ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αυτή η διπλωματική εργασία δεν αποτελεί απλώς ένα επιστημονικό σύγγραμμα που στηρίζεται στη θεωρία δύο ή τριών μαθημάτων που διδάχτηκα στο Πολυτεχνείο. Η συγγραφή της ήρθε ως αποτέλεσμα έξι ετών στο Πολυτεχνείο Κρήτης και της μεγάλης αγάπης που είχα για την επιστήμη των μαθηματικών.

Έχουν περάσει πολλά χρόνια από το καλοκαίρι του 1979, αλλά οι εικόνες είναι ακόμα ζωντανές στη μνήμη μου, που ο Γεώργιος Ρήγος καθόταν με υπομονή ατελείωτες ώρες μυώντας με στα μαθηματικά. Από εκείνο το καλοκαίρι πέρασαν πολλά καλοκαίρια και πολλοί χειμώνες, και χιλιάδες ήταν οι ώρες που απασχολήθηκα με την επιστήμη των μαθηματικών. Οι δάσκαλοί μου στο δημοτικό και οι καθηγητές μου σε γυμνάσιο-λύκειο, συντέλεσαν σε μεγάλο βαθμό στην ενδυνάμωση της σχέσης μου με τα μαθηματικά. Θα ήθελα να τους ευχαριστήσω όλους για το μεγάλο ενδιαφέρον που μου έδειξαν, αλλά περισσότερο από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω τον πρώτο μου δάσκαλο, τον Γεώργιο Ρήγο. Είμαι σίγουρος πως θα νιώθει ικανοποιημένος, εκεί πάνω που βρίσκεται, βλέποντας ότι οι ατελείωτες ώρες που σπατάλησε μαζί μου δεν πήγαν χαμένες.

Και από το 1979, 12 χρόνια αργότερα, φτάνουμε στο 1991. Η επιτυχία μου στις πανελλήνιες εξετάσεις ήταν μόνο η αρχή. Μόνος πλέον, πολύ μακριά από τη Πεντέλη και το σπίτι που έζησα τα πρώτα 18 χρόνια της ζωής μου. Στα Χανιά, ίσως την πιο ωραία πόλη της Ελλάδας, αλλά σίγουρα, την πιο φιλόξενη και ανθρώπινα ζεστή. Σε ένα Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα που εξαιτίας του μικρού του μεγέθους ευνοούσε στο μέγιστο βαθμό τις διαπροσωπικές σχέσεις μεταξύ των φοιτητών και των καθηγητών, απαραίτητη προϋπόθεση, πιστεύω, για την ανάδειξη ολοκληρωμένων επιστημόνων.

Μέσα σε αυτό το ευνοϊκό κλίμα είχα την τύχη να διδαχτώ, από τα πρώτα κιόλας χρόνια στο Πολυτεχνείο δύο μαθήματα, την Επιχειρησιακή Έρευνα και το Γραμμικό Προγραμματισμό, από τον Καθηγητή Ιωάννη Σίσκο. Η διπλωματική αυτή,

ίσως να μην είχε γραφεί ποτέ, τουλάχιστον με τη μορφή που είναι σήμερα, αν δεν υπήρχε η βήμα-βήμα καθοδήγηση από τον καθηγητή μου. Θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την πίστη που έδειξε στις ικανότητές μου και για το αμέριστο ενδιαφέρον όλο αυτό το διάστημα. Ελπίζω η συνεργασία μας σε ερευνητικό επίπεδο να συνεχιστεί και τα επόμενα χρόνια.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Δρ. Νικόλαο Φ. Ματσατσίνη για την πολύτιμη βοήθειά του στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Όπως ανέφερα και προηγουμένως η εργασία αυτή δεν είναι απλά ένα επιστημονικό σύγγραμμα. Αντίθετα, αποτελεί την κατακλείδα έξι μοναδικών χρόνων στο Πολυτεχνείο Κρήτης. Σε αυτό το σημείο, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου που ο καθένας με τον τρόπο του, σε αυτά τα έξι χρόνια, μου πρόσφεραν πολύτιμα εφόδια για να συνεχίσω.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ χρωστάω σε όλους τους φίλους μου που στάθηκαν δίπλα μου σε όλη αυτή τη πορεία και συντέλεσαν ώστε η φοιτητική μου ζωή να μου μείνει αξέχαστη, καθώς επίσης και στους πολιτικούς μου συντρόφους που μου απέδειξαν ότι η πολιτική είναι τέχνη και ίσως ένα από τα μεγαλύτερα σχολεία.

Τέλος, θέλω από τα βάθη της καρδιάς μου να πω ένας μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου και στην αδελφή μου που στάθηκαν πολύτιμοι αρωγοί σε όλη την πορεία των σπουδών μου. Είμαι σίγουρος πως η φοιτητική μου ζωή θα ήταν σαφώς πιο διαφορετική αν δεν υπήρχαν οι 'ευγενικές χορηγίες' του πατέρα μου αλλά και η ειλικρινή υποστήριξη της αδελφής μου που βρέθηκε δίπλα μου όποτε τη χρειάστηκα.

Αναμφίβολα όμως, η παρουσία της μητέρας μου όλα αυτά τα χρόνια αποτέλεσε καταλυτικό παράγοντα διαμόρφωσης του χαρακτήρα μου. Με έμαθε να αγωνίζομαι συνεχώς και να πιστεύω ότι δεν υπάρχει κανένα αξεπέραστο εμπόδιο. Οι συμβουλές της αποδείχτηκαν πολύτιμες σε πολλές περιπτώσεις και με βοήθησαν να αντιμετωπίσω προβλήματα που σχετίζονταν τόσο με τις σπουδές μου, όσο και με άλλα προσωπικά μου θέματα. Τα λόγια είναι πολύ λίγα για να εκφράσουν την ευγνωμοσύνη μου απέναντί της. Ελπίζω στο μέλλον να τις ανταποδώσω έστω και στο ελάχιστο ότι έχει κάνει για μένα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Τα σημαντικότερα ίσως μοντέλα στο χώρο της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι τα μοντέλα του **Γραμμικού Προγραμματισμού** (*Linear Programming*). Μέσα στα 45 χρόνια από τότε που τον ανακάλυψαν οι G. Dantzig και L. Kantorowitz, ο γραμμικός προγραμματισμός έχει αποτελέσει ένα κύριο αντικείμενο θεωρητικής και εφαρμοσμένης έρευνας και έχει χρησιμοποιηθεί σαν τη βάση για την εξέλιξη άλλων συγγενών προτύπων και τεχνικών. Παράλληλα, με την εμφάνιση των αυτοματοποιημένων **Συστημάτων Υποστήριξης Αποφάσεων** (*Decision Support Systems*) έχει κωδικοποιηθεί σε εφαρμογές λογισμικού και έχει με αυτό το τρόπο εφαρμοσθεί σε ένα τεράστιο φάσμα προβλημάτων για επιχειρήσεις και φορείς του ιδιωτικού και δημόσιου φορέα. (Γ.Πραστάκος, 1986)

Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο εργαλείο της επιχειρησιακής έρευνας αλλά και γενικότερα της διοικητικής επιστήμης. Η μεγάλη επιτυχία των εφαρμογών του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων θα πρέπει να αποδοθεί, από τη μια πλευρά, στα επιτεύγματα της έρευνας των μαθηματικών και των οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και , από την άλλη πλευρά, στην επαναστατική ανάπτυξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας.

Στη μαθηματική γλώσσα ο γραμμικός προγραμματισμός ορίζεται σαν το μοντέλο το οποίο στοχεύει στη **βελτιστοποίηση** (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης αγνώστων, υπό εκτίμηση, πραγματικών μεταβλητών, των οποίων το πεδίο τιμών οριοθετείται έμμεσα από γραμμικούς περιορισμούς (ανισοεξισώσεις), που είναι συναρτήσεις των μεταβλητών αυτών. Η βελτιστοποίηση είναι πηγή τεχνητής ευφυΐας με την έννοια του προσδιορισμού βέλτιστων λύσεων σε πολύπλοκα προβλήματα. Οι άγνωστες μεταβλητές πρέπει να επιλέγονται από τον μελετητή με τρόπο ώστε να αντανακλούν απόλυτα (να μοντελοποιούν) το αντικείμενο της απόφασης στο εκάστοτε συγκεκριμένο πρόβλημα και ονομάζονται γι' αυτό **μεταβλητές απόφασης**. (Ι.Σίσκος, 1992; Μ.Παπαγεωργίου, 1996)

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι ο γραμμικός προγραμματισμός μοντελοποιεί προβλήματα κατανομής περιορισμένων πόρων, μέσων ή χρήσιμων αγαθών σε διάφορες εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες, με τρόπο ώστε να βελτιστοποιείται το τελικό αποτέλεσμα.

Η αντιμετώπιση ενός πραγματικού προβλήματος με τη μέθοδο του γραμμικού προγραμματισμού δεν τελειώνει με το προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης. Η απλή επίλυση-εύρεση της βέλτιστης λύσης, με εφαρμογή της μεθόδου **Simplex** (Παράρτημα), προσκρούει στις εξής παρακάτω κριτικές:

1. Από τη μαθηματική του φύση ένα γραμμικό πρόβλημα που περιλαμβάνει l μεταβλητές και m περιορισμούς, γεγονός που συνεπάγεται την εισαγωγή m μεταβλητών απόκλισης, θα έχει βέλτιστη λύση που περιλαμβάνει τουλάχιστον:

   $$(l + m) - m = l$$

   μηδενικές μεταβλητές. Συνάγεται λοιπόν ότι από τις αρχικά προτεινόμενες δραστηριότητες ένας σημαντικός αριθμός ίσως αγνοηθεί, κάτι που ενδέχεται σε ορισμένες περιπτώσεις να προκαλέσει οικονομικές δυσχέρειες σε μια επιχείρηση.

2. Η αποκαλούμενη «βέλτιστη λύση» θεωρείται συχνά ότι είναι μια λύση προνομιούχα, απομονωμένη από κάθε γειτονική της λύση, χωρίς αυτό να είναι κοινά αποδεκτή θέση από τον κόσμο της επιχείρησης.

3. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν συγκεκριμένη ακρίβεια και στην περίπτωση διαχείρισης πολύ μικρών τιμών που αντιστοιχούν στα οριακά καθαρά εισοδήματα της μεθόδου Simplex (Δ_j) μπορούν να δώσουν αποτελέσματα που δεν ανταποκρίνονται επακριβώς στην πραγματικότητα.

4. Κατά τη διαμόρφωση του προβλήματος γίνονται ορισμένες παραδοχές, ανάμεσα στις οποίες είναι και η προϋπόθεση των ντετερμινιστικών συντελεστών. Σύμφωνα με αυτή την προϋπόθεση οι συντελεστές c_j, b_i και a_{ij} του προβλήματος είναι γνωστές σταθερές. Στην πραγματικότητα όμως, οι συντελεστές αυτοί δεν είναι συνήθως ούτε γνωστοί, ούτε σταθεροί, αλλά συνήθως προσδιορίζονται κατά προσέγγιση. Με άλλα λόγια, η διαμόρφωση ενός πραγματικού προβλήματος σε μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού αποτελεί, σχεδόν πάντα μια προσέγγιση της

πραγματικότητας. Είναι σαφές πως κάθε τροποποίηση των τιμών των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης (cj), του δεύτερου μέλους (b_i) ή της τεχνολογικής μήτρας (a_{ij}) είναι ικανή να επιφέρει κάποια αλλαγή της βέλτιστης λύσης.

Οι αριθμητικοί αυτοί συντελεστές είναι συνήθως:

- στοιχεία λογιστικών καταλόγων (μοναδιαίο κέρδος ή κόστος, ποσότητες πρώτης ύλης, ...)
- αποτελέσματα ειδικών τεχνικών αναλύσεων (χρόνος κατασκευής, χημικής αντίδρασης, ...)
- στοιχεία δημοσκοπήσεων ή ερευνών αγοράς (προτιμήσεις των καταναλωτών, κατώτερα ή ανώτερα φράγματα ζήτησης, ...).

Είναι λοιπόν προφανές ότι τα χρησιμοποιούμενα στην πράξη αριθμητικά δεδομένα δεν μπορούν με κανένα τρόπο να θεωρηθούν ως απόλυτα, ακριβή ή βέβαια ώστε να εγγυηθούν την ύπαρξη μιας και μόνης, απομονωμένης λύσης, με τη σφραγίδα της βέλτιστης.(Ι.Σίσκος, 1992; Δ.Ξηρόκωστας, 1991)

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε τις παραπάνω κριτικές μπορούμε να προχωρήσουμε μετά τη λήψη της βέλτιστης λύσης, σε ανάλυση ευαισθησίας και ανάλυση ευστάθειας. Η δεύτερη είναι το βασικό αντικείμενο που θα διαπραγματευτούμε στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Με την ανάλυση ευστάθειας (**μεταβελτιστοποίηση ή γειτονική βελτιστοποίηση**) ελέγχουμε τόσο τη μοναδικότητα της λύσης όσο και το ενδεχόμενο ύπαρξης εναλλακτικών λύσεων, των οποίων οι τιμές z της αντικειμενικής συνάρτησης δε διαφέρουν της βέλτιστης τιμής z^* παρά κατά μια μικρή (αμελητέα) ποσότητα.

Αρχικά θα εξετάσουμε τέσσερις μεθόδους-αλγορίθμους που μπορούν να θεωρηθούν ως κατάλληλες προσεγγίσεις αντιμετώπισης του προβλήματος της μεταβελτιστοποίησης. Θα ξεκινήσουμε με την παράθεση μιας ευρεστικής μεθόδου (J. Siskos, 1982) και θα συνεχίσουμε με τον αλγόριθμο του Tarry (G.Tarry, 1895) που αποτελεί ίσως την πρώτη ιστορικά προσέγγιση στο πρόβλημά μας. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος ασχολείται με την εύρεση όλων των πιθανών κορυφών ενός κυρτού υπερπολυέδρου. Είναι γνωστό ότι οι λύσεις κάθε μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού αντιστοιχούν στις κορυφές του υπερπολυέδρου των δυνατών λύσεων, το οποίο οριοθετείται από την αντικειμενική συνάρτηση και από τους γραμμικούς περιορισμούς του μοντέλου.

Θα συνεχίσουμε με την εξέταση της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex (C. Van de Panne, 1975) και του αλγορίθμου των Manas - Nedoma (M.Manas and J.Nedoma , 1968). Στη συνέχεια θα ακολουθήσει η παρουσίαση και η ανάλυση μιας ρεαλιστικής προσέγγισης του προβλήματος της μεταβελτιστοποίησης με τη χρήση ενός αλγορίθμου που θα είναι οικονομικός από άποψη υπολογιστικού χρόνου και που θα εγγυάται την εφικτή εύρεση, αν όχι όλων, τουλάχιστον ενός πολύ μεγάλου ποσοστού των πιθανών μεταβέλτιστων λύσεων.

Στο τέλος θα γίνει αναφορά στις προοπτικές έρευνας που σχετίζονται με την εφαρμογή του νέου αλγορίθμου σε γραμμικά προγράμματα.

I.1. Εισαγωγικές Έννοιες

I.1.1. Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις

Η λύση των γραμμικών προβλημάτων που βρίσκεται με τη χρήση της μεθόδου Simplex είναι μοναδική μόνο στην περίπτωση που τα οριακά καθαρά εισοδήματα του βέλτιστου πίνακα Simplex που αντιστοιχούν σε μη βασικές μεταβλητές δεν ισούνται με μηδέν. Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε **πολλαπλές βέλτιστες λύσεις**. (J.Siskos, 1984).

Ας θεωρήσουμε το εξής γραμμικό πρόγραμμα :

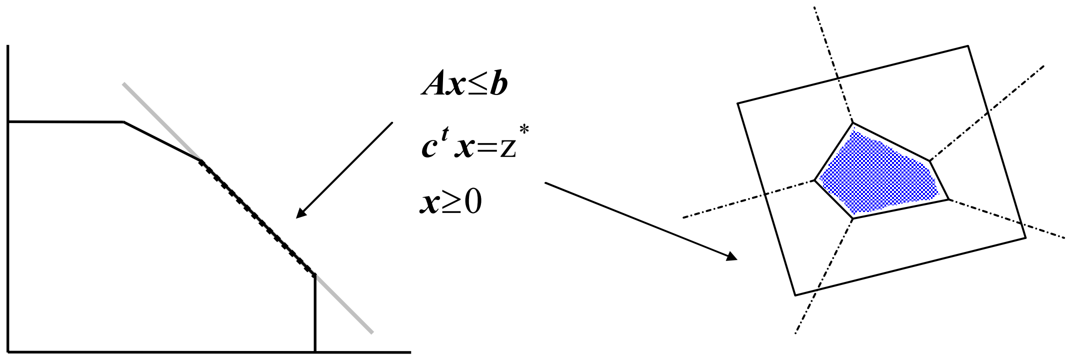
$$\text{Γ.Π.Ι.1.1}\begin{cases} [\max]\mathrm{z}=\boldsymbol{c^t}\,\boldsymbol{x} \\ \quad\text{υ.π.} \\ \boldsymbol{Ax}\leq\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0} \end{cases}$$

όπου $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$ είναι πίνακες διαστάσεων m×n, n×1, m×1 και n×1 αντίστοιχα.

Το πρόβλημα των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων (*multiple optimal solutions*) πιστοποιείται, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, όταν εμφανίζονται μηδενικά καθαρά οριακά εισοδήματα στον βέλτιστο πίνακα Simplex για μη βασικές μεταβλητές. Σύμφωνα με τη σχέση (9) του Παραρτήματος θα πρέπει δηλαδή να ισχύει:

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i y_{ij} = 0 \quad \text{για } j \text{ εκτός βάσης.}$$

Γεωμετρικά, το φαινόμενο αντιστοιχεί στην περίπτωση που το υπερπολύεδρο της αντικειμενικής συνάρτησης z είναι παράλληλο μιας πλευράς του υπερπολυέδρου των δυνατών λύσεων (βλέπε σχήματα). (Ι.Σίσκος, 1992)



Παράδειγμα 2 διαστάσεων　　　　Παράδειγμα 3 διαστάσεων

Σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι γνωστό ότι η εισαγωγή στη βάση μιας μεταβλητής j μας δίνει μια καινούργια λύση, με z=z*, αφού από τη σχέση (16) του Παραρτήματος για Δ_k=0 έχουμε $z' = z^* + \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \Delta_k \Rightarrow z' = z^*$. Όμως δεν μπορούμε εκ των προτέρων να υπολογίσουμε τον αριθμό και τον τύπο των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων του γ.π.. Η αυθαίρετη εξακολούθηση του αλγορίθμου Simplex, μετά την εύρεση της πρώτης βέλτιστης λύσης, μπορεί να μας δώσει άλλες βέλτιστες λύσεις αλλά αυτή η ενέργεια σε καμία περίπτωση δε μπορεί να θεωρηθεί σαν μια μέθοδο συστηματικού ελέγχου όλων των βέλτιστων λύσεων.

Το σύνολο των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων οριοθετείται μαθηματικά από το υπερπολύεδρο (ΥΠ) Ι.1.1:

$$\text{ΥΠ Ι.1.1} \quad \begin{cases} \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{x} = z^* \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$$

που προκύπτει από την προσθήκη του περιορισμού z=z*(z* η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης) στο σύνολο των δυνατών λύσεων.

Στην περίπτωση που η βέλτιστη λύση είναι μοναδική το ΥΠ Ι.1 δεν περιέχει παρά μόνο ένα σημείο. Στην αντίθετη περίπτωση, περιέχει άπειρα σημεία (άπειρες λύσεις) και αρκεί να υπολογίσουμε όλες τις κορυφές του ΥΠ Ι.1 (δυνατές βασικές βέλτιστες λύσεις). Κάθε άλλη λύση είναι κυρτός συνδυασμός των λύσεων που αντιστοιχούν στις κορυφές. (J.Siskos, 1984; Δ.Ξηρόκωστας, 1991).

Ι.1.2. Ημιβέλτιστες ή Σχεδόν Βέλτιστες Λύσεις

Σε μεγάλο αριθμό περιπτώσεων η βέλτιστη ή οι βέλτιστες λύσεις δεν είναι οι μόνες που ενδιαφέρουν τον αποφασίζοντα. Απεναντίας, ενδεχομένως ο αποφασίζων να ενδιαφέρεται εξίσου και για τις ημιβέλτιστες λύσεις. Αυτό ισχύει, επειδή συχνά είναι αδύνατον να ορίσουμε με μεγάλη ακρίβεια τις τιμές των συντελεστών του γραμμικού μας προβλήματος. Ακόμη, η αντικειμενική συνάρτηση δεν αντικατοπτρίζει πάντα επακριβώς τις προτιμήσεις του αποφασίζοντος.(C.Van de Panne, 1975)

Στις παραπάνω περιπτώσεις μπορεί να λεχθεί ότι το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού ενός προβλήματος εκφράζει τους πλέον βασικούς στόχους και περιορισμούς, ενώ κάποιοι παράγοντες συχνά μένουν έξω από το μοντέλο, είτε γιατί είναι δύσκολο να τους διαχειριστεί κανείς, είτε γιατί ο αποφασίζων έχει μόνο μια γενική ιδέα σχετικά με αυτούς. Γι΄ αυτό το λόγο η βέλτιστη λύση μπορεί να χαρακτηριστεί είτε ως αδύνατη να πραγματοποιηθεί είτε, αρκετές φορές, έως και επικίνδυνη.

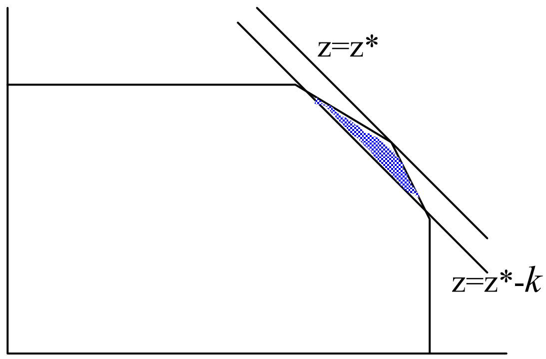
Ο μόνος τρόπος να αντιμετωπίσουμε την παραπάνω προβληματική κατάσταση είναι να θέσουμε υπόψη του αποφασίζοντα εναλλακτικές λύσεις και να του δώσουμε τη δυνατότητα να αποφασίσει ποια τελικά θα επιλέξει. Το ερώτημα είναι ποιες θα είναι αυτές οι εναλλακτικές λύσεις. Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση που θα μας βοηθήσει να δώσουμε απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι η ακόλουθη.

Αρχικά υπολογίζουμε τη βέλτιστη λύση. Στη συνέχεια βρίσκουμε όλες τις βασικές δυνατές λύσεις για τις οποίες η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης διαφέρει της βέλτιστης τιμής z^* κατά μία μικρή (πρακτικά αμελητέα) προκαθορισμένη ποσότητα k. Οι λύσεις αυτές ονομάζονται **σχεδόν βέλτιστες ή ημιβέλτιστες λύσεις** (*near optimal solutions*). Ο αποφασίζων είναι ο υπεύθυνος τόσο για την επιλογή της ποσότητας k, όσο και για την τελική επιλογή ανάμεσα από τις ημιβέλτιστες λύσεις, αυτής που τον ικανοποιεί περισσότερο.(J.Siskos, 1984; C.Van de Panne, 1975; I.Σίσκος, 1992)

Ο χώρος των ημιβέλτιστων λύσεων οριοθετείται από το σύνολο - υπερπολύεδρο (ΥΠ)Ι.1.2

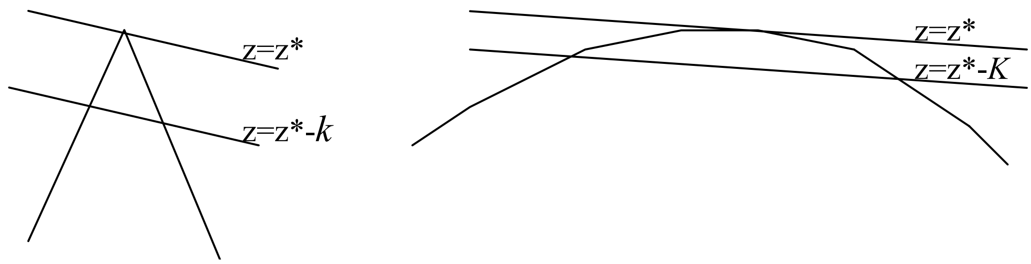
ΥΠ Ι.1.2 $\begin{cases} \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c^t x} \geq z^* - k \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$ όπου k μικρή θετική ποσότητα (αναφερόμαστε πάντα για την περίπτωση μεγιστοποίησης)

Το ΥΠ Ι.1.2 προκύπτει από το ΥΠ Ι.1.1 με την αντικατάσταση του περιορισμού z=z* με τον περιορισμό z ≥ z*-k. Στο παρακάτω σχήμα το γραμμοσκιασμένο κομμάτι αντιστοιχεί στο σύνολο των ημιβέλτιστων λύσεων.(στις 2 διαστάσεις)



Για k=0 έχουμε z=z* και το πρόβλημά μας ταυτίζεται με αυτό των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων.

