ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αξιολόγηση της Εφαρμογής Μεθόδων Πολυκριτήριας Ανάλυσης στην επίλυση Προβλημάτων

Θραψανιωτάκης Νικόλαος

Επιβλέπων Καθηγητής

Ματσατσίνης Νικόλαος

Επιτροπή Αξιολόγησης

Γρηγορούδης Ευάγγελος, Δούμπος Μιχαήλ

Χανιά 2016

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας οφείλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ματσατσίνη Νικόλαο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση καθ΄ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω το μέλος του Εργαστηριακού Διδακτικού Προσωπικού κα. Ευαγγελία Κρασαδάκη για την βοήθεια στην αναζήτηση λογισμικού χωρίς το οποίο δεν θα μπορούσε να περατωθεί η εργασία.

Επίσης οφείλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Σίσκο Γιάννη για την άδεια χρήσης των παραδειγμάτων του, γύρω από τα οποία δομήθηκε η εργασία μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της οικογένειας μου για τη συμπαράσταση τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Εισαγωγή

Όλοι είμαστε εξοικειωμένοι με την έννοια της απόφασης. Καθημερινά και ασυναίσθητα πολλές φορές καλούμαστε να πάρουμε αποφάσεις για διάφορα ζητήματα που μας αφορούν. Ο τρόπος με τον οποίο λαμβάνουμε την απόφαση δεν είναι πάντοτε ο ίδιος και εξαρτάται τόσο από τη φύση, όσο και από την πολυπλοκότητα του προβλήματος που έχουμε να επιλύσουμε. Η αντίληψη ότι ο άνθρωπος διαφέρει από τα ζώα εξαιτίας της ικανότητας του να λαμβάνει αποφάσεις είναι διάσπαρτη στο φιλοσοφικό κόσμο. Ωστόσο η έννοια της Επιστήμης Αποφάσεων ξεκίνησε να διαμορφώνεται μόλις στη δεκαετία του 1960. Αιτία της ανάπτυξής της ήταν η ανάγκη να δημιουργηθούν τρόποι να υποστηρίξουν τη διαδικασία λήψης αποφάσεων, καθώς όσο οι οργανισμοί γίνονταν μεγαλύτεροι, η πολυπλοκότητα των προβλημάτων αυξανόταν. Κάπου εκεί ξεκινάει και η έννοια της Πολυκριτήριας Ανάλυσης Αποφάσεων, καθώς οι μέχρι τότε υπάρχουσες μεθοδολογίες δεν μπορούσαν να διαχειριστούν προβλήματα με πολλαπλά κριτήρια. Ασφαλώς η ανάπτυξη και η εξάπλωση της δεν θα ήταν η ίδια χωρίς την ανάπτυξη της επιστήμης της Πληροφορικής αλλά και των τηλεπικοινωνιών. Ορισμένες Μεθοδολογίες Πολυκριτήριας Ανάλυσης αναπτύχθηκαν από την ανάγκη να επιλυθούν πραγματικά προβλήματα, όπως συνέβη με την ανάπτυξη της μεθόδου Electre IV. Οι μεθοδολογίες πολυκριτήριας ανάλυσης έχουν αξιοποιηθεί για να απαντήσουν σε ιδιαίτερης σημασίας προβλήματα, όπως για το εάν το Σεπτέμβριο 2002 οι Ηνωμένες Πολιτείες θα έπρεπε να εμπλακούν άμεσα σε πόλεμο με το Ιράκ, ή μέσω του ΟΗΕ.

Αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η μελέτη της εφαρμογής διαφόρων πολυκριτήριων μεθοδολογιών στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων που απαιτούν τη λήψη αποφάσεων με βάση τα χαρακτηριστικά τους και η εν συνεχεία σύγκριση των αποτελεσμάτων της εφαρμογής των.

Παρά την πρόοδο που έχει σημειωθεί στο τομέα, και ιδιαίτερα υπό το πρίσμα της συνεχώς αυξανόμενης χρήσης των πολυκριτήριων μεθόδων, είναι αισθητή η έλλειψη ενός σαφούς καθορισμένου πλαισίου για την επιλογή της πλέον κατάλληλης ανά πρόβλημα μεθόδου. Η εργασία αυτή αποπειράται ένα σημαντικό πρώτο βήμα για την κάλυψη αυτού του κενού, μέσω της συγκριτικής ανάλυσης των σημαντικότερων πολυκριτήριων μεθόδων.

Αρχικά, θα παραθέσουμε τις βασικές έννοιες και τους ορισμούς τις πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων (κριτήρια, δομές προτιμήσεων, …), ενώ στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τα χαρακτηριστικά και τις απαιτήσεις των πολυκριτήριων μεθόδων που θα εξεταστούν. Ακολούθως θα αναλυθούν τα επιλεγμένα προβλήματα. Αφού παρουσιαστούν τα προβλήματα αυτά, θα γίνει συγκριτική εφαρμογή , των επιλεγμένων μεθόδων Πολυκριτήριας ανάλυσης.

Συνεχίζοντας, θα αναλυθούν και θα σχολιαστούν τα αποτελέσματα των συγκριτικών δοκιμών και θα διατυπωθούν κανόνες επιλογής μεθόδου πολυκριτήριας ανάλυσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

2.1 Εισαγωγικά

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παραθέσουμε τους ορισμούς και τις βασικές έννοιες της θεωρίας αποφάσεων και της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων, βασιζόμενοι στην παρακάτω βιβλιογραφία: Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων (Ματσατσίνης, 2010), Μοντέλα Αποφάσεων (Σίσκος, 2008) και Multiple Criteria Decision Analysis - State of the Art Surveys (Figueira, et al., 2005) με τις οποίες δομούνται όλες οι μέθοδοι πολυκριτήριας ανάλυσης που θα εξετάσουμε παρακάτω.

2.2 Λήψη Αποφάσεων (Ματσατσίνης, 2010)

Η **λήψη αποφάσεων** (**decision making**) είναι αποτέλεσμα σύνθετων διαδικασιών, που έχουν ως στόχο, αρχικά μεν να μελετήσουν και να αναλύσουν διεξοδικά τις επιπτώσεις όλων των εναλλακτικών αποφάσεων, στη συνέχεια δε να προχωρήσουν σε μια προσπάθεια σύνθεσης και σύγκλισης των απαιτήσεων όλων των εμπλεκομένων, στη διαδικασία απόφασης μερών, ώστε να καταλήξουν τελικά στην εύρεση της πλέον κοινά αποδεκτής λύσης.

Σαν **απόφαση** (**decision**) θεωρούνται όλες εκείνες οι ενέργειες (σκέψεις, κρίσεις κλπ.), που γίνονται από έναν ή περισσότερους ανθρώπους. Με στόχο την επιλογή ενός τρόπου ενέργειας - δράσης μέσα από ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών. Απόφαση έχουμε όταν ο αποφασίζων έχει τη δυνατότητα επιλογής μεταξύ τουλάχιστον δυο διαφορετικών εναλλακτικών ενεργειών. Στην περίπτωση ύπαρξης μίας μόνο επιλογής δεν μπορούμε να μιλάμε για απόφαση αλλά για υποχρεωτική υλοποίηση της. Η δυνατότητα να μην κάνουμε τίποτε μπορεί να θεωρηθεί ως μια εναλλακτική επιλογή, μια και αυτή συγκρίνεται και αξιολογείται σε σχέση με τη δυνατή επιλογή να κάνουμε κάτι.

Η **ανάλυση αποφάσεων** (**decision analysis**) είναι μια ορθολογική προσέγγιση στη λήψη αποφάσεων η οποία χρησιμοποιεί υποδείγματα (models) για να αναπαραστήσει εναλλακτικά σχέδια δράσης, πιθανές καταστάσεις σχετικές με το πρόβλημα που αναλύεται, κατανομές πιθανοτήτων των καταστάσεων αυτών, καθώς και τα αναμενόμενα αποτελέσματα-πληρωμές (payoffs) με σκοπό να επιλεγεί μια βέλτιστη στρατηγική απόφασης.

Εναλλακτικές επιλογές (**alternatives**) είναι οι εναλλακτικοί τρόποι ενέργειας ή τρόπων δράσεις ή λύσεων ή οι δυνατότητες που έχει κάποιος στη διάθεση του ώστε να επιλέξει αυτή ως λύση στο προς επίλυση πρόβλημα. Μερική αναζήτηση για προϋπάρχουσες εναλλακτικές επιλογές – λύσεις οδηγεί σε λιγότερο αποτελεσματική λήψη απόφασης. Το σύνολο των εναλλακτικών επιλογών είναι ένα πεπερασμένο σύνολο αντικειμένων, υποψηφίων, ενεργειών και γενικά επιλογών που θα πρέπει να μελετηθεί κατά τη διαδικασία λήξης μιας απόφασης και συμβολίζεται:

$$A = \{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$$

Κριτήρια (**criteria**) είναι τα χαρακτηριστικά ή οι απαιτήσεις που κάθε εναλλακτική επιλογή – λύση θα πρέπει να διαθέτει σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό. Συνήθως οι εναλλακτικές επιλογές – λύσεις εκτιμώνται στο πόσο καλά διαθέτουν κάθε κριτήριο.

Ορίζουμε ως κριτήριο μια πραγματική συνάρτηση g, ορισμένη σε ένα σύνολο A των εναλλακτικών ενεργειών και με πεδίο τιμών ένα απόλυτα διατεταγμένο σύνολο, και που εκφράζει τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα.

$g: A \rightarrow R$ για την οποία ισχύει: αν $g(a) > g(b) \Rightarrow$ η επιλογή a είναι καλύτερη της b.

Δεδομένου ενός συνόλου κριτηρίων $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$, μια εναλλακτική ενέργεια-επιλογή a κυριαρχεί (dominate) μιας εναλλακτικής b εάν:

$g_i(a) \geq g_i(b)\ \forall$ I τουλάχιστον μια ανισότητα θα είναι αυστηρή.

Μια εναλλακτική επιλογή a του συνόλου A, είναι ικανοποιητική λύση για ένα σύνολο κριτηρίων $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$, εάν δεν υπάρχει μια άλλη εναλλακτική επιλογή b η οποία να κυριαρχεί της a. Στα προβλήματα απόφασης, μόνο οι ικανοποιητικές λύσεις παρουσιάζουν ενδιαφέρον.

Στόχοι (**goals**) : Τι θέλουμε να επιτύχουμε; Πολλοί αποφασίζοντες συγκεντρώνουν μια ομογενή ομάδα εναλλακτικών επιλογών και εν συνεχεία ρωτούν «ποιο πρέπει να επιλέξω;» χωρίς να σκεφτούν πρώτα για το ποιοι είναι οι στόχοι τους από αυτή την επιλογή. Το σωστό είναι, κάθε φορά που τίθεται ένα ερώτημα όπως «τι πρέπει να κάνω στην περίπτωση ΧΧΧ»; ή «τι ΧΧΧ πρέπει να επιλέξω»; θα πρέπει να τίθεται πρώτα το ερώτημα «ποιοι είναι οι στόχοι μας»; Ο προσδιορισμός των στόχων θα πρέπει να περιλαμβάνεται σε κάθε περίπτωση ανάλυσης απόφασης.

Αξία (**value**) : Η αξία αναφέρεται στο πόσο επιθυμητό είναι ένα ιδιαίτερο αποτέλεσμα. Η αξία μιας εναλλακτικής επιλογής – λύσης εκφράζεται είτε σε χρηματικές μονάδες, είτε σε ικανοποίηση, είτε σε κάποιο άλλο όφελος.

Προτιμήσεις (**preferences**): Αυτές απεικονίζουν τη φιλοσοφία και την ηθική ιεραρχία του αποφασίζοντα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι οι «αξίες» του αποφασίζοντα, αλλά αυτό θα μπορούσε να δημιουργήσει σύγχυση με την άλλη χρήση της λέξης όπως αναφέραμε προηγουμένως. Εάν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη λέξη εδώ, θα λέγαμε ότι οι προσωπικές αξίες υπαγορεύουν τις προτιμήσεις. Όπως γνωρίζουμε υπάρχουν άνθρωποι που είναι ενθουσιώδεις ενώ άλλοι ήρεμοι, που προτιμούν τη βεβαιότητα από τον κίνδυνο, την ποιότητα από την ποσότητα κοκ. Αυτά τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά είναι που καθορίζουν το σύστημα «αξιών» του κάθε αποφασίζοντα. Έτσι αυτός βλέπει και κρίνει τα πάντα με βάση αυτά.

Ποιότητα απόφασης (**decision quality**): Αυτό είναι μια εκτίμηση εάν μία απόφαση είναι καλή ή κακή. Μία καλή απόφαση είναι λογική βασίζεται στις διαθέσιμες πληροφορίες και απεικονίζει τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι η ποιότητα μίας απόφασης δεν σχετίζεται με την έκβαση της. Μια καλή απόφαση μπορεί να έχει καλό αλλά και κακό αποτέλεσμα. Ομοίως, μια κακή απόφαση, μια μη βασιζόμενη σε επαρκείς πληροφορίες ή που δεν απεικονίζει τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα μπορεί να έχει ακόμα και ένα καλό αποτέλεσμα.

Αποδοχή (**acceptance**): Αυτοί που πρέπει να εφαρμόσουν την απόφαση ή αυτοί που θα επηρεαστούν από αυτήν θα πρέπει να την αποδεχτούν τόσο νοητικά όσο και συναισθηματικά. Η αποδοχή είναι ένας κρίσιμος παράγοντας επειδή συχνά έρχεται σε σύγκρουση με ένα από τα ποιοτικά κριτήρια. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το καλύτερο πράγμα που μπορεί να γίνει είναι να επιλεγεί μια λιγότερο ποιοτική λύση η οποία όμως θα τυγχάνει μεγαλύτερης αποδοχής. Συχνά σταματάμε την αναζήτηση λύσης και αποδεχόμαστε μία απλά ικανοποιητική λύση.

Μία από τις σημαντικότερες εκτιμήσεις στη λήψη απόφασης, είναι ο παράγοντας άνθρωπος. Πάντα εξετάστε μια απόφαση υπό το φως της υλοποίησης της από ανθρώπους. Μια απόφαση που μπορεί να είναι τεχνολογικά άψογη αλλά που είναι κοινωνικά απαράδεκτη δεν θα λειτουργήσει. Μόνο αποφάσεις που εφαρμόζονται με πληρότητα και ενθουσιασμό, θα λειτουργήσουν με τον τρόπο που προσδοκούμε.

2.3 Κριτήρια

Στην Πολυκριτήρια ανάλυση χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι τέσσερεις τύποι κριτηρίων:

2.3.1 Ποσοτικά ή μετρικά κριτήρια (measurable criteria)

Διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες (Vincke, 1992):

1. Αληθή κριτήρια (true criteria)

Αποτελούν την απλούστερη μορφή κριτηρίων, τα οποία χρησιμοποιούνται σε αυτό που ονομάζεται «παραδοσιακή» δομή προτιμήσεων και όπου δεν υπάρχουν κατώφλια. Οι διαφορές μεταξύ των τιμών των κριτηρίων χρησιμοποιούνται για να καθοριστεί ποια επιλογή προτιμάται. Η προκύπτουσα προδιάταξη είναι γνωστή ως πλήρης προδιάταξη. Κάθε προτίμηση ή δομή υπεροχής (outranking) μπορεί να χαρακτηριστεί από μία σχέση υπεροχής (outranking) S, η οποία ορίζει τις απαραίτητες συνθήκες έτσι ώστε μια εναλλακτική επιλογή a_i να υπερέχει μιας άλλης a_j. Η επιλογή a_i υπερέχει της a_j (a_i S a_j) εάν ο αποφασίζων την προτιμά έναντι της a_j (ai P a_j) ή είναι αδιάφορος μεταξύ των δυο (ai I aj). Η σχέση αυτή παριστάνεται με τη σχέση:

$$a_i \mathrm{S}\, a_j \text{ iff } a_i \mathrm{P}\, a_j \text{ or } a_i \mathrm{I}\, a_j$$

Σε αυτή την παραδοσιακή δομή, οι προτιμήσεις του αποφασίζοντα ικανοποιούν το ακόλουθο μοντέλο.

$$a_i\, P_g\, a_j \Leftrightarrow g(a_i) > g(a_j)$$

$$a_i\, I_g\, a_j \Leftrightarrow g(a_i) = g(a_j),$$

$$\forall\ a_i \text{ και } a_j \in A \text{ με i και j= 1,2, …, n, αφού: } S = P \cup I,\ a\, S\, b \Leftrightarrow g(a_i) \geq g(a_j)$$

Η σχέση αδιαφορίας είναι μεταβατική και ισχύει: a I b και b I a $\Leftrightarrow$ c.

Τα αληθή κριτήρια χρησιμοποιούνται στις ELECTRE I και II.

Επίσης στη βιβλιογραφία μπορούμε να συναντήσουμε κατά περίπτωση του ακόλουθους συμβολισμούς:

$\succcurlyeq$ αντί S, $\succ$ αντί P, $\sim$ αντί I.

2. Ημι-κριτήρια (semi-criteria)

Αυτά χρησιμοποιούνται μέσα στα ονομαζόμενα μοντέλα «κατωφλιού» ή δομής προτιμήσεων, όπου η σταθερά «απλώς αξιοσημείωτης διαφοράς» (just noticeable difference) υπάρχει για κάποιο δεδομένο κριτήριο. Η διαφορά μεταξύ τιμών των δυο επιλογών θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη της τιμής αυτής της σταθεράς για να πούμε ότι η μια είναι καλύτερη της άλλης. Στην περίπτωση αυτή η δομή προτίμησης ονομάζεται δομή ημι-διάταξης και αντίθετα με το παραδοσιακό μοντέλο είναι αμετάβατη.

Έτσι, εισάγοντας ένα θετικό κατώφλι p, $\forall$ a_i με $a_j \in$ A, i και j = 1, 2, ..., n, οι δομές προτιμήσεων με κατώφλι αδιαφορίας δίνονται:

$$a_i\, P_g\, a_j \Leftrightarrow g(a_i) - g(a_j) > p_g\,(g(a_j))$$

$$a_i\, I\, a_j \Leftrightarrow |g(a_i)\text{-}g(a_j)| \leq p_g\,(g(a_j))$$

Αυτές οι δύο σχέσεις ορίζουν το μοντέλο κατωφλιού (threshold model). Μια δομή προτίμησης θεωρείται ως μια δομή ημι-διάταξης (semi-order) εάν αυτή μπορεί να παρασταθεί από ένα μοντέλο κατωφλιού.

3. Κριτήρια διαστημάτων (interval criteria)

Αυτά χρησιμοποιούνται στο ονομαζόμενο μοντέλο μεταβλητού κατωφλιού. Στην περίπτωση αυτή τα κατώφλια μπορεί να μεταβάλλονται στην κλίμακα των εκτιμήσεων των κριτηρίων.

$$a_i\, P_g\, a_j \Leftrightarrow g(a_i) - g(a_j) > q_g(g(a_j)) \;\; \forall \;\; a_i \text{ και } a_j \in A \text{ με i και j = 1, 2, .., n.}$$

$$a_i\, I_g\, a_j \Leftrightarrow g(a_i) - g(a_j) \leq q_g(g(a_j)) \text{ και } g(a_j) \leq g(a_i) + q_g(g(a_i))$$

Αυτές οι σχέσεις ορίζουν το Μοντέλο Μεταβλητού Κατωφλιού.

4. Ψευδο-κριτήρια (pseudo-criteria)

Τα ψευδοκριτήρια περιέχουν την προσέγγιση των κατωφλιών δύο επιπέδων. Το προηγούμενο μοντέλο του μεταβλητού κατωφλιού, μπορεί να φαίνεται μη ρεαλιστικό επειδή αυτό ορίζει μια ακριβή άνω τιμή η οποία είναι μια περιοριστική προτίμηση και μια κάτω τιμή η οποία είναι αδιάφορη. Ανατρέχοντας σε πραγματικές καταστάσεις μπορούμε να πούμε ότι εκφράζει μια ενδιάμεση ζώνη στην οποία η πληροφόρηση του αποφασίζοντα είναι αντιφατική ή ασαφής. Αυτό οδηγεί σε ένα μοντέλο προτίμησης το οποίο ρητά περιλαμβάνει δυο διαφορετικά κατώφλια. Το πρώτο είναι ένα κατώφλι αδιαφορίας q, κάτω από το οποίο ο αποφασίζων δείχνει καθαρή αδιαφορία και ένα δεύτερο κατώφλι προτίμησης p, πάνω από το οποίο ο αποφασίζων εκφράζει την σαφή του προτίμηση. Ανάμεσα στα δύο κατώφλια υπάρχει μία περιοχή «ασθενούς προτίμησης» για επιλογή της a πάνω στη b η οποία δηλώνεται ως $a_i \, Q_g \, a_j$, και εφαρμόζεται ως δομές προτιμήσεων με κατώφλια αδιαφορίας και προτίμησης:

$$a_i \, P_g \, a_j \Leftrightarrow g(a_i) - g(a_j) > p_g(g(a_j))$$

$$a_i \, Q_g \, a_j \Leftrightarrow g(a_j) + p_g(g(a_j)) \geq g(a_i) > g(a_j) + q_g(g(a_j))$$

$$a_i \, I_g \, a_j \Leftrightarrow g(a_j) + q_g(g(a_j)) \geq g(a_i) \text{ και } g(a_i) + q_g(g(a_i)) \geq g(a_j)$$

Τα $p_g(\ )$ και $q_g(\ )$ είναι αντίστοιχα τα κατώφλια προτίμησης και αδιαφορίας. Τα κατώφλια αυτά εκφράζουν, για κάθε σημείο της κλίμακας κάθε κριτηρίου, τις σχέσεις αυστηρής προτίμησης, ασθενούς προτίμησης και αδιαφορίας προτίμησης. Η αδυναμία προτίμησης δείχνει την αναποφασιστικότητα του αποφασίζοντα μεταξύ αδιαφορίας (I) και αυστηρής προτίμησης (P).

Τα ψευδοκριτήρια χρησιμοποιούνται στις μεθόδους ELECTRE IS, III,IV και Tri.

5. Φαινομενικά κριτήρια (quasi criteria)

Τα φαινομενικά κριτήρια είναι ψευδοκριτήρια στα οποία τα κατώφλια προτίμησης και αδιαφορίας συμπίπτουν σε όλα τα σημεία της κλίμακας.

Ο καθορισμός των κριτηρίων που σχετίζονται με το εκάστοτε πρόβλημα αποτελεί μια από τις κρίσιμες διαδικασίες της λήψης αποφάσεων. Με τον ορισμό της συνεπούς οικογένειας κριτηρίων προτείνεται μια μεθοδολογία σύμφωνα με την οποία τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται στις διαδικασίες αποφάσεων πρέπει να καλύπτουν όλες τις δυνατές θεωρήσεις του προβλήματος. Έτσι ένα σύνολο κριτηρίων g, ορίζεται ως συνεπής οικογένεια κριτηρίων όταν:

1. $g_k(a_j) = g_k(a_i), \ \forall \ k = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow a_i \, \square \, a_j$

2. $g_k(a_j) = g_k(a_i)$, $\forall$ $k = 1, 2, \ldots, n$ και $k \neq p$ και $g_p(a_j) > g_p(a_i) \Leftrightarrow a_j > a_i$
3. Η παράλειψη ενός τουλάχιστον κριτηρίου καθιστά μη ισχύουσα μια τουλάχιστον από τις προηγούμενες ιδιότητες.

2.3.2. Κριτήρια ποιοτικά ή διάταξης (ordinal criteria)

Είναι κριτήρια των οποίων η κλίμακα προτίμησης είναι μια κλίμακα διάταξης. Ένα κριτήριο διάταξης ορίζει μόνο μία προδιάταξη, δηλαδή διάταξη με ισοδυναμίες πάνω στο σύνολο των δράσεων. Σε μερικές όμως περιπτώσεις ένα κριτήριο διάταξης μπορεί να συνοδεύεται από την ύπαρξη κατωφλιών προτίμησης, όπως στην περίπτωση ενός μετρικού κριτηρίου (Σίσκος, 2008).

2.3.3. Κριτήρια πιθανοτικά (στοχαστικά) (stochastic criteria)

Πρόκειται για κριτήρια, στα οποία η αξιολόγηση μιας δράσης είναι κατά πιθανότητα γνωστή πάνω στην κλίμακα του κριτηρίου. Εάν $[g_*, g^*]$ είναι η κλίμακα του κριτηρίου g, η τιμή δράσης a ορίζεται μέσω μιας πυκνότητας πιθανότητας δ^a για την οποία ισχύει:

$$\sum_j \delta^{\mathrm{a}}\ (\delta^{\mathrm{a}}) = 1 \text{ (όταν η κλίμακα είναι διακριτή)}$$

$$\int_{g_*}^{g^*} \delta^{\mathrm{a}}(g)dg = 1 \text{ (όταν η κλίμακα είναι συνεχής)}$$

(Σίσκος, 2008)

2.3.4. Κριτήρια ασαφή (fuzzy criteria)

Αφορά την περίπτωση που η εκτίμηση μιας εναλλακτικής επιλογής είναι ένα διάστημα της κλίμακας του κριτηρίου, όπου έχει οριστεί μια συνάρτηση δυνατότητας (possibility function) που δείχνει πόσο δυνατή είναι μια τιμή του κριτηρίου. Γενικά μία συνάρτηση δυνατότητας στη θεωρία των ασαφών συνόλων (fuzzy criteria) δεν υπόκειται σε στατιστικούς νόμους (Σίσκος, 2008).

2.4 Δομές προτιμήσεων

2.4.1. Διμερείς σχέσεις προτιμήσεων

Οι διμερείς σχέσεις σύγκρισης των εναλλακτικών ενεργειών a_i και a_j οι οποίες εκφράζουν τη συλλογιστική του αποφασίζοντα είναι:

- Περίπτωση που ο αποφασίζων εκφράζει την ισχυρή προτίμηση του (strict preference): Η a_i είναι συνολικά ισχυρά προτιμότερη της a_j : $a_i \, P \, a_j$

- Περίπτωση που ο αποφασίζων εκφράζει την ασθενή προτίμηση του (weak preference): Η ai είναι συνολικά ασθενώς προτιμότερη της a_j : $a_i \, Q \, a_j$

- Περίπτωση που ο αποφασίζων εκφράζει την αδιαφορία του (indifference): Η a_i είναι συνολικά αδιάφορη της a_j : $a_i \, I \, a_j$

- Περίπτωση που ο αποφασίζων εκφράζει την αδυναμία του να συγκρίνει (incomparability): Η a_i είναι συνολικά μη συγκρίσιμη της a_j : $a_i \, R \, a_j$

(Ματσατσίνης, 2010)

2.4.2. Παραδοσιακή δομή προτιμήσεων

Στη δομή αυτή ορίζονται μόνο οι σχέσεις προτίμησης (P) και αδιαφορίας (I).

$\forall$ a_i, a_j:

$$a_i \, P \, a_j \Leftrightarrow g(a_i) > g(a_j)$$

$$a_i \, I \, a_j \Leftrightarrow g(a_i) = g(a_j)$$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

- Πληρότητα : $a_i \, P \, a_j$ ή $a_i \, I \, a_j$
- Μεταβατική σχέση : $a_i \, P \, a_j$ και $a_j \, P \, a_l \Rightarrow a_i \, P \, a_l$
- Ασυμμετρία : $a_i \, P \, a_j \Rightarrow a_j \, !P \, a_i$
- Ανακλαστική : $a_i \, I \, a_j$
- Αντιμεταθετική : $a_i \, I \, a_j \Leftrightarrow a_j \, I \, a_i$
- Μεταβατική : $a_i \, I \, a_j$ και $a_j \, I \, a_i \Rightarrow a_i \, I \, a_l$

(Ματσατσίνης, 2010)

2.4.3. Δομές προτιμήσεων με κατώφλι αδιαφορίας

Εδώ έχουμε να αντιμετωπίσουμε την περίπτωση κατά την οποία ο αποφασίζων εκφράζει την αδυναμία του να επιλέξει μεταξύ δύο εναλλακτικών ενεργειών-επιλογών όταν η διαφορά μεταξύ των δυο συναρτήσεων g για τις δυο ενέργειες είναι μικρότερη μιας τιμής που ορίζεται από την τιμή του κατωφλιού. Υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- Δομές προτιμήσεων με σταθερό κατώφλι αδιαφορίας (το κατώφλι είναι σταθερό για κάθε τιμή της g)

$\forall\ a_i, a_j$:

$$a_i\, P\, a_j \Leftrightarrow g(a_i) > g(a_j) + q$$
$$a_i\, I\, a_j \Leftrightarrow |g(a_i) - g(a_j)| \leq q$$

όπου: q θετικό κατώφλι αδιαφορίας

- Δομές προτιμήσεων με μεταβλητό κατώφλι αδιαφορίας (το κατώφλι μεταβάλλεται ανάλογα με τις τιμές της g)

$\forall\ a_i, a_j$:

$$a_i\, P\, a_j \Leftrightarrow g(a_i) > g(a_j) + q(g(a_j))$$

$$a_i\, I\, a_j \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} g(a_i) \leq g(a_j) + q(g(a_j)) \\ g(a_j) \leq g(a_i) + q(g(a_i)) \end{Bmatrix}$$

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$\forall\ a_i, a_j, a_l$:

$$a_i\, P\, a_j \text{ ή } a_i\, I\, a_j$$

$$a_i\, P\, a_j \text{ και } a_j\, P\, a_l \Rightarrow a_i\, P\, a_l$$

$$a_i\, P\, a_j \Rightarrow a_j\, !P\, a_i$$

(Ματσατσίνης, 2010)

2.4.4. Δομές προτιμήσεων με κατώφλια αδιαφορίας και προτιμήσεις

Επειδή πολλές φορές είναι δύσκολο για τον αποφασίζοντα να καθορίσει ένα κατώφλι προτίμησης ή αδιαφορίας μεταξύ των υπό εκτίμηση εναλλακτικών ενεργειών-επιλογών, για αυτό η εφαρμογή δυο κατωφλιών ένα για την αδιαφορία και ένα για την προτίμηση καθώς και η εισαγωγή της σχέσης ασθενούς προτίμησης (συμβολίζεται με Q) καλύπτει αυτήν την αδυναμία.

