 1$ οι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές πηδημάτων σ' ένα τυχαίο περίπατο $\{X_n\}_{n\geq 0}$, τέτοιες ώστε

$$X_n = J_o + J_1 + \ldots + J_n$$

Ο τυχαίος περίπατος $\{X_n\}_{n\geq 0}$ λέγεται **απλός τυχαίος περίπατος** με την προϋπόθεση ότι:

$$J_n = \begin{cases} 1 \quad \text{με} \quad \text{πιθανότητα} \quad \text{p} \quad (\text{κέρδος}) \\ \text{-1} \quad \text{με} \quad \text{πιθανότητα} \quad \text{q} \quad (\text{ζημία}) \\ 0 \quad \text{με} \quad \text{πιθανότητα} \quad \text{r} \quad (\text{ισοπαλία}) \end{cases}$$

όπου $p>0, \quad q<1, \quad 0\leq r<1 \quad \textit{και} \quad p+q+r=1$. Αν $p=q=\dfrac{1}{2}$ (έτσι r =0) τότε ο τυχαίος περίπατος $\{X_n\}_{n\geq 0}$ καλείται **συμμετρικός τυχαίος περίπατος**.

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε μόνο απλούς τυχαίους περιπάτους στο δίκτυο των ακεραίων.

Πρόταση 1
Έστω $\{X_n\}_{n\geq 0}$ ένας απλός τυχαίος περίπατος και ν>0 ένας σταθερός ακέραιος αριθμός. Ορίζουμε την στοχαστική ανέλιξη

$$Y = \{Y_n = X_{n+\nu} - X_\nu, n\geq 0\}$$

Τότε, η σ.α. Y είναι επίσης ένας απλός τυχαίος περίπατος.

Απόδειξη

Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{Y}_o = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_{n+\nu} - \mathrm{X}_\nu = 0 + J_1^* + J_2^* + \ldots + J_n^*, \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad J_\kappa^* = J_{\kappa+\nu}$$

Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές J_n είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες έπεται ότι και οι J_κ^* είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες.

Επομένως, η Y_n είναι το άθροισμα n ανεξάρτητων ταυτοτικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, για κάθε n. Άρα, η στοχαστική ανέλιξη $\{\mathrm{Y}_n\}_{n\geq 0}$ είναι ένας απλός τυχαίος περίπατος.

#

Σχόλιο
Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι ένας τυχαίος περίπατος αρχίζει απ' την αρχή, σε κάθε δοσμένο χρόνο n.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα παίχτη Α με αρχικό κεφάλαιο α>0 ευρώ, ο οποίος παίζει ενάντια σ' ένα καζίνο με αρχικό κεφάλαιο b>0 ευρώ. Θεωρούμε το παιχνίδι από την πλευρά του Α, έτσι ώστε η τ.μ. X_n να συμβολίζει *το αθροιστικό κεφάλαιο του Α στο τέλος του* $n^{\sigma\tau o\upsilon}$ *παιχνιδιού*. Τα κέρδη του Α θα είναι ή 1 ή -1 ή 0, έτσι ώστε η στοχαστική ανέλιξη $\{\mathrm{X}_n\}_{n\geq 0}$ να είναι ένας απλός τυχαίος περίπατος. Το παιχνίδι τελειώνει όταν ή ο παίχτης Α ή το καζίνο χάσουν όλα τα χρήματά τους. Με όρους φυσικής το σωματίδιο απορροφάται ή στο 0 ή στο α+b.

Για να αναλύσουμε την κατάσταση, ορίζουμε τον **χρόνο απορρόφησης** ή τον **χρόνο καταστροφής** Τ ως εξής: η Τ είναι μιά τ.μ. $\mathrm{T}:\Omega \to \mathrm{IN} \cup \{\infty\}$ τ.ω.

$$\mathrm{T} = \min\{n \geq 0; \quad \mathrm{X}_n \leq 0 \quad \acute{\eta} \quad \mathrm{X}_n = a+b\}$$

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $0 \leq r < 1$ και $\mathrm{P}(J_1 = 0) < 1$.

Γενικότερα, ένας **τυχαίος χρόνος** ή **χρόνος τερματισμού** Τ ως προς την ακολουθία $\{\mathrm{X}_n\}$ είναι μία επεκτεταμένη, θετική, ακεραίων τιμών τ.μ. τέτοια ώστε για κάθε n το γεγονός $\{\mathrm{T} = n\}$ να εξαρτάται μόνο από τις $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\}$.

Είναι φανερό ότι ο χρόνος απορρόφησης Τ είναι ένας χρόνος τερματισμού.

Πρόταση 2

i. $\mathrm{P}(\mathrm{T}<+\infty)=1$

ii. $\mathrm{E}[\mathrm{T}]<+\infty$

Με άλλα λόγια, ο παίχτης Α με πιθανότητα 1 τελικά χάνει όλα τα χρήματά του ή ξετινάζει το καζίνο. Η αναμενόμενη διάρκεια (του παιχνιδιού) για την απορρόφηση είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη

i. Έστω Α το γεγονός ότι $\mathrm{T}=+\infty$, δηλαδή Α είναι το γεγονός ότι $0<\mathrm{X}_n<a+b$ για κάθε $n\geq 0$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{P}(\mathrm{A})=0$.

Έστω $\mathrm{A}_n=\{0<\mathrm{X}_\kappa<a+b,\quad 0<\kappa\leq n\}$. Τότε θα ισχύει ότι $\mathrm{A}=\cap \mathrm{A}_n$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A})\leq \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ για κάθε $n\geq 0$. Θέτουμε:

$$c=a+b \quad \kappa\alpha\iota \quad \xi_\kappa=\mathrm{X}_{\kappa c}-\mathrm{X}_{(\kappa-1)\cdot c}=J_{\kappa\cdot c-c+1}+\ldots+J_{\kappa\cdot c}$$

Επειδή $\xi_{\kappa+1}=J_{\kappa\cdot c+1}+\ldots+J_{(\kappa-1)\cdot c}$ και οι τ.μ. $J_n,\quad n\geq 0$ είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες, έπεται ότι και οι $\xi_\kappa,\quad \kappa\geq 1$ θα είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. Σημειώνοντας ότι $\mathrm{X}_o\equiv J_o\equiv \alpha$, έχουμε:

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{a+b}\geq 2a+b \quad \text{ή} \quad \mathrm{X}_{a+b}\leq -b\right)=\\&=\mathrm{P}\left(J_\kappa=1 \quad \text{για} \quad 0<\kappa\leq \alpha+b \quad \text{ή} \quad J_\kappa=-1 \quad \text{για} \quad 0<\kappa\leq \alpha+b\right)\\&=p^{a+b}+q^{a+b}=p^c+q^c=d\end{aligned}$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι: $\mathrm{P}(\xi_\kappa\geq 2a+b \quad ή \quad \xi_\kappa\leq -b)=d \quad (<1)$. Στη συνέχεια έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{A}_{n\cdot c})=\mathrm{P}\left(\bigcap_{\kappa=1}^{n\cdot c}\{0<\mathrm{X}_\kappa<a+b\}\right)&\leq \mathrm{P}\left(\bigcap_{\kappa=1}^{n}\{0<\mathrm{X}_{\kappa\cdot c}<a+b\}\right)\\&\leq \mathrm{P}\left(\bigcap_{\kappa=1}^{n}\{-b<\xi_\kappa<2a+b\}\right)\\&=(1-d)^n\\&=s^n,\ \text{όπου } s=1-d<1\end{aligned}$$

Άρα, $0 \le \mathrm{P}(\mathrm{A}) \le \mathrm{P}(\mathrm{A}_{nc}) \le s^n$ για κάθε n και καθώς το $n \to \infty$ ισχύει $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$.

ii. Για κάθε $n \ge 0$, υπάρχει ένα $\kappa \ge 1$ τέτοιο ώστε $(\kappa - 1) \cdot c \le n < \kappa \cdot c$. Τότε ισχύει ότι:

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} > n) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) \le \mathrm{P}(\mathrm{A}_{\kappa \cdot c - c}) \le s^{\kappa - 1}$$

Επειδή T είναι μη αρνητική ακεραίων τιμών τυχαία μεταβλητή ισχύει:

$$\mathrm{E}[\mathrm{T}] = \sum_n \mathrm{P}(\mathrm{T} > n) \le c \sum_{\kappa=1}^{\infty} s^{\kappa} = \frac{c \cdot s}{1 - s} < +\infty$$

#

Αυτή η πρόταση μας λέει ένα σπουδαίο γεγονός: ότι ο παίχτης A τελικά ή χάνει όλα τα χρήματά του ή ξετινάζει το καζίνο σχεδόν βέβαια. Κατά συνέπεια προκύπτει το παρακάτω βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 1 (Καταστροφή του Παίχτη)
Έστω ότι έχουμε δύο παίχτες που αρχίζουν ένα παιχνίδι με αρχικό κεφάλαιο α και b αντίστοιχα. Το παιχνίδι είναι τέτοιο ώστε η ακολουθία $\{\mathrm{X}_n\}_{n \ge 0}$ των αθροιστικών κερδών, έστω του πρώτου παίχτη, είναι ένας απλός τυχαίος περίπατος. Θεωρούμε ότι η πιθανότητα κάθε παιχνίδι να τελειώνει με ισοπαλία είναι αυστηρά μικρότερη του 1, όπου $0 \le r < 1$. Τότε η πιθανότητα ή του πρώτου ή του δεύτερου να κερδίσει τον άλλον είναι 1. Η αναμενόμενη διάρκεια του παιχνιδιού είναι περασμένη.

Η πρόταση που ακολουθεί είναι μιά από τις βασικές (όχι μόνον στους τυχαίους περίπατους, με κατάλληλη βέβαια ερμηνεία) και χρησιμοποιείται για την απόδειξη (παρακάτω) χρήσιμων προτάσεων στην θεωρία των τυχαίων περιπάτων.

Πρόταση 3 (Πρώτη ταυτότητα του Wald)
Έστω ότι οι μεταβλητές πηδημάτων J_n έχουν κοινή μέση τιμή μ, δηλαδή $\mathrm{E}[J_\kappa] = \mu$ και $r < 1$. Τότε αποδεικνύεται η παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_\mathrm{T}] = a + \mu \cdot \mathrm{E}[\mathrm{T}],$$

όπου $\alpha \equiv \mathrm{X}_o \equiv J_o$

Απόδειξη

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_\mathrm{T}] = \mathrm{E}\left[a + \sum_{\kappa=1}^{\mathrm{T}} J_\kappa \right]$$

$= a + \mathrm{E}\left[\sum_{\kappa=1}^{\infty} J_\kappa \cdot \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}\geq\kappa\}}\right]$, όπου $\mathrm{I}_{\{\mathrm{T}\geq n\}}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση τ.μ. του γεγονότος $\{\mathrm{T}\geq n\}$.

$= a + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[J_\kappa \cdot \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}\geq\kappa\}}\right]$, όπου η εναλλαγή του Ε και Σ μπορεί να δικαιολογηθεί.

$$= a + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[J_\kappa \cdot \left(1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<\kappa\}}\right)\right]$$

$= a + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[J_\kappa\right] \cdot \mathrm{E}\left[1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<\kappa\}}\right]$, επειδή $\{\mathrm{T}<\kappa\}$ καθορίζεται από τις $J_1,\ldots,J_{\kappa-1}$ που είναι ανεξάρτητες της J_κ

$$= a + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu \cdot \left(1 - \mathrm{P}(\mathrm{T}<\kappa)\right)$$

$$= a + \mu \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T}\geq\kappa)$$

$a + \mu \cdot \mathrm{E}[\mathrm{T}]$, επειδή Τ είναι μη αρνητική ακεραίων τιμών τ.μ.

#

Αν οι παίχτες Α και Β παίζουν, τότε έπεται από το Θεώρημα 1 ότι ένας από τους δύο τελικά θα καταστραφεί.

Έστω $\{\mathrm{X}_n\}_{n\geq 0}$ ο τυχαίος περίπατος (παιχνίδι) του παίχτη Α. Στη συνέχεια θα βρούμε την πιθανότητα ο παίχτης Α να κερδίσει τον παίχτη Β και ο παίχτης Β να καταστραφεί.

Θεώρημα 2 (Πιθανότητα καταστροφής του Παίχτη)
Έστω α και b τα αρχικά κεφάλαια των παιχτών Α και Β αντίστοιχα και $\{\mathrm{X}_n\}_{n\geq 0}$ ο τυχαίος περίπατος που αντιστοιχεί στα αθροιστικά κεφάλαια του παίχτη Α. Έστω $r<1$.

Αν $p=q$, τότε:

i. $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_\mathrm{T} = \alpha + \mathrm{b}\right) = \mathrm{P}\left(\text{ο Β καταστρέφεται}\right) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\mathrm{b}}$

ii. $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_\mathrm{T} = 0\right) = \mathrm{P}\left(\text{ο Α καταστρέφεται}\right) = \dfrac{\mathrm{b}}{\alpha+\mathrm{b}}$

Αν $p\neq q$, τότε:

i. $P\left(X_T=\alpha+b\right)=\dfrac{1-s^{\alpha}}{1-s^{\alpha+b}}$

ii. $P\left(X_T=0\right)=\dfrac{s^{\alpha}-s^{\alpha+b}}{1-s^{\alpha+b}}$, όπου $s=\dfrac{q}{p}$.

Απόδειξη

Τα παραπάνω θα αποδειχτούν με τη βοήθεια του Θεωρήματος 1. Σημειώνοντας ότι $X_T=0$ ή $X_T=\alpha+b$ έχουμε:

$$E\left[X_T\right]=0\cdot P\left(X_T=0\right)+\left(\alpha+b\right)\cdot P\left(X_T=\alpha+b\right)$$

- Αν $p=q$ τότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\mu&=E[J_1]\\&=1\cdot P(J_1=1)+(-1)\cdot P(J_1=-1)+0\cdot P(J_1=0)\\&=p-q\\&=0\end{aligned}$$

Συνεπώς, από την πρώτη ταυτότητα του Wald προκύπτει ότι:

$$a=E[X_T]=\left(\alpha+b\right)\cdot P\left(X_T=\alpha+b\right)$$

Επομένως, $\alpha=\left(\alpha+b\right)\cdot P\left(X_T=\alpha+b\right)\Rightarrow P\left(X_T=\alpha+b\right)=\dfrac{\alpha}{\alpha+b}$

- Αν $p\neq q$ τότε ισχύει ότι $\mu=p-q\neq 0$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η ταυτότητα του Wald δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιατί δεν έχουμε καμία έκφραση για την $E[T]$, την αναμενόμενη διάρκεια του παιχνιδιού.

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί ονομάζεται **μέθοδος ανάλυσης του πρώτου βήματος** και είναι αντιπροσωπευτική της χρήσης των διαφοροεξισώσεων σε προβλήματα τυχαίων περιπάτων.

Για $J_o=a$, έναν ακέραιο στο διάστημα $[0,a+b]$ ορίζουμε το $\pi(a)$ σαν την πιθανότητα να έχουμε $X_T=a+b$. Οπότε:

$$\pi(a)=P(X_T=a+b)$$

$$=P\left(\left\{X_T=\alpha+b \quad \text{και} \quad J_1=1\right\} \text{ ή } \left\{X_T=\alpha+b \quad \text{και} \quad J_1=-1\right\} \text{ ή } \left\{X_T=\alpha+b \quad \text{και} \quad J_1=0\right\}\right)$$

$$= \mathrm{p} \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=\alpha+\mathrm{b} \middle| \mathrm{J}_1=1\right)+\mathrm{q} \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=\alpha+\mathrm{b} \middle| \mathrm{J}_1=-1\right)+\mathrm{r} \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=\alpha+\mathrm{b} \middle| \mathrm{J}_1=0\right)$$

Επειδή το παιχνίδι αρχίζει από την αρχή κάθε φορά, σύμφωνα με την Πρόταση 1, ο παίχτης Α αποτελεσματικά αρχίζει από το α+1 με την προϋπόθεση ότι $J_1 = 1$. Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{T}} = a + b \middle| J_1 = 1\right) = \pi(a+1)$$

Παρόμοιες εκφράσεις έχουμε και για τις περιπτώσεις $J_1 = -1$ και $J_1 = 0$. Άρα, η $\pi(a)$ ικανοποιεί την παρακάτω διαφοροεξίσωση:

$$\pi(a) = p \cdot \pi(a+1) + q \cdot \pi(a-1) + r \cdot \pi(a), \text{ όπου } 0 < a < a+b \qquad (1)$$

Στη συνέχεια, θεωρώντας τις αρχικές συνθήκες $\pi(0) = 0$ *και* $\pi(a+b) = 1$ λύνουμε την παραπάνω εξίσωση. Από την (1) και την $p + q = 1 - r$, θέτοντας $s = \dfrac{q}{p}$, προκύπτει:

$$\pi(\alpha+1) - \pi(a) = s \cdot [\pi(a) - \pi(a-1)], \quad 0 < a < a+b \qquad (2)$$

Έστω $\alpha = \pi(1) = \pi(1) - \pi(0)$. Τότε από τη (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} \pi(a+1) - \pi(a) &= s \cdot [\pi(a) - \pi(a-1)] \\ &= s^2 \cdot [\pi(a-1) - \pi(a-2)] \\ &\vdots \\ &= s^{\alpha} \cdot [\pi(1) - \pi(0)] \\ &= a \cdot s^{\alpha} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$\begin{aligned} \pi(a) &= \pi(a) - \pi(0) \\ &= \sum_{x=0}^{a-1} [\pi(x+1) - \pi(x)] \\ &= \underbrace{\sum_{x=0}^{a-1} \alpha \cdot s^x}_{\substack{\text{άθροισμα όρων} \\ \text{γεωμετρικής προόδου}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha \cdot \left(1 - s^{\alpha}\right)}{1 - s}, \quad 0 \le a \le a + b$$

Επειδή $\pi(a+b)=1$, από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$a = \frac{1-s}{1-s^{a+b}}$$

Συνεπώς, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}} = a + b) = \pi(\alpha) = \dfrac{1 - s^{\alpha}}{1 - s^{\alpha+b}}$

#

Πόρισμα 1

i. Αν $p = q$ τότε $\mathrm{E}[\mathrm{X}_{\mathrm{T}}] = a$.

ii. Αν $p \neq q$ τότε $\mathrm{E}[\mathrm{X}_{\mathrm{T}}] = \dfrac{(a+b) \cdot \left(1 - s^{a}\right)}{1 - s^{a+b}}$, $s = \dfrac{q}{p}$.

Απόδειξη

i. Αν $p = q$ τότε μ=0 και από την πρώτη ταυτότητα του Wald προκύπτει ότι:

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_{\mathrm{T}}] = a + \mu \cdot \mathrm{E}[\mathrm{T}] \Leftrightarrow \mathrm{E}[\mathrm{X}_{\mathrm{T}}] = a$$

ii. Αν $p \neq q$ τότε ισχύει:

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_{\mathrm{T}}] = 0 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}} = 0) + (a+b) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}} = a + b)$$

$$= (a+b) \cdot \frac{1 - s^{a}}{1 - s^{a+b}}$$

#

Παρατήρηση

Θεωρούμε την τύχη του παίχτη Α, ενώ παίζει ενάντια σ' ένα άπειρα πλούσιο καζίνο. Έτσι έχουμε $\mathrm{b} \to \infty$. Τότε είναι φανερό ότι η $\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}} = a + b\}$ συγκλίνει στο $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{\mathrm{n}} > 0, \text{ για όλα τα } \mathrm{n})$.

Αν $p \neq q$ τότε από το Θεώρημα 2 έπεται ότι:

$$P\left(X_n > 0, \quad \text{για} \quad \text{όλα} \quad \text{τα} \quad n \geq 0\right) = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^a & \text{αν} \quad q < p \\ \\ 0 & \text{αν} \quad q > p \end{cases}$$

Αν $p = q$ τότε από το Θεώρημα 2 έπεται ότι:

$$P\left(X_n > 0, \quad \text{για} \quad \text{όλα} \quad \text{τα} \quad n \geq 0\right) = 0$$

Όμοια, μπορεί κανείς να θεωρήσει την $P\left(X_n < a+b, \quad \text{για} \quad \text{όλα} \quad \text{τα} \quad n \geq 0\right)$.

Πρόταση 4

Για $0 \leq a = X_o$ ισχύουν τα παρακάτω:

i. $$P\left(X_n > 0, \quad n \geq 0\right) = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^a & \alpha\nu \quad q < p \\ \\ 0 \quad \alpha\nu \quad q \geq p \end{cases}.$$

ii. $$P\left(X_n < a+b, \quad n \geq 0\right) = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^b & \alpha\nu \quad p < q \\ \\ 0 \quad \alpha\nu \quad p \geq q \end{cases}.$$

2.3 Αναμενόμενη διάρκεια του παιχνιδιού

Σύμφωνα με την Πρόταση 2 ισχύει ότι $E[T] < +\infty$ (η αναμενόμενη διάρκεια του παιχνιδιού είναι πεπερασμένη). Στην παράγραφο αυτή θέλουμε να βρούμε μία έκφραση για την αναμενόμενη διάρκεια του παιχνιδιού.

Αν $p \neq q$ τότε από το Πόρισμα 1 και την πρώτη ταυτότητα του Wald (Πρόταση 3), δεδομένου ότι $\mu = p - q$, προκύπτει:

$$E[T] = \frac{1}{\mu}\left(E[X_T] - a\right) = \frac{1}{p-q}\left[(a+b)\frac{1-s^a}{1-s^{a+b}} - a\right], \; s = \frac{q}{p}$$

Αν $p = q$ τότε μ=0 και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρώτη ταυτότητα του Wald. Στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται χρήση της δεύτερης ταυτότητας του

Wald (πρόταση που ισχύει, και πάλι, όχι μόνο στους τυχαίους περιπάτους αλλά σε ένα γενικότερο πλαίσιο).

Πρόταση 5 (Δεύτερη ταυτότητα του Wald)
Αν σ^2 είναι η κοινή διασπορά των μεταβλητών πηδήματος J_n, $n \geq 1$ τότε

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}}) = \sigma^2 \cdot \mathrm{E}[\mathrm{T}] = (1-r)\cdot \mathrm{E}[\mathrm{T}]$$

Απόδειξη

Όταν $p = q$ τότε ισχύει ότι $\mu = \mathrm{E}[J_n] = 0$ *και* $\mathrm{E}[\mathrm{X}_{\mathrm{T}}] = a$. Στη συνέχεια η πορεία της απόδειξης είναι όμοια με εκείνης στην πρώτη ταυτότητα του Wald.

$$\mathrm{E}\left[(\mathrm{X}_{\mathrm{T}} - a)^2\right] = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} J_\kappa \left(1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<\kappa\}}\right)\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[J_i \cdot \left(1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<i\}}\right)\cdot J_j \cdot \left(1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<j\}}\right)\right] \qquad (1)$$

Έστω $i = j$. Τότε για κάθε $i \geq 1$ ισχύει:

$$\mathrm{E}\left[J_i^2 \cdot \left(1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<i\}}\right)^2\right] = \mathrm{E}\left[J_i^2 \cdot \left(1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<i\}}\right)\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[J_i^2\right]\cdot \mathrm{E}\left[1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<i\}}\right]$$

$$= \mathrm{V}(J_i)\cdot\left(1 - \mathrm{P}(\mathrm{T} < i)\right)$$

$$= \sigma^2 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{T} \geq i)$$

Έστω $i \neq j$ *και* $i < j$ (η περίπτωση $j < i$ παίρνεται όμοια). Επειδή η $J_i \cdot \left(1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<i\}}\right)\cdot\left(1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<j\}}\right)$ καθορίζεται από τις $J_1, \ldots, J_{j-1}$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες από την J_j και $\mathrm{E}[J_j] = 0$ έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{E}\left[J_i \cdot \left(1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<i\}}\right)\cdot J_j \cdot \left(1 - \mathrm{I}_{\{\mathrm{T}<j\}}\right)\right] = 0 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) καταλήγουμε στο ζητούμενο, δηλαδή

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{T} \geq i) = \sigma^2 \cdot \mathrm{E}[\mathrm{T}]$$

#

Θεώρημα 3
Με την προϋπόθεση των συνθηκών ενός απλού τυχαίου περιπάτου και $r < 1$ ισχύει:

i. $$\mathrm{E}[\mathrm{T}] = \frac{a+b}{p-q} \cdot \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} - \frac{a}{p-q} \quad \alpha\nu \quad p \neq q$$

ii. $$\mathrm{E}[\mathrm{T}] = \frac{ab}{1-r} \quad \alpha\nu \quad p = q$$

Απόδειξη

i. Έχει ήδη αποδειχθεί.

ii. Αν $p = q$ τότε έχουμε

$\mathrm{var}(\mathrm{X_T}) = \mathrm{E}[\mathrm{X_T^2}] - a^2$**,** από το Πόρισμα 1

$$= 0^2 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X_T} = 0) + (a+b)^2 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X_T} = a+b) - a^2$$

$= (a+b)^2 \cdot \dfrac{a}{a+b} - a^2$, από το Θεώρημα 2 (i)

$$= ab$$

Άρα, από τη δεύτερη ταυτότητα του Wald προκύπτει:

$$\mathrm{E}[\mathrm{T}] = \frac{1}{(1-r)} \cdot \mathrm{var}(\mathrm{X_T}) = \frac{ab}{1-r}$$

#

Παρατήρηση

Όλες οι παραπάνω προτάσεις και θεωρήματα, για τους τυχαίους περίπατους, αποδείχθηκαν με την βοήθεια μόνον

(α) του ορισμού της πιθανότητας και
(β) απλών βασικών ιδιοτήτων που προκύπτουν από αυτόν.

Οι αποδείξεις αν και δεν είναι δύσκολες, τις περισσότερες φορές είναι <u>μακροσκελείς</u>. Αναπτύσσοντας την θεωρία των Martingales παρακάτω, δίνουμε έναν δεύτερο και ταυτόχρονα (φαινομενικά) <u>ευκολότερο</u> τρόπο απόδειξης μερικών από τις προτάσεις αυτές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΚΛΑΔΩΤΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Ένα επιπλέον, των παραπάνω, παράδειγμα Στοχαστικών Ανελίξεων είναι και εκείνο των Κλαδωτών Αλυσίδων. Και πάλι για την απόδειξη βασικών προτάσεων, στην θεωρία των Κλαδωτών αλυσίδων, χρησιμοποιούμε τον ορισμό της πιθανότητας και βασικές ιδιότητές του. Ακόμα είναι απαραίτητος ο ορισμός νέων εννοιών όπως της πιθανογεννήτριας συνάρτησης μιάς τ.μ. και απόδειξη ορισμένων από τις ιδιότητές της. Όλες οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων για τις Κλαδωτές Αλυσίδες είναι σχετικά εύκολες αν και μερικές φορές είναι χρονοβόρες. Με την βοήθεια των Martingales δίνεται ένας δεύτερος , εναλλακτικός (και πάλι φαινομενικά ευκολότερος), τρόπος απόδειξης των προτάσεων αυτών.

3.1 Ορισμός μιάς κλαδωτής αλυσίδας

Έστω λοιπόν ότι βρισκόμαστε σε μιά από τις ακόλουθες καταστάσεις :

(α) (**Διάδοση επιδημίας**) Έστω ότι ένας οργανισμός είναι φορέας μιάς μολυσματικής αρρώστιας και μολύνει k οργανισμούς του «γειτονικού» του περιβάλλοντος, οι οποίοι με την σειρά τους μολύνουν άλλους οργανισμούς με τον ίδιο τρόπο. Θα θέλαμε να ξέρουμε αν πρόκειται για επιδημία (μόλυνση μεγάλου αριθμού οργανισμών) ή η αρρώστια τείνει να εξαλειφθεί.