Η αναζήτηση των ημιβέλτιστων λύσεων βοηθάει στην ανάλυση της ευστάθειας της βέλτιστης λύσης.



ευσταθής λύση ασταθής λύση

Όταν το εύρος των τιμών που παίρνουν οι μεταβλητές στις διάφορες ημιβέλτιστες λύσεις είναι μεγάλο, τότε λέμε ότι η βέλτιστη λύση μας είναι ευσταθής ενώ στην αντίθετη περίπτωση ότι η λύση μας είναι ασταθής. Το φαινόμενο της αστάθειας της βέλτιστης λύσης είναι αρκετά συνηθισμένο στις πρακτικές εφαρμογές.(Ι.Σίσκος, 1992)

Στη συνέχεια της διπλωματικής εργασίας θα ασχοληθούμε ειδικότερα με τη συστηματική αναζήτηση των κορυφών του υπερπολυέδρου ΥΠ Ι.1.2.. Οι κορυφές αυτές αντιστοιχούν στις βασικές δυνατές, πολλαπλές βέλτιστες ή ημιβέλτιστες λύσεις.

Σκόπιμη, για να προχωρήσουμε στη συστηματική αναζήτηση των κορυφών του ΥΠ Ι.1.2., είναι η διαθεσιμότητα των μέσων που θα μας επιτρέψουν μια αρχική εκτίμηση του αριθμού αυτών των κορυφών. Ο Klee μας προτείνει μια σχέση που μας δίνει ένα άνω όριο, το οποίο ονομάζουμε $\bar{r}$, των κορυφών ενός υπερπολυέδρου που ορίζεται από ένα σύστημα m εξισώσεων με l μεταβλητές όταν ισχύει l>m:

$$\bar{r} = \begin{cases} \dfrac{2l}{m+l}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(m+l) \\ m \end{pmatrix} & \text{αν l-m ζυγός αριθμός} \\ 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(m+l-1) \\ m \end{pmatrix} & \text{αν l-m περιττός αριθμός} \end{cases} \qquad \text{(Ι.1.α)}$$

Τα αποτελέσματα είναι αποθαρρυντικά. Η τιμή του ορίου $\bar{r}$ αυξάνει με αστρονομική ταχύτητα: για (m=3, l=7), $\bar{r}$=14˙ για (m=10, l=16), $\bar{r}$=352˙ για (m=10, l=17), $\bar{r}$=572 και αυτά τα μεγέθη δεν περιγράφουν παρά μικρά γραμμικά προβλήματα. (V.Klee, 1964)

I.2. Μία Ευρεστική Μέθοδος

I.2.1. Περιγραφή της Μεθόδου

Σύμφωνα με τη σχέση (I.1.α) ο αριθμός των κορυφών του υπερπολυέδρου των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων είναι συχνά μεγάλος και η εξαντλητική αναζήτησή τους απαιτεί πολύ χρόνο. Οι ευρεστικές μέθοδοι μας προσφέρουν μια πολύ καλή διέξοδο στο πρόβλημα αναζήτησης των χιλιάδων λύσεων που πολλές φορές μας είναι αδιάφορες. Συχνότερα ενδιαφερόμαστε μόνο για τις πληροφορίες εκείνες που θα μας βοηθήσουν να εξετάσουμε την ευστάθεια της βέλτιστης λύσης μας ή τη στατιστική διασπορά των υπολοίπων λύσεων. Για παράδειγμα η ανάλυση ευστάθειας μπορεί να πραγματοποιηθεί με την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων (γ.π.) του τύπου:

$$
(\Gamma.\Pi.\mathrm{I}.2.1)\quad \begin{cases} [\max]\psi = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\ \qquad \upsilon.\pi. \\ \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{t}}\, \boldsymbol{x} \ge z^* - k \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{cases}
$$

όπου p_j, $j=1,2,...,n$ αριθμητικοί συντελεστές που επιλέγονται κατάλληλα για τον προσδιορισμό των πλέον χαρακτηριστικών πολλαπλών (για $k=0$) ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων. Αν θέσουμε για παράδειγμα p_i=1 και p_j=0 για $j{\neq}i$ θα προσδιοριστούν οι σχεδόν βέλτιστες λύσεις που μεγιστοποιούν την τιμή της μεταβλητής x_i.

Η επίλυση του παραπάνω γραμμικού προγράμματος μπορεί να επιτευχθεί με απαρχή το βέλτιστο πίνακα Simplex του αρχικού γραμμικού προγράμματος. Απομένει λοιπόν να προσδιοριστούν οι συντελεστές των μεταβλητών με την προσθήκη του νέου περιορισμού:

$$\boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} - Y = \mathrm{z}^* - k \qquad (\text{I.2.α})$$

όπου $\boldsymbol{Y}$ είναι η μεταβλητή απόκλισης του περιορισμού αυτού.

Το σύστημα των περιορισμών του γραμμικού προγράμματος (Γ.Π. Ι.2.1) γράφεται ως:

$$\begin{array}{llll} Y & -\boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} & & = -(\mathrm{z}^* - k) \quad (\text{I.2.β}) \\ & \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} & +\boldsymbol{I}\overline{\boldsymbol{x}} & = \boldsymbol{b} \quad (\text{I.2.γ}) \\ \boldsymbol{x},\ \overline{\boldsymbol{x}},\ Y & \geq \boldsymbol{0} & & \end{array}$$

όπου $\overline{\boldsymbol{x}}$ το διάνυσμα των μεταβλητών απόκλισης του αρχικού γ.π. μεγιστοποίησης (Γ.Π. Ι.1.1). Το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί σε μορφή μήτρας ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}^t & \boldsymbol{0} \\ 0 & \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \boldsymbol{x} \\ \overline{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{z}^* + k \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Εφ’ όσον ο πρόσθετος περιορισμός επαληθεύεται από τη βέλτιστη λύση $\boldsymbol{x}^*$ του αρχικού γ.π. η μεταβλητή Y είναι βασική. Η τιμή της σύμφωνα με τη σχέση (Ι.2.β) θα είναι:

$$Y = \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x}^* - (\mathrm{z}^* - k) = \mathrm{z}^* - \mathrm{z}^* + k \Rightarrow Y = k \qquad (\text{I.2.δ})$$

Η επαυξημένη βάση γράφεται:

$$\boldsymbol{B}_o = \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^t \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \qquad (\text{I.2.ε})$$

όπου $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}$ το διάνυσμα των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν σε βασικές μεταβλητές του βέλτιστου πίνακα Simplex του αρχικού γ.π. και $\boldsymbol{B}$ η βάση του αρχικού γ.π..

Από τη σχέση $\boldsymbol{B_o B_o^{-1}} = \boldsymbol{I}$ υπολογίζουμε την $\boldsymbol{B_o^{-1}}$ που είναι η αντίστροφη της επαυξημένης βάσης και για την οποία έχουμε:

$$\boldsymbol{B}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B^t B^{-1}} \\ 0 & \boldsymbol{B^{-1}} \end{bmatrix} \quad \text{(Ι.2.στ)}$$

Ξέρουμε ότι για κάθε βασική λύση ισχύει: (Παράρτημα , σχέση (4))

$$\boldsymbol{I x}_B + \boldsymbol{B^{-1} A' x'} = \boldsymbol{B^{-1} b} \ \text{ ή } \ \boldsymbol{B^{-1} A x} = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}$$

Στην περίπτωσή μας η επαυξημένη μήτρα $\boldsymbol{A}_o$ ισούται με:

$$\boldsymbol{A}_o = \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c^t} & \boldsymbol{0} \\ 0 & \boldsymbol{A'} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \quad \text{(Ι.2.ζ)}$$

όπου $\boldsymbol{c^t}$ το διάνυσμα των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν σε μη βασικές μεταβλητές του αρχικού πίνακα Simplex του αρχικού γ.π..

Οι συντελεστές του βέλτιστου πίνακα Simplex που αντιστοιχούν στο νέο περιορισμό ($1^η$ γραμμή) υπολογίζονται απλά από το γινόμενο:

$$\boldsymbol{B_o^{-1} A_o} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B^t} \\ 0 & \boldsymbol{B^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c^t} & \boldsymbol{0} \\ 0 & \boldsymbol{A'} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B^t B^{-1} A} - \boldsymbol{c^t} & \boldsymbol{c_B^t B^{-1}} \\ 0 & \boldsymbol{B^{-1} A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \quad \text{(Ι.2.η)}$$

Από τη σχέση (9) του Παραρτήματος έχουμε ότι:

$$\mathbf{c_B^t B^{-1} A'} - \mathbf{c^t} = -\boldsymbol{\Delta'}$$

όπου $\boldsymbol{\Delta'}$ το διάνυσμα των οριακών καθαρών εισοδημάτων που αντιστοιχούν στις μη βασικές μεταβλητές του αρχικού πίνακα Simplex του αρχικού γ.π. και

$$\boldsymbol{c_B^t B^{-1}} - \boldsymbol{0} = -\boldsymbol{\Delta}$$

όπου $\boldsymbol{\Delta}$ το διάνυσμα των οριακών καθαρών εισοδημάτων που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές του αρχικού πίνακα Simplex, δηλαδή στις μεταβλητές απόκλισης του αρχικού γ.π. οι οποίες έχουν μηδενικούς συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση.

Επομένως, οι συντελεστές του νέου περιορισμού στον αρχικό βέλτιστο πίνακα Simplex είναι οι αντίθετες τιμές των καθαρών οριακών εισοδημάτων, για τις οποίες ισχύει:

$$-\boldsymbol{\Delta}' \geq \mathbf{0}$$

$$-\boldsymbol{\Delta} \geq \mathbf{0}$$

Παρόμοια, για το δεύτερο μέλος ισχύει:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{o}}^{-1}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{o}} &= \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{t} \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(z^{*}-k) \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{t}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-z^{*}+k \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{t}\boldsymbol{x}^{*}_{\boldsymbol{B}}-z^{*}+k \\ \boldsymbol{x}^{*}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{*}-z^{*}+k \\ \boldsymbol{x}^{*}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ \boldsymbol{x}^{*}_{B} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (\text{Ι.2.ζ})$$

Συνεπώς η τιμή για τη μεταβλητή Y, στο βέλτιστο πίνακα Simplex του αρχικού γ.π., είναι k.(Ι.Σίσκος, 1992)

Ι.2.2. Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα

Το αριθμητικό παράδειγμα που ακολουθεί θα μας βοηθήσει να αντιληφθούμε καλύτερα τη διαδικασία της ευρεστικής μεθόδου που περιγράψαμε παραπάνω.

Ας θεωρήσουμε το εξής γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} &[\max]\ z = 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 \\ &\qquad \text{υ.π.} \\ &x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 18 \qquad\qquad (\text{Γ.Π.Ι.2.2.}) \\ &\quad 2x_3+3x_4 \leq 6 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Ο αρχικός πίνακας Simplex με την εισαγωγή των μεταβλητών απόκλισης έχει ως εξής:

c_B	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	x_B
0	$\bar{1}$	1	1	1	1	1	0	18
0	$\bar{2}$	0	0	2	3	0	1	6
	c_j	3	4	5	6	0	0	
	Δ_j	3	4	5	6	0	0	z= 0

Ύστερα από δύο επαναλήψεις του αλγορίθμου Simplex λαμβάνουμε το βέλτιστο πίνακα Simplex που είναι ο ακόλουθος:

c_B	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	x_B
4	2	1	1	1/3	0	1	-1/3	16
6	4	0	0	2/3	1	0	1/3	2
	c_j	3	4	5	6	0	0	
	Δ_j	-1	0	-1/3	0	-4	-2/3	z*= 76

Θέτουμε k=20. Οπότε, σε αντιστοιχία του μοντέλου του Γ.Π.Ι.2.1., το σύνολο των λύσεων, για τις οποίες η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης απέχει (είναι μικρότερη) κατά 20 μονάδες από την τιμή της βέλτιστης λύσης (76 μονάδες), οριοθετείται από το υπερπολύεδρο:

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 18$$

$$2x_3+3x_4 \leq 6$$

$$3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 \geq 56$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Ας υποθέσουμε ότι αναζητούμε εκείνη τη σχεδόν βέλτιστη λύση που μεγιστοποιεί την τιμή της μεταβλητής x_1 (p_1=1, p_2=p_3=p_4=0). Χρησιμοποιώντας τη νέα μεταβλητή απόκλισης Y= z - 56 ≥ 0 και παίρνοντας σαν απαρχή τον παραπάνω βέλτιστο πίνακα Simplex, όπου συντελεστές του νέου περιορισμού είναι οι αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων και το Y* ισούται με την ποσότητα k = 20, καταλήγουμε εύκολα στη ζητούμενη λύση (x_1=52/3, x_2=0, x_3=0, x_4=2/3, $x_{\bar{1}}$=0, $x_{\bar{2}}$=4) μετά από 2 αλλαγές βάσης.

Βήμα 0

$\boldsymbol{c}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	Y	$\boldsymbol{x}_B$
0	2	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
0	4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
0	Y	1	0	1/3	0	4	2/3	1	20
	$\boldsymbol{c}_j$	1	0	0	0	0	0	0	
	Δ_j	1	0	0	0	0	0	0	z= 0

Βήμα 1

$\boldsymbol{c}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	Y	$\boldsymbol{x}_B$
1	1	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
0	4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
0	Y	0	-1	0	0	3	1	1	4
	$\boldsymbol{c}_j$	1	0	0	0	0	0	0	
	Δ_j	0	-1	-1/3	0	-1	1/3	0	z= 16

c_B	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	Y	x_B
1	1	1	2/3	1/3	0	2	0	1/3	52/3
0	4	0	1/3	2/3	1	-1	0	1/3	2/3
0	$\bar{2}$	0	-1	0	0	3	1	1	4
	c_j	1	0	0	0	0	0	0	
	Δ_j	0	-2/3	-1/3	0	-2	0	-1/3	z= 52/3

Βήμα 2

(Ι.Σίσκος, 1992)

I.3. Ο Αλγόριθμος του Tarry

Οι Charnes και Cooper παρατήρησαν ότι η διαχείριση πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων είναι μια ειδική περίπτωση του κλασικού «**προβλήματος του λαβύρινθου**» που συναντούμε στη θεωρία γραφημάτων. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ένα κυρτό υπερπολύεδρο μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα συνεκτικό γράφημα (V,U) όπου V είναι το σύνολο των κόμβων (κορυφών) και U το σύνολο των τόξων που συνδέουν τους κόμβους, και που μπορούμε να τα διαβούμε ακολουθώντας τα βήματα της Simplex. Έτσι, δύο κόμβοι είναι γειτονικοί αν αντιστοιχούν σε δύο βάσεις τις Simplex που διαφέρουν κατά μία και μόνη μεταβλητή˙ κάθε τόξο μπορούμε τότε να το διαβούμε κατά τις δύο κατευθύνσεις (φορά) αφού, όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, κάθε βήμα της Simplex είναι αντιστρέψιμο. (A.Charnes, 1952; A.Charnes and W.W.Cooper, 1961).

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, οι κορυφές ενός υπερπολυέδρου, για παράδειγμα του ΥΠ I.1.2 , αντιστοιχούν στις βασικές δυνατές λύσεις ενός γ.π. που οριοθετείται από το υπερπολύεδρο. Επομένως η εξαντλητική αναζήτηση αυτών των κορυφών μας εγγυάται την εξεύρεση όλων των δυνατών βασικών λύσεων.

Ο Tarry (G.Tarry, 1895) παρουσίασε το 1895 την πρώτη μέθοδο που επέτρεψε τη λύση του προβλήματος της διαδρομής ενός λαβύρινθου, γνωστού και ως «πρόβλημα του λαβύρινθου». (J.Siskos, 1984)

Έχοντας συγκεκριμένη -φτωχή σε ποιότητα και ποσότητα- πληροφορία σχετικά με τον πεπερασμένο αριθμό κόμβων ενός συνεκτικού γραφήματος, το πρόβλημα του λαβύρινθου έγκειται στην εύρεση μια διαδρομής που θα μας επιτρέψει να επισκεφτούμε, τουλάχιστον από μία φορά, τον κάθε κόμβο.(A.Charnes, 1952)

Σύμφωνα με τον Tarry για κάθε λαβύρινθο μπορεί να βρεθεί η διαδρομή του περνώντας από κάθε ‘μονοπάτι’ (αντίστοιχο της ακμής του γραφήματος) δύο φορές, την πρώτη κατά τη μία κατεύθυνση και τη δεύτερη κατά την αντίθετη. Για να επιλύσουμε το «πρόβλημα του λαβύρινθου», προσαρμόζοντάς το στην περίπτωση του υπερπολυέδρου, αρκεί να παρατηρήσουμε τον παρακάτω κανόνα:

> «Από κάθε κορυφή πηγαίνετε σε μία άλλη γειτονική κορυφή ακολουθώντας μια ακμή που δεν την έχετε ακόμα διαβεί κατά την αυτή κατεύθυνση αλλά, μην διαβείτε την ακμή που σας οδήγησε αρχικά σε αυτή την κορυφή, εκτός και αν δεν μπορείτε να κάνετε διαφορετικά.» (J.Siskos, 1984)

Πριν προχωρήσουμε, είναι σκόπιμο να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις. Σε κάθε στιγμή, πριν φτάσουμε σε μία κορυφή ή αφού έχουμε μόλις φύγει από αυτή, η συγκεκριμένη κορυφή, εκτός και αν πρόκειται για την κορυφή εκκίνησης, περιέχει απαραιτήτως ένα ζυγό αριθμό ακμών που τις έχουμε διαβεί κατά τη μία κατεύθυνση. Επίσης, όσες φορές έχουμε επισκεφτεί αυτή την κορυφή τόσες φορές έχουμε αναχωρήσει.

Από τη στιγμή που φτάνουμε σε μία κορυφή ο αριθμός των ακμών της, που έχουμε διαβεί μία φορά και κατά την κατεύθυνση άφιξης στην κορυφή, είναι μεγαλύτερος κατά μία μονάδα από τον αριθμό των ακμών της που έχουμε διαβεί μία φορά και κατά τη διεύθυνση αναχώρησης.

Αν δεν υπάρχει παρά μόνο μία ακμή της που έχουμε διαβεί μόνο μία φορά, αυτή δεν μπορεί να είναι άλλη από την αρχική και απαραιτήτως όλες τις άλλες ακμές της τις έχουμε διαβεί από δύο φορές και κατά αντίθετη κατεύθυνση.

Δεν μπορούμε λοιπόν να σταματήσουμε σε ένα τέτοιο σταυροδρόμι (κορυφή), και είμαστε υποχρεωμένοι να διαβούμε την αρχική ακμή στην περίπτωση μόνο που όλες τις υπόλοιπες ακμές της τις έχουμε διαβεί από δύο φορές.

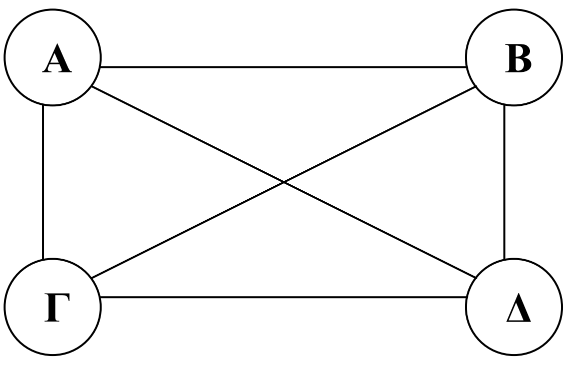
Ας θεωρήσουμε τώρα την κορυφή εκκίνησης. Τη στιγμή της άφιξης σε αυτή την κορυφή ο αριθμός των ακμών της που έχουμε διαβεί μία και μοναδική φορά και με κατεύθυνση άφιξης είναι ίσος με τον αριθμό των ακμών της που έχουμε διαβεί μία και μοναδική φορά με κατεύθυνση αναχώρησης. Επομένως, δεν μπορούμε να σταματήσουμε, παρά μόνο αν δεν υπάρχει ούτε μια ακμή της την οποία δεν έχουμε διαβεί. Έτσι, τη στιγμή που αναγκαζόμαστε να σταματήσουμε στην κορυφή εκκίνησης, όλες της ακμές της τη έχουμε διαβεί δύο φορές.

Προκειμένου να διευκολυνθούμε στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματός μας θα αναπαραστήσουμε το υπερπολύεδρο με κάποιο γράφημα και θα προχωρήσουμε στη χρήση χαρακτηριστικών σημαδιών. Ας συμφωνήσουμε τώρα, ότι όταν διαβαίνουμε μια ακμή για πρώτη φορά θα βάζουμε στην αρχή της δύο σημάδια και στο τέλος της ένα (αν οδηγούμαστε σε μία κορυφή που έχουμε ξαναεπισκεφτεί) ή τρία (αν οδηγούμαστε σε μία κορυφή για πρώτη φορά) σημάδια. Όταν διαβαίνουμε μία ακμή όπου βρίσκεται ένα σημάδι στην άλλη άκρη της, που σημαίνει ότι τη διαβαίνουμε για δεύτερη φορά κατά αντίθετη όμως κατεύθυνση, αρκεί να προσθέσουμε ένα σημάδι στη άκρη από τη οποία ξεκινάμε να τη διαβαίνουμε. Κατά την άφιξή μας σε μία κορυφή πρέπει πάντα να μπορούμε να διακρίνουμε τις ακμές που δεν έχουμε διαβεί ούτε μία φορά και δεν έχουν κανένα σημάδι, την αρχική ακμή που οδήγησε σε αυτή την κορυφή και που έχει τρία σημάδια, καθώς και τις άλλες ακμές που έχουμε διαβεί μόνο μία φορά, με κατεύθυνση άφιξης και που έχουν ένα σημάδι

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο αρχικός κανόνας γράφεται ως εξής:

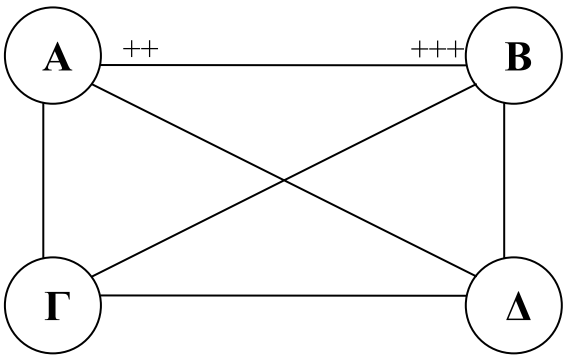
> «Φτάνοντας σε μία κορυφή, ακολουθήστε υποχρεωτικά μία ακμή που έχει ένα ή κανένα σημάδι και μόνο κατά την περίπτωση που δεν υπάρχει καμία τέτοια ακμή ακολουθήστε την ακμή που έχει τρία σημάδια. » (G.Tarry, 1895)

Έστω ότι έχουμε ένα υπερπολύεδρο με 4 κορυφές και 6 ακμές, το οποίο το αναπαριστάνουμε με το παρακάτω γράφημα (ΑΒΓΔ):



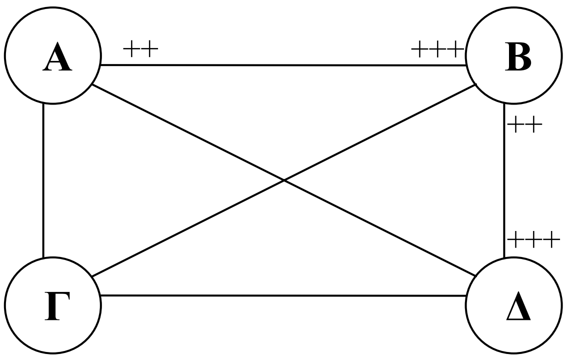
Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που προτείνει ο Tarry προκειμένου να επισκεφτούμε εξαντλητικά όλες τις κορυφές έχουμε τα παρακάτω βήματα:

<u>Βήμα 1</u>



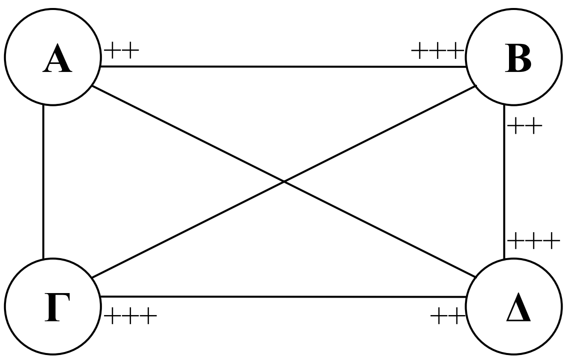
A → B

<u>Βήμα 2</u>



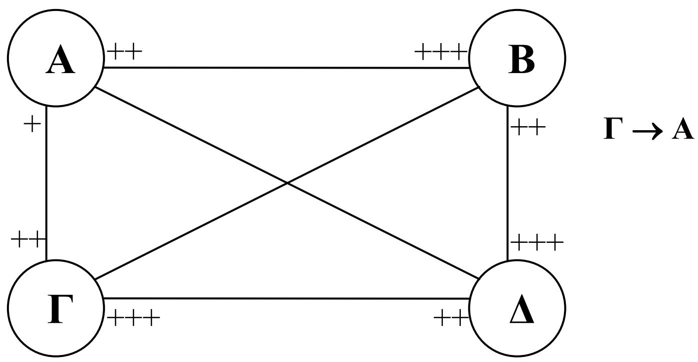
B → Δ

<u>Βήμα 3</u>

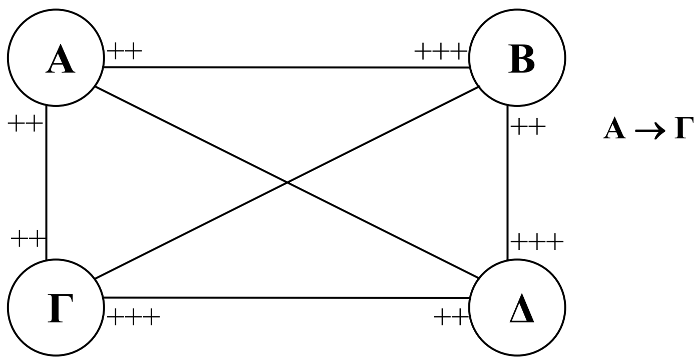


Δ → Γ

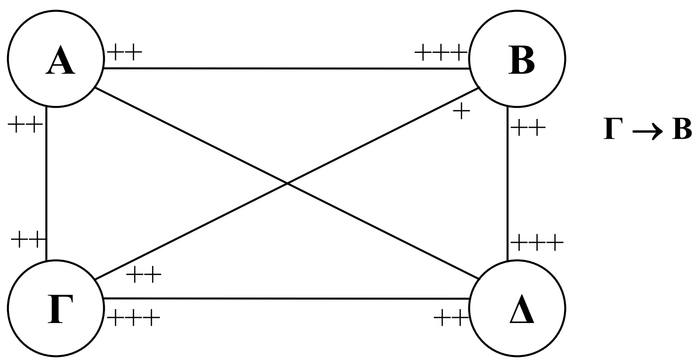
Βήμα 4



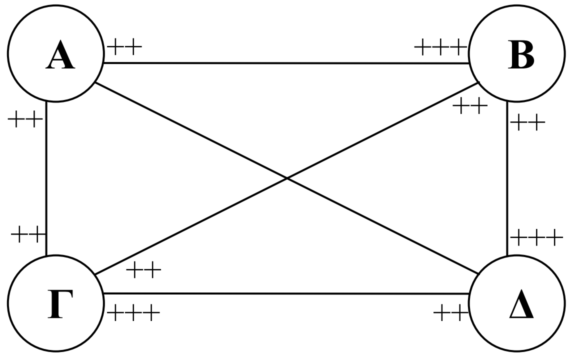
Βήμα 5



Βήμα 6

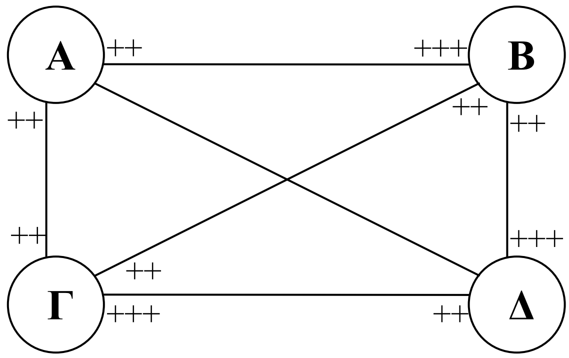


Βήμα 7



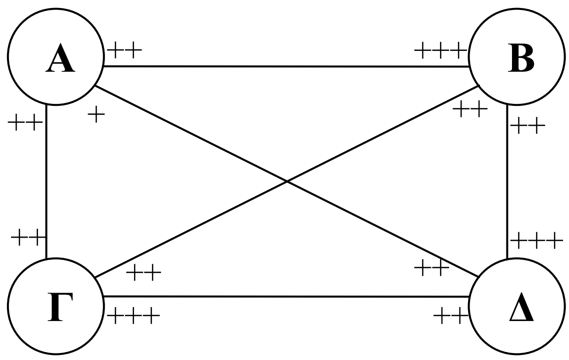
Β → Γ

Βήμα 8



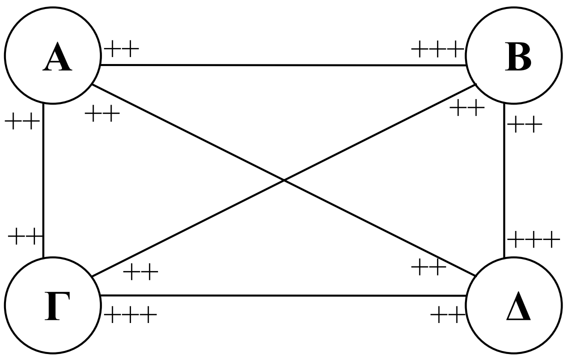
Γ → Δ

Βήμα 9



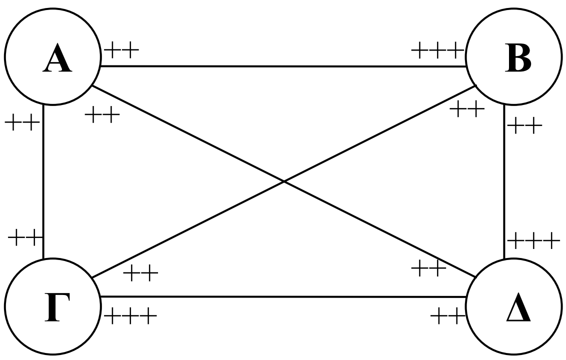
Δ → Α

<u>Βήμα 10</u>



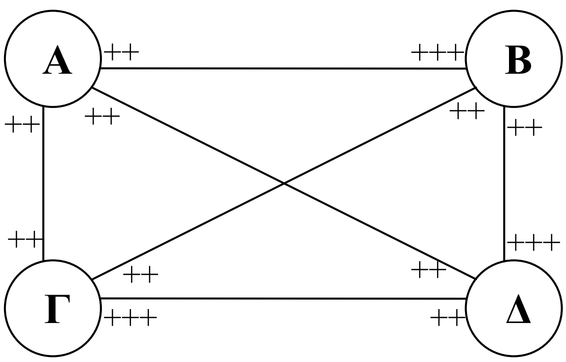
Α → Δ

<u>Βήμα 11</u>



Δ → Β

<u>Βήμα 12</u>



Β → Α

ΤΕΛΟΣ

Παρατηρούμε ότι φτάσαμε στην κορυφή **Α** από όπου ξεκινήσαμε χωρίς να μπορούμε πλέον να διαβούμε οποιαδήποτε ακμή. Είναι φανερό πως όλες τις ακμές τις έχουμε διαβεί από δύο φορές κατά αντίθετη κατεύθυνση.

Ακολουθώντας την παραπάνω πρακτική μέθοδο, κάποιος ο οποίος έχει χαθεί μέσα σε ένα λαβύρινθο ή μέσα σε κατακόμβες, θα ξαναβρεί σίγουρα την είσοδο αφού έχει διαβεί πρώτα όλες τις διαδρομές και χωρίς να διαβεί περισσότερο από δύο φορές την κάθε διαδρομή. (G.Tarry, 1895)

Προκειμένου να βρούμε όλες τις βασικές δυνατές λύσεις ενός γ.π. αρκεί να ξέρουμε για κάθε βασική δυνατή λύση ποιες από τις γειτονικές της λύσεις έχουμε εξετάσει και ακολουθώντας ποια διαδρομή (ακμή και κατεύθυνση διέλευσης).(C.Van de Panne, 1975; A.Charnes, 1952)

Κάθε ακμή του γραφήματος (V,U) δηλώνεται από κάποια μεταβλητή που βρίσκεται εκτός βάσης του πίνακα Simplex. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Tarry χρειάζεται να εκτελέσουμε τόσες επαναλήψεις της Simplex όσο είναι το γινόμενο του αριθμού των διανυσμάτων εκτός βάσης, n για το Γ.Π.1, επί του αριθμού των πιθανών κορυφών (δυνατών βασικών λύσεων), r για το Γ.Π.1, δηλαδή $n \times r$. Για το παράδειγμα που παραθέσαμε στην Κεφάλαιο Ι.2 θα έπρεπε να πραγματοποιήσουμε $4 \times 13 = 52$ επαναλήψεις της Simplex. Οπότε βλέπουμε πως ο αλγόριθμος αυτός από υπολογιστική άποψη δεν είναι η καλύτερη μεθοδολογία που θα μπορούσαμε να επιλέξουμε προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα εύρεσης όλων των πιθανών δυνατών βασικών λύσεων. (J.Siskos, 1984; C.Van de Panne, 1975)

I.4. Η Μέθοδος της Αντίστροφης Simplex

I.4.1. Περιγραφή της Μεθόδου

Η μέθοδος της **Αντίστροφης Simplex** (*Simplex Inverse*) παρουσιάστηκε από τον Van de Panne ο οποίος παρατήρησε ότι κάθε επανάληψη του αλγορίθμου Simplex είναι αντιστρέψιμη αντικαθιστώντας το ρόλο της μεταβλητής που εισέρχεται στη βάση με το ρόλο της μεταβλητής που εξέρχεται. (C.Van de Panne, 1975)

Με άλλα λόγια, αν σε μία βάση της Simplex εισάγουμε τη μεταβλητή x_j στη θέση της μεταβλητής x_{Br}, κατά την εκτέλεση της Αντίστροφης Simplex εισάγουμε την x_{Br} στη θέση της x_j. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία μειώνουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z κατά μία ποσότητα ίση με αυτή κατά την οποία αυξήθηκε η z όταν πραγματοποιήσαμε το βήμα της Simplex. (J.Siskos, 1984)

Η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex σχεδιάστηκε για να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση ευστάθειας (μεταβελτιστοποίηση) αλλά χρησιμοποιήθηκε και σαν γενική μέθοδος εύρεσης όλων των ακραίων σημείων ενός συστήματος ανισοτήτων. Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο I.1. το σύνολο σχεδόν των βέλτιστων λύσεων οριοθετείται από το υπερπολύεδρο ΥΠ I.1.2

$$\text{ΥΠ I.1.2} \quad \begin{cases} \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c^t x} \geq \mathrm{z}^* - K \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$$

όπου k μικρή θετική ποσότητα (για k=0 έχουμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων).

Αυξάνοντας την τιμή του k αυξάνουμε και τον αριθμό των σχεδόν βέλτιστων λύσεων. Στην πράξη το k παίρνει τιμές σχετικά μικρές αλλά ακόμα και σε αυτές τις περιπτώσεις ο αριθμός των σχεδόν βέλτιστων λύσεων μπορεί να είναι πολύ μεγάλος. (C.Van de Panne, 1975)

Η ιδέα στην οποία βασίζεται η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex είναι αρκετά απλή. Στη μέθοδο Simplex εισάγονται μεταβλητές στη βάση οι οποίες αυξάνουν την τιμή αντικειμενικής συνάρτησης μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση. Στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex η βέλτιστη λύση θεωρείται ως σημείο εκκίνησης για την παραγωγή σχεδόν βέλτιστων λύσεων. Σε αυτή και σε επόμενες λύσεις εισάγονται μεταβλητές στη βάση που μειώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης· ο ποσότητα k ορίζει το οριακό σημείο μέχρι το οποίο μπορεί αν μειωθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η βασική διαφορά ανάμεσα στη μέθοδο Simplex και σε αυτή της Αντίστροφης Simplex είναι ότι στην πρώτη μόνο μια μεταβλητή εισάγεται στη βάση σε κάθε επανάληψη, ενώ στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex όλες οι τιμές που μειώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εισάγονται αργά η γρήγορα στη βάση. Επίσης, στη μέθοδο Simplex η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται σε κάθε επανάληψη, ενώ αντιθέτως στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex μειώνεται ή παραμένει τα ίδια σε κάθε επανάληψη, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν εκφυλισμένες λύσεις. (C.Van de Panne, 1975)

Ας θεωρήσουμε μία επανάληψη της μεθόδου Simplex. Ο πίνακας Ι.1.4 παριστάνει ένα πίνακα Simplex, έστω μετά τη m επανάληψη.

$\boldsymbol{c}_B$	Βάση	1	…	k	…	r	…	n	$\boldsymbol{x}_B$
c_{B1}	*1*	1	…	y_{1k}	…	0	…	y_{1n}	x_{B1}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
c_{Br}	*r*	0	…	y_{rk}	…	1	…	y_{rn}	x_{Br}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
c_{Bm}	*m*	0	…	y_{mk}	…	0	…	y_{mn}	x_{Bm}
	$\boldsymbol{c}_j$	c_1	…	c_k	…	c_r	…	c_n	
	Δ_j	-	…	Δ_k	…	-	…	Δ_n	z

Πίνακας Ι.4.1

Έστω ότι κατά την επανάληψη m+1 επανάληψη της μεθόδου Simplex εισάγουμε την μεταβλητή x_k θεωρώντας φυσικά ότι το οριακό καθαρό εισόδημα της μεταβλητής που θα εισάγουμε είναι το μεγαλύτερο θετικό (δηλ. $\Delta_k = \max\limits_j \Delta_j \ \ \forall \ \Delta_j > 0$). Έστω ακόμα ότι απομακρύνουμε από τη βάση την μεταβλητή x_{Br} θεωρώντας φυσικά ότι ισχύει:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, \ y_{ik} > 0 \right) \qquad (\text{Ι.4.α})$$

Ο πίνακας Ι.4.2 είναι ο πίνακας Simplex μετά από την m+1 επανάληψη:

$\boldsymbol{c}_B$	Βάση	1	…	k	…	r	…	n	$\boldsymbol{x}_B$
c_{B1}	1	1	…	0	…	$-y_{1k}/y_{rk}$	…	$y_{1n}-y_{1k}(y_{rn}/y_{rk})$	$x_{B1}-y_{1k}(x_{Br}/y_{rk})$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
c_{Bk}	k	0	…	1	…	$1/y_{rk}$	…	y_{rn}/y_{rk}	x_{Br}/y_{rk}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
c_{Bm}	m	0	…	0	…	$-y_{mk}/y_{rk}$	…	$y_{mn}-y_{mk}(y_{rn}/y_{rk})$	$x_{Bm}-y_{mk}(x_{Br}/y_{rk})$
	$\boldsymbol{c}_j$	c_1	…	c_k	…	c_r	…	c_n	
	Δ_j	-	…	-	…	$-\Delta_k/y_{rk}$	…	$\Delta_n-\Delta_k(y_{rn}-y_{rk})$	$z+\Delta_k(x_{Br}/y_{rk})$

Πίνακας Ι.4.2

Παρατηρούμε ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται κατά $\Delta_k(x_{Br}/y_{rk})$ και ότι η τιμή του οριακού καθαρού εισοδήματος της μεταβλητής είναι αρνητική και ίση με $-\Delta_k/y_{rk}$. Έστω τώρα ότι εισάγουμε στη βάση κατά τρόπο αντίστροφο την μεταβλητή x_r. Από τη στιγμή που η ποσότητα $-\Delta_k/y_{rk}$ είναι αρνητική η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα μειωθεί. Ειδικότερα για την καινούργια τιμή z΄ θα έχουμε:

$$z' = z + \Delta_k \frac{x_{Br}}{y_{rk}} - \frac{\Delta_k}{y_{rk}} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} y_{rk} = z \quad (\text{I.4.β})$$

Για να εντοπίσουμε το διάνυσμα που θα εγκαταλείψει τη βάση εργαζόμαστε ως ακολούθως.

Οι νέες τιμές x'_B δίνονται από το γενικό τύπο:

$$x'_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} - \left(- \frac{\frac{y_{ik}}{y_{rk}}}{\frac{1}{y_{rk}}} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \right) \quad (\text{I.4.γ})$$

που πρέπει να είναι θετική ποσότητα προκειμένου η νέα λύση να είναι δυνατή.

Οπότε να θέσουμε $x_{Bi} - y_{ik} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} = x^{*}_{Bi}$ έχουμε από τη σχέση (I.4.γ):

$$x^{*}_{Bi} + \frac{\frac{y_{ik}}{y_{rk}}}{\frac{1}{y_{rk}}} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \geq 0 \quad (\text{I.4.δ})$$

Παρατηρούμε ότι η (I.4.δ) πληρείται αυτόματα για κάθε $y_{ik} > 0$. (Σημ. Η ποσότητα y_{rk} είναι θετική γιατί η μεταβλητή x_k έχει εισέλθει προηγουμένως στη βάση.) Οπότε είμαστε σε θέση να απομακρύνουμε τη μεταβλητή x_k από τη βάση και να εισάγουμε τη μεταβλητή x_r και λαμβάνουμε πάλι τον πίνακα I.4.1.

Έτσι αποδείξαμε ότι για κάθε επανάληψη της μεθόδου Simplex υπάρχει μια επανάληψη αντιστροφής η οποία υλοποιείται με την εισαγωγή μιας μη βασικής μεταβλητής με αρνητικό καθαρό οριακό εισόδημα στη βάση και βρίσκοντας τη μεταβλητή που φεύγει από τη βάση με το γνωστό τρόπο που εξασφαλίζει τη θετικότητα των τιμών των βασικών μεταβλητών. (C.Van de Panne, 1975)

Η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex θα περιγραφεί τώρα με περισσότερες λεπτομέρειες. Για τους σκοπούς μας θα θεωρήσουμε πάλι την προσθήκη του περιορισμού (Ι.2.α):

$$z - Y = z^* - k$$

όπου Y η μεταβλητή απόκλισης.

Οι τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή Y κατά τις επαναλήψεις της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex θα πρέπει να είναι θετικές ή μηδέν: $Y=z-(z^*-k) \geq 0$ (Ι.4.στ)

Ορίζουμε την **ποσότητα k_s ως την τιμή της Y κατά την s επανάληψη**. Οι k_s θα μετράνε την παρέκκλιση που θα έχουμε σε κάθε επανάληψη από το ελάχιστο όριο z^*-k.

Σαν σημείο εκκίνησης για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex λαμβάνουμε το βέλτιστο πίνακα Simplex στον οποίο έχουμε προσθέσει τον περιορισμό (Ι.2.α). Όπως δείξαμε στην παράγραφο Ι.2 οι συντελεστές του νέου περιορισμού στον αρχικό βέλτιστο πίνακα Simplex είναι οι αντίθετες τιμές των καθαρών οριακών εισοδημάτων, για τις οποίες ισχύει: $\Delta^o_j = -\Delta_j \geq 0$.

Ο ακόλουθος πίνακας είναι ο αρχικός (s=0) για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex.

Βάση	**Μη Βασικές Μεταβλητές**			**Βασικές Μεταβλητές**						**Τιμές Βασικών Μεταβλητών**
x_1	a^o_{1i}	$\cdots$	a^o_{1j}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	x^o_{B1}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
x_i	a^o_{ii}	$\cdots$	a^o_{ij}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	0	x^o_{Bi}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
x_m	a^o_{mi}	$\cdots$	a^o_{mj}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	0	x^o_{Bm}
Y	Δ^o_i	$\cdots$	Δ^o_j	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	1	$k_o(=k)$

Πίνακας Ι.4.3

Σε κάθε επανάληψη s της μεθόδου ο πίνακας θα έχει τη γενική μορφή:

Βάση	**Μη Βασικές Μεταβλητές**			**Βασικές Μεταβλητές**						**Τιμές Βασικών Μεταβλητών**
x_1	a^s_{1l}	$\cdots$	a^s_{1j}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	x^s_{B1}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
x_i	a^s_{il}	$\cdots$	a^s_{ij}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	0	x^s_{Bi}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
x_m	a^s_{ml}	$\cdots$	a^s_{mj}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	0	x^s_{Bm}
Y	Δ^s_l	$\cdots$	Δ^s_j	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	1	k_s

Πίνακας Ι.4.4

Στον αρχικό πίνακα έχουμε $x^o_{Bi}>0$ για κάθε i και $\Delta^o_j>0$ για κάθε j · αν δεν είχαμε θεωρήσει ότι η βέλτιστη λύση z* είναι μοναδική θα ίσχυε $\Delta^o_j \geq 0$. Η εισαγωγή μιας μη βασικής μεταβλητής, έστω της x_k , στη βάση θα οδηγούσε σε μείωση $\Delta^o_k\theta$ (σύμφωνα με τις σχέσεις (16) και (20) του Παραρτήματος) της τιμής της k_o .

Η μεταβλητή x_r που θα εγκαταλείψει τη βάση καθορίζεται, όπως και κατά την εφαρμογή της Simplex, από την παρακάτω σχέση:

$$\theta^o_j = \frac{x^o_{Br}}{a^o_{rj}} = \min_i\left(\frac{x^o_{Bi}}{a^o_{ij}},\ a^o_{ij}>0\right) \qquad (\text{Ι.4.ε})$$

Προκειμένου να βρούμε τη μεταβλητή x_k που θα εισάγουμε στη βάση εργαζόμαστε ως ακολούθως. Υπολογίζουμε την ποσότητα $k_{0j}=k-\Delta^o_j(x^o_{Br}/a^o_{rj})$ (Ι.4.στ) για κάθε j. Επειδή οι λύσεις y_s που θα βρούμε πρέπει να είναι ταξινομημένες κατά φθίνουσα σειρά θα επιλέξουμε το μεγαλύτερο k_{oj}. Από τη στιγμή που η τιμή της Y δεν μπορεί να είναι αρνητική, η δεύτερη τιμή (k_1) θα οριστεί από τη σχέση:

$$k_1 = \max_j\left(k_{oj}, 0\right) = k_{0k} \qquad (\text{Ι.4.ζ})$$

και υποθέτουμε ότι το ελάχιστο είναι μοναδικό.

Αν το $k_1 \neq 0$, ο επόμενος πίνακας λαμβάνεται από την εισαγωγή της αντίστοιχης μη βασικής μεταβλητής x_k στη βάση, ενώ η βασική μεταβλητή που φεύγει από τη βάση βρίσκεται από τη σχέση (Ι.4.ε). Η περίπτωση όπου k_1=0 θα εξεταστεί παρακάτω. Αν στη σχέση (Ι.4.ε) για κάποια j ίσχυε $a^o_{ij} \leq 0$ για όλα τα i, καμία αντίστοιχη κορυφή-λύση δε θα μπορούσε να βρεθεί γιατί σε αυτή τη περίπτωση το x_k θα αυξανόταν αόριστα και η απώλεια από τη βέλτιστη τιμή z* θα αυξανόταν και αυτή αόριστα. Όμως, η μέγιστη απώλεια k που θα μας δώσει k_s=0 μας ορίζει ένα όριο για τη λύση, έτσι ώστε αυτή η περίπτωση να είναι όμοια με την περίπτωση όπου k_1=0, και να μπορεί να αντιμετωπιστεί με τον ίδιο τρόπο.

Έχουμε βρει, σύμφωνα με τα παραπάνω, μία μεταβέλτιστη λύση με $Y=k_1$. Όλες οι άλλες λύσεις που θα βρούμε θα έχουν τιμές μικρότερες ή ίσες με την τιμή k_1. Δεν υπάρχει καμία άλλη δυνατή λύση με k_s ανάμεσα στο k και στο k_1 γιατί αν υπήρχε μια τέτοια λύση, η βέλτιστη λύση z*, που είναι και η αρχική για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex, θα μπορούσε να παραχθεί από αυτή τη λύση σε μία ή περισσότερες επαναλήψεις της μεθόδου Simplex. Αν μπορούσε να παραχθεί σε μία επανάληψη τότε, εκτελώντας την αντίστοιχη επανάληψη στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex, σύμφωνα με τη σχέση (Ι.4.ζ) η λύση αυτή θα είχε επιλεχθεί.

Αν μπορούσε να παραχθεί σε περισσότερες από μία επαναλήψεις, η τελευταία λύση πριν τη βέλτιστη θα είχε μεγαλύτερη τιμή από k_1. Τότε όμως από αυτή τη λύση η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να παραχθεί σε μία επανάληψη και εκτελώντας την αντίστοιχη επανάληψη της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex θα βρίσκαμε πρώτα αυτή τη λύση.

Έχοντας βρει μία δεύτερη δυνατή λύση (μετά από την βέλτιστη που θεωρείται ως αρχική) θα ψάξουμε να βρούμε την επόμενη στη σειρά k_s, αντιμετωπίζοντας δύο πιθανές περιπτώσεις. Πρώτον, υπάρχουν και άλλες λύσεις που μπορούν να παραχθούν από τον πρώτο πίνακα. Δεύτερον, υπάρχουν λύσεις που μπορούν να παραχθούν από το δεύτερο πίνακα, που είναι αποτέλεσμα της εισαγωγής στη βάση της μεταβλητής x_k. Οι τελευταίες αυτές λύσεις προκύπτουν από την εισαγωγή στη βάση των μη βασικών μεταβλητών x_j με Δ^1_j>0. Αν εισάγουμε στη βάση μη βασικές μεταβλητές με Δ^1_j<0 θα είχαμε $k_s > k_1$ και σε αυτή την περίπτωση θα παίρναμε ως αποτέλεσμα τη βέλτιστη λύση. Όπως αναφέραμε και παραπάνω δεν υπάρχει περίπτωση να υπάρχει λύση με k_s ανάμεσα σε ανάμεσα στο k και στο k_1, γιατί εφόσον μία μεταβλητή x_j με $\Delta^1_j > 0$ εισαχθεί στη βάση η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται, έτσι ώστε η παρέκκλιση από την ελάχιστη τιμή z*- k θα είναι μικρότερη από k_1.