$\forall$ ai, aj:

$$a_i \, P \, a_j \Leftrightarrow g(a_i) > g(a_j) + p(g(a_j))$$

$$a_i \, Q \, a_j \Leftrightarrow g(a_j) + p(g(a_j)) > q(g(a_i)) > g(a_j) + q(g(a_j))$$

$$a_i \, I \, a_j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} g(a_j) + p(g(a_j)) \geq g(a_i) \\ g(a_i) + q(g(a_i)) \geq g(a_j) + q(g(a_j)) \end{array} \right\}$$

(Ματσατσίνης, 2010)

2.4.5. Δομές προτιμήσεων που περιλαμβάνουν ασυγκρισιμότητα

Υπάρχει περίπτωση ο αποφασίζων να αρνηθεί τη σύγκριση δυο εναλλακτικών ενεργειών-επιλογών ή να μην είναι δυνατή εκ των πραγμάτων η σύγκριση αυτή. Η περίπτωση της ασυγκρισιμότητας (συμβολίζεται με R) παρουσιάζεται συχνά στην λήψη ομαδικών αποφάσεων και διαπραγματεύσεων. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίσθηκε από τον (Roy, 1985) με την εισαγωγή ενός κατωφλιού ασυγκρισιμότητας (Ματσατσίνης, 2010).

2.5 Μεθοδολογία Μοντελοποίησης

Ο (Roy, 1976; Roy, 1990), πρότεινε το ακόλουθο γενικό πλαίσιο μοντελοποίησης στην πολυκριτήρια ανάλυση το οποίο αποτελείται από τα ακόλουθα τέσσερα διαδοχικά και αλληλοεπιδρώντα στάδια:

- Αντικείμενο της απόφασης
- Συνεπής οικογένεια κριτηρίων
- Μοντέλο ολικής προτίμησης
- Υποστήριξη της απόφασης

Στη συνέχεια αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά.

2.5.1. Αντίληψη του αντικειμένου της απόφασης

Κάθε απόφαση αναλύεται σε ένα πεπερασμένο ή συνεχές σύνολο εναλλακτικών επιλογών (ενεργειών, πράξεων, τρόπων δράσης, ...) $A = \{a_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Το σύνολο των εναλλακτικών επιλογών μπορεί να χαρακτηριστεί:

- Σταθερό (stable): Αν δεν επιτρέπεται να γίνουν μεταβολές στη σύνθεση του κατά τη διαδικασία λήψης μίας απόφασης.
- Αξιολογικό (evaluative): Αν κατά τη διαδικασία λήψης μιας απόφασης είναι δυνατές οι μεταβολές.
- Ολοκληρωμένο (globalized): Αν κάθε στοιχείο του Α αποκλείει τα υπόλοιπα.
- Αποσπασματικό (fragmented): Τα αποτελέσματα της επεξεργασίας αφορούν ένα τμήμα του Α.

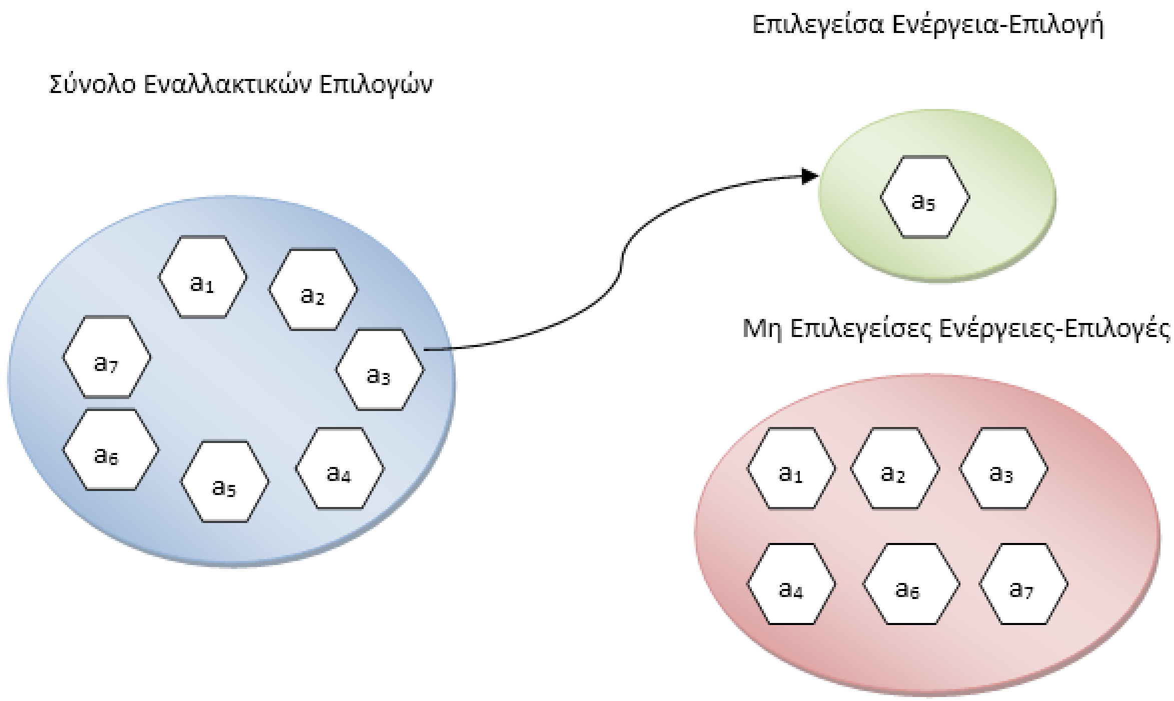
Στο σύνολο αυτό ορίζεται από τον αποφασίζοντα μια προβληματική η οποία μπορεί να μεταβληθεί κατά τη διάρκεια της διαδικασίας απόφασης (Ματσατσίνης, 2010). Τα είδη των προβληματικών που μπορεί να τεθούν ορίζονται από τον Roy (Roy, 1985) ως ακολούθως:

Προβληματική α : Αφορά την επιλογή (choice), μέσα από ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών Α, μιας και μόνο (σχήμα 2.1).

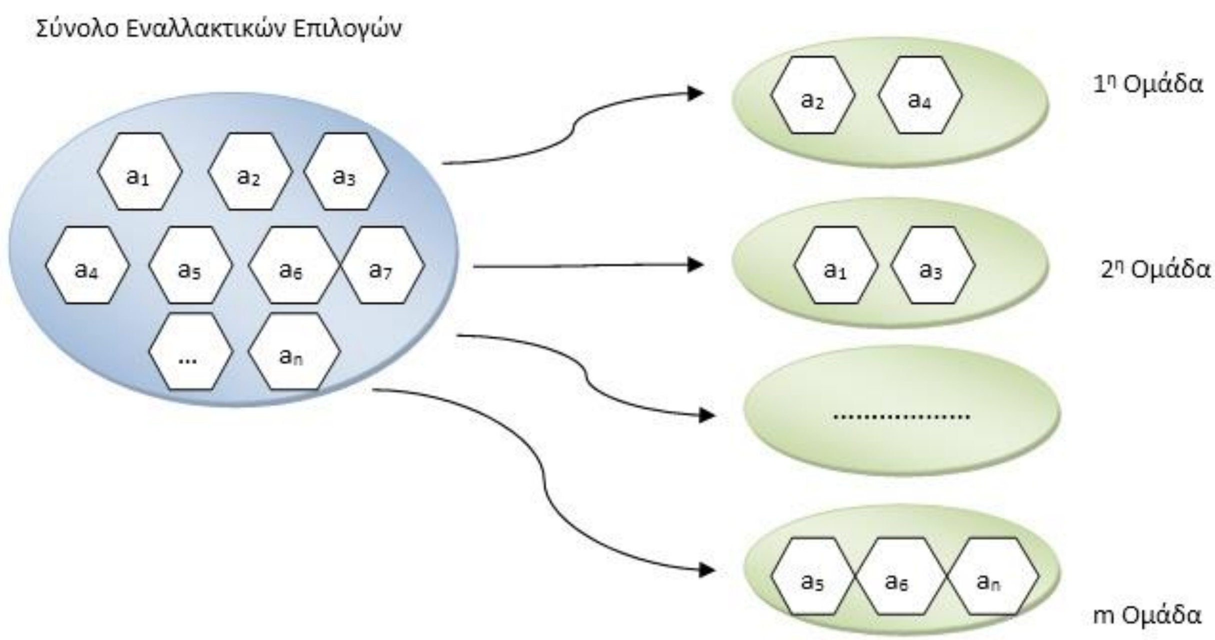
Έστω ότι μία εταιρία επιθυμεί να προσλάβει ένα άτομο για την κάλυψη των αναγκών της στη θέση του διευθυντή μάρκετινγκ. Καλεί με ανοικτή προκήρυξη να υποβάλλουν οι ενδιαφερόμενοι υποψηφιότητα. Το σύνολο των υποψηφίων που υποβάλλουν αίτηση σχηματίσει το σύνολο Α των εναλλακτικών επιλογών. Η προβληματική της περίπτωσης μας είναι η α, μια και η εταιρία έχει να επιλέξει έναν υποψήφιο για την κατάληψη της θέσης αυτής, μέσα από ένα σύνολο Α υποψηφίων που διεκδικούν τη θέση αυτή.

Προβληματική β : Αφορά την ταξινόμηση (sorting) όλων των εναλλακτικών ενεργειών του συνόλου Α, σε ομάδες με συγκεκριμένες ιδιότητες (σχήμα 2.2).

Στις τράπεζες υποβάλλονται συνεχώς αιτήσεις δανειοδότησης από επιχειρήσεις, από πολίτες κ.α. Οι τράπεζες θέλουν να διαχωρίσουν τους αιτούντες σε αξιόπιστους και μη. Στους μεν θα χορηγήσουν δάνειο, στους δε όχι. Έχουμε λοιπόν προβληματική β με διαχωρισμό του συνόλου των εναλλακτικών σε δυο ομάδες.



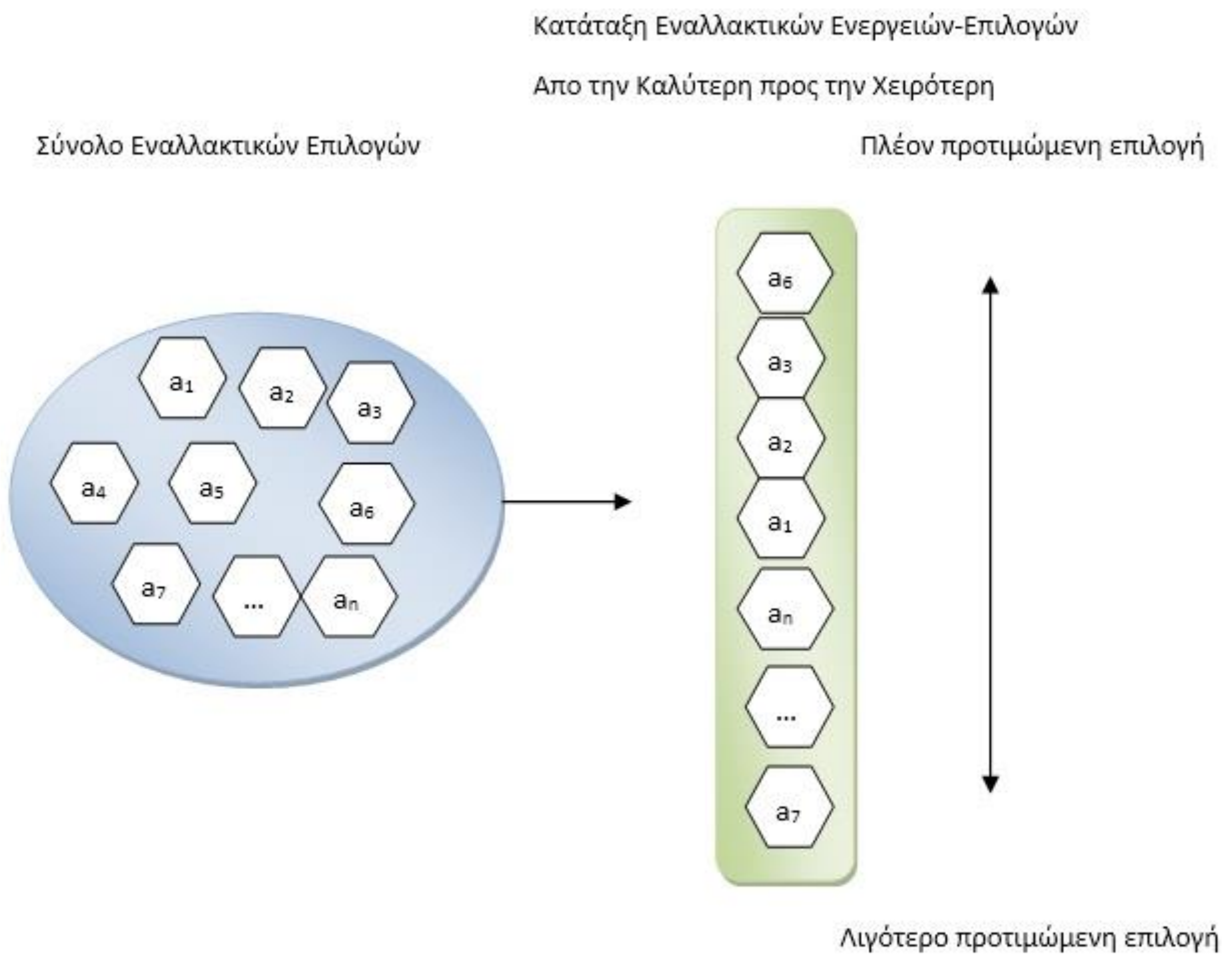
Σχήμα 2.1. Προβληματική α: Επιλογή μιας μόνο ενέργειας (Ματσατσίνης, 2010).



Σχήμα 2.2. Προβληματική β: Ταξινόμηση εναλλακτικών σε ομάδες (Ματσατσίνης, 2010).

Προβληματική γ : Αφορά την κατάταξη (ranking) όλων των εναλλακτικών ενεργειών του συνόλου Α, από την πλέον προτιμώμενη προς τη λιγότερο προτιμητέα (σχήμα 2.3).

Κάθε χρόνο έχουμε την επιλογή των υποψηφίων μαθητών από τον καλύτερο με την υψηλότερη βαθμολογία, μέχρι αυτόν με τη χαμηλότερη.



Σχήμα 2.3. Προβληματική γ: Κατάταξη από την καλύτερη προς τη χειρότερη (Ματσατσίνης, 2010).

Προβληματική δ : Αφορά την απλή περιγραφή (description) όλων των εναλλακτικών επιλογών (ενεργειών, δράσεων, ...) του συνόλου Α, καθώς και των συνεπειών τους σε γλώσσα κατανοητή από τους αποφασίζοντες.

Σε προβλήματα όπου η κύρια ανάγκη είναι η γνωριμία με ένα σύνολο δραστηριοτήτων όπως οι στρατηγικές επενδύσεις, τα αναπτυξιακά προγράμματα, η ανάπτυξη νέων προϊόντων κ.α., καθώς και η περιγραφή τους μέσω των επιπτώσεων τους πάνω στα κριτήρια που ενδιαφέρουν τους αποφασίζοντες. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για περίπτωση προβληματικής δ.

Συνήθως τα προβλήματα είναι πού σύνθετα και είναι πιθανόν να μην έχουμε μια προβληματική μόνο καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας απόφασης. Έτσι, μπορεί να έχουμε να αντιμετωπίσουμε διαφορετικές προβληματικές στα διάφορα στάδια λήψης μίας απόφασης.

2.5.2 Συνεπής οικογένεια κριτηρίων

Κάθε εναλλακτική επιλογή του συνόλου Α μπορεί να εκτιμηθεί από τους αποφασίζοντες με βάση ένα νέφος στοιχειωδών επιπτώσεων αποτελούμενα από ιδιότητες, χαρακτηριστικά, μειονεκτήματα, πλεονεκτήματα, ... (Roy, 1985). Η ανάλυση του νέφους των στοιχειωδών επιπτώσεων κάθε εναλλακτικής επιλογής οδηγεί τους αποφασίζοντες στην επιλογή και μοντελοποίηση των κριτηρίων με βάση τα οποία αυτοί θα οδηγηθούν στην τελική απόφαση.

Για τον καθορισμό της συνεπούς οικογένειας κριτηρίων, ο (Roy, 1985) πρότεινε τα ακόλουθα βήματα:

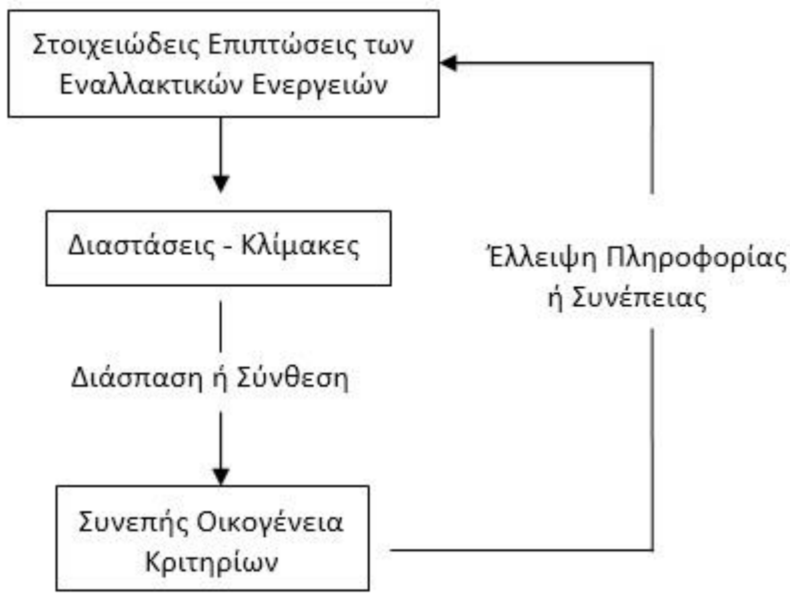
1. Καθορισμός του συνόλου των εναλλακτικών επιλογών (ενεργειών, δράσεων, ...)
2. Ανάλυση των στοιχειωδών επιπτώσεων των εναλλακτικών επιλογών (ιδιότητες, χαρακτηριστικά).
3. Καθορισμός των αξόνων προτίμησης.
4. Επιλογή των διαστάσεων.
5. Καθορισμός της συνεπούς οικογένειας κριτηρίων.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ορίσουμε τον πολυκριτήριο πίνακα (2.1): Δίνονται n εναλλακτικές επιλογές (a_1, a_2, …, a_n) τις οποίες ο αποφασίζων εκτιμά $g_j(a_i)$ με τη βοήθεια των m κριτηρίων (Ματσατσίνης, 2010).

Τα κριτήρια κατασκευάζονται με τη βοήθεια ποσοτικών και ποιοτικών διαστάσεων-κλιμάκων που επιτρέπουν την εκτίμηση όλων των εναλλακτικών επιλογών-ενεργειών του συνόλου Α. Η διαδικασία μοντελοποίησης παρουσιάζεται στο σχήμα 2.4.

	Κριτήρια			
Εναλλακτικές	g_1	g_2	…	gm
a_1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$	…	$g_m(a_1)$
a_2	$g_1(a_2)$	$g_2(a_2)$	…	$g_m(a_2)$
…	…	…	…	…
a_n	$g_1(a_n)$	$g_2(a_n)$	…	$g_m(a_n)$

Πίνακας 2.1 Πολυκριτήριος πίνακας (Ματσατσίνης, 2010)



Σχήμα 2.4. Διαδικασία μοντελοποίησης των κριτηρίων απόφασης (Σίσκος, 2008)

Πολύ συχνά οι στοιχειώδεις επιπτώσεις κάποιων εναλλακτικών ενεργειών δεν είναι δυνατόν να εκφραστούν με κάποια κλίμακα, η οποία να εκφράζει και τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα με κάποιο τρόπο μονότονο. Έτσι στην περίπτωση της κλίμακας μέτρησης της ηλικίας δεν μπορεί κάποιος να πει ότι όποιος έχει μικρή ηλικία είναι καλύτερος από κάποιον με μεγαλύτερη αλλά ούτε και το αντίστροφο. Σε τέτοιες περιπτώσεις απαιτείται η αλλαγή της κλίμακας μέτρησης όπως για παράδειγμα δίνεται στον επόμενο πίνακα 2.2.

Ηλικία	Χαρακτηρισμός	Κωδικοποίηση
≤ 18 ετών	Πολύ Νέοι	1
> 19 και ≤ 30	Νέοι	2
> 31 και ≤ 45	Ενήλικες	3
> 46 και ≤ 60	Μεσήλικες	4
> 61 και ≤ 80	Μεγάλης Ηλικίας	5
> 81	Υπερήλικες	6

Πίνακας 2.2. Παράδειγμα ανακωδικοποίησης (Ματσατσίνης, 2010)

Σαν κριτήριο (criterion) ορίζεται κάθε μονότονη μεταβλητή δηλωτική των προτιμήσεων του αποφασίζοντα. Τα κριτήρια μπορεί να είναι είτε ποσοτικά (measurable criteria) και να εκφράζονται από μια συνεχή κλίμακα (χρόνος θερμοκρασία, ...), είτε ποιοτικά-διάταξης (ordinal criteria) για τη μοντελοποίηση των οποίων χρησιμοποιούνται κλίμακες διακριτών τιμών. Τα κριτήρια συμβολίζονται:

$$g_j(a_i),\ i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{και} \quad j = 1, 2, .., m$$

Ορίζουμε: g: $A \rightarrow R$ και $a \rightarrow g(a)$

Όπου $g(a)$ είναι η εκτίμηση (evaluation) της εναλλακτικής επιλογής a του συνόλου A, πάνω στο κριτήριο g.

Η συνάρτηση αυτή οφείλει να πληροί την ιδιότητα της μονοτονίας σύμφωνα με την οποία, δεδομένων δύο εναλλακτικών επιλογών a και b του συνόλου A, θα πρέπει να ισχύουν:

- Η a θα πρέπει να προτιμάται από τη b όταν $g(a) > g(b)$
- Η a είναι ισοδύναμη με την b όταν: $g(a) = g(b)$

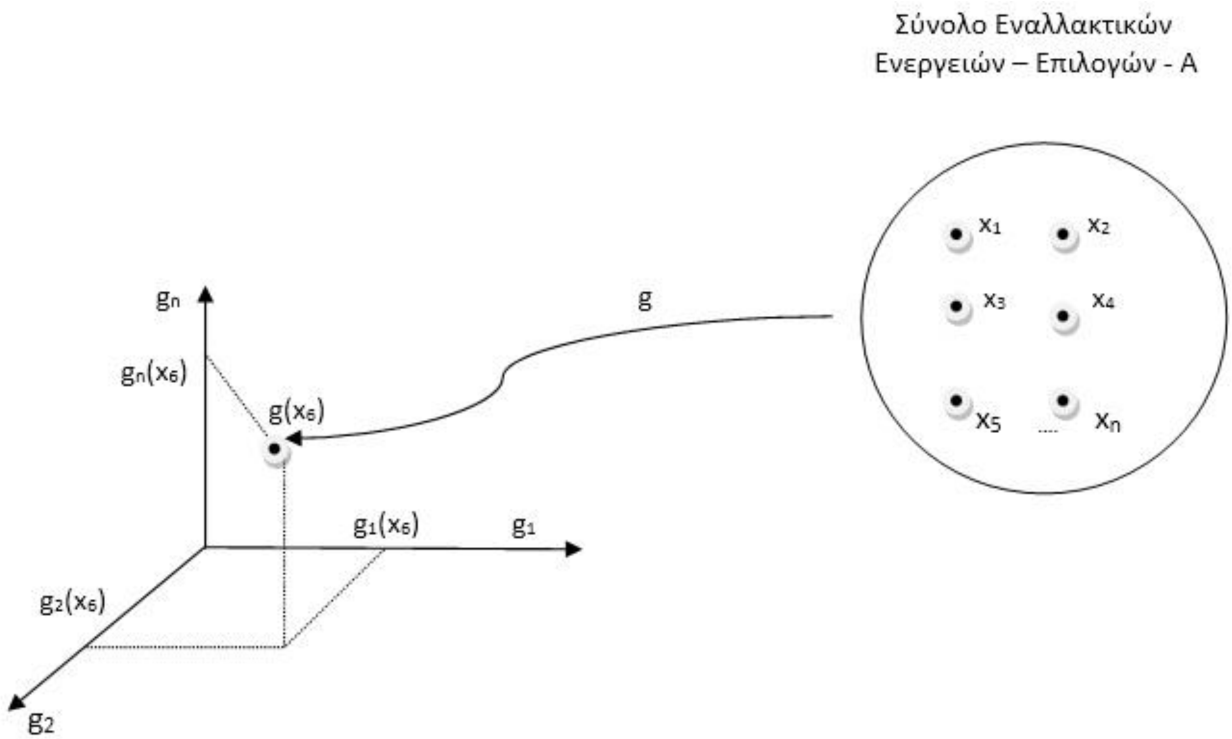
Το σύνολο των κριτηρίων, τα οποία χρησιμοποιούνται στη λήψη μια απόφασης, ονομάζεται συνεπής οικογένεια κριτηρίων (consistent family of criteria) και πρέπει να πληρούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Μονοτονίας ή συνέπειας (monotonicity or consistency): Να είναι μονότονα και συναφή με τις ατομικές προτιμήσεις. Τούτο σημαίνει ότι δοθέντων δύο εναλλακτικών επιλογών a και b η a προτιμάται της b όταν ισχύει:
  $g_i(a) = g_j(b)\ \forall\ i = j\ g_j(a) > g_j(b)$, τότε η εναλλακτική a προτιμάται από τη b.

- Επάρκειας (exhaustiveness) στα πλαίσια της διαθέσιμης πληροφορίας. Εάν για ένα ζεύγος εναλλακτικών επιλογών a και b ισχύει $g_i(a) = g_i(b) \quad \forall$ I = 1, 2, …, n, τότε η εναλλακτική a είναι ισοδύναμη της b, δηλαδή δεν απουσιάζει κανένα κριτήριο απόφασης από το σύνολο των χρησιμοποιούμενων κριτηρίων.

- Να μην είναι πλεοναστικά (non redundancy). Η αφαίρεση ενός κριτηρίου από το σύνολο των κριτηρίων απόφασης που χρησιμοποιούμε είναι ικανή να αναιρέσει μια από τις προηγούμενες δυο συνθήκες για κάποιο ζευγάρι εναλλακτικών επιλογών.

Με τη συνεπή οικογένεια κριτηρίων απεικονίζεται το σύνολο των εναλλακτικών επιλογών του συνόλου A στον n-διάστατο πραγματικό χώρο R^n (σχήμα 2.5). Στο σχήμα αυτό με $g(x_6) = \{g_1(x_6), g_2(x_6), \ldots, g_n(x_6)\}$, συμβολίζεται το διάνυσμα των πολυκριτήριων εκτιμήσεων της εναλλακτικής ενέργειας x6 $\in$ A πάνω στα n κριτήρια.



Σχήμα 2.5. Πολυκριτήρια απεικόνιση του συνόλου A (Ματσατσίνης, 2010)

2.5.3 Κατασκευή του μοντέλου ολικής προτίμησης (απόφασης ή συμπεριφοράς)

Στο στάδιο αυτό γίνεται η σύνθεση των κριτηρίων με τη βοήθεια ενός μοντέλου ολικής προτίμησης. Με βάση το μοντέλο αυτό και λαμβάνοντας υπόψη την επιλεγείσα προβληματική συγκρίνονται όλες οι εναλλακτικές επιλογές (ενέργειες, δράσεις, ...) του συνόλου A (Ματσατσίνης, 2010).