(β) (**Ουρές αναμονής**) Ένας πελάτης φτάνει σε ένα σημείο εξυπηρέτησης το οποίο είναι κενό και αρχίζει να εξυπηρετείται. Κατά την διάρκεια της εξυπηρέτησης, άλλοι πελάτες φθάνουν και σχηματίζουν μιάν ουρά. Πόσο μεγάλη μπορεί να γίνει η ουρά; Ποιά η πιθανότητα κάποτε να πάψει να υπάρχει η ουρά;

(γ) **(Πυρηνικές αλυσιδωτές αντιδράσεις)** Ένα νετρόνιο συγκρούεται με ασταθείς πυρήνες και παράγεται ένας αριθμός νέων νετρονίων, το καθένα από τα οποία μπορεί να παράγει άλλα νετρόνια με τον ίδιο τρόπο. Αν η πιθανότητα να παραχθούν k (k>1) νέα νετρόνια είναι αρκετά μεγάλη, τότε ο παραγόμενος αριθμός νετρονίων αυξάνει γρήγορα και απεριόριστα με αποτέλεσμα να φθάσουμε όπως λέμε σε «έκρηξη». Θα θέλαμε να ξέρουμε, αν είναι γνωστός ο «τρόπος» που γεννιούνται τα νετρόνια, πόσο πιθανή είναι μιά τέτοια έκρηξη.

Όλες οι παραπάνω καταστάσεις μπορούν να μοντελοποιηθούν χρησιμοποιώντας το ίδιο είδος μοντέλων. Πράγματι, σε κάθε ένα από αυτά τα συστήματα υπάρχει ένας *προγεννήτορας* (ή μηδενική γενιά) «*οργανισμός*» (φορέας αρρώστιας, πελάτης που εξυπηρετείται, αρχικό νετρόνιο) ο οποίος υποθέτουμε ότι στο τέλος της «ζωής» του ή του βιολογικού του κύκλου, παράγει έναν <u>τυχαίο</u> αριθμό ξ απογόνων (άτομα που μολύνονται, πελάτες που φθάνουν όσο ο πελάτης εξυπηρετείται,νέα νετρόνια). Ο τυχαίος τρόπος με τον οποίο γεννιούνται οι νέοι απόγονοι περιγράφεται (πιθανοθεωρητικά) μέσω μιάς κατανομής πιθανότητας:

$$P\{\xi=m\}=a_m,\ m=0,1,2,....,\ \sum_{m=0}^{+\infty} a_m = 1 \qquad (*)$$

Υποθέτουμε ότι όλοι οι απόγονοι

(α) δρουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο (Υ1) και ότι
(β) στο τέλος της ζωής τους-για ευκολία, υποθέτουμε ότι η διάρκεια ζωής όλων των οργανισμών είναι η ίδια-γεννούν απογόνους <u>πάντα</u> σύμφωνα με την παραπάνω κατανομή (οργανισμοί της $1^{ης}$ γενιάς) (Υ2).

Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται, θεωρητικά έπ' άπειρον, κατά τον ίδιο τρόπο.

Εάν με

X_n συμβολίσουμε το **μέγεθος του πληθυσμού της $n^{οστής}$ γενιάς**,

τότε η σ.α. $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ καλείται **κλαδωτή αλυσίδα**. Οι αλυσίδες αυτές πρωτοχρησιμοποιήθηκαν από τους Galton & Watson (1873), σαν μοντέλα για την εκτίμηση της εξαφάνισης ενός ανδρικού πληθυσμού (διατήρηση επωνύμου).

Αν και είναι απλουστευμένα μοντέλα γιατί:

(i) η γονιμότητα εξαρτάται πολλές φορές από κοινωνικές τάσεις, με αποτέλεσμα η *κατανομή αναπαραγωγής* (Υ2) να διαφέρει από γενιά σε γενιά

(ii) οι απόγονοι του ίδιου οργανισμού («αδέρφια»), λόγω κληρονομικότητας και του ότι ζουν στο ίδιο περιβάλλον, παρουσιάζουν ομοιότητες στον τρόπο αναπαραγωγής τους, παραβιάζοντας την αρχή της ανεξαρτησίας στην δράση των οργανισμών που υποτέθηκε παραπάνω (Υ1)),

εν τούτοις μπορούν να επιλύσουν αρκετά προβλήματα.

Τα ερωτήματα που μας απασχολούν σε ένα τέτοιο μοντέλο είναι:

(α) ο αριθμός των οργανισμών κατά την διάρκεια μιάς γενιάς (*κατανομή* της X_n)

(β) ο μέσος αριθμός των οργανισμών μιάς γενιάς (*μέση τιμή* της X_n)

(γ) η πιθανότητα να εξαφανιστεί ο πληθυσμός κάποτε (***πιθανότητα εξάλειψης***)

(δ) το πόσο πιθανόν είναι από έναν αριθμό απογόνων σε μιά γενιά να πάμε σε έναν αριθμό απογόνων σε μιά μελλοντική γενιά (*πιθανότητες μετάβασης n βημάτων*).

Η πρώτη λοιπόν πρόταση περιγράφει μια χαρακτηριστική ιδιότητα των κλαδωτών αλυσίδων, την λεγόμενη **Μαρκοβιανή**.

Πρόταση 1
Η κ.α. $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ είναι μια **αλυσίδα Markov** δηλαδή η μελλοντική συμπεριφορά της, εάν είναι γνωστή η συμπεριφορά της στο παρελθόν και στο παρόν, εξαρτάται μόνο από το παρόν. Οι **πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος** (θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητες της γενιάς, δηλαδή πρόκειται για μιαν *ομογενή* αλυσίδα), είναι ίσες με:

$$p_{ij}=P\left\{X_{n+1}=j \middle| X_n=i\right\}=P\left\{\sum_{k=1}^{i}\xi_k=j\right\}$$

Εάν τώρα είναι γνωστές οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε, τουλάχιστον θεωρητικά (χρησιμοποιώντας την θεωρία των α.Markov), την κατανομή της X_n δηλαδή τις πιθανότητες $P\{X_n=k\}$, $k=0,1,2,...$ (μέγεθος του πληθυσμού της $n^{οστής}$ γενιάς, ερώτημα (α) παραπάνω).

Απόδειξη
Εάν στην $n^{οστή}$ γενιά υποθέσουμε ότι υπάρχουν i οργανισμοί, και κάθε ένας από τους οργανισμούς γεννά τυχαία ξ_k, $k=1,2,3,...,i$ απογόνους, τότε ο συνολικός αριθμός των απογόνων της $n+1$ γενιάς είναι ίσος με: $\xi_1+...+\xi_i$ (ιδιότητα Markov).

#

Παρατήρηση 1
Παρά τον Μαρκοβιανό χαρακτήρα των κ.α., οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι δύσκολο να υπολογιστούν με την βοήθεια ενός αναλυτικού τύπου. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τις λεγόμενες **πιθανογεννήτριες συναρτήσεις**.

3.2 Πιθανογεννήτριες συναρτήσεις και κλαδωτές αλυσίδες

Σε μιά κλαδωτή αλυσίδα, συνήθως υποθέτουμε ότι ο αρχικός πληθυσμός X_0 αποτελείται από έναν μόνο οργανισμό, δηλ. $X_0=1$. Είναι φανερό ότι, το μέγεθος του πληθυσμού X_{n+1} της n+1-γενιάς είναι ίσο με το άθροισμα των απογόνων των οργανισμών της $n^{οστής}$ γενιάς, δηλαδή:

$$X_{n+1}=\sum_{k=1}^{X_n}\xi_k$$

όπου η ξ_k δηλώνει *τον αριθμό των απογόνων που γεννά ο k οργανισμός της $n^{οστής}$ γενιάς.*

Από τις αρχικές υποθέσεις σε μια κ.α. (Υ1 και Υ2) είναι φανερό ότι, οι $\{\xi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ ανεξάρτητες τ.μ. με κοινή κατανομή την (*).

Η **πιθανογεννήτρια συνάρτηση** της τ.μ. ξ_k, $k = 1, 2, 3, ...$ ορίζεται από την σχέση:

$$\varphi(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P\{\xi_1 = k\} s^k$$

ενώ της τ.μ. X_n, $n = 0, 1, 2, ...$ από την σχέση:

$$\varphi_n(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} P\{X_n = k\} s^k$$

Είναι φανερό ότι: $\varphi_0(s)=s$ & $\varphi_1(s)=\varphi(s)$. Ακόμα :

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} P\{X_{n+1}=k\} s^k &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} P\{X_{n+1}=k \mid X_n=j\}\cdot P\{X_n=j\} s^k \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} P\{\xi_1+...+\xi_j=k\}\cdot P\{X_n=j\} s^k\end{aligned}$$

Αλλά: $\sum_{k=0}^{+\infty} P\{\xi_1+...+\xi_j=k\}\cdot s^k$ είναι η πιθανογεννήτρια του αθροίσματος $\xi_1+...+\xi_j$, j ανεξάρτητων και ταυτοτικά κατανεμημένων τ.μ., κάθε μιά με πιθανογεννήτρια $\varphi(s)$, οπότε από γνωστή ιδιότητα των πιθανογεννητριών :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\{\xi_1+...+\xi_j=k\}\cdot s^k = \{\varphi(s)\}^j .$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$\varphi_{n+1}(s) = \sum_{j=0}^{+\infty}(\varphi(s))^j \cdot P\{X_n=j\} = \varphi_n(\varphi(s)) \qquad \text{(i)}$$

Χρησιμοποιώντας αναδρομικά την σχέση (i), παίρνουμε:

$$\varphi_{n+1}(s) = \varphi_n(\varphi(s))=\varphi_{n-1}(\varphi_2(s))=\varphi_{n-2}(\varphi_3(s))$$

δηλαδή, επαγωγικά ισχύει η σχέση:

$$\varphi_{n+1}(s) = \varphi_{n-k}(\varphi_{k+1}(s)), \quad k=0,1,2,...$$

Ιδιαίτερα, για k=n-1, ισχύει η σχέση:

$$\varphi_{n+1}(s) = \varphi(\varphi_n(s)), \qquad \text{(ii)}$$

Παρατήρηση 2

(α) Είναι φανερό ότι εάν γνωρίζουμε την πιθανογεννήτρια της X_n τότε, αναπτύσσοντας την σε δυναμοσειρά ως προς s και εξισώνοντας τους συντελεστές, μπορούμε να υπολογίσουμε (θεωρητικά) την κατανομή της X_n (μέγεθος του πληθυσμού της $n^{οστής}$ γενιάς, ερώτημα (α) παραπάνω).

.

(β) Αν υποθέσουμε ότι $X_0 = k$ (έχουμε δηλαδή αρχικά k οργανισμούς), τότε σε κάθε οργανισμό της αρχικής γενιάς αντιστοιχεί μιά κλαδωτή αλυσίδα. του τύπου που περιγράψαμε παραπάνω, οι δε k αυτές αλυσίδες είναι <u>ανεξάρτητες</u>. Αν λοιπόν $\varphi_n^{(k)}(s)$ είναι η πιθανογεννήτρια της τ.μ. X_n, $n = 0,1,2,....$τότε $\varphi_n^{(k)}(s)=\left(\varphi_n(s)\right)^k$, οι δε ποσότητες που μας ενδιαφέρουν παρακάτω, υπολογίζονται ανάλογα.

3.3 Αναμενόμενο μέγεθος του πληθυσμού

Αφού σε μιά κλαδωτή αλυσίδα είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τις πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος, θα θέλαμε (τουλάχιστον) να μπορούμε να υπολογίσουμε το **αναμενόμενο μέγεθος του πληθυσμού της $n^{οστής}$ γενιάς**, καθώς επίσης και την **διασπορά** του μεγέθους αυτού, δηλ. την μέση τιμή και την διασπορά της τ.μ. X_n **.**

Η μέση τιμή EX_n της X_n, είναι φανερό ότι είναι ίση με:

$$EX_n=\varphi_n'(1).$$

Εάν παραγωγίσουμε την σχέση (i), αναφορικά με το s και θέσουμε s=1 , τότε:

$$\varphi_{n+1}'(s)=\left(\varphi_n(\varphi(s))\right)' = \varphi_n'(\varphi(s))\cdot\varphi'(s) \Rightarrow \varphi_{n+1}'(1)=\varphi_n'(\varphi(1))\cdot\varphi'(1)=\varphi_n'(\varphi(1))\cdot m$$

όπου $E\xi_k=\varphi'(1)=m$. Χρησιμοποιώντας την σχέση αυτή αναδρομικά, έχουμε:

$$\varphi_{n+1}'(1)=\varphi_n'(\varphi(1))\cdot\varphi'(1)=\varphi_n'(1)\cdot m=\varphi_{n-1}'(1)\cdot m\cdot m=\varphi_{n-1}'(1)\cdot m^2$$

και επαγωγικά: $\varphi_{n+1}'(1)=\left(\varphi'(1)\right)^{n+1}=m^{n+1}$ δηλαδή :

$$EX_n = m^n$$

Η διασπορά $V\left(X_n\right)$ της X_n, συνδέεται με την πιθανογεννήτρια, με την εξής σχέση:

$$V\left(X_n\right)=EX_n^2-\left(EX_n\right)^2=\varphi_n''(1)+\varphi_n'(1)-\left(\varphi_n'(1)\right)^2$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (ii), έχουμε:

$$\varphi_{n+1}'(s)=\left(\varphi'(\varphi_n(s)\right)\cdot\varphi_n'(s) \qquad \text{(iii)}$$

και παραγωγίζοντας την σχέση αυτή, έχουμε:

$$\varphi''_{n+1}(s)=\varphi''(\varphi_n(s))\cdot\left(\varphi'_n(s)\right)^2+\left(\varphi'(\varphi_n(s)\right)\cdot\varphi''_n(s)\overset{s=1}{\Rightarrow}$$

$$\varphi''_{n+1}(1)=\varphi''(1)\cdot\left(\varphi'_n(1)\right)^2+\left(\varphi'(1)\right)\cdot\varphi''_n(1) \qquad \text{(iv)}$$

Αλλά

$$\varphi'(1)=m,\ \varphi''(1)=EX_1^2-\left(EX_1\right)=V(X_1)+\left(EX_1\right)^2-EX_1=\sigma^2+m^2-m=M\,,$$

οπότε η (iv), γίνεται:

$$\varphi''_{n+1}(1)=M\cdot m^{2n}+m\cdot\varphi''_n(1)$$

και επαγωγικά: $\varphi''_{n+1}(1)=M\cdot m^{2n}+m\cdot\varphi''_n(1)=M\cdot\left\{m^{2n}+m^{2n-1}\right\}+m^2\cdot\varphi''_{n-1}(1)=...\Rightarrow$

$$\begin{aligned} V(X_{n+1}) &=M\cdot\left\{m^{2n}+m^{2n-1}+...+m^n\right\}+m^{n+1}-m^{2n+2}= \\ &=\sigma^2\cdot\left\{m^{2n}+m^{2n-1}+...+m^n\right\}=\begin{cases}\sigma^2\cdot m^n\cdot\dfrac{m^{n+1}-1}{m-1} & \text{εάν } m\neq 1\\ \sigma^2\cdot(n+1) & \text{εάν } m=1\end{cases}\end{aligned}$$

3.4 Πιθανότητα εξάλειψης

Μιά δεύτερη ενδιαφέρουσα ποσότητα είναι η πιθανότητα του να πάψει να υπάρχει ο πληθυσμός, δηλαδή όπως λέμε η **πιθανότητα (τελικής) εξάλειψης του πληθυσμού**. Θέλουμε να υπολογίσουμε με άλλα λόγια την πιθανότητα:

$$P\left\{X_n=0,\ \text{για κάποιο } n\right\}$$

Παρατήρηση 3

(α) Αν $X_n=0$ για κάποιο n, τότε $X_k=0,\ \forall k\geq n$.

(β) Εξάλειψη δεν συμβαίνει ποτέ στην περίπτωση που $p_0=P\left\{\xi=0\right\}=0$. Ακόμα, η εξάλειψη είναι βέβαιη όταν $p_0=1$. Έτσι υποθέτουμε πάντα ότι: $0<p_0<1$.

Πρόταση 2 (Θεμελιώδες Θεώρημα των Κλαδωτών αλυσίδων)

Η πιθανότητα π της τελικής **εξάλειψης του πληθυσμού** σε μιά κλαδωτή αλυσίδα $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ με $X_0=1$, είναι ίση με την μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης

$$s=\varphi(s).$$

Ακόμα, εάν $m\leq 1$ τότε $\pi=1$, ενώ εάν $m>1$ τότε $\pi<1$.

Απόδειξη
Η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού στην $n^{\text{οστή}}$ γενιά είναι ίση με:

$$q_n=P\{X_n=0\}=\varphi_n(0)\overset{(ii)}{\Rightarrow}\quad q_{n+1}=\varphi_{n+1}(0)=\varphi(\varphi_n(0))=\varphi(q_n) \qquad (v)$$

Αλλά η $\varphi(s)$ είναι μια αυστηρά αύξουσα συνάρτηση (σαν δυναμοσειρά με μη-αρνητικούς συντελεστές και $0<p_0<1$) και:

$$q_1=\varphi_1(0)=\varphi(0)=q_0>0\Rightarrow\quad q_2=\varphi(q_1)>\varphi(0)=q_1$$

και εάν υποθέσουμε ότι: $q_n>q_{n-1}$, τότε:

$$q_{n+1}=\varphi_n(q_n)>\varphi_n(q_{n-1})=q_n$$

δηλαδή η ακολουθία $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι αυστηρά αύξουσα και φραγμένη από το 1. Άρα το όριο της (πιθανότητα εξάλειψης):

$$\pi=\lim_{n\to+\infty}P\{X_n=0\}=\lim_{n\to+\infty}q_n=\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(0)$$

υπάρχει και $0<\pi\leq 1$. Ακόμα, επειδή η $\varphi(s)$ είναι συνεχής, η (v) έπεται ότι

$$\pi=\varphi(\pi) \qquad (vi)$$

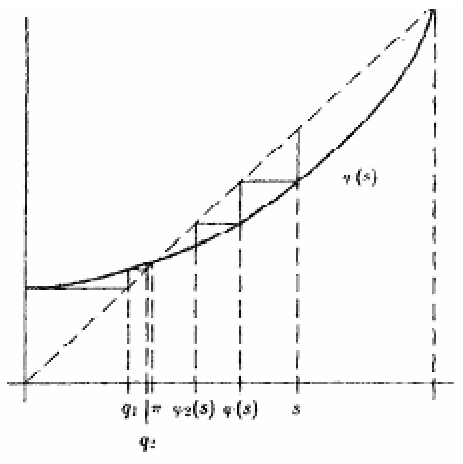
Στην πραγματικότητα το π είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης: $s=\varphi(s) \quad (vii)$.

Γιατί, έστω s_0 μια οποιαδήποτε θετική ρίζα της (vii), τότε: $q_1=\varphi(0)<\varphi(s_0)=s_0$ και εάν $q_n<s_0$, τότε: $q_{n+1}=\varphi(q_n)<\varphi(s_0)=s_0,\ \ \forall n$, οπότε $\pi=\lim_{n\to+\infty}q_n\leq s_0$.

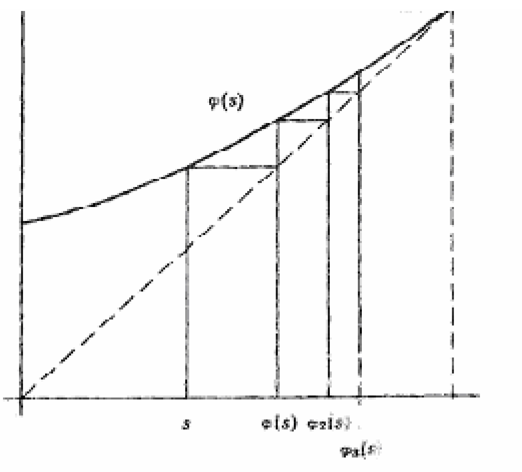
Έστω τώρα ότι $p_0+p_1<1$. Η $\varphi(s)$ είναι κυρτή συνάρτηση ως προς s (γιατί η $\varphi''(s)=\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)p_k s^{k-2}>0$) οπότε το γράφημα της μπορεί να τέμνει την διχοτόμο της $1^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων, δηλαδή την $y=s$, σε δύο το πολύ σημεία (δείτε σχήματα 1,2).

Επειδή $\varphi(1)=1$, το ένα σημείο τομής είναι σίγουρα το (1,1).

(1,1) (1,1)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

(α) Εάν $m=\varphi'(1)>1$, τότε η κλίση της εφαπτομένης στο γράφημα της φ(s) στο σημείο s=1 ξεπερνά το 1 (σχήμα 1). Εδώ $0<\pi<1$

(β) Εάν $m=\varphi'(1)\leq 1$, τότε η αντίστοιχη κλίση είναι μικρότερη ή ίση του 1 (σχήμα 2). Εδώ $\pi=1$.

#

Παράδειγμα 1
Έστω ότι κάθε αρσενικός οργανισμός σε μια κοινωνία έχει τρεις απογόνους, οι οποίοι ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον έχουν πιθανότητα ½ να είναι αρσενικοί και ½ να είναι θηλυκοί. Αν ο αριθμός των αρσενικών της $n^{οστής}$ γενιάς είναι μια κλαδωτή αλυσίδα, να βρεθεί η πιθανότητα εξάλειψης τους..

Λύση
Η π.π. f του αριθμού ξ των αρσενικών απογόνων ενός αρσενικού οργανισμού είναι διωνυμική με παραμέτρους $n=3, p=\frac{1}{2}$. Άρα

$$f(0)=P\{\xi=0\}=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}, f(1)=\frac{3}{8},\ f(2)=\frac{3}{8},\ f(3)=\frac{1}{8}.$$

Ο μέσος αριθμός m των αρσενικών απογόνων είναι $m=\sum_{\kappa=0}^{3}\kappa f(\kappa)=\frac{3}{2}$. Επειδή m>1, η πιθανότητα εξάλειψης π είναι η ρίζα της εξίσωσης:

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}s+\frac{3}{8}s^2+\frac{1}{8}s^3=s \Rightarrow s^3+3s^2-5s+1=0 \Rightarrow s=1,\ s=-\sqrt{5-2},\ s=\sqrt{5-2}. \qquad \text{Άρα } p=\sqrt{5}-2.$$

Εάν στο παραπάνω παράδειγμα, μια οικογένεια έχει δύο αγόρια και ένα κορίτσι, ποιά η πιθανότητα η αλυσίδα να συνεχίζεται έπ' άπειρον;

Εδώ θεωρούμε ότι η αλυσίδα ξεκινά με δύο άτομα. Άρα, η πιθανότητα εξάλειψης

$$\tilde{p}=p^2=\left(\sqrt{5}-2\right)^2=5-4\sqrt{5}+4=9-4\sqrt{5}$$

απ' όπου έπεται ότι, η πιθανότητα να απειρίζεται η κ.α. είναι ίση με: $\hat{p}=1-\tilde{p}=1-9+4\sqrt{5}=4\sqrt{5}-8=4\left(\sqrt{5}-2\right)$

#

Παρατήρηση 4

(α) Το αποτέλεσμα της παραπάνω πρότασης, τουλάχιστον στην περίπτωση που m<1, είναι κάτι που αναμένεται. Αφού κάθε οργανισμός αποκτά κατά μέσον όρο λιγότερο από έναν απόγονο, ο πληθυσμός αργά ή γρήγορα θα εξαλειφθεί. Δεν είναι φανερό όμως, εκ των προτέρων, ότι δεν μπορεί να υπάρξει μια κατάσταση ισορροπίας στην περίπτωση που $m=1$.

(β) Το γεγονός ότι $\varphi_n(0) \underset{n\to\infty}{\to} \pi$ έπεται ότι:

$$\begin{cases} P\{X_n=0\} \underset{n\to\infty}{\to} \pi \\ P\{X_n=k\} \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ k=1,2,... \quad \left(\Rightarrow P\left\{\lim\limits_{n\to\infty} X_n=+\infty\right\}=1\text{-}\pi\right) \end{cases}$$

Δηλαδή εάν σε μιά κ.α. έχουμε m>1, τότε ο πληθυσμός ή εξαλείφεται με πιθανότητα π ή απειρίζεται με πιθανότητα 1-π (αστάθεια του συστήματος).

(γ) Για την πιθανότητα εξάλειψης λοιπόν ενός πληθυσμού, πρέπει να υπολογίσουμε την μικρότερη από τις ρίζες της εξίσωσης $s=\varphi(s)$. Υπάρχουν δύο τρόποι.

(1) (Αναλυτική μέθοδος) Ένας πρώτος τρόπος να υπολογίσουμε τις ρίζες της εν λόγω εξίσωσης είναι να χρησιμοποιήσουμε μιά από τις μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης. Πρώτα υπολογίζουμε το m, γιατί εάν $m \le 1$ τότε $\pi=1$.

(2) (Αναλυτική προσεγγιστική μέθοδος) Ένας δεύτερος τρόπος, είναι να υπολογίσουμε το όριο της ακολουθίας $\{\varphi_n(s)\}_{n=1}^{+\infty}$, με άλλα λόγια να χρησιμοποιήσουμε επαναληπτικά την σχέση (δείτε τα σχήματα 1 και 2):

$$u_{n+1}=\varphi(u_n),\ n=1,2,...\ \&\ u_1 \in (0,1) \qquad (**)$$

Πράγματι, εάν: $0 \le s \le \pi \Rightarrow \varphi(s) \le \varphi(\pi) \Rightarrow \varphi_2(s)=\varphi(\varphi(s)) \le \varphi(\varphi(\pi))=\pi$
$\Rightarrow \varphi_n(s) \le \pi$, $\forall n$.

Αλλά $\varphi_n(s) \ge \varphi_n(0)=q_n$, $\forall n$ οπότε: $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(s)=\pi$, $0 \le s \le \pi$

Ακόμα, εάν m>1, τότε για $\pi < s < 1 \Rightarrow \pi < \varphi(s) < s < 1 \Rightarrow \pi < \varphi_n(s) < \varphi_{n-1}(s) < \ldots$ οπότε

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(s) \geq \pi$$

και μάλιστα είναι ίσο με π.

Γιατί εάν υπάρχει $s_o \in (\pi,1)$ τ.ω. $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(s_o)=a > \pi$ τότε:

$$\varphi(a)=\lim_{n\to+\infty} \varphi(\varphi_n(s_o))=\lim_{n\to+\infty} \varphi_{n+1}(s_o)=a$$

(δηλαδή το a είναι ρίζα της εξίσωσης $s=\varphi(s)$) και επειδή λόγω κυρτότητας $\varphi(s) < s$, έχουμε:

$$\pi<a=\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(s_o)< \varphi(s_o)< s_o <1$$

που έρχεται σε αντίθεση με την μοναδικότητα του π. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(s)=\pi$.

(δ) Για τον υπολογισμό των *πιθανοτήτων μετάβασης n βημάτων* σε μιά κ.α. ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 3 Η πιθανότητα μετάβασης n βημάτων $p_{ij}^{(n)}=P\left\{X_{n+1}=j \middle| X_0=i\right\}$ σε μια κ.α. είναι ίση με τον συντελεστή του s^j στο ανάπτυγμα της $\left(\varphi_n(s)\right)^i$, σε δυναμοσειρά.

Απόδειξη.
Θεωρούμε i υποπληθυσμούς καθένας από τους οποίους προκύπτει από έναν από τους i οργανισμούς της αρχικής γενιάς. Εάν λοιπόν με $X_n^{(m)}$, $1 \leq m \leq i$ συμβολίσουμε το μέγεθος του πληθυσμού της $n^{οστής}$ γενιάς της m αλυσίδας (δηλαδή των απογόνων του m οργανισμού), τότε $\forall n$ οι $\left\{X_n^{(m)}\right\}_{m=1}^{i}$ είναι ανεξάρτητες και

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P\left\{X_{n+1}=j \middle| X_0=i\right\} s^j = \sum_{j=0}^{+\infty} P\left\{\sum_{m=1}^{i} X_n^{(m)}=j\right\} s^j \qquad (***)$$

που είναι η πιθανογεννήτρια του αθροίσματος των ανεξαρτήτων τ.μ $\left\{X_n^{(m)}\right\}_{m=1}^{i}$, κάθε μιά από τις οποίες έχει πιθανογεννήτρια ίση με $\varphi_n(s)$.

Άρα η $(***)=\left(\varphi_n(s)\right)^i$, και έτσι αναπτύσσοντας την $\left(\varphi_n(s)\right)^i$ σε δυναμοσειρά και εξισώνοντας τους συντελεστές, έχουμε το ζητούμενο.