Έτσι, στο δεύτερο πίνακα (s=1) για κάθε x_j με $\Delta^1_j > 0$, έχουμε:

$$\theta^1_j = \frac{x^1_{Br}}{a^1_{rj}} = \min_i \left(\frac{x^1_{Bi}}{a^1_{ij}},\ a^1_{ij} > 0 \right) \quad \text{(Ι.4.η)}$$

Οι τιμές των y_1 που θα παραχθούν από την εισαγωγή της μεταβλητής x_j στη βάση βρίσκεται από τη σχέση:

$$k_{1j} = k - \Delta^1_j (x^1_{Br} / a^1_{rj}) \quad \text{(Ι.4.ι)}$$

Η επόμενη στην ταξινόμηση κατά φθίνουσα σειρά τιμή των k_s βρίσκεται από τη σχέση:

$$k_2 = \max_j \left(k_{oj}, k_{1j}, 0 \middle| k_{0j} < k_1, k_{1j} > 0 \right) \quad \text{(Ι.4.ια)}$$

υποθέτοντας πάλι ότι το ελάχιστο είναι μοναδικό. Αν η ελάχιστη τιμή αντιστοιχεί σε ένα από τα k_{0j} η επόμενη λύση παράγεται από τον πίνακα s=0, ενώ αν αντιστοιχεί σε ένα από τα k_{1j} η επόμενη λύση παράγεται από τον πίνακα s=1. Η περίπτωση όπου $k_2=0$ θα εξεταστεί παρακάτω.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex παραθέτοντας τα συγκεκριμένα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε και χωρίζοντας την όλη διαδικασία σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση υπολογίζουμε τις λύσεις για τις οποίες $0 < Y \leq k$, ενώ στη δεύτερη φάση υπολογίζουμε τις λύσεις τις πλέον απομακρυσμένες από τη βέλτιστη με $Y=0$.

Φάση 1

Βήμα 0: Ξεκινάμε από το βέλτιστο πίνακα Simplex (s=0) αφού πρώτα προσθέσουμε μία γραμμή συμπληρωματική που αποτελείται από τις αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων (Δ_j) του βέλτιστου πίνακα.

Θέτουμε $Y=k$ (ορίζουμε $k_o=k$).

Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε πολλαπλές βέλτιστες λύσεις ($\Delta_j>0,\ \forall j$).

Βήμα 1: Θεωρούμε ένα πίνακα Simplex s. Δημιουργούμε ένα κλάδο για κάθε μεταβλητή x_j που βρίσκεται εκτός βάσης και για τις οποίες ισχύει $\Delta^s_j>0$. Καθορίζουμε τα στοιχεία-οδηγούς a^s_{rj} (για κάθε j με $\Delta^s_j>0$) από τη σχέση:

$$\frac{x^s_{Br}}{a^s_{rj}} = \min_i\left(\frac{x^s_{Bi}}{a^s_{ij}},\ a^s_{ij}>0\right) \qquad (\text{Ι.4.ιβ})$$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε τις τιμές που θα πάρει η μεταβλητή απόκλισης Y για κάθε μεταβλητή x_j που δύναται να εισέλθει στη βάση:

$$k_{sj}=k_s-\Delta^s_j(x^s_{Br}/a^s_{rj}) \qquad (\text{Ι.4.ιγ})$$

Βήμα 3: Καθορίζουμε τη μεταβλητή x_j σύμφωνα με τη σχέση:

$$k_{s+1} = \max_j\left(k_{oj}, k_{1j}, \ldots, k_{sj}\ 0 \middle| k_{ij}>0\right) \qquad (\text{Ι.4.ιδ})$$

και αφαιρούμε αυτή την τιμή από το σύνολο των $k_{ij}>0$. Σε περίπτωση που έχουμε $k_{s+1}=0$, πηγαίνουμε στη **Φάση 2**.

Βήμα 4: Εισάγουμε τη μεταβλητή x_j και απομακρύνουμε τη μεταβλητή x_r ($x_j\uparrow\ x_r\downarrow$) στον πίνακα Simplex που αντιστοιχεί η τιμή που θα βρούμε από τη σχέση (Ι.4.ιδ).

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1 θέτοντας :s=s+1.

Φάση 2

Στην περίπτωση που πλέον δεν υπάρχουν άλλες θετικές τιμές $k_{1j},\ldots,k_{sj}$ όλες οι υπόλοιπες λύσεις, που μπορούν να παραχθούν από τους πίνακες Simplex, δίνουν z=z*-k.

Αυτά τα ακραία σημεία (λύσεις) μπορούν να βρεθούν εισάγοντας στη βάση μη βασικές μεταβλητές με $\Delta^s{}_j$ >0, που δεν έχουν ακόμα εισαχθεί στους πίνακες Simplex που έχουν παραχθεί μέχρι τώρα. Αυτές οι μεταβλητές παίρνουν τέτοιες τιμές ώστε οι λύσεις που θα παραχθούν, θα δίνουν τιμές στην αντικειμενική συνάρτηση ακριβώς ίσες με z*-k.

Θέλουμε δηλαδή η μείωση της τιμής της z να είναι ίση με k_s για κάθε πίνακα Simplex s. Οπότε πρέπει να ισχύει:

$$k_s = \Delta_j^s \frac{x_{Br}^s}{a_{rj}^s} \Rightarrow \frac{k_s}{\Delta_j^s} = \frac{x_{Br}^s}{a_{rj}^s} \qquad (\text{Ι.4.ιε})$$

Από τον πίνακα (Ι.4.2) παρατηρούμε ότι η τιμή της νεοεισερχόμενης μεταβλητής δίνεται από τη σχέση $x_j = \dfrac{x_{Br}}{a_{rj}}$, οπότε σύμφωνα και με τη σχέση (Ι.4.ιε) έχουμε:

$$x_{Bj} = \frac{k_s}{\Delta_j^s} \qquad (\text{Ι.4.ιστ})$$

Ακόμα θα ισχύει για τις αντίστοιχες τιμές των βασικών μεταβλητών που παραμένουν στη βάση:

$$x_{Bi} = x_{Bi}^s - a_{ij}^s x_{Bj}, \quad \forall i \neq j \qquad (\text{Ι.4.ιζ})$$

Στον κάθε πίνακα Simplex s, αυτές οι λύσεις μπορούν να παραχθούν απομακρύνοντας τη μεταβλητή Y από τη βάση (οπότε Y=0) και εισάγοντας κάθε μεταβλητή x_j με $\Delta^s{}_j$>0.

Επειδή καμία περαιτέρω επανάληψη δε χρειάζεται να πραγματοποιηθεί, δεν είναι απαραίτητο να παράγουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα Simplex αυτών των λύσεων. Χρειάζεται μόνο να παραχθούν οι τιμές των βασικών μεταβλητών και πιθανώς οι τιμές των Δ_j^{s+1}.

Όλες οι μεταβέλτιστες λύσεις, που δίνουν διαφορετική τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση του γ.π. παράγονται ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο και αυτό αποδεικνύεται ως ακολούθως. Από κάθε λύση που βρίσκουμε μπορούμε να φτάσουμε στη βέλτιστη λύση με ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων της μεθόδου Simplex. Η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex ξεκινώντας από τη βέλτιστη λύση κατά την αντίθετη κατεύθυνση εξετάζει κάθε λύση κατά φθίνουσα σειρά. Αν υπάρχει μονοπάτι που πηγαίνει προς τα πάνω, σίγουρα θα υπάρχει μονοπάτι που πηγαίνει και προς τα κάτω. (J.Siskos, 1984; C.Van de Panne, 1975)

Ι.4.2. Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex θα χρησιμοποιήσουμε για παράδειγμα ένα γραμμικό πρόγραμμα μικρών διαστάσεων, το οποίο αφορά την παραγωγή 4 προϊόντων και περιλαμβάνει 2 περιορισμούς.(Το ίδιο παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε και στο Κεφάλαιο Ι.2.)

Το γραμμικό πρόγραμμα είναι το ακόλουθο:

$$\begin{cases} [\max] z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 0x_{\bar{1}} + 0x_{\bar{2}} \\ \qquad\qquad \upsilon.\pi. \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{\bar{1}} = 18 \\ 2x_3 + 3x_4 + x_{\bar{2}} = 6 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,\bar{1},\bar{2} \end{cases} \qquad \text{(ΓΠ Ι.4.1)}$$

Προκειμένου να διευκολυνθούμε στην επίλυση θα θέσουμε $x_{\bar{1}} = x_5$, $x_{\bar{2}} = x_6$ και $Y = x_7$.

Φάση 1

Θέτουμε s=0.

Ο αρχικός πίνακας της Simplex συμβολίζεται ως 00 στον Πίνακα (Ι.4.5). Θεωρούμε k=20, οπότε εισάγουμε το νέο περιορισμό: $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \geq 56$.

Βήμα 0: Ο αλγόριθμος ξεκινάει από το βέλτιστο πίνακα όπου προσθέτουμε μία γραμμή που εκφράζει το νέο περιορισμό και τα στοιχεία της είναι οι αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων (Δ_j) του βέλτιστου πίνακα. Ο πίνακας Simplex που προκύπτει είναι ο s=0.

Βήμα 1: Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη βάση είναι αυτές οι οποίες αντιστοιχούν Δ^s_j θετικά (τελευταία γραμμή του πίνακα Simplex). Στην περίπτωσή μας: x_1, x_5, x_3, x_6. Τα στοιχεία - οδηγοί a^o_{rj} βρίσκονται από τη σχέση (Ι.4.ιβ):

Για j=1, min{16/1}=16/1, α^o_{21}=1

Για j=5, min{16/1}=16/1, α^o_{25}=1

Για j=3, $\min\left\{ 16\Big/\tfrac{1}{3},\ 2\Big/\tfrac{2}{3} \right\} = 2\Big/\tfrac{2}{3}$, α^o_{43}=2/3

Για j=3, $\min\left\{ 2\Big/\tfrac{1}{3} \right\} = 2\Big/\tfrac{1}{3}$, α^o_{46}=1/3

Βήμα 2: Υπολογίζουμε τις τιμές k_{0j} από τη σχέση (Ι.4.ιγ):

k_{01}=20-1×16/1=4, k_{05}= -44, k_{03}=19, k_{06}=16.

Βήμα 3: Σύμφωνα με τη σχέση (Ι.4.ιδ) έχουμε:

$k_1=\max\{k_{01}, k_{03}, k_{06}, 0\}=k_{03}=19$.

Οπότε η μεταβλητή x_3 εισέρχεται στη νέα βάση και η σχεδόν βέλτιστη λύση δίνει τιμή στο z μειωμένη κατά μία μονάδα από τη βέλτιστη τιμή z* (z=76-1=75). Η τιμή k_{03} δε θα συμπεριληφθεί ξανά στο σύνολο της σχέσης (Ι.4.ιδ).

Βήμα 4: Η είσοδος στη βάση της x_3 και η έξοδος της x_4 μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex, n°1.

Θέτουμε s=1 και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

Βήμα 1: Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι: x_1, x_5, x_6. Τα στοιχεία - οδηγοί $a^1{}_{rj}$ βρίσκονται από τη σχέση (Ι.4.ιβ):

$\alpha^1{}_{21}=1$ $\quad$ $\alpha^1{}_{25}=1$ $\quad$ $\alpha^1{}_{36}=1/2$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε τις τιμές k_{1j} από τη σχέση (Ι.4.ιγ):

$k_{11}=4$, $\quad k_{15}=-41$, $\quad k_{16}=16$.

Βήμα 3: Σύμφωνα με τη σχέση (Ι.4.ιδ) έχουμε:

$k_2=\max\{k_{01}, k_{06}, k_{11}, k_{16}, 0\}=16$ που αντιστοιχεί στις τιμές k_{06} και k_{16}. Οπότε μπορούμε να εισάγουμε τη μεταβλητή x_6 μέσα στη βάση είτε από τον πίνακα Simplex n°0 είτε από το n°1.

Βήμα 4: Η είσοδος στη βάση του πίνακα n°0 της x_6 και η έξοδος της x_4 μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex, n°2.

Θέτουμε s=2 και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

Βήμα 1: Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι: x_1, x_5. Τα στοιχεία - οδηγοί $a^2{}_{rj}$ βρίσκονται από τη σχέση (Ι.4.ιβ):

$\alpha^2{}_{21}=1$ $\quad$ $\alpha^2{}_{25}=1$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε τις τιμές k_{2j} από τη σχέση (Ι.4.ιγ):

k_{21}= -2, k_{25}= -56.

Βήμα 3: Σύμφωνα με τη σχέση (Ι.4.ιδ) έχουμε:

k_3=max{k_{01}, k_{11}, 0}=k_{01}=k_{11}=4

Οπότε μπορούμε να εισάγουμε τη μεταβλητή x_1 μέσα στη βάση είτε από τον πίνακα Simplex n^{o}0 είτε από το n^{o}1.

Βήμα 4: Η είσοδος στη βάση του πίνακα n^{o}0 της x_1 και η έξοδος της x_2 μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex, n^{o}3.

Θέτουμε s=3 και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

Βήμα 1: Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι: x_3, x_5, x_6. Τα στοιχεία - οδηγοί a^3_{rj} βρίσκονται από τη σχέση (Ι.4.ιβ):

α^3_{15}=1 α^3_{43}=2/3 a^3_{46}=1/3

Βήμα 2: Υπολογίζουμε τις τιμές k_{3j} από τη σχέση (Ι.4.ιγ):

k_{35}= -44, k_{33}=4, k_{36}= -2.

Βήμα 3: Σύμφωνα με τη σχέση (Ι.4.ιδ) έχουμε:

k_4=max{k_{33}, 0}=k_{33} =4

Οπότε μπορούμε να εισάγουμε τη μεταβλητή x_3 μέσα στη βάση από τον πίνακα Simplex n^{o}3.

Βήμα 4: Η είσοδος στη βάση του πίνακα n^{o}3 της x_3 και η έξοδος της x_4 μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex, n^{o}4.

Θέτουμε s=4 και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

<u>Βήμα 1</u>: Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι: x_5, x_6. Τα στοιχεία - οδηγοί $\alpha^4{}_{rj}$ βρίσκονται από τη σχέση (Ι.4.ιβ):

$\alpha^4{}_{15}$=1 $\alpha^4{}_{36}$=1/2

<u>Βήμα 2</u>: Υπολογίζουμε τις τιμές k_{4j} από τη σχέση (Ι.4.ιγ):

k_{45}= -41, k_{46}= -2.

<u>Βήμα 3</u>: Σύμφωνα με τη σχέση (Ι.4.ιδ) έχουμε:

k_5=max{0}=0

Πηγαίνουμε στη Φάση 2.

Πίνακας Simplex (N^o)	***Βασικές Μεταβλητές***	***Μη Βασικές Μεταβλητές***			
		x_1	x_2	x_3	x_4
00	x_5 = 18	1	1	1	1
	x_6 = 6	0	0	2	3
		x_1	x_5	x_3	x_6
0	x_2 =16	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1/3	-1/3
	x_4 =2	0	0	$\boxed{2/3}$	$\boxed{1/3}$
	$x_7(Y)$ =20	1	4	1/3	2/3
	k_{0j}	4	-44	19	16
		x_1	x_5	x_4	x_6
1	x_2 =15	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	-1/2	-1/2
	x_3 =3	0	0	3/2	$\boxed{1/2}$
	x_7 =19	1	4	-1/2	1/2
	k_{1j}	4	-41	-	16
		x_1	x_5	x_3	x_4
2	x_2 =18	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1	1
	x_6 =6	0	0	2	3
	x_7 =16	1	4	-1	-2
	k_{2j}	-2	-56	-	-
		x_2	x_5	x_3	x_6
3	x_1 =16	1	$\boxed{1}$	1/3	-1/3
	x_4 =2	0	0	$\boxed{2/3}$	$\boxed{1/3}$
	x_7 =4	-1	3	0	1
	k_{3j}	-	-44	4	-2
		x_2	x_5	x_4	x_6
4	x_1 =15	1	$\boxed{1}$	-1/2	-1/2
	x_3 =3	0	0	3/2	$\boxed{1/2}$
	x_7 =4	-1	3	0	1
	k_{4j}	-	-41	-	-2

Πίνακας (Ι.4.5)

Φάση 2

Έχουμε κρατήσει τους πίνακες n° 0, 1, 2, 3, 4 που κατασκευάσαμε στη Φάση1 και εφαρμόζουμε τις σχέσεις (Ι.4.ιστ) και (Ι.4.ιζ) χωρίς να ξαναπαράξουμε τις ίδιες λύσεις με αυτές της Φάσης 1.

Οι νέες αυτές λύσεις αντιστοιχούν σε εισαγωγή στη βάση των x_j στη θέση της μεταβλητής Y (x_7), η οποία αφού εξέρχεται από τη βάση μηδενίζεται (Y=0), δίνοντάς μας σύμφωνα με την (Ι.4.ιστ), z=z*-k=56. Οκτώ νέες λύσεις υπολογίζονται στη Φάση2 (Πίνακας Ι.4.6, n° 5-12).

Η λύση n° 5 για παράδειγμα υπολογίζεται σύμφωνα με τις σχέσεις (Ι.4.ιστ) και (Ι.4.ιζ) από τον πίνακα Simplex n° 0 (όπου k_{05}<0):

x_5=20/4=5, x_2=16-1×5=11, x_4=2-0×5=2

Παρόμοια υπολογίζεται και η λύση n° 6 από τον πίνακα Simplex n° 1 (όπου k_{15}<0):

x_5=19/4, x_2=15-1×19/4=41/4, x_3=3-0×19/4=3

Λύσεις N°	Τιμή της z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	76	0	16	0	2	0	0
1	75	0	15	3	0	0	0
2	72	0	18	0	0	0	6
3	60	16	0	0	2	0	0
4	60	15	0	3	0	0	0
5	56	0	11	0	2	5	0
6	56	0	41/4	3	0	19/4	0
7	56	16	2	0	0	0	6
8	56	0	14	0	0	4	6
9	56	44/3	0	0	2	4/3	0
10	56	52/3	0	0	2/3	0	4
11	56	41/3	0	3	0	4/3	0
12	56	17	0	1	0	0	4

Πίνακας (Ι.4.6)

Ι.4.3. Κριτική της Μεθόδου

Η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex χαρακτηρίζεται από το σχετικά γρήγορο έλεγχο των σχεδόν βέλτιστων λύσεων αφού κάθε επανάληψη του αλγορίθμου πραγματοποιείται από μία φορά. Ένα άλλο πλεονέκτημα της μεθόδου, ίσως το πιο σημαντικό, είναι ότι η αναζήτηση των λύσεων γίνεται βαθμίδων καθώς η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται. Έτσι, μας δίνεται η δυνατότητα να μελετήσουμε την ευστάθεια της βέλτιστης λύσης ενός γραμμικού προγράμματος για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου k. Είναι λυπηρό το γεγονός ότι η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex (σε αυτή ακριβώς τη μορφή της) δε μας εγγυάται την εξαντλητική αναζήτηση όλων των κορυφών του υπερπολυέδρου ΥΠ Ι.1.2.

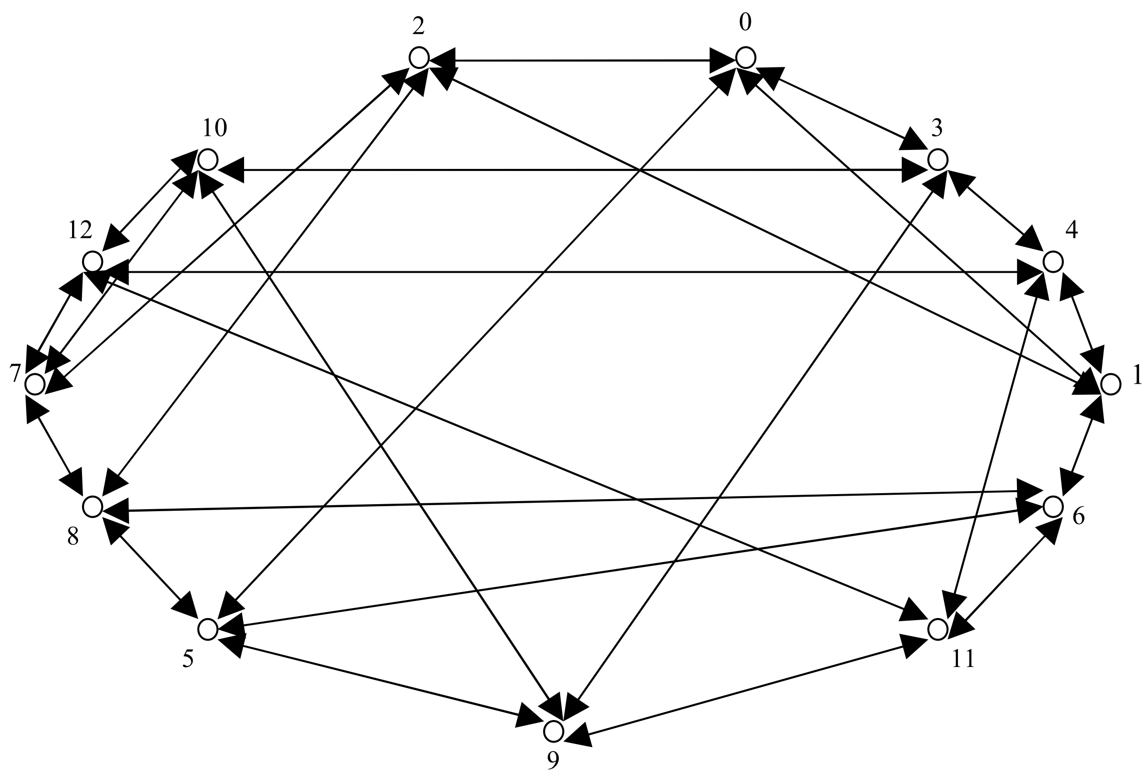
Με τη μέθοδο που περιγράψαμε, επιτρέπεται στους αναλυτές, κυρίως γραμμικών προγραμμάτων μεγάλων διαστάσεων, να αποκτήσουν αρχικά τις σχεδόν βέλτιστες λύσεις τις λιγότερο απομακρυσμένες από τη βέλτιστη z*, έτσι ώστε να έχουν τη δυνατότητα να σταματήσουν την αναζήτηση των υπολοίπων λύσεων-κορυφών του ΥΠ Ι.1.2 σε μία δεδομένη στιγμή.

Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι ο μεγάλος χώρος μνήμης που καταλαμβάνουν στον υπολογιστή όλοι οι πίνακες Simplex που παρήχθησαν κατά την εκτέλεση της πρώτης φάσης. Στο παράδειγμα που παρουσιάσαμε χρειάζεται η αποθήκευση πέντε πινάκων Simplex παρόλο που το γραμμικό πρόγραμμα είναι πολύ μικρών διαστάσεων. Υπάρχουν κάποιες τεχνικές που μειώνουν τις απαιτήσεις σε μνήμη αλλά από την άλλη μεριά αυξάνουν τον όγκο των υπολογισμών.(J.Siskos, 1984)

I.5. Ο Αλγόριθμος των Manas-Nedoma

I.5.1. Περιγραφή του Αλγόριθμου

Όπως παρατηρήσαμε και στο Κεφάλαιο I.3, ένα κυρτό υπερπολύεδρο του τύπου ΥΠ I.1.2 μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα **συνεκτικό γράφημα**(*graph connected*) (V,U) όπου V είναι το σύνολο των κόμβων και U το σύνολο των τόξων που συνδέουν ανά δύο τους κόμβους, και που μπορούμε να τα διαβούμε ακολουθώντας τα βήματα της Simplex. Έτσι, δύο κόμβοι είναι γειτονικοί αν αντιστοιχούν σε δύο βάσεις της Simplex που διαφέρουν κατά μία και μόνη μεταβλητή. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να διαβούμε το τόξο που συνδέει τους δύο γειτονικούς κόμβους κατά τις δύο, αντίθετες, κατευθύνσεις, αφού όπως έχουμε ήδη αποδείξει, κάθε βήμα της Simplex είναι αντιστρέψιμο. Το γράφημα που αντιστοιχεί στο κυρτό υπερπολύεδρο ΥΠ I.1.2 του παραδείγματος που παραθέσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δίνεται στο σχήμα Σχ.I.5.1. (J.Siskos, 1984)



Σχ.I.5.1

Η αναζήτηση όλων των κορυφών του ΥΠ Ι.1.2 ισοδυναμεί με την εξερεύνηση όλων των κόμβων του γραφήματος (V,U). Προκειμένου να μοντελοποιήσουμε σε κάποιο βαθμό αυτές τις γενικές ιδέες πρέπει να ορίσουμε κάποια μεγέθη:

- Το V (σύνολο των κόμβων του γραφήματος) περιέχει διανύσματα διάστασης m των οποίων τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί (δείκτες των βάσεων της Simplex) $u=(i_1, i_2, ..., i_m)$ με $1 \le i_j \le m$, $j=1,2,...,m$.