2.5.4 Υποστήριξη απόφασης

Γίνεται επεξεργασία και εφαρμογή σεναρίων. Αναζητούνται απαντήσεις σε ερωτήματα του αποφασίζοντα. Περιλαμβάνει όλες τις ενέργειες των αναλυτών ώστε να υποστηριχθούν οι προτάσεις τους οι οποίες προέκυψαν από την εφαρμογή των προηγούμενων σταδίων (Benayoun, et al., 1971; Ματσατσίνης, 2010).

2.6 Θεωρητικά ρεύματα

Τέσσερις είναι σήμερα οι κυρίαρχες τάσεις στην πολυκριτήρια λήψη αποφάσεων (Pardalos, et al., 1995):

2.6.1 Πολυκριτήριος ή πολυστοχικός μαθηματικός προγραμματισμός (Multiobjective mathematical programming)

Ο πολυκριτήριος ή πολυστοχικός μαθηματικός προγραμματισμός (multiobjective linear programming), πρόκειται για μοντέλα μαθηματικού προγραμματισμού με περισσότερες από μια αντικειμενικές συναρτήσεις.

Εδώ επικρατούν δύο προβληματικές όσον αφορά τον τρόπο που λαμβάνονται οι αποφάσεις. Σύμφωνα με τη πρώτη, την ονομαζόμενη αλληλεπιδραστική (interactive), η πορεία προς τη λήψη της τελικής απόφασης γίνεται χωρίς καμία αναφορά στη συνάρτηση χρησιμότητας από τον αποφασίζοντα, ο οποίος διαμορφώνει την υποκειμενική του αντίληψη για τη σημαντικότητα των κριτηρίων και κάνει τις επιλογές του, που αφορούν το επίπεδο προσέγγισης των στόχων του (Benayoun, et al., 1971). Κατά τη δεύτερη, την ορθολογική, κατασκευάζεται το ίδιο το μοντέλο του αποφασίζοντα, που χρησιμοποιείται ακολούθως στην ανάδειξη των αποφάσεων μέγιστης χρησιμότητας (Geoffrion, et al., 1972; Zionts & Wallenius, 1976; Jaquet-Lagreze, et al., 1987).

Ο πολυκριτήριος ή πολυστοχικός μαθηματικός προγραμματισμός αποτελεί μια γενίκευση του κλασικού γραμμικού προγραμματισμού που χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη πολλαπλών υπό μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση αντικειμενικών συναρτήσεων. Σε αυτό το ιδιαίτερο πολυκριτήριο πρόβλημα το σύνολο των εναλλακτικών ενεργειών A ορίζεται από ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών στον R^{p} χώρο, ενώ τα κριτήρια είναι γραμμικές συναρτήσεις οριζόμενες στο ίδιο διάστημα R^{p}. Το γενικό πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής (Roy & Vincke, 1981):

$$[\max]\ g_j = c_{j1}x_1 + c_{j2}x_2 + \dots + c_{jp}x_p \quad \text{με} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Κάτω από τους περιορισμούς:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jp}x_p = b_i \quad \text{με} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ή με τη μορφή:

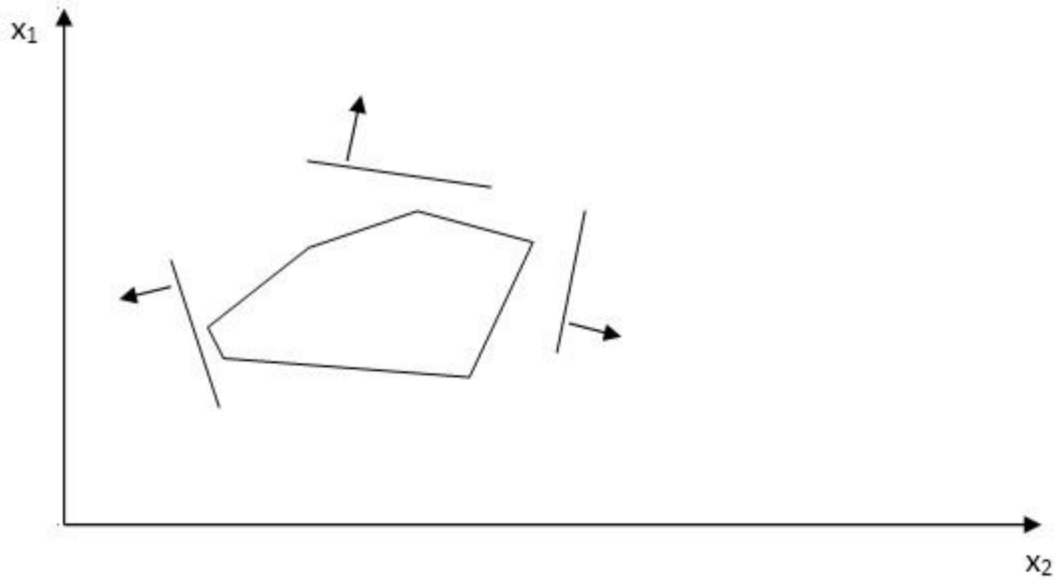
$$\begin{cases} (A)(X) = B \\ \max(C)(X) \end{cases}$$

όπου: (A), (X), (B) και (C) είναι πίνακες διαστάσεων m x p, p x 1, m x 1 και n x p.

Αν παραστήσουμε γεωμετρικά το σύνολο A είναι ένα σύνθετο πολύεδρο στο χώρο R^{p} και κάθε κριτήριο φθάνει στο μέγιστο του σε μια κορυφή, πιθανόν μια ακμή ή μια επιφάνεια του πολυέδρου (σχήμα 2.6).

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα κριτήρια g_i (i = 1, 2, …, n), έχουν ανταγωνιστικό ρόλο μεταξύ τους, γεγονός που καθιστά αδύνατη την εύρεση λύσης που βελτιστοποιεί όλα τα κριτήρια. Έτσι, ο στόχος είναι να βρεθεί μια «ικανοποιητική λύση».

Ο πολυκριτήριος μαθηματικός προγραμματισμός εκφράζει την επιθυμία του αποφασίζοντα να καταστήσει πιο ρεαλιστικό το μοντέλο του, παίρνοντας υπόψη του περισσότερα από ένα κριτήρια. Η μεθοδολογία μοντελοποίησης και επίλυσης γραμμικών προγραμμάτων με πολλαπλά κριτήρια παρουσιάζεται στο σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.6. Γεωμετρική παράσταση συνόλου A (Roy & Vincke, 1981)

Παρατηρούμε ότι η ανεύρεση λύσης εξαρτάται από:

- Την πολυκριτήρια μέθοδο ανάλυσης που θα επιλεγεί, και
- Από τον τρόπο πού ο αποφασίζων αλληλοεπιδρά και αντιδρά στην προσπάθεια να φτάσει σε μια ικανοποιητική λύση.

2.6.2 Θεωρία πολυκριτήριας χρησιμότητας (Multiattribute Utility Theory)

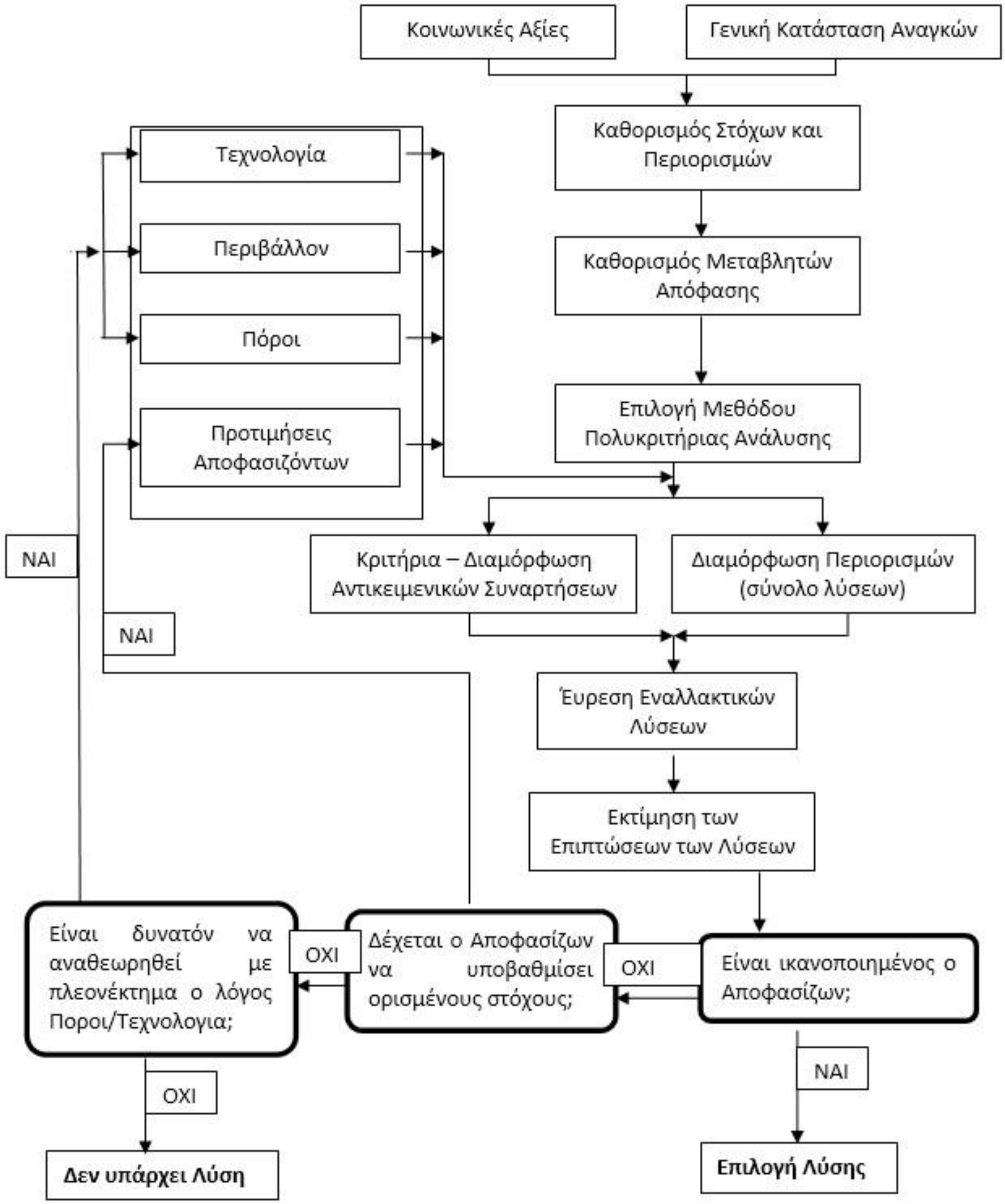
Η θεωρία πολυκριτήριας χρησιμότητας (Multiattribute Utility Theory - MAUT) έχει τις ρίζες της στις αρχές των (Adams & Fagot, 1959), (Yntena & Torgerson, 1961), (Miller & Starr, 1969) κ.α., που αναπτύχθηκαν στη δεκαετία του '60, και βασίζεται στην υπόθεση ότι σε κάθε πρόβλημα απόφασης υπάρχει μια πραγματική συνάρτηση εκτίμησης U ορισμένη στο A την οποία ο αποφασίζων επιθυμεί να μεγιστοποιήσει. Η συνάρτηση αυτή συνθέτει τα κριτήρια g_1, g_2, …,g_n.

Η θεωρία της πολυκριτήριας χρησιμότητας θεμελιώνεται πάνω σε δυο βασικές παραδοχές:

- Της αποδοχής ότι όλες οι εναλλακτικές επιλογές (ενέργειες, δράσεις, ...) είναι δυνατόν να συγκριθούν μεταξύ τους και δεν υπάρχει περίπτωση δυο από αυτές να μη μπορούν να συγκριθούν.
- Της μεταβατικότητας των προτιμήσεων μεταξύ των εναλλακτικών επιλογών (ενεργειών, δράσεων, ...).

Η γενική συνάρτηση του υπολογισμού της ολικής χρησιμότητας έχει τη μορφή:

$$U(a) = V[g_1(a), g_2(a), \ldots, g_m(a)],\ a \in A$$



Σχήμα 2.7. Μεθοδολογία μοντελοποίησης πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού (Σίσκος, 1992)

2.6.3 Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής

Σκοπός και βασικό πεδίο έρευνας όλων των μεθόδων που βασίζονται στη θεωρία των σχέσεων υπεροχής είναι η ακριβής μαθηματική μοντελοποίηση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα. Η μοντελοποίηση των προτιμήσεων επιτυγχάνεται μέσω της συνεργασίας του αναλυτή των αποφάσεων, με τον ίδιο τον αποφασίζοντα, με σκοπό τον καθορισμό μιας σειράς παραμέτρων όπως τα βάρη των κριτηρίων, τα όρια προτίμησης και αδιαφορίας, κλπ. Ο καθορισμός των παραμέτρων αυτών οδηγεί στην ανάπτυξη ενός μοντέλου απόφασης με στόχο την υλοποίηση μιας προβληματικής όπως για την επιλογή μιας εναλλακτικής ενέργειας, για την κατάταξη των εναλλακτικών από τις καλύτερες προς τις χειρότερες ή την ταξινόμηση τους σε προκαθορισμένες ομοιογενείς ομάδες. Σε αντίθεση με άλλα θεωρητικά ρεύματα και μεθόδους της πολυκριτήριας ανάλυσης όπως η πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας και η αναλυτική-συνθετική προσέγγιση, το μοντέλο απόφασης που αναπτύσσεται δεν έχει τη μορφή μιας μαθηματικής συνάρτησης βάσει της οποίας υπολογίζεται ένα σκορ ή της χρησιμότητας των εναλλακτικών ενεργειών. Αντίθετα το μοντέλο που αναπτύσσεται μέσω των μεθόδων που βασίζονται στη θεωρία των σχέσεων υπεροχής αναπαρίσταται με έναν απλό και κατανοητό τρόπο, τις σχέσεις προτίμησης, αδιαφορίας και ασυγκριτότητας που υπάρχουν μεταξύ των εξεταζόμενων εναλλακτικών ενεργειών.

Εκτός της μορφής του μοντέλου απόφασης που αναπτύσσεται μέσω των μεθόδων που βασίζονται στη θεωρία των σχέσεων υπεροχής, μπορούν επίσης να εντοπιστούν δύο ακόμα βασικά χαρακτηριστικά και πλεονεκτήματα σε σχέση με τις μεθόδους που βασίζονται στα άλλα θεωρητικά ρεύματα της πολυκριτήριας ανάλυσης.

- Παρέχουν τη δυνατότητα μοντελοποίησης της σχέσης ασυγκριτότητας (incomparability) μεταξύ των εναλλακτικών ενεργειών. Συχνά κατά τη διαδικασία λήψης των αποφάσεων σε πραγματικά προβλήματα, συμβαίνει ορισμένες από τις εξεταζόμενες εναλλακτικές ενέργειες να παρουσιάζουν πολύ διαφορετικά χαρακτηριστικά σε ορισμένα βασικά κριτήρια αξιολόγησης. Το γεγονός αυτό οπωσδήποτε επηρεάζει άμεσα την αξιολόγηση τους και θα πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη από τον αποφασίζοντα.

- Λαμβάνουν υπόψη τη μη μεταβατικότητα (non-transitivity) των προτιμήσεων του αποφασίζοντα.

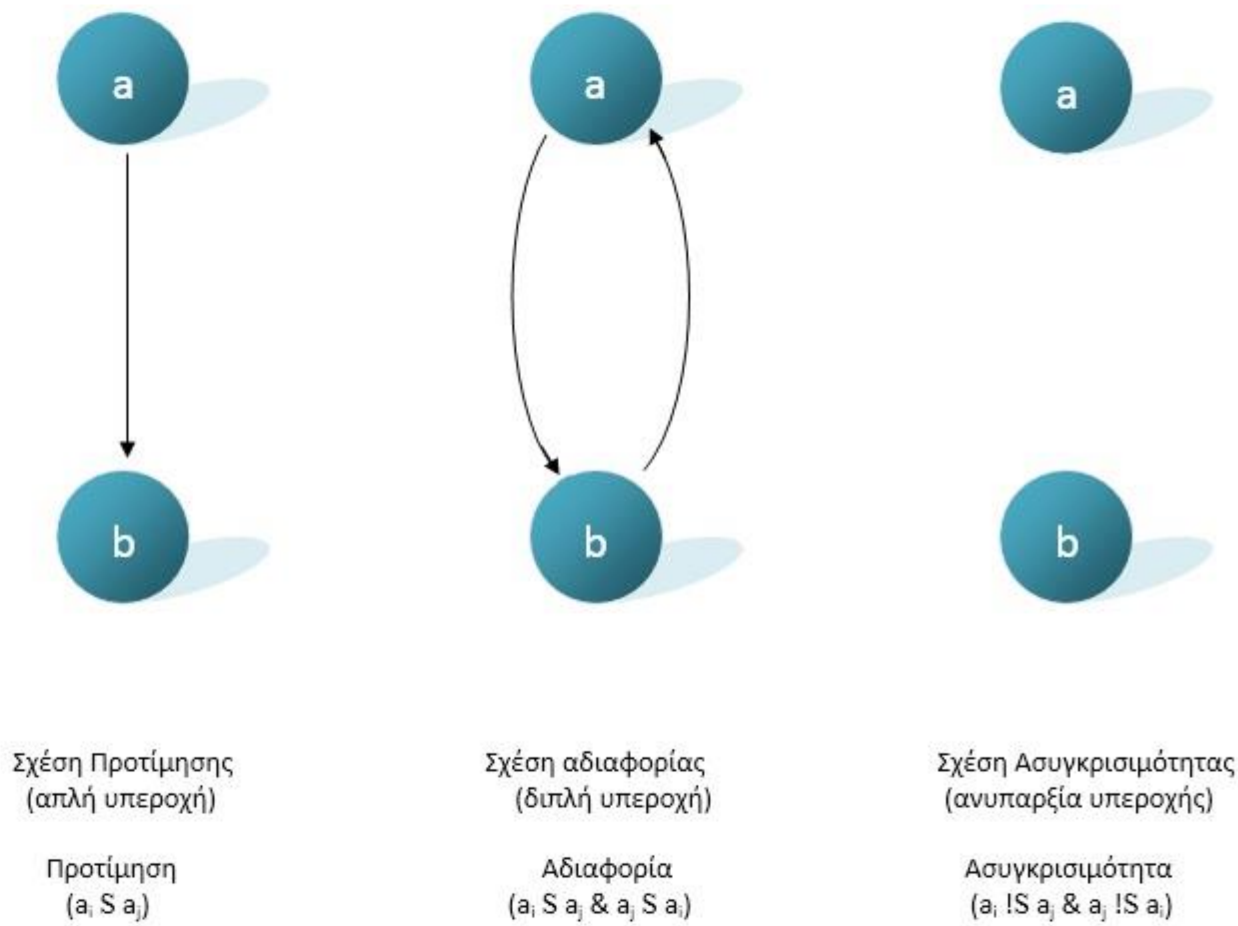
Οι σχέσεις υπεροχής (outranking relations) σύμφωνα με τις οποίες προκειμένου να ληφθεί η τελική απόφαση δεν είναι πάντα αναγκαία αλλά ούτε και ρεαλιστική η πλήρης διάταξη των εναλλακτικών επιλογών, γεγονός που προκύπτει από το αξίωμα της ολικής και μεταβατικής συγκρισιμότητας. Η θεωρία αυτή εφαρμόστηκε από τον (Roy, 1968) με την οικογένεια μεθόδων ELECTRE στην ανάλυση συμπεριφοράς (Roy, 1985; Roy & Bouyssou, 1993), σε θέματα μηχανικής, επενδύσεων κ.α. (Rogers, et al., 2000). Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στη δυαδική σχέση των προτιμήσεων μέσα από τις ανά ζεύγη συγκρίσεις των εναλλακτικών επιλογών.

Η μεθοδολογία αυτή υλοποιείται σε τρία στάδια:

- Μορφοποίηση του προβλήματος και προσδιορισμός των προτιμήσεων του αποφασίζοντα.
- Κατασκευή των σχέσεων υπεροχής μεταξύ των εναλλακτικών.
- Διερεύνηση των σχέσεων υπεροχής.

Σε ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών που εκτιμώνται με τη βοήθεια κριτηρίων, ορίζονται οι σχέσεις υπεροχής ενώ για κάθε κριτήριο ορίζονται τα κατώφλια συμφωνίας, ασυμφωνίας και veto.

Ορίζουμε ως σχέση υπεροχής τη διμερή σχέση S μεταξύ δύο εναλλακτικών ενεργειών a_i και aj, αν η a_i είναι καλύτερη ή τουλάχιστον ίδιο καλή με την a_j, και τη συμβολίζουμε a_i S a_j. Οι διμερείς σχέσεις (binary relations) προτιμήσεων δίνονται στο ακόλουθο σχήμα. 2.8.



Σχήμα 2.8. Διμερείς σχέσεις προτιμήσεων (Ματσατσίνης, 2010)

2.6.4 Μέθοδοι Ανάλυσης Παλινδρόμησης (Ordinal Regression)

Με την ανάλυση αυτή γίνεται χρήση μοντέλων ανάλυσης παλινδρόμησης στην προσπάθεια προσέγγισης της συλλογιστικής των αποφασιζόντων μέσα από μια διαδικασία ανάλυσης – σύνθεσης (aggregation – disaggregation approach) (Siskos, et al., 2005). Με τη μεθοδολογία αυτή καθορίζεται αφενός μεν ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών, αφετέρου δε ένα σύνολο κριτηρίων που τις χαρακτηρίζουν, ενώ καταγράφονται και οι προτιμήσεις των αποφασιζόντων. Τελικά γίνεται η εκτίμηση ενός αναλυτικού μοντέλου χρησιμότητας, το οποίο αναπαριστά με βέλτιστο τρόπο τις προτιμήσεις των αποφασιζόντων (Ματσατσίνης, 2010).

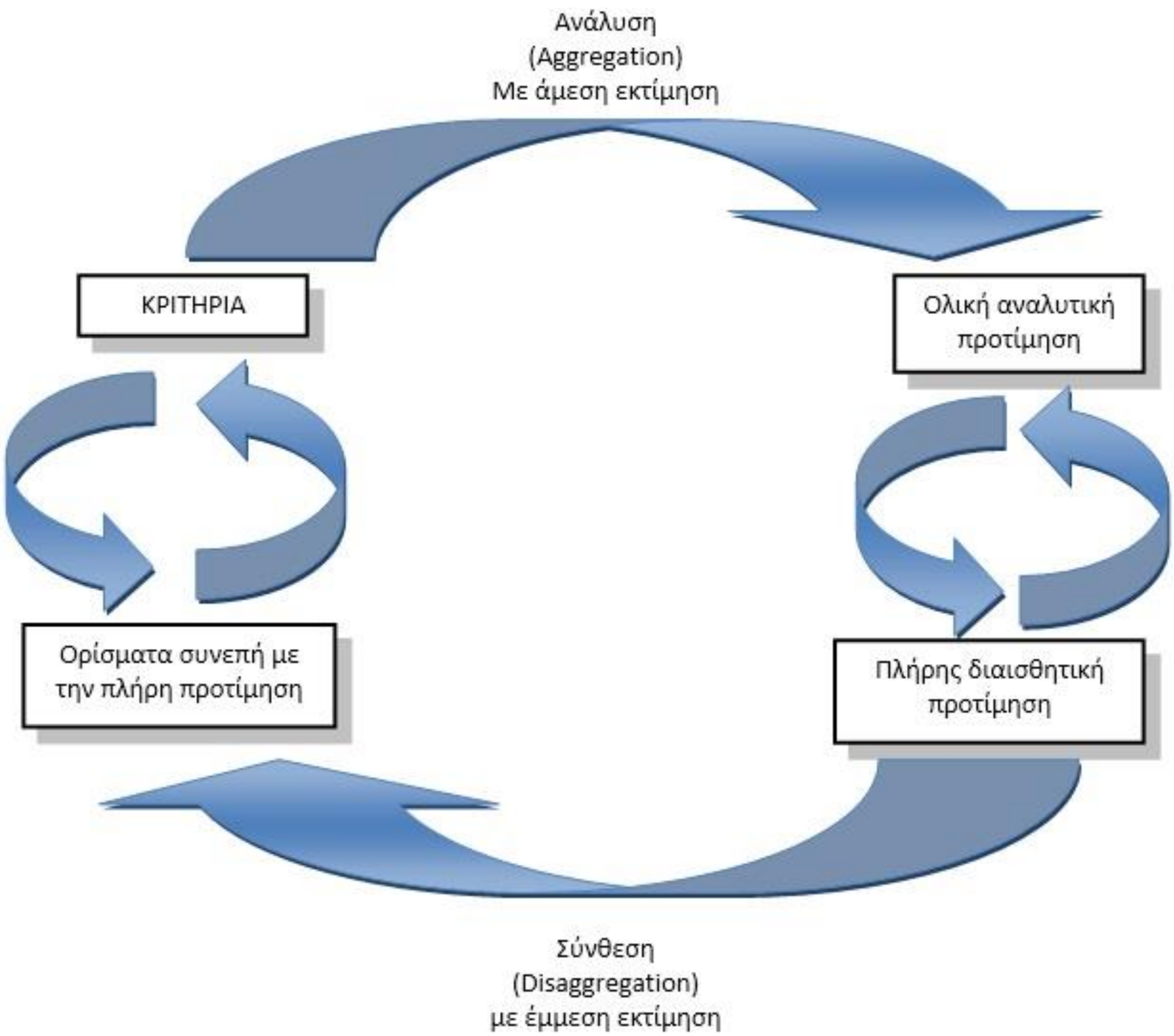
Σε αντίθεση με τη λογική που διέπει τα περισσότερα μοντέλα πολυκριτήριας ανάλυσης, ότι η απόφαση καθορίζεται μέσα από τη σύνθεση των κριτηρίων, εδώ γίνεται δεκτή η λογική που πηγάζει από την κυβερνητική και σύμφωνα με την οποία η απόφαση και τα κριτήρια επιδέχονται προοδευτική επεξεργασία αλληλοδομούμενα μέσα στο χρόνο (Ματσατσίνης, 2010). (σχήμα 2.9).

Αυτή η νέα προσέγγιση βοηθά στη σύλληψη μιας νέας συλλογιστικής με επαναληπτικό χαρακτήρα. Μέσα από τη σύνθεση των κριτηρίων και με βάση την επιλεγείσα προβληματική λαμβάνεται μία απόφαση. Η απόφαση αυτή εφαρμόζεται. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής παρατηρούνται και αναλύονται. Τα συμπεράσματα από την ανάλυση οδηγούν στην επανεκτίμηση των κριτηρίων και στην εκ νέου σύνθεση τους. Το ερώτημα που τίθεται είναι όταν είναι γνωστό ένα μοντέλο σύνθεσης, ποιες εκτιμήσεις των παραμέτρων θα επέτρεπαν τη βέλτιστη ανασύσταση ή ερμηνεία των δεδομένων των αποφάσεων. Στην ουσία είναι το γνωστό πρόβλημα συσχέτισης ενός μοντέλου απόφασης και μιας πραγματικής απόφασης. Αυτή η λογική της προσπάθειας αποδοχής ενός μοντέλου πολυκριτήριας ανάλυσης μέσα από την επαναληπτική αλληλεπίδραση μοντέλου και πραγματικότητας δίνεται παραστατικά στο σχήμα 2.10 (Ματσατσίνης, 2010).