#

3.5 Παραδείγματα κλαδωτών αλυσίδων

(1) Εάν $X_0=1$ και η π.σ. $\varphi(s)=q+ps,\ p+q=1\ ,\ p,q>0$, σημαίνει ότι κάθε οργανισμός είτε πεθαίνει με πιθανότητα q είτε επιζεί με πιθανότητα p, τότε πρόκειται για μιά όπως λέμε **αμιγή διαδικασία θανάτου** (η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού περιμένουμε να είναι βέβαιη). Εδώ

$$E\xi_1=0\cdot q+1\cdot p=p<1 \Rightarrow \pi=1 \quad \left(\varphi(s)=s \Rightarrow q+ps=s \Rightarrow s=1\right)$$

Εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την πιθανογεννήτρια της X_n. Πράγματι

$$\varphi_2(s)=q+p(q+ps)=q+pq+p^2s=1-p^2+p^2s$$

και επαγωγικά $\varphi_n(s)=1-p^n+p^ns$.

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε και την <u>κατανομή</u> του **χρόνου εξάλειψης T του πληθυσμού**:

$$\begin{aligned} P\left\{T=n\middle|X_0=k\right\}&=P\left\{X_n=0\middle|X_0=k\right\}-P\left\{X_{n-1}=0\middle|X_0=k\right\}= \\ &=\left(\varphi_n(0)\right)^k-\left(\varphi_{n-1}(0)\right)^k=\left(1-p^n\right)^k-\left(1-p^{n-1}\right)^k \end{aligned}$$

(2) Όταν $\varphi(s)=as^2+bs+c,\ a,b,c>0\ \&\ \varphi(1)=1$ τότε, εάν $c<a$ έχουμε $\pi=\frac{c}{a}$.

(3) Εάν σε μιά κ. α. οργανισμοί γεννούν απογόνους σύμφωνα με την κατανομή:

$$p_k=P\left\{\xi_1=k\right\}=b\cdot c^{k-1}, \qquad p_0=1-\sum_{m=1}^{+\infty}p_k,\ \ b,c>0\ \&\ \ b+c<1$$

τότε η πιθανογεννήτρια της. $\xi_k,\ k=1,2,3,....$ είναι ίση με:

$$\varphi(s)=\frac{1-b-c}{1-c}+bs\sum_{k=1}^{+\infty}\left(cs\right)^{k-1}=\frac{1-(b+c)}{1-c}+\frac{bs}{1-sc}$$

Υπάρχουν <u>πάντα</u> δύο λύσεις της εξίσωσης $s=\varphi(s)$, οι: $s_0=\frac{1-b-c}{c(1-c)}$, $s_1=1$. Ακόμα μπορεί να δειχθεί ότι η πιθανογεννήτρια της X_n δίνεται από την:

$$\varphi_n(s)=1-m^n\frac{1-s_0}{m^n-s_0}+\frac{m^n\left(\frac{1-s_0}{m^n-s_0}\right)^2s}{1-s\frac{m^n-1}{m^n-s_0}}$$

οπότε η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού είναι ίση με:

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} P\{X_n=0\} = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(0) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-m^n\frac{1-s_0}{m^n-s_0}\right) = \begin{cases} s_0 & m>1 \\ 1 & m\le 1 \end{cases}$$

Επίσης η κατανομή του χρόνου εξάλειψης T (για $m \neq 1$) δίνεται από την:

$$P\{T=n\} = P\{T\le n\} - P\{T\le n-1\} = \varphi_n(0)-\varphi_{n-1}(0) = m^{n-1}\frac{(m-1)(1-s_0)}{(m^n-s_0)(m^{n-1}-s_0)}$$

Εφαρμογή 1 (Εξάλειψη επωνύμων)

O Lotka με βάση τα στοιχεία απογραφής για τους απογόνους των λευκών οικογενειών του 1920 στις Η.Π.Α., υπολόγισε ότι η κατανομή $\{p_k\}$ των αγοριών κατά οικογένεια προσεγγίζεται πολύ καλά από την: $p_0=0{,}48$, $p_\kappa=(0{,}21)(0{,}59)^{\kappa-1}$ $k\ge 1$.

Σ' αυτή την περίπτωση

$$\varphi(s) = \frac{0{,}48-0{,}04s}{1-0{,}56s}.$$

Λύνοντας την εξίσωση $\varphi(s)=s,\ s<1$, έχουμε $s=0{,}86$, δηλαδή η πιθανότητα εξάλειψης του επωνύμου μιας οικογένειας (διατηρείται μόνον από τα αρσενικά άτομα) είναι αρκετά μεγάλη.

Εάν υπάρχουν k άντρες με το ίδιο επώνυμο, και υποθέσουμε ότι γεννούν απογόνους ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, τότε η πιθανότητα εξάλειψης του επωνύμου μιας οικογένειας είναι $(0{,}86)^k$, δηλαδή μικρή για k μεγάλο.

Ειδική περίπτωση

Εάν $b=c(1-c)$, τότε έχουμε την «κανονική» **γεωμετρική κατανομή** με $p_k=(1-c)c^k$, $k=0,1,2,\ldots$ ενώ αν $b=(1-c)$ την γεωμετρική με $p_k=(1-c)c^{k-1}$, $k=1,2,\ldots$.

Στην περίπτωση της «κανονικής» γεωμετρικής κατανομής, $\varphi(s)=\dfrac{q}{1-ps}$ και

$$\varphi_n(s) = \begin{cases} \dfrac{n-(n-1)s}{n+1-ns} & p=q=\dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{q\left[p^n-q^n-ps\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)\right]}{p^{n+1}-q^{n+1}-ps\left(p^n-q^n\right)} & p\neq q \end{cases}$$

Η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού στην n^{οστή} γενιά είναι ίση με:

$$P\{X_n=0\}=\varphi_n(0)=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1} & p=q=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{q\left[p^n-q^n\right]}{p^{n+1}-q^{n+1}} & p\neq q\end{cases}$$

ενώ η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού είναι $\pi=\lim\limits_{n\to\infty}P\{X_n=0\}=\begin{cases}\dfrac{p}{q} & p>q\\ 1 & p\leq q\end{cases}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας καθώς και μια διαισθητική της ερμηνεία δόθηκε στο κεφάλαιο 1. Στο παρόν κεφάλαιο δίνεται μια επιπλέον ερμηνεία της, γενικεύεται ο ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας και αποδεικνύονται μερικές βασικές ιδιότητές του. Το κεφάλαιο αυτό είναι χρήσιμο στην κατανόηση του κεφαλαίου που ακολουθεί.

4.1 Ερμηνεία της δεσμευμένης πιθανότητας

Θα μπορούσε, λοιπόν, να θεωρηθεί ότι ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ περιγράφει έναν μηχανισμό ο οποίος «κυβερνιέται» από την τύχη και παράγει ένα αποτέλεσμα ω που κατανέμεται σύμφωνα με το P. Για τον παρατηρητή, η P(A) είναι η πιθανότητα το σημείο ω, που παρήχθη, να ανήκει στο A.

Έστω ότι το ω ανήκει στο σύνολο B και ότι ο παρατηρητής γνωρίζει μόνο αυτή την πληροφορία και όχι άλλη. Από την πλευρά του παρατηρητή, που έχει την (μερική) πληροφορία αυτή, η πιθανότητα του ω να ανήκει στο A είναι P(A | B) αντί για P(A). Στην ιδέα αυτή, γενικότερα, στηρίζεται κανείς για να ορίσει την δεσμευμένη πιθανότητα.

4.2 Ορισμός και εφαρμογές της Δεσμευμένης πιθανότητας

Θεωρούμε τον πιθανοθεωρητικό χώρο $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και έστω $B \in \mathcal{A}$ ένα γεγονός με θετική πιθανότητα, P(B)>0. Τότε:

- **Ορισμός 1**
  Η **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος A δοθέντος του γεγονότος B** παριστάνεται με το σύμβολο P(A | B) και ορίζεται από τη σχέση:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Παρατήρηση 1

(α) Η δεσμευμένη πιθανότητα συνδέεται στενά και με την ανεξαρτησία. Έτσι εάν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους τότε ισχύει ότι:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

δηλαδή η πληροφορία ότι συνέβη το B δεν αλλάζει την πιθανότητα του A.

(β) Με την χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας αποδεικνύονται διάφορα χρήσιμα θεωρήματα, όπως θεώρημα ολικής πιθανότητας, θεώρημα Bayes κ.λ.π. (δείτε κεφάλαιο 1).

Εφαρμογή 1
Εάν $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ, αποδεικνύεται ότι για s < t :

$$\mathrm{P}\{\mathrm{N}_s = k | \mathrm{N}_t = n\} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} = \mathrm{B}\left(k / n; \left(\frac{s}{t}\right)\right), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Απόδειξη
Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$\mathrm{P}\{\mathrm{N}_s = k | \mathrm{N}_t = n\} = \frac{\mathrm{P}\{\mathrm{N}_s = k, \mathrm{N}_t = n\}}{\mathrm{P}\{\mathrm{N}_t = n\}} = \frac{\mathrm{P}\{\mathrm{N}_s = k, \mathrm{N}_t - \mathrm{N}_s = n-k\}}{\mathrm{P}\{\mathrm{N}_t = n\}} =$$

$$\overset{\alpha.\pi}{=} \frac{\mathrm{P}\{\mathrm{N}_s = k\} \cdot \mathrm{P}\{\mathrm{N}_t - \mathrm{N}_s = n-k\}}{\mathrm{P}\{\mathrm{N}_t = n\}} \overset{\sigma.\pi}{=} \frac{\mathrm{P}\{\mathrm{N}_s = k\} \cdot \mathrm{P}\{\mathrm{N}_{t-s} = n-k\}}{\mathrm{P}\{\mathrm{N}_t = n\}} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda s} \frac{(\lambda \cdot s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^k \cdot \left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} = \mathrm{B}\left(k / n; \left(\frac{s}{t}\right)\right)$$

#

Εφαρμογή 2
Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ) με τιμές στο σύνολο των φυσικών αριθμών τέτοιες ώστε:

X = i ομοιόμορφα κατανεμημένη τ.μ. , όπου i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 .
Y = αριθμός των «κεφαλών» όταν ρίχνουμε X νομίσματα.

Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{i} | \mathrm{Y} = 0) = \frac{2^{6-\mathrm{i}}}{63}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{i} | \mathrm{Y} = 0) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{i}, \mathrm{Y} = 0)}{\mathrm{P}(\mathrm{Y} = 0)} \underset{\text{θ. ολικής πιθανότητας}}{\overset{\text{πολλ/στικό θεώρημα}}{=}} \frac{\mathrm{P}(\mathrm{Y}=0 | \mathrm{X}=\mathrm{i}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{i})}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{6} \mathrm{P}(\mathrm{Y}=0 | \mathrm{X}=\mathrm{i}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{i})}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=\mathrm{i}\right)=\frac{1}{6}$$

για i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, αφού η τ.μ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη.

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{Y}=0\middle|\mathrm{X}=\mathrm{i}\right)=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}}_{\mathrm{i}\ \ \nu o\mu i\sigma\mu\alpha\tau\alpha}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}}$$

Κατά συνέπεια, η αρχική μας σχέση γίνεται ως εξής:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=\mathrm{i}\middle|\mathrm{Y}=0\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{6}}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{6}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}}}{\frac{63}{64}}=$$

$$=\frac{64}{63}\cdot\frac{1}{2^{\mathrm{i}}}=\frac{2^{6}}{63\cdot 2^{\mathrm{i}}}=\frac{2^{6\text{-}\mathrm{i}}}{63},\qquad \text{όπου}\quad \mathrm{i}=1,2,3,4,5,6$$

#

Εφαρμογή 3

Εάν $\{\mathrm{X}_t\}_{t\geq 0}$, $\{\mathrm{Y}_t\}_{t\geq 0}$ είναι δύο ανεξάρτητες ανελίξεις Poisson με ρυθμούς λ και μ αντίστοιχα, τότε:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_t=k\middle|\mathrm{X}_t+\mathrm{Y}_t=n\right)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k}\cdot\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k},\quad 0\leq k\leq n.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_t=k\middle|\mathrm{X}_t+\mathrm{Y}_t=n\right)=\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_t=k,\mathrm{X}_t+\mathrm{Y}_t=n\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_t+\mathrm{Y}_t=n\right)}=\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_t=k,\mathrm{Y}_t=n-k\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_t+\mathrm{Y}_t=n\right)}=$$

$$\overset{\alpha\nu\varepsilon\xi.}{=}\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_t=k\right)\cdot\mathrm{P}\left(\mathrm{Y}_t=n-k\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_t+\mathrm{Y}_t=n\right)}=\frac{e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{k}}{k!}\cdot e^{-\mu t}\cdot\frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)t}\cdot\frac{\left((\lambda+\mu)t\right)^{n}}{n!}}=$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\lambda^{k}\cdot\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^{n}}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k}\cdot\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

#

➢ Αν θεωρήσουμε ότι $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega, B, B^c\}$ τότε η **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος Α δοθέντος της κλάσης** $\mathcal{A}$ ορίζεται ως έξης:

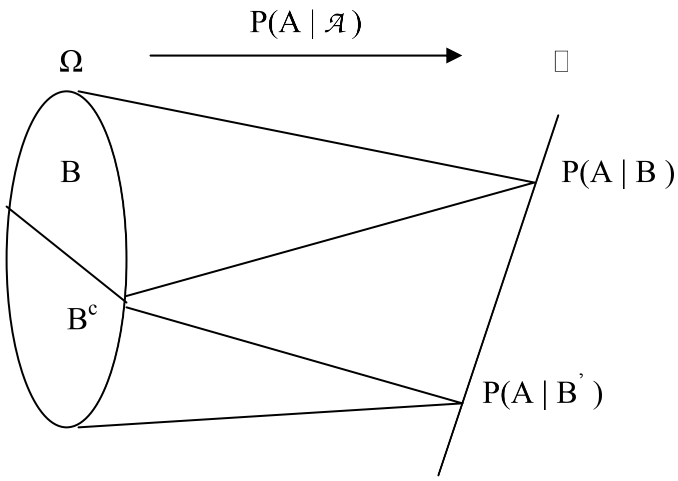
$$P(A \mid \mathcal{A}) \overset{\Delta}{=} P(A \mid B)\cdot I_B + P(A \mid B^c)\cdot I_{B^c}$$

ή

$$P(A \mid \mathcal{A})(\omega) = \begin{cases} P(A|B)(\omega) & \alpha\nu \quad \omega \in B \\ P(A|B^c)(\omega) & \alpha\nu \quad \omega \in B^c \end{cases}$$

Δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση η δεσμευμένη πιθανότητα παίρνει τη μορφή μιας δίτιμης συνάρτησης (με τιμή $P\left(A|B\right)(\omega)$ αν $\omega \in B$, και με τιμή $P\left(A|B^{'}\right)(\omega)$ αν $\omega \in B^{'}$).

Σχηματικά θα μπορούσε να παρασταθεί ως εξής:



Κατά συνέπεια ο ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας, γενικότερα, παίρνει την εξής μορφή:

Ορισμός 2

Αν $P = \{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι μία διαμέριση του Ω τότε η **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος Α ως προς τη διαμέριση** P ορίζεται ως εξής:

$$P(A \mid P) = \sum_{j=1}^{\infty} P\left(A|B_j\right)\cdot I_{B_j}$$

Εναλλακτικά, αν θεωρήσουμε ότι $\mathcal{B} = \sigma(P)$ (σ-άλγεβρα που γεννιέται από την κλάση P) τότε η παραπάνω σχέση, **η δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος Α ως προς την σ-άλγεβρα** $\mathcal{B}$, παίρνει την εξής μορφή:

$$P(A \mid P\,) = P(A \mid \mathcal{B}\,)$$

Παρατήρηση 2
Εάν συμβεί για κάποιο B_j, $P(B_j) = 0$, τότε ορίζουμε την $P(A \mid \mathcal{B}\,)$ να παίρνει οποιαδήποτε σταθερή τιμή στο B_j. Γι' αυτό οποιεσδήποτε δύο τέτοιες συναρτήσεις $P(A \mid \mathcal{B}\,)$ καλούνται <u>**παραλλαγές**</u> **της δεσμευμένης πιθανότητας του γεγονότος Α δοθέντος της κλάσης $\mathcal{B}$.**

Εφαρμογή 4
Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σε έναν πιθανοθεωρητικό χώρο $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, με τιμές στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, $A = \{X = j\}$, $B_i = \{X + Y = i\}$, όπου j σταθερός αριθμός. Αν $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ μία διαμέριση του Ω και $\mathcal{B} = \sigma\left(B_j;\ \ j \in \mathbb{N}\right)$, τότε να υπολογισθεί να υπολογισθεί η $P(A \mid \mathcal{B}\,)$.

Λύση

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(A \mid \mathcal{B}\,) = \sum_{i\geq j} P\left(A \middle| B_i\right)\cdot I_{B_i}$$

Όμως,

$$P\left(A\middle|B_i\right)=P\left(X=j\middle|X+Y=i\right)=\frac{P\left(X=j,X+Y=i\right)}{P\left(X+Y=i\right)}\overset{\text{ανεξ.}}{=}$$

$$=\frac{P\left(X=j\right)\cdot P\left(Y=i\text{-}j\right)}{P\left(X+Y=i\right)},\ \text{αν}\quad i>j$$

Οπότε,

$$P(A \mid \mathcal{B}\,) = \sum_{i\geq j}\frac{P\left(X=j\right)\cdot P\left(Y=i\text{-}j\right)}{P\left(X+Y=i\right)}\cdot I_{\{X+Y=i\}}$$

Ειδική Περίπτωση
Αν X, Y είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$ τότε είναι γνωστό ότι ισχύει $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$.

Στην περίπτωση αυτή η $P(A \mid \mathcal{B}\,)$ θα ήταν:

$$P(A \mid \mathcal{B}\,) = \sum_{i\geq j}\frac{P\left(X=j\right)\cdot P\left(Y=i\text{-}j\right)}{P\left(X+Y=i\right)}\cdot I_{\{X+Y=i\}} = \sum_{i\geq j}\frac{e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^j}{j!}\cdot e^{-\mu}\cdot\dfrac{\mu^{i\text{-}j}}{(i\text{-}j)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\dfrac{(\lambda+\mu)^i}{i!}}\cdot I_{\{X+Y=i\}} =$$

$$= \sum_{i \geq j} \binom{i}{j} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{i} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j} \cdot I_{\{X+Y=i\}}$$

#

Μέχρι τώρα μελετήσαμε την περίπτωση της δεσμευμένης πιθανότητας ενός γεγονότος A δοθέντος της $\mathcal{B}$, όπου $\mathcal{B}$ είναι μία σ-άλγεβρα που γεννιέται από μία πεπερασμένη ή αριθμήσιμη διαμέριση του δειγματοχώρου Ω. Είναι φανερό από τον ορισμό αυτό ότι, **η δεσμευμένη πιθανότητα** $P(A \mid \mathcal{B})$ **του γεγονότος A ως προς την σ-άλγεβρα** $\mathcal{B}$, ικανοποιεί τις δύο παρακάτω ιδιότητες:

I. $P(A \mid \mathcal{B}) = \mathcal{B}$ -μετρήσιμη, δηλαδή οι τιμές της εξαρτώνται μόνο από τα σύνολα της κλάσης $\mathcal{B}$.

II. $\int_G P(A \mid \mathcal{B})\, dP = P(A \cap G)$, για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$.

Αν γενικεύσουμε την περίπτωση αυτή θεωρώντας ότι η κλάση $\mathcal{B}$ είναι μία σ-άλγεβρα που δημιουργήθηκε από μία μη αριθμήσιμη διαμέριση του Ω, τότε ο αντίστοιχος ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας έχει ως εξής:

Ορισμός 3α (δεσμευμένη πιθανότητα ως προς (τυχούσα) σ-άλγεβρα)
Η **δεσμευμένη πιθανότητα** $P(A \mid \mathcal{B})$ **του γεγονότος A ως προς την σ-άλγεβρα** $\mathcal{B}$ (η $\mathcal{B}$ θεωρείται υπό-σ-άλγεβρα της $\mathcal{A}$, δηλαδή $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$) , είναι μιά συνάρτηση (η $P(A \mid \mathcal{B})$: $\mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$) που ικανοποιεί τις ιδιότητες I και II παραπάνω.

Ένας δεύτερος ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας, με την βοήθεια του θεωρήματος Radon-Nikodym, είναι αυτός που ακολουθεί

Ορισμός 3β (Εναλλακτικός ορισμός)
Εάν (Ω, $\mathcal{A}$, P) είναι ένας χώρος πιθανότητας και για $A \in \mathcal{B}$, όπου A σταθερό, ορίσουμε το μέτρο

$$V(G) = P(A \cap G), \qquad (V: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]).$$

Τότε το V είναι απόλυτα συνεχές, σε σχέση με το P, δηλαδή $V \ll P$.

Πράγματι, αν $P(G) = 0 \Rightarrow P(A \cap G) = 0 \Rightarrow V(G) = 0$

Άρα, από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη τέτοια ώστε:

$$v(G) = \int_G f\, dP = P(A \cap G),$$

απ΄ όπου έπεται ότι $f =$ P(A | $\mathcal{B}$).

Σχόλιο 1 (επέκταση του ορισμού στην διακριτή περίπτωση)
Αν $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι μία αριθμήσιμη διαμέριση του Ω και ορίσουμε σαν

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)\cdot I_{B_i},$$

τότε (α) η f είναι $\mathcal{B}$ –μετρήσιμη και

(β) για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$ και $G = \bigcup_k B_{i_k}$ ισχύει ότι:

$$\int_G f\,dP = \int_G \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)\cdot I_{B_i}\,dP = \sum_{i=1}^{\infty}\int_\Omega P(A|B_i)\cdot I_{B_i\cap G}dP =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)\cdot P(B_i\cap G) \overset{G=B_k}{=} \sum_{\substack{k\\ B_k\subset G}} P(A|B_k)\cdot P(B_k) =$$

$$= \sum_{\substack{k\\ B_k\subset G}} \frac{P(A\cap B_k)}{P(B_k)}\cdot P(B_k) = \sum_{\substack{k\\ B_k\subset G}} P(A\cap B_k) = P(A\cap G)$$

που σημαίνει ότι ικανοποιείται η (ΙΙ) ιδιότητα, του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας.

Δηλαδή, ο παραπάνω ορισμός 3α της δεσμευμένης πιθανότητας συμφωνεί με εκείνον που δόθηκε στην περίπτωση μιάς αριθμήσιμης διαμέρισης. Έτσι ο παραπάνω ορισμός είναι μιά γενίκευση (του ορισμού) της δεσμευμένης πιθανότητας ως προς τυχούσα σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$.

Εφαρμογή 5 (Γενικευμένο θεώρημα Bayes)

Αποδεικνύεται ότι, για κάθε γεγονός Β που ανήκει στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ ισχύει:

$$P(A\mid B) = \frac{\int_B P(A\mid\mathcal{B})dP}{\int_\Omega P(A\mid\mathcal{B})dP}$$

Απόδειξη
Από τον ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\int_B P(A \mid \mathcal{B})dP}{\int_\Omega P(A \mid \mathcal{B})dP}$$

#

Παρατήρηση 3 (Θεώρημα Bayes, κλασσική μορφή)

Αν $\left\{B_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ διαμέριση του Ω και $\mathcal{B} = \sigma\left(\left\{B_j / j \in \mathbb{N}\right\}\right)$ τότε, από το γενικευμένο θεώρημα Bayes, προκύπτει το γνωστό θεώρημα Bayes που έχει ως εξής:

$$P\left(B_k \middle| A\right) = \frac{P\left(A \middle| B_k\right) \cdot P\left(B_k\right)}{P\left(A\right)}$$

Πράγματι,

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{\int_{B_k} P(A \mid \mathcal{B})\, dP}{\int_\Omega P(A \mid \mathcal{B})\, dP} \qquad (1)$$

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει ότι:

$$P(A \mid \mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{\infty} P\left(A \middle| B_i\right) \cdot I_{B_i}$$

Άρα, για κάθε $B_k \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι:

$$\int_{B_k} P(A \mid \mathcal{B})\, dP = \int_{B_k} \sum_{j=1}^{\infty} P\left(A \middle| B_j\right) \cdot I_{B_j} dP$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A \middle| B_i\right) \cdot P\left(B_i \cap B_k\right) = P\left(A \middle| B_k\right) \cdot P\left(B_k\right) \qquad (2)$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι: $\int_\Omega P(A \mid \mathcal{B})\, dP = \sum_j P\left(A \middle| B_k\right) \cdot P\left(B_k\right) = P\left(A\right)$ (3)

Επομένως, η σχέση (1) με τη βοήθεια των σχέσεων (2) και (3) έχει ως εξής:

$$P\left(B_k \middle| A\right) = \frac{P\left(A \middle| B_k\right) \cdot P\left(B_k\right)}{P\left(A\right)}$$

#

Παίρνουμε δηλαδή μια δεύτερη απόδειξη του κλασσικού θεωρήματος Bayes**,** με την βοήθεια των δεσμευμένων πιθανοτήτων.

Η πρόταση που ακολουθεί μας δίνει την μορφή της δεσμευμένης πιθανότητας σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις.

Πρόταση 1

1) Αν $A \in \mathcal{B}$ τότε $P(A|\mathcal{B}) = I_A$

2) Αν $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ τότε $P(A|\mathcal{B}) = P(A)$

3) Το A είναι ανεξάρτητο της $\mathcal{B}$ αν και μόνον αν ισχύει $P(A \mid \mathcal{B}) = P(A)$.

Απόδειξη

Δίνουμε εδώ την απόδειξη μόνο του 3, τα υπόλοιπα είναι εύκολο να δειχθεί ότι ισχύουν.

3) $(\Rightarrow)$ Έστω ότι το A είναι ανεξάρτητο της $\mathcal{B}$. Τότε ισχύει ότι: για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$

$$P(A \cap G) = P(A) \cdot P(G) = P(A) \cdot \int_G dP = \int_G P(A) dP = \int_G P(A| \ \mathcal{B}) \ dP.$$

Επομένως, $P(A \mid \mathcal{B}) = P(A)$.

$(\Leftarrow)$ Αντίστροφα, έστω ότι $P(A \mid \mathcal{B}) = P(A)$. Τότε ισχύει: για κάθε G που ανήκει στη $\mathcal{B}$

$$P(A \cap G) = \int_G P(A| \ \mathcal{B}) dP = \int_G P(A) \ dP = P(A) \cdot \int_G dP = P(A) \cdot P(G).$$

Δηλαδή, το A είναι ανεξάρτητο της $\mathcal{B}$.

#

4.3 Ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας.

Η επόμενη πρόταση δίνει τις βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας. Λόγω του ότι οι εν λόγω ιδιότητες είτε είναι προφανείς είτε εύκολο να αποδειχθούν, δεν δίνεται η απόδειξη.

Πρόταση 2 (Ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας)

i. $0 \leq P(A \mid \mathcal{B}) \leq 1$, για κάθε γεγονός $A \in \mathcal{B}$.

ii. Αν $A_i \cap A_j = \varnothing$ για $i \neq j$ τότε $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j | \mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j | \mathcal{B})$

iii. Αν $A \subset B$ τότε $P(A | \mathcal{B}) \leq P(B | \mathcal{B})$

iv. $P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j | \mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j | \mathcal{B}) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j | \mathcal{B}) + \ldots$

v. Αν $A_n \uparrow A$ τότε $P(A_n | \mathcal{B}) \uparrow P(A | \mathcal{B})$

Αν $A_n \downarrow A$ τότε $P(A_n | \mathcal{B}) \downarrow P(A | \mathcal{B})$

vi. Αν $P(A) = 1$ τότε $P(A | \mathcal{B}) = 1$

Αν $P(A) = 0$ τότε $P(A | \mathcal{B}) = 0$

Παρατήρηση 4

1) Οι ιδιότητες (i) και (ii) απορρέουν απευθείας από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και μας αναφέρουν, μ' άλλα λόγια, ότι η συνολοσυνάρτηση $P(\cdot | \mathcal{B})$ είναι πιθανοθεωρητικό μέτρο (ορισμένο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$).

2) Όσο η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ μικραίνει τόσο πιο περιοριστική είναι η ιδιότητα (I) του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας. Αντίθετα, όσο αυξάνει η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$, τόσο πιο περιοριστική γίνεται η ιδιότητα (II) του ορισμού της.

Τελειώνοντας, δίνουμε τον ορισμό και μερικές εφαρμογές της δεσμευμένης πιθανότητας ενός γεγονότος ως προς μιά τυχαία μεταβλητή, έννοια η οποία γενικεύεται στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

Ορισμός 4 (δεσμευμένη πιθανότητα ως προς μια τ.μ.)