- Δύο διαφορετικοί κόμβοι $u_1=(i_1, i_2, ..., i_m)$ και $u_2=(k_1, k_2, ..., k_m)$ απέχουν μεταξύ τους κατά μία απόσταση $d \le m$ αν d ακριβώς στοιχεία του u_2 είναι διαφορετικά από αυτά του u_1. Οι u_1 και u_2 είναι γειτονικές εφόσον έχουν $d=1$.

- Ένα τόξο $(u_1, u_2) \in U$ αν και μόνο αν u_1 και u_2 είναι γειτονικοί. Αν $M \subset V$, θέτουμε ως Γ(Μ) το σύνολο που παίρνουμε από την πρόσθεση στο Μ όλων των κόμβων που έχουν ένα γειτονικό κόμβο στο σύνολο Μ. Με άλλα λόγια, οι γειτονικοί κόμβοι του u_i απαρτίζουν το σύνολο $\Gamma(u_i)$.

Το πρόβλημα της αναζήτησης όλων των κόμβων ενός γραφήματος (V,U) τίθεται πλέον διαφορετικά. Αρκεί να βρούμε ένα 'μονοπάτι' που περνάει από όλους τους κόμβους ενός γραφήματος χωρίς να χρειάζεται να κρατάμε στον υπολογιστή, παρά ένα και μοναδικό πίνακα Simplex, προκειμένου να παράξουμε τους νέους κόμβους. (M.Manas and J.Nedoma, 1968)

Οι Manas-Nedoma το 1968 μας έδωσαν ένα αλγόριθμο του οποίου σκοπός είναι η πραγματοποίηση ενός '**περιπάτου**' μέσα στο γράφημα (V,U) που θα έχει δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες:

1) να αποφεύγει την αναπαραγωγή (εφόσον αυτό είναι δυνατό) λύσεων που έχουν ήδη υπολογιστεί,
2) να κρατάει στη μνήμη του υπολογιστή ένα και μοναδικό πίνακα Simplex.

Ο αλγόριθμος, που μας δίνει τη δυνατότητα εύρεσης όλων των κόμβων του συνεκτικού γραφήματος δουλεύει ως ακολούθως:

Ξεκινάμε από ένα αρχικό κόμβο - λύση (u_o) που δεν είναι άλλη από τη βέλτιστη λύση του γραμμικού μας προγράμματος και κατασκευάζουμε δύο πεπερασμένες ακολουθίες συνόλων που περιέχουν κόμβους του γραφήματος.

Η πρώτη ακολουθία συνόλων (R_1, R_2, ..., R_s) περιλαμβάνει τους κόμβους που έχουν ήδη υπολογιστεί (με τον όρο «υπολογισμό κόμβων» εννοούμε τον καθορισμό των συντεταγμένων των αντίστοιχων διανυσμάτων των βασικών δυνατών λύσεων του γραμμικού μας προγράμματος).

Η δεύτερη ακολουθία συνόλων (W_1, W_2, ..., W_s) περιλαμβάνει τους κόμβους που δεν έχουμε ακόμα υπολογίσει αλλά που μπορούν να υπολογιστούν ξεκινώντας από ένα ή περισσότερους κόμβους που ανήκουν στο σύνολο R_s πραγματοποιώντας μία και μόνη επανάληψη της μεθόδου Simplex.

Η κατασκευή των συνόλων R και W γίνεται με τον παρακάτω τρόπο:

Θέτουμε $R_1=u_o$ και $W_1=\Gamma(u_o)-u_o$ όπου $\Gamma(u_o)$ το σύνολο των κόμβων που γειτονεύουν με τον κόμβο - λύση u_o. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα κόμβο u_1 από το σύνολο W_1 και τον υπολογίζουμε.

Αμέσως μετά θέτουμε $R_2=u_o\cup u_1$ και $W_2=W_1\cup\Gamma(u_1)-R_2$.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε κατασκευάσει τα σύνολα R_s και W_s και ότι $W_s\neq 0$ για s=1,2,...,k. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τα σύνολα R_{k+1} και W_{k+1} ως ακολούθως: Αν u_{k-1} είναι ο κόμβος που συμπεριλήφθηκε τελευταία στο R_k, ελέγχουμε αν υπάρχει κόμβος στο W_k ο οποίος είναι γειτονικός του u_{k-1}. Αν υπάρχει τέτοιος, έστω ο u_k, τον επιλέγουμε, τον υπολογίζουμε και θέτουμε:

$$R_{k+1}=R_k\cup u_k \quad (\text{I.5.α})$$

και $$W_{k+1}=W_k\cup\Gamma(u_k)-R_{k+1} \quad (\text{I.5.β})$$

Αν δεν υπάρχει τέτοιος κόμβος στο W_k, ελέγχουμε αν υπάρχει κόμβος στο W_k που απέχει από τον u_{k-1} απόσταση d=2, αν όχι, ελέγχουμε για κόμβο με d=3 κ.ο.κ.. Συνεχίζοντας πρέπει να βρούμε ένα κόμβο με απόσταση $d\leq m$, όπου m η διάσταση της βάσης της Simplex. Επιλέγουμε αυτό τον κόμβο και υπολογίζουμε τα R_{k+1} και W_{k+1} σύμφωνα με τις σχέσεις (I.5.α) και (I.5.β).

Αναπόφευκτα μετά από την εκτέλεση ενός πεπερασμένου αριθμού βημάτων θα φτάσουμε στο σημείο, όπου για το σύνολο W_s θα ισχύει $W_s=\varnothing$. Ισχύει η ακόλουθη πρόταση: Αν $W_s=\varnothing$ τότε $R_k=V$ (δηλαδή έχουμε υπολογίσει τις συντεταγμένες όλων των διανυσμάτων των πιθανών δυνατών βασικών λύσεων).

<u>Απόδειξη της πρότασης:</u> Το γράφημα Γ είναι συνεκτικό (δηλαδή μπορούμε πάντα να βρούμε 'μονοπάτι' από τον κόμβο u_1 στον u_2, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex σε ένα γραμμικό πρόγραμμα, που έχει ως βέλτιστη λύση ένα διάνυσμα που αντιστοιχεί στον κόμβο u_2, ξεκινώντας από μία αρχική λύση, ένα διάνυσμα που αντιστοιχεί στον κόμβο u_1). Αυτό ισοδυναμεί με τη δήλωση ότι δεν υπάρχουν δύο μη κενά σύνολα M, N τέτοια ώστε $M\cup N=V$ και

$$(\Gamma(M)\cap N)\cup(M\cap\Gamma(N))=\varnothing \qquad (I.5.\gamma)$$

Από τη διαδικασία κατασκευής των συνόλων W_k και R_k έχουμε:

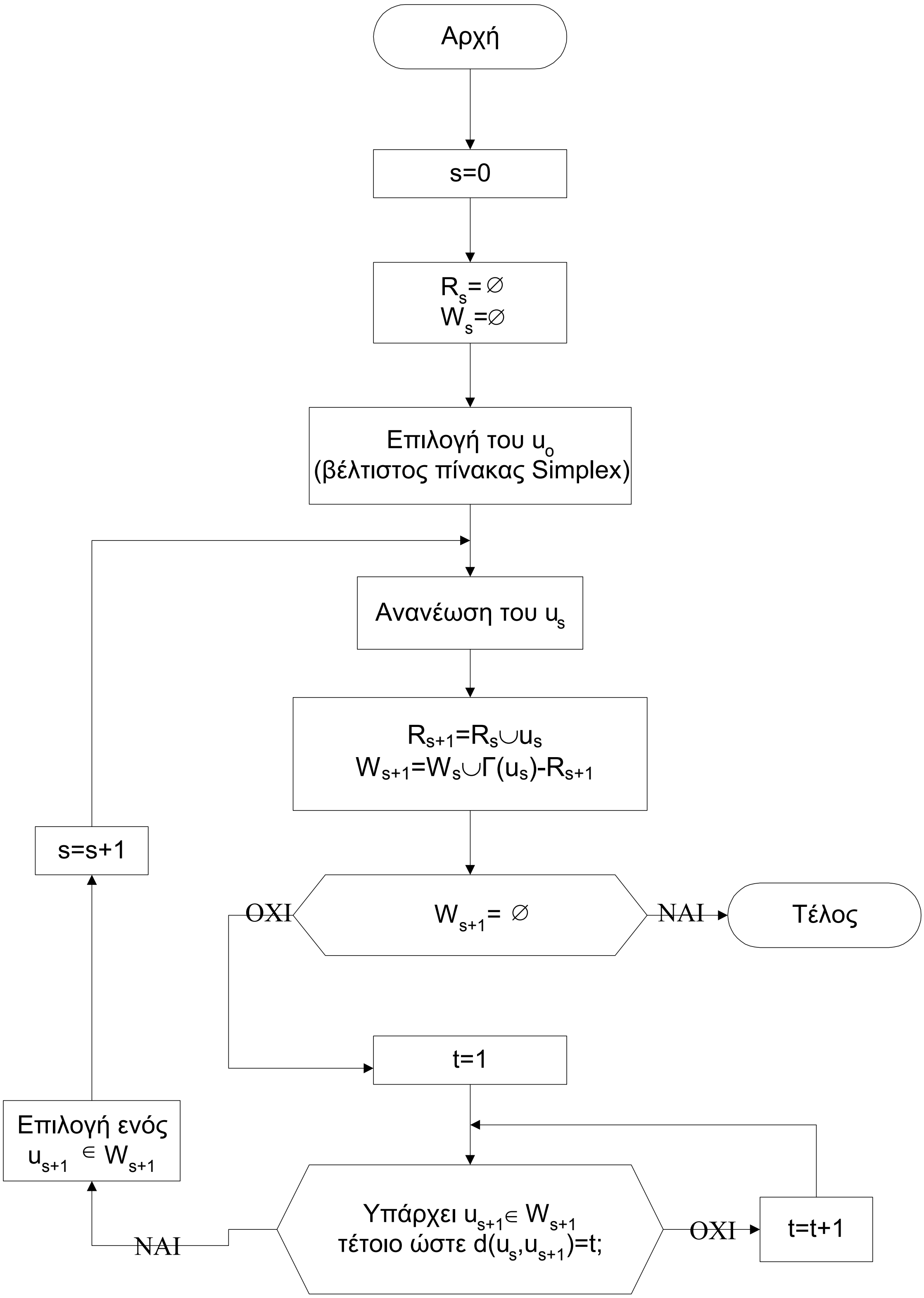
$$W_k=\bigcup_{j=o}^{k-1}\Gamma\left(u_j\right)-\bigcup_{j=0}^{k-1}u_j=\Gamma\left(R_k\right)-R_k$$

(I.5.δ) όπου $\Gamma(R_k)$ το σύνολο των κόμβων που γειτονεύουν με τους κόμβους του συνόλου R_k και επειδή $R_k\subset\Gamma(R_k)$, $W_k=\varnothing$ σημαίνει ότι $\Gamma(R_k)=R_k$.

Έτσι έχουμε $\Gamma(R_k)\cap(V-R_k)=\varnothing$ και $\Gamma(V-R_k)\cap R_k=\varnothing$, και θέτουμε προς στιγμή $M=R_k$ και $N=V-R_k$, οπότε ισχύει για τα δύο αυτά σύνολα $M\cup N=V$ και η σχέση (I.5.γ).

Από τη στιγμή που $R_k\neq\varnothing$ και το Γ είναι συνεκτικό γράφημα πρέπει να ισχύει: $V-R_k=0\Rightarrow V=R_k$.(M.Manas and J.Nedoma, 1968)

Στο σχήμα Σχ.I.5.2 παρουσιάζεται το λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου των Manas-Nedoma.(J.Siskos, 1984)



Σχ. Ι.5.2

Ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων της Simplex που πρέπει να πραγματοποιήσουμε προκειμένου να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma είναι σαφώς μικρότερος, συγκρινόμενος με το συνολικό αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται κατά την εφαρμογή της μεθόδου του Tarry. Για ένα γραμμικό πρόγραμμα, έστω το ΓΠ Ι.1.1, με r βασικές δυνατές λύσεις, m περιορισμούς και n κύριες μεταβλητές απόφασης (l=n+m οι συνολικές μεταβλητές απόφασης όπου έχουμε προσθέσει και m μεταβλητές απόκλισης, οπότε ο n εκφράζει παράλληλα και των αριθμό των μεταβλητών εκτός βάσης), η μέθοδος του Tarry χρειάζεται ακριβώς n×r επαναλήψεις της Simplex ώστε να ολοκληρωθεί. Αντίθετα στον αλγόριθμο που εξετάζουμε ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιούμε κυμαίνεται από r μέχρι m×r, στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι δεν έχουμε εκφυλισμένες λύσεις. (J.Siskos, 1984)

Ο τύπος των υπερπολυέδρων όπου ο αριθμός των επαναλήψεων είναι ακριβώς r (Hamiltonian μονοπάτι μέσα στο γράφημα) δεν έχει ακόμα οριστεί από τους θεωρητικούς. Hamiltonian μονοπάτι σε ένα γράφημα είναι το 'μονοπάτι' εκείνο που μας επιτρέπει να επισκεφτούμε όλους τους κόμβους από μία και μοναδική φορά τον κάθε ένα. (T.H.Mattheis and S.D.Rubin, 1980).

Από άποψη υπολογιστικού φόρτου ο αλγόριθμος των Manas-Nedoma χρειάζεται κάθε στιγμή να υπάρχει αποθηκευμένος ένας πίνακας Simplex και ένας πίνακας διαστάσεων r×m για τα σύνολα R_s και W_s. (M.Manas and J.Nedoma, 1968)

Επίσης ο αλγόριθμος στηρίζεται στην αποτελεσματική διαχείριση μιας λίστας αυξανόμενου μεγέθους. Ο αριθμός των στοιχείων της λίστας θα αυξάνεται μέχρι να γίνει ίσος με το συνολικό αριθμό των κορυφών του υπερπολυέρδου. (T.H.Mattheis and S.D.Rubin, 1980)

Συνολικά χρειάζεται να υπολογίσουμε r πίνακες Simplex, όπου r ο αριθμός των βασικών δυνατών λύσεων του Γ.Π. Ι.1.1 . (J.Siskos, 1984)

I.5.2. Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα

Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι το παράδειγμα Γ.Π.Ι.4.1 για να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο θα θεωρήσουμε k=20, θα εισάγουμε το νέο περιορισμό $3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 \geq 56 \Rightarrow$

$3x_1+4x_2+5x_3+6x_4-Y=56$ και θα θέσουμε: $x_1^- = x_5$, $x_2^- = x_6$ και $Y = x_7$. Θέτουμε ακόμα, s=0, $R_s=\varnothing$ και $W_s=\varnothing$.

Ας θεωρήσουμε ως αρχική λύση τη βέλτιστη λύση του γ.π., $u_o=\{(2,4,7)\}$ με z*=76. Ο πίνακας Ι.5.1 είναι ο πίνακας Simplex που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση, όπου έχουμε προσθέσει μια γραμμή, που εκφράζει το νέο περιορισμό, με στοιχεία τις αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων (Δ_j) του βέλτιστου πίνακα.

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$
x_2	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
x_4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
x_7	1	0	1/3	0	4	2/3	1	20

Πίνακας Ι.5.1

Θέτουμε $R_1=\{(2,4,7)\}$ και βρίσκουμε από τον Πίνακα Ι.5.1 τις λύσεις που μπορούν να προκύψουν πραγματοποιώντας μία και μόνη αλλαγή βάσης, βρίσκουμε δηλαδή τους γειτονικούς κόμβους. Οπότε έχουμε:

$\Gamma(u_o)=\{(1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$

και ακόμα

$W_1=W_o\cup\Gamma(u_o)-u_o=\{(1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$.

Στο W_1 υπάρχουν γειτονικές λύσεις στη u_o (d=1) και μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα μία από αυτές για να συνεχίσουμε τον αλγόριθμο. Θα προτιμήσουμε όμως τις επόμενες λύσεις κάθε φορά σύμφωνα με την ταξινόμηση που έχουν αυτές στον Πίνακα Ι.4.6. Οπότε επιλέγουμε ως επόμενη λύση τον κόμβο $u_1=(2,3,7)$ και την υπολογίζουμε.

Θέτουμε s=1. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$
x_2	1	1	0	-1/2	1	-1/2	0	15

x_3	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
x_7	1	0	0	-1/2	4	1/2	1	19

Πίνακας I.5.2

Και έχουμε: $R_2=R_1\cup\{u_1\}=\{(2,4,7), (2,3,7)\}$

$\Gamma(u_1)=\{(1,3,7), (2,4,7), (2,3,5), (2,6,7)\}$

$W_2=W_1\cup\Gamma(u_1)-R_2=\{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,7)\}$

Επιλέγουμε $u_2=\{(2,6,7)\}$.

Θέτουμε s=2. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$
x_2	1	1	1	1	1	0	0	18
x_6	0	0	2	3	0	1	0	6
x_7	1	0	-1	-2	4	0	1	16

Πίνακας I.5.3

Και έχουμε: $R_3=R_2\cup\{u_2\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7)\}$

$\Gamma(u_2)=\{(2,6,1), (2,3,7), (2,4,7), (2,6,5)\}$

$W_3=W_2\cup\Gamma(u_2)-R_3=\{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,1), (2,6,5)\}$

Επιλέγουμε $u_3=\{(2,6,1)\}$.

Θέτουμε s=3. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$

x_2	0	1	2	3	-3	0	-1	2
x_6	0	0	2	3	0	1	0	6
x_1	1	0	-1	-2	4	0	1	16

Πίνακας Ι.5.4

Και έχουμε: $R_4=R_3\cup\{u_3\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1)\}$

$\Gamma(u_3)=\{(3,6,1), (4,6,1), (2,6,5), (2,6,7)\}$

$W_4=W_3\cup\Gamma(u_3)-R_4=\{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,5), (3,6,1), (4,6,1)\}$

Επιλέγουμε $u_4=\{(2,6,5)\}$.

Θέτουμε s=4. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$
x_2	3/4	1	5/4	3/2	0	0	-1/4	14
x_6	0	0	2	3	0	1	0	6
x_5	1/4	0	-1/4	-1/2	1	0	1/4	4

Πίνακας Ι.5.5

Και έχουμε: $R_5=R_4\cup\{u_4\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5)\}$

$\Gamma(u_4)=\{(2,6,1), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,7)\}$

$W_5=W_4\cup\Gamma(u_4)-R_5=\{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (3,6,1), (4,6,1)\}$

Επιλέγουμε $u_5=\{(2,4,5)\}$.

Θέτουμε s=5. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x_B}$
x_2	3/4	1	1/4	0	0	-1/2	-1/4	11
x_4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
x_5	1/4	0	1/12	0	1	1/6	1/4	5

Πίνακας Ι.5.6

Και έχουμε: $R_6=R_5\cup\{u_5\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5)\}$

$\Gamma(u_5)=\{(1,4,5), (2,3,5), (2,6,5), (2,4,7)\}$

$W_6=W_5\cup\Gamma(u_5)-R_6=\{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε $u_6=\{(2,3,5)\}$.

Θέτουμε s=6. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x_B}$
x_2	3/4	1	0	-3/8	0	-5/8	-1/4	41/4
x_3	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
x_5	1/4	0	0	-1/8	1	1/8	1/4	19/4

Πίνακας Ι.5.7

Και έχουμε: $R_7=R_6\cup\{u_6\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5)\}$

$\Gamma(u_6)=\{(1,3,5), (2,4,5), (2,6,5), (2,3,7)\}$

$W_7=W_6\cup\Gamma(u_6)-R_7=\{(1,3,7), (1,4,7), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5), (1,3,5)\}$

Επιλέγουμε $u_7=\{(1,3,5)\}$.

Θέτουμε s=7. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$
x_1	1	4/3	0	-1/2	0	-5/6	-1/3	41/3
x_3	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
x_5	0	-1/3	0	0	1	1/3	1/3	4/3

Πίνακας Ι.5.8

Και έχουμε: $R_8=R_7\cup\{u_7\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5)\}$

$\Gamma(u_7)=\{(2,3,5), (1,4,5), (1,3,6), (1,3,7)\}$

$W_8=W_7\cup\Gamma(u_7)-R_8=\{(1,3,7), (1,4,7), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε $u_8=\{(1,3,7)\}$.

Θέτουμε s=8. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$
x_1	1	1	0	-1/2	1	-1/2	0	15
x_3	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
x_7	0	-1	0	0	3	1	1	4

Πίνακας Ι.5.9

Και έχουμε: $R_9=R_8\cup\{u_8\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7)\}$

$\Gamma(u_8)=\{(2,3,7), (1,4,7), (1,3,5), (1,3,6)\}$

$W_9=W_8\cup\Gamma(u_8)-R_9=\{(1,4,7), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε $u_9=\{(1,4,7)\}$.

Θέτουμε s=9. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$
x_1	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
x_4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
x_7	0	-1	0	0	3	1	1	4

Πίνακας I.5.10

Και έχουμε: $R_{10}=R_9 \cup \{u_9\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7)\}$

$\Gamma(u_9)=\{(2,4,7), (1,3,7), (1,4,5), (1,4,6)\}$

$W_{10}=W_9 \cup \Gamma(u_9)-R_{10}=\{(3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε $u_{10}=\{(1,4,5)\}$.

Θέτουμε s=10. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$
x_1	1	4/3	1/3	0	0	-2/3	-1/3	44/3
x_4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
x_5	0	-1/3	0	0	1	1/3	1/3	4/3

Πίνακας I.5.11

Και έχουμε: $R_{11}=R_{10} \cup \{u_{10}\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7), (1,4,5)\}$

$\Gamma(u_{10})=\{(2,4,5), (1,3,5), (1,4,6), (1,4,7)\}$

$W_{11}=W_{10} \cup \Gamma(u_{10})-R_{11}=\{(3,6,1), (4,6,1)\}$

Επιλέγουμε $u_{11}=\{(1,4,6)\}$.

Θέτουμε s=11. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x_B}$
x_1	1	2/3	1/3	0	2	0	1/3	52/3
x_4	0	1/3	2/3	1	-1	0	-1/3	2/3
x_6	0	-1	0	0	3	1	1	4

Πίνακας Ι.5.12

Και έχουμε: $R_{12}=R_{11}\cup\{u_{11}\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7), (1,4,5), (1,4,6)\}$

$\Gamma(u_{11})=\{(1,2,6), (1,3,6), (1,4,5), (1,4,7)\}$

$W_{12}=W_{11}\cup\Gamma(u_{11})-R_{12}=\{(3,6,1)\}$

Επιλέγουμε $u_{12}=\{(1,3,6)\}$.

Θέτουμε s=12. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x_B}$
x_1	1	1/2	0	-1/2	5/2	0	1/2	17
x_3	0	1/2	1	3/2	-3/2	0	-1/2	1
x_6	0	-1	0	0	3	1	1	4

Πίνακας Ι.5.13

Και έχουμε: $R_{13}=R_{12}\cup\{u_{12}\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7), (1,4,5), (1,4,6), (1,3,6\}$

$\Gamma(u_{12})=\{(1,2,6), (1,4,6), (1,3,5), (1,3,7)\}$

$W_{13}=W_{12}\cup\Gamma(u_{12})-R_{12}=\{\varnothing\}$

Οπότε ο αλγόριθμος περατώνεται.

I.5.3. Κριτική του Αλγορίθμου

Στο παράδειγμα που παραθέσαμε, το 'μονοπάτι' που ακολουθήσαμε προκειμένου να επισκεφτούμε όλους τους κόμβους του γραφήματος είναι ένα 'Hamiltonian μονοπάτι' αφού δε χρειάστηκε να επισκεφτούμε για δεύτερη φορά ένα κόμβο που ήδη είχαμε υπολογίσει.

Οπότε πραγματοποιήσαμε s=12 επαναλήψεις του αλγορίθμου και χρειάστηκε να υπολογίσουμε 12 διαφορετικούς πίνακες Simplex. Παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος αλγόριθμος ενώ κάνει οικονομία μνήμης στον υπολογιστή αφού χρειάζεται η αποθήκευση ενός και μόνου πίνακα Simplex σε κάθε επανάληψη του, υπάρχει όμως μεγάλος υπολογιστικός φόρτος προκειμένου να υπολογιστούν s πίνακες Simplex όπου $r \leq s \leq r \times m$.

I.6. Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση

I.6.1. Περιγραφή του Αλγορίθμου

Σύμφωνα με όσα παρουσιάσαμε στα Κεφάλαια I.4 και I.5, σχετικά με τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex και τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma, θα προχωρήσουμε στο παρόν κεφάλαιο στην παρουσίαση μιας ρεαλιστικής προσέγγισης του προβλήματος της μεταβελτιστοποίησης των γραμμικών προγραμμάτων.