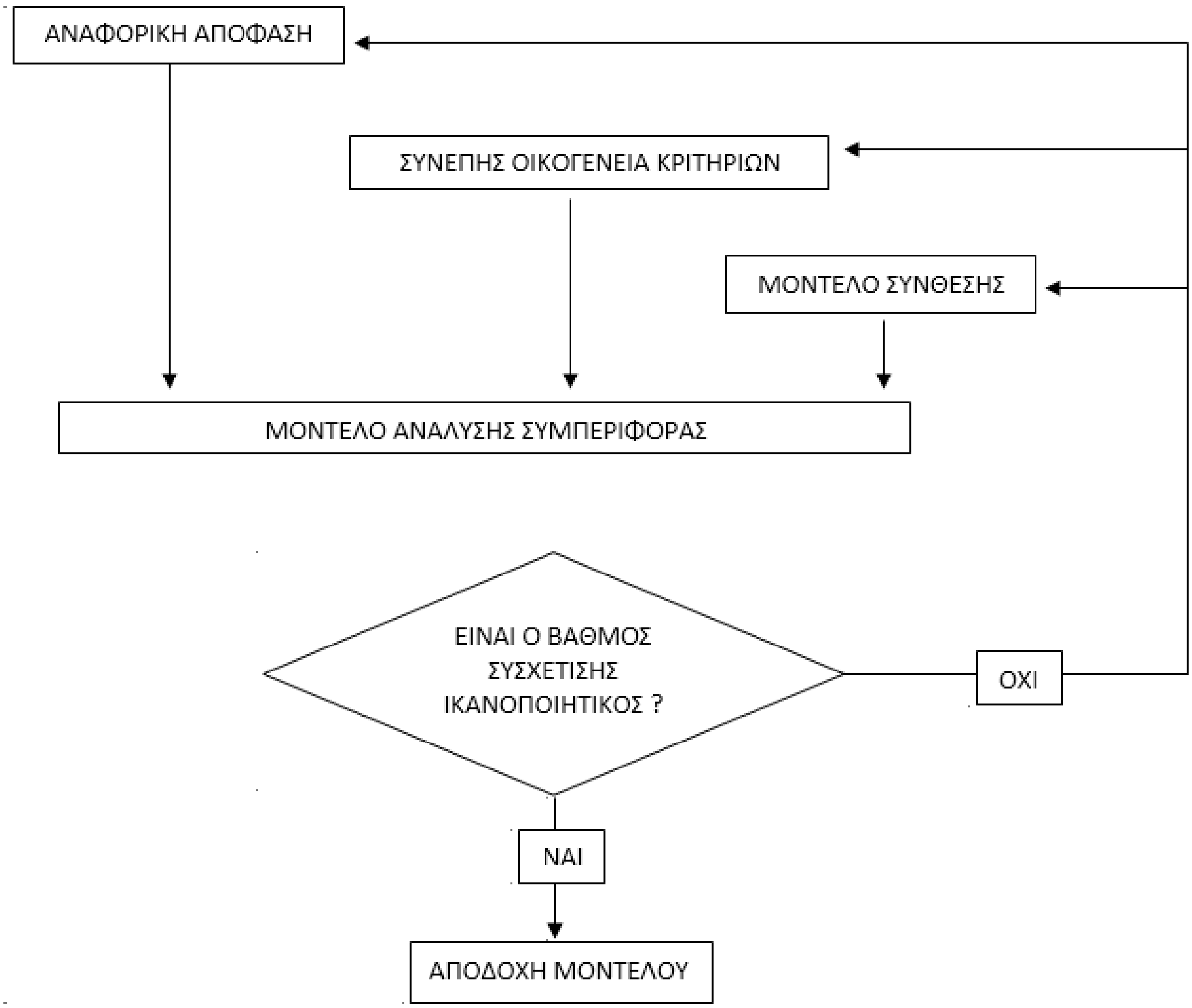
Σε περίπτωση μη ικανοποίησης του αποφασίζοντα όσον αφορά το βαθμό συσχέτισης μπορεί να θέσει ερώτημα και να επανεκτιμήσει:

- Τη συνέπεια της οικογένειας κριτηρίων (έλλειψη βασικών κριτηρίων, επιλογή καλύτερων δεικτών μέτρησης των, ...)
- Τον τρόπο λήψης της απόφασης (μη ορθολογικός;)
- Το μοντέλο σύνθεσης των κριτηρίων (υπερβολικός βαθμός απλούστευσης;)

Όταν ο βαθμός συσχέτισης κριθεί ικανοποιητικός τότε το μοντέλο πολυκριτήριας ανάλυσης γίνεται αποδεκτό και επεκτείνεται στο σύνολο των υπό εκτίμηση εναλλακτικών επιλογών (Ματσατσίνης, 2010).



Σχήμα 2.9. Σχέση κριτηρίων και αποφάσεων (Ματσατσίνης, 2010)



Σχήμα 2.10. Αποδοχή μοντέλου πολυκριτήριας ανάλυσης (Ματσατσίνης, 2010).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παραθέτονται όλες οι μέθοδοι πολυκριτήριας ανάλυσης που μπορέσαμε να συγκεντρώσουμε από τη διαθέσιμη βιβλιογραφία. Η παρουσίαση των μεθόδων γίνεται με βάση το θεωρητικό ρεύμα στο οποίο ανήκουν.

3.2 Μέθοδοι που βασίζονται στη Θεωρία Σχέσεων Υπεροχής

3.2.1 Μέθοδοι της οικογένειας ELECTRE

Η ιστορία των μεθόδων της οικογένειας ELECTRE ξεκινάει το 1965 στην Ευρωπαϊκή συμβουλευτική εταιρία SEMA. Εκείνη την περίοδο μια ερευνητική ομάδα της SEMA εργαζόταν σε ένα συγκεκριμένο πραγματικό πολυκριτήριο πρόβλημα που αφορούσε αποφάσεις που σχετίζονται με την ανάπτυξη νέων δραστηριοτήτων σε επιχειρήσεις. Για την «επίλυση» του συγκεκριμένου προβλήματος δημιουργήθηκε μια γενική πολυκριτήρια μέθοδος, η MASRAN (*Méthode d'Analyse, de Recherche, et de Sélection d'Activités Nouvelles*). Οι αναλυτές χρησιμοποίησαν μια τεχνική σταθμισμένου μέσου για την επιλογή των νέων δραστηριοτήτων.

Κατά τη χρήση της μεθόδου, οι μηχανικοί της SEMA παρατήρησαν σοβαρά μειονεκτήματα στην εφαρμογή αυτής της τεχνικής. Έτσι ανατέθηκε στον B. Roy να προσπαθήσει να δημιουργήσει μία νέα μέθοδο που θα ξεπεράσει τους περιορισμούς της MASRAN. Έτσι, το 1965 επινοήθηκε η μέθοδος ELECTRE, για την επιλογή της καλύτερης δράσης-δράσεων, μεταξύ ενός δεδομένου συνόλου δράσεων, η οποία αργότερα θα αναφερόταν ως ELECTRE I (Figueira, et al., 2005).

Το ακρωνύμιο ELECTRE προκύπτει από (*ELimination Et Choix Traduisant la REalité*) και υιοθετήθηκε για εμπορικούς λόγους (Figueira, et al., 2005). Ακολούθησε η ανάπτυξη μεθόδων βασισμένη στα χαρακτηριστικά της αρχικής, που επιλύουν διαφορετικές προβληματικές είτε μπορούν να διαχειριστούν διαφορετικού είδους δεδομένα. Επομένως, εκτός από την ELECTRE I που επιλύει προβλήματα επιλογής (προβληματική α) δεχόμενη μόνο πραγματικά κριτήρια, αναπτύχθηκε η ELECTRE IS, που αποτελεί γενίκευση της I, αλλά χρησιμοποιεί ψευδοκριτήρια.

Οι ELECTRE II, III, IV επιλύουν προβλήματα κατάταξης (προβληματική γ), ενώ η ELECTRE TRI επιλύει προβλήματα ταξινόμησης (προβληματική β) (Βλάχος, 2007).

3.2.1.1 ELECTRE I (Figueira, et al., 2005)

Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν όλα τα κριτήρια έχουν κωδικοποιηθεί στην ίδια αριθμητική κλίμακα του ίδιου εύρους. Η μέθοδος επιλύει προβλήματα επιλογής (προβληματική α). Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι μια δράση “*a* υπερέχει της *b*” (δηλαδή η *a* είναι τουλάχιστον όσο καλή είναι η *b*), εφόσον αυτές παραμένουν σταθερές στο χρόνο. Προκειμένου να ισχύει ο παραπάνω ισχυρισμός, πρέπει η ισχύς του συνδυασμού των τιμών συμφωνίας να είναι μεγάλη. Με τον όρο ισχύς του συνδυασμού των τιμών συμφωνίας, εννοούμε το άθροισμα των συντελεστών (βαρών) που σχετίζονται με τα κριτήρια που σχηματίζουν αυτό το συνδυασμό. Μπορεί να προσδιοριστεί από τον ακόλουθο δείκτη συμφωνίας (για λόγους απλοποίησης θεωρούμε ότι $\sum_{j \in J} w_j = 1$, όπου J το σύνολο των δεικτών των κριτηρίων):

$$c(aSb) = \sum_{\{j: g_j(a) \geq g_j(b)\}} w_j$$

(Όπου {j : g_j(a) $\geq g_j$(b)} είναι το σύνολο των δεικτών όλων των κριτηρίων που ανήκουν στο συνδυασμό τιμών συμφωνίας με τη σχέση υπεροχής *aSb*.). Με άλλα λόγια, η τιμή του δείκτη συμφωνίας πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση ενός δοθέντος επιπέδου συμφωνίας *s*, η τιμή του οποίου κυμαίνεται συνήθως μεταξύ [0,5, 1 - $\min_{j \in J} w_j$], ή αλλιώς $c(aSb) \geq s$.

Από την άλλη μεριά, δεν μπορεί να υπάρξει ασυμφωνία στον ισχυρισμό ότι «η *a* είναι τουλάχιστον όσο καλή είναι η *b*». Η ασυμφωνία υπολογίζεται από ένα επίπεδο ασυμφωνίας που ορίζεται ακολούθως:

$$d(aSb) = \max_{\{j: g_j(a) < g_j(b)\}} \{g_j(b) - g_j(a)\}$$

Αυτό το επίπεδο κατά μια έννοια μετράει την ισχύ του συνδυασμού ασυμφωνίας. Δηλαδή εάν η τιμή του ξεπεράσει ένα δεδομένο επίπεδο v, τότε η υπόθεση δεν ισχύει. Ο συνδυασμός ασυμφωνίας δεν ισχύει όταν d(aSb) $\leq$ v. Οι δείκτες συμφωνίας, ασυμφωνίας πρέπει να υπολογιστούν για κάθε ζεύγος εναλλακτικών (a,b) του συνόλου A, για a $\neq$ b.

Παρατηρούμε ότι αυτή η υπολογιστική διαδικασία οδηγεί (λαμβάνοντας υπόψη το σύνολο των κριτηρίων) σε μια δυαδική σχέση όλες τις εναλλακτικές του συνόλου A. Ως εκ τούτου για κάθε ζεύγος εναλλακτικών (a, b), μόνο μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις μπορεί να ισχύει:

- aSb και όχι bSa, δηλαδή aPb (η a είναι ισχυρά προτιμότερη της b).
- bSa και όχι aSb, δηλαδή bPa (η b είναι ισχυρά προτιμότερη της a).
- aSb και bSa, δηλαδή aIb (η a είναι αδιάφορη με τη b).
- Όχι aSb και όχι bSa, δηλαδη aRb (η a δεν είναι συγκρίσιμη με τη b).

Το επόμενο στάδιο της μεθόδου λαμβάνει υπόψη τη σχέση ισχυρής προτίμησης, ώστε να προσδιορίσει το μικρότερο δυνατό υποσύνολο δράσεων, από το οποίο μπορεί να επιλεγεί η καλύτερη συμβιβαστική δράση. Ένα τέτοιο υποσύνολο Â μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια του γραφήματος πυρήνα K_G. Όταν το γράφημα δεν έχει κυκλώματα, υπάρχει πάντοτε ένας μοναδικός πυρήνας, διαφορετικά το γράφημα περιέχει περισσότερους από έναν ή ίσως κανένα.

Στην περίπτωση που το γράφημα G περιέχει κάποιο κύκλωμα, τότε υπάρχει ένα επιπλέον προεπεξεργαστικό βήμα πού πρέπει να γίνει, όπου οι μεγαλύτεροι πυρήνες κυκλωμάτων μειώνονται σε χωριστά στοιχεία, σχηματίζοντας ένα υποσύνολο στο A, που θα το συμβολίσουμε $\overline{A}$. Κάθε ομάδα του συνόλου $\overline{A}$={ $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ...} αποτελείται πλέον από ένα σύνολο από (θεωρητικά) ισοδύναμες εναλλακτικές. Να σημειωθεί ότι ορίζεται μια νέα σχέση προτίμησης $\succ$ στο $\overline{A}$:

$$\overline{A}_p \succ \overline{A}_q \Leftrightarrow \exists a \in \overline{A}_p \ \text{καί} \ \exists b \in \overline{A}_q \ \text{ώστε} \ aSb \ \text{γιά} \ \overline{A}_p \neq \overline{A}_q$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο ELECTRE I, όλες οι εναλλακτικές που σχηματίζουν ένα κύκλο θεωρούνται αδιάφορες μεταξύ τούς, γεγονός που μπορεί να επικριθεί. Η ELECTRE IS σχεδιάστηκε για να μετριάσει αυτή την αδυναμία.

3.2.1.2 ELECTRE Iv (Figueira, et al., 2005)

Το όνομα ELECTRE Iv δόθηκε άτυπα για να οριστεί μια τροποποίηση της ELECTRE I με κατώφλια veto. Αυτή η νέα δυνατότητα έδωσε στους αναλυτές – αποφασίζοντες τη δυνατότητα να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που σχετίζονται με την ετερογένεια των κλιμάκων. Με αυτή τη μέθοδο, για οποιοδήποτε είδος κλίμακας, μπορεί να προκύψει ένα υποσύνολο εναλλακτικών το οποίο μπορεί να μελετηθεί από τους αποφασίζοντες. Ενώ το επίπεδο ασυμφωνίας σχετίζεται με την κλίμακα του κριτηρίου g_j με απόλυτο τρόπο για μια εναλλακτική a του συνόλου A, το κατώφλι veto σχετίζεται με την προτίμηση της διαφοράς μεταξύ των $g_j(a)$ και $g_j(b)$. Η μόνη διαφορά σε τύπους και δομή μεταξύ ELECTRE I και ELECTRE Iv είναι συνθήκη ασυμφωνίας, που θα ονομάζουμε «συνθήκη μη ύπαρξης veto» η οποία διατυπώνεται ακολούθως:

$$g_j(a)+v_j(g_j(a)) \geq g_j(b), \quad \forall\, j \in J$$

Για να επιβεβαιωθεί ο ισχυρισμός ότι η a υπερτερεί της b, είναι απαραίτητο ότι κανένα από τη μειονότητα των κριτηρίων που αντιτίθενται στον ισχυρισμό να θέτουν veto. Η ELECTRE Iv λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο με την ELECTRE I. Παρόλα αυτά η μέθοδος δεν είναι ολοκληρωμένη καθώς δεν μπορεί να διαχειριστεί το πρόβλημα της ελλιπούς πληροφόρησης.

3.2.1.3 ELECTRE IS (Figueira, et al., 2005)

Η κύρια διαφορά της ELECTRE IS είναι η χρήση ψευδο-κριτηρίων έναντι αληθών κριτηρίων. Η μέθοδος είναι επέκταση της προηγούμενης μεθόδου, στοχεύοντας να λάβει υπόψη ένα διπλό ζήτημα: πρωτίστως την αξιοποίηση πιθανής μηδενικής αδιαφορίας και κατωφλιών προτίμησης ορισμένων κριτηρίων που ανήκουν στο σύνολο F και ενίσχυση της συνέπειας του veto όταν η σημαντικότητα του συνδυασμού τιμών συμφωνίας ελαττώνεται. Οι συνθήκες τόσο για συμφωνία όσο και για «όχι veto» αλλάζουν. Οι τύποι για κάθε μία από αυτές τις συνθήκες είναι:

- Συνθήκη συμφωνίας

Ξεκινάμε δημιουργώντας τους δυο ακόλουθους δείκτες:

1. Σχετικά με τα κριτήρια για τα οποία ισχύει aSb

$$J^S = \{ j \in J : g_j(a)+q_j(g_j(a)) \geq g_j(b) \}$$

2. Σχετικά με τα κριτήρια για τα οποία ισχύει bQa

$$J^Q = \{ j \in J : g_j(a) + q_j(g_j(a)) < g_j(a) \le g_j(b) + p_j(g_j(b)) \}$$

Η συνθήκη συμφωνίας θα είναι:

$$c(aSb) = \sum_{j \in J^S} w_j + \sum_{j \in J^Q} \varphi_j w_j \ge s$$

Όπου,

$$\varphi_j = \frac{g_j(a) + p_j(g_j(a)) - g_j(b)}{p_j(g_j(a)) - q_j(g_j(a))}$$

Ο συντελεστής φ ελαττώνεται γραμμικά από το 1 μέχρι το 0, ενώ το g_j περιγράφει το εύρος $[g_j(a) + q_j(g_j(a)), g_j(a) + p_j(g_j(a))]$.

- Συνθήκη «όχι veto»

Η συνθήκη όχι veto μπορεί να παρασταθεί ακολούθως:

$$g_j(a) + v_j(g_j(a)) \ge g_j(b) + q_j(g_j(b))\eta_j$$

Όπου,

$$\eta_j = \frac{1 - c(aSb) - w_j}{1 - s - w_j}$$

Κατά τη διαδικασία της επεξεργασίας, οι εναλλακτικές που βρίσκονται σε ένα κύκλο δεν λαμβάνονται πλέον ως αδιάφορες όπως στις προηγούμενες εκδόσεις ELECTRE για προβλήματα επιλογής. Τώρα λαμβάνουμε υπόψη την έννοια του βαθμού ισχύος της δήλωσης «η a υπερέχει της b». Η ενίσχυση της επίδρασης του veto μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε αληθείς ομάδες – κλάσεις ισοδύναμων και να προσδιορίσουμε ένα άκυκλο γράφημα μεταξύ αυτών των ομάδων. Υπό αυτές της συνθήκες υπάρχει πάντοτε ένας μοναδικός πυρήνας.

3.2.1.4 ELECTRE II

Η ELECTRE II ήταν η πρώτη μέθοδος της οικογένειας ELECTRE που σχεδιάστηκε για να διαχειρίζεται προβλήματα κατάταξης. Επίσης ήταν η πρώτη μέθοδος που πρότεινε δυο σχέσεις υπεροχής (ισχυρή – ασθενής). Η ELECTRE II χρησιμοποιεί μόνο αληθή κριτήρια. Τόσο η ισχυρή όσο και η ασθενής υπεροχή έχουν δομηθεί με τη βοήθεια δυο διαφορετικών κατωφλιών συμφωνίας, $s^1 > s^2$, όπου s^1, $s^2 \in [0.5, 1- \min_{j\in J} w_j]$. Η συνθήκη συμφωνίας με την υπόθεση «η a υπερτερεί της b» ορίζεται ακολούθως:

$$c(aSb) \geq s^r \;\; \kappa\alpha\acute{\iota} \;\; c(aSb) \geq c(bSa), \;\; \gamma\iota\acute{\alpha} \;\; r = 1,2$$

(Figueira, et al., 2005)

Η μέθοδος αποτελείται από έναν αλγόριθμο τεσσάρων βημάτων (Figueira, et al., 2005; Ματσατσίνης, 2010):

1. <u>Απαλοιφή κυκλωμάτων</u>: Γίνεται εντοπισμός και αντικατάσταση των μέγιστων κυκλωμάτων του γραφήματος υπεροχής S^1 με εικονικές επιλογές

2. <u>Πλήρης κατάταξη Z_1</u>: Στο γράφημα S^1 τοποθετούνται ως ισοδύναμες οι εναλλακτικές επιλογές (σύνολο B^1) των οποίων δεν υπερέχει καμία άλλη εναλλακτική του A. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται στο γράφημα A-B^1 , κοκ. Τέλος η σχέση υπεροχής S^2 χρησιμοποιείται για ξεκαθάρισμα της κατάταξης στο εσωτερικό των B^i.

3. <u>Πλήρης κατάταξη Z_2</u>: Στο γράφημα S^1 τοποθετούνται στην ουρά της κατάταξης ως ισοδύναμες οι εναλλακτικές επιλογές που δεν υπερέχουν καμίας άλλης δράσης του συνόλου A. Στη συνέχεια αυτές αφαιρούνται από το A και ακολουθείται παρόμοια διαδικασία με την κατάταξη Z_1 από κάτω προς τα πάνω, ενώ η σχέση S^2 ξεκαθαρίζει περισσότερο την κατάταξη στο εσωτερικό κάθε κλάσης ισοδυναμίας.

4. <u>Καθορισμός της μερικής κατάταξης Z</u>:

$$Z = Z_1 \cap Z_2$$
$$a\,Z\,b \Leftrightarrow a\,Z_1\,b \;\; \kappa\alpha\acute{\iota} \;\; a\,Z_2\,b$$

Οι εναλλακτικές επιλογές, για τις οποίες δεν έχουμε επαλήθευση της σχέσης Z, θεωρούνται ασύγκριτες.

(Ματσατσίνης, 2010)

3.2.1.5 ELECTRE III (Figueira, et al., 2005)

Η ELECTRE III σχεδιάστηκε για να αποτελέσει βελτίωση της ELECTRE II και συγκεκριμένα να έχει τη δυνατότητα να διαχειριστεί ανακριβή, αβέβαια ή απροσδιόριστα δεδομένα. Ο στόχος επετεύχθη και η μέθοδος εφαρμόστηκε με επιτυχία τις τελευταίες δεκαετίες σε ένα ευρύ φάσμα πραγματικών προβλημάτων. Η καινοτομία της μεθόδου είναι η χρήση ψευδοκριτηρίων, έναντι αληθών κριτηρίων.

Στη μέθοδο ELECTRE III οι σχέσεις υπεροχής μπορούν να εκληφθούν ως ασαφείς σχέσεις. Η κατασκευή αυτής της σχέσης απαιτεί την εισαγωγή ενός δείκτη αξιοπιστίας ο οποίος θα χαρακτηρίζει την εγκυρότητα του ισχυρισμού «η a υπερέχει της b», aSb. Ας συμβολίσουμε το δείκτη ρ(aSb). Ο δείκτης αυτός ορίζεται χρησιμοποιώντας τόσο το δείκτη συμφωνίας c(aSb) όσο και το δείκτη ασυμφωνίας για κάθε κριτήριο g_j, δηλαδή d_j(aSb). Ο δείκτης ασυμφωνίας είναι:

$$d_j(aSb) = \left\{ \begin{array}{c} 1\,\varepsilon\acute{\alpha}\nu\; g_j(b) > g_j(a) + v_j(g_j(a)) \\ 0\,\varepsilon\acute{\alpha}\nu\; g_j(b) \le g_j(a) + p_j(g_j(a)) \\ \dfrac{g_j(b) - g_j(a) - p_j(g_j(a))}{v_j(g_j(a)) - p_j(g_j(a))}, \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{array} \right\}$$

Ο δείκτης (ή βαθμός) αξιοπιστίας ορίζεται ακολούθως:

$$\rho(aSb) = c(aSb) \prod_{\{j \in J : d_j(aSb) > c(aSb)\}} \frac{1 - d_j(aSb)}{1 - c(aSb)}$$

Σημειώνουμε ότι όταν d_j(aSb) = 1, εξυπακούεται ότι ρ(aSb) = 0, καθώς c(aSb) < 1
Ο ορισμός του ρ(aSb) βασίζεται στις ακόλουθες βασικές ιδέες:

a) Όταν δεν υπάρχει κάποιο κριτήριο σε ασυμφωνία, η αξιοπιστία της σχέσης υπεροχής είναι ίση με το δείκτη συμφωνίας.

b) Όταν ένα κριτήριο που βρίσκεται σε ασυμφωνία ασκεί veto, ο ισχυρισμός δεν είναι αξιόπιστος, επομένως η τιμή του δείκτη είναι μηδέν.

c) Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις στις οποίες ο δείκτης συμφωνίας είναι αυστηρά χαμηλότερος από το δείκτη ασυμφωνίας στο κριτήριο που βρίσκεται σε ασυμφωνία, ο δείκτης αξιοπιστίας γίνεται μικρότερος από το δείκτη συμφωνίας εξαιτίας της αντίστασης πάνω στο κριτήριο.

Η διαδικασία της μεθόδου ξεκινά δημιουργώντας δυο πλήρεις προδιατάξεις που πηγάζουν από τις σχέσεις ασάφειας, όπως στην ELECTRE II. Έπειτα δημιουργείται μια μερική προδιάταξη Z ως τομή των δύο προδιατάξεων,Z_1 και Z_2 . Η μερική προδιάταξη Z_1 ορίζεται ως διαμέριση του συνόλου A σε q διατεταγμένες κλάσεις, $\overline{B}_1,...,\overline{B}_h,...,\overline{B}_q$, όπου $\overline{B}_1$ είναι αρχική κλάση του Z_1. Κάθε κλάση $\overline{B}_h$ αποτελείται από συνδεμένα στοιχεία με βάση το Z_1. Η πλήρης προδιάταξη Z_2 είναι ορισμένη με ανάλογο τρόπο, όπου το A έχει διαμεριστεί σε u κλάσεις, $\underline{B}_1,...,\underline{B}_h,...,\underline{B}_u$, με τη $\underline{B}_u$ να είναι η αρχική κλάση. Κάθε μια από αυτές της ομάδες έχει παραχθεί ως αποτέλεσμα μιας διαδικασίας «φιλτραρίσματος» δεδομένων.

Η διαδικασία υπολογισμού του Z_1 ξεκινάει (πρώτο φιλτράρισμα) ορίζοντας ένα αρχικό σύνολο D_0 = A και οδηγεί στο πρώτο συνολικά φιλτραρισμένο σύνολο $\overline{B}_1$. Όταν φτάσουμε στο $\overline{B}_h$, στο βήμα h+1, θέτουμε D_0 = A\($\overline{B}_1 \cup ... \overline{B}_h$). Με βάση το Z_1, οι εναλλακτικές του συνόλου $\overline{B}_h$ είναι προτιμώμενες του συνόλου $\overline{B}_{h+1}$. Για αυτό το λόγο το φιλτράρισμα που οδηγεί σε αυτές τις κλάσεις θα ονομάζεται κατάδυση (από πάνω προς τα κάτω).

Η διαδικασία που καταλήγει στο Z_2 είναι αρκετά παρόμοια, αλλά αυτή τη φορά οι εναλλακτικές του συνόλου $\overline{B}_h + 1$ προτιμώνται του $\overline{B}_h$. Αυτή η διαδικασία θα ονομάζεται αναρρίχηση (από κάτω προς τα πάνω).

Η μερική προδιάταξη Z μπορεί να υπολογιστεί ως η τομή των Z_1 και Z_2 . Στο τέλος υποδεικνύεται ένα πλήρως διατεταγμένο σύνολο λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες μερικές προδιατάξεις και κάποιους επιπλέον παράγοντες.

3.2.1.6 ELECTRE IV

Η μέθοδος αυτή (Roy & Hugonnard, 1982) αφορά την επίλυση προβλημάτων που εντάσσονται στην προβληματική γ. Όπως και η ELECTRE III βασίζεται σε μία οικογένεια ψευδοκριτηρίων. Ο στόχος της είναι να προδιατάξει τις εναλλακτικές αποφεύγοντας να εισάγει βάρη σημαντικότητας στα κριτήρια. Το μοντέλο αποφεύγει τα βάρη υποθέτοντας ότι καμία δομή προτίμησης δεν θα βασίζεται σε μια μεγαλύτερη ή μικρότερη σημαντικότητα των κριτηρίων. Κανένα κριτήριο δεν θα κυριαρχεί στη διαδικασία της απόφασης. Με τον τρόπο αυτό καλύπτεται η αδυναμία των αναλυτών να προσδιορίσουν τους συντελεστές βαρύτητας στις μεθόδους ELECTRE (Ματσατσίνης, 2010).

Η μέθοδος χρησιμοποιεί πέντε παραμέτρους S_q, S_c, S_p, S_s και S_v για να κατασκευάσει ασαφείς σχέσεις υπεροχής, έτσι ώστε από τις συγκρίσεις ζευγών των εναλλακτικών επιλογών a και b για κάθε σχετικό κριτήριο μπορεί να συντίθεται για να διαμορφώσει μία καθολική σχέση υπεροχής. Σημειώνονται τα ακόλουθα:

$m_p(b, a)$: Το πλήθος των κριτηρίων για τα οποία η επιλογή b προτιμάται σαφώς της a.

$m_q(b, a)$: Το πλήθος των κριτηρίων για τα οποία η επιλογή b προτιμάται ασθενώς της a.

$m_i(b, a)$: Το πλήθος των κριτηρίων για τα οποία η επιλογή b κρίνεται αδιάφορη για την a, ακόμα και στην περίπτωση που η τιμή της προτίμησης της είναι καλύτερη.

$m_o(b, a) = m_o(a, b)$: Το πλήθος των κριτηρίων για τα οποία οι επιλογές a και b δρούν πανομοιότυπα.

Είναι προφανές ότι οι ακόλουθες σχέσεις πρέπει να ισχύουν για όλα τα ζεύγη (a, b) για το πλήθος των m κριτηρίων:

$$m = m_p(a, b) + m_q(a, b) + m_i(a, b) + m_o(a, b) + m_i(b, a) + m_q(b, a) + m_p(b, a)$$

Κάθε ζεύγος επιλογών συνδέεται με μία και μόνο μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

(Ματσατσίνης, 2010)

Οι σχέσεις υπεροχής ορίζονται ως εξής (Valee & Zielniewicz, 1994):

- Ημι-κυριαρχία S_q:

Η εναλλακτική επιλογή b υπερέχει της a με ημι-κυριαρχία εάν και μόνο αν:

Δεν υπάρχει κριτήριο στο οποίο η a να είναι είτε ασθενώς είτε ισχυρά προτιμητέα της b και ο αριθμός κριτηρίων για τα οποία η a εκτιμάται ως αδιάφορη της b πρέπει να είναι μικρότερο από το πλήθος για τα οποία η b είναι είτε αδιάφορη, ασθενής ή ισχυρώς προτιμητέα της a.

$$bS_q a \Leftrightarrow \begin{cases} m_p(a,b) + m_p(b,a) = 0 \\ m_i(a,b) < m_i(b,a) + m_q(b,a) + m_p(b,a) \end{cases}$$

- Κανονικές κυριαρχίες S_c:

Η εναλλακτική επιλογή b υπερέχει της a με κανονικές κυριαρχίες εάν και μόνο αν:

Δεν υπάρχει κριτήριο στο οποίο η a να προτιμάται ισχυρά της b.