Έστω Χ μια τ.μ. ορισμένη στον χώρος πιθανότητας (Ω, $\mathcal{A}$, P) και σ(Χ) η σ-άλγεβρα που γεννιέται από την Χ, δηλαδή

$$\sigma(X) = \sigma\left(\{\omega / X(\omega) \in B\}_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\right)$$

Τότε η **δεσμευμένη πιθανότητα** $P(A | X)$ **του γεγονότος Α ως προς την τ.μ. Χ,** ορίζεται να είναι η:

$$P(A | X) = P(A | \sigma(X))$$

Εφαρμογή 6

Έστω X: $\Omega \to \mathbb{Z}$ μία τυχαία μεταβλητή ακεραίων τιμών. Δείξτε ότι αν ορίσουμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P\{A|X = x\}$ σαν οποιαδήποτε $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-μετρήσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε:

$$P(A, X \in B) = \int_B \underbrace{P(A|X = x)}_{\varphi(x)} dP \circ X^{-1}(x), \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad (1)$$

τότε ικανοποιεί τη σχέση:

$$P(A,X=j) = \varphi(j) \cdot P(X=j) \qquad \forall j$$

Εάν $P(X = j) > 0$ τότε συμπεραίνετε ότι κάθε παραλλαγή της παραπάνω δεσμευμένης πιθανότητας ικανοποιεί τη σχέση:

$$P(A|X = j) = \frac{P(A,X=j)}{P(X=j)}$$

Απόδειξη

Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου $B = \{j\}$, τότε προκύπτει ότι:

$$P\{A, X=j\} = \int_{\{j\}} P(A|X = x)\, dP \circ X^{-1}(x) = \underbrace{P(A|X = j)}_{\varphi(j)} \cdot P \circ X^{-1}(\{j\})$$

$$= P(A|X = j) \cdot P\{X = j\}$$

Αν $P(X = j) > 0$ είναι φανερό ότι από το παραπάνω προκύπτει ότι:

$$P\{A, X = j\} = P(A|X=j) \cdot P\{X = j\}(X = j) \Leftrightarrow P(A|X=j) = \frac{P\{A, X = j\}}{P\{X = j\}}$$

#

Σχόλιο 2

Εάν X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές που έχουν από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f(x,y)$, τότε:

$$P(X \in G, Y \in A) = \int_G \int_A f(x,y)\, dxdy$$

Κατά συνέπεια θα ισχύει ότι:

$$P(X \in G) = \int_G \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dydx$$

Δηλαδή $f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy$

Εφαρμογή 7

Εάν X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές που έχουν από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f(x,y)$, τότε να δείξετε ότι για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ισχύει ότι:

$$P\left(Y \in B \middle| X = x\right) = \int_B \frac{f(y,x)}{f(x)} dy$$

Απόδειξη

Κάθε παραλλαγή της $P\left(Y \in B \middle| X = x\right)$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$P\left\{Y \in B, X \in G\right\} = \int_G P\left(Y \in B \middle| X = x\right) dP \circ X^{-1}(x), \qquad G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Όμως, $P\left\{X \in A\right\} = \int_A f(x)dx$. Οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$P\left(Y \in B, X \in G\right) = \int_G P\left(Y \in B \middle| X = x\right) f(x) dx \qquad (1)$$

Αλλά, $P\left(Y \in B, X \in G\right) = \int_G \int_B f(x,y) dy dx$.

Επομένως, για κάθε $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, η σχέση (1) γίνεται ως εξής:

$$P\left\{Y \in B, X = x\right\} = \int_B \frac{f(y,x)}{f(x)} dy, \qquad \text{όπου } 0 < f(x) < \infty$$

#

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Στο κεφάλαιο αυτό γενικεύουμε την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας, παίρνοντας εκείνη της δεσμευμένης μέσης τιμής, η οποία αποτελεί το βασικό σημείο ορισμού των martingales.

5.1 Ορισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής

Θεωρούμε τον πιθανοθεωρητικό χώρο (Ω, $\mathcal{A}$, P) και έστω $B \in \mathcal{A}$ ένα γεγονός με θετική πιθανότητα, P(B)>0. Αν X είναι μία ολοκληρώσιμη τ.μ, δηλαδή $EX < \infty$, τότε:

- **Ορισμός 1**

Η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθέντος του γεγονότος B,** παριστάνεται με το σύμβολο E[X | B], ορίζεται από τη σχέση:

$$E\left[X|B\right] = \frac{1}{P(B)}\int_B XdP = \frac{E\left[X \cdot I_B\right]}{P(B)}$$

Αν P(B)=0, θέτουμε E[X | B]=c, όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται στην περίπτωση που δεν έχουμε δέσμευση ως προς ένα σύνολο μόνον, αλλά ως προς μιά κλάση συνόλων. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

- **Ορισμός 2**

Αν $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη διαμέριση του Ω και $\mathcal{B}$ = $\sigma\left(\{B_j; j\in\mathbb{N}\}\right)$ τότε η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθείσης της κλάσης** $\mathcal{B}$, ορίζεται ως εξής:

$$E[X|\mathcal{B}] = \sum_j E\left[X|B_j\right] \cdot I_{B_j}$$

Παρατήρηση 1
Από τον παραπάνω ορισμό, είναι φανερό ότι η δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δοθείσης της κλάσης (σ-άλγεβρας) $\mathcal{B}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

I. E[X | $\mathcal{B}$] = $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη, δηλαδή οι τιμές της εξαρτώνται μόνο από τα σύνολα του συνόλου $\mathcal{B}$.

II. $\int_B E[X|\mathcal{B}]\, dP = \int_B X dP$, για κάθε B που ανήκει στη $\mathcal{B}$.

Πράγματι,

$$\int_B E[X|\mathcal{B}]\, dP = \int_B \sum_{j=1}^{\infty} E\left[X|B_j\right] \cdot I_{B_j} dP = \sum_{j=1}^{\infty} \int_B E\left[X|B_j\right] \cdot I_{B_j} dP$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega} E\left[X|B_j\right] \cdot I_{B_j} \cdot I_B\, dP = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega} E\left[X|B_j\right] \cdot I_{B_j \cap B}\, dP$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} E\left[X|B_j\right] P(B_j \cap B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j \cap B) \int_{B_j} \frac{X}{P(B_j)}\, dP$$

$$= \sum_{\{j\,;\,B_j \subset B\}} \int_{B_j} X\, dP = \int_B X\, dP$$

Ο ορισμός 2 στην, γενικότερη, περίπτωση τώρα που η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι τυχούσα γίνεται:

- **Ορισμός 3**

Έστω X μια τ.μ. ορισμένη στον π.χ. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και $\mathcal{B}$ μια σ-άλγεβρα (η $\mathcal{B}$ θεωρείται υπό-σ-άλγεβρα της $\mathcal{A}$, δηλαδή $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$). Η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθείσης της σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$,** είναι μιά τ.μ. (συμβ. με $E[X \mid \mathcal{B}]$) τέτοια ώστε

I. $E[X \mid \mathcal{B}] = \mathcal{B}$ -μετρήσιμη

II. $\int_B E[X|\mathcal{B}]dP = \int_B X\, dP$, για κάθε B που ανήκει στη $\mathcal{B}$.

Παρατήρηση 2

(α) Το ότι ο ορισμός 3 είναι μιά γενίκευση του ορισμού 2, φαίνεται από την παρατήρηση 1.

(β) Αν X,Y είναι δύο τ.μ. τότε η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθείσης της τ.μ. Y ,** ορίζεται από την σχέση

$$E\left[X|Y\right] = E\left[X|\sigma(Y)\right]$$

όπου $\sigma(Y)$ η σ-άλγεβρα που γεννιέται από την τ.μ. Y (γ) Η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθείσης της σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$, χαρακτηρίζεται από τις δύο παραπάνω ιδιότητες σχεδόν βέβαια (εκτός δηλαδή από σύνολα που έχουν μέτρο μηδέν). Αυτό φαίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1 (μονοσήμαντο και ύπαρξη της δεσμευμένης μέσης τιμής, σ.β.)
Εάν Y είναι μία τ.μ. ορισμένη στον χώρο πιθανότητας (Ω, $\mathcal{A}$, P), τέτοια ώστε:

i. Η Y είναι $\mathcal{B}$ –μετρήσιμη.

ii. Για κάθε B που ανήκει στη $\mathcal{B}$ ισχύει

$$\int_B \mathrm{Y}\,\mathrm{dP} = \int_B \mathrm{X}\,\mathrm{dP}\,.$$

Τότε

$$\mathrm{Y} = \mathrm{E}[\mathrm{X} \mid \mathcal{B}\,] \ \ \text{σ.β.}$$

Υπάρχει τουλάχιστον μία τέτοια τυχαία μεταβλητή που να ικανοποιεί τις ιδιότητες αυτές.

Η τ.μ. Y ονομάζεται **<u>παραλλαγή</u> της δεσμευμένης μέσης τιμής της τ.μ. X δοθείσης της σ-άλγεβρας** $\mathcal{B}$.

Απόδειξη
Έστω, πρώτα, ότι η X είναι μη αρνητική. Ορίζουμε το μέτρο ν στην $\mathcal{B}$, από τη σχέση

$$\nu(G) = \int_G \mathrm{X}\,\mathrm{dP}$$

Το μέτρο είναι πεπερασμένο, γιατί η X είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης, το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το P (δηλ. ν<<P), άρα σύμφωνα με το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει f $\mathcal{B}$ –μετρήσιμη τέτοια ώστε:

$$\nu(G) = \int_G \mathrm{f}\,\mathrm{dP}$$

Επομένως, η f ικανοποιεί τις σχέσεις (i) και (ii).

Έστω τώρα ότι, η X δεν είναι απαραίτητα μη αρνητική. Τότε αυτή θα ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}^+ - \mathrm{X}^-, \text{ όπου } \mathrm{X}^+ = \max(\mathrm{X},0) \text{ και } \mathrm{X}^- = \min(\mathrm{X},0)$$

Σύμφωνα με το πρώτο μέρος της πρότασης, τα μέτρα:

$$\nu\ (\mathrm{G}) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{E}[\,\mathrm{X}^+ \mid \mathcal{B}\,]\mathrm{dP} \ \ \text{και} \ \ \mu(\mathrm{G}) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{E}[\,\mathrm{X}^- \mid \mathcal{B}\,]\mathrm{dP}$$

είναι καλά ορισμένα .Αφαιρώντας τα κατά μέλη,προκύπτει η συνάρτηση (πυκνότητα)

$$E[X^{+} | \mathcal{B}] - E[X^{-} | \mathcal{B}] = E[X | \mathcal{B}]$$

που ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης

#

Σχόλιο 1
Η παραπάνω πρόταση 2 μας αναφέρει ότι, <u>υπάρχει</u> τουλάχιστον μιά παραλλαγή της δεσμευμένης μέσης τιμής της τ.μ. X δοθείσης της σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$ και ακόμα ότι οποιεσδήποτε δύο τέτοιες παραλλαγές είναι <u>σχεδόν</u> <u>βέβαια</u> <u>ίσες</u> (διαφέρουν δηλαδή μόνον στα σημεία ενός συνόλου που έχει πιθανότητα μηδέν).
Θεωρώντας τώρα ότι δύο σχεδόν βέβαια ίσες συναρτήσεις <u>ταυτίζονται</u>, όσον αφορά ένα μέτρο πιθανότητας, σε ότι ακολουθεί και αναφέρεται σε δεσμευμένες μέσες τιμές, <u>δεν</u> θα αναφέρουμε ότι οι προτάσεις αυτές ισχύουν σχεδόν βέβαια (αν και πάντα θα έχουμε κατά νου ότι οι προτάσεις ισχύουν σ.β.).

Η πρόταση που ακολουθεί, και δίνεται χωρίς απόδειξη, μας δίνει έναν τρόπο για να εξετάσουμε, αν μια μετρήσιμη συνάρτηση είναι μιά παραλλαγή μιας δεσμευμένης μέσης τιμής.

Πρόταση 2
Έστω P ένα **π-σύστημα** (δηλαδή μια κλάση γεγονότων κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές) που γεννά την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ και ας υποθέσουμε ότι το Ω είναι ένωση πεπερασμένου ή αριθμήσιμου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{B}$. Μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f είναι μία παραλλαγή της $E[X| \mathcal{B}]$ αν και μόνο αν είναι $\mathcal{B}$–μετρήσιμη και για κάθε $B \in \mathsf{P}$ ισχύει

$$\int_B f \, dP = \int_B X \, dP , \qquad \forall B \in \mathsf{P}$$

Παρατήρηση 3
Η πρόταση 2 δηλαδή μας αναφέρει, ότι για να εξετάσουμε αν μια f $\mathcal{B}$–μετρήσιμη συνάρτηση είναι μια παραλλαγή της δεσμευμένης μέσης τιμής της τ.μ. X δοθείσης μιας σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$, δεν είναι απαραίτητο να εξετάσουμε την σχέση

$$\int_B f \, dP = \int_B X \, dP$$

$\forall B \in \mathcal{B}$, αλλά για όλα τα σύνολα B που ανήκουν σε μια <u>μικρότερη</u> κλάση P συνόλων (ένα π-σύστημα), που γεννά την εν λόγω σ-άλγεβρα.

Τα παρακάτω τρία παραδείγματα μας δίνουν την μορφή της δεσμευμένης μέσης τιμής μιάς τ.μ., σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις.

Παράδειγμα 1
Αν θεωρήσουμε ότι η κλάση $\mathcal{B}$ είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα, δηλαδή $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$, τότε προκύπτει:

$$E[X|\mathcal{B}] = E[X|\Omega]\cdot I_\Omega + E[X|\emptyset]\cdot I_\emptyset = E[X|\Omega] = \int_\Omega X\,dP = E[X]$$

Δηλαδή, $E[X|\mathcal{B}] = E[X]$

Στην περίπτωση αυτή ο υπολογισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής της τυχαίας μεταβλητής X δοθείσης της σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$ δεν μας δίνει <u>καμία</u> πληροφορία .

Παράδειγμα 2
Αν θεωρήσουμε ότι $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ και X είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη τ.μ., τότε δεδομένου ότι:

i. $X = \mathcal{B}$ –μετρήσιμη.
ii. Για κάθε B που ανήκει στη $\mathcal{B}$ ισχύει $\int_B X\,dP = \int_B X\,dP$.

έχουμε

$$E[X|\mathcal{B}] = X$$

Στην προκειμένη περίπτωση, σε αντίθεση με το παράδειγμα 1, η δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δοθείσης της σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$ μας δίνει <u>όλες</u> τις δυνατές πληροφορίες.

Παράδειγμα 3
Αν θεωρήσουμε ότι $A \in \mathcal{B}$ είναι ένα γεγονός (του δειγματοχώρου Ω) και $\mathcal{B}$ μία σ-άλγεβρα, τότε ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$P(A\,|\,\mathcal{B}) = E[I_A|\mathcal{B}] \qquad (\sigma.\beta.)$$

δηλαδή η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι γενίκευση της αντίστοιχης της δεσμευμένης πιθανότητας.

Μερικές φορές όταν ασχολούμαστε με δύο τ.μ. π.χ. X και Y και είναι γνωστές οι αντίστοιχες πυκνότητες πιθανότητας τους όπως επίσης και η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας τους, τότε μπορούν να δειχθούν <u>αναλυτικοί</u> <u>τύποι</u> για τον υπολογισμό ορισμένων δεσμευμένων μέσων τιμών. Αυτό φαίνεται στην παρακάτω στην παρακάτω εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

Εάν οι τ.μ. Y, X είναι συνεχείς και έχουν από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f(y,x)$ και $E|Y| < \infty$, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$E\left[Y \middle| X = x\right] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot \frac{f(y,x)}{f(x)} dy = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X}\left(y|x\right) dy \quad (\sigma.\beta.)$$

Απόδειξη

Κάθε παραλλαγή της $E[Y|X = x]$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_{B} E\left[Y \middle| X = x\right] dP \circ X^{-1}(x) = \int_{\{X \in B\}} Y(\omega) dP(\omega), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Όμως, λόγω της ύπαρξης της πυκνότητας πιθανότητας ισχύει:

$$P\{X \in A\} = \int_{A} f(x)\, dx$$

Άρα,

$$\int_{B} E\left[Y \middle| X = x\right] dP \circ X^{-1}(x) = \int_{B} E\left[Y \middle| X{=}x\right] \cdot f(x)\, dx \qquad (1)$$

Αν

$$\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{(I_B, y)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{x \cdot y} \mathbb{R}$$

τότε για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ισχύει ότι:

$$\int_{\{X \in B\}} Y(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} I_B\left(X(\omega)\right) \cdot Y(\omega) dP(\omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} I_B(x) \cdot y\; dP \circ (X, Y)^{-1}$$

Αλλά, λόγω της ύπαρξης της από κοινού πυκνότητας πιθανότητας ισχύει:

$$P\{X \in A, Y \in B\} = \int_{A}\int_{B} f(x,y) dy\, dx$$

Άρα,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} I_B(x) \cdot y\; dP \circ (Y, X)^{-1}(y,x) = \iint_{\mathbb{R}^2} I_B(x) \cdot y \cdot f(x,y) dx\, dy = \int_{B}\left(\int_{\mathbb{R}} y \cdot f(x,y) dy\right) dx \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$E\left[Y \middle| X = x\right] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot \frac{f(y,x)}{f(x)} dy = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X}\left(y|x\right) dy$$

#

Παρατήρηση 4
(α) Στην περίπτωση που οι τ.μ. X και Y είναι <u>διακριτές</u>, αποδεικνύεται (ανάλογα) ότι

$$E\left[Y\middle|X=x\right]=\sum_{y} y\cdot\frac{f\left(y,x\right)}{f\left(x\right)}=\sum_{y} y\cdot f_{Y|X}\left(y\middle|x\right)$$

(β) Οι παραπάνω τύποι, είναι αυτοί που δόθηκαν σαν ορισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής μιάς τ.μ. Y δοθέντος ότι X=x στο κεφάλαιο 1. Έτσι η δεσμευμένη μέση μιάς τ.μ δοθείσης μιάς σ-άλγεβρας είναι μιά γενίκευση εκείνων των ορισμών.

Παράδειγμα 4
Αν η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τ.μ. X, Y δίνεται από την σχέση

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=\begin{cases} 6xy(2\text{-}x\text{-}y) & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση της X δοθέντος ότι Y=y , όπου $0<y<1$.

Λύση
Υπολογίζουμε πρώτα την δεσμευμένη πυκνότητα

$$f_{X|Y}\left(x\middle|y\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_{Y}\left(y\right)}=\frac{6xy(2\text{-}x\text{-}y)}{\int_{0}^{1}6xy(2\text{-}x\text{-}y)\,dx}=\frac{6xy(2\text{-}x\text{-}y)}{y(4\text{-}3y)}=\frac{6x(2\text{-}x\text{-}y)}{(4\text{-}3y)}$$

Οπότε

$$E\left[X\middle|Y=y\right]=\int_{0}^{1}x\cdot f_{X|Y}\left(x\middle|y\right)\,dx=\int_{0}^{1}x\,\frac{6x(2\text{-}x\text{-}y)}{(4\text{-}3y)}dx=\frac{5\text{-}4y}{8\text{-}6y}$$

#

5.2 Ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής

Δίνουμε παρακάτω μια πρόταση, από την θεωρία μέτρου, η οποία είναι χρήσιμη στην απόδειξη ιδιοτήτων της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Πρόταση 3
Αν Y είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή και $\int_B Y dP \geq 0$ τότε Y ≥0 σ.β $\forall B\in\mathcal{B}$.

Απόδειξη

Έστω ότι δεν ισχύει Y ≥0. Αυτό σημαίνει ότι $P\{Y<0\}=\alpha>0$, δηλαδή θα ισχύει ότι

$$0<\alpha=P\{Y<0\}=P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\{Y<-n\}\right) \qquad (1)$$

Άρα, υπάρχει n_o τέτοιο ώστε $P\{Y<-n_o\}=\beta>0$, γιατί αν για κάθε $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ ισχύει $P\{Y<-n\}=0$ τότε η σχέση (1) θα είχε ως εξής:

$$\alpha=P\{Y<0\}=P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\{Y<-n\}\right)\leq\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{P\{Y<-n\}}_{=0}$$

δηλαδή α = 0 που δεν ισχύει.

Επειδή, $\{Y<-n_o\}\in\mathcal{B}$ συνεπάγεται ότι:

$$0\leq\int_{\{Y<-n_o\}}YdP\leq-n_o\int_{\{Y<-n_o\}}dP=-n_o\cdot P\{Y<-n_o\}=-n_o\cdot\beta<0$$

Άτοπο, γιατί $\int_B YdP\geq 0,\ \forall B\in\mathcal{B}$.

Επομένως,

$$P\{Y<0\}=0\Rightarrow P\{Y\geq 0\}=1\Rightarrow Y\geq 0 \quad \text{σ.β}$$

#

Η δεσμευμένη μέση τιμή ικανοποιεί (σχεδόν βέβαια) ιδιότητες ανάλογες με εκείνες της μέσης τιμής.

Πρόταση 4 (Ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής)
Αν λοιπόν X, Y, X_n, $n\in\mathbb{N}$ είναι ολοκληρώσιμες τ.μ. τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1) Αν $X\geq 0$ τότε $E[X|\mathcal{B}]\geq 0$ σ.β

2) $E[c|\mathcal{B}]=c$

3) (**Γραμμικότητα**):

   i. $E[X+Y|\mathcal{B}]=E[X|\mathcal{B}]+E[Y|\mathcal{B}]$

   ii. $E[c\cdot X|\mathcal{B}]=c\cdot E[X|\mathcal{B}]$

4) Αν $X\leq Y$ τότε $E[X|\mathcal{B}]\leq E[Y|\mathcal{B}]$

   Επιπλέον $|E[X|\mathcal{B}]|\leq E[|X|\,|\mathcal{B}]$

5) (**Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης**)

i. Αν $X_n \geq 0$ και $X_n \uparrow X$ τότε $E[X_n \mid \mathcal{B}] \uparrow E[X \mid \mathcal{B}]$

ii. Αν $X_n \geq 0$ και $X_n \downarrow X$ τότε $E[X_n \mid \mathcal{B}] \downarrow E[X \mid \mathcal{B}]$

6) (**Λήμμα του Fatou**)

Αν X_n ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές και $X_n \geq 0$, ισχύει ότι:

i. $E[\underline{\lim} X_n \mid \mathcal{B}] \leq \underline{\lim} E[X_n \mid \mathcal{B}]$

ii. $E[\overline{\lim} X_n \mid \mathcal{B}] \geq \overline{\lim} E[X_n \mid \mathcal{B}]$

7) (**Κυρίαρχη σύγκλιση**)

Αν $|X_n| \leq Y$ σχεδόν βέβαια και $X_n \to X$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n \mid \mathcal{B}] = E[X \mid \mathcal{B}]$$

8) $E[E[X \mid \mathcal{B}]] = EX$

Ακόμα αν $Y = E[X \mid \mathcal{B}]$ τότε

$$EY = E[E[X \mid \mathcal{B}]] = EX$$

Απόδειξη

1) Από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής γνωρίζουμε ότι :

$$\int_B E[X \mid \mathcal{B}]dP = \int_B XdP, \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Επειδή $X \geq 0$ συνεπάγεται ότι $\int_B XdP \geq 0$. Άρα, $\int_B E[X \mid \mathcal{B}]dP \geq 0, \ \forall B \in \mathcal{B}$

Όμως, δεδομένου ότι $E[X \mid \mathcal{B}]$ = $\mathcal{B}$-μετρήσιμη και με βάση την πρόταση 3 προκύπτει ότι:

$$E[X \mid \mathcal{B}] \geq 0$$

2) Πάλι από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής προκύπτει ότι:

$$\int_B E[c \mid \mathcal{B}]dP = \int_B cdP \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Άρα, $E[c \mid \mathcal{B}] = c$

3)

i. Από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής προκύπτει ότι:

$$\int_B E[X+Y|\mathcal{B}]dP = \int_B (X+Y)dP \qquad \forall B\in\mathcal{B}$$

$$= \int_B X\,dP + \int_B Y\,dP$$

$$= \int_B E[X|\mathcal{B}]dP + \int_B E[Y|\mathcal{B}]dP$$

$$= \int_B \{E[X|\mathcal{B}] + E[Y|\mathcal{B}]\}\,dP$$

Επομένως, $E[X+Y|\mathcal{B}] = E[X|\mathcal{B}] + E[Y|\mathcal{B}]$

ii. Ομοίως,

$$\int_B E[c\cdot X|\mathcal{B}]dP = \int_B c\cdot X\,dP$$

$$= c\cdot\int_B X\,dP$$

$$= c\cdot\int_B E[X|\mathcal{B}]dP$$

$$= \int_B c\cdot E[X|\mathcal{B}]dP$$

Άρα, $E[c\cdot X|\mathcal{B}] = c\cdot E[X|\mathcal{B}]$

4) Δεδομένου ότι $Y \le X \Rightarrow X - Y \ge 0$, από την ιδιότητα (1) ισχύει ότι:

$$E[X-Y|\mathcal{B}]\ge 0$$

Επίσης, από την ιδιότητα (3i) συνεπάγεται ότι:

$$E[X-Y|\mathcal{B}] = E[X|\mathcal{B}] - E[Y|\mathcal{B}]$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$E[X|\mathcal{B}] - E[Y|\mathcal{B}]\ge 0 \Rightarrow E[X|\mathcal{B}] \ge E[Y|\mathcal{B}]$$

5)
i. Έχουμε $0\le E[X_1|\mathcal{B}] \le E[X_2|\mathcal{B}] \le\ldots\le E[X_n|\mathcal{B}] \le\ldots$, δηλαδή η ακολουθία $\{E[X_n|\mathcal{B}]\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μη αρνητική, αύξουσα και κάτω φραγμένη. Άρα, υπάρχει το όριο $Z = \lim\limits_{n\to+\infty} E[X_n|\mathcal{B}]$ και είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη, αφού το όριο $\mathcal{B}$-μετρήσιμων συναρτήσεων είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη.

Επιπλέον, για κάθε $B\in\mathcal{B}$, ισχύει:

$$\int_B Z\,dP = \int_B \lim_{n\to+\infty} E[X_n|\mathcal{B}]dP = \lim_{n\to+\infty}\int_B E[X_n|\mathcal{B}]dP = \lim_{n\to+\infty}\int_B X_n\,dP \qquad (1)$$

Επειδή, $X_n \geq 0$ και $X_n \uparrow X$, τότε από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης προκύπτει:

$$\lim_{n\to+\infty}\int X_n\, dP=\int X\, dP$$

Επομένως, η σχέση (1) γίνεται:

$$\int_B ZdP = \lim_{n\to+\infty}\int_B X_n dP = \int_B XdP$$

Συνεπώς, ισχύει ότι: $Z = E[X|\mathscr{B}] = E[\lim_{n\to+\infty} X_n | \mathscr{B}]$

Όμως, $Z = \lim_{n\to+\infty} E[X_n|\mathscr{B}]$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} E[X_n|\mathscr{B}] = E[X|\mathscr{B}]$$

ii. Αν $X_n \downarrow X$, τότε ορίζουμε $Y_n = X_1 - X_n \geq 0$ όπου $Y_n \uparrow Y = X_1 - X$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας την περίπτωση i για την Y_n προκύπτει το ζητούμενο.

6)

i. $$\begin{aligned} E[\underline{\lim} X_n | \mathscr{B}] &= E[\liminf_{n\to\infty} X_n | \mathscr{B}] \\ &= E[\lim_{n\to\infty} \wedge_{\kappa\geq n} X_\kappa | \mathscr{B}] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[\wedge_{\kappa\geq n} X_\kappa | \mathscr{B}] \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \wedge_{\kappa\geq n} E[X_\kappa | \mathscr{B}] = \liminf_{n\to\infty} E[X_n | \mathscr{B}] = \underline{\lim} E[X_n | \mathscr{B}] \end{aligned}$$

7) Έστω $Z_n = \sup_{\kappa\geq n}|X_\kappa - X|$. Τότε είναι φανερό ότι $Z_n \downarrow 0$ σ.β. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$| E[X_n|\mathscr{B}] - E[X|\mathscr{B}]| = | E[X_n - X|\mathscr{B}]| \leq E[|X_n - X|\,|\mathscr{B}] \leq E[Z_n|\mathscr{B}]$$

Κατά συνέπεια, για το αποτέλεσμα αρκεί να δείξουμε ότι:

$$E[Z_n|\mathscr{B}]\downarrow 0$$

Η ακολουθία $\{E[Z_n| \mathcal{B}]\}_{n\in \mathbb{N}}$ είναι μη αρνητική και φθίνουσα.. Άρα, υπάρχει το όριο της Z. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι Z = 0 σ.β. ή ότι EZ = 0 αφού η Z είναι μη αρνητική.