Ο όρος '**ρεαλιστική προσέγγιση**' ισοδυναμεί με την εφαρμογή ενός αλγορίθμου εύρεσης των πολλαπλών ή των ημιβέλτιστων λύσεων ενός γραμμικού προγράμματος, που θα συνοδεύεται: i)από ορθή διαχείριση της μνήμης του υπολογιστή, ii)από τον περιορισμό του όγκου των απαιτούμενων υπολογισμών και iii)από την εύρεση, αν όχι όλων, τότε όσο το δυνατόν περισσότερων πολλαπλών ή ημιβέλτιστων λύσεων.

Όπως σχολιάσαμε και στο Κεφάλαιο I.4 το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex είναι οι μεγάλες απαιτήσεις σε μνήμη ώστε να αποθηκεύονται στον υπολογιστή όλοι οι πίνακες Simplex που παράγονται κατά την εκτέλεση της πρώτης φάσης της μεθόδου. Από την άλλη μεριά η εφαρμογή του αλγορίθμου των Manas-Nedoma απαιτεί την πραγματοποίηση μεγάλου αριθμού υπολογισμών.

Βασική απαίτηση των αναλυτών, κυρίως γραμμικών προγραμμάτων μεγάλων διαστάσεων είναι η εξαντλητική αναζήτηση όλων των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων στον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Ο αλγόριθμος που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια έχει σα βάση του τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex ελαττώνοντας όμως τις απαιτήσεις σε μνήμη στο ελάχιστο, αφού χρειάζεται σε κάθε επανάληψη του η αποθήκευση ενός και μοναδικού πίνακα Simplex. Παράλληλα η εφαρμογή του αλγορίθμου, όπως θα δείξουμε, απαιτεί σαφώς μικρότερο αριθμό υπολογισμών σε σύγκριση με τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma.

Έτσι πετυχαίνουμε ταχύτερη αναζήτηση των μεταβέλτιστων λύσεων, ενώ παράλληλα ελαττώνεται η πιθανότητα μη εύρεσης όλων των λύσεων σε σύγκριση με τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex, η αναζήτηση βασικών δυνατών λύσεων συνεχίζεται και μετά τη στιγμή που η μεταβλητή Y (βλ. Σχέση (Ι.2.α)) βγαίνει εκτός βάσης, δηλαδή όταν $z=z^*-k$.

Ο αλγόριθμος που προτείνουμε εκτελείται ως ακολούθως:

Ξεκινάμε από τον βέλτιστο πίνακα Simplex που αντιστοιχεί στην λύση u_o^*. Η λύση αυτή αποτελεί το μοναδικό στοιχείο του συνόλου $R_s=R_o$. Το R_o είναι το πρώτο σύνολο από μία ακολουθία συνόλων (R_o, R_1, R_2,....) που περιλαμβάνει τις λύσεις που έχουν ήδη υπολογιστεί. Στο βέλτιστο πίνακα Simplex προσθέτουμε μία νέα γραμμή που αντιστοιχεί στον περιορισμό $z\text{-}Y= z^*-k$ όπου k μία θετική ποσότητα που εκφράζει την παραχώρηση στην οποία είναι διατεθειμένος να προχωρήσει ο αποφασίζων, σύμφωνα με το Κεφάλαιο Ι.2. Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει σύμφωνα με τα παραπάνω τον πίνακα s=0.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις γειτονικές βασικές δυνατές λύσεις από τον πίνακα s και οι οποίες αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου W_s που περιλαμβάνει τις λύσεις εκείνες που δεν έχουμε ακόμα υπολογίσει αλλά που μπορούν να υπολογιστούν ξεκινώντας από τον πίνακα s πραγματοποιώντας μία και μόνη επανάληψη του αλγορίθμου Simplex. Με τον όρο 'υπολογίζουμε' εννοούμε ότι καθορίζουμε τις συντεταγμένες των αντίστοιχων διανυσμάτων των βασικών δυνατών λύσεων του γραμμικού μας προγράμματος. Κάθε λύση που υπολογίζουμε την αφαιρούμε από το σύνολο W_s και την προσθέτουμε στο σύνολο R_s. Μετά από ορισμένο αριθμό επαναλήψεων θα έχουμε υπολογίσει όλες τις λύσεις του συνόλου W_s, οπότε το σύνολο W_s θα είναι κενό ($W_s=\emptyset$).

Τότε επιλέγουμε από τις ήδη υπολογισμένες λύσεις εκείνη την οποία μας δίνει την μεγαλύτερη τιμή z και για την οποία δεν έχουμε υπολογίσει ακόμα τον πίνακα Simplex που της αντιστοιχεί. Αν αυτή η λύση είναι γειτονική του πίνακα s υπολογίζουμε τον πίνακα s+1 εισάγοντας στη βάση του πίνακα s το διάνυσμα που αντιστοιχεί στη μεταβλητή εκείνη, που δεν περιέχεται στη λύση u_s, αλλά περιέχεται στη γειτονική της λύση που έχουμε ήδη επιλέξει.

Σε περίπτωση που δεν είναι γειτονική η συγκεκριμένη λύση, πραγματοποιούμε τις απαραίτητες αλλαγές βάσεων μέχρι να υπολογίσουμε τον πίνακα s+1 που θα αντιστοιχεί στη λύση που επιλέξαμε.

Ο αλγόριθμος περατώνεται εφόσον μετά τον υπολογισμό κάποιου πίνακα s+1 διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχουν κάποιες γειτονικές λύσεις που να μην έχουμε ήδη υπολογίσει, έχοντας όμως προηγουμένως ήδη υπολογίσει όλες τις λύσεις για τις οποίες $z>z^*-k$, δηλαδή λύσεις στις οποίες περιέχεται η μεταβλητή απόκλισης Y.

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην εκτέλεση του αλγορίθμου θα πρέπει να ορίσουμε κάποια μεγέθη σε αντιστοιχία με τα μεγέθη που ορίσαμε στο Κεφάλαιο I.5.

1) u_s: Η λύση που αντιστοιχεί στον πίνακα Simplex με δείκτη s.

2) u_{sj}: Οι λύσεις που γειτονεύουν με τη λύση u_s. Με τον όρο 'γειτονεύουν' εννοούμε ότι μπορούν να υπολογιστούν ξεκινώντας από τον πίνακα Simplex s εκτελώντας ένα και μόνο βήμα του αλγορίθμου Simplex. Οι u_{sj} είναι διανύσματα διάστασης m+1 των οποίων τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί (δείκτες των διανυσμάτων των βάσεων της Simplex). $u_{sj}=(i_1, i_2, ..., i_m, i_{m+1})$ με $1\leq i_j\leq m+1$, $j=1,2,...,m,m+1$.

3) vu_{sj}: Το διάνυσμα των συντεταγμένων της u_{sj}.

4) R_s: Το σύνολο των λύσεων u_{sj} που έχουμε ήδη υπολογίσει μέχρι και τη στιγμή παραγωγής του πίνακα Simplex με δείκτη s.

5) N_s: Το σύνολο των τιμών x^s_{Bm+n+1} για κάθε u_{sj}, εφόσον η x_{Bm+n+1} είναι βασική μεταβλητή. (Δηλ. για τις u_{usj} όπου $x_{Bm+n+1} \in u_{sj}$.)

6) K_s: Το σύνολο των λύσεων u_{sj} στις οποίες η μεταβλητή x_{Bm+n+1} δεν είναι βασική. Κάθε φορά που υπολογίζουμε ένα νέο πίνακα το K_s γίνεται κενό ($K_s=\emptyset$)

7) $\Gamma(u_s)$: Το σύνολο των λύσεων που γειτονεύουν με τη λύση u_s.

8) $W(u_s)$: Το σύνολο των λύσεων που γειτονεύουν με τη λύση u_s και δεν έχουμε ακόμα υπολογίσει.

9) d: Η απόσταση όπως ακριβώς την ορίσαμε στο Κεφάλαιο Ι.5.

10) Y_{sj}: Η τιμή της μεταβλητής απόκλισης Y που αντιστοιχεί στη λύση u_{sj}.

Στο σχήμα Σχ. Ι.6.1 παρουσιάζεται το λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου

Πιο συγκεκριμένα ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Έστω το παρακάτω γ.π. που οριοθετείται από το παρακάτω υπερπολύεδρο:

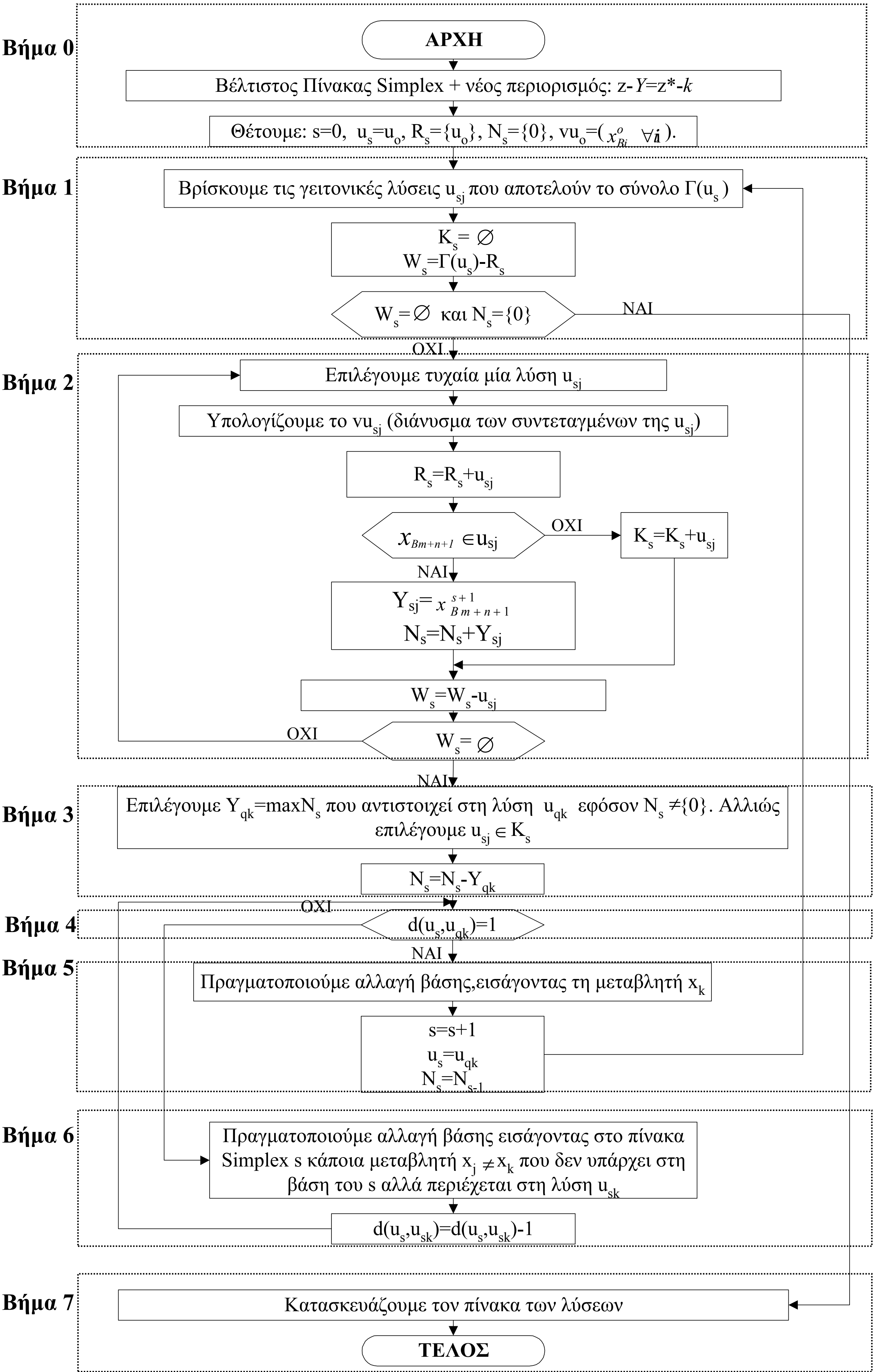
$$\text{ΥΠ Ι.1.2} \quad \begin{cases} \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} \ge z^* - k \\ \boldsymbol{x} \ge 0 \end{cases}$$

όπου $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$ είναι πίνακες διαστάσεων m×n, n×1, m×1 και n×1 αντίστοιχα.

Όταν το k είναι θετικός αριθμός το ΥΠ Ι.1.2 οριοθετεί τις ημιβέλτιστες λύσεις ενός γ.π. τύπου Γ.Π.Ι.1.1. Όταν k=0 το ΥΠ Ι.1.2 οριοθετεί τις πολλαπλές βέλτιστες λύσεις. Έστω ακόμα ο πίνακας Simplex της βέλτιστης λύσης του Γ.Π.Ι.1.1:

Βάση	**Μη Βασικές Μεταβλητές**				**Βασικές Μεταβλητές**								**Τιμές Βασικών**
x_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0		x_{B1}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	a_{i1}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0		x_{Bi}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_r	a_{r1}	$\cdots$	a_{rj}	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0		x_{Br}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1		x_{Bm}
Οριακά Καθαρά Εισοδήματα	Δ_1	$\cdots$	Δ_j	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0		z=z*

Πίνακας Ι.6.1


Βήμα 0
ΑΡΧΗ
Βέλτιστος Πίνακας Simplex + νέος περιορισμός: z-Y=z*-k
Θέτουμε: s=0, $u_s=u_o$, $R_s=\{u_o\}$, $N_s=\{0\}$, $vu_o=(x^o_{Bi}\ \forall i)$.
Βήμα 1
Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις u_{sj} που αποτελούν το σύνολο $\Gamma(u_s)$
$K_s=\varnothing$
$W_s=\Gamma(u_s)-R_s$
$W_s=\varnothing$ και $N_s=\{0\}$
ΝΑΙ
ΟΧΙ
Βήμα 2
Επιλέγουμε τυχαία μία λύση u_{sj}
Υπολογίζουμε το vu_{sj} (διάνυσμα των συντεταγμένων της u_{sj})
$R_s=R_s+u_{sj}$
$x_{Bm+n+1}\in u_{sj}$
ΟΧΙ
$K_s=K_s+u_{sj}$
ΝΑΙ
$Y_{sj}=x^{s+1}_{Bm+n+1}$
$N_s=N_s+Y_{sj}$
$W_s=W_s-u_{sj}$
ΟΧΙ
$W_s=\varnothing$
ΝΑΙ
Βήμα 3
Επιλέγουμε $Y_{qk}=\max N_s$ που αντιστοιχεί στη λύση u_{qk} εφόσον $N_s\neq\{0\}$. Αλλιώς επιλέγουμε $u_{sj}\in K_s$
$N_s=N_s-Y_{qk}$
ΟΧΙ
Βήμα 4
$d(u_s,u_{qk})=1$
ΝΑΙ
Βήμα 5
Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης,εισάγοντας τη μεταβλητή x_k
s=s+1
$u_s=u_{qk}$
$N_s=N_{s-1}$
Βήμα 6
Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης εισάγοντας στο πίνακα Simplex s κάποια μεταβλητή $x_j\neq x_k$ που δεν υπάρχει στη βάση του s αλλά περιέχεται στη λύση u_{sk}
$d(u_s,u_{sk})=d(u_s,u_{sk})-1$
Βήμα 7
Κατασκευάζουμε τον πίνακα των λύσεων
ΤΕΛΟΣ

Σχ. Ι.6.1

<u>Βήμα 0:</u> Ξεκινάμε από τον πίνακα Simplex της βέλτιστης λύσης και προσθέτουμε τον περιορισμό (Ι.2.α), z-Y=z*-k, όπου Y η μεταβλητή απόκλισης.

Για εξυπηρέτησή μας θα θέσουμε: $Y=x_{m+n+1}$ (Ι.6.α), $x_{\bar{i}}=x_{n+1}$ με i=1,...,m όπου $x_{\bar{i}}$ η μεταβλητή απόκλισης του i περιορισμού.

Οι συντελεστές του νέου περιορισμού στον βέλτιστο πίνακα Simplex είναι οι αντίθετες τιμές των καθαρών οριακών εισοδημάτων. (βλ. Κεφ. Ι.2). Οπότε θα ισχύει:

$a^{o}_{m+n+1\,j}=-\Delta_j \quad \forall$ j (Ι.6.β)

Για τα διανύσματα εκτός βάσης θα ισχύει: $a^{o}_{m+n+1}\geq 0$, ενώ για τα διανύσματα της βάσης θα ισχύει: $a^{o}_{m+n+1}=0$.

Ακόμα σύμφωνα με τους Πίνακες (Ι.2.η), (Ι.2.ζ) έχουμε: $x^{o}_{Bm+n+1}=k$ (Ι.6.γ)

$a^{o}_{ij}=a_{ij}$ $\forall$ i,j (Ι.6.δ)

$x^{o}_{Bi}=x_{Bi}$ $\forall$ i,j (Ι.6.ε)

Θέτουμε s=0.

Ο αρχικός πίνακας, με δείκτη s=0, του αλγορίθμου θα είναι ο ακόλουθος:

Βάση	**Μη Βασικές Μεταβλητές**	**Βασικές Μεταβλητές**	**Τιμές Βασικών Μεταβλητών**
x_1	$a^{s}_{11} \quad \cdots \quad a^{s}_{1j} \quad \cdots$	$1 \ \cdots \ 0 \ \cdots \ 0 \ \cdots \ 0 \quad 0$	x^{s}_{B1}
$\vdots$	$\vdots \quad\quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	
x_i	$a^{s}_{i1} \quad \cdots \quad a^{s}_{ij} \quad \cdots$	$0 \ \cdots \ 1 \ \cdots \ 0 \ \cdots \ 0 \quad 0$	x^{s}_{Bi}
$\vdots$	$\vdots \quad\quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	
x_r	$a^{s}_{r1} \quad \cdots \quad a^{s}_{rj} \quad \cdots$	$0 \ \cdots \ 0 \ \cdots \ 1 \ \cdots \ 0 \quad 0$	x^{s}_{Br}
$\vdots$	$\vdots \quad\quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_m	$a^{s}_{m1} \quad \cdots \quad a^{s}_{mj} \quad \cdots$	$0 \ \cdots \ 0 \ \cdots \ 0 \ \cdots \ 1 \quad 0$	x^{s}_{Bm}
x_{m+n+1}	$a^{s}_{m+n+1\,1} \quad \cdots \quad a^{s}_{m+n+1\,j} \quad \cdots$	$0 \ \cdots \ 0 \ \cdots \ 0 \ \cdots \ 0 \quad 1$	x^{s}_{Bm+n+1}

Πίνακας Ι.6.2

Θέτουμε $u_s=u_o=(x_1, ..., x_i, ..., x_{m+n+1})$, $R_s=\{u_o\}$, $N_s=\{0\}$, $vu_o=(x^{o}_{Bi} \quad \forall i)$.

Βήμα 1: Βρίσκουμε τις λύσεις u_{sj} από την ακόλουθη σχέση:

$$u_{sj}=\min_{i}\left\{\frac{x_{Bi}^{s}}{a_{ij}^{s}}, a_{ij}^{s}>0\right\}=\frac{x_{Br}^{s}}{a_{rj}^{s}} \quad \forall j \quad (\text{Ι.6.στ})$$

όπου j οι δείκτες των διανυσμάτων βρίσκονται εκτός βάσης.

Κατασκευάζουμε το σύνολο $\Gamma(u_s)$:

$\Gamma(u_s)=\{u_{sj}, \forall j$ εκτός βάσης$)$

Θέτουμε: $K_s=\varnothing$

$W_s=\Gamma(u_s)-R_s$

Αν $W_s \neq \varnothing$ πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Αν $W_s =\varnothing$ και $N_s=\{0\}$ πηγαίνουμε στο Βήμα 7.

Βήμα 2: Επιλέγουμε τυχαία μία λύση u_{sj} από το σύνολο W_s.

Υπολογίζουμε τη λύση u_{sj}.

$$x_{Bj}^{s+1}=\frac{x_{Br}^{s}}{a_{rj}^{s}} \quad (\text{Ι.6.ζ})$$

$$x_{Bi}^{s+1}=x_{Bi}^{s}-a_{ij}^{s}x_{Bj}^{s+1} \quad \forall i \neq j \quad (\text{Ι.6.η})$$

$vu_{sj}=(x_{Bi}^{s+1} \quad \forall i)$

$R_s=R_s+u_{sj}$

$K_s=K_s+u_{sj}$, για κάθε λύση u_{sj} όπου η μεταβλητή x_{Bm+n+1} δεν είναι βασική, δηλαδή $\forall u_{sj}$ με $m+n+1 \notin u_{sj}$.

Αν η μεταβλητή $x_{Bm+n+1} \in u_{sj}$ τότε $Y_{sj}=x_{Bm+n+1}^{s+1}$ (Ι.6.θ)

$N_s=N_s+Y_{sj}$

Δηλαδή αν η μεταβλητή x_{Bm+n+1} είναι βασική στη συγκεκριμένη λύση τότε αυτή προστίθεται στο σύνολο N_s.

Θέτουμε $W_s=W_s-u_{sj}$

Αν $W_s\neq 0$, επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

Αν $W_s=0$, πηγαίνουμε στο Βήμα 3 για να υπολογίσουμε το νέο πίνακα Simplex.

<u>Βήμα 3:</u> Επιλέγουμε το μέγιστο Y_{sj} από το σύνολο N_s.

$Y_{qk}=\max\{Y_{sj}\ , 0, \forall s, \forall j\}=\max N_s$ (Ι.6.ι)

$Y_{qk}\rightarrow u_{qk}$ από το R_s

Αν τα μέγιστα είναι περισσότερα από ένα επιλέγουμε αυτό το Y_{qk} για το οποίο έχουμε τη μικρότερη απόσταση $d(u_s, u_{qk})$. Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα με την ίδια ελάχιστη απόσταση τότε διαλέγουμε τυχαία.

$N_s=N_s-Y_{qk}$

Αν $\max N_s=0$ τότε επιλέγουμε ένα u_{qk} από το σύνολο K_s για το οποίο έχουμε τη μικρότερη απόσταση $d(u_s, u_{qk})$. Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα με την ίδια ελάχιστη απόσταση τότε διαλέγουμε τυχαία.

<u>Βήμα 4:</u> Αν $d(u_s,u_{qk})=1$ τότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5 αλλιώς, αν $d(u_s,u_{qk})>1$ πηγαίνουμε στο Βήμα 6.

<u>Βήμα 5:</u> Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex s εισάγοντας τη μεταβλητή x_k και απομακρύνοντας την μεταβλητή x_r ώστε να λάβουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Θέτουμε s=s+1

Βάση	**Μη Βασικές Μεταβλητές**	**Βασικές Μεταβλητές**	**Τιμές Βασικών Μεταβλητών**

x_1	a^s_{1l} … a^s_{1j} …	1 … 0 … 0 … 0 0	x^s_{B1}
⋮	⋰ ⋰	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮	
x_i	a^s_{il} … a^s_{ij} …	0 … 1 … 0 … 0 0	x^s_{Bi}
⋮	⋰ ⋰	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮	
x_r	a^s_{rl} … a^s_{rj} …	0 … 0 … 1 … 0 0	x^s_{Br}
⋮	⋰ ⋰	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮
x_m	a^s_{ml} … a^s_{mj} …	0 … 0 … 0 … 1 0	x^s_{Bm}
x_{m+n+1}	$a^s_{m+n+1\,l}$ … $a^s_{m+n+1\,j}$ …	0 … 0 … 0 … 0 1	x^s_{Bm+n+1}

Πίνακας Ι.6.3

Όπου x_r είναι πλέον το x_k. Θέτουμε $u_s=u_{qk}$, $N_s=N_{s-1}$, $R_s=R_{s-1}$ Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

<u>Βήμα 6:</u> Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης εισάγοντας στον πίνακα Simplex s κάποια μεταβλητή $x_j \neq x_k$ η οποία δεν υπάρχει στη βάση του s αλλά περιέχεται στη λύση u_{sk}.

Βάση	**Μη Βασικές Μεταβλητές**	**Βασικές Μεταβλητές**	**Τιμές Βασικών Μεταβλητών**
x_1	a^s_{1l} … a^s_{1j} …	1 … 0 … 0 … 0 0	x^s_{B1}
⋮	⋰ ⋰	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮	
x_i	a^s_{il} … a^s_{ij} …	0 … 1 … 0 … 0 0	x^s_{Bi}
⋮	⋰ ⋰	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮	
x_r	a^s_{rl} … a^s_{rj} …	0 … 0 … 1 … 0 0	x^s_{Br}
⋮	⋰ ⋰	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮
x_m	a^s_{ml} … a^s_{mj} …	0 … 0 … 0 … 1 0	x^s_{Bm}
x_{m+n+1}	$a^s_{m+n+1\,l}$ … $a^s_{m+n+1\,j}$ …	0 … 0 … 0 … 0 1	x^s_{Bm+n+1}

Πίνακας Ι.6.2

$d(u_s,u_{sk})=d(u_s,u_{sk})-1$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 4.