Ο αριθμός των κριτηρίων για τα οποία η a είναι ασθενώς προτιμότερη της b είναι τουλάχιστον ίσος του αριθμού των κριτηρίων για τα οποία η b είναι αυστηρά προτιμητέα της a, και ο αριθμός των κριτηρίων για τα οποία η a έχει καλύτερο σκορ από τη b δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό των κριτηρίων για τα οποία η b έχει καλύτερο σκορ από την a συν ένα:

$$bS_c a \Leftrightarrow \begin{cases} m_p(a, b = 0) \\ m_q(a,b) \leq m_p(b,a) \\ m_q(a,b) + m_i(a,b) < m_i(a,b) + m_q(a,b) + m_p(b,a) \end{cases}$$

- Ψευδο-κυριαρχία S_p:

Η εναλλακτική επιλογή b υπερέχει της a με ψευδοκυριαρχίες εάν και μόνο εάν:

Δεν υπάρχει κριτήριο για το οποίο η a να είναι ισχυρά προτιμώμενη της b, και

Ο αριθμός των κριτηρίων για τα οποία η a είναι ασθενώς προτιμώμενη της b είναι τουλάχιστον ίση του αριθμού των κριτηρίων για τα οποία η b είναι ασθενώς ή αυστηρά προτιμητέα της a.

$$bS_p a \Leftrightarrow \begin{cases} m_p(a,b) = 0 \\ m_q(a,b) \leq m_q(b,a) + m_p(b,a) \end{cases}$$

- Υπο-κυριαρχίες S_s:

Η εναλλακτική επιλογή b υπερέχει της a με υπο-κυριαρχίες εάν και μόνο εάν:

Δεν υπάρχει κριτήριο για το οποίο η a είναι ισχυρώς προτιμητέα της b.

$$bS_s a \Leftrightarrow m_p(a,b) = 0$$

- Κυριαρχία veto S_v:

Η εναλλακτική επιλογή b υπερέχει της a με κυριαρχία veto εάν και μόνο εάν:

Δεν υπάρχει κριτήριο για το οποίο η a να είναι ισχυρώς προτιμητέα της b και η πρόσθετη συνθήκη που απαιτείται για τη ψευδοκυριαρχία δεν είναι αποδεδειγμένη.

Εάν υπάρχει ένα μοναδικό κριτήριο για το οποίο η a είναι αυστηρώς προτιμώμενη της b αλλά με διαφορετικότητα μεταξύ δύο εκτιμήσεων φιλονικίας των κατωφλιών veto, η κυριαρχία veto απαιτεί ότι η a είναι αυστηρώς προτιμώμενη της b για την πλειοψηφία των κριτηρίων.

$$bS_v a \Leftrightarrow \left\| \begin{cases} m_p(a,b) = 0 \; είτε \\ m_p(a,b) = 0 \\ m_p(b,a) \geq \dfrac{m}{2} \\ g_j(b) + v_j\left[g_j(b) \geq g_j(a)\right], \forall j \in F \end{cases} \right.$$

Για κάθε ζεύγος εναλλακτικών επίλογών (a, b) υπολογίζεται ο βαθμός αξιοπιστίας S(a, b) ∈ [0, 1]. Αυτό δείχνει σε τι βαθμό η δήλωση «a υπερέχει της b» μπορεί να επιβεβαιωθεί (Ματσατσίνης, 2010).

3.2.1.7 ELECTRE TRI

Η μέθοδος ELECTRE TRI χρησιμοποιείται σε προβλήματα ταξινόμησης (προβληματική β), όπου οι εναλλακτικές επιλογές κατανέμονται σε προκαθορισμένες ομάδες. Στην ELECTRE TRI, οι ομάδες διατάσσονται από τη χειρότερη (C_1) προς την καλύτερη (C_k). Κάθε ομάδα χαρακτηρίζεται από ένα άνω και κάτω όριο. Ας συμβολίσουμε $C = \{C_1, \dots, C_h, \dots, C_k\}$ το σύνολο των ομάδων. Η τοποθέτηση μίας δράσης a σε μια συγκεκριμένη κατηγορία C_h προκύπτει ως αποτέλεσμα της σύγκρισης με τα υψηλά και χαμηλά όρια των ομάδων, με το b_h να είναι το άνω όριο της ομάδας C_h και το κάτω όριο της ομάδας C_{h+1}, για όλα τα h = 1, …, k.

Δοθέντος του ορίου b_h, η σύγκριση βασίζεται στην αξιοπιστία των ισχυρισμών aSb_h και b_hSa. Ο δείκτης αξιοπιστίας ορίζεται όπως στην ELECTRE III. Εφεξής θα θεωρήσουμε, χωρίς να αποτελεί κανόνα ότι η προτίμηση αυξάνεται όσο αυξάνεται η τιμή ενός κριτηρίου. Αφού προσδιορίσουμε το δείκτη αξιοπιστίας, εισάγουμε το όριο-λ, το οποίο καλείται επίπεδο αποκοπής. Αυτό το όριο μπορεί να ερμηνευτεί ως η μικρότερη τιμή του δείκτη αξιοπιστίας για την οποία ισχύει aSb_n. Συμβολίζουμε $\prec$ την προτίμηση, I την αδιαφορία και R την ασυγκρισιμότητα (Figueira, et al., 2005).

Μία εναλλακτική a μπορεί να συνδέεται με το όριο b_h με μία από τις παρακάτω σχέσεις:

- aIb_h εάν aSb_h και b_hSa
- $a \succ b_h$ εάν aSb_h και όχι b_hSa
- $b_h \succ a$ εάν όχι aSb_h και b_hSa
- aRb_h εάν όχι aSb_h και όχι b_hSa

Ο στόχος είναι να αξιοποιήσουμε τις παραπάνω δυικές σχέσεις προτείνοντας μία εκχώρηση. Αυτή η εκχώρηση βασίζεται σε δυο λογικές (Figueira, et al., 2005):

1. Τη λογική σύζευξης, σύμφωνα με την οποία μια ενέργεια-δράση μπορεί να εκχωρηθεί σε κάποια ομάδα, όταν η επίδοση της σε κάθε κριτήριο είναι τουλάχιστον όσο καλή όσο το κατώτερο όριο που έχει οριστεί για αυτό το κριτήριο σε αυτή την ομάδα. Η δράση αυτή εκχωρείται στην υψηλότερη ομάδα που πληροί αυτή τη συνθήκη.

2. Τη λογική της διάζευξης, σύμφωνα με την οποία μια ενέργεια-δράση μπορεί να εκχωρηθεί σε κάποια ομάδα εάν έχει τουλάχιστον σε ένα κριτήριο επίδοση τουλάχιστον όσο καλή όσο το κατώτερο όριο που έχει τεθεί για αυτό το κριτήριο σε αυτή την ομάδα. Η δράση εκχωρείται στην υψηλότερη ομάδα που πληροί αυτή τη συνθήκη.

Σύμφωνα με τον κανόνα διάζευξης η ενέργεια-δράση εκχωρείται σε γενικά υψηλότερη ομάδα σε σχέση με τον κανόνα σύζευξης. Για αυτό το λόγο ο κανόνας σύζευξης ερμηνεύεται ως πεσιμιστικός, και ο διαζευκτικός ως οπτιμιστικός. Αυτή η ερμηνεία (οπτιμιστικός - πεσιμιστικός) μπορεί να αντιμετατεθεί ανάλογα με τη σημασιολογία της σχέσης υπεροχής.

Όταν δεν υφίσταται ασυγκρισιμότητα στη σύγκριση μίας δράσης a με τα όρια των ομάδων, η a εκχωρείται στην ίδια ομάδα τόσο από την οπτιμιστική όσο και την πεσιμιστική διαδικασία. Όταν η a εκχωρείται σε διαφορετικές ομάδες από τις δυο διαδικασίες, η a είναι μη συγκρίσιμη με όλα τα ενδιάμεσα όρια των υψηλότερων και χαμηλότερων ομάδων (Figueira, et al., 2005).

Η ELECTRE TRI αποτελεί μια γενίκευση των παραπάνω δύο κανόνων, όπως ακολουθεί (Figueira, et al., 2005):

- Στον κανόνα σύζευξης: αντικαθιστούμε τον όρο «σε κάθε κριτήριο» με «σε μία επαρκή πλειονότητα κριτηρίων και την απουσία veto».

- Στον κανόνα διάζευξης: αντικαθιστούμε τον όρο «σε τουλάχιστον ένα κριτήριο» με «μια επαρκή μειονότητα κριτηρίων και την απουσία veto».

Οι δυο διαδικασίες ορίζονται ακολούθως:

1. Η απαισιόδοξη διαδικασία έχει ως εξής: Μια δράση a θα εκχωρηθεί στην υψηλότερη ομάδα C_h έτσι ώστε aSb_{h-1}.

a) Σύγκρινε το a διαδοχικά με b_r, r = k -1, k-2, …, 0.
b) Το όριο b_h είναι το πρώτο που συναντάμε για το οποίο aSb_h. Εκχώρησε το a στην ομάδα C_{h+1}.

2. Η αισιόδοξη διαδικασία έχει ως εξής: Μια δράση a θα εκχωρηθεί στην χαμηλότερη ομάδα C_h έτσι ώστε $b_h \succ a$.

a) Σύγκρινε το a διαδοχικά με b_r, r = 1, 2, …, k-1.

b) Το όριο b_h είναι το πρώτο όριο που συναντάμε για το οποίο $b_h \succ a$. Εκχώρησε την a στην ομάδα C_h.

(Figueira, et al., 2005)

Ο (Ματσατσίνης, 2010) επισημαίνει την αδυναμία της ELECTRE TRI, η οποία αφορά τον καθορισμό των ορίων διαχωρισμού. Θα πρέπει να αποδίδεται ιδιαίτερη προσοχή κατά τον καθορισμό των ορίων διαχωρισμού.

3.2.2 Μέθοδοι της οικογένειας PROMETHEE

Η μέθοδος PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluation), η οποία ανήκει στη θεωρία των σχέσεων υπεροχής, προτάθηκε για πρώτη φορά από τον (Brans, 1982). Ακολούθησαν και άλλες δημοσιεύσεις της μεθόδου με σπουδαιότερες των (Brans & Vinke, 1985; Brans, et al., 1986). Οι βασικές αρχές που διέπουν τη μέθοδο σε σχέση με άλλες μεθόδους της ίδιας κατηγορίας (μέθοδοι ELECTRE) είναι οι εξής:

- επέκταση της έννοιας των κριτηρίων
- εκτιμώμενη σχέση υπεροχής
- εκμετάλλευση της σχέσης υπεροχής

Σε ότι αφορά την αρχή της επέκτασης της έννοιας των κριτηρίων, προτείνονται στον αποφασίζοντα νέες συναρτήσεις κριτηρίων, όπως κριτήριο τελείως αυστηρό (αυστηρή προτίμηση), κριτήριο αυστηρό αλλά με περιοχή αδιαφορίας, κριτήριο με γραμμική προτίμηση κ.α. Στη μέθοδο PROMETHEE η εκτιμώμενη σχέση υπεροχής είναι λιγότερο ευαίσθητη σε μικρές αλλαγές, επομένως, είναι εύκολη η ερμηνεία της. Η εκμετάλλευση της σχέσης υπεροχής πραγματοποιείται ειδικά όταν οι εναλλακτικές λύσεις πρέπει να ταξινομηθούν από την καλύτερη προς τη χειρότερη. Αμέσως μετά αναλύονται οι μέθοδοι PROMETHEE I, η οποία παρέχει μια μερική προδιάταξη των εναλλακτικών επιλογών (partial ranking) και PROMETHEE II, η οποία πραγματοποιεί μια πλήρη προδιάταξη των εναλλακτικών επιλογών (complete ranking) (Ματσατσίνης, 2010).

3.2.2.1 PROMETHEE I (Brans & Mareschal, 2005; Ματσατσίνης, 2010)

Έστω το προς επίλυση πολυκριτήριο πρόβλημα:

$$\text{Max}\ \{f_1(a), \ldots, f_k(a)\ /\ a \in K\}$$

Όπου:

K: ένα πεπερασμένο σύνολο ενεργειών

f_i, $i = 1, 2, \ldots, k$: τα κριτήρια εκτίμησης που θα πρέπει να βελτιστοποιηθούν.

Μέσω των μεθόδων PROMETHEE το παραπάνω πολυκριτήριο πρόβλημα επιλύεται σε δυο βήματα:

1. Ανάπτυξη μίας σχέσης υπεροχής στο σύνολο K των εναλλακτικών ενεργειών.

2. Εκμετάλλευση της σχέσης αυτής, ώστε να επιλυθεί το εξεταζόμενο πολυκριτήριο πρόβλημα.

Στο πρώτο στάδιο ο αποφασίζων θα πρέπει να εκφράσει τις προτιμήσεις του σχετικά με τις εξεταζόμενες εναλλακτικές επιλογές. Για το σκοπό αυτό ορίζεται μια συνάρτηση προτίμησης P (preference function), η οποία αναπαριστά τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα. Στον ορισμό της συνάρτησης αυτής απαιτείται ο ορισμός της έννοιας του γενικευμένου κριτηρίου (generalized criterion). Με αυτό μοντελοποιείται η αξία που αποδίδει ο αποφασίζων στη διαφορά $g_j(a)$-$g_j(b)$ των εκτιμήσεων δυο εναλλακτικών επιλογών πάνω σε ένα κριτήριο. Σαν γενικευμένο κριτήριο ονομάζεται το ζεύγος $\{g_j(.), P_j(a, b)\}$ το οποίο συνδέεται με το κριτήριο $g_j(.)$. Για κάθε κριτήριο ορίζεται ένα τέτοιο κριτήριο.

Έστω g ένα κριτήριο απόφασης, οι τιμές του οποίου ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών: $g: K \rightarrow R$ και έστω ότι το κριτήριο αυτό θα πρέπει να μεγιστοποιηθεί, χωρίς αυτό να είναι περιοριστικό. Για κάθε εναλλακτική επιλογή $a \in K$ ορίζεται ως g(a) η εκτίμηση της επιλογής αυτής πάνω στο συγκεκριμένο κριτήριο.

Συγκρίνοντας τις δυο εναλλακτικές ενέργειες a, b $\in$ K, ορίζεται η συνάρτηση προτίμησης P ως εξής: $P: K \times K \rightarrow (0, 1)$, η οποία εκφράζει το αποτέλεσμα της σύγκρισης δυο εναλλακτικών επιλογών, δηλαδή την ένταση της προτίμησης του αποφασίζοντα για την εναλλακτική επιλογή a ως προς την επιλογή b, ως εξής:

- $P(a, b) = 0 \Longrightarrow$ Υπάρχει αδιαφορία μεταξύ των επιλογών a και b.

- $P(a, b) \sim 0 \Longrightarrow$ Υπάρχει ελαφριά προτίμηση της επιλογής a σε σχέση με την επιλογή b.
- $P(a, b) \sim 1 \Longrightarrow$ Υπάρχει ισχυρή προτίμηση της επιλογής a σε σχέση με την επιλογή b.
- $P(a, b) = 1 \Longrightarrow$ Υ πάρχει σαφής προτίμηση της a από τη b.

Στην πραγματικότητα η συνάρτηση προτίμησης είναι συχνά μια συνάρτηση της διαφοράς των εκτιμήσεων των δυο εναλλακτικών ενεργειών, δηλαδή:

$$P(a, b) = P[g(a) – g(b)]$$

Η συνάρτηση προτίμησης, όπως έχει οριστεί, είναι μια αύξουσα συνάρτηση της διαφοράς $d = g(a) – g(b)$, η οποία παίρνει την τιμή 0 για όλες τις τιμές του d που είναι αρνητικές ή μηδέν. Αυτό είναι φυσικό, καθώς όπως έχει οριστεί η συνάρτηση προτίμησης δείχνει μόνο την ένταση της προτίμησης της επιλογής a έναντι της b, ενώ όταν η b υπερέχει της a, τότε η συνάρτηση προτίμησης παίρνει την τιμή 0. Έτσι συνοψίζοντας:

$$P_j(a, b) = F_j[d_j(a, b)] \ \forall \ a, b \in A$$

$$d_j(a, b) = g_j(a) – g_j(b)$$

$$0 \leq P_j(a, b) \leq 1$$

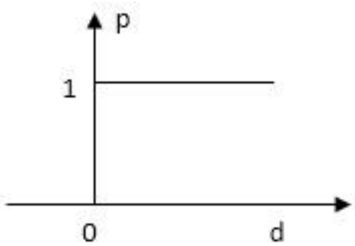
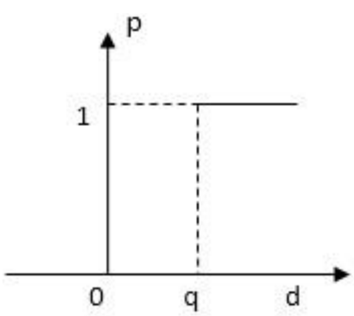
Στην περίπτωση μεγιστοποίησης ενός κριτηρίου, η συνάρτηση αυτή μας δίνει την προτίμηση της a έναντι της b (σχήμα 3.1). Οι προτιμήσεις είναι ίσες με το 0 όταν οι διαφορές είναι αρνητικές.

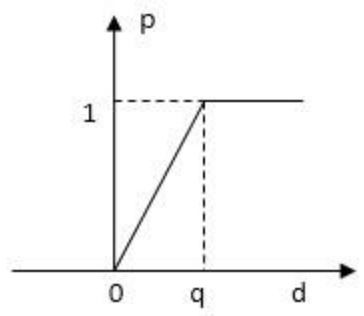
Εάν: $d_j(a, b) \leq 0$ τότε η: $P_j(a, b) = 0$

Ισχύει επίσης: $P_j(a, b) > 0 \Longrightarrow P_j(a, b) = 0$

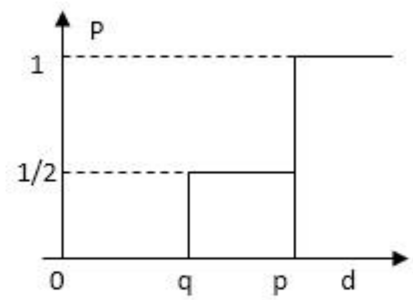
Για τον σαφή καθορισμό της μορφής της συνάρτησης προτίμησης, χρησιμοποιούνται έξι γενικευμένα κριτήρια, τα οποία καλύπτουν στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις τον τρόπο με τον οποίο εκφράζει τις προτιμήσεις του ένας αποφασίζων (Brans, et al., 1986; Brans & Mareschal, 2005). Τα γενικευμένα αυτά κριτήρια παρουσιάζονται στον πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1. Τύποι γενικευμένων κριτηρίων (Brans & Mareschal, 2005; Ματσατσίνης, 2010)

Γενικευμένο κριτήριο	Ορισμός	Παράμετροι
Τύπος 1: Σύνηθες κριτήριο	$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ 1, & d > 0 \end{cases}$	-
		
Τύπος 2: Κριτήριο σχήματος U	$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ 1, & d > q \end{cases}$	q (κατώφλι αδιαφορίας)
		
Τύπος 3: Κριτήριο σχήματος V	$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ \frac{d}{p}, & 0 \leq d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$	p (κατώφλι γνήσιας προτίμησης)

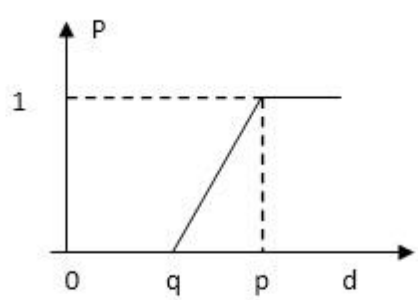


Τύπος 4: Κριτήριο επιπέδων $P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & q \leq d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$ p, q



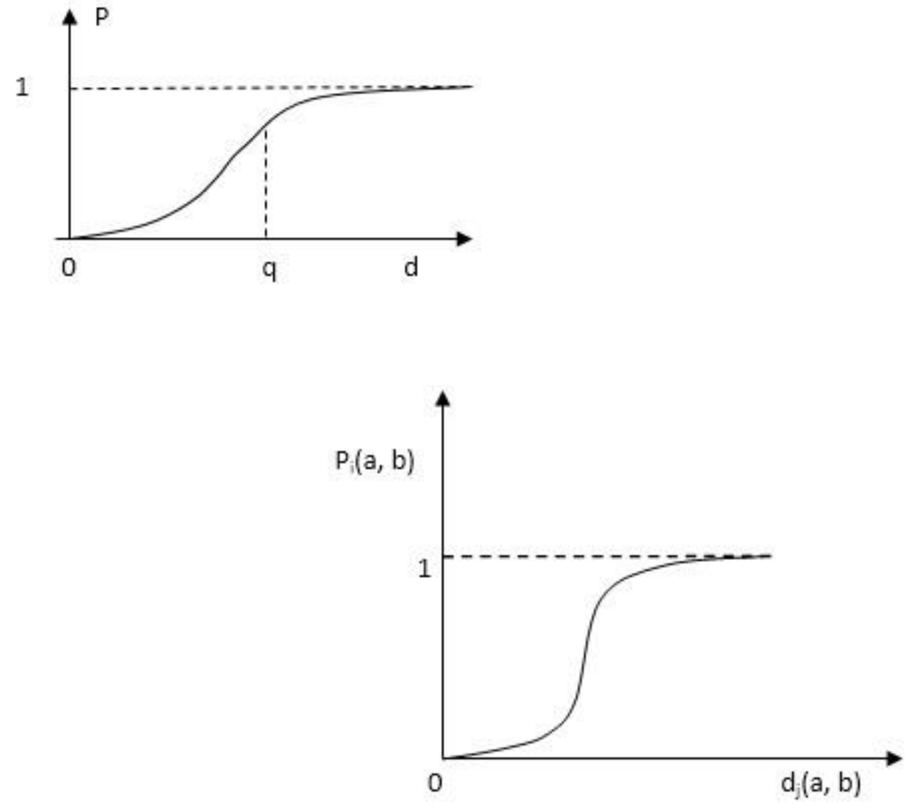
Τύπος 5: Κριτήριο σχήματος V $P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ \frac{d-q}{p-q}, & q \leq d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$ p, q

με κατώφλι αδιαφορίας



Γενικευμένο κριτήριο Ορισμός Παράμετροι

Τύπος 6: Κριτήριο Gauss $P(d) = \begin{cases} 0\,, & d \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d^2}{2s^2}}\,, & d > 0 \end{cases}$ s (ενδιάμεσο κατώφλι των q, p)



Σχήμα 3.1. Η συνάρτηση προτίμησης (Brans & Mareschal, 2005; Ματσατσίνης, 2010)

Έχοντας ο αποφασίζων καθορίσει, για κάθε κριτήριο εκτίμησης, τον τρόπο με τον οποίο εκφράζει τις προτιμήσεις του, μέσω ενός από τα παραπάνω γενικευμένα κριτήρια, θα πρέπει στη συνέχεια να αναπτυχθεί ένας δείκτης των προτιμήσεων, εξετάζοντας όλα τα κριτήρια εκτίμησης ταυτόχρονα. Για κάθε ζεύγος εναλλακτικών επιλογών (a, b) ορίζεται ο δείκτης προτίμησης π, ως ο σταθμισμένος μέσος των συναρτήσεων προτίμησης P_i:

$$\pi(a,b) = \sum_{=1}^{n} P_j(a,b)w_j$$

Και

$$\pi(b,a) = \sum_{=1}^{n} P_j(b,a)w_j$$

Ο δείκτης προτίμησης αναπαριστά τον βαθμό προτίμησης του αποφασίζοντα για την εναλλακτική επιλογή a ως προς την b, για όλα τα κριτήρια. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως υπάρχουν κριτήρια στα οποία η a είναι καλύτερη της b και κριτήρια στα οποία η b είναι καλύτερη της a και κατά συνέπεια οι π(a, b) και π(b, a) είναι συνήθως θετικές. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για όλα τα ζεύγη (a, b) ∈ A:

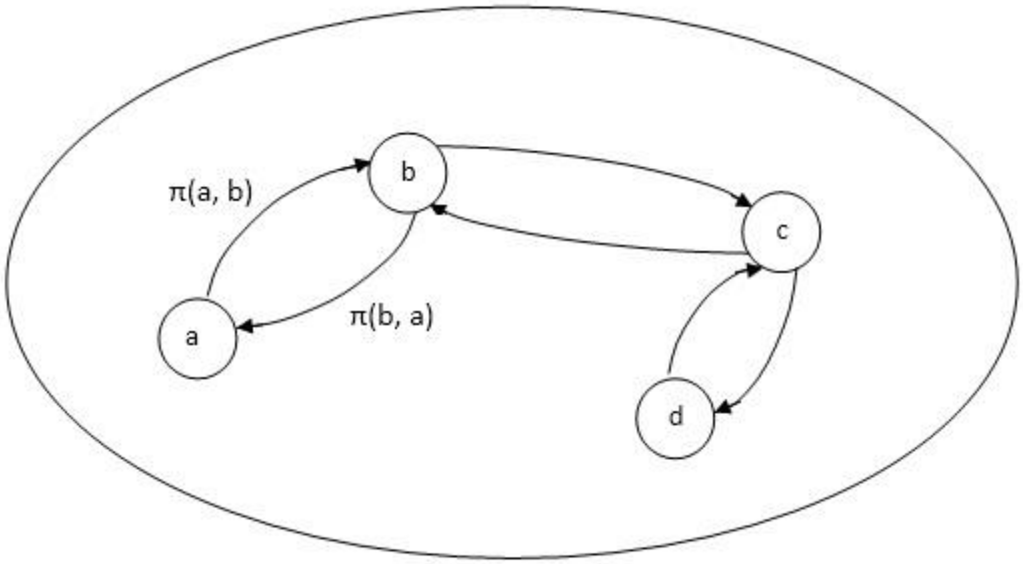
$$\begin{cases} \pi(a,a) = 0 \\ 0 \ \leq \pi(a,b) \leq 1 \\ 0 \leq \pi(b,a) \leq 1 \\ 0 \ \leq \pi(a,b) + \pi\ (b,a) \leq 1 \end{cases}$$

Ο δείκτης προτίμησης παίρνει τιμές από το διάστημα (0, 1), έτσι ώστε:

π(a, b) ∼ 0 ⇒ υπάρχει ασθενής προτίμηση της εναλλακτικής επιλογής a ως προς την b.

π(a, b) ∼ 1 ⇒ υπάρχει ισχυρή προτίμηση της εναλλακτικής επιλογής a ως προς την b.

Μέσω του δείκτη προτίμησης, αναπτύσσεται μία σχέση υπεροχής πάνω στο σύνολο των εναλλακτικών ενεργειών. Για την καλύτερη αναπαράσταση της σχέσης αυτής κατασκευάζεται ένα γράφημα υπεροχής, στο οποίο οι εναλλακτικές επιλογές αναπαρίστανται ως κόμβοι, ενώ τα τόξα που ενώνουν τους κόμβους αναπαριστούν την υπεροχή μιας εναλλακτικής επιλογής προς μια άλλη, μέσω του δείκτη προτίμησης (σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2 Το γράφημα υπεροχής (Brans & Mareschal, 2005; Ματσατσίνης, 2010)

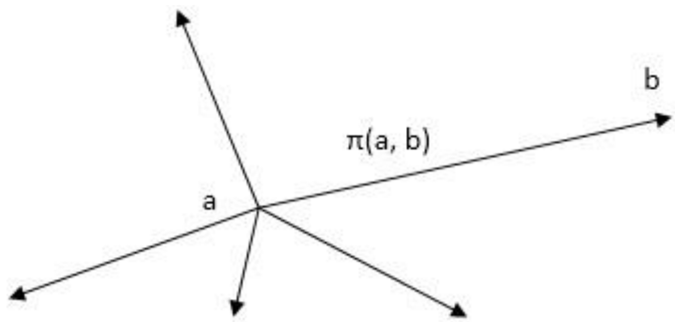
Για κάθε κόμβο a του γραφήματος υπεροχής, καθορίζονται οι ροές εισόδου και εξόδου ως εξής:

Ροή εισόδου: $\varphi^{-}(a) = \sum_{b \in k} \prod(b, a)$

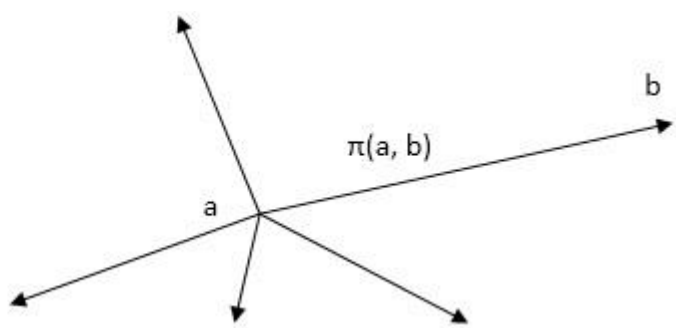
Ροή εξόδου: $\varphi^{+}(a) = \sum_{b \in k} \prod(a, b)$

Η ροή εξόδου δείχνει την υπεροχή της εναλλακτικής επιλογής a ως προς όλες τις υπόλοιπες επιλογές (σχήμα 3.3), για όλα τα κριτήρια, ενώ η ροή εισόδου αναπαριστά την υπεροχή όλων των υπολοίπων εναλλακτικών επιλογών ως προς την επιλογή a (σχήμα 3.4).