Όμως, $0 \le Z_n \le 2Y$. Από το θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} E[Z_n] = E[Z]$$

Αλλά,

$$E[Z] = E[E[Z| \mathcal{B}]]$$

$$= \int_\Omega E[Z| \ \mathcal{B}]dP$$

$$\le \int_\Omega E[Z_n| \ \mathcal{B}]dP = E[E[Z_n| \mathcal{B}]] = E[Z_n] \underset{n\to 0}{\rightarrow} 0$$

Δηλαδή $E[Z] = 0$

#

Παρατήρηση 5
Η ιδιότητα 8 παραπάνω, δηλαδή το ότι

$$EX = E[E[X| Y]]$$

μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής (με την βοήθεια δεσμευμένων μέσων τιμών).

Πράγματι:

α) Εάν X, Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές και $P\{Y = y\} > 0, \forall y$ τότε έχουμε ότι:

$$EX = E[E[X| Y]]$$

$$= \sum_y E\left[X \middle| Y=y\right] \cdot P\{Y=y\}$$

$$= \sum_y \sum_x x \cdot P\left(X=x \middle| Y=y\right) \cdot P\{Y=y\}$$

$$= \sum_y \sum_x x \cdot f_{X|Y}\left(x|y\right) \cdot f_Y\left(y\right)$$

όπου $f_{X|Y}\left(x|y\right)$ η δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. X δοθείσης της τ.μ. Y β) Ομοίως, αν X, Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και $\int f_Y(y)\,dy>0$ τότε έχουμε ότι:

$$EX = E[E[X|\ Y\ ]]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E\left[X\middle|Y=y\right] \cdot f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)\,dx\,dy$$

γ) Εάν $X = I_A$, όπου $A \in \mathcal{A}$, τότε οι παραπάνω τύποι αποτελούν τρόπους υπολογισμού της πιθανότητας P(A).

Με την βοήθεια του παραπάνω τύπου μπορούμε να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη της γνωστής $1^{ης}$ ταυτότητας του Wald.

Εφαρμογή 2 (1η ταυτότητα *του* Wald)

Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ μιά ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με $EX_1=\mu$ & $V(X_1)=\sigma^2$. Έστω ακόμα μιά θετική, ακεραίων τιμών τ.μ. *N* ανεξάρτητη από τις $X_1, X_2, \cdots$ με $EN=\lambda$ και

$$X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Να αποδείξετε ότι

$$EX_N = E[X_1]\,E[N] = \mu\ \lambda$$

Λύση

Με την βοήθεια των δεσμευμένων μαθηματικών ελπίδων έχουμε:

$$EX_N = E[E(X_N|N)] = \sum_{n=1}^{\infty} E[\sum_{j=1}^{N} X_j|N=n] \cdot P\{N=n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[\sum_{j=1}^{n} X_j|N=n] \cdot P\{N=n\} \overset{\text{ανεξ}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E[\sum_{j=1}^{n} X_j] \cdot P\{N=n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\,E[X_1] \cdot P\{N=n\} = E[X_1] \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P\{N=n\}$$

$$= E[X_1]\,E[N] = \mu\ \lambda$$

#

Παράδειγμα 5

Έστω N ο αριθμός των πελατών που φθάνουν σ' ένα κατάστημα κατά την διάρκεια μιάς συγκεκριμένης ημέρας και έστω ότι η N είναι μιά τ. μ. με κατανομή F. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι τα ποσά που ξοδεύουν οι πελάτες εκεί είναι ανεξάρτητα και έχουν κοινή κατανομή G. Ποιό το αναμενόμενο ποσό χρημάτων που ξοδεύουν (όλοι) οι πελάτες κατά την διάρκεια της ημέρας;

Λύση
Η άσκηση είναι απλή εφαρμογή της ισότητας του Wald. Πράγματι, εάν N ο αριθμός των πελατών που φθάνουν στο κατάστημα και οι τ.μ. $X_1, X_2, \cdots, X_N$ παριστάνουν το ποσό των χρημάτων που ξοδεύει κάθε πελάτης στο κατάστημα, τότε *το συνολικό ποσό των χρημάτων που ξοδεύεται στο κατάστημα, κατά την διάρκεια της ημέρας*, είναι ίσο με $X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

Το αναμενόμενο ποσό των χρημάτων που ξοδεύουν (όλοι) οι πελάτες, κατά την διάρκεια της ημέρας, είναι ίσο σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση με :

$$EX_N = E[X_1]E[N]$$

όπου οι ποσότητες $E[X_1]$,$E[N]$ υπολογίζονται από τις συναρτήσεις κατανομής G, F αντίστοιχα, κατά τα γνωστά.

#

Οι προτάσεις που ακολουθούν, αν και αναφέρονται σε ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής μιάς τ.μ., αποδεικνύονται εδώ χωριστά λόγω της σπουδαιότητάς τους.

Πρόταση 5
Εάν η τυχαία μεταβλητή X είναι **ανεξάρτητη** της σ-άλγεβρας $\mathcal{B}$ τότε ισχύει ότι:

$$E[X|\mathcal{B}] = E[X]$$

Απόδειξη
Γνωρίζουμε ότι αν X, Y είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

Για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι:

$$\int_B E[X] dP = E[X] \cdot \int_B dP = E[X] \cdot \int_\Omega I_B \, dP$$

$$= E[X] \cdot E[I_B] \quad (X, I_B \text{ ανεξάρτητες})$$

$$= E[X \cdot I_B]$$

$$= \int_{\Omega} X \cdot I_B \, dP = \int_{B} X \, dP$$

$$= \int_{B} E[X| \;\mathcal{B}] \, dP$$

Άρα, $E[X| \mathcal{B}] = E[X]$ σ.β.

#

Δηλαδή στην περίπτωση της ανεξαρτησίας, η δεσμευμένη μέση τιμή δεν μας δίνει επιπλέον πληροφορίες, και ως εκ τούτου ισούται με την μέση τιμή.

Πρόταση 6
Εάν η τυχαία μεταβλητή Y είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη και φραγμένη τότε ισχύει ότι:

$$E[Y \cdot X| \mathcal{B}] = Y \cdot E[X| \mathcal{B}]$$

Ιδιαίτερα, $E[Y| \mathcal{B}] = Y$.

Απόδειξη
Για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι:

$$\int_{B} E[Y \cdot X| \;\mathcal{B}] \, dP = \int_{B} Y \cdot X \, dP$$

$$= \int_{\Omega} \left(Y \cdot I_B\right) \cdot X \, dP$$, όπου $Y \cdot I_B$ είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη

$$= \int_{\Omega} \left(Y \cdot I_B\right) \cdot E[X| \;\mathcal{B}] \, dP$$

$$= \int_{B} Y \cdot E[X| \;\mathcal{B}] \, dP$$

Άρα, $E[Y \cdot X| \mathcal{B}] = Y \cdot E[X| \mathcal{B}]$

Στην περίπτωση όπου $X = I_{\Omega} \equiv 1$, έχουμε ότι:

$$E[Y \cdot X| \mathcal{B}] = E[Y| \mathcal{B}]$$

και

$$Y \cdot E[X| \mathcal{B}] = Y$$

Κατά συνέπεια,

$$E[Y| \mathcal{B}] = Y$$

#

Το παρακάτω θεώρημα είναι γνωστό αποτέλεσμα της θεωρίας μέτρου, δίνεται εδώ χωρίς απόδειξη, χρησιμοποιείται δε στην απόδειξη της πρότασης 7 η οποία είναι ανάλογη της πρότασης 6.

Θεώρημα
Εάν η συνάρτηση f είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη τότε υπάρχει ακολουθία $\{f_n\}$ <u>απλών</u> $\mathcal{B}$-μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοιες ώστε:

$$0 \leq f_n(\omega) \uparrow f(\omega) \quad \text{αν} \quad f(\omega) \geq 0$$

$$0 \leq f_n(\omega) \downarrow f(\omega) \quad \text{αν} \quad f(\omega) \geq 0$$

Πρόταση 7
Εάν η τυχαία μεταβλητή X είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη και οι τυχαίες μεταβλητές Y, X·Y είναι ολοκληρώσιμες, τότε

$$E[Y\cdot X|\, \mathcal{B}\,] = X\cdot E[Y|\, \mathcal{B}\,]$$

Απόδειξη

Έστω ότι η X είναι μία δείκτρια τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $X = I_{G_o}, G_o \in \mathcal{B}$. Τότε η συνάρτηση $f = I_{G_o} E[Y|\ \mathcal{B}]$ είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη και $\forall G \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι:

$$\int_G I_{G_o} E[Y|\ \mathcal{B}]\, dP = \int_{G\cap G_o} E[Y|\ \mathcal{B}]\, dP, \qquad \text{όπου } G \cap G_o \in \mathcal{B}$$

$$= \int_{G\cap G_o} Y dP$$

$$= \int_G I_{G_o} \cdot Y\, dP$$

δηλαδή

$$f = E[I_{G_o} Y|\ \mathcal{B}] \ \text{σ.β},$$

που σημαίνει ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει για δείκτριες τυχαίες μεταβλητές X και κατ' επέκταση και για απλές τυχαίες μεταβλητές X, οι οποίες είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμες.

Γενικότερα, εάν η τυχαία μεταβλητή X είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη, υπάρχει μια ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών X_n, που είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμες, τέτοιες ώστε :

$$|X_n| \leq |X| \text{ και } \lim_{n\to+\infty} X_n = X$$

Εάν $|X_n \cdot Y| \leq |X \cdot Y|$ ολοκληρώσιμη, οπότε

$$\lim_{n\to+\infty} E[X_n \cdot Y|\ \mathcal{B}] = E[X\cdot Y|\, \mathcal{B}\,] \quad \text{σ.β.}$$

Όμως,

$$E[X_n \cdot Y \mid \mathcal{B}] \overset{X_n \ \text{απλή}}{=} X_n \cdot E[Y \mid \mathcal{B}] \xrightarrow[n\to+\infty]{} X \cdot E[Y \mid \mathcal{B}]$$

δηλαδή, η δοθείσα σχέση ισχύει γενικά.

#

Παρατήρηση 6

1) Η τυχαία μεταβλητή X δεν θεωρήθηκε ότι είναι ολοκληρώσιμη.

2) $| X_n \cdot E[Y| \mathcal{B}] | = | E[X_n \cdot Y| \mathcal{B}] | \le E[|X_n \cdot Y| \mid \mathcal{B}] \le E[|X \cdot Y| \mid \mathcal{B}]$.

   Άρα, $X \cdot E[Y| \mathcal{B}]$ ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 8 (Απορρόφηση)
Αν θεωρήσουμε ότι X είναι μία ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή και $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ σ-άλγεβρες τέτοιες ώστε $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{A}$, τότε ισχύει:

$$E[E[X| \mathcal{B}_2] \mid \mathcal{B}_1] = E[E[X| \mathcal{B}_1] \mid \mathcal{B}_2] = E[X| \mathcal{B}_1]$$

Απόδειξη

i. Θα δείξουμε ότι $E[E[X| \mathcal{B}_1] \mid \mathcal{B}_2] = E[X| \mathcal{B}_1]$.

   Γνωρίζουμε ότι $E[X| \mathcal{B}_1]$ είναι $\mathcal{B}_1$-μετρήσιμη και λόγω ότι $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ συνεπάγεται ότι $E[X| \mathcal{B}_1]$ θα είναι και $\mathcal{B}_2$-μετρήσιμη. Συνεπώς, θα ισχύει ότι:

$$E[E[X| \mathcal{B}_1] \mid \mathcal{B}_2] = E[X| \mathcal{B}_1]$$

ii. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $E[E[X| \mathcal{B}_2] \mid \mathcal{B}_1] = E[X| \mathcal{B}_1]$.

   Με τη βοήθεια του ορισμού της δεσμευμένης μέσης τιμή έχουμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{B}_1$ ισχύει ότι:

$$\int_B E[\, E[X| \mathcal{B}_2] \mid \mathcal{B}_1]dP = \int_B E[X| \mathcal{B}_2]dP,$$

όπου $E[E[X| \mathcal{B}_2] \mid \mathcal{B}_1]$ - $\mathcal{B}_1$ μετρήσιμη. (1)

Επιπλέον, για κάθε $C \in \mathcal{B}_2$ ισχύει ότι:

$$\int_C E[X| \mathcal{B}_2]dP = \int_C X dP \qquad (2)$$

Όμως, $C \in \mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}_1$. Άρα, η σχέση (2) ισχύει και για κάθε $C \equiv B \in \mathcal{B}_1$. Επομένως, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\int_B E[\,E[X|\,\mathcal{B}_2\,]\,|\,\mathcal{B}_1]dP = \int_B X dP\,,\ \forall B \in \mathcal{B}_1$$

Άρα,

$$E[E[X|\,\mathcal{B}_2\,]\,|\,\mathcal{B}_1] = E[X|\,\mathcal{B}_1\,]$$

#

Παρατήρηση 7

1) Εάν $\mathcal{B}_2 = \mathcal{A}$ τότε $E[X|\,\mathcal{B}_2] = X$ και η παραπάνω σχέση είναι προφανής.

2) Εάν $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ και $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$, τότε $E[X] = E[E[X|\,\mathcal{B}\,]]$, που προκύπτει από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής για $B = \Omega$.

Εφαρμογή 3 (Δεσμευμένη διασπορά)

Εάν η **δεσμευμένη διασπορά της τ.μ. X δοθείσης της σ-άλγεβρας** $\mathcal{B}$ ορίζεται από την σχέση

$$V(X|\,\mathcal{B}\,) = E[(X - E[X|\,\mathcal{B}\,])^2\,|\,\mathcal{B}\,]$$

τότε να δείξετε ότι:

$$V(X) = E\,[V\,(X|\,\mathcal{B})] + V\,(E\,[X|\,\mathcal{B}])$$

Απόδειξη

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
E\,[V\,(X|\,\mathcal{B})] &= E[\,E[(X - E[X|\,\mathcal{B}\,])^2\,|\,\mathcal{B}\,]\,] \\
&= E[X - E[X|\,\mathcal{B}\,]\,]^2 \\
&= E[X^2 + (\,E[X|\,\mathcal{B}\,]\,)^2 - 2\cdot X\cdot E[X|\,\mathcal{B}\,]\,] \\
&= E[X^2] + E[\,E[X|\,\mathcal{B}\,]\,]^2 - 2\cdot E[X\cdot E[X|\,\mathcal{B}\,]\,] \\
&= E[X^2] + E[\,E[X|\,\mathcal{B}\,]\,]^2 - 2\cdot E[\,E[X\cdot E[X|\,\mathcal{B}\,]\,|\mathcal{B}\ ] \\
&= E[X^2] + E[\,E[X|\,\mathcal{B}\,]\,]^2 - 2\cdot E[\,E[X|\,\mathcal{B}\,]\cdot E[X|\,\mathcal{B}\,]\,] \\
&= E[X^2] + E[\,E[X|\,\mathcal{B}\,]\,]^2 - 2\cdot E[\,E[X|\,\mathcal{B}\,]\,]^2 \\
&= E[X^2] - E[\,E[X|\,\mathcal{B}\,]\,]^2
\end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε ότι:

$V(E[X|\mathcal{B}]) = E[E^2[X|\mathcal{B}]] - (E[E[X|\mathcal{B}]])^2$

$\qquad\qquad = E[E[X|\mathcal{B}]]^2 - (E[X])^2$

Από το 2ο μέλος της ζητούμενης σχέσης προκύπτει ότι:

$E[V(X|\mathcal{B})] + V(E[X|\mathcal{B}]) = E[X^2] - E[E[X|\mathcal{B}]]^2 + E[E[X|\mathcal{B}]]^2 - (E[X])^2$

$\qquad\qquad = E[X^2] - (E[X])^2$

$\qquad\qquad = V(X)$

Επομένως,

$$V(X) = E[V(X|\mathcal{B})] + V(E[X|\mathcal{B}])$$

#

Με την βοήθεια της δεσμευμένης διασποράς, δίνουμε έναν δεύτερο τρόπο απόδειξης της γνωστής ταυτότητας του Wald.

Εφαρμογή 4 (2η ταυτότητα του Wald)
Εάν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, N μια τυχαία μεταβλητή ακεραίων τιμών ανεξάρτητη από τις $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και ορίσουμε σαν $X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ τότε ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$V(X_N) = E[N] \cdot V(X_1) + (E[X_1])^2 \cdot V(N)$$

Απόδειξη

Από την εφαρμογή έχουμε ότι:

$$V(X_N) = E[V(X_N|N)] + V(E[X_N|N]) \qquad (1)$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$V(E[X_N|N]) = E[(E[X_N|N])^2] - (E[E[X_N|N]])^2 \qquad (2)$$

Όμως, η $E[X_N|N]$ είναι μία τ.μ. με τιμή $E[X_N|N=n]$ στο $\{N=n\}$.

Αλλά,

$$E[X_N|N=n] = E[X_n|N=n] \overset{\text{ανεξάρτητη}}{=} E[X_n] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n \cdot E[X_1]$$

δηλαδή η $E[X_N|N]$ παίρνει την τιμή $E[X_1]$ στο $\{N=n\}$ με πιθανότητα $P\{N=n\}$.

Άρα,

$$E\left[E\left[X_N \middle| N\right]\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[X_N \middle| N = n\right] \cdot P\{N{=}n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot E\left[X_1\right] \cdot P\{N{=}n\} =$$

$$= E\left[X_1\right] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P\{N{=}n\} = E\left[X_1\right] \cdot E\left[N\right]$$

Επομένως, η σχέση (2) παίρνει τη μορφή:

$$V\,(E\,[X_N|\,N]) = E\,[(E\,[X_N|\,N])^2] - (E\,[X_1])^2 \cdot (E[N])^2 \quad (3)$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της δεσμευμένης διασποράς, ισχύει ότι:

$$V\left(X_N \middle| N\right) = E\left[X_N^2 \middle| N\right] - \left(E\left[X_N \middle| N\right]\right)^2.$$

Άρα:

$$E[V(X_N \,|N)] = E[E[X_N^2 \,|N]] - E[(E[X_N \,|N])^2] \qquad (4)$$

Η $E[X_N^2 |N]$ είναι μία τ.μ. με τιμή $E[X_N^2 |N = n]$ στο $\{N = n\}$. Αλλά,

$$E[X_n^2 \,|N = n] = E[X_n^2] = V(X_n) + (E[X_n])^2 = n \cdot V(X_1) + n^2 \cdot (E[X_1])^2 \quad (5)$$

Άρα, με την βοήθεια της (5), έχουμε

$$E[E[X_n^2 \,|N]] = \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot V(X_1) + n^2 \cdot (E[X_1])^2) \cdot P\{N = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot V(X_1) \cdot P\{N = n\} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot P\{N = n\} \cdot (E[X_1])^2$$

Δηλαδή

$$E[E[X_n^2 \,|N]] = V(X_1) \cdot E[N] + (E[X_1])^2 \cdot E[N]^2 \quad (6)$$

Κατά συνέπεια, από τη σχέση (4) συνεπάγεται ότι:

$$E[V(X_N \,|N)] = V(X_1) \cdot E[N] + (E[X_1])^2 \cdot E[N]^2 - E[(E[X_N \,|N])^2] \quad (7)$$

Άρα, η σχέση (1) με τη βοήθεια των σχέσεων (3) και (7) έχει ως εξής:

$$V(X_N) = E[(E[X_N|N])^2] - (E[X_1])^2 \cdot (E[N])^2 + V(X_1) \cdot E[N] + (E[X_1])^2 + E[N]^2 - E[(E[X_N|N])^2]$$

$$= V(X_1) \cdot E[N] + (E[X_1])^2 \cdot [E[N]^2 - (E[N])^2$$

$$= V(X_1) \cdot E[N] + (E[X_1])^2 \cdot V(N)$$

#

Πρόταση 9 (Ανισότητα Jensen)
Εάν X είναι μία ολοκληρώσιμη τ.μ. και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία κυρτή ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε

$$\phi(E[X|\mathcal{B}]) \leq E[\phi(x)|\mathcal{B}]$$

Απόδειξη

Για κάθε x_o παίρνουμε ευθεία που περνά από το σημείο $(x_o, \phi(x_o))$ τέτοιο ώστε:

$$\phi(x_o) + A(x_o) \cdot (x - x_o) \leq \phi(x)$$

όπου η κλίση $A(x_o)$ μπορεί να είναι η δεξιά παράγωγος της ϕ.

Τότε έχουμε ότι:

$$\phi(E[X|\mathcal{B}]) + A(E[X|\mathcal{B}]) \cdot (X - E[X|\mathcal{B}]) \leq \phi(X)$$

Αν υποθέσουμε ότι η $E[X|\mathcal{B}]$ είναι φραγμένη, τότε όλοι οι όροι είναι ολοκληρώσιμοι.

$$E[\ \phi(E[X|\mathcal{B}]) + A(E[X|\mathcal{B}]) \cdot (X - E[X|\mathcal{B}])\ |\ \mathcal{B}\ ] \leq E[\phi(X)\ |\ \mathcal{B}] \Rightarrow$$

$$E[\phi(E[X|\mathcal{B}])\ |\ \mathcal{B}] + A(E[X|\mathcal{B}]) \cdot E[X - E[X|\mathcal{B}]\ |\ \mathcal{B}] \leq E[\phi(X)\ |\ \mathcal{B}] \Rightarrow$$

$$E[\phi(E[X|\mathcal{B}])\ |\ \mathcal{B}] + A(E[X|\mathcal{B}]) \cdot \{ E[X|\mathcal{B}] - E[E[X|\mathcal{B}]\ |\ \mathcal{B}]\} \leq E[\phi(X)\ |\ \mathcal{B}] \Rightarrow$$

$$E[\phi(E[X|\mathcal{B}])\ |\ \mathcal{B}] + A(E[X|\mathcal{B}]) \cdot \{ E[X|\mathcal{B}] - E[X\ |\ \mathcal{B}]\} \leq E[\phi(X)\ |\ \mathcal{B}] \Rightarrow$$

$$E[\phi(E[X|\mathcal{B}])\ |\ \mathcal{B}] + A(E[X|\mathcal{B}]) \cdot 0 \leq E[\phi(X)\ |\ \mathcal{B}]$$

$$E[\phi(E[X|\mathcal{B}])\ |\ \mathcal{B}] \leq E[\phi(X)\ |\ \mathcal{B}] \qquad (1)$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση ϕ είναι κυρτή, άρα η ϕ είναι φραγμένη σε φραγμένα σύνολα. Επιπλέον, η $\phi(E[X|\mathcal{B}])$ είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη. Συνεπώς, από την πρόταση 6 προκύπτει ότι:

$$E[\phi(E[X|\mathcal{B}])\ |\ \mathcal{B}]\ = \phi(E[X|\mathcal{B}])$$

Επομένως, η σχέση (1) γίνεται ως εξής:

$$\phi(\mathrm{E}\,[\mathrm{X}|\,\mathcal{B}]) \leq \mathrm{E}[\phi(\mathrm{X})|\,\mathcal{B}]$$

Για να δείξουμε την ανισότητα στην γενική περίπτωση, θεωρούμε $B_n = \{E\,[X|\,\mathcal{B}] \leq n\}$.
Τότε ισχύει ότι:

$$\mathrm{E}\,[\,\mathrm{I}_{\mathrm{B}_n} \cdot \mathrm{X}|\,\mathcal{B}]) = \mathrm{I}_{\mathrm{B}_n} \cdot \mathrm{E}\,[\mathrm{X}|\,\mathcal{B}] = \text{φραγμένη}$$

Άρα, από το πρώτο μέρος της απόδειξης προκύπτει ότι:

$$\phi(\mathrm{I}_{\mathrm{B}_n} \cdot \mathrm{E}\,[\mathrm{X}|\,\mathcal{B}]) \leq \mathrm{E}[\phi(\mathrm{I}_{\mathrm{B}_n} \cdot \mathrm{X})|\,\mathcal{B}]$$

Ακόμα ισχύει ότι:

$$\mathrm{E}[\phi(\mathrm{I}_{\mathrm{B}_n} \cdot \mathrm{X})|\,\mathcal{B}] = \mathrm{E}[\,\mathrm{I}_{\mathrm{B}_n} \cdot \phi(\mathrm{X}) + \mathrm{I}_{\mathrm{B}_n^c} \cdot \phi(0)\;|\,\mathcal{B}]$$

$$= \mathrm{I}_{\mathrm{B}_n} \cdot \mathrm{E}[\phi(\mathrm{X})|\,\mathcal{B}] + \phi(0) \cdot \mathrm{I}_{\mathrm{B}_n^c} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{E}[\phi(\mathrm{X})|\,\mathcal{B}]$$

Επίσης, λόγω της συνέχειας της ϕ ισχύει:

$$\phi(\mathrm{I}_{\mathrm{B}_n} \cdot \mathrm{E}\,[\mathrm{X}|\,\mathcal{B}]) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \phi(\mathrm{E}\,[\mathrm{X}|\,\mathcal{B}])$$

Κατά συνέπεια, η ανισότητα ισχύει και στη γενική περίπτωση.

#

Παράδειγμα 6

1) Εάν $\phi(x) = |x|$ τότε η ανισότητα γίνεται

$$|\mathrm{E}\,[\mathrm{X}|\,\mathcal{B}]| \leq \mathrm{E}\,[|\mathrm{X}|\;|\,\mathcal{B}]$$

2) Εάν $\rho \geq 1$ και $\phi(x) = |x|^\rho$ τότε

$$|\mathrm{E}\,[\mathrm{X}|\,\mathcal{B}]|^\rho \leq \mathrm{E}\,[|\mathrm{X}|^\rho\;|\,\mathcal{B}]$$

Παρατήρηση 8
Παίρνοντας μέσες τιμές έχουμε ότι

$$\mathrm{E}[\;|\mathrm{E}\,[\mathrm{X}|\,\mathcal{B}]|^\rho\,] \leq \mathrm{E}[|\mathrm{X}|^\rho\,]$$

Δηλαδή η δεσμευμένη μέση τιμή είναι μία **συστολή** στο χώρο L^ρ **.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 MARTINGALES

6.1 Εισαγωγή

Όπως είπαμε και στον πρόλογο, ένα martingale εκφράζει τον τρόπο σύνδεσης των τ.μ. μιάς στοχαστικής ανέλιξης. Αν και σαν ιδέα ξεκίνησαν από τυχερά παιχνίδια, εν τούτοις η θεωρία των martingales έχει αναπτυχθεί σ' έναν από τους πιο δυναμικούς κλάδους της εφαρμοσμένης Θεωρίας Πιθανοτήτων. Με βάση τα martingales, έχει αναπτυχθεί ένα ξεχωριστό κομμάτι των Πιθανοτήτων, εκείνο της *στοχαστικής ολοκλήρωσης* και των *στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων* με τις πιο «κομψές» εφαρμογές εκείνες που αφορούν τις μερικές διαφορικές εξισώσεις και τη Οικονομία.

6.2 Ορισμός ενός martingale

Ορισμός 1

Θεωρούμε τον πιθανοθεωρητικό χώρο (Ω, $\mathcal{A}$, P) και $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία αύξουσα ακολουθία υπό-σ-αλγεβρών της $\mathcal{A}$, δηλαδή $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$. Τότε η ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται **διύλιση**.