Βήμα 7: Κατασκευάζουμε τον πίνακα των λύσεων. **ΤΕΛΟΣ**

u_{sj}	vu_{sj}	z_{sj}

Όπως παρατηρούμε στο Βήμα 1 όταν το σύνολο W_s των λύσεων u_{sj}, που γειτονεύουν με τη λύση u_s και δεν έχουμε ακόμα υπολογίσει, είναι κενό τότε περατώνεται η διαδικασία αναζήτησης νέων λύσεων και το σύνολο R_s περιλαμβάνει όλες τις λύσεις που έχουμε υπολογίσει.

Σύμφωνα με τη σχέση (Ι.6.ι), όπως και στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex, κάθε φορά παράγω ένα νέο πίνακα Simplex, s+1, που η βάση του αντιστοιχεί σε μία λύση u_{s+1} η οποία είναι κάθε φορά αυτή με την αμέσως μικρότερη τιμή της μεταβλητής x_{m+n+1} από αυτή της u_s.

Αυτή η συνθήκη μας εξασφαλίζει την εύρεση όλων των λύσεων με Y>0 και αυτό αποδεικνύεται αμέσως παρακάτω:

Ο αλγόριθμος έχει ως σημείο εκκίνησης τη λύση u_o με $x_{m+n+1}=k$. Στη συνέχεια σύμφωνα με τη σχέση (Ι.6.ι) βρίσκω τη λύση u_1 με $x_{m+n+1}=Y_{0k}$. Όλες οι άλλες λύσεις u_{sj} που θα υπολογίσουμε στη συνέχεια θα έχουν τιμές της μεταβλητής x_{m+n+1} μικρότερες ή το πολύ ίσες με την τιμή Y_{0k}. Δεν υπάρχει καμία άλλη βασική δυνατή λύση με Y_{sk} ανάμεσα σε k και Y_{0k} γιατί αν υπήρχε μια τέτοια λύση, η βέλτιστη λύση, που είναι και το σημείο εκκίνησης για τον αλγόριθμο, θα μπορούσε να παραχθεί από αυτή τη λύση σε μία ή περισσότερες επαναλήψεις της μεθόδου της Simplex. Αν μπορούσε να παραχθεί σε μία επανάληψη τότε, εκτελώντας την επανάληψη του αλγορίθμου μας σύμφωνα με τη σχέση (Ι.6.ι), ή λύση αυτή θα είχε επιλεγεί. Αν μπορούσε να παραχθεί σε περισσότερες από μία επαναλήψεις, η τελευταία λύση πριν τη βέλτιστη θα είχε τιμή μεγαλύτερη από Y_{ok}. Τότε όμως από αυτή τη λύση η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να παραχθεί σε μία επανάληψη της Simplex και εκτελώντας την αντίστοιχη επανάληψη του αλγορίθμου μας θα βρίσκαμε πρώτα αυτή τη λύση. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θέσουμε ως σημείο εκκίνησης τη λύση με Y_{ok} και συνεχίζοντας με το ίδιο σκεπτικό να αποδείξουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $x_{m+n+1}=Y_{sj}>0$.

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω όταν περατωθεί ο αλγόριθμος τότε θα έχουμε υπολογίσει όλες τις λύσεις u_{sj} με $x_{m+n+1}=Y_{sj}>0$. Παράλληλα έχουμε υπολογίσει και λύσεις u_{sj} με $x_{m+n+1}=0$, δηλαδή λύσεις για τις οποίες η μεταβλητή x_{m+n+1} δεν ανήκει στη βάση και για τις οποίες ισχύει: z=z*-k. Δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι έχουμε βρει όλες αυτές τις λύσεις αλλά σύμφωνα με το Βήμα 4 του αλγορίθμου η αναζήτηση συνεχίζεται και μετά την εύρεση όλων των u_{sj} με $x_{m+n+1}=Y_{sj}>0$ αφού παράγουμε νέους πίνακες Simplex που αντιστοιχούν σε λύσεις με $x_{m+n+1}=0$. Έτσι ο αλγόριθμος που προτείνουμε μας παρέχει τη δυνατότητα εύρεσης περισσοτέρων λύσεων από ότι η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex.

Ι.6.2. Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο στο ίδιο παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε και στα Κεφάλαια Ι.2, Ι.4 και Ι.5 ώστε να είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε στη συνέχεια τα αποτελέσματα.

Το γραμμικό πρόγραμμα είναι το ακόλουθο:

$$\begin{cases} [\max] z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 0x_{\bar{1}} + 0x_{\bar{2}} \\ \qquad\qquad \upsilon.\pi. \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{\bar{1}} = 18 \\ 2x_3 + 3x_4 + x_{\bar{2}} = 6 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,\bar{1},\bar{2} \end{cases}$$

Η βέλτιστη λύση μας δίνει z*=76 και είμαστε διατεθειμένοι να κάνουμε μία παραχώρηση 20 μονάδων (k=20). Οπότε έχουμε το νέο περιορισμό z-Y=z*-k όπου Y η μεταβλητή απόκλισης. Προκειμένου να διευκολυνθούμε στην εφαρμογή του αλγορίθμου θα θέσουμε $x_{\bar{1}} = x_5$, $x_{\bar{2}} = x_6$ και $Y = x_7$.

Ο βέλτιστος πίνακας Simplex του γραμμικού προγράμματος είναι ο ακόλουθος:

c_B	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	x_B
4	2	1	1	1/3	0	1	-1/3	16
6	4	0	0	2/3	1	0	1/3	2
	c_j	3	4	5	6	0	0	
	Δ_j	-1	0	-1/3	0	-4	-2/3	z*= 76

Πίνακας Ι.6.5

όπου Δ_j τα οριακά καθαρά εισοδήματα.

<u>Βήμα 0:</u> Ξεκινάμε από τον πίνακα Simplex Ι.6.5 και προσθέτουμε τον περιορισμό:

z-x_7=z*-$k \Rightarrow x_7$=z-56

Σύμφωνα με τις σχέσεις (Ι.6.β), (Ι.6.γ), (Ι.6.δ), (Ι.6.ε) και με τους πίνακες (Ι.2.η) και (Ι.2.ζ) κατασκευάζω τον ακόλουθο πίνακα Simplex.

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_B
x_2	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
x_4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
x_7	1	0	1/3	0	4	2/3	1	20

Πίνακας Ι.6.6

Θέτουμε u_o=(2,4,7)

$R_o=\{(2,4,7)\}$

$N_o=\{0\}$

$vu_o=(16,2,20)$

<u>Βήμα 1:</u> Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις u_{oj} από τη σχέση (Ι.6.στ) και κατασκευάζουμε το σύνολο $\Gamma(u_o)$:

$\Gamma(u_o)=\{(1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$

Θέτουμε: $K_o=\varnothing$

$W_o=\Gamma(u_o)-R_o=\{(1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$

$W_o\neq\varnothing$, οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση $u_{01}=(1,4,7)$.

Υπολογίζουμε τη λύση u_{01}.

$x_{B1}=16/1=16$

$x_{B4}=2-0\times16=2$

$x_{B7}=20-1\times16=4$

$vu_{01}=(16,2,4)$

$R_o=R_o+u_{01}=\{(2,4,7), (1,4,7)\}$

$K_o=\varnothing$

$x_7 \in$ στη βάση της u_{01} οπότε $Y_{01}=4$ και $N_o=\{ Y_{01}=4, 0\}$

$W_o=\{(2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$

$W_o\neq\varnothing$, οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση $u_{03}=(2,3,7)$.

Υπολογίζουμε τη λύση u_{03}.

x_{B2}=16-1/3×3=15

$x_{B3}=\frac{2}{2/3}=3$

x_{B7}=20-1/3×3=19

vu_{03}=(15,3,19)

$R_o=R_o+u_{03}$={(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7)}

$K_o=\varnothing$

$x_7 \in$ στη βάση της u_{03} οπότε Y_{03}=19 και N_o={ Y_{01}=4, Y_{03}=19, 0}

W_o={(2,4,5), (2,6,7)}

$W_o\neq\varnothing$, οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση u_{05}=(2,4,5).

Υπολογίζουμε τη λύση u_{05}.

x_{B2}=16-5=11

x_{B4}=2-0×5=2

x_{B5}=20/4=5

vu_{05}=(11,2,5)

$R_o=R_o+u_{05}$={(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5)}

K_o={(2,4,5)}

$x_7 \notin$ στη βάση της u_{05}.

W_o={(2,6,7)}

$W_o \neq \emptyset$, οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση u_{06}=(2,6,7).

Υπολογίζουμε τη λύση u_{06}.

x_{B2}=16+1/3×6=18

$x_{B6}=\dfrac{2}{1/3}=6$

x_{B7}=20-2/3×6=16

vu_{06}=(18,6,16)

$R_o=R_o+u_{06}$={(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)}

K_o={(2,4,5)}

$x_7 \in$ στη βάση της u_{03} οπότε Y_{06}=16 και N_o={ Y_{01}=4, Y_{03}=19, Y_{06}=16, 0}

$W_o=\emptyset$, οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 3.

<u>Βήμα 3:</u> Επιλέγουμε το μέγιστο Y_{qj} από το σύνολο N_o.

$Y_{03}=\max N_o$ $\qquad\qquad$ $Y_{03} \rightarrow u_{03}$=(2,3,7)

$N_o=N_o-Y_{03}$={Y_{01}=4, Y_{06}=16, 0}

<u>Βήμα 4:</u> $d(u_o, u_{03})$=1 οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5.

<u>Βήμα 5:</u> Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex s=0 εισάγοντας τη μεταβλητή x_3 και απομακρύνοντας τη μεταβλητή x_4 και λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Θέτουμε: s=0+1=1. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$

x_2	1	1	0	-1/2	1	-1/2	0	15
x_3	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
x_7	1	0	0	-1/2	4	1/2	1	19

Πίνακας Ι.6.7

Θέτουμε: $u_1=u_{03}$

$R_1=R_o=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$

$N_1=N_o=\{Y_{01}=4, Y_{06}=16, 0\}$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

<u>Βήμα 1:</u> Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις u_{1j} από τη σχέση (Ι.6.στ) και κατασκευάζουμε το σύνολο $\Gamma(u_1)$:

$\Gamma(u_1)=\{(1,3,7), (2,4,7), (2,3,5), (2,6,7)\}$

Θέτουμε: $K_1=\varnothing$

$W_1=\{(1,3,7), (2,3,5)\}$

$W_1\neq\varnothing$, οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση $u_{11}=(1,3,7)$.

Υπολογίζουμε τη λύση u_{11}.

$x_{B1}=15/1=15$

$x_{B3}=3-0\times15=3$

$x_{B7}=19-15=4$

$vu_{11}=(11,2,5)$

$R_1=R_1+u_{11}=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7)\}$

$K_1=\varnothing$

$x_7 \in$ στη βάση της u_{11} οπότε $Y_{11}=4$ και $N_1=\{Y_{01}=4, Y_{06}=16, Y_{11}=4, 0\}$

$W_1=\{(2,3,5)\}$

$W_1\neq\varnothing$, οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση $u_{15}=(2,3,5)$.

Υπολογίζουμε τη λύση u_{15}.

$x_{B2}=15-1\times19/4=41/9$

$x_{B3}=3-0\times19/4=3$

$x_{B5}=19/4$

$vu_{15}=(41/9,3,19/4)$

$R_1=R_1+u_{15}=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5)\}$

$K_1=\{(2,3,5)\}$

$x_7 \notin$ στη βάση της u_{11}

$W_1=\varnothing$, οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 3.

<u>Βήμα 3:</u> Επιλέγουμε το μέγιστο Y_{qj} από το σύνολο N_1.

$Y_{06}=\max N_1$ $\qquad\qquad$ $Y_{06}\rightarrow u_{06}=(2,6,7)$

$N_1=N_1-Y_{06}=\{Y_{01}=4, Y_{11}=4, 0\}$

<u>Βήμα 4:</u> $d(u_1, u_{06})=1$ οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5.

<u>Βήμα 5:</u> Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex s=1 εισάγοντας τη μεταβλητή x_6 και απομακρύνοντας τη μεταβλητή x_3 και λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Θέτουμε: s=1+1=2. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$
x_2	1	1	1	1	1	0	0	18
x_6	0	0	2	3	0	1	0	6
x_7	1	0	-1	-2	4	0	1	16

Πίνακας Ι.6.8

Θέτουμε: $u_2=u_{06}$

$R_2=R_1=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5)\}$

$N_2=N_1=\{Y_{01}=4, Y_{11}=4, 0\}$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

<u>Βήμα 1:</u> Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις u_{2j} από τη σχέση (Ι.6.στ) και κατασκευάζουμε το σύνολο $\Gamma(u_2)$:

$\Gamma(u_2)=\{(2,6,1), (2,3,7), (2,4,7), (2,6,5)\}$

Θέτουμε: $K_2=\varnothing$

$W_2=\{(2,6,1), (2,6,5)\}$

$W_2\neq\varnothing$, οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση $u_{21}=(2,6,1)$.

Υπολογίζουμε τη λύση u_{21}.

$x_{B2}=18-1\times16=2$

$x_{B6}=6-0\times16=6$

$x_{B1}=16/1=16$

vu_{21}=(2,6,16)

R_2=R_2+u_{21}={(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1)}

K_2={(2,6,1)}

$x_7 \notin$ στη βάση της u_{21}

W_2={(2,6,5)}

$W_2 \neq \varnothing$, οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση u_{25}=(2,6,5).

Υπολογίζουμε τη λύση u_{25}.

$x_{B2}=18-1\times4=14$

$x_{B6}=6-0\times4=6$

$x_{B1}=16/4=4$

vu_{25}=(14,6,4)

R_2=R_2+u_{25}={(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5)}

K_2={(2,6,1), (2,6,5)}

$x_7 \notin$ στη βάση της u_{25}

$W_2=\varnothing$, οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 3.

<u>Βήμα 3:</u> Επιλέγουμε το μέγιστο Y_{qj} από το σύνολο N_2. Στο σύνολο N_2 έχουμε δύο μέγιστα το Y_{01} και το Y_{11} στα οποία αντιστοιχούν οι λύσεις u_{01}=(1,4,7) και u_{11}=(1,3,7). Παρατηρούμε ότι d(u_2,u_{01})=2 και d(u_2,u_{11})=2. Οπότε επιλέγουμε τυχαία το $Y_{01} \rightarrow u_{11}$=(1,4,7)

N_2=N_2-Y_{01}={Y_{11}=4, 0}

Βήμα 4: d(u_1, u_{01})=2 οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 6.

Βήμα 6: Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex s=2 εισάγοντας τη μεταβλητή x_4 και απομακρύνοντας την μεταβλητή x_6.

Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x_B}$
x_2	1	0	1/3	0	1	-1/3	0	16
x_4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
x_7	1	0	1/3	0	4	2/3	1	20

Πίνακας Ι.6.9

d(u_2,u_{01})=d(u_2,u_{01})-1=1

Πηγαίνουμε στο Βήμα 4.

Βήμα 4: d(u_2, u_{01})=1 οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5.

Βήμα 5: Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex s=2 εισάγοντας τη μεταβλητή x_1 και απομακρύνοντας τη μεταβλητή x_2 και λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Θέτουμε: s=2+1=3.

Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x_B}$
x_1	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
x_6	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
x_7	0	-1	0	0	3	1	1	4

Πίνακας Ι.6.10

Θέτουμε: $u_3=u_{01}$

$R_3=R_2=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5)\}$

$N_3=N_2=\{Y_{11}=4, 0\}$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

<u>Βήμα 1:</u> Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις u_{3j} από τη σχέση (Ι.6.στ) και κατασκευάζουμε το σύνολο $\Gamma(u_3)$:

$\Gamma(u_3)=\{(2,4,7), (1,3,7), (1,4,5), (1,4,6)\}$

Θέτουμε: $K_3=\varnothing$

$W_3=\{(1,4,5), (1,4,6)\}$

$W_3\neq\varnothing$, οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση $u_{35}=(1,4,5)$.

Υπολογίζουμε τη λύση u_{35}.

$x_{B1}=16-1\times4/3=44/3$

$x_{B6}=2-0\times4/3=2$

$x_{B1}=4/3$

$vu_{35}=(44/3,2,4/3)$

$R_3=R_3+u_{35}=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5)\}$

$K_3=\{(1,4,5)\}$

$x_7 \notin$ στη βάση της u_{35}

$W_3=\{(1,4,6)\}$

$W_3 \neq \emptyset$, οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση $u_{36}=(1,4,6)$.

Υπολογίζουμε τη λύση u_{36}.

$x_{B1}=16+1/3\times4=52/3$

$x_{B4}=2-1/3\times4=2/3$

$x_{B6}=4/1=4$

$vu_{36}=(52/3,2/3,4)$

$R_3=R_3+u_{36}=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5), (1,4,6)\}$

$K_3=\{(1,4,5), (1,4,6)\}$

$x_7 \notin$ στη βάση της u_{36}

$W_3=\emptyset$, οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 3.

<u>Βήμα 3:</u> Επιλέγουμε το μέγιστο Y_{qj} από το σύνολο N_3.

$Y_{11}=\max N_3$ $\qquad$ $Y_{11} \rightarrow u_{11}=(1,3,7)$

$N_3=N_3-Y_{11}=\{0\}$

<u>Βήμα 4:</u> $d(u_3, u_{11})=1$ οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5.

<u>Βήμα 5:</u> Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex s=3 εισάγοντας τη μεταβλητή x_3 και απομακρύνοντας τη μεταβλητή x_4 και λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Θέτουμε: s=3+1=4. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x}_B$
x_1	1	1	0	-1/2	1	-1/2	0	15
x_3	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
x_7	0	-1	0	0	3	1	1	4

Πίνακας Ι.6.11

Θέτουμε: $u_4=u_{11}$

$R_4=R_3=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5), (1,4,6)\}$

$N_4=N_3=\{0\}$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

Βήμα 1: Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις u_{4j} από τη σχέση (Ι.6.στ) και κατασκευάζουμε το σύνολο $\Gamma(u_4)$:

$\Gamma(u_4)=\{(2,3,7), (1,4,7), (1,3,5), (1,3,6)\}$

Θέτουμε: $K_4=\varnothing$

$W_4=\{(2,6,1), (2,6,5)\}$

$W_4\neq\varnothing$, οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Βήμα 2: Επιλέγουμε τυχαία τη λύση $u_{45}=(1,3,5)$.

Υπολογίζουμε τη λύση u_{45}.

$x_{B1}=15-1\times4/3=41/3$

$x_{B3}=3-0\times4/3=3$

x_{B5}=4/3

vu_{45}=(41/3,2,4/3)

R_4=R_4+u_{45}={(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5), (1,4,6), (1,3,5)}

K_4={(1,3,5)}

$x_7 \notin$ στη βάση της u_{45}

W_4={(1,3,6)}

$W_4 \neq \varnothing$, οπότε επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

<u>Βήμα 2:</u> Επιλέγουμε τυχαία τη λύση u_{46}=(1,3,6).

Υπολογίζουμε τη λύση u_{46}.

x_{B1}=15+1/2×4=17

x_{B3}=3-1/2×4=1

x_{B6}=4/1=4

vu_{46}=(17,1,4)

R_4=R_4+u_{46}={(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5), (1,4,6), (1,3,5), (1,3,6)}

K_4={(1,3,5), (1,3,6)}

$x_7 \notin$ στη βάση της u_{46}

$W_4 = \varnothing$, οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 3.

<u>Βήμα 3:</u> Επιλέγουμε το μέγιστο Y_{qj} από το σύνολο N_4.

maxN_3=0, οπότε επιλέγουμε τυχαία από το σύνολο την u_{45}=(1,3,5)

Βήμα 4: $d(u_4, u_{45})=1$ οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 5.

Βήμα 5: Πραγματοποιούμε αλλαγή βάσης στον πίνακα Simplex s=4 εισάγοντας τη μεταβλητή x_5 και απομακρύνοντας τη μεταβλητή x_7 και λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Θέτουμε: s=4+1=5. Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\boldsymbol{x_B}$
x_1	1	4/3	0	-1/2	0	-5/6	-1/3	41/3
x_3	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
x_5	0	-1/3	0	0	1	1/3	1/3	4/3

Πίνακας Ι.6.12

Θέτουμε: $u_5=u_{45}$

$R_5=R_4=\{(2,4,7), (1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7), (1,3,7), (2,3,5), (2,6,1), (2,6,5), (1,4,5), (1,4,6), (1,3,5), (1,3,6)\}$

$N_5=N_4=\{0\}$

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

Βήμα 1: Βρίσκουμε τις γειτονικές λύσεις u_{5j} από τη σχέση (Ι.6.στ) και κατασκευάζουμε το σύνολο $\Gamma(u_5)$:

$\Gamma(u_5)=\{(2,3,5), (1,4,5), (1,3,6), (1,3,7)\}$

Θέτουμε: $K_5=\varnothing$

$W_5=\Gamma(u_5)-R_5=\varnothing$

$W_5=\varnothing$ και $N_s=\{0\}$, οπότε πηγαίνουμε στο Βήμα 7.

Βήμα 7: Κατασκευάζουμε τον πίνακα των λύσεων. **ΤΕΛΟΣ**

u_{sj}	vu_{sj}	z_{sj}
u_o=(2,4,7)	vu_o=(16,2,20)	z_o=76
u_{01}=(1,4,7)	vu_{01}=(16,2,4)	z_{01}=60
u_{03}=(2,3,7)	vu_{03}=(15,3,19)	z_{03}=75
u_{05}=(2,4,5)	vu_{05}=(11,2,5)	z_{05}=56
u_{06}=(2,6,7)	vu_{06}=(18,6,16)	z_{06}=72
u_{11}=(1,3,7)	vu_{11}=(15,3,4)	z_{11}=60
u_{15}=(2,3,5)	vu_{15}=(41/9,3,19/4)	z_{15}=56
u_{21}=(2,6,1)	vu_{21}=(2,6,16)	z_{21}=56
u_{25}=(2,6,5)	vu_{25}=(14,6,4)	z_{25}=56
u_{35}=(1,4,5)	vu_{35}=(44/3,2,4/3)	z_{35}=56
u_{36}=(1,4,6)	vu_{36}=(52/3,2/3,4)	z_{36}=56
u_{45}=(1,3,5)	vu_{45}=(41/3,2,4/3)	z_{45}=56
u_{46}=(1,3,6)	vu_{46}=(17,1,4)	z_{46}=56

Ι.6.3. Κριτική του Αλγορίθμου

Το σύνολο R_5 περιλαμβάνει όλες τις σχεδόν βέλτιστες λύσεις u_{sj} για s=0,1,2,3,4 που αντιστοιχούν στα διανύσματα vu_{sj} των συντεταγμένων της κάθε λύσης. Όπως παρατηρούμε από τη διαδικασία εφαρμογής του αλγορίθμου στο παραπάνω παράδειγμα χρειάστηκε να υπολογίσουμε 6 νέους πίνακες Simplex, εκτός του αρχικού, προκειμένου να βρούμε τις 12 νέες λύσεις.

Στην περίπτωση των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων (όπου θέτουμε k=0) υπάρχει κίνδυνος χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο να υπολογίσουμε μικρό αριθμό λύσεων. Ένας τρόπος αποφυγής αυτού του κινδύνου είναι ο μη μηδενισμός του συνόλου K_s κατά την πραγματοποίηση του Βήματος 1 σε κάθε επανάληψη.

Παράλληλα σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου είναι απαραίτητη η διατήρηση στη μνήμη του υπολογιστή ενός και μοναδικού πίνακα Simplex.

Αντίθετα, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma στο ίδιο παράδειγμα χρειάστηκε να υπολογίσουμε 12 νέους πίνακες Simplex, εκτός του αρχικού, προκειμένου να υπολογίσουμε τις 12 νέες λύσεις ενώ σε κάθε επανάληψη χρειάστηκε, ομοίως, η διατήρηση στη μνήμη του υπολογιστή ενός και μοναδικού πίνακα Simplex.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex, στο ίδιο παράδειγμα στο Κεφάλαιο Ι.4, παρατηρήσαμε ότι χρειάστηκε να υπολογίσουμε 4 νέους πίνακες Simplex, εκτός του αρχικού, προκειμένου να βρούμε τις 12 νέες λύσεις αλλά ήταν απαραίτητη και η αποθήκευση των 4 αυτών πινάκων, συν του αρχικού, ώστε να ολοκληρωθεί η μέθοδος.

Ένα ακόμα πλεονέκτημα του αλγόριθμου είναι το γεγονός ότι η αναζήτηση των λύσεων γίνεται βαθμηδόν καθώς κάθε πίνακας s, που υπολογίζεται, αντιστοιχεί σε λύση που μας δίνει κάθε φορά την αμέσως μικρότερη τιμή z της αντικειμενικής συνάρτησης.

Έτσι, δίνεται η δυνατότητα στον αποφασίζοντα να μελετήσει την ευστάθεια της βέλτιστης λύσης ενός γραμμικού προγράμματος για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου k. Ωστόσο και μετά την επιλογή ενός συγκεκριμένου k, ο αποφασίζων θα μπορεί να έχει τη δυνατότητα, κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, να σταματήσει την αναζήτηση νέων λύσεων, αν πραγματοποιώντας συγκεκριμένους ελέγχους με τις ήδη υπολογισμένες λύσεις διαπιστώσει ότι είναι σε θέση να εξάγει τα ζητούμενα συμπεράσματα ως προς την ευστάθεια της λύσης.

Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμος που προτείνουμε ελαττώνει πράγματι τον απαιτούμενο υπολογιστικό φόρτο κατά τη διαδικασία εύρεσης των πολλαπλών ή ημιβέλτιστων λύσεων ενός γραμμικού προγράμματος και παράλληλα δίνει τη δυνατότητα στον αποφασίζοντα να σταματήσει την αναζήτηση νέων λύσεων στο σημείο που επιθυμεί.

Οι Jacquet-Lagreze και Σίσκος πρότειναν το 1982 τη μέθοδο UTA προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα της ανάλυσης συμπεριφοράς καταναλωτή. Πρόκειται για μια μέθοδο μονότονης παλινδρόμησης για την ανάλυση των προτιμήσεων του αποφασίζοντος, που στηρίζεται στη θεωρία της **πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων**. Το μοντέλο αυτό έχει τη δυνατότητα αποτελεσματικού χειρισμού τόσο της ποσοτικής όσο και της ποιοτικής πληροφόρησης μέσα από την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων. Εφαρμόζεται δε όταν το μοντέλο σύνθεσης των κριτηρίων είναι μια προσθετική συνάρτηση χρησιμότητας. Το 1985 οι Σίσκος και Γιαννακόπουλος πρότειναν την UTA* μια βελτιωμένη έκδοση της UTA. (E.Jaquet-Lagreze & J.Siskos, 1982; J.Siskos & D.Yannacopolulos, 1985)

Στην πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων, συνήθως θεωρούμε ένα σύνολο δραστηριοτήτων, έστω A, στο οποίο αντιστοιχίζονται τιμές που προέρχονται από μια συνεπή οικογένεια κριτηρίων έστω $\mathbf{g}=(g_1, g_2, ..., g_n)$. Μία κλασσική επιχειρησιακή τακτική του υπολογισμού ενός μοντέλου καθολικής προτίμησης του αποφασίζοντα μας επιβάλει τη συνάθροιση όλων των κριτηρίων σε ένα και μοναδικό κριτήριο που ονομάζεται συνάρτηση χρησιμότητας.

$U(g)=U((g_1, g_2, ..., g_n)$

Ας ονομάσουμε P την αυστηρή προτιμησιακή σχέση και I την σχέση αδιαφορίας ανάμεσα σε δύο εναλλακτικές δραστηριότητες a και b.

Αν $g(a)=[g_1(a), g_2(a), ..., g_n(a)]$ είναι η πολυκριτήρια αξιολόγηση της δραστηριότητας a, τότε οι ακόλουθες ιδιότητες χαρακτηρίζουν τη συνάρτηση χρησιμότητας U:

$U[g(a)]>U[g(b)] \Leftrightarrow aPb$

$U[g(a)]=U[g(b)] \Leftrightarrow aIb$

και η σχέση $R=P \cup I$ είναι μια ασθενής διάταξη.

Επιλύοντας κατάλληλο γραμμικό πρόγραμμα υπολογίζουμε μία βέλτιστη συνάρτηση χρησιμότητας $U^*[g(a)]$ η οποία είναι μία 'βέλτιστη' αριθμητική αναπαράσταση της προτιμησιακής σχέσης R. Όμως, αν η βέλτιστη F^* είναι ίση με μηδέν, αυτό σημαίνει ότι το πολύεδρο των παραδεκτών λύσεων δεν είναι κενό και ότι πολλές συναρτήσεις χρησιμότητας μας δίνουν μία ακριβή αναπαράσταση της σχέσης R.

Ακόμα όμως και στην περίπτωση που η βέλτιστη τιμή F^* είναι αυστηρά θετική είναι δυνατόν τιμές για την F, χειρότερες από την F^*, να μπορούν να βελτιώσουν άλλα κριτήρια όπως για παράδειγμα το συντελεστή συσχέτισης του Speerman ή το συντελεστή συσχέτισης του Kendal ('τ' του Kendal).

Η εμπειρία που έχει αποκτηθεί από τη χρήση του μοντέλου της UTA* επιβεβαιώνει ότι μη βέλτιστες τιμές της συνάρτησης U[g(a)], για τις οποίες $F>F^*$, μας δίνουν ασθενείς διατάξεις R΄, που πλησιάζουν περισσότερο στην R (σύμφωνα με την απόσταση του Speerman ή του Kendal) από ότι η ασθενής διάταξη που συνάγεται από τις βέλτιστες τιμές $U^*[g(a)]$.

Ακόμη, μερικά κλασσικά φαινόμενα στο μαθηματικό προγραμματισμό, όπως ο πρωτεύον και ο δυϊκός εκφυλισμός, καθώς και φαινόμενα κριτηρίων συσχέτισης στη στατιστική, δε λαμβάνονται υπόψη κατά την αναζήτηση της βέλτιστης λύσης. Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τις ημιβέλτιστες (ή πολλαπλές εφόσον υπάρχουν) λύσεις.

Το υπολογιστικό πρόγραμμα της UTA*, στην παρούσα του μορφή, στη φάση της μεταβελτιστοποίησης προβλέπει την επίλυση $2 \times n$ γραμμικών προγραμμάτων, όπου n ο αριθμός των κριτηρίων, ακολουθώντας τη μέθοδο που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο Ι.2. Σύμφωνα με αυτή τη διαδικασία, ως βέλτιστη τιμές $U^*[g(a)]$ μπορούμε πλέον να θεωρήσουμε το μέσο όρο των τιμών που θα βρούμε για τα U[g(a)] $\forall a \in A'$ από την επίλυση των $2 \times n$ γραμμικών προγραμμάτων.

Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του κεφαλαίου Ι.2 δε βρίσκουμε όλες τις πολλαπλές ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις αλλά μόνο κάποιες ακραίες τιμές με αποτέλεσμα να υπάρχει ο κίνδυνος εξαγωγής λάθος συμπερασμάτων αφού υπάρχει ελλιπής πληροφορία. Ο κίνδυνος αυτός είναι σημαντικός αν παρατηρήσουμε ότι γενικά η μέση τιμή είναι ευαίσθητη στην ύπαρξη λίγων ασυνήθιστα μικρών ή μεγάλων μετρήσεων. (Τ.Παπαϊωάννου & Σ.Λουκά, 1990)

Στόχος μας είναι η αύξηση της ποσότητας και της ποιότητας της διαθέσιμης πληροφορίας χωρίς σημαντική αύξηση του υπολογιστικού φόρτου. Έτσι οδηγούμαστε στην εφαρμογή του αλγορίθμου που προτείναμε στο Κεφάλαιο Ι.6. Η εφαρμογή του αλγορίθμου αυτού κατά το στάδιο της μεταβελτιστοποίησης θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε, αν όχι όλες, τουλάχιστον ένα μεγάλο αριθμό πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων, ώστε η μέση τιμή που θα υπολογίσουμε να ανταποκρίνεται περισσότερο στην πραγματικότητα. Με άλλα λόγια η ασθενής διάταξη R΄ που θα υπολογίσουμε θα είναι πιο κοντά στην αρχική διάταξη R.

Επομένως, η χρήση του αλγορίθμου αυτού στη UTA*, ο οποίος προσφέρει χαμηλό υπολογιστικό φόρτο αλλά και τη δυνατότητα στον αποφασίζοντα να σταματήσει την αναζήτηση των λύσεων στο σημείο που θα διαπιστώσει ότι έχουν βελτιωθεί σε ικανοποιητικό βαθμό κάποια συγκεκριμένα κριτήρια, θα αποτελέσει αντικείμενο έρευνας επόμενων εργασιών.

Παράρτημα

Η Μέθοδος Simplex

Έστω ότι έχουμε την παρακάτω γραμμική συνάρτηση προς μεγιστοποίηση:

$$[\max]z=\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{l} c_j x_j$$

υπό τους γραμμικούς περιορισμούς:

$$\boldsymbol{Ax}\leq\boldsymbol{b}\Rightarrow\sum_{j=1}^{n} a_i x_j \leq b_i,\ \forall i=1,2,...,m$$
$$\boldsymbol{x}\geq 0 \Rightarrow x_j \geq 0,\ \forall j=1,2,...,l$$

όπου $\boldsymbol{A}$ η μήτρα τεχνολογικών συντελεστών (a_i) διαστάσεων m×l, $\boldsymbol{b}$ το διάνυσμα μήτρα των b_i διαστάσεων m×l, $\boldsymbol{c}^t$ ο ανάστροφος πίνακας του $\boldsymbol{c}$ διαστάσεων l×1 και $\boldsymbol{x}$ ο πίνακας - διάνυσμα των x_i διαστάσεων l×1.

Η μέθοδος simplex απαιτεί, κατ' αρχή, τον μετασχηματισμό όλων των ανισοτήτων του γραμμικού προβλήματος σε ισότητες, και η μορφή που προκύπτει λέγεται **πρότυπη μορφή**:

$$[\max]z=\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}\ (1)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\ (2)$$
$$\boldsymbol{x}\geq 0 \Rightarrow (3)$$

Για να μετασχηματιστεί ένα οποιοδήποτε γραμμικό πρόβλημα στην πρότυπη μορφή (1) - (3), εισάγεται για κάθε υπάρχουσα ανισότητα μια θετική μεταβλητή απόκλισης $x_{\bar{j}}$ $\forall$ j=1,2,...,m.

Για κάθε τρέχουσα βασική δυνατή λύση θα ισχύει η σχέση (2).

Η μήτρα $\boldsymbol{A}$ θα περιέχει τη βάση $\boldsymbol{B}$ και ένα πίνακα $\boldsymbol{A'}$, το συμπλήρωμα της $\boldsymbol{B}$ μέσα στην $\boldsymbol{A}$. Οπότε η σχέση (2) μπορεί να γραφεί και ως:

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x'} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$ όπου $\boldsymbol{x}_B$ και $\boldsymbol{x'}$ είναι αντίστοιχα τα διανύσματα των βασικών και μη βασικών μεταβλητών. Η εξίσωση γράφεται πιο αναλυτικά:

$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A'}\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{b}$, και πολλαπλασιάζοντας με $\boldsymbol{B}^{-1}$ έχουμε:

$\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A'}\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ (4)

Εάν λοιπόν, σύμφωνα με τον ορισμό της βασικής δυνατής, λύσης θέσουμε $\boldsymbol{x'}$=0 τότε η σχέση (4) γράφεται ως:

$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ (5)

Παρόμοια η σχέση (1) και σύμφωνα με τους παραπάνω συλλογισμούς γράφεται:

$z = \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c'}^t \boldsymbol{x'}$ και θέτοντας $\boldsymbol{x'}$=0 τότε έχουμε: $z = \boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{x}_B$ (6), όπου $\boldsymbol{c}_B^t$ οι συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση των βασικών μεταβλητών και $\boldsymbol{c'}^t$ οι συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών.

Στη συνέχεια ακολουθεί η παρουσίαση του αλγορίθμου Simplex. Προκειμένου για την καλύτερη παρουσίασή του θα παραθέσουμε και την πινακοποιημένη μορφή του.

Στάδιο 0: (αρχικό στάδιο) Δημιουργία μιας πρώτης βάσης $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{c}_B$	Βάση	x_1	x_j	$\cdots$	x_l	$x_{\bar{1}}$	$\cdots$	$x_{\bar{i}}$	$\cdots$	$x_{\bar{m}}$	$\boldsymbol{x}_B$
0	$x_{\bar{1}}$	a_{11}	a_{1j}	$\cdots$	a_{1l}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	b_1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	$x_{\bar{i}}$	a_{i1}	a_{ij}	$\cdots$	a_{il}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	b_i
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	$x_{\bar{m}}$	a_{m1}	a_{mj}	$\cdots$	a_{ml}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	b_m

ΠΗΓΑΙΝΕ ΣΤΟ ΣΤΑΔΙΟ 1.

Στάδιο 1: Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής. Υπολογίζονται τα **οριακά καθαρά εισοδήματα** (Ο.Κ.Ε.) $\Delta_j = \overline{c_j}$ ως ακολούθως:

Θέτω μια μήτρα $\boldsymbol{Y}$ τέτοια ώστε :

$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}'$ (7) όπου η $\boldsymbol{Y}$ αποτελείται από l+m διανύσματα.- κολόνες $\boldsymbol{y}_j$ για τα οποία ισχύει:

$\boldsymbol{y}_j=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j$ (8) όπου $\boldsymbol{a}_j$ διάνυσμα - κολόνα της μήτρας $\boldsymbol{A}$.

Ισχύει: $\boldsymbol{y}_j=\left[y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{ij}, \ldots, y_{mj}\right]$

Η ποσότητα $\Delta_j = \overline{c_j}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta_j = \overline{c_j} = c_j - z_j \quad \text{όπου} \quad z_j = \boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{a}_j \quad (9)$$

Το οριακό εισόδημα Δ_j εκφράζει την ποσότητα (σε μονάδες της αντικειμενικής συνάρτησης) κατά την οποία αυξάνει η αντικειμενική συνάρτηση εάν εισέλθει στην βάση η αντίστοιχη μεταβλητή x_j σε μοναδιαία στάθμη.

Προφανώς για τις μεταβλητές που είναι ήδη στη βάση το Ο.Κ.Ε. είναι μηδέν. Ακολουθεί η πινακοποιημένη έκφραση του Ο.Κ.Ε.:

$\boldsymbol{c}_B$	Βάση	x_1	x_j	…	x_l	$x_{\bar{1}}$	…	$x_{\bar{i}}$	…	$x_{\bar{m}}$	$\boldsymbol{x}_B$
c_{B1}	β_1	y_{11}	y_{1j}	…	y_{1l}	$y_{1(l+1)}$	…	$y_{1(l+\bar{i})}$	…	$y_{1(l+m)}$	x_{B1}
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
c_{Bi}	β_i	y_{i1}	y_{ij}	…	y_{il}	0	…	$y_{i(l+\bar{i})}$	…	$y_{1(l+m)}$	x_{Bi}
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
c_{Bm}	β_m	y_{m1}	y_{mj}	…	y_{ml}	0	…	$y_{m(l+\bar{i})}$	…	$y_{1(l+m)}$	x_{Bm}
	$\boldsymbol{c}_j$	c_1	c_j	…	c_l	$c_{\bar{1}}$	…	$c_{\bar{i}}$	…	$c_{\bar{m}}$	
	Δ_j	c_1-z_1	c_j-z_j	…	c_l-z_l	$c_{\bar{1}} - z_{\bar{1}}$	…	$c_{\bar{i}} - z_{\bar{i}}$	…	$c_{\bar{m}} - z_{\bar{m}}$	$z=\boldsymbol{c}_B^t\boldsymbol{x}_B$

Στην παραπάνω μήτρα $\boldsymbol{Y}$ υπάρχει ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων m×m που αποτελείται από τα διανύσματα - κολόνες των μεταβλητών $\boldsymbol{B}_1,\ldots,\boldsymbol{B}_i,\ldots,\boldsymbol{B}_m$ που αποτελούν τη βάση ($\boldsymbol{B}$) της τρέχουσας λύσης. Εάν $\Delta_j \le 0\ \forall$ j (στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίηση), η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη και ισχύει :

$z^* = \boldsymbol{c}_B^t\, \boldsymbol{x}_B$ και ο αλγόριθμος περατώνεται.(**ΤΕΛΟΣ**).

Αλλιώς επιλέγουμε κάποια μεταβλητή $\boldsymbol{x}_j$ η οποία εισέρχεται στη βάση, στη θέση r. Οπότε η νέα τιμή z΄ της αντικειμενικής μας συνάρτησης γίνεται:

$$z=\boldsymbol{c'}_B^t\boldsymbol{x'}_B = \sum_{i=1}^{m} c'_{Bi}\, x'_{Bi} \quad (10)$$

όπου $\boldsymbol{x}'_B$ το διάνυσμα της νέας βασικής δυνατής λύσης.

Ας δούμε πως υπολογίζεται το διάνυσμα $\boldsymbol{x}'_B$. Έστω ότι βάζουμε στη βάση το μη βασικό διάνυσμα $\boldsymbol{a}'_k$ και απομακρύνουμε το $\boldsymbol{B}_r$. Από την αρχική βάση έχουμε για κάθε μη βασικό διάνυσμα $\boldsymbol{a}'_j$ τη σχέση:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}'_j=\boldsymbol{B}y_j \Rightarrow \boldsymbol{a}'_j=\sum_{i=1}^{m} y_{ij}\boldsymbol{B}_i=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} y_{ij}\boldsymbol{B}_i+y_{rj}\boldsymbol{B}_r\Rightarrow\\ &\Rightarrow \boldsymbol{B}_r=\frac{1}{y_{rj}}\boldsymbol{a}'_j-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m}\frac{y_{ij}}{y_{rj}}\boldsymbol{B}_i \qquad \left(\forall y_{rj}\neq 0\right)\end{aligned} \tag{11}$$

Με την αντικατάσταση του $\boldsymbol{B}_r$ με το $\boldsymbol{a}'_k$ έχουμε:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{b}\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{Bi}\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{b}\Rightarrow \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} x_{Bi}\boldsymbol{B}_i+x_{Br}\boldsymbol{B}_r=\boldsymbol{b} \tag{12}$$

και αντικαθιστώντας το $\boldsymbol{B}_r$ με τη βοήθεια της σχέσης (11) έχουμε:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m}\left\{x_{Bi}-x_{Br}\frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right\}\boldsymbol{B}_i+\frac{x_{B_r}}{y_{rk}}\boldsymbol{a}'_k=\boldsymbol{b}\Rightarrow \sum_{i=\boldsymbol{1}}^{m}\boldsymbol{x}'_{Bi}\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{b}$$

όπου για τα διανύσματα $\boldsymbol{x}'_{B_i}$ της νέας βασικής λύσης ισχύει:

$$x'_{Br}=\frac{x_{Br}}{y_{rk}} \tag{13}$$

$$x'_{Bi}=x_{Bi}-x_{Br}\frac{y_{ik}}{y_{rk}}\overset{(13)}{\Rightarrow} x'_{Bi}=x_{Bi}-y_{ik}x'_{Br} \tag{14}$$

Τώρα επιστρέφουμε στη σχέση (10) από την οποία σύμφωνα με τις σχέσεις (13) και (14) έχουμε:

$$z'=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} c_{Bi}x'_{Bi}+c_{Br}x'_{Br}\Rightarrow z'=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} c_{Bi}\left\{x_{Bi}-x_{Br}\frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right\}+c_{Br}\frac{x_{Br}}{y_{rk}} \tag{15}$$

Στην παραπάνω σχέση για λόγους ευκολίας προσθέτουμε τον μηδενικό όρο:

$$c_{Br}\left\{x_{Br}-x_{Br}\frac{y_{rk}}{y_{rk}}\right\}=0$$

Οπότε από τη σχέση (15) έχουμε:

$$z' = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} \left\{ x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right\} + c_{Br} \frac{x_{Br}}{y_{rk}}$$

$$\Rightarrow z' = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} x_{Bi} + \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \left\{ c_{Br} - \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} y_{ik} \right\}$$

Θέτω $c_{Br} = c_k$ και έχουμε λόγω της σχέσης (9):

$$z' = z + \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \left(c_k - z_k \right) \Rightarrow z' = z + \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \Delta_k \quad (16)$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η μεταβλητή x_k που θα εισέλθει στη βάση ($x_k \uparrow$) επιλέγεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\Delta_k = \max_j \Delta_j$$

ΠΗΓΑΙΝΕ ΣΤΟ ΣΤΑΔΙΟ 2.

Στάδιο 2: Καθορισμός της εξερχόμενης μεταβλητής.

Η νέα βασική λύση πρέπει να είναι δυνατή. Επομένως σύμφωνα με τις σχέσεις (13) και (14) πρέπει να ισχύει:

$$x'_{Br} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \geq 0 \quad \forall i \neq r \qquad (17)$$

$$x'_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \qquad (18)$$

Από τη σχέση (18) συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύει $y_{rk} \geq 0$. Τότε η σχέση (17) ισχύει για κάθε $y_{ik} \leq 0$ με $i \neq r$. Έτσι αρκεί να μας απασχολήσουν εκείνα μόνο τα $i \neq r$ για τα οποία $y_{ik} > 0$. Στην περίπτωση αυτή η (17) μπορεί να γραφεί:

$$\frac{x_{Bi}}{y_{ik}} - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \geq 0 \qquad (19)$$

Επομένως είναι φανερό ότι για να ισχύει η (19) θα πρέπει η βασική μεταβλητή x_{Br} που θα εξέλθει της βάσης ($x_{Br}\downarrow$) να βρίσκεται από τη σχέση:

$$\theta = \frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{ik}},\ \ y_{ik} > 0 \right)$$ (20), όπου k ο δείκτης της εισερχόμενης μεταβλητής. Εάν ισχύει $y_{ik} \leq 0 \ \ \forall i$ τότε το πρόβλημα δεν έχει πεπερασμένη λύση (απειρίζεται), αλλιώς **ΠΗΓΑΙΝΕ ΣΤΟ ΣΤΑΔΙΟ 3.**

Στάδιο 3: Αλλαγή βάσης.

Δημιουργείται μια νέα βάση με την είσοδο στη βάση της μεταβλητής x_k σε αντικατάσταση της x_{Br} ($x_k\uparrow$ $x_{Br}\downarrow$).

ΠΗΓΑΙΝΕ ΣΤΟ ΣΤΑΔΙΟ 1.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A. Charnes, *Optimality and Degeneracy in Linear Programming*, Econometrica, vol. 20, 1952, p.160-170.

2. A. Charnes and W. W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, John Wiley and Sons, vol. 1, New York, 1961.

3. M. Christopher, A. Payne and D. Ballantyne, *Relationship Marketing*, Butterworth - Heinemann, 1991.

4. D. Despotis, D. Yannacopoulos and C. Zopounidis*, A Review of theUTA Multicriteria Method and Some Improvements*, 1990.

5. E. Jacquet-Lagreze and J. Siskos, *Assessing a Set of Additive Utility Functions for Multicriteria Decision-Making, the UTA Method*, European Journalof Operational Research, Vol. 10, n^o 2, 1982.

6. V. Klee, *On the Number of Vertices of a Convex Polytope, Canadian Journal of Mathematics*, vol. 16, 1964, p. 701-720.

7. M. Manas and J. Nedoma, *Finding all Vertices of a Convex Polyedron*, Numerische Mathematik, vol. 14, 1968, p. 226-229.

8. T. H. Mattheiss and D. S. Rubin, *A Survey and Comparison of Methods for Finding all Vertices of Convex Polyhedral Sets*, Mathematics of Operations Research, vol. 5, 1980, p. 167-185.

9. J. Siskos, *Le Traitement des Solutions Quasi Optimales en Programmation Lineaire Continue: Une Synthese*, R.A.I.R.O., Recherche Operationnelle vol. 18 n^o 4, 1984, p. 381-401.

10. J. Siskos and D. Yannacopoulos*, UTASTAR: An Ordinal Regression Method for Building Additive Value Functions*, Investigacao Operacional, vol. 5, n^o 1, 1895.

11. J. Siskos and D.Despotis, *A DSS Oriented Method for Multiobjective Linear Programming Problems*, Decision Support Systems, 5 p.47-55, 1989.

12. G. Tarry, *Le Probleme des Labyrinthes*, Nouvelles Annales de Mathematiques, Vol. XIV, 1895, p. 187-190.

13. C. Van de Panne, *Methods for Linear and Quadratic Programming*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Λουκάκης Μανώλης, *Επιχειρησιακή Έρευνα*, Τόμος Α΄, Θεσσαλονίκη, 1990.

2. Ματσατσίνης Νικόλαος, *Ένα Έμπειρο Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων Μάρκετινγκ: Μεθοδολογία Υποστήριξης και Ολοκληρωμένη Αρχιτεκτονική*, Χανιά, 1995

3. Ξηρόκωστας Δημήτρης, *Επιχειρησιακή Έρευνα*, Αθήνα, 1991.

4. Παπαγεωργίου Μάρκος, *Μη Γραμμικός Προγραμματισμός*, Χανιά, 1996.

5. Παπαδημητρίου Γιάννης, *Στατιστική, Τεύχος 1: Περιγραφική Στατιστική*, Θεσσαλονίκη, 1986

6. Παπαϊωάννου Τάκης και Σ.Λουκά, *Εισαγωγή στη Στατιστική*, Αθήνα, 1990.

7. Ποζρικίδης Κυριάκος, *Μάρκετινγκ - Στυλ*, Αθήνα, 1995.

8. Πραστάκος Γρηγόρης, *Επιχειρησιακή Έρευνα για τη Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων*, Αθήνα, 1986.

9. Σίσκος Ιωάννης, *Συμπληρωματικές Σημειώσεις Παραδόσεων Γραμμικού Προγραμματισμού*, Χανιά, 1992.

10. Σιώμκος Γεώργιος, *Συμπεριφορά Καταναλωτή & Στρατηγική Μάρκετινγκ*, Αθήνα-Πειραιάς, 1994.