Κατά συνέπεια λαμβάνεται μια μερική κατάταξη των εναλλακτικών με βάση τις τιμές της $\varphi^{+}(a)$ και $\varphi^{-}(a)$. Με την κατάταξη αυτή ολοκληρώνεται η μέθοδος PROMETHEE I, η οποία δείχνει τυχόν αδυναμίες σύγκρισης που υπάρχουν μεταξύ διαφορετικών ενεργειών και προέρχονται από αντικρουόμενα κριτήρια (Le Teno & Mareschal, 1998).



Σχήμα 3.3. Η υπεροχή της εναλλακτικής a έναντι των υπόλοιπων ενεργειών (Ζοπουνίδης, et al., 1996)



Σχήμα 3.4. Η υπεροχή των υπολοίπων εναλλακτικών ενεργειών έναντι της ενέργειας a (Ζοπουνίδης, et al., 1996)

3.2.2.2 PROMETHEE II (Brans & Mareschal, 2005; Ματσατσίνης, 2010)

Αφαιρώντας τη ροή εισόδου από τη ροή εξόδου υπολογίζεται η καθαρή ροή για ένα κόμβο ως εξής:

$$\varphi(a) = \varphi^{+}(a) - \varphi^{-}(a)$$

Μέσω της καθαρής ροής είναι δυνατή η πλήρης κατάταξη των εναλλακτικών επιλογών. Η χρήση της καθαρής ροής από τη μέθοδο PROMETHEE II γίνεται για να εξαχθεί μια πλήρης κατάταξη των εναλλακτικών.

Μια επίσης πού σημαντική πληροφορία είναι να υπάρχει ένας δείκτης της προτίμησης μιας ενέργειας a ως προς όλες τις υπόλοιπες εναλλακτικές επιλογές, εξετάζοντας ένα συγκεκριμένο κριτήριο j. Η πληροφορία αυτή δίνεται από τη μονοκριτήρια ροή (unicriterion flow) $\phi_j(a)$ η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$\varphi_j(a) = \sum_{b \in K} \{P_j(a,b) - P_j(b,a)\}$$

Όταν η ροή αυτή είναι ένας μεγάλος θετικός αριθμός τότε η επιλογή a υπερέχει όλων των υπόλοιπων εναλλακτικών επιλογών όταν εξετάζεται μόνο στο κριτήριο j. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν η τιμή της ροής αυτής είναι ένας μεγάλος αρνητικός αριθμός, τότε όλες οι υπόλοιπες εναλλακτικές επιλογές υπερέχουν της a, όταν εξετάζεται στο κριτήριο j.

Χρησιμοποιώντας τις καθαρές ροές για κάθε κόμβο του γραφήματος υπεροχής (εναλλακτικές επιλογές), η μέθοδος PROMETHEE II έχει σκοπό να δώσει μια πλήρη κατάταξη των εναλλακτικών επιλογών του συνόλου K, από την καλύτερη προς τη χειρότερη. Έτσι με βάση τις υπολογισμένες καθαρές ροές όλων των εναλλακτικών επιλογών, για δυο εναλλακτικές επιλογές a και b υπάρχουν οι εξής δυο περιπτώσεις:

$aP_{II}b$ (η a υπερέχει της b) $\Leftrightarrow$ $\phi(a) > \phi(b)$

$aI_{II}b$ (υπάρχει αδιαφορία μεταξύ των a και b) $\Leftrightarrow$ $\phi(a) = \phi(b)$

Στα επόμενα χρόνια οι Brans και Mareschal θα προτείνουν τη μέθοδο PROMETHEE III όπου έχουμε διάταξη που βασίζεται σε διαστήματα (ranking based on intervals), ενώ οι ίδιοι συγγραφείς θα προτείνουν το γράφημα GAIA, που υποστηρίζει τη γραφική αναπαράσταση των μεθόδων PROMETHEE.

3.2.2.3 PROMETHEE V (Brans & Mareschal, 2005)

Οι μέθοδοι PROMETHEE I και II είναι κατάλληλες για την επιλογή μίας εναλλακτικής, ωστόσο σε κάποιες περιπτώσεις πρέπει να επιλεγεί ένα υποσύνολο από το σύνολο των εναλλακτικών, δεδομένου ενός συνόλου περιορισμών. Η PROMETHEE V είναι μια επέκταση των μεθόδων PROMETHEE για αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση.

Ορίζουμε ως $\{a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ το σύνολο των εναλλακτικών επιλογών και το συνδέουμε με την ακόλουθη δυαδική μεταβλητή:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{εάν η } a_i \text{ επιλεγεί} \\ 0, \text{εάν δεν επιλεγεί} \end{cases}$$

Η PROMETHEE V αποτελείται από τα ακόλουθα δυο βήματα:

Βήμα 1^{ο} : Το πολυκριτήριο πρόβλημα εξετάζεται χωρίς περιορισμούς. Με τη μέθοδο PROMETHEE II λαμβάνεται η κατάταξη, για την οποία έχουν υπολογιστεί οι καθαρές ροές $\{\varphi(a_i),\ i = 1, 2, .., n\}$.

Βήμα 2^{ο} : Το ακόλουθο γραμμικό πρόβλημα {0,1} λαμβάνει υπόψη τους επιπρόσθετους περιορισμούς.

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{k} \varphi(a_i)x_i\right\} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{p,i}x_i \sim \beta_p, \quad p = 1, 2, \ldots, P \qquad (2)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3)$$

Όπου στο σύμβολο ~ μπορεί να έχουμε =, ≤ ή ≥ . Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι οι τιμές των καθαρών ροών υπεροχής. Ο σκοπός του {0, 1} γραμμικού προβλήματος είναι να επιλέξει εναλλακτικές με τις υψηλότερες καθαρές ροές, λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς.

Μετά την επίλυση του {0, 1} γραμμικού προβλήματος, λαμβάνεται ένα υποσύνολο εναλλακτικών που καλύπτει τους περιορισμούς και έχει τις υψηλότερες καθαρές ροές. Ο κλασσικός 0 -1 γραμμικός προγραμματισμός μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί.

3.2.2.4 PROMETHEE VI (Brans & Mareschal, 2005)

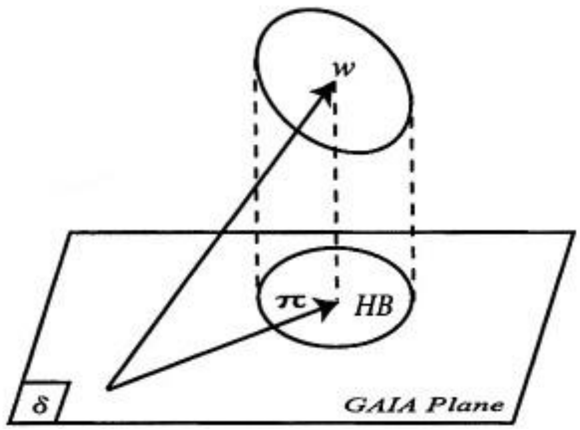
Η μέθοδος PROMETHEE VI παρέχει στον αποφασίζοντα πρόσθετες πληροφορίες πάνω στη δική του θεώρηση για το πολυκριτήριο πρόβλημα. Του επιτρέπει επίσης να εκτιμήσει εάν είναι ένα εύκολο ή δύσκολο πρόβλημα κατά τη δική του άποψη.

Είναι ευνόητο ότι η κατανομή των βαρών έχει σημαντικό ρόλο σε όλα τα πολυκριτήρια προβλήματα. Εφόσον ληφθούν τα βάρη λαμβάνεται μια τελική κατάταξη με τη μέθοδο PROMETHEE II. Στις περισσότερες περιπτώσεις ο αποφασίζων διστάζει να αποδώσει αμέσως συγκεκριμένες τιμές στα βάρη. Ο δισταγμός αυτός οφείλεται σε διάφορους παράγοντες, όπως αναποφασιστικότητα, ανακρίβεια, αβεβαιότητα, ή έλλειψη ελέγχου στο τί συμβαίνει πραγματικά.

Παρόλα αυτά ο αποφασίζων έχει συνήθως στο μυαλό του μια κλίμακα μεγέθους των βαρών, έτσι ώστε παρά τους ενδοιασμούς μπορεί να προσδώσει τιμές για κάποια διαστήματα. Ας ορίσουμε αυτά τα διαστήματα ως:

$$w_j^- \leq w_j \leq w_j^+, \quad j = 1, \dots, k.$$

Ας εξετάζουμε το σύνολο όλων των ακραίων σημείων των μοναδιαίων διανυσμάτων που σχετίζονται με όλα τα επιτρεπόμενα βάρη. Το σύνολο αυτό ορίζει μία περιοχή στη μοναδιαία υπερσφαίρα στο IR^k. Ας φέρουμε την προβολή στο επίπεδο GAIA, την οποία θα ονομάσουμε HB (Human Brain). Προφανώς πρόκειται για μια περιοχή που περιλαμβάνει όλα τα ακραία σημεία του άξονα απόφασης (π) για όλα τα επιτρεπτά βάρη. (Σχήμα 3.5)

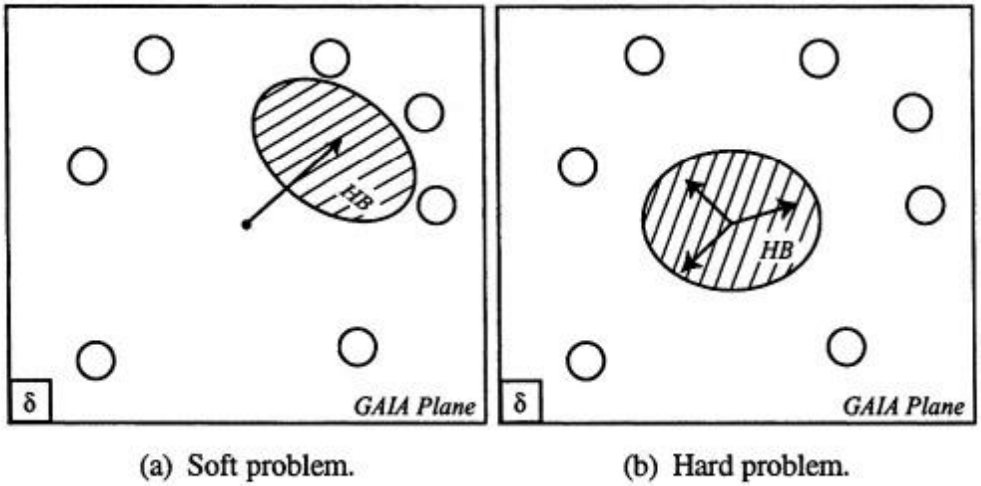


Σχήμα 3.5. “Human Brain” (Brans & Mareschal, 2005)

Υπάρχουν δυο πιθανές περιπτώσεις:

- **(S1)** Η περιοχή HB δεν περιλαμβάνει την αρχή του επιπέδου GAIA. Σε αυτή την περίπτωση, όταν τα βάρη τροποποιούνται, ο άξονας απόφασης (π) παραμένει προσανατολισμένος στην ίδια διεύθυνση και όλες οι εναλλακτικές που βρίσκονται σε αυτή την κατεύθυνση θεωρούνται καλές. Το πολυκριτήριο πρόβλημα είναι σχετικά εύκολο να επιλυθεί και λέμε ότι είναι ένα «εύκολο πρόβλημα» (soft problem).

- **(S2)** Αντιθέτως, εάν η περιοχή HB περιλαμβάνει την αρχή του επιπέδου GAIA, ο άξονας απόφασης (π) μπορεί να πάρει οποιαδήποτε κατεύθυνση. Σε αυτή την περίπτωση οι συμβιβαστικές λύσεις μπορούν να είναι σε οποιαδήποτε κατεύθυνση. Τότε είναι δύσκολο να παρθεί μια τελική απόφαση. Ο αποφασίζων σύμφωνα με τις προτιμήσεις και τους ενδοιασμούς του αντιμετωπίζει ένα «δύσκολο πρόβλημα» (hard problem).



Σχήμα 3.6. Οι δυο τύποι προβλημάτων απόφασης (Brans & Mareschal, 2005)

Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα που έχει εφαρμοστεί μέχρι σήμερα, τα προβλήματα εμφανίζονται να είναι σχετικά εύκολα. Αυτό σημαίνει ότι τα περισσότερα πολυκριτήρια προβλήματα δίνουν ταυτόχρονα καλές συμβιβαστικές λύσεις, όσο και κακές λύσεις. Η μέθοδος PROMETHEE μας επιτρέπει να επιλέξουμε τις καλές λύσεις.

3.2.3 Άλλες μέθοδοι υπεροχής

Σε αυτό το σημείο, θα παραθέσουμε κάποιες άλλες μεθόδους υπεροχής, που δεν ανήκουν σε καμία από τις παραπάνω οικογένειες μεθόδων που εξετάσαμε. Οι μέθοδοι QUALIFLEX, REGIME, ORESTE, ARGUS, EVAMIX, TACTIC και MELCHIOR προτείνουν ορισμούς και υπολογισμούς δυαδικών σχέσεων παρόμοιους με αυτούς των μεθόδων ELECTRE (Martel & Matarazzo, 2005). Πέραν αυτών, θα εξετάσουμε και άλλες μεθόδους υπεροχής (MAPPAC, PRAGMA, IDRA και PACMAN) που έχουν αναπτυχθεί στο πλαίσιο της προσέγγισης της σύγκρισης κριτηρίων κατά ζεύγη (Pairwise Criterion Comparison Approach - PCCA), ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των οποίων είναι ο διαχωρισμός της κατασκευής των δυαδικών σχέσεων υπεροχής σε δύο φάσεις (Martel & Matarazzo, 2005): στην πρώτη, κάθε ζεύγος δράσεων συγκρίνεται με δύο κριτήρια κάθε φορά. Στο δεύτερο βήμα, αυτοί οι δείκτες μερικής προτίμησης αθροίζονται ώστε να διαμορφωθεί η τελική σχέση. Έπειτα θα παρουσιαστεί μια μέθοδος υπεροχής για στοχαστικά δεδομένα, η μέθοδος Martel and Zara's, που βασίζεται σε στοχαστικές σχέσεις υπεροχής μεταξύ κάθε ζεύγους εναλλακτικών (Martel & Matarazzo, 2005). Τέλος θα παρουσιάσουμε τις μεθόδους N-TOMIC, PROAFTN και διαδικασία του Perny, TOMASO και TOPSIS.

3.2.3.1 Μέθοδος QUALIFLEX (Paelinck, 1976; Martel & Matarazzo, 2005)

Ο αλγόριθμος QUALIFLEX προτάθηκε από τον J.H.P. Paelinck (Paelinck, 1976). Η μέθοδος βασίζεται στην κατάταξη των εναλλακτικών και την αξιολόγηση των εναλλακτικών από κάθε κριτήριο. Αυτές οι αξιολογήσεις είναι ποιοτικές και παίρνουν τη μορφή προδιατάξεων. Σε κάθε βήμα, υπολογίζεται ο δείκτης συμφωνίας/ασυμφωνίας, για κάθε ζεύγος εναλλακτικών. Οι πληροφορίες που αφορούν τους συντελεστές της σημασίας των κριτηρίων (βάρη) μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή κατάταξης (παράδειγμα με τη μορφή προδιάταξης). Έχοντας ως δεδομένα το σύνολο των εναλλακτικών A, ο δείκτης συμφωνίας-ασυμφωνίας για κάθε ζεύγος εναλλακτικών (a, b), a, b ∈ A, στο επίπεδο προδιάταξης σύμφωνα με το κριτήριο g_j ∈ F και την κατάταξη στην k-στή μετάθεση είναι:

$$I_{jk}(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{εάν υπάρχει συμφωνία} \\ 0 & \text{εάν είναι όμοια} \\ -1 & \text{εάν υπάρχει ασυμφωνία} \end{cases}$$

Συμφωνία (ασυμφωνία) υπάρχει εάν οι a, b είναι διατεταγμένες (μη διατεταγμένες) στην ίδια σειρά στις δυο προδιατάξεις, και είναι όμοιες εάν έχουν ακριβώς την ίδια θέση. Ο δείκτης συμφωνίας - ασυμφωνίας της προδιάταξης σύμφωνα με το κριτήριο g_j και την κατάταξη που αντιστοιχεί στην k-στή μετάθεση είναι:

$$I_{jk} = \sum_{a,b \in A} I_{jk}(a,b)$$

Ο συνολικός δείκτης συμφωνίας - ασυμφωνίας για την k-στή μετάθεση είναι:

$$I_k = \sum_j \pi_j I_{jk}(a,b)$$

Όπου π_j είναι το βάρος του κριτηρίου g_j, j = 1, 2, …, n. O αριθμός των μεταθέσεων k (Per_k) είναι m!, όπου m = |A|. H καλύτερη επιλογή είναι αυτή που μεγιστοποιεί το I_k. Εάν τα βάρη π_j δεν είναι επακριβώς γνωστά, αλλά έχουν δοθεί με τη μορφή μιας κατάταξης, η καλύτερη επιλογή είναι αυτή για την οποία:

$$\max_{P(\pi_j)} I_k$$

Όπου $P(\pi_j)$ είναι το σύνολο των εφικτών βαρών.

3.2.3.2 Μέθοδος REGIME (Hinloopen & Nijkamp, 1986; Martel & Matarazzo, 2005)

Η μέθοδος (Hinloopen & Nijkamp, 1986) έχει ως σημείο εκκίνησης το δείκτη συμφωνίας C_{il}, που ορίζεται ακολούθως:

$$C_{il} = \sum_{j \in \hat{C}_{il}} \pi_j$$

Όπου $\hat{C}_{il}$ είναι το σύνολο συμφωνίας, δηλαδή το σύνολο των κριτηρίων για τα οποία η a_i είναι τουλάχιστον όσο καλή είναι η a_l, οι a_i και $a_l \in A$ και π_j είναι το βάρος του κριτηρίου $g_j \in F$. Το επίκεντρο της μεθόδου βρίσκεται στο πρόσημο του $C_{il} - C_{li}$ για κάθε ζεύγος εναλλακτικών. Εάν το πρόσημο είναι θετικό, η a_i προτιμάται της a_l, και το αντίστροφο εάν το πρόσημο είναι αρνητικό.

Το πρώτο βήμα της μεθόδου είναι η κατασκευή του Πίνακα REGIME. O πίνακας REGIME διαμορφώνεται από τις κατά ζεύγη συγκρίσεις των εναλλακτικών στον πίνακα πολυκριτήριας αξιολόγησης. Δοθέντων a και b ∈ A, για κάθε κριτήριο που ελέγχουμε εάν η a έχει υψηλότερη κατάταξη από τη b, τότε στην αντίστοιχη θέση του πίνακα regime θέτουμε +1, ενώ εάν η b είναι προτιμώμενη της a θέτουμε -1.

Πιο αναλυτικά, για κάθε κριτήριο g_j, j= 1, 2, …,n, ορίζουμε το δείκτη $c_{il,j}$ για κάθε ζεύγος εναλλακτικών (a_i, a_l).

$$c_{il,j} = \begin{cases} +1, εάν\ \ r_{ij} < r_{lj} \\ 0, εάν\ r_{ij} = r_{lj} \\ -1, εάν\ r_{ij} > r_{lj} \end{cases}$$

Όπου r_{ij} (r_{lj}) είναι η κατάταξη των εναλλακτικών a_i (a_j) στο κριτήριο g_j. Όταν δυο εναλλακτικές συγκριθούν σε όλα τα κριτήρια σχηματίζεται το διάνυσμα

$$c_{il} = (c_{il,1}, \dots, c_{il,j}, \dots, c_{il,n})$$

που ονομάζεται regime, και ο πίνακας regime διαμορφώνεται από αυτά τα επιμέρους διανύσματα. Αυτά τα διανύσματα χρησιμοποιούνται να καθορίσουν την κατάταξη των εναλλακτικών.

Ο δείκτης συμφωνίας υπέρ της εναλλακτικής a_i δίνεται από τον τύπο:

$$C_{il} = \sum_j \pi_j c_{il,j},$$

Εάν τα βάρη π_j είναι γνωστά, ο πίνακας συμφωνίας **C** = [C_{il}], θα έχει μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο. Το μισό κομμάτι του πίνακα μπορεί να αγνοηθεί καθώς C_{il} = C_{li}. Εάν τα βάρη δεν είναι σαφώς καθορισμένα τότε δεν είναι εφικτό να υπολογιστεί ο πίνακας. Εάν οι προτιμήσεις των κριτηρίων είναι ποιοτικές, το πρόσημο των στοιχείων C_{il} μπορεί να υπολογιστεί μόνο για συγκεκριμένα διανύσματα. Για κάποια άλλα διανύσματα ένα τέτοιο αμφίβολο αποτέλεσμα δεν μπορεί να εξαχθεί. Αυτά τα διανύσματα ονομάζονται κρίσιμα regime.

3.2.3.3 Μέθοδος ORESTE (Roubens, 1982; Martel & Matarazzo, 2005)

Η μέθοδος ORESTE (βλ. (Roubens, 1982)) αναπτύχθηκε για να αντιμετωπίσει προβλήματα στα οποία οι εναλλακτικές έχουν καταταχθεί για κάθε κριτήριο και τα κριτήρια έχουν καταταχθεί σύμφωνα με τη σημαντικότητα τους. Πιο συγκεκριμένα, η ORESTE μπορεί να αντιμετωπίσει το ακόλουθο πολυκριτήριο πρόβλημα: Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο εναλλακτικών a_i , i = 1, 2, …, m. Οι συνέπειες των εναλλακτικών αναλύονται από την οικογένεια F που αποτελείται από n κριτήρια. Η σχετική σημασία των κριτηρίων δίνεται από μία δομή προτίμησης στο σύνολο F των κριτηρίων, που μπορεί να οριστεί από μια πλήρη προδιάταξη S (η σχέση S = I ∪ P είναι ισχυρή και μεταβατική, η αδιαφορία I είναι συμμετρική και η προτίμηση P είναι μη συμμετρική). Για κάθε κριτήριο g_j, j = 1, 2, .., n, θεωρούμε με δομή προτίμησης στο σύνολο A, που καθορίζεται από μια πλήρη προδιάταξη. Στόχος της μεθόδου είναι να βρει μια καθολική δομή προτίμησης του A που θα αντικατοπτρίζει την αξιολόγηση των εναλλακτικών σε κάθε κριτήριο, και τη δομή προτίμησης μεταξύ των κριτηρίων.

Η μέθοδος ORESTE αποτελείται από τρείς διαφορετικές φάσεις:

1) Προβολή του πίνακα θέσης
2) Κατάταξη των προβολών
3) Υπολογισμός της πλήρης κατάταξης

Ξεκινάμε με n πλήρεις προδιατάξεις των εναλλακτικών του A που σχετίζονται με τα n κριτήρια. Επίσης για κάθε κριτήριο δίνεται μία κατάταξη της σημαντικότητας του σε σχέση με τα υπόλοιπα κριτήρια. Χρησιμοποιείται το σύστημα κατάταξης που έχει προταθεί από τον Besson, όπου r_j η κατάταξη κατά Besson του κριτηρίου g_j και $r_j(a)$ η μέση (Besson) κατάταξη της εναλλακτικής a στο κριτήριο g_j. Δοθέντος $\{r_j(a), r_j\}$, η ORESTE προσπαθεί να δημιουργήσει μια δομή προτίμησης O = {I, P, R} για το A ώστε:

- a_i P a_i εάν η a_i είναι συνολικά προτιμώμενη της a_l ($O_{il} = 1$, $O_{li} = 0$)
- a_i I a_i εάν η a_i είναι αδιάφορη με την a_l ($O_{il} = O_{li} = 1$)
- a_i R a_i εάν η a_i και a_l είναι συνολικά μη συγκρίσιμη ($O_{il} = O_{li} = 0$)

Προβολή. Θεωρώντας αυθαίρετα ένα σημείο αρχής 0, η απόσταση $d(0, a_j)$ ορίζεται με τη χρήση του $\{r_j(a), r_j\}$ έτσι ώστε $d(0, a_j) < d(0, b_j)$ εάν aP_jb, όπου $a_j = g_j(a)$ είναι η αξιολόγηση της εναλλακτικής a στο κριτήριο g_j. Εάν προκύψει ισοβαθμία, εξετάζουμε την επιπλέον σχέση: εάν g_jIg_k και $r_j(a) = r_k(b)$ τότε $d(0, a_j) = d(0, b_k)$. Η απόσταση θεωρείται επαρκής:

$$d(0, a_j) = \alpha r_j(a) + (1 - \alpha)r_j,$$

όπου α ένας δείκτης αντικατάστασης (0 < α <1), Η προβολή μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους.

Κατάταξη. Εφόσον αυτό που έχει σημασία είναι η σχετική θέση των προβολών και όχι η ακριβής τιμή του $d(0, a_j)$, οι προβολές θα καταταχθούν. Για να γίνει η κατάταξη των προβολών, πρέπει να εκχωρηθεί μία μέση κατάταξη R(aj) στο ζεύγος (a, g_j), έτσι ώστε R(aj) ≤ $R(b_k)$ εάν

$d(0, a_j) \leq d(0, b_k)$. Αυτές οι κατατάξεις ονομάζονται συνολικές κατατάξεις και είναι στο κλειστό διάστημα (1, mn).