Ορισμός 2

Έστω $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ένα μια διύλιση του π.χ. (Ω, $\mathcal{A}$, P). Μία ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται **martingale** ως *προς την ακολουθία* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν και μόνο αν:

i. Η X_n είναι F_n-μετρήσιμη, δηλαδή $X_n \in F_n$

ii. Η X_n είναι (απόλυτα) ολοκληρώσιμη, δηλαδή $E\left[|X_n|\right] < \infty$

iii. $E\left[X_{n+1} | F_n\right] = X_n$

Συμβολισμός

Πολλές φορές αντί για να πούμε ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι martingale ως προς την ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, λέμε ότι η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

Ερμηνεία

Μια από τις δυνατές ερμηνείες των martingales είναι στο περιβάλλον των τυχερών παιχνιδιών. Εάν λοιπόν η τ.μ. X_n παριστάνει το *ποσό που έχει ένας παίκτης μετά την ολοκλήρωση του* $n^{\text{στου}}$ *παιχνιδιού* και η F_n περιέχει όλη την πληροφορία για τα παιχνίδια μέχρι τη $n^{\sigma\tau\eta}$ χρονική στιγμή , τότε η ιδιότητα (iii) του ορισμού αναφέρει ότι το *αναμενόμενο ποσό του παίκτη μετά το επόμενο παιχνίδι είναι το ίδιο με αυτό μετά το παρόν παιχνίδι*. Δηλαδή ένα martingale αναφέρεται σε ένα δίκαιο παιχνίδι.

Παρατήρηση 1

Εάν η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale και ορίσουμε σαν σ-άλγεβρες $G_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n), n \in \mathbb{N}$ (σ-άλγεβρα που γεννιέται από τις τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$) τότε και η ακολουθία $\{X_n, G_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι επίσης ένα martingale.

Πράγματι,

i. Είναι φανερό ότι η ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και η τυχαία μεταβλητή X_n είναι G_n-μετρήσιμη.

ii. Η $|X_n|$ είναι ολοκληρώσιμη.

iii. Από την ιδιότητα της απορρόφησης, λόγω του ότι $G_n \subset F_n$, έχουμε:

$$E\left[X_{n+1} \middle| G_n\right] = E\left[E\left[X_{n+1} \middle| F_n\right] \middle| G_n\right] = \underbrace{E\left[X_n \middle| G_n\right]}_{X_n = G_n\text{-μετρήσιμη}} = X_n$$

Η σ-άλγεβρα $G_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ αποτελεί τη μικρότερη σ-άλγεβρα ως προς την οποία κάθε μία από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι μετρήσιμη. Είναι φανερό ότι $G_n \subset F_n$ αν και μόνο αν η τυχαία μεταβλητή X_n είναι F_n-μετρήσιμη.

Πρόταση 1 (ισοδύναμος ορισμός ενός martingale)

Η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale αν και μόνον αν $\forall A \in F_n$ ισχύει

$\forall A \in F_n$

$$\int_A X_n dP = \int_A X_{n+1} dP$$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε: $\forall A \in F_n$

$$\int_A E\left[X_{n+1} \middle| F_n\right] dP = \int_A X_{n+1} dP$$

Αλλά από την υπόθεση του martingale, έχουμε

$$\int_A E\left[X_{n+1} \middle| F_n\right] dP = \int_A X_n dP$$

Από τις δυό αυτές σχέσεις έπεται το αποτέλεσμα

($\Leftarrow$) Εάν $\int_A X_n dP = \int_A X_{n+1} dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$, τότε επειδή από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε $\int_A E\left[X_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] dP = \int_A X_{n+1} dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$, τότε από τις δυό αυτές σχέσεις έπεται ότι $\int_A E\left[X_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] dP = \int_A X_n dP \ \forall A \in \mathcal{F}_n$ οπότε (από γνωστή πρόταση της θεωρίας μέτρου) έπεται ότι

$$E\left[X_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] = X_n, \ \forall n$$

δηλαδή η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale

#

Πρόταση 2 (Ιδιότητες ενός martingale)

Εάν $\{X_n, \mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale, τότε:

i. $E\left[X_n\right] = E\left[X_1\right], \ \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή μέση τιμή παραμένει σταθερή.

ii. Για κάθε n>m ισχύει ότι $E\left[X_n \middle| \mathcal{F}_m\right] = X_m$

Απόδειξη

Η απόδειξη σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις θα γίνει με τη βοήθεια της μεθόδου της επαγωγής.

i. Για n=1 έχουμε: $E\left[X_n\right] = E\left[X_1\right]$, το οποίο ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για n=κ: $E\left[X_\kappa\right] = E\left[X_1\right]$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για n=κ+1, δηλαδή $E\left[X_{\kappa+1}\right] = E\left[X_1\right]$.

Πράγματι:

$$E\left[X_{\kappa+1}\right] = E\left[E\left[X_{\kappa+1} \middle| \mathcal{F}_\kappa\right]\right] \overset{\text{mgl}}{=} E\left[X_\kappa\right] \underset{\text{υπόθεση}}{\overset{\text{επαγωγική}}{=}} E\left[X_1\right]$$

ii. Για n=m+1 έχουμε: $E\left[X_n \middle| \mathcal{F}_m\right] = E\left[X_{m+1} \middle| \mathcal{F}_m\right] = X_m$, το οποίο ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για n=m+κ: $E\left[X_{m+\kappa} \middle| \mathcal{F}_m\right] = X_m$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για n=m+κ+1, δηλαδή $E\left[X_{m+\kappa+1} \middle| F_m\right]=X_m$.

Πράγματι:

$$E\left[X_{m+\kappa+1} \middle| F_m\right]=E\left[E\left[X_{m+\kappa+1} \middle| F_{m+\kappa}\right] \middle| F_m\right] \overset{mgl}{=} E\left[X_{m+\kappa} \middle| F_m\right] \underset{\text{υπόθεση}}{\overset{\text{επαγωγική}}{=}} X_m$$

#

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα των martingales δεν θα πρέπει να παραλείψουμε να αναφέρουμε ότι πολλές φορές ένα martingale αρχίζει από τον χρόνο 0, δηλαδή την X_o.

6.3 Παραδείγματα των martingales

Δίνουμε παρακάτω μια σειρά από παραδείγματα martingales. Από τα παραδείγματα γίνεται φανερό το ευρύ φάσμα των εφαρμογών της θεωρίας των martingales.

Παράδειγμα 1 (Άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ.)
Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία τ.μ. τέτοιες ώστε X_o=0 και οι $X_1,\ldots,X_n$ να είναι ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με μέση τιμή $E\left[X_n\right]=0$ και $E\left[|X_n|\right]<\infty$, $\forall n$. Εάν ορίσουμε

$$S_n=X_1+\ldots+X_n$$

τότε η ακολουθία $\{S_n, G_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

Πράγματι,

i. Είναι φανερό ότι η S_n είναι G_n-μετρήσιμη.

ii. $E\left[|S_n|\right] \leq \sum_{j=1}^{n} E\left[|X_j|\right] < \infty$.

iii. $E\left[S_{n+1} \middle| G_n\right]=E\left[X_{n+1}+S_n \middle| G_n\right]$

$$=\underbrace{E\left[X_{n+1} \middle| G_n\right]}_{\text{ανεξάρτητες}}+E\left[S_n \middle| G_n\right]$$

$$=E\left[X_{n+1}\right]+S_n$$

$$=0+S_n=S_n$$

Παρατήρηση 2

Γενικότερα, μπορεί να αποδειχθεί ανάλογα ότι, εάν $E\left[X_1\right] = \mu \neq 0$ και ορίσουμε

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n - n\mu$$

τότε η ακολουθία $\left\{S_n, \mathcal{G}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale

Παράδειγμα 2 (γινόμενο ανεξάρτητων τ.μ.)

Έστω $\left\{X_n\right\}_{n\geq 1}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με μέση τιμή $E\left[X_n\right] = m_n \neq 0$ και $E\left[\left|X_n\right|\right] < \infty$, $\forall n$. Εάν ορίσουμε σαν

$$Y_n = \prod_{\kappa=1}^{n}\left(\frac{X_\kappa}{m_\kappa}\right),$$

τότε η ακολουθία $\left\{Y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale αναφορικά με την ακολουθία $\mathcal{G}_n = \sigma\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$.

Πράγματι,

i. Είναι φανερό ότι η Y_n είναι $\mathcal{G}_n$-μετρήσιμη.

ii. $$E\left[\left|Y_n\right|\right] = E\left[\left|\prod_{\kappa=1}^{n}\left(\frac{X_\kappa}{m_\kappa}\right)\right|\right] = \prod_{\kappa=1}^{n} E\left[\left|\frac{X_\kappa}{m_\kappa}\right|\right] < \infty$$

iii. $$E\left[Y_{n+1} \mid \mathcal{G}_n\right] = E\left[Y_n \cdot \frac{X_{n+1}}{m_{n+1}} \mid \mathcal{G}_n\right]$$

$$= Y_n \cdot \frac{1}{m_{n+1}} \cdot \underbrace{E\left[X_{n+1} \mid \mathcal{G}_n\right]}_{\text{ανεξάρτητες}}$$

$$= Y_n \cdot \frac{1}{m_{n+1}} \cdot E\left[X_{n+1}\right]$$

$$= Y_n \cdot \frac{1}{m_{n+1}} \cdot m_{n+1}$$

$$= Y_n$$

Παράδειγμα 3 (Η διασπορά αθροίσματος σαν martingale)

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία τ.μ. τέτοιες ώστε X_o=0 και οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ., με μέση τιμή $E[X_n]=0$ και $E[X_n^2]=\sigma^2$, $\forall n \geq 1$. Εάν ορίσουμε $S_o = 0$ και

$$S_n = \left(\sum_{\kappa=1}^{n} X_\kappa\right)^2 - n\sigma^2$$

τότε η ακολουθία $\{S_n, \mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

Πράγματι,

i. Είναι φανερό ότι η S_n είναι $\mathcal{G}_n$-μετρήσιμη.

ii.
$$E\left[|S_n|\right] = E\left[\left|\left(\sum_{\kappa=1}^{n} X_\kappa\right)^2 - n\sigma^2\right|\right]$$

$$\leq E\left[\left|\sum_{\kappa=1}^{n} X_\kappa\right|^2\right] + n\sigma^2 = E\left[\ \left|\sum_{\kappa=1}^{n} X_\kappa^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right| + n\sigma^2\ \right]$$

$$\leq \sum_{\kappa=1}^{n} E\left[\left|X_\kappa^2\right|\right] + 2\sum_{i<j} E\left[|X_i|\right] \cdot E\left[\left|X_j\right|\right] + n\sigma^2$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{n} E\left[X_\kappa^2\right] + n\sigma^2$$

$$= (n+n) \cdot \sigma^2 < \infty$$

iii.
$$E\left[S_{n+1} \,|\, \mathcal{G}_n\right] = E\left[\left(\sum_{\kappa=1}^{n+1} X_\kappa\right)^2 - (n+1)\sigma^2 \,|\, \mathcal{G}_n\right]$$

$$= E\left[\left(X_{n+1} + \sum_{\kappa=1}^{n} X_\kappa\right)^2 - (n+1)\sigma^2 \,|\, \mathcal{G}_n\right]$$

$$= E\left[X_{n+1}^2 + \left(\sum_{\kappa=1}^{n} X_\kappa\right)^2 - 2 \cdot X_{n+1}\left(\sum_{\kappa=1}^{n} X_\kappa\right) - (n+1)\sigma^2 \,|\, \mathcal{G}_n\right]$$

$$=EX_{n+1}^2+E\left[\left(\sum_{\kappa=1}^{n}X_\kappa\right)^2 \middle| \mathcal{G}_n\right]-2E\left[X_{n+1}\left(\sum_{\kappa=1}^{n}X_\kappa\right)\middle|\mathcal{G}_n\right]-(n+1)\sigma^2$$

Οπότε

$$E\left[S_{n+1}\middle|\mathcal{G}_n\right]=\sigma^2+\left(\sum_{\kappa=1}^{n}X_\kappa\right)^2-2\underbrace{E\left[X_{n+1}\middle|\mathcal{G}_n\right]}_{\text{ανεξάρτητες}}\cdot\left(\sum_{\kappa=1}^{n}X_\kappa\right)-n\sigma^2-\sigma^2$$

$$=\left(\sum_{\kappa=1}^{n}X_\kappa\right)^2-2\underbrace{E\left[X_{n+1}\right]}_{=0}\cdot\left(\sum_{\kappa=1}^{n}X_\kappa\right)-n\sigma^2$$

$$=\left(\sum_{\kappa=1}^{n}X_\kappa\right)^2-n\sigma^2=S_n$$

Παράδειγμα 4 (Doob's martingale)

Έστω X μία τ.μ. τέτοια ώστε $E\left[|X|\right]<\infty$ και $\{\mathcal{G}_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών, υποαλγεβρών της κλάσης $\mathcal{A}$.. Εάν ορίσουμε

$$Y_n=E\left[X\middle|\mathcal{G}_n\right],\ \forall n,$$

τότε η ακολουθία $\{Y_n,\mathcal{G}_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

Πράγματι,

i. Η Y_n σαν παραλλαγή της $E\left[X\middle|\mathcal{G}_n\right]$ είναι $\mathcal{G}_n$-μετρήσιμη.

ii. $E|Y_n| = E|E[X|\mathcal{G}_n]|$

$\le E[E[|X||\mathcal{G}_n]]$

$= E[|X|]<\infty$

iii. $E\left[Y_{n+1}\middle|\mathcal{G}_n\right]=E\left[E\left[X\middle|\mathcal{G}_{n+1}\right]\middle|\mathcal{G}_n\right]$

$=E\left[X\middle|\mathcal{G}_n\right]$, επειδή $\mathcal{G}_n\subset\mathcal{G}_{n+1}$

$= Y_n$

Παράδειγμα 5 (Λόγος Πιθανοφάνειας)

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. και f_o, f_1 δύο συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Μια στοχαστική ανέλιξη, σπουδαία για τον έλεγχο υποθέσεων, είναι η ακολουθία των **λόγων πιθανοφάνειας**:

$$Y_n = \frac{f_1(x_o)\cdot f_1(x_1)\cdot\ldots\cdot f_1(x_n)}{f_o(x_o)\cdot f_o(x_1)\cdot\ldots\cdot f_o(x_n)}$$

Εάν οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ έχουν πυκνότητα πιθανότητας την $f_o(y)$, όπου $f_o(y)>0, \forall y$, τότε η ακολουθία $\{Y_n, \mathcal{G}_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale, αφού:

$$E\left[Y_{n+1}|\mathcal{G}_n\right] = E\left[Y_n \cdot \frac{f_1(X_{n+1})}{f_o(X_{n+1})}|\mathcal{G}_n\right]$$

$$= Y_n \cdot \underbrace{E\left[\frac{f_1(X_{n+1})}{f_o(X_{n+1})}|\mathcal{G}_n\right]}_{\text{ανεξάρτητα}}$$

$$= Y_n \cdot E\left[\frac{f_1(X_{n+1})}{f_o(X_{n+1})}\right]$$

$$= Y_n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(y)}{f_o(y)} \cdot f_o(y)dy$$

$$= Y_n \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y)dy}_{=1} = Y_n$$

Εφαρμογή 1

Εάν στο παραπάνω παράδειγμα θεωρήσουμε ότι f_o είναι μία κανονική πυκνότητα πιθανότητας με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2 και f_1 είναι μία κανονική π.π. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, τότε ο λόγος πιθανοφάνειας είναι:

$$\frac{f_1(x)}{f_o(x)} = e^{\frac{2\mu\cdot x-\mu^2}{2\sigma^2}}$$

Συνεπώς, η ακολουθία των λόγων πιθανοφάνειας θα ορίζεται από τη σχέση:

$$Y_n = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}S_n - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}, \text{ όπου } S_n = \sum_{\kappa=0}^{n} X_\kappa$$

Παράδειγμα 6 (Martingales παραγόμενα από ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα μετάβασης)

Έστω ότι η ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μία αλυσίδα Markov με πίνακα μετάβασης $\mathcal{P} = (p_{i,j})$. Ένα διάνυσμα f είναι **δεξιό ιδιοδιάνυσμα** του $\mathcal{P}$, εάν για κάποιο λ, το οποίο καλείται **ιδιοτιμή**, ισχύει:

$$\lambda f(i) = \sum_j p_{ij} f(j), \ \forall i$$

Εάν f είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα για τον πίνακα μετάβασης $\mathcal{P}$ με $E|f(X_n)| < \infty, \forall n$ και ορίσουμε

$$Y_n = \frac{f(X_n)}{\lambda^n},$$

τότε η ακολουθία $\{Y_n, \mathcal{G}_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale, αφού:

$$E\left[Y_{n+1} | \mathcal{G}_n\right] = E\left[\frac{f(X_{n+1})}{\lambda^{n+1}} | \mathcal{G}_n\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda^{n+1}} E\left[f(X_{n+1}) | \mathcal{G}_n\right]$$

$$\overset{\text{ιδιότητα}}{\underset{\text{Markov}}{=}} \frac{1}{\lambda^{n+1}} E\left[f(X_{n+1}) | X_n\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda^{n+1}} \sum_j p_{X_n j} f(j)$$

$$= \frac{1}{\lambda^{n+1}} \lambda f(X_n)$$

$$= \frac{f(X_n)}{\lambda^n} = Y_n$$

Παρατήρηση 3

Εάν θεωρήσουμε ότι λ=1, τότε μία ακολουθία $\{f(i)\}$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$f(i)=\sum_j p_{ij} f(j),\ \ \forall i$$

καλείται **δεξιά κανονική ακολουθία** για τον πίνακα μετάβασης $\mathcal{P}$.

Παράδειγμα 7 (Radon-Nikodym παράγωγοι)
Θεωρούμε τον πιθανοθεωρητικό χώρο (Ω, $\mathcal{A}$, P) και v μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$. Εάν θεωρήσουμε $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία αύξουσα ακολουθία σ-υποαλγεβρών της σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$ και $v\big|_{F_n} << P\big|_{F_n}$ (που σημαίνει ότι τα μέτρα v, P είναι περιορισμένα στην F_n), τότε υπάρχει ακολουθία

$$X_n = \frac{dv\big|_{F_n}}{dP\big|_{F_n}}$$

για την οποία ισχύει $v(A)=\int_A X_n\, dP,\ \forall A \in F_n$. Η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

Πράγματι, για κάθε $A \in F_n$ ισχύει:

$$\int_A E\left[X_{n+1} \,|F_n\right] dP = \int_A X_{n+1}\, dP$$

$$\underset{\Rightarrow A\in F_{n+1}}{\overset{A\in F_n \subset F_{n+1}}{=}} v(A)$$

$$\overset{A\in F_n}{=} \int_A X_n\, dP$$

Επομένως, προκύπτει ότι $E\left[X_{n+1} \,|F_n\right]=X_n$.

Εφαρμογή 2
Θεωρούμε ότι Ω= (0,1], $\mathcal{A}$=$\mathcal{B}$ ((0, 1]), P=μέτρο του Lebesgue και μία πεπερασμένη ακολουθία $F_n = \sigma\left(\left(\frac{\kappa}{2^n}, \frac{\kappa+1}{2^n}\right]; 0 \le \kappa \le 2^n\right)$. Εάν $A \in F_n$ και $P(A)=0$ τότε προκύπτει ότι A=∅. Συνεπώς, για κάθε μέτρο v στην F_n, ισχύει ότι $v << P$.

Άρα, η Radon-Nikodym παράγωγος είναι:

$$X_n(\omega) = \frac{v\left(\left(\frac{\kappa}{2^n}, \frac{\kappa+1}{2^n}\right]\right)}{2^n}, \quad \omega \in \left(\frac{\kappa}{2^n}, \frac{\kappa+1}{2^n}\right]$$

Παράδειγμα 8 (Martingale του Wald)

Έστω $Y_0 = 0$ και $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με πεπερασμένη **ροπογεννήτρια** $\Phi(\lambda)=E\left[\exp(\lambda \cdot Y_\kappa)\right]$, η οποία υπάρχει για κάποιο λ≠0. Η ακολουθία

$$\begin{cases} X_o = 1 \\ X_n = \dfrac{\exp(\lambda \cdot S_n)}{\Phi(\lambda)}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \end{cases}$$

είναι ένα martingale ως προς την ακολουθία $G_n = \sigma(Y_1,\ldots,Y_n)$.

Πράγματι:

Εάν για καθεμιά από τις τ.μ. Y_n, ισχύει $Y_n(\Omega) = S$, όπου S αριθμήσιμο και για ευκολία θεωρούμε S=□ , τότε η ακολουθία $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μία αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων S. Στη συνέχεια, εάν $f(x)=e^{\lambda \cdot x}, x \in S$ προκύπτει ότι:

$$\sum_y p(x,y) \cdot f(y) = \sum_y P\left(S_{n+1}=y \middle| S_n = x\right) \cdot e^{\lambda \times y}$$

$$= \sum_y P\left(Y_{n+1}=y\text{-}x\right) \cdot e^{\lambda \times y}$$

$$= \sum_{y=x}^{\infty} P\left\{Y_{n+1}=y\text{-}x\right\} \cdot e^{\lambda \cdot y}$$

$$\overset{y-x=z}{=} \sum_{z=0}^{\infty} P\left\{Y_{n+1}=z\right\} \cdot e^{\lambda \cdot (z+x)}$$

$$= e^{\lambda \cdot x} \cdot \sum_{z=0}^{\infty} P\left\{Y_{n+1} = z\right\} \cdot e^{\lambda \cdot z}$$

$$= e^{\lambda \cdot x} \cdot \Phi(\lambda) = \underbrace{\Phi(\lambda)}_{\text{ιδιοτιμή}} \cdot f(x)$$

Κατά συνέπεια, σύμφωνα με το παράδειγμα 6, η ακολουθία $\{X_n, G_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

Εφαρμογή 3

(α) Εάν στο παραπάνω παράδειγμα θεωρήσουμε ότι η τ.μ. Y_n ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $σ^2$, δηλαδή $Y_n \approx N\left(0,σ^2\right)$, τότε $Φ\left(λ\right)=e^{\frac{λ^2 \cdot σ^2}{2}}$ και η ακολουθία

$$X_n = \exp\left(λ \cdot S_n - \frac{nλ^2σ^2}{2}\right)$$

είναι ένα martingale.

(β) Επιπλέον, εάν θέσουμε $λ = \frac{μ}{σ^2}$, όπου μ μία τυχαία σταθερά, τότε η ακολουθία

$$X_n = \exp\left(\frac{μ}{σ^2} \cdot S_n - \frac{nμ^2}{2σ^2}\right)$$

είναι ένα martingale.

Παρατήρηση 4

Μπορούμε να αποδείξουμε άμεσα ότι: έστω $\left\{X_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες, ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ., τέτοια ώστε $\left\{X_n\right\}_{n=1}^{\infty} \approx N\left(0,1\right)$. Εάν ορίσουμε ότι $S_n = \sum_{κ=1}^{n} X_κ$ και

$$X_n^a = \exp\left(a \cdot S_n - \frac{na^2}{2}\right),$$

όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε προκύπτουν τα παρακάτω:

1) Η ακολουθία $\left\{X_n^a\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

2) Εάν $F\left(a\right)$ είναι μία συνάρτηση κατανομής, τότε η ακολουθία $\left\{ξ_n = \int X_n^a \, dF\left(a\right)\right\}$ είναι ένα martingale.

Παράδειγμα 9 (Μοντέλο Κελιού Polya)

Έστω ένα δοχείο το οποίο περιέχει αρχικά τ κόκκινες και β μαύρες μπάλες. Επιλεγούμε επαναληπτικά μπάλες από το δοχείο ως εξής: μετά από κάθε επιλογή μιας μπάλας από το δοχείο, την επιστρέφουμε μαζί με α μπάλες του ίδιου χρώματος. Θεωρούμε ότι οι αριθμοί τ, β, α είναι ακέραιοι. Έστω:

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}=\begin{cases}1, & \text{αν η } \mathrm{n}^{\sigma\tau\eta} \text{ μπάλα που επιλέξαμε είναι κόκκινη.}\\ 0, & \text{αν η } \mathrm{n}^{\sigma\tau\eta} \text{ μπάλα που επιλέξαμε είναι μαύρη.}\end{cases}$$

Εάν

τ_n = «αριθμός των κόκκινων μπαλών μετά την ολοκλήρωση της $\mathrm{n}^{\sigma\tau\eta\varsigma}$ επιλογής»

β_n = «αριθμός των μαύρων μπαλών μετά την ολοκλήρωση της $\mathrm{n}^{\sigma\tau\eta\varsigma}$ επιλογής» και

X_n =«ποσοστό των κόκκινων μπαλών στο δοχείο μετά το $\mathrm{n}^{\sigma\tau o}$ βήμα», τ ($\mathrm{X}_n=\dfrac{\tau_n}{\tau_n+\beta_n}$)

Τότε η ακολουθία $\{\mathrm{X}_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale ως προς την ακολουθία $G_{\mathrm{n}}=\sigma(\mathrm{Y}_0,\mathrm{Y}_1,\ldots,\mathrm{Y}_{\mathrm{n}})$.

Πράγματι,

i. Είναι φανερό ότι η X_{n} είναι G_{n}-μετρήσιμη.

ii. Επειδή από την υπόθεση προκύπτει ότι $0\le \mathrm{X}_{\mathrm{n}}\le 1$, συνεπάγεται ότι $\mathrm{E}\left[|\mathrm{X}_{\mathrm{n}}|\right]<\infty$.

iii. $$\mathrm{E}\left[\mathrm{X}_{\mathrm{n}+1}\,|G_{\mathrm{n}}\right]=\frac{\tau_n+a}{\tau_n+\beta_n+a}\cdot\frac{\tau_n}{\tau_n+\beta_n}+\frac{\tau_n}{\tau_n+\beta_n+a}\cdot\frac{\beta_n}{\tau_n+\beta_n}$$

$$=\frac{\tau_n}{\tau_n+\beta_n}\cdot\left(\frac{\tau_n+a}{\tau_n+\beta_n+a}+\frac{\beta_n}{\tau_n+\beta_n+a}\right)$$

$$=\frac{\tau_n}{\tau_n+\beta_n}\cdot\frac{\tau_n+\beta_n+a}{\tau_n+\beta_n+a}$$

$$=\frac{\tau_n}{\tau_n+\beta_n}=\mathrm{X}_n$$

Παρατήρηση 5

Αν η ακολουθία $\{\mathrm{X}_{\mathrm{n}},G_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale τότε σύμφωνα με την πρόταση 1 θα ισχύει ότι

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_n]=\mathrm{E}[\mathrm{X}_1]=\frac{\tau}{\tau+\beta}.$$

Παράδειγμα 10 (Κλαδωτή αλυσίδα)

Έστω ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μία κλαδωτή αλυσίδα, όπου η τ.μ. X_n εκφράζει το μέγεθος της $n^{στης}$ γενιάς. Θεωρούμε $X_o \equiv 1$ και $X_{n+1}=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$, όπου $\{Y_i\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με $p(k)=P\{Y_1=\kappa\}=\alpha_\kappa$ και $E[Y_1]=m$, για κάθε $\kappa \geq 0$ και $0<m<\infty$. Τότε:

i. Η στοχαστική διαδικασία $Z_n=\dfrac{X_n}{m^n}$ είναι ένα martingale ως προς την ακολουθία $G_n=\sigma(X_0,X_1,\ldots,X_n)$.

ii. Η ακολουθία $\{\xi^{X_n}\}$ είναι ένα martingale ως προς την ακολουθία $G_n=\sigma(X_0,X_1,\ldots,X_n)$, όπου ξ είναι ένα <u>σταθερό</u> <u>σημείο</u> της **πιθανογεννήτριας** $\pi(\xi)=\sum_u p(u)\cdot\xi^u,\ \xi\geq 0$.

Πράγματι,

i. $$E\left[Z_{n+1}\middle|G_n\right]=E\left[\frac{X_{n+1}}{m^{n+1}}\middle|Y_0,Y_1,...,Y_n\right]$$

$$=\frac{1}{m^{n+1}}\underbrace{E\left[Y_1+Y_2+\ldots+Y_{X_n}\right]}_{\text{ανεξάρτητες}}$$

$$=\frac{1}{m^{n+1}}\cdot X_n\cdot E[Y_1]$$

$$=\frac{1}{m^{n+1}}\cdot X_n\cdot m$$

$$=\frac{X_n}{m^n}=Z_n$$

ii. $$E\left[\xi^{X_{n+1}}\middle|X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n\right]\overset{\text{ιδιότητα}}{\underset{\text{Markov}}{=}}=$$

$$=E\left[\xi^{X_{n+1}}\middle|X_n=x_n\right]$$

$$=\sum_{u\geq 0}p(x_n,u)\cdot\xi^u$$

$$=\sum_{u\geq 0}\xi^u\cdot P\left\{Y_1+Y_2+\ldots+Y_{x_n}=u\right\}$$

$$= E[\xi^{Y_1+Y_2+\ldots+Y_{x_n}}]$$

$$= \left\{E\left[\xi^{Y_1}\right]\right\}^{x_n}$$

$$= \left[\pi(\xi)\right]^{X_n} \overset{\text{σταθερό}}{=} \xi^{X_n}$$

Παράδειγμα 11

Έστω ότι η ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μία αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων το διάστημα S=[0, 1]. Αν κατά τη χρονική στιγμή n το σύστημα βρίσκεται στο p, όπου 0< p <1, τότε κατά τη χρονική στιγμή n+1 μπορεί να μεταβεί στο $\alpha + \beta \cdot p$ με πιθανότητα p και στο $\beta \cdot p$ με πιθανότητα 1– p, όπου α, β>0 και α+β=1. Δηλαδή η μετάβαση περιγράφεται ως εξής:

$$X_{n+1} = \begin{cases} a+\beta \cdot X_n & \text{με} \quad \text{πιθανότητα} \quad X_n \\ \beta \cdot X_n & \text{με} \quad \text{πιθανότητα} \quad 1\text{-}X_n \end{cases}$$

τότε ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

Πράγματι:

Επειδή ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μία αλυσίδα Markov ισχύει:

$$P\left(X_{n+1} \middle| X_o, \ldots, X_n\right) = P\left(X_{n+1} \middle| X_n\right)$$

Επομένως

$$E\left[X_{n+1} \middle| G_n\right] = E\left[X_{n+1} \middle| X_n\right]$$

$$= (\alpha+\beta \cdot X_n) \cdot X_n + \beta \cdot X_n \cdot (1\text{-}X_n)$$

$$= \alpha \cdot X_n + \beta \cdot X_n^2 + \beta \cdot X_n - \beta \cdot X_n^2$$

$$= \alpha \cdot X_n + \beta \cdot X_n$$

$$= \underbrace{(\alpha+\beta)}_{=1} \cdot X_n$$

$$= X_n$$

Ορισμός 3 (διαφορά Martingale)
Το ζεύγος $\{(d_i, \mathcal{B}_i)\}_{i\geq 0}$ είναι μια **martingale διαφορά** (submartingale ή supermartingale) εάν:

i. Η ακολουθία $\{ \mathcal{B}_i \}_{i\geq 0}$ είναι μια διύλιση.

ii. $d_j \in L^1$ και $d_j \in \mathcal{B}_j$.

iii. Για κάθε j ισχύει $E[d_{j+1} \big| , \mathcal{B}_j]=0$ (≥ 0 ή ≤ 0).

Πρόταση 3

i. Έστω ότι η ακολουθία $\{(d_i, \mathcal{B}_i)\}_{i\geq 0}$ είναι μιά martingale διαφορά . Εάν ορίσουμε $X_n = \sum_{j=0}^{n} d_j$ τότε η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{B}_n\}_{n\geq 0}$ είναι ένα martingale.

ii. Εάν η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{B}_n\}_{n\geq 0}$ είναι ένα martingale και ορίσουμε $d_o = X_o - E\left[X_o\right]$ και $d_j = X_j - X_{j-1}$, $j \geq 1$ τότε η ακολουθία $\{(d_i, \mathcal{B}_i)\}_{i\geq 0}$ είναι μιά martingale διαφορά.

iii. Εάν η ακολουθία $\{X_n = \sum_{j=0}^{n} d_j, \mathcal{B}_n\}$ είναι ένα martingale και ισχύει $E[d_j^2] < \infty$ τότε η ακολουθία $\{d_j\}_{j\geq 0}$ είναι ορθογώνια.

Παράδειγμα 12 (Διακριτή Στοχαστική Ολοκλήρωση)
Έστω ότι η ακολουθία $\{(d_i, \mathcal{B}_i)\}_{i\geq 0}$ είναι μια martingale διαφορά και ότι η ακολουθία $\left\{u_j\right\}_{j\geq 0}$ είναι προβλέψιμη ($u_{j+1} \in \mathcal{B}_j$). Εάν ορίσουμε $Y_j = \sum_{k=1}^{j} u_k \cdot d_k$ τότε η ακολουθία $\{Y_j, \mathcal{B}_j\}_{j\geq 0}$ είναι ένα martingale.

Ερμηνεία
Το τελευταίο παράδειγμα βρίσκει εφαρμογή σε μεγάλη ποικιλία επιστημονικών περιοχών, όπως :

i. <u>Τυχερά Παιχνίδια</u>

Στην περίπτωση αυτή η τ.μ. d_j παίρνει την τιμή 1 αν ο παίχτης κερδίζει ή την τιμή –1 αν ο παίχτης χάνει. Παράλληλα, η τ.μ. u_j παριστάνει το ποσό του στοιχήματος που ποντάρει ο παίχτης.

ii. Οικονομία

Στην προκειμένη περίπτωση η τ.μ. d_j παριστάνει την τιμή ενός αγαθού ενώ η τ.μ. u_j δηλώνει τον αριθμό των μετοχών.

iii. Κίνηση Brown

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η τ.μ. d_j παριστάνει τις προσαυξήσεις της κίνησης Brown ενώ η τ.μ. Y_{j} εκφράζει το (διακριτικό) **στοχαστικό ολοκλήρωμα**.

Παράδειγμα 13 (Πιθανογεννήτρια–ροπογεννήτρια-χαρακτηριστική συνάρτηση)
Έστω $\{\mathrm{Z}_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. και $\Phi(\mathrm{s})=\mathrm{E}[\mathrm{s}^{Z_1}]$ η πιθανογεννήτρια της τ.μ. Z_1, όπου $s \in [0,1]$. Θέτουμε $F_{\mathrm{n}}=\sigma(\mathrm{Z}_1,\ldots,\mathrm{Z}_{\mathrm{n}})$ με $F_{\mathrm{o}}=\{\varnothing, \Omega\}$ και $\mathrm{S}_{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{Z}_{\mathrm{j}}$. Αν ορίσουμε

$$\mathrm{M}_{\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{s}^{\mathrm{S}_{\mathrm{n}}}}{\Phi^{\mathrm{n}}(\mathrm{s})}$$

με $\mathrm{M}_{\mathrm{o}}=1$ τότε η ακολουθία $\{\mathrm{M}_{\mathrm{n}}, F_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

Πράγματι,

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{M}_{\mathrm{n}+1} \middle| F_{\mathrm{n}}\right]=\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{s}^{\mathrm{S}_{\mathrm{n}+1}}}{\Phi^{\mathrm{n}+1}(\mathrm{s})}\middle| F_{\mathrm{n}}\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{s}^{\mathrm{S}_{\mathrm{n}}}}{\Phi^{\mathrm{n}}(\mathrm{s})\Phi(\mathrm{s})}\cdot \mathrm{s}^{Z_{\mathrm{n}+1}} \middle| F_{\mathrm{n}}\right]$$

$$=\mathrm{E}\left[\mathrm{M}_{\mathrm{n}}\cdot\frac{1}{\Phi(\mathrm{s})}\mathrm{s}^{Z_{\mathrm{n}+1}} \middle| F_{\mathrm{n}}\right]$$

$$=\mathrm{M}_{\mathrm{n}}\cdot\frac{1}{\Phi(\mathrm{s})}\cdot \underbrace{\mathrm{E}[\mathrm{s}^{Z_{n+1}} | F_{\mathrm{n}}]}_{\text{ανεξάρτητα}}$$

$$= \mathrm{M}_n\cdot\frac{1}{\Phi(\mathrm{s})}\cdot\Phi(\mathrm{s})$$

$$=\mathrm{M}_n$$

Παράδειγμα 14
Έστω $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1$. Θέτουμε $F_o = \{\emptyset, \Omega\}$ και $F_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ και ορίζουμε

$$X_n = \xi_n - E\left[\xi_n \,|F_{n-1}\right],\ n \geq 1.$$

Τότε, η ακολουθία $\{X_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια martingale διαφορά. Αν ορίσουμε

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j - E\left[\xi_j \,|F_{j-1}\right]\right) \text{ και } Y_o = 0$$

τότε η ακολουθία $\{Y_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale.

6.4 Submartingales – Supermartingales

Σε πολλά ενδιαφέροντα και ρεαλιστικά προβλήματα μας ενδιαφέρει να έχουμε στον Ορισμό 2 (martingale), αντί ισότητας ανισότητα. Για τις περιπτώσεις αυτές έχουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 4
Έστω $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια διύλιση του πιθανοθεωρητικού χώρου (Ω, $\mathcal{A}$, P). Μία ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται **submartingale** ως προς την ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν και μόνο αν:

i. Η X_n είναι F_n-μετρήσιμη, δηλαδή $X_n \in F_n$.

ii. $E\left[X_n^+\right] < \infty$, όπου $X^+ = \max\{0, X\}$.

iii. $E\left[X_{n+1} \,|F_n\right] \geq X_n$.

Ορισμός 5
Έστω $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια διύλιση του πιθανοθεωρητικού χώρου (Ω, $\mathcal{A}$, P). Μία ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται **supermartingale** ως προς την ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν και μόνο αν:

i. Η X_n είναι F_n-μετρήσιμη, δηλαδή $X_n \in F_n$.

ii. $E\left[X_n^-\right] < \infty$, όπου $X^- = -\min\{0, X\}$.

iii. $E\left[X_{n+1} \,|F_n\right] \leq X_n$.

Παρατήρηση 6

1) Είναι φανερό ότι αν η ακολουθία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι martingale ως προς την ακολουθία $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$, τότε είναι submartingale και supermartingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι submartingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν και μόνο αν η $\{-X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι supermartingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2) Μία submartingale ακολουθία παραπέμπει σε ένα <u>ευνοϊκό</u> παιχνίδι (favorable) , ενώ μία supermartingale ακολουθία σε ένα <u>άδικο</u> (unfavorable) παιχνίδι.

3) Αν η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι submartingale, τότε αποδεικνύεται ότι

$$E[X_1] \le E[X_2] \le \ldots$$

Αν η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι supermartingale, τότε αποδεικνύεται ότι

$$E[X_1] \ge E[X_2] \ge \ldots$$

4) Αν η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι submartingale (supermartingale) τότε η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι submartingale (supermartingale), όπου $\mathcal{G}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n), n \in \mathbb{N}$.

5) Εάν η ακολουθία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι σταθερή, δηλαδή $X_n \equiv X, \forall n$, τότε είναι ένα martingale. Εάν η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα, τότε είναι ένα submartingale, ενώ εάν είναι φθίνουσα τότε είναι ένα supermartingale.

Πρόταση 4

Αν οι ακολουθίες $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι martingales τότε η ακολουθία $\{a \cdot X_n + \beta \cdot Y_n, F_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου α και β πραγματικοί αριθμοί, είναι ένα martingale.

Απόδειξη

Οι δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού είναι προφανές ότι ικανοποιούνται από την ακολουθία $\{a \cdot X_n + \beta \cdot Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$, λόγω γραμμικότητας. Αρκεί να αποδείξουμε την τρίτη.

$$E\left[\alpha \cdot X_{n+1} + \beta \cdot Y_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] = \alpha \cdot E\left[X_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] + \beta \cdot E\left[Y_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right]$$

$$= \alpha \cdot X_n + \beta \cdot Y_n$$

#

Πρόταση 5

Αν οι ακολουθίες $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι submartingales (supermartingales) τότε ισχύουν τα παρακάτω:

i. Η ακολουθία $\{a \cdot X_n + \beta \cdot Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $\alpha, \beta \geq 0$, είναι ένα submartingale (supermartingales) .

ii. Η ακολουθία $\{\sup\{X_n, Y_n\}, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{\inf\{X_n, Y_n\}, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$) είναι ένα submartingale (supermartingales).

Απόδειξη

i. Οι δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού είναι προφανές ότι ικανοποιούνται από την ακολουθία $\{a \cdot X_n + \beta \cdot Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Αρκεί να αποδείξουμε την τρίτη.

$$E\left[\alpha \cdot X_{n+1} + \beta \cdot Y_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] = \alpha \cdot E\left[X_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] + \beta \cdot E\left[Y_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right]$$

$$\geq \alpha \cdot X_n + \beta \cdot Y_n$$

ii. Οι δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού είναι προφανές ότι ικανοποιούνται από την ακολουθία $\{\sup\{X_n, Y_n\}, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Αρκεί να αποδείξουμε την τρίτη.

$$E\left[X_{n+1} \vee Y_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] \geq X_n \vee Y_n$$

#

Ένας από τους (βασικούς) τρόπους για να αποδείξει κανείς ότι μιά ακολουθία τ.μ. είναι submartingale είναι με την βοήθεια των κυρτών συναρτήσεων και της ανισότητας του Jensen, όπως φαίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1

i. Έστω ότι η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale και $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία **κυρτή** συνάρτηση τέτοια ώστε $E\left[\left|f(X_n)\right|\right] < \infty$ για κάθε $n \geq 0$. Τότε η ακολουθία $\{f(X_n), \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα submartingale .

ii. Έστω ότι η ακολουθία $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα submartingale και $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία <u>αύξουσα</u> **κυρτή** συνάρτηση τέτοια ώστε $E\left[\left|f(X_n)\right|\right] < \infty$ για κάθε $n \geq 0$. Τότε η ακολουθία $\{f(X_n), \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα submartingale .

Απόδειξη

Είναι προφανές ότι και στις δύο περιπτώσεις ικανοποιούνται οι δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού. Αρκεί, να αποδείξουμε την τρίτη ιδιότητα σε καθεμία από αυτές.

i. Με την βοήθεια της ανισότητας Jensen προκύπτει ότι:

$$\mathrm{E}\left[f\left(\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{\mathrm{n}}\right] \geq f\left(\mathrm{E}\left[\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}\middle|\mathcal{F}_{\mathrm{n}}\right]\right) = f\left(\mathrm{X}_{\mathrm{n}}\right)$$

ii. Ομοίως,

$$\mathrm{E}\left[f\left(\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{\mathrm{n}}\right] \geq f\left(\mathrm{E}\left[\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}\middle|\mathcal{F}_{\mathrm{n}}\right]\right) \geq f\left(\mathrm{X}_{\mathrm{n}}\right)$$

#

Πόρισμα 1
Έστω ότι η ακολουθία $\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{n}}, \mathcal{F}_{\mathrm{n}}\right\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ είναι martingale. Τότε:

i. Η ακολουθία $\left\{\left|\mathrm{X}_{\mathrm{n}}\right|^{p}, \mathcal{F}_{\mathrm{n}}\right\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$, όπου $p \geq 1$, είναι submartingale. Ειδικότερα, η ακολουθία $\left\{\left|\mathrm{X}_{n}\right|, \mathcal{F}_{\mathrm{n}}\right\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$ είναι submartingale.

ii. Η ακολουθία $\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{n}}^{+}, \mathcal{F}_{\mathrm{n}}\right\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$ είναι submartingale.

Απόδειξη

i. Η συνάρτηση $f(\mathrm{x})=|\mathrm{x}|^{p}$, $p \geq 1$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

ii. Η συνάρτηση $f(\mathrm{x})=\mathrm{x}^{+}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

#

Πόρισμα 2
Αν η ακολουθία $\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{n}}, \mathcal{F}_{\mathrm{n}}\right\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ είναι ένα θετικό submartingale τότε η ακολουθία $\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{n}}^{p}, \mathcal{F}_{\mathrm{n}}\right\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$, όπου $p \geq 1$, είναι submartingale.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f(\mathrm{x})=\mathrm{x}^{p}$, $p \geq 1$ είναι κυρτή και αύξουσα στο $\mathbb{R}_{+}$

#

6.5 Χρόνοι τερματισμού

Για να μπορέσει να αποδείξει κανείς περαιτέρω (οριακά) θεωρήματα και προτάσεις στα martingales, χρειάζεται να ορίσει την έννοια του χρόνου τερματισμού. Ο ορισμός του απορρέει φυσιολογικά από πραγματικές καταστάσεις (εφαρμογές).

Ορισμός 6

Έστω $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια διύλιση στον πιθανοθεωρητικο χώρο (Ω, $\mathcal{A}$, P). Μία τ.μ. $T:\Omega\to\{0,1,2,\ldots\}\cup\{\infty\}$ καλείται **χρόνος τερματισμού** (stopping time) ως προς το διύλιση $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν $\{T=n\}\in F_n$ για όλα τα $n\geq 1$.

Παρατήρηση 7

Η τ.μ. Τ ικανοποιεί τη σχέση

$$\{T>n\}=\{T\leq n\}^c\in F_n,\ \text{για όλα τα } n$$

αφού η $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα διύλιση. Οι χρόνοι τερματισμού καλούνται και **χρόνοι Markov** και είναι δυνατόν να παίρνουν την τιμή ∞.

Ερμηνεία

Ο χρόνος τερματισμού Τ, και πάλι στο περιεχόμενο ενός τυχερού παιχνιδιού, μπορεί να ερμηνευτεί σαν ο χρόνος που αποφασίζει κάποιος να σταματήσει. Το ότι αποφασίζει να σταματίσει ή όχι, αμέσως μετά το n-οστο παιχνίδι, εξαρτάται από την προϊστορία μέχρι τον χρόνο n (η οποία εκφράζεται από τις σ-άλγεβρες F_n).

Παρατηρήστε ότι ο Τ μπορεί να είναι ίσος με $+\infty$. Εάν Τ είναι ο χρόνος αναμονής μέχρι ότου συμβεί ένα γεγονός και το γεγονός αυτό δεν συμβαίνει ποτέ, τότε είναι είναι φυσικό να χαρακτηρίσουμε τον χρόνο αναμονής άπειρο και έτσι Τ=∞

Παράδειγμα 15

Θεωρούμε τη ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος. Αν ορίσουμε

$$X_n=\begin{cases}1, & \text{αν στη } n^{\text{στη}} \text{ ρίψη εμφανιστεί κεφαλή}\\ 0, & \text{αν στη } n^{\text{στη}} \text{ ρίψη εμφανιστεί γράμμα.}\end{cases}$$

και Τ ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της πρώτης κεφαλής, τότε η τυχαία μεταβλητή Τ είναι χρόνος τερματισμού ως προς την $F_n=\sigma(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.

Πράγματι, έχουμε ότι:

$$\{T=n\}=\{X_n=1,\quad X_j=0,\quad 1\leq j<n\}\in F_n$$

Άρα, η τ. μ. Τ είναι ένας χρόνος τερματισμού.

Παράδειγμα 16

Στο παράδειγμα αυτό μελετάμε την **πρώτη επίσκεψη** της ακολουθίας $Y_o,Y_1,\ldots$ **σε ένα υποσύνολο B**$\in\mathcal{B}^1$. Έστω $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια διύλιση στον π.χ. (Ω, $\mathcal{A}$, P). Θεωρούμε την τ.μ. $Y_n:\Omega\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $Y_n\in F_n$ για κάθε n. Αν ορίσουμε

$$T_B(\omega)=\begin{cases}\inf\{n;\quad Y_n\in B\}, & \text{αν}\quad B\neq\varnothing\\ \infty, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

Τότε η τ.μ. T_B είναι ένας χρόνος τερματισμού ως προς το διύλιση $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Πράγματι, έχουμε ότι:

$$\{T_B=n\}=\{Y_1\notin B,\ldots,Y_{n-1}\notin B, Y_n\in B\}\in F_n$$

Άρα, η τ.μ T_B είναι χρόνος τερματισμού και μάλιστα ονομάζεται **χρόνος πρώτης επίσκεψης στο B**. Το ότι (μπορεί) $T_B=\infty$ σημαίνει ότι δεν επισκεπτόμαστε ποτέ το σύνολο B.

Παρατήρηση 8

1) Γενικά, για k σταθερό, ο **χρόνος της k επίσκεψης** (της ακολουθίας $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$) **στο B** είναι χρόνος τερματισμού. Αλλά, ο χρόνος της τελευταίας επίσκεψης δεν είναι αφού πρέπει να γνωρίζουμε όλο το μέλλον.

2) Η τ.μ. T είναι χρόνος τερματισμού αν και μόνο αν ικανοποιείται η σχέση $\{T\le n\}\in F_n$, για κάθε n.

   Πράγματι

$$\{T=n\}=\{T\le n\}-\{T\le n\text{-}1\}\in F_n \qquad \text{και}$$

$$\{T\le n\}=\bigcup_{k=0}^{n}\{T=k\}\in F_n$$

Πρόταση 6

Εάν $\{T_k\}$ είναι χρόνοι τερματισμού, τότε

α) το $\bigwedge_k T_k=\inf_k T_k$ και το $\bigvee_k T_k=\sup_k T_k$ είναι χρόνοι τερματισμού,

β) Εάν η οικογένεια $\{T_k\}$ των χρόνων τερματισμού είναι μονότονη, τότε $\lim_{k\to\infty}T_k$ είναι ένας χρόνος τερματισμού

γ) ο T_i+T_j, $\forall i,j$ είναι ένας χρόνος τερματισμού.

6.6 Θεώρημα προαιρετικού τερματισμού (optional stopping)

Θεωρούμε, και πάλι, ένα δίκαιο παιχνίδι στο οποίο ένας παίχτης στοιχηματίζει κάθε φορά π.χ. ένα ευρώ και χάνει ή κερδίζει με ίσες πιθανότητες. Έστω ότι η τ.μ. Y_n περιγράφει την (τύχη του παίκτη κατά την) $n^{οστη}$ επανάληψη ενός τέτοιου παιχνιδιού, δηλαδή $P\{Y_n=1\}=P\{Y_n=-1\}=\frac{1}{2}$ και έστω $X_n=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$ είναι τα *καθαρά κέρδη του παίκτη μετά το* $n^{οστο}$ *παιχνίδι*. Τότε είναι γνωστό ότι τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη του παίκτη μετά το $n^{οστο}$ παιχνίδι είναι ίσα με το μηδέν, δηλαδή $EX_n=0$.

Ο παίκτης δεν είναι απαραίτητο να παίζει για πάντα, αλλά μπορεί να προσδιορίσει εκ των προτέρων έναν συγκεκριμένο χρόνο στον οποίο θα σταματήσει. Εάν λοιπόν T είναι ο χρόνος κατά τον οποίο ο παίκτης σταματά και X_T τα καθαρά του κέρδη τότε, θα θέλαμε να ξέρουμε αν $EX_T=0$ (δεν είναι απαραίτητο $EX_T=0$). Στην παράγραφο αυτή δίνονται συνθήκες που εξασφαλίζουν (γενικότερα) ότι $EX_T=EX_n, \forall n$. Δύο χρήσιμες εφαρμογές των θεωρημάτων που ακολουθούν περιγράφονται στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 2 (προαιρετικού τερματισμού του Doob)

Έστω T ένας χρόνος τερματισμού και $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μιά σ.α. και έστω ακόμα ότι μια (τουλάχιστον) από τις παρακάτω συνθήκες ικανοποιείται

(α) ο T είναι φραγμένος (δηλαδή $T(\omega)\le k,\ \forall\omega\ \ \&\ \ k=ct$)

(β) ο T είναι πεπερασμένος σ.β. (δηλαδή $P\{T<\infty\}=1$) και η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένη (δηλαδή $|X_n(\omega)|\le k,\ \forall n,\omega\ \ \&\ \ k=ct$)

(γ) ο T είναι ολοκληρώσιμος ($ET<\infty$) και οι προσαυξήσεις της $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένες (δηλαδή $|X_n(\omega)\text{-}X_{n-1}(\omega)|\le M,\ \forall n,\omega\ \ \&\ \ M=ct$)

Τότε

(Ι) Εάν η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα supermartingale έπεται ότι $EX_T<\infty$ και

$$EX_T\le EX_0$$

(ΙΙ) Εάν η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale έπεται ότι $EX_T<\infty$ και

$$EX_T=EX_0$$

Απόδειξη

(Ι) Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η ακολουθία $\{X_{T\wedge n}\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα supermartingale, οπότε

$$EX_{T\wedge n}\le EX_0 \qquad (1)$$

Τώρα

(α) από το ότι $T(\omega)\le k,\ \forall\omega\ \ \&\ \ k=ct \Rightarrow$ για $n=k$ έχουμε, από την (1),

$$EX_{T\wedge k} = EX_T \le EX_0$$

(β) Είναι φανερό ότι $\{T<\infty\} \subset \{X_{T\wedge n} \to X_T\}$ άρα $1 = P\{T<\infty\} = P\{X_{T\wedge n} \to X_T\}$ δηλαδή $X_{T\wedge n} \to X_T$ σ.β. Αλλά $|X_{T\wedge n}(\omega)| \le k, \ \forall n, \omega$ οπότε από το θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης έπεται ότι

$$EX_{T\wedge n} \to EX_T \qquad (2)$$

Τέλος, από το ότι $EX_{T\wedge n} \le EX_0$ και την (2), έπεται ότι $EX_T \le EX_0$

(γ) Έχουμε ότι $|X_{T\wedge n}(\omega)\text{-}X_0(\omega)| \le \left|\sum_{k=0}^{T\wedge n}(X_k(\omega)\text{-}X_0(\omega)\right| \le M\cdot T$ και $EM\cdot T<\infty$

Αλλά $ET<\infty$ οπότε ο T είναι πεπερασμένος σ.β. και έτσι $X_{T\wedge n} \to X_T$ σ.β..
Από το θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης έπεται τότε ότι $EX_{T\wedge n} \to EX_T$ και επειδή $EX_{T\wedge n} \le EX_0$, έπεται ότι $EX_T \le EX_0$

(II) Εάν η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale, τότε είναι ένα supermartingale, οπότε από το (I) έπεται ότι

$$EX_T \le EX_0 \qquad (3)$$

Ακόμα η $\{-X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale και άρα είναι ένα supermartingale, οπότε από το (I) έπεται ότι

$$E(\text{-}X_T) \le E(\text{-}X_0) \Rightarrow E(X_T) \ge E(X_0) \qquad (4)$$

Τέλος, από τις (3) και (4), έπεται ότι $EX_T = EX_0$

#

Μιά δεύτερη μορφή του παραπάνω βασικού θεωρήματος είναι αυτή που ακολουθεί.

Θεώρημα 3 (προαιρετικού τερματισμού-2η μορφή)

Εάν $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale και T ένας χρόνος τερματισμού τέτοιος ώστε $P\{T<\infty\}=1$ και $E\left|\sup_{n\ge 0} X_{T\wedge n}\right| < \infty$ τότε

$$EX_T = EX_0$$

Απόδειξη

Ορίζουμε την τ.μ.

$$W=\sup_{n\geq 0} X_{T\wedge n}$$

Τώρα

$$X_T = \sum_{k=0}^{\infty} X_k I_{\{T=k\}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_{T\wedge k} I_{\{T=k\}}$$

Αλλά τότε, λόγω του ότι $P\{T<\infty\}=1$, έχουμε $X_T \leq W \Rightarrow EX_T \leq EW<\infty$ (οπότε η μέση τιμή της X_T).

Τέλος, για το αποτέλεσμα πρέπει να δείξουμε ότι $EX_{T\wedge n} \to EX_T$. Αλλά

$$\left|EX_{T\wedge n} - EX_T\right| \leq E\left|(X_{T\wedge n} - X_T)I_{\{T>n\}}\right| \leq 2E\left[WI_{\{T>n\}}\right] \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad (*)$$

γιατί

$$\begin{aligned} E|W| &\geq E\left|WI_{\{T\leq n\}}\right| \\ &= \sum_{k=0}^{n} E\left[|W| \| T=k\right]\cdot P\{T=k\} \\ &\underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=0}^{n} E\left[|W| \| T=k\right]\cdot P\{T=k\} \\ &= E|W| \end{aligned}$$

Οπότε $\lim_{n\to\infty} E\left|WI_{\{T\leq n\}}\right| = E|W|$ & $\lim_{n\to\infty} E\left|WI_{\{T>n\}}\right| = 0$.

Είναι φανερό ότι από την (*) έπεται ότι $EX_{T\wedge n} \to EX_T$.