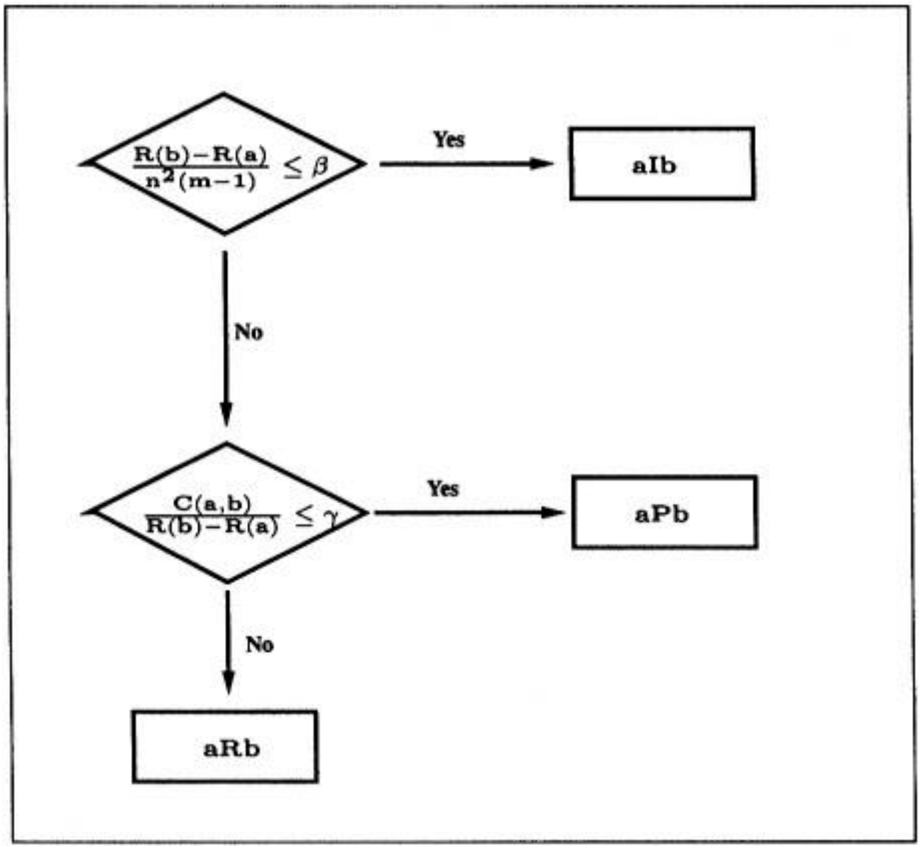
Πλήρης κατάταξη. Για κάθε εναλλακτική υπολογίζεται το άθροισμα των συνολικών κατατάξεων στο σύνολο των κριτηρίων. Για μια εναλλακτική a η συνολική κατάταξη θα είναι:

$$R(a) = \sum_{j} R(a_j).$$

Επίσης πρέπει να υπολογιστεί ο παρακάτω δείκτης:

$$C(a,b) = \sum_{j:aP_jb} [R(b_j) - R(a_j)]$$

Προφανώς ισχύει C(a,b) – C(b, a) = R(b) – R(a). Επιπλέον η μέγιστη τιμή του R(b) – R(a) ισούται με $n^2(m-1)$. Έτσι μπορούμε να εξάγουμε τη δομή προτίμησης O = {I, P, R} έτσι ώστε αν R(a) ≤ R(b) τότε aIb ή aPb ή aRb, όπου β είναι το επίπεδο αδιαφορίας και γ το επίπεδο ασυγκρισιμότητας. (Δείτε σχήμα 3.7)



Σχήμα 3.7. Διάγραμμα ροής μεθόδου ORESTE (Martel & Matarazzo, 2005)

3.2.3.4 Μέθοδος ARGUS (De Keyser & Peeters, 1994; Martel & Matarazzo, 2005)

Η μέθοδος ARGUS (βλ. (De Keyser & Peeters, 1994)) χρησιμοποιεί ποιοτικές μεταβλητές για να αποδώσει την ένταση της προτίμησης σε μια ποιοτική κλίμακα. Η ένταση της προτίμησης μεταξύ δυο εναλλακτικών a, b ∈ A γίνεται επιλέγοντας μία από τις ακόλουθες ποιοτικές σχέσεις: αδιαφορία, μικρή, μέτρια, ισχυρή και πολύ ισχυρή προτίμηση. Ο τρόπος με τον οποίο μοντελοποιούνται οι προτιμήσεις του αποφασίζοντα εξαρτάται από την κλίμακα μέτρησης του κάθε κριτηρίου. Εάν η κλίμακα είναι ποιοτική μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες σχέσεις: πολύ κακή, κακή, μέτρια, καλή, πολύ καλή. Για να μοντελοποιήσουμε τη δομή προτίμησης του αποφασίζοντα σε κάθε κριτήριο, ο αποφασίζων πρέπει να εισάγει την προτίμηση του για κάθε ζεύγος εναλλακτικών. Έτσι κατασκευάζεται ο πίνακας προτίμησης. Η προτίμηση του αποφασίζοντα σε μια κλίμακα διαστημάτων θα εξαρτάται από την τιμή $d = g_j(a) - g_j(b)$, ενώ η προτίμηση σε μία αναλογική κλίμακα κριτηρίων θα εξαρτάται είτε μόνο από το d, είτε από τα d, $g_j(a)$ και $g_j(b)$. Η δομή προτίμησης του αποφασίζοντα για ένα κριτήριο με κλίμακα διαστημάτων μπορεί να μοντελοποιηθεί ορίζοντας για ποια απόλυτη διαφορά d υπάρχει αδιαφορία, για ποια τιμή d υπάρχει μέτρια, ισχυρή ή πολύ ισχυρή προτίμηση. Για μία αναλογική κλίμακα κριτηρίων πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη η σχετική διαφορά δ (βλέπε πίνακα 3.2). Πρέπει επίσης να ξέρουμε εάν το κριτήριο είναι προς ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση (MIN or MAX).

$g_i(a) \geq g_i(b) > 0$	$d = g_i(a) - g_i(b)$	$\delta = \frac{g_i(a)-g_i(b)}{g_i(b)}$
indifferent	$0 \leq d < d_1$	$0\% \leq \delta < \delta_1\%$
small preference	$d_1 \leq d < d_2$	$\delta_1\% \leq \delta < \delta_2\%$
moderate preference	$d_2 \leq d < d_3$	$\delta_2\% \leq \delta < \delta_3\%$
strong preference	$d_3 \leq d < d_4$	$\delta_3\% \leq \delta < \delta_4\%$
very strong preference	$d_4 \leq d$	$\delta_4\% \leq \delta$

Πίνακας 3.2 Πίνακας προτίμησης για ένα κριτήριο (MAX) με αξιολόγηση σε αναλογική κλίμακα.

(Martel & Matarazzo, 2005)

Η ακόλουθη ποιοτική κλίμακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει τη σημασία ενός κριτηρίου: όχι σημαντικό, λίγο, μέτρια, πολύ, πάρα πολύ σημαντικό. Όταν η δομή προτίμησης του αποφασίζοντα για κάθε κριτήριο, καθώς και η σημαντικότητα του κάθε κριτηρίου είναι γνωστές, η σύγκριση δυο εναλλακτικών a, b ως προς το κριτήριο g_j οδηγεί στο σχηματισμό ενός δισδιάστατου πίνακα. Κάθε στοιχείο f_{st} απεικονίζει τον αριθμό κριτηρίων συγκεκριμένης σημασίας για τα οποία υπάρχει μια συγκεκριμένη προτίμηση μεταξύ των εναλλακτικών a και b, $\sum_s \sum_{st} f_{st} = n$.

Προκειμένου να εξάγουμε μια συνολική εκτίμηση της σύγκρισης των εναλλακτικών a, b, ο αποφασίζων πρέπει να κατατάξει όλα τα στοιχεία του πίνακα 3.3, όπου $g_j(a) > g_j(b)$. Προτείνεται μια κατάταξη οκτώ κλάσεων. Μέσω αυτής της κατάταξης προκύπτει μία ποιοτική μεταβλητή. Για την ακρίβεια είναι μια συνδυαστική προτίμηση που λαμβάνει υπόψη τις αξιολογήσεις και τη σημαντικότητα των βαρών για $g_j(a) > g_j(b)$ και $g_j(a) < g_j(b)$ (πίνακας 3.4).

	criteria preference	not imp.	little imp.	moderate imp.	very imp.	extremly imp.	w_j
$g_j(a) > g_j(b)$	very strong	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	a
	strong	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	b
	moderate	f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}	f_{35}	$\vdots$
	small	f_{41}	f_{42}	f_{43}	f_{44}	f_{45}	$\vdots$
$g_j(a) = g_j(b)$	no	f_{51}	f_{52}	f_{53}	f_{54}	f_{55}	$\vdots$
$g_j(a) < g_j(b)$	small	f_{61}	f_{62}	f_{63}	f_{64}	f_{65}	$\vdots$
	moderate	f_{71}	f_{72}	f_{73}	f_{74}	f_{75}	$\vdots$
	strong	f_{81}	f_{82}	f_{83}	f_{84}	f_{85}	b
	very strong	f_{91}	f_{92}	f_{93}	f_{94}	f_{95}	a

Πίνακας 3.3. Πίνακας σημαντικότητας της προτίμησης (Martel & Matarazzo, 2005)

	$g_j(a) > g_j(b)$	$g_j(a) < g_j(b)$
1	$u_1 = f_{15}$	$\nu_1 = f_{95}$
2	$u_2 = f_{14} + f_{25}$	$\nu_2 = f_{85} + f_{94}$
3	$u_3 = f_{13} + f_{24} + f_{45}$	$\nu_3 = f_{75} + f_{84} + f_{93}$
4	$u_4 = f_{12} + f_{23} + f_{34} + f_{45}$	$\nu_4 = f_{65} + f_{74} + f_{93} + f_{92}$
5	$u_5 = f_{11} + f_{22} + f_{33} + f_{44}$	$\nu_5 = f_{64} + f_{73} + f_{82} + f_{91}$
6	$u_6 = f_{21} + f_{32} + f_{43}$	$\nu_6 = f_{63} + f_{72} + f_{81}$
7	$u_7 = f_{31} + f_{42}$	$\nu_7 = f_{62} + f_{71}$
8	$u_8 = f_{41}$	$\nu_8 = f_{61}$

Πίνακας 3.4. Συνδυασμένες προτιμήσεις με τις μεταβλητές βαρών (Martel & Matarazzo, 2005)

Ο αποφασίζων μπορεί να διαφοροποιήσει αυτή την κατάταξη (μετακινώντας ένα στοιχείο από μία κλάση σε μία άλλη, μειώνοντας τον αριθμό των κλάσεων) μέχρι να ικανοποιεί την προσωπική του άποψη. Με βάση τις δυο αυτές μεταβλητές, κατασκευάζονται οι σχέσεις υπεροχής (S), αδιαφορίας (I) ή ασυγκρισιμότητας (R):

$$\varepsilon\acute{\alpha}\nu \sum_{k=1}^{h} u_k = \sum_{k=1}^{h} v_k \;\; \gamma\iota\alpha\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\; h = 1, \dots, 8, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\; aIb$$

$$\varepsilon\acute{\alpha}\nu \sum_{k=1}^{h} u_k \geq \sum_{k=1}^{h} v_k \;\; \gamma\iota\alpha\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\; h = 1, \dots, 8, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\; aSb$$

$$\varepsilon\acute{\alpha}\nu \sum_{k=1}^{h} u_k \leq \sum_{k=1}^{h} v_k \;\; \gamma\iota\alpha\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\; h = 1, \dots, 8, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\; bSa$$

Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις ισχύει aRb

Σύμφωνα με τη βασική αρχή της υπεροχής, αν η εναλλακτική a είναι πολύ καλύτερη από τη b σε ένα η περισσότερα κριτήρια και η b καλύτερη από την a σε άλλα κριτήρια, μπορεί να υπάρχει ασυμφωνία και η b δεν θα υπερέχει της a. Ο αποφασίζων πρέπει να εκφράσει αναλυτικά τις προτιμήσεις του για κάθε κριτήριο όταν υπάρχει ασυμφωνία μεταξύ δυο εναλλακτικών στο συγκεκριμένο κριτήριο. Για ένα ποιοτικό κριτήριο πρέπει να υποδείξει στον άνω τριγωνικό πίνακα του πίνακα προτίμησης πότε προκύπτει ασυμφωνία. Για κριτήρια διαστημάτων, ο αποφασίζων πρέπει να υποδείξει για ποιου είδους διαφωνία (απόλυτη ή σχετική) υπάρχει ασυμφωνία.

Η μέθοδος ARGUS απαιτεί σχετικά μεγάλη προσπάθεια από τον αποφασίζοντα για να μοντελοποιήσει τις προτιμήσεις του.

3.2.3.5 Μέθοδος EVAMIX (Voogd, 1982; Martel & Matarazzo, 2005)

Η μέθοδος προτάθηκε από τον Voogd (Voogd, 1982) και αποτελεί γενίκευση της ανάλυσης συμφωνίας στην περίπτωση ανακατεμένων πληροφοριών στην αξιολόγηση των εναλλακτικών στα κριτήρια της απόφασης. Επομένως γίνονται συγκρίσεις κατά ζεύγη για όλες τις εναλλακτικές για να καθοριστούν οι δείκτες συμφωνίας - ασυμφωνίας. Η διαφορά με την τυπική ανάλυση συμφωνίας είναι ότι δημιουργούνται χωριστοί δείκτες για ποιοτικά και ποσοτικά κριτήρια. Η τελική κατάταξη των εναλλακτικών προκύπτει ως συνδυασμός των δυο αυτών δεικτών συμφωνίας.

Το σύνολο των κριτηρίων στον πίνακα πολυκριτήριας αξιολόγησης χωρίζεται σε ένα σύνολο ποιοτικών κριτηρίων Ο και ένα σύνολο ποσοτικών κριτηρίων C. Γίνεται η παραδοχή ότι οι διαφορές μεταξύ των εναλλακτικών μπορούν να εκφραστούν με δυο είδη κυριαρχίας: τον δείκτη κυριαρχίας $\alpha_{ii'}$ για ποιοτικά κριτήρια και ο δείκτης $\alpha_{ii'}$ για ποσοτικά κριτήρια. Αυτές οι επιδόσεις εκφράζουν το βαθμό που η εναλλακτική α_i υπερτερεί της $\alpha_{i'}$, όπως περιγράφονται παρακάτω:

$$a_{u'} = f\left(e_{ij}, e_{i'j}, \pi_j\right), για\ κάθε\ j\ \in O,$$

$$a_{u'} = G\left(e_{ij}, e_{i'j}, \pi_j\right), για\ κάθε\ j\ \in C,$$

Όπου το e_{hj} εκφράζει την επίδοση της εναλλακτικής α_h στο κριτήριο g_j και π_j το βάρος στο συγκεκριμένο κριτήριο. Οι δείκτες ορίζονται ακολούθως:

$$\alpha_{ii'} = \left[\sum_{j\in O}\left\{\pi_j sgn(e_{ij} - e_{i'j})\right\}^c\right]^{\frac{1}{c}},$$

Όπου,

$$sgn\left(e_{ij} - e_{i'j}\right) = \begin{cases} +1, εάν\ e_{ij} > e_{i'j} \\ 0\ εάν\ e_{ij} = e_{i'j} \\ -1\ εάν\ e_{ij} < e_{i'j} \end{cases}$$

Το σύμβολο c καθορίζει μία αυθαίρετη παράμετρο κλίμακας, στην οποία μπορεί να επιλεγεί κάθε περιττός αριθμός c= 1, 3, 5, … . Με παρόμοιο τρόπο ο δείκτης ποσοτικής υπολογίζεται ως:

$$\alpha_{ii'} = \left[\sum_{j\in C}\{\pi_j(e_{ij} - e_{i'j})\}^c\right]^{\frac{1}{c}}.$$

Προκειμένου να είμαστε συνεπείς, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η ίδια τιμή για το c, όπως και στον προηγούμενο δείκτη. Επίσης οι επιδόσεις έχουν αναχθεί στο διάστημα ($0 \le e_{ij} \le 1$). Έτσι όλες οι κανονικοποιημένες επιδόσεις έχουν την ίδια κατεύθυνση, δηλαδή υψηλότερη τιμή θα σημαίνει μεγαλύτερη προτίμηση. Πρέπει επίσης και οι επιδόσεις e_{ij} ($j \in O$) των ποιοτικών κριτηρίων να εκφράζουν «όσο μεγαλύτερα, τόσο καλύτερα». Εφόσον τα $\alpha_{ii'}$ και $\alpha_{ii'}$ έχουν διαφορετικές μονάδες μέτρησης, είναι απαραίτητη μια κανονικοποίηση. Οι κανονικοποιημένες μετρήσεις κυριαρχίας μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\delta_{ii'} = h(a_{ii'}) \kappa\alpha\acute{\iota}\, d_{ii'} = h(a_{ii'}),$$

Όπου το h εκφράζει τη συνάρτηση κανονικοποίησης.

Ας θεωρήσουμε ότι τα βάρη π_j έχουν ποσοτικές ιδιότητες. Η συνολική επίδοση κυριαρχίας $D_{ii'}$ για κάθε ζεύγος εναλλακτικών (α_i, $\alpha_{i'}$) είναι:

$$D_{ii'} = k(s_i, s_{i'}).$$

Αυτή η σχέση εκφράζει ένα γνωστό πρόβλημα της σύγκρισης κατά ζεύγη. Ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης k υπολογίζονται οι τιμές αξιολόγησης. Η πιο σημαντική παραδοχή της μεθόδου EVAMIX αφορά τον ορισμό των διαφόρων συναρτήσεων. Η πιο τυπική έκφραση είναι η τεχνική άθροισης διαστημάτων. Ο ολικός δείκτης κυριαρχίας $D_{ii'}$ ορίζεται ως:

$$D_{ii'} = \frac{s_i}{s_i + s_{i'}},$$

Από τη σχέση εξυπακούεται ότι $D_{ii'} + D_{i'i} = 1$. Για να καταλήξουμε σε αυτό το δείκτη κυριαρχίας με αυτά τα χαρακτηριστικά, χρησιμοποιείται η ακόλουθη τυποποίηση:

$$\delta_{ii'} = \frac{(a_{ii'} - a^-)}{(a^+ - a^-)} \; \kappa\alpha\acute{\iota}\, d_{ii'} = \frac{(a_{ii'} - a^-)}{(a^+ - a^-)}$$

Όπου α^- (α^+) είναι η χαμηλότερη (υψηλότερη) ποιοτική επίδοση κυριαρχίας κάθε ζεύγους εναλλακτικών (α_ι, $\alpha_{\iota'}$) και α^- (α^+) η χαμηλότερη (υψηλότερη) ποσοτική επίδοση κυριαρχίας κάθε ζεύγους (α_ι, $\alpha_{\iota'}$). Η επίδοση υπολογίζεται τελικά ως:

$$s_i = \left[\sum_{i'} \frac{D_{i'i}}{D_{ii'}}\right]^{-1}.$$

Αυτή η έκφραση φανερώνει ότι οι παραπάνω επιδόσεις αθροίζουν στη μονάδα, $\Sigma_i s_i = 1$.

Στην παραπάνω εκπόνηση, τα ποσοτικά βάρη π_j, j = 1, 2, ..., n, είχαν θεωρηθεί γνωστά. Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να δοθούν μόνο ποιοτικές εκφράσεις προτίμησης. Εάν δίνονται μόνο ποιοτικές πληροφορίες, μπορούν να ακολουθηθούν δυο διαφορετικές προσεγγίσεις: η προσέγγιση του αναμενόμενου μέσου ή η προσέγγιση ενός τυχαίου βάρους. Η προσέγγιση τυχαίου βάρους υποθέτει τη δημιουργία τυχαίων βαρών από μία περιοχή που περικλείεται από τις ακραίες τιμές που μπορεί να πάρουν τα βάρη. Αυτές οι τυχαίες τιμές βαρών πρέπει να πληρούν τις ακόλουθες συνθήκες:

1) $\text{για κάθε } \gamma_j \gamma_{j'} \omega_j \leq \omega_{j'} \Longrightarrow \gamma_j \geq \gamma_{j'}$,
2) $\sum_j \gamma_j = 1$,

Όπου ω_j συμβολίζει μια τιμή κατάταξης που εκφράζει ένα ποιοτικό βάρος η τιμή να συνεπάγεται και καλύτερη. Για κάθε σύνολο βαρών γ_j, j = 1, …, n, που δημιουργείται με μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών, καθορίζεται ένα σύνολο τιμών επίδοσης. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία πολλές φορές μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα συχνοτήτων. Κάθε στοιχείο f_{ri} εκφράζει το πλήθος που η εναλλακτική α_i τοποθετήθηκε στην r-στή θέση στην τελική κατάταξη. Μπορεί να κατασκευαστεί ένας πίνακας από στοιχεία p_{ri}, όπου:

$$p_{ri} = \frac{f_{ri}}{\sum_i f_{ri}}.$$

Το p_{ri} εκφράζει την πιθανότητα η εναλλακτική α_i να λάβει την r-στή θέση. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μία συνολική κατάταξη όλων των εναλλακτικών με τον ακόλουθο τρόπο:

$a_i = 1, εάν\ το\ p_{1i}\ είναι\ μέγιστο,$

$a_{i'} = 2, εάν\ το\ p_{1i} + p_{2i'}\ είναι\ μέγιστο\ καί\ \ i' \neq i,$

$a_{i\prime\prime} = 3, εάν\ p_{1i} + p_{2i\prime} + p_{3i\prime\prime}\ είναι\ μέγιστο\ καί\ \ i'' \neq i' \neq i,$

κ.ο.κ.

Η EVAMIX έχει βασιστεί στις ακόλουθες σημαντικές παραδοχές:

1) Τον ορισμό των διαφόρων συναρτήσεων f, g, h και k
2) Τον ορισμό των βαρών των συνόλων O και C
3) Την προσθετική σχέση του συνολικού δείκτη κυριαρχίας.

3.2.3.6 Μέθοδος TACTIC (Vansnick, 1986; Martel & Matarazzo, 2005)

Η μέθοδος TACTIC προτάθηκε από τον Vansnick (Vansnick, 1986). Στη μέθοδο αυτή η οικογένεια κριτηρίων F μπορεί να αποτελείται είτε από αληθή είτε από φαινομενικά κριτήρια (quasi-criteria) (κριτήρια με κατώφλι αδιαφορίας q > 0) g_j, j = 1, …, n, και οι αντίστοιχες δομές προτίμησης είναι (P, I) ή (P, I, R), όπου R η σχέση ασυγκρισιμότητας.

Σε κάθε κριτήριο $g_j \in F$ αποδίδεται ένας συντελεστής βαρύτητας $\lambda_j > 0$, όπως στις μεθόδους ELECTRE. Για να μοντελοποιήσουμε τις προτιμήσεις, ορίζεται το ακόλουθο σύνολο $J\ \ \forall$ a,b ∈ A, a ≠ b:

$$J_T(a,b) = \{j\ \ \in|: g_j(a) >\ g_j(b) + q_j[g_j(b)]\},$$

Όπου $q_j[g_j(b)]$ είναι το κατώφλι αδιαφορίας συναρτήσει της χειρότερης επίδοσης μεταξύ $g_j(a)$ και $g_j(b)$, επομένως σε αυτή την περίπτωση έχουμε aP_jb.

Εάν το σύνολο F αποτελείται μόνο από αληθή κριτήρια, η δήλωση aPb είναι αληθής εάν και μόνο αν ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη συμφωνίας:

$$\sum_{j \in J_T(a,b)} \lambda_j > \rho \ \sum_{j \in J_T(b,a)} \lambda_j \text{ , ή } \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \ \frac{\sum_{j \in J_T(a,b)} \lambda_j}{\sum_{j \in J_T(b,a)} \lambda_j} > \rho \ \ \varepsilon\acute{\alpha}\nu \ J_T(b,a) \neq 0, \text{ (συνθήκη 1)}$$

Όπου ο συντελεστής ρ ονομάζεται απαιτούμενο επίπεδο συμφωνίας (συνήθως, $1 \leq \rho \leq \frac{\sum_{j\in I} \lambda_j}{min_{j \in I}\lambda_j} - 1$) και τα δυο αθροίσματα εκφράζουν την απόλυτη σημαντικότητα του συνόλου των κριτηρίων υπέρ της εναλλακτικής a ή b αντίστοιχα.

Εάν στο σύνολο F υπάρχουν και φαινομενικά κριτήρια η δήλωση aPb είναι αληθής αν και μόνο αν η παραπάνω συνθήκη συμφωνίας, όσο και η ακόλουθη συνθήκη μη veto ικανοποιούνται:

$$\forall \, j \ \in J, g_j(a) + v_j\big[g_j(a)\big] \geq g_j(b), \text{ (συνθήκη 2)}$$

Όπου $v_j\big[g_j(a)\big]$ το κατώφλι veto.

Εάν η προηγούμενη συνθήκη δεν ικανοποιείται από τουλάχιστον ένα κριτήριο, τότε aRb. Από την άλλη, έχουμε aIb αν και μόνο αν και τα δυο ζεύγη (a, b) και (b, a) δεν ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη και δεν προκύπτει συνθήκη άσκησης veto.

Σημειώνουμε ότι εάν $\rho = \rho^* = \frac{\sum_{j\in I} \lambda_j}{min_{j \in I}\lambda_j} - 1$, η συνθήκη 1 είναι ισοδύναμη με την πλήρη απουσία κριτηρίων αντίθετα στη δήλωση aPb, δηλαδή J_T(b, a) = Ø (επομένως σε αυτή την περίπτωση η συνθήκη 2 ισχύει αυτομάτως). Εάν $q_j = 0$ για κάθε κριτήριο g_j, η σχέση P είναι μεταβατική για $\rho > \rho^*$, υπάρχουν δυο περιπτώσεις:

- aPb, bPc, aIc (ή aRc),
- aPb, bPc, cPa.

Η κύρια διαφορά της ELECTRE I και της TACTIC είναι ότι η τελευταία βασίζεται στη σχέση aPb, ενώ η πρώτη στοχεύει να δημιουργήσει τις σχέσεις aSb. Επίσης εξαιτίας της ιδιαιτερότητας του χαρακτηρισμού μιας σχέσης ως aPb, η TACTIC είναι δύσκολο να διαχωρίσει καταστάσεις αδιαφορίας και ασυγκρισιμότητας.

3.2.3.7 Μέθοδος MELCHIOR (Leclercq, 1984; Βλάχος, 2007)

Η μέθοδος MELCHIOR προτάθηκε από τον Leclercq (Leclercq, 1984). Σε αυτή την μέθοδο κάνουμε χρήση ψευδοκριτηρίων, δηλαδή κριτηρίων με κατώφλια αδιαφορίας και προτίμησης. Για κάθε κριτήριο $κ_i$ ορίζουμε μια μεταβλητή v_{ij} για κάθε εναλλακτική $α_j$ και η οποία αντιπροσωπεύει την επίδοση της $α_j$. Για κάθε εναλλακτική $α_j$, τα κατώφλια προτίμησης και αδιαφορίας $Φ_{ij}$ και I_{ij}, προσδιορίζονται για κάθε κριτήριο $κ_i$ με $0 \le I_{ij} \le Φ_{ij}$. Επίσης η μέθοδος χρησιμοποιεί κατώφλια veto.

Οι συγκρίσεις γίνονται μεταξύ κάθε ζεύγους εναλλακτικών $α_e$ και $α_f$, με βάση το κριτήριο $κ_i$, επομένως προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. Η εναλλακτική $α_e$ είναι αυστηρά προτιμώμενη από την $α_f$ στο κριτήριο $κ_i$ $\left(a_e \succ {}_i^s a_f\right)$ εάν και μόνο εάν $v_{ie} > \ v_{ie} + \Phi_{if}$
2. Η $α_e$ είναι ασθενώς προτιμώμενη από την $α_f$ για το κριτήριο $κ_i$ $(a_e \succ {}_i^w a_f)$ εάν και μόνο εάν $v_{if} + \Phi_{if} \geq v_{ie} > v_{if} + I_{ij}$
3. Αλλιώς οι $α_e$ και $α_f$ είναι αδιάφορες μεταξύ τους στο κριτήριο $κ_i$ ($α_e \sim α_f$).

Σε αυτή την μέθοδο δεν ορίζουμε τα βάρη σημαντικότητας των κριτηρίων. Αντίθετα σε κάθε κριτήριο $κ_i$ προσδιορίζεται μια δυαδική μεταβλητή $ρ_i$, η οποία αντιπροσωπεύει την σημαντικότητα του κριτηρίου σε σχέση με τα υπόλοιπα κριτήρια του συνόλου Κ.

Οι συγκρίσεις γίνονται μεταξύ του κάθε ζεύγους εναλλακτικών $α_e$ και $α_f$ για κάθε κριτήριο $κ_i$ η τιμή $υ_{ief}$ προσδιορίζεται έτσι ώστε:

$$\upsilon_{ief} = 1 \ εάν \ και \ μόνο \ αν \ ισχύει \ \alpha_\varepsilon \succ {}_i^s a_f,\ a_e \succ {}_i^w a_f \text{ ή } v_{ie} > v_{if}$$

$$\upsilon_{ief} = -1 \ εάν \ και \ μόνο \ αν \ ισχύει \ \alpha_{\varepsilon f} \succ {}_i^s a_e, a_f \succ {}_i^w a_e \text{ ή } v_{if} > v_{ie}$$

Μια ισχυρή σχέση προτίμησης $\succ^{s}$ προσδιορίζεται μεταξύ κάθε ζεύγους εναλλακτικών α_e και α_f, έτσι ώστε $a_e \succ^{s} a_f$ εάν και μόνο αν για κάθε κριτήριο κ_i για το οποίο ισχύει $\upsilon_{ief} = -1$ υπάρχει ένα και μοναδικό κριτήριο κ_h με $h \neq I$ για το οποίο ισχύει $\upsilon_{ief} = 1$ και $\rho_h < \rho_i$.

Μία ασθενής σχέση προτίμησης $\succ^{w}$ μεταξύ ενός ζεύγους εναλλακτικών α_e α_f προσδιορίζεται ούτως ώστε $a_e \succ^{w} a_f$ αν και μόνο αν για κάθε κριτήριο κ_i για το οποίο $\upsilon_{ief} = -1$ υπάρχει ένα και μοναδικό κριτήριο κ_h, $h \neq i$ για το οποίο ισχύει $\upsilon_{ief} = 1$ και $\rho_h < \rho_i$. Ο συγγραφέας προτείνει την ομαδοποίηση των κριτηρίων υψηλότερης και χαμηλότερης προτίμησης αντίστοιχα ώστε να γίνει έλεγχος για καταστάσεις μη ασυμφωνίας.