#

Πόρισμα 3

Εάν $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale και T ένας χρόνος τερματισμού τέτοιος ώστε $ET<\infty$ και $\exists K$ τ.ω.

$$E\left[|X_{n+1}-X_n| \| \mathcal{F}_n\right] \leq K, \qquad \text{για} \quad n<T$$

Τότε $EX_T=EX_0$

6.7 Οριακά θεωρήματα για martingales

Η δυναμική της θεωρίας των martingales οφείλεται κυρίως σε δυό λόγους: (α) στις ανισότητες και (β) στα οριακά θεωρήματα που μπορούν να αποδειχθούν για την εν λόγω κατηγορία σ.α.. Δίνουμε εδώ χωρίς αποδείξεις (οι οποίες είναι αρκετά τεχνικές) μερικά βασικά θεωρήματα για τα martingales.

Θεώρημα 4 (σύγκλισης του Doob)

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ένα supermartingale φραγμένο στον χώρο L^1 (δηλαδή $\sup_n E|X_n|<\infty$).

Τότε υπάρχει μιά τ.μ. X_∞, τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X_\infty$ και $EX_\infty \le EX_0$.

Παρατήρηση

Σαν $X_\infty(\omega)$ παίρνουμε το $\limsup_n X_n(\omega)$, $\forall\omega$.

Πόρισμα 4

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ένα μη-αρνητικό supermartingale. Τότε υπάρχει μιά τ.μ. X_∞, τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X_\infty$.

Απόδειξη

Η ακολουθία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι προφανώς φραγμένη στον χώρο L^1, γιατί

$$E|X_n| = EX_n \le EX_0$$

οπότε από το θεώρημα 4 έχουμε το αποτέλεσμα.

#

Πόρισμα 5

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ένα φραγμένο ή από πάνω ή από κάτω martingale. Τότε υπάρχει μιά τ.μ. X_∞, τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X_\infty$.

Απόδειξη

(φραγμένο από κάτω) Έχουμε $X_n \ge -c,\ c>0$. Αλλά τότε η ακολουθία $\{X_n + c\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα μη-αρνητικό supermartingale και το αποτέλεσμα έπεται από το πόρισμα 4.

(φραγμένο από πάνω) Έχουμε $X_n \le c \Rightarrow -X_n \ge -c$, και το αποτέλεσμα έπεται από το πρώτο μέρος του πορίσματος.

#

Πόρισμα 6

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ένα μη-αρνητικό martingale. Τότε υπάρχει μιά τ.μ. X_∞, τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X_\infty$.

Απόδειξη

Προφανές, από το πόρισμα 5, γιατί το martingale είναι φραγμένο από κάτω από το μηδέν.

#

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ MARTINGALES

Δίνουμε εδώ δύο, από τις πολλές εφαρμογές, της θεωρίας των martingales. Πιο συγκεκριμένα, σαν εφαρμογή των θεωρημάτων προαιρετικού τερματισμού, δίνεται το παράδειγμα των τυχαίων περιπάτων ενώ σαν εφαρμογή των οριακών θεωρημάτων των martingales, δίνεται το παράδειγμα των κλαδωτών αλυσίδων. Τα αποτελέσματα που αποδεικνύονται εδώ έχουν ήδη αποδειχθεί στα κεφάλαια 2 και 3 αντίστοιχα. Εδώ οι αποδείξεις είναι πιο «κομψές» και λιγότερο μακροσκελείς. Από τις αποδείξεις αυτές γίνεται φανερό πως τα αντίστοιχα κομμάτια της θεωρίας των martingales, μπορούν να εφαρμοστούν σε καταστάσεις που οι κλασσικές μέθοδοι της Θεωρίας Πιθανοτήτων αποτυγχάνουν.

7.1 Τυχαίοι περίπατοι

Παράδειγμα 1 (Καταστροφή παίχτη όπου *p*=*q*)
Ένας παίχτης Α με αρχικό κεφάλαιο α>0 ευρώ παίζει ενάντια σ' ένα καζίνο, Β , με αρχικό κεφάλαιο b>0 ευρώ. Θεωρούμε το παιχνίδι από την πλευρά του Α, έτσι ώστε η τυχαία μεταβλητή X_n να συμβολίζει τα αθροιστικά κέρδη του Α στο τέλος του $n^{\text{στου}}$ παιχνιδιού. Έστω $\{J_\kappa\}_{\kappa\geq 1}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με $P\{J_\kappa = 1\} = p$, $P\{J_\kappa = -1\} = q$, $E[J_\kappa] = 0$ και $p = q = \frac{1}{2}$, τότε

$$X_n = \sum_{\kappa=1}^{n} J_\kappa$$

Εάν ορίσουμε την τ.μ.

$$T = \min\{n \geq 0;\quad X_n = -a \quad \text{ή} \quad X_n = b\}$$

τότε ο Τ είναι ένας χρόνος τερματισμού (είναι ο χρόνος κατά τον οποίο ο Α ή έχει χάσει όλα τα χρήμα του ή έχει κερδίσει όλα τα χρήματα του Β), τέτοιος ώστε $P(T < +\infty) = 1$ και ΕΤ<∞ (η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη της αντίστοιχης του κεφαλαίου 2).

Πρόταση 1 (Καταστροφή παίχτη όπου p=q)
Με βάση τα παραπάνω δεδομένα

i. $P\{X_T = b\} = P\{\text{ο} \quad \text{Β} \quad \text{καταστρέφεται}\} = \dfrac{\alpha}{\alpha + b}$

ii. $P\{X_T = -\alpha\} = P\{\text{ο} \quad \text{Α} \quad \text{καταστρέφεται}\} = \dfrac{b}{\alpha + b}$

Ακόμα $E[X_T] = 0$ και $E[T] = ab$

Απόδειξη

Πρώτα απ' όλα η ακολουθία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale. Πράγματι

$$\begin{aligned}
E\left[X_{n+1} \mid G_n\right] &= E\left[X_n + J_{n+1} \mid G_n\right] \\
&= E\left[X_n \mid G_n\right] + E\left[J_{n+1} \mid G_n\right] \\
&= X_n + E\left[J_{n+1}\right] \\
&= X_n + 1 \cdot P\{J_{n+1} = 1\}(\ ) + (-1) \cdot P\{J_{n+1} = 1\} P \\
&= X_n + p - q \ = X_n
\end{aligned}$$

Η ακολουθία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ όμως έχει φραγμένες προσαυξήσεις, γιατί

$$\left|X_n - X_{n-1}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} J_k - \sum_{k=1}^{n-1} J_k\right| = \left|J_n\right| = 1$$

Επίσης έχει δειχθεί στο 2ο κεφάλαιο ότι ο χρόνος τερματισμού T είναι ολοκληρώσιμος, δηλαδή $ET<\infty$. Οπότε από το (γ) μέρος του θεωρήματος του προαιρετικού τερματισμού του Doob έχουμε $E\left[X_T\right] = E\left[X_o\right] = 0$. Αλλά

$$\begin{aligned}
EX_T &= (-\alpha) \cdot P\{X_T = -\alpha\} + b \cdot P\{X_T = b\} = 0 \Rightarrow \\
&(-\alpha) \cdot P\{X_T = -\alpha\} + b \cdot (1 - P\{X_T = -\alpha\}) = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$P\{X_T = -\alpha\} = P\{\text{ο A καταστρέφεται}\} = \frac{b}{\alpha+b} \quad \text{και}$$

$$P\ \{X_T = b\} = P\{\text{ο B καταστρέφεται}\} = \frac{\alpha}{\alpha+b}$$

Ακόμα, η ακολουθία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ όπου $Y_n = X_n^2 - n$ είναι επίσης martingale. Πράγματι, επειδή

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = X_{n+1}^2 - (n+1) &= X_n^2 + 2 \cdot \sum_{\kappa=1}^{n} J_\kappa \cdot J_{n+1} + J_{n+1}^2 - n - 1 \\
&= Y_n + 2 \cdot \sum_{\kappa=1}^{n} J_\kappa \cdot J_{n+1} + J_{n+1}^2 - 1
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Y}_{\mathrm{n}+1}\left|G_{\mathrm{n}}\right.\right]=\mathrm{E}\left[\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}+2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\mathrm{n}}J_{\kappa}\cdot J_{\mathrm{n}+1}+J_{\mathrm{n}+1}^{2}-1\left|G_{\mathrm{n}}\right.\right]$$

$$=\mathrm{E}\left[\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}\left|G_{\mathrm{n}}\right.\right]+\mathrm{E}\left[2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\mathrm{n}}J_{\kappa}\cdot J_{\mathrm{n}+1}\left|G_{\mathrm{n}}\right.\right]+\mathrm{E}\left[J_{\mathrm{n}+1}^{2}\left|G_{\mathrm{n}}\right.\right]\text{-}1$$

$$=\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}+2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\mathrm{n}}J_{\kappa}\cdot\mathrm{E}\left[J_{n+1}\left|G_{n}\right.\right]+\mathrm{E}\left[J_{n+1}^{2}\right]\text{-}1$$

$$=\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}+2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\mathrm{n}}J_{\kappa}\cdot\mathrm{E}\left[J_{\mathrm{n}+1}\right]+1^{2}\cdot\mathrm{P}\left\{J_{\mathrm{n}+1}=1\right\}+\left(\text{-}1\right)^{2}\cdot\mathrm{P}\left\{J_{\mathrm{n}+1}=\text{-}1\right\}\text{-}1$$

$$=\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}+2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\mathrm{n}}J_{\kappa}\cdot 0+\mathrm{p}+\mathrm{q}-1=Y_{n}$$

Από το θεώρημα του προαιρετικού τερματισμού έχουμε

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}\right]=\mathrm{E}\left[\mathrm{X}_{\mathrm{T}}^{2}\right]-\mathrm{E}\left[\mathrm{T}\right]=\mathrm{E}\left[\mathrm{X}_{0}^{2}\right]-0=0\Rightarrow\mathrm{E}\left[\mathrm{T}\right]=\mathrm{E}\left[\mathrm{X}_{\mathrm{T}}^{2}\right].$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\mathrm{EX}_{\mathrm{T}}^{2}&=\left(-\alpha\right)^{2}\cdot\mathrm{P}\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=-\alpha\right\}+\mathrm{b}^{2}\cdot\mathrm{P}\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=\mathrm{b}\right\}=0=\\&=\left(-\alpha\right)^{2}\cdot\mathrm{P}\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=-\alpha\right\}+\mathrm{b}^{2}\cdot(1-\mathrm{P}\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=-\alpha\right\})=\alpha\mathrm{b}\end{aligned}$$

Δηλαδή $\mathrm{ET}=\alpha\mathrm{b}$

#

Παράδειγμα 2 (Καταστροφή παίχτη όπου $p\neq q$)
Έστω και πάλι το παράδειγμα της καταστροφής του παίκτη αλλά $p\neq q$. Έστω επίσης ότι $\mathrm{E}\left[J_{1}\right]=p-q=\mu$

Πρόταση 2 (Καταστροφή παίχτη όπου $p\neq q$)
Έστω ότι $p>q$ (αλλιώς εναλλάσσουμε τα p,q και θεωρούμε το παιχνίδι από την σκοπιά του Β). Με βάση τα δεδομένα του παραδείγματος 2

iii. $\mathrm{P}\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=\mathrm{b}\right\}=\mathrm{P}\left\{\text{ο Β καταστρέφεται}\right\}=\dfrac{1\text{-s}^{\alpha}}{1\text{-s}^{\alpha+\mathrm{b}}}$

iv. $\mathrm{P}\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=-\alpha\right\}=\mathrm{P}\left\{\text{ο Α καταστρέφεται}\right\}=\dfrac{\mathrm{s}^{\alpha}\text{-s}^{\alpha+\mathrm{b}}}{1\text{-s}^{\alpha+\mathrm{b}}}$, όπου $\mathrm{s}=\dfrac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}}$.

Ακόμα $\mathrm{E}\left[\mathrm{T}\right]=\dfrac{1}{p-q}\left[\left(a+b\right)\dfrac{1-s^{a}}{1-s^{a+b}}-a\right]$

Απόδειξη

Η ακολουθία $\{Z_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$ όπου $\mathrm{Z}_{\mathrm{n}}=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\mathrm{X}_{\mathrm{n}}}$ είναι ένα martingale. Πράγματι,

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Z}_{\mathrm{n}+1}\middle|G_{\mathrm{n}}\right]=\mathrm{E}\left[\mathrm{Z}_{\mathrm{n}}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{J_{\mathrm{n}+1}}\middle|G_{\mathrm{n}}\right]=\mathrm{Z}_{\mathrm{n}}\cdot\mathrm{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{J_{\mathrm{n}+1}}\middle|G_{\mathrm{n}}\right]=\mathrm{Z}_{\mathrm{n}}\cdot\mathrm{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{J_{\mathrm{n}+1}}\right]$$

$$=\mathrm{Z}_{\mathrm{n}}\cdot\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{1}\cdot\mathrm{P}\{J_{\mathrm{n}+1}=1\}+\left(\frac{q}{p}\right)^{-1}\cdot\mathrm{P}\{J_{\mathrm{n}+1}=-1\}\right]$$

$$=\mathrm{Z}_{\mathrm{n}}\cdot\left(\frac{q}{p}\cdot p+\frac{p}{q}\cdot q\right)=\mathrm{Z}_{\mathrm{n}}\cdot\underbrace{(p+q)}_{1}=\mathrm{Z}_{\mathrm{n}}$$

Η ακολουθία $\{Z_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$ είναι όμως φραγμένη, γιατί $p>q\Rightarrow s=\dfrac{q}{p}<1$ οπότε $\mathrm{Z}_{\mathrm{n}}=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\mathrm{X}_{\mathrm{n}}}<1$. Επίσης, έχει αποδειχθεί στο 2$^{\mathrm{o}}$ κεφάλαιο ότι ο χρόνος τερματισμού T είναι πεπερασμένος σ.β. (δηλαδή $\mathrm{P}\{\mathrm{T}<\infty\}=1$). Από το (β) μέρος του θεωρήματος του προαιρετικού τερματισμού του Doob, έχουμε

$$\mathrm{E}[\mathrm{Z}_{\mathrm{T}}]=\mathrm{E}[\mathrm{Z}_{1}]=\left(\frac{q}{p}\right)^{J_{1}}=1.$$

Αλλά

$$\mathrm{E}[\mathrm{Z}_{\mathrm{T}}]=\left(\frac{q}{p}\right)^{-\alpha}\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=-\alpha\}+\left(\frac{q}{p}\right)^{\mathrm{b}}\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=\mathrm{b}\}=s^{-a}\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=-\alpha\}+s^{\mathrm{b}}\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=\mathrm{b}\}=1$$

$$\Rightarrow s^{-a}\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=-\alpha\}+s^{\mathrm{b}}\left(1-\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=-\alpha\}\right)=1\Rightarrow$$

$$\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=-\alpha\}=\mathrm{P}\{\text{ο}\quad\mathrm{A}\quad\text{καταστρέφεται}\}=\frac{\mathrm{s}^{\alpha}\text{-}\mathrm{s}^{\alpha+\mathrm{b}}}{1\text{-}\mathrm{s}^{\alpha+\mathrm{b}}},\ \text{και έτσι}$$

$$\mathrm{P}\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}=\mathrm{b}\}=\mathrm{P}\{\text{ο}\quad\mathrm{B}\quad\text{καταστρέφεται}\}=\frac{1\text{-}\mathrm{s}^{\alpha}}{1\text{-}\mathrm{s}^{\alpha+\mathrm{b}}}$$

Ακόμα, η ακολουθία $\{\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$ όπου $\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}=\mathrm{X}_{\mathrm{n}}-\mathrm{n}\mu$ είναι ένα martingale. Πράγματι,

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Y}_{\mathrm{n+1}} \middle| G_{\mathrm{n}}\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{Y}_{\mathrm{n}} + J_{\mathrm{n+1}} - \mu \middle| G_{\mathrm{n}}\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\mathrm{Y}_n \middle| G_n\right] + \mathrm{E}\left[J_{n+1} \middle| G_n\right] - \mathrm{E}\left[\mu \middle| G_n\right]$$

$$= \mathrm{Y}_{\mathrm{n}} + \mathrm{E}\left[J_{\mathrm{n+1}}\right] - \mu$$

$$= \mathrm{Y}_{\mathrm{n}} + \mu - \mu = \mathrm{Y}_{\mathrm{n}}$$

Η ακολουθία $\left\{\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}\right\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$ όμως έχει φραγμένες προσαυξήσεις, γιατί

$$\left|\mathrm{Y}_{\mathrm{n}} - \mathrm{Y}_{\mathrm{n-1}}\right| = \left|\mathrm{X}_{\mathrm{n}} - (\mathrm{n}+1)\mu - \mathrm{X}_{\mathrm{n-1}} + \mathrm{n}\mu\right| \leq \left|J_{\mathrm{n}}\right| + \mu = 1 + \mu$$

και επειδή ο χρόνος τερματισμού T είναι ολοκληρώσιμος, δηλαδή $\mathrm{ET}<\infty$, από το (γ) μέρος του θεωρήματος του προαιρετικού τερματισμού του Doob έχουμε ότι $\mathrm{E}\left[\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{Y}_{\mathrm{o}}\right] = 0$. Αλλά

$$\mathrm{EY}_{\mathrm{T}} = \mathrm{E}\left[\mathrm{X}_{\mathrm{T}} - \mathrm{T} \cdot \mu\right] = 0 \Rightarrow \mathrm{ET} = \frac{1}{p-q} \mathrm{EX}_{\mathrm{T}}$$

$$\mu \cdot \mathrm{E}\left[\mathrm{T}\right] = (-\alpha) \cdot \mathrm{P}\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}} = -\alpha\right\} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{P}\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{T}} = \mathrm{b}\right\}$$

Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες από το πρώτο μέρος και κάνοντας τις πράξεις έχουμε

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{T}\right] = \frac{1}{p-q} \cdot \left[(a+b) \cdot \frac{1-s^{a}}{1-s^{a+b}} - a\right]$$

#

7.2 Κλαδωτές αλυσίδες

Έστω $\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{n}}\right\}_{\mathrm{n}=0}^{+\infty}$ μία κλαδωτή αλυσίδα (όπως ορίστηκε στο κεφάλαιο 3) και έστω ότι ο αρχικός πληθυσμός X_0 αποτελείται από έναν μόνο οργανισμό, δηλ. $\mathrm{X}_0 = 1$. Το μέγεθος του πληθυσμού $\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}$ της n+1-γενιάς είναι ίσο με το άθροισμα των απογόνων των οργανισμών της $\mathrm{n}^{\text{οστής}}$ γενιάς, δηλαδή:

$$\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{X}_{\mathrm{n}}} \xi_{\mathrm{k}}$$

όπου η ξ_{k} δηλώνει *τον αριθμό των απογόνων που γεννά ο k οργανισμός της* $n^{\text{οστής}}$ *γενιάς*.

Από τις υποθέσεις (Υ1 και Υ2) του κεφαλαίου 3 προκύπτει ότι, οι $\{\xi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ ανεξάρτητες τ.μ. με κοινή κατανομή την

$$P\{\xi=m\}=a_m,\ m=0,1,2,....,\ \sum_{m=0}^{+\infty} a_m = 1$$

Μια από τις ποσότητες που όπως είπαμε μας ενδιαφέρει σε μια τέτοια κλαδωτή αλυσίδα είναι η **πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού**, δηλαδή η ποσότητα

$$P\{X_n=0,\ \text{για κάποιο n}\}$$

Στο κεφάλαιο 3 αποδείξαμε, με την βοήθεια πιθανογεννητριών, το παρακάτω θεώρημα

Πρόταση (Θεμελιώδες Θεώρημα των Κλαδωτών αλυσίδων)
Η πιθανότητα π της τελικής **εξάλειψης του πληθυσμού** σε μία κλαδωτή αλυσίδα $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ με $X_0=1$, είναι ίση με την μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης

$$s=\varphi(s).$$

Ακόμα, εάν $m \le 1$ τότε $\pi=1$, ενώ εάν $m>1$ τότε $\pi<1$.

Στο κεφάλαιο αυτό το αποδεικνύουμε, ξανά, με ην βοήθεια των martingales.

Απόδειξη

(α) **m<1**

Έχουμε:

$$E\left[X_{n+1} \middle| X_n=k\right] = E\left[Y_1+Y_2+...+Y_k\right] = k\cdot E\left[Y_1\right] = k\cdot m$$

Αλλά

$$EX_{n+1}=E\left[E\left[X_{n+1}\middle|X_n\right]\right] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} E\left[X_{n+1}\middle|X_n=k\right]\cdot I_{[X_n=k]}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E\left[Y_1+Y_2+...+Y_k\right]\cdot P\{X_n=k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot E\left[Y_1\right]\cdot P\{X_n=k\} = E\left[Y_1\right]\cdot EX_n = m\cdot EX_n$$

και χρησιμοποιώντας αναδρομικά τον τύπο, έχουμε $EX_n = m^n$.

Τώρα για κάθε $\varepsilon>0$

$$P\{X_n>\varepsilon\} \le \frac{EX_n}{\varepsilon} = \frac{m^n}{\varepsilon} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

απ’ όπου, εύκολα, προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n > 0\} = 0$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = 0\} = 1$$

Αλλά τότε

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right\} = 1$$

Δηλαδή ο πληθυσμός εξαφανίζεται, με πιθανότητα 1, σε αυτή την περίπτωση.

(β) **m>1**

Ισχυριζόμαστε ότι

$$P\{X_n = 0 \quad \text{τελικά}\} = \xi \qquad \& \qquad P\{X_n \to \infty \quad \text{τελικά}\} = 1-\xi \qquad (1)$$

Όπου ξ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο στο [0,1), της πιθανογεννήτριας της Y_n (δηλαδή $\xi=\varphi(\xi)$).

(Ι) Εάν $\xi \in (0,1)$

Έχουμε αποδείξει (παράδειγμα 10(ii) του κεφαλαίου 6) ότι η ακολουθία $\left\{\xi^{X_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα (μη-αρνητικό) martingale. Αλλά τότε, από το πόρισμα 6 του κεφαλαίου 6, έπεται ότι

$$X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X_\infty \text{ για κάποια τ.μ. } X_\infty$$

Για να δείξουμε την (1), αρκεί να δείξουμε ότι

$$P\{X_\infty = m\} = 0, \ \forall m \in \mathbb{N}$$

Αν λοιπόν $\exists m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $P\{X_\infty = m\} > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ τ.ω. $P\{X_n = m / \forall n \geq N\} > 0$
Θέτουμε:

$$p = P\left(X_{n+1} = m \mid X_n = m\right)$$

Αλλά τότε

$$P\left(X_{n+1} = 0 \mid X_n = m\right) \overset{\alpha\nu\varepsilon\xi}{=} \left[P\{J_1 = 0\}\right]^m = \left[p(0)\right]^m > 0$$

οπότε έπεται ότι $p<1$.

Ακόμα είναι εύκολο να δειχθεί ότι μια κλαδωτή αλυσίδα είναι μια αλυσίδα Markov (το μέγεθος της $n^{οστης}$ γενιάς όταν είναι γνωστά τα μεγέθη των προηγούμενων γενιών, εξαρτάται μόνον από το μέγεθος της (n-1)-γενιάς). Οπότε

$$P\{X_n = m / \forall n \geq N\} = P\{X_N = m\} \cdot P\{X_{N+1} = m | X_N = m\} \cdot P\{X_{N+2} = m | X_N = m, X_{N+1} = m\} \ldots$$

$$\overset{\text{Markov}}{=} \lim_{k \to \infty} p^k \cdot P\{X_N = m\} = 0$$

που είναι άτοπο. Άρα $X_\infty = 0$ ή ∞.

Το $\xi \in (0,1)$ οπότε έπεται ότι η $\left\{\xi^{X_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, άρα

$$E\xi^{X_n} \to E\xi^{X_\infty} \qquad (2) \qquad \text{(ιδιότητα σύγκλισης των martingales).}$$

Αλλά

$$E\xi^{X_n} = E\xi^{X_0} = \xi \qquad (3)$$

Οπότε από τις (2) και (3) έπεται ότι

$$\xi = E\xi^{X_\infty} = \xi^0 \cdot P\{X_\infty = 0\} + \underbrace{\lim_{k \to \infty} p^k P\{X_\infty = 0\}}_{0} = P\{X_\infty = 0\}$$

και έτσι

$$P\{X_\infty = \infty\} = 1 - \xi$$

(II) Εάν ξ=0

Επειδή $\xi = \varphi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \cdot p(k) \Rightarrow p(0) = 0 = P\{J_1 = 0\}$ άρα κάθε άτομο γεννά έναν τουλάχιστον απόγονο, δηλαδή

$$1 = X_0 \leq X_1 \leq \ldots \leq X_n \leq X_{n+1} \leq \ldots$$

οπότε $X_n \uparrow X$ για κάποιο X.
Η πιθανότητα

$$P\{X < \infty\} = P\{X_n = \text{τελικά πεπερασμένη τ.μ.}\}$$
$$= \sum_{m \geq 1} P\{X_n = m, \text{ για μεγάλα } n\} = 0$$

Άρα

$$P\left\{\lim_{n \to \infty} X_n = \infty\right\} = 1$$

δηλαδή ο πληθυσμός απειρίζεται.

(γ) **m=1**

Ισχυρισμός: η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού είναι 1.

Πράγματι, έχουμε αποδείξει (παράδειγμα 10(i) του κεφαλαίου 6) ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ είναι ένα (μη-αρνητικό) martingale. Αλλά τότε, από το πόρισμα 6 του κεφαλαίου 6, έπεται ότι

$$X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X_\infty \text{ για κάποια τ.μ. } X_\infty \ .$$

Όπως προηγουμένως, $X_\infty = 0$ σ.β., άρα $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$ δηλαδή ο πληθυσμός εξαφανίζεται (με πιθανότητα 1), γιατί αν

$$\exists m \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. } P\{X_\infty = m\} > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. } P\{X_n = m / \forall n \geq N\} > 0 .$$

Αλλά, όπως προηγουμένως $P\{X_n = m / \forall n \geq N\} = 0$ άρα $P\{X_\infty = 0\} = 1$ και έτσι

$$P\{X_n = 0 \quad \text{τελικά}\} = 1$$

#

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(Α) ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1. Π.-Χ. Γ.Βασιλείου, «Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες», 1999, Εκδόσεις Ζήτη

2. Τ. Δάρας-Π.Σύψας, «Στοχαστικές Ανελίξεις. Θεωρία και Εφαρμογές», 2003, Εκδόσεις Ζήτη

3. Θ.Ν. Κάκκουλος, «Στοχαστικές Ανελίξεις», Β' έκδοση, 1978.

4. Σ. Καλπαζίδου, «Στοιχεία Θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων», 1991,Εκδόσεις ΖΗΤΗ Θεσσαλονίκη.

5. Σ. Κουνιάς-Χ. Μωυσιάδης, «Θεωρία Πιθανοτήτων Ι: Κλασική Πιθανότητα, Μονοδιάστατες κατανομές», 1999, Εκδόσεις Ζήτη

6. Τ. Παπαϊωάννου, «Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική», 1981. Ιωάννινα.

7. Γ. Γρ. Ρούσσας, «Στοιχεία Πιθανοθεωρίας μετ' εφαρμογών», 1973

8. Δ. Φακίνος, «Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα», τεύχη Ι, ΙΙ, 1994.

9. Ο.Χρυσαφίνου, «Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις», 2004,Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ

(Β) ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. K.L.Chung, "A course in Probability",1968, Brace and Wold, New York.

2. D.R.Cox, H.D. Miller, "The theory of Stochastic Processes" Chapman and Hall London

3. W. Feller, "An introduction to Probability theory and its applications" Vol. 1, 1968, John Wiley, New York.

4. W. Feller, "An introduction to Probability theory and its applications" Vol.2, 1971, John Wiley, New York.

5. G.R.Grimmett-D.R.Stirzaker, "Probability and Random Processes", 3rd ed., 2001, Oxford University Press, Oxford.

6. P.Hall-C.C.Heyde, “Martingale limit theory and its Applications”, 1980, Academic Press, New York.

7. S. Karlin, H.M.Taylor, “A first course in Stochastic Processes” 1975, Academic press, New York.

8. S. Karlin, H.M.Taylor, “An introduction to Stochastic Modeling” 1984, Academic press, New York

9. S. Ross, “Introduction to Probability Models”, 6^{th} ed.,1997, Academic Press, New York.

10. D. R.Stirzaker, “Stochastic Processes and Models” 2005, Oxford University Press, Oxford.

11. D. Williams, “Probability with Martingales” 1991, Cambringe Mathematical textbooks.