Έπειτα γίνεται χρήση των σχέσεων ώστε να παραχθεί μια ασθενής γραμμική κατάταξη των εναλλακτικών του συνόλου Α υπό την επίδραση δυο διαφορετικών ασθενών γραμμικών κατατάξεων των εναλλακτικών, όπου η μία είναι κατασκευασμένη με τη λογική της καθόδου, δηλαδή από την καλύτερη στη χειρότερη και η άλλη με τη λογική της ανόδου, δηλαδή από τη χειρότερη στην καλύτερη εναλλακτική. Οι σχέσεις υπεροχής που θα περιγραφούν παρακάτω ξεκινούν με τον προσδιορισμό του συνόλου Α΄ από τα στοιχεία του Α για τα οποία καμία άλλη εναλλακτική δεν είναι ισχυρά προτιμώμενη. Στη συνέχεια το σύνολο αυτό διαχωρίζεται σε ένα ακόμη, το Α” το οποίο περιλαμβάνει τα στοιχεία του Α’ για τα οποία καμία εναλλακτική εντός του συνόλου είναι ασθενής προτίμησης. Τα στοιχεία του Α” έχουν προσδιοριστεί εν μέρει ώστε να αποτελούν το κατάλληλο σύνολο εναλλακτικών και διαδικασιών που επαναλαμβάνονται. Έπειτα παράγονται τα σύνολα A_2’ και A_2”. Τα στοιχεία του A_2” αποτελούν τις δεύτερες καλύτερες εναλλακτικές. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι την πλήρη κατηγοριοποίηση των στοιχείων του Α.

Η δεύτερη διαδικασία, όπου έχουμε κατάταξη από τη χειρότερη προς την καλύτερη εναλλακτική, πραγματοποιείται παρόμοια. Προσδιορίζεται το Α’ ως υποσύνολο του Α, όπου αυτή τη φορά περιλαμβάνει τις εναλλακτικές που δεν είναι ισχυρά προτιμώμενες από καμία εναλλακτική του συνόλου Α. Το σύνολο Α” περιλαμβάνει τα στοιχεία του Α’ που δεν είναι ασθενώς προτιμώμενα από κανένα του συνόλου Α’. Τα στοιχεία του Α” προσδιορίζουν το σύνολο των χειρότερων εναλλακτικών. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι την πλήρη κατηγοριοποίηση των στοιχείων του Α. Οι δυο κατατάξεις συνδυάζονται ώστε να προκύψει μια ασθενής γραμμική κατάταξη του συνόλου των εναλλακτικών Α.

3.2.3.8 Μέθοδος MAPPAC (Matarazzo, 1986; Βλάχος, 2007)

Η μέθοδος MAPPAC (Multicriteria Analysis of Preferences by means of Pairwise Actions and Criterion comparisons) προτάθηκε από τον (Matarazzo, 1986). Για κάθε κριτήριο $κ_i$ προσδιορίζεται η μεταβλητή $ν_{ij}$, που εκφράζει την επίδοση της εναλλακτικής $α_j$ στο συγκεκριμένο κριτήριο. Η σημαντικότητα των κριτηρίων εκφράζεται με τα βάρη w_i, έτσι ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Για κάθε κριτήριο δημιουργείται μια συνάρτηση χρησιμότητας που χρησιμοποιείται στον προσδιορισμό της τιμής $υ(ν_{ij})$ για κάθε $ν_{ij}$ με το $υ(ν_{ij})$ να κυμαίνεται στο διάστημα [0, 1].

Θα συμβολίσουμε τους δείκτες προτιμήσεων ως $π_{gh}(α_e, α_f)$ και υπολογίζονται για κάθε ζεύγος $α_e$, $α_f$ και κάθε ζεύγος κριτηρίων $κ_g$, $κ_h$, με:

$$\pi_{gh}(a_e, a_f) = 1 \quad εάν \quad \upsilon(\nu_{ge}) > \upsilon(\nu_{gf}) \wedge \upsilon(\nu_{he}) > \upsilon(\nu_{hf})$$

$$\pi_{gh}(a_e, a_f) = 0 \quad εάν \quad \upsilon(\nu_{ge}) < \upsilon(\nu_{gf}) \wedge \upsilon(\nu_{he}) < \upsilon(\nu_{hf})$$

$$\pi_{gh}(a_e, a_f) = \frac{1}{2} \quad εάν \quad \upsilon(\nu_{ge}) = \upsilon(\nu_{gf}) \wedge \upsilon(\nu_{he}) = \upsilon(\nu_{hf})$$

$$\pi_{gh}(a_e, a_f) = \frac{w_g\left(\upsilon(\nu_{ge}) - \upsilon(\nu_{gf})\right)}{w_g\left(\upsilon(\nu_{ge}) - \upsilon(\nu_{gf})\right) + w_h\left(\upsilon(\nu_{hf}) - \upsilon(\nu_{he})\right)} \quad εάν\ ισχύει:$$

$$(\upsilon(\nu_{ge}) > \upsilon(\nu_{gf}) \wedge \upsilon(\nu_{he}) \leq \upsilon(\nu_{hf})) \vee (\upsilon(\nu_{ge}) = \upsilon(\nu_{gf}) \wedge \upsilon(\nu_{he}) < \upsilon(\nu_{hf}))$$

Είτε

$$\pi_{gh}(a_e, a_f) = \frac{w_h\left(\upsilon(\nu_{ge}) - \upsilon(\nu_{gf})\right)}{w_g\left(\upsilon(\nu_{gf}) - \upsilon(\nu_{ge})\right) + w_h\left(\upsilon(\nu_{he}) - \upsilon(\nu_{hf})\right)} \quad εάν\ ισχύει:$$

$$(\upsilon(\nu_{ge}) \leq \upsilon(\nu_{gf}) \wedge \upsilon(\nu_{he}) > \upsilon(\nu_{hf})) \vee (\upsilon(\nu_{ge}) < \upsilon(\nu_{gf}) \wedge \upsilon(\nu_{he}) \geq \upsilon(\nu_{hf}))$$

Ορίζουμε τη μεταβλητή

$$\pi_{ef} = \sum_{i<j} \pi_{ij}(\alpha_e, \alpha_f) \frac{w_i + w_j}{m-1}$$

Η ολική τιμή π_e προσδιορίζεται για κάθε εναλλακτική α_e που είναι ίση με:

$$\pi_e = \sum_{a_f \in A \setminus a_e} \pi_{ef}$$

Η εναλλακτική α_e με την καλύτερη τιμή π_e απομακρύνεται από το σύνολο, και τίθεται ως η βέλτιστη εναλλακτική. Προσδιορίζονται οι υπόλοιπες π_e αφαιρώντας την προηγούμενη βέλτιστη λύση και επιλέγεται ως δεύτερη καλύτερη η επιλογή α_e με την καλύτερη τιμή π_e. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι την πλήρη κατάταξη όλων των εναλλακτικών. Έπειτα με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται τα π_e του συνόλου Α και αυτή τη φορά αφαιρείται η εναλλακτική με το μικρότερο π_e και τοποθετείται ως χειρότερη. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι την πλήρη κατάταξη των εναλλακτικών. Οι δυο κατατάξεις συνδυάζονται ώστε να προκύψει μια ασθενής γραμμική κατάταξη του συνόλου των εναλλακτικών Α (Βλάχος, 2007).

3.2.3.9 Μέθοδος PRAGMA (Matarazzo, 1988; Βλάχος, 2007)

Η μέθοδος PRAGMA (Preference Ranking Global frequencies in Multi-criteria Analysis) προτάθηκε από τον (Matarazzo, 1988). Για κάθε κριτήριο κ_i προσδιορίζεται η μεταβλητή v_{ij}, που εκφράζει την επίδοση της εναλλακτικής α_j στο συγκεκριμένο κριτήριο. Η σημαντικότητα των κριτηρίων εκφράζεται με τα βάρη w_i, έτσι ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Για κάθε κριτήριο δημιουργείται μια συνάρτηση χρησιμότητας που χρησιμοποιείται στον προσδιορισμό της τιμής $\upsilon(v_{ij})$ για κάθε v_{ij} με το $\upsilon(v_{ij})$ να κυμαίνεται στο διάστημα [0, 1]. Για κάθε ζεύγος κριτηρίων κ_g, κ_h παράγεται μια μερική κατανομή η οποία αναπαριστά τα κριτήρια σαν δυο παράλληλα τμήματα μήκους 1 και στα οποία έχει τοποθετηθεί μια μονάδα. Σε αυτή την κατανομή η τιμή $\upsilon(\nu_{ij})$ κάθε εναλλακτικής έχει σχεδιαστεί κατά μήκος της γραμμής που αντιπροσωπεύουν τα δυο κριτήρια. Αυτά τα σημεία συνδέονται μεταξύ τους και από τις διασταυρώσεις που προκύπτουν κατασκευάζεται ο πίνακας M_{gh} με διαστάσεις m×m για κάθε ζεύγος κριτηρίων. Στον πίνακα οι τιμές m προσδιορίζονται για m εναλλακτικές βάση των κριτηρίων κ_g κ_h και στη συνέχεια οι τιμές αθροίζονται για να προκύψει ο πίνακας. Ο πίνακας που προκύπτει χρησιμοποιείται για να εξαχθεί μια ασθενής γραμμική κατάταξη των εναλλακτικών.

3.2.3.10 Μέθοδος IDRA (Greco, 1997; Βλάχος, 2007)

Η μέθοδος IDRA (Inter-criteria Decision Rule Approach) προτάθηκε από τον (Greco, 1997). Για κάθε κριτήριο κ_i προσδιορίζεται η μεταβλητή ν_{ij}, που εκφράζει την επίδοση της εναλλακτικής α_j στο συγκεκριμένο κριτήριο. Για κάθε κριτήριο παράγεται μια συνάρτηση χρησιμότητας που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό των $\upsilon(\nu_{ij})$ για κάθε ν_{ij} ως εξής:

$$\upsilon(\nu_{ij}) = \frac{\nu_{ij} - min[\nu_{ij}]}{max[\nu_{ij}] - min[\nu_{ij}]}$$

Όπου $min[\nu_{ij}]$ και $max[\nu_{ij}]$ οι ελάχιστές και μέγιστες πιθανές τιμές ν_{ij} της εναλλακτικής α_j στο κριτήριο κ_i.

Επίσης πρέπει να προσδιοριστεί για όλα τα πιθανά ζεύγη κριτηρίων κ_g κ_h μια μεταβλητή δ_{gh} που θα εκφράζει τις μονάδες του κριτηρίου κ_g που πρέπει να προστεθούν σε μια εναλλακτική για να αντισταθμιστεί η απώλεια μιας μονάδας από το κριτήριο κ_h. Η διαφορά πρέπει να είναι κανονικοποιημένη στο διάστημα [0, 1].

Επιπλέον, για όλα τα πιθανά ζεύγη κριτηρίων κ_g κ_h πρέπει να προσδιοριστεί μια μεταβλητή λ_{gh} που θα εκφράζει τη σημαντικότητα του κριτηρίου κ_g έναντι του κ_h, με $w_{gh} + w_{hg} = 1$, όπου w_{gh} w_{hg} τα σχετικά βάρη των κριτηρίων.

Ορίζουμε $\pi_{gh}(\alpha_e, \alpha_f)$ την πιθανότητα για την οποία σε μια μεικτή συνάρτηση χρησιμότητας (δείκτης προτίμησης), με τυχαία επιλεγμένα βάρη, η εναλλακτική α_e υπερέχει της α_f. Για κάθε ζεύγος α_e, α_f ορίζουμε:

$$\pi(a_e, a_f) = \sum_{g \neq h} (\delta_{gh} + \lambda_{gh}) \pi_{gh}(a_e, a_f)$$

Οι σχέσεις προτίμησης προκύπτουν ακολούθως:

$$\alpha_e \succ \alpha_f \ \text{εάν καί μόνο αν} \ 0 \leq \pi(\alpha_f, \alpha_e) < 0.5 < \pi(\alpha_e, \alpha_f) \leq 1$$

Και

$$\alpha_e \sim \alpha_f \ \text{εάν καί μόνο αν} \ \pi(\alpha_f, \alpha_e) = 0.5 = \pi(\alpha_e, \alpha_f)$$

3.2.3.11 Μέθοδος PACMAN (Giarlotta, 1998; Βλάχος, 2007)

Η μέθοδος PACMAN (Passive and Active Compensability Multi-criteria ANalysis) παρουσιάστηκε από τον (Giarlotta, 1998). Για κάθε κριτήριο κ_i προσδιορίζεται η μεταβλητή ν_{ij}, που εκφράζει την επίδοση της εναλλακτικής α_j στο συγκεκριμένο κριτήριο. Για κάθε κριτήριο κ_i και κάθε ζεύγος εναλλακτικών επιλογών α_e α_f υπολογίζεται η διαφορά $\delta_i(\alpha_e, \alpha_f)$ ακολούθως:

$$\delta_i(a_e, a_f) = \frac{\nu_{ie} - \nu_{if}}{max[\nu_{ij}] - min[\nu_{ij}]}$$

Όπου $min[\nu_{ij}]$ και $max[\nu_{ij}]$ οι ελάχιστές και μέγιστες πιθανές τιμές ν_{ij} της εναλλακτικής α_j στο κριτήριο κ_i. Η διαφορά κυμαίνεται στο διάστημα $-1 \leq \delta_i(a_e, a_f) \leq 1$.

Κάθε ζεύγος κριτηρίων κ_g και κ_h που έχει συγκριθεί, με το κριτήριο κ_g να αντισταθμίζει την αρνητική διαφορά ως προς το κριτήριο κ_h. Η διαφορά μεταξύ των κριτηρίων ποσοτικοποιείται στο διάστημα [0, 1] με την τιμή 1 να εκφράζει την αδυναμία σύγκρισης μεταξύ των κριτηρίων κ_h και κ_g και η τιμή 0 να εκφράζει το ακριβώς αντίθετο. Οι τιμές αυτές χρησιμοποιούνται για να κατασκευάσουμε μια αντισταθμιστική συνάρτηση η οποία προσδιορίζεται για κάθε ζεύγος κριτηρίων κ_g και κ_h του συνόλου των κριτηρίων Κ. Η συνάρτηση αυτή είναι ασθενώς μονότονη και συνεχής. Η συνάρτηση αυτή εκχωρεί τις τιμές των δεικτών $\Pi^+(\alpha_e, \alpha_f)$ και $\Pi^-(\alpha_e, \alpha_f)$ για κάθε ζεύγος εναλλακτικών α_e και α_f. Ο δείκτης $\Pi^+(\alpha_e, \alpha_f)$ εκφράζει το βαθμό στον οποίο η εναλλακτική α_e αντισταθμίζει την α_f και με $\Pi^-(\alpha_e, \alpha_f)$ εκφράζεται ο βαθμός για τον οποίο η εναλλακτική α_f αντιστέκεται στην αντιστάθμιση.

Η αντισταθμιζόμενη προτίμηση της εναλλακτικής αe πάνω στην af θεωρείται αποδέκτη και συμβολίζεται ως $\Gamma^+(\alpha_e, \alpha_f)$ αν και μόνο αν $\Pi^+(\alpha_e, \alpha_f) > \Pi^-(\alpha_e, \alpha_f)$. Όταν αυτό είναι αμφίβολο τότε $\Gamma^=(\alpha_e, \alpha_f)$ αν και μόνο αν $\Pi^+(\alpha_e, \alpha_f) = \Pi^-(\alpha_e, \alpha_f)$. Τέλος απορρίπτεται όταν $\Gamma^-(\alpha_e, \alpha_f)$ αν και μόνο αν $\Pi^+(\alpha_e, \alpha_f) < \Pi^-(\alpha_e, \alpha_f)$.

Οι σχέσεις προτίμησης προκύπτουν ακολούθως:

- $a_e \succ a_f$ αν και μόνο αν:

$$\left(\Gamma^+(\alpha_e, \alpha_f) \wedge \Gamma^-(\alpha_f, \alpha_e)\right) \vee \left(\Gamma^+(a_e, a_f) \wedge \Gamma^=(a_f, a_e)\right) \vee \left(\Gamma^=(\alpha_e, \alpha_f) \wedge \Gamma^-(\alpha_f, \alpha_e)\right)$$

- $a_e \sim a_f$ αν και μόνο αν:

$$\left(\Gamma^=(a_e, a_f) \wedge \Gamma^=(a_f, a_e)\right) \vee \left(\Gamma^+(\alpha_e, \alpha_f) \wedge \Gamma^+(\alpha_f, \alpha_e)\right)$$

3.2.3.12 Μέθοδος Martel and Zara's (Martel & Zaras, 1997; Martel & Matarazzo, 2005)

Έστω ένα πολυκριτήριο πρόβλημα που μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω του μοντέλου Α.Α.Ε (Alternatives, Attributes/Criteria, Evaluators) (Εναλλακτικές, Χαρακτηριστικά/Κριτήρια, Αποτιμήσεις).

- Το σύνολο $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ είναι το σύνολο των δυνατών εναλλακτικών.

- Το σύνολο $F = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ είναι το σύνολο των κριτηρίων. Ένα κριτήριο κυμαίνεται εντός του διαστήματος $[x_j^0, x_j^1]$, όπου x_j^0 η χειρότερη τιμή που μπορεί να έχει το χαρακτηριστικό X_j και x_j^1 η καλύτερη τιμή. $E = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ είναι το σύνολο των αποτιμήσεων, όπου αποτίμηση $f_i(x_{ij})$ είναι μια συνάρτηση πιθανότητας που σχετίζεται με κάθε εναλλακτική a_i και ένα μη κενό σύνολο x_{ij} (μια τυχαία μεταβλητή) και εκφράζει την αξιολόγηση της a_i ως προς το χαρακτηριστικό X_j.

Η μέθοδος προϋποθέτει τη σαφή γνώση των εκτιμήσεων των εναλλακτικών για όλα τα κριτήρια καθώς και τα βάρη των κριτηρίων.

Τα κριτήρια ορίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε μία μεγαλύτερη τιμή είναι προτιμώμενη μίας μικρής και οι συναρτήσεις πιθανότητας να είναι γνωστές. Επίσης γίνεται η παραδοχή ότι το σύνολο των κριτηρίων F είναι συνεπές με τη συνθήκη προσθετικής ανεξαρτησίας. Οι (Huang, et al., 1969) απέδειξαν ότι στην περίπτωση ανεξάρτητης πιθανότητας και προσθετικών πολυκριτήριων συναρτήσεων χρησιμότητας, η απαραίτητη συνθήκη για να την πολυκριτήρια στοχαστική κυριαρχία είναι η επαλήθευση της στοχαστικής κυριαρχίας σε κάθε κριτήριο. Πρακτικά, το κύριο χαρακτηριστικό των πολυκριτήριων προβλημάτων είναι η σύγκρουση των κριτηρίων, επομένως η σχέση πολυκριτήριας στοχαστικής κυριαρχίας δεν είναι χρήσιμη στον αποφασίζοντα. Επομένως είναι λογικό να χαλαρώσουμε τη συνθήκη ομοφωνίας και να αποδεχτούμε μια συνθήκη πλειονότητας των κριτηρίων.

Στη μέθοδο Martel and Zara's (Martel & Zaras, 1997) γίνεται χρήση της στοχαστικής κυριαρχίας για να συγκριθούν όλες οι εναλλακτικές κατά ζεύγη σε κάθε κριτήριο. Οι συγκρίσεις αυτές έχουν την ερμηνεία των μερικών προτιμήσεων. Έπειτα με την προσέγγιση της θεωρίας σχέσεων υπεροχής κατασκευάζονται οι σχέσεις υπεροχής με βάση τους δείκτες συμφωνίας – ασυμφωνίας. Τέλος αυτές οι σχέσεις χρησιμοποιούνται για να επιλύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Εάν η (μερική) προτίμηση του αποφασίζοντα για κάθε κριτήριο X_j μπορεί να σχετιστεί με μια συνάρτηση χρησιμότητας $U_j \in$ DARA (DARA είναι μια κατηγορία κοίλων συναρτήσεων χρησιμότητας) τότε η προτίμηση για την $F_j(x_{ij})$ κατανομή που σχετίζεται με την εναλλακτική a_i για κάθε κριτήριο X_j θα είναι:

$$g_j\left(F_j(x_{ij})\right) = \int_{x_j^0}^{x_j^1} U_j(x_{ij})\, dF_j(x_{ij}).$$

Θεώρημα 1 (Hadar & Russel, 1969): Εάν $F_j(x_{ij})$ FSD $F_j(x_{i'j})$ ή $F_j(x_{ij})$ SSD $F_j(x_{i'j})$ ή $F_j(x_{ij})\, TSD\, F_j(x_{i'j})$ και $F_j(x_{ij}) \geq F_j(x_{i'j})$, τότε $g_j\left(F_j(x_{ij})\right) \leq g_j\left(F_j(x_{i'j})\right)$ για όλα τα $U_j \in$ DARA, όπου $F_j(x_{ij})$ και $F_j(x_{i'j})$ εκφράζουν αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής που σχετίζονται με τα a_i και $a_{i'}$ αντίστοιχα. (FSD, SSD, TSD είναι οι στοχαστικές συνθήκες πρώτου , δευτέρου και τρίτου βαθμού αντίστοιχα).

Αυτό το θεώρημα μας επιτρέπει να καταλήξουμε νωρίτερα στο εάν η a_i προτιμάται της $a_{i'}$ ως προς το κριτήριο X_j

Στη μέθοδο Martel and Zara's αναγνωρίζονται δυο πιθανές περιπτώσεις: η **ξεκάθαρη περίπτωση**, όπου πληρούνται οι συνθήκες του παραπάνω θεωρήματος (SD = FSD ∪ SSDU ∪ TSD περιπτώσεις), και η **μη ξεκάθαρη περίπτωση** όπου δεν πληρείται καμία από τις τρείς στοχαστικές κυριαρχίες. Η τιμή του δείκτη συμφωνίας μπορεί να αποδομηθεί σε δυο μέρη:

Ερμηνεύσιμη συμφωνία (explicable concordance), που προκύπτει όταν η έκφραση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα είναι συνήθης ή ξεκάθαρη.

$$C_E(a_i, a_{i'}) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \delta_j^E(a_i, a_{i'}),$$

Όπου

$$\delta_j^E(a_i, a_{i'}) = \begin{cases} 1, εάν\ F_j(x_{ij})\ SD\ F_j(x_{i'j}) \\ 0, \qquad διαφορετικά \end{cases}$$

Και π_j είναι το βάρος του κριτηρίου X_j με $\pi_j \geq 0$ και $\sum_j^n \pi_j = 1$.

Μη Ερμηνεύσιμη συμφωνία (non-explicable concordance), που προκύπτει σε εκείνες τις περιπτώσεις που η έκφραση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα δεν είναι ξεκάθαρη.

$$C_{NE}(a_i, a_{i'}) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \delta_j^{NE}(a_i, a_{i'}),$$

Όπου

$$\delta_j^{NE}(a_i, a_{i'}) = \begin{cases} 1 \; \varepsilon\acute{\alpha}\nu \; \delta\varepsilon\nu \; \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota \; F_j(x_{ij}) \; SD \; F_j(x_{i'j}) \; \kappa\alpha\acute{\iota} \; \varepsilon\pi\acute{\iota}\sigma\eta\varsigma \; \acute{o}\chi\iota \; F_j(x_{i'j}) \; SD \; F_j(x_{ij}) \\ 0 \qquad\qquad \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases}$$

Αυτό το δεύτερο τμήμα του δείκτη συμφωνίας είναι μονάχα μια πιθανή τιμή, καθώς δεν είναι βέβαιο αν για κάθε ένα από τα κριτήρια $F_j(x_{ij})$ θα προτιμηθούν των $F_j(x_{i'j})$.

Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί να φανεί χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε μια συνθήκη που θα προσπαθήσει να κάνει τις συναρτήσεις χρησιμότητας $U_j(x_{ij})$ του αποφασίζοντα πιο σαφείς. Εάν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$0 \le p - C_E(a_i, a_{i'}) \le C_{NE}(a_i, a_{i'}),$$

όπου $p \in [0.5, 1]$ είναι το κατώφλι συμφωνίας, τότε η επεξήγηση των μη ξεκάθαρων περιπτώσεων οδηγεί σε μια τιμή του δείκτη συμφωνίας, τέτοια ώστε ο έλεγχος συμφωνίας ικανοποιείται για τη δήλωση «η a_i υπερέχει συνολικά της $a_{i'}$». Ο στόχος είναι να μειώσουμε τον αριθμό που είναι απαραίτητο οι συναρτήσεις $U_j(x_{ij})$ να είναι σαφείς, χωρίς να αυξήσουμε τον κίνδυνο για εσφαλμένα συμπεράσματα.

Ο δείκτης συμφωνίας $D_j(a_i, a_{i'})$ για κάθε κριτήριο X_j μπορεί να οριστεί ως ο λόγος της διαφοράς των μέσων τιμών των εκτιμήσεων των εναλλακτικών a_i και $a_{i'}$ προς το εύρος της κλίμακας:

$$D_j(a_i, a_{i'}) = \begin{cases} \dfrac{\mu\left(F_j(x_{i'j})\right) - \mu\left(F_j(x_{ij})\right)}{\left(x_i^1 - x_i^0\right)} & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \; F_j(x_{i'j}) \; FSD \; F_j(x_{ij}) \\ 0 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \; F_j(x_{i'j}) \; \acute{o}\chi\iota \; FSD \; F_j(x_{ij}) \end{cases}$$

Η διαφορά ανάμεσα στις μέσες τιμές των δυο κατανομών αποτελεί μια καλή ένδειξη της διαφοράς στην απόδοση των δυο προς σύγκριση εναλλακτικών. Εάν αυτή η διαφορά είναι μεγάλη σε σχέση με το εύρος της κλίμακας και πληρείται η συνθήκη FSD στο κριτήριο X_j, τότε υπάρχουν μεγάλες πιθανότητες η a_i να κυριαρχείται από την $a_{i'}$. Στην περίπτωση αυτή, η μέθοδος προβλέπει ένα ελάχιστο επίπεδο v_j, που ονομάζεται κατώφλι veto του δείκτη ασυμφωνίας D_j. Ο έλεγχος συμφωνίας σχετίζεται με το κατώφλι veto v_j για κάθε κριτήριο. Οι σχέσεις συμφωνίας – ασυμφωνίας των εναλλακτικών του συνόλου A είναι δομημένες ακολούθως:

$$\Gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ (a_i, a_{i'})\ \in A \times A\ (a_i, a_{i'}) \in\ C_p\ \ \leftrightarrow C(a_i, a_{i'}) \geq p$$

$$\Gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ (a_i, a_{i'})\ \in A \times A\ (a_i, a_{i'}) \in\ D_v\ \ \leftrightarrow \exists j / D_j(a_i, a_{i'}) \geq v_j$$

Οι σχέσεις υπεροχής προκύπτουν από την τομή του συνόλου συμφωνίας και του συμπληρωματικού συνόλου ασυμφωνίας:

$$S(p, v_j) = \ C_p \cap \overline{D}_v = \ C_p \backslash D_v.$$

Με βάση το επίπεδο επικάλυψης των προς σύγκριση κατανομών, οι συγγραφείς της μεθόδου ανέπτυξαν δείκτες για κάθε τύπο στοχαστικής κυριαρχίας και κατασκεύασαν τις σχέσεις εκτίμησης υπεροχής.

Ανάλογα με την προβληματική που έχουμε (επιλογή ή κατάταξη) , είτε θα καθοριστεί ο πυρήνας του γραφήματος σχέσεων υπεροχής είτε θα αξιοποιηθούν οι σχέσεις υπεροχής, όπως για παράδειγμα στη μέθοδο ELECTRE II αντίστοιχα.

3.2.3.13 Μέθοδος N-TOMIC (Massaglia & Ostanello, 1991; Doumpos & Zopounidis, 2002)

Η συγκεκριμένη μέθοδος προτάθηκε από τους (Massaglia & Ostanello, 1991). Ταξινομεί τις εναλλακτικές δραστηριότητες σε εννέα προκαθορισμένες κατηγορίες, ως εξής: C1: δραστηριότητες ιδιαίτερα υψηλών επιδόσεων, C2: δραστηριότητες υψηλών επιδόσεων, C3: δραστηριότητες σχετικά υψηλών επιδόσεων, C4: δραστηριότητες επαρκών επιδόσεων, C5: δραστηριότητες αβέβαιων επιδόσεων, C6: δραστηριότητες ανεπαρκών επιδόσεων, C7: δραστηριότητες σχετικά χαμηλών επιδόσεων, C8: δραστηριότητες χαμηλών επιδόσεων, και C9: δραστηριότητες ιδιαίτερα χαμηλών επιδόσεων. Οι εννέα αυτές κατηγορίες, ουσιαστικά καθορίζουν μια τριχοτομική ταξινόμηση των εναλλακτικών δραστηριοτήτων, δηλαδή ως εναλλακτικές υψηλών επιδόσεων (καλές), αβέβαιων επιδόσεων, και χαμηλών επιδόσεων (κακές).

Η ταξινόμηση των εναλλακτικών δραστηριοτήτων στις παραπάνω κατηγορίες πραγματοποιείται μέσω του καθορισμού δύο προτύπων r_1 και r_2, τα οποία καθορίζουν τις έννοιες της «καλής» και της «κακής» εναλλακτικής δραστηριότητας αντίστοιχα. Κάθε εναλλακτική δραστηριότητα $χ_j$ τέτοια ώστε $g_{ji} > r_{i1}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, να θεωρείται με βεβαιότητα καλή, ενώ στην περίπτωση που $g_{ji} < r_{i2}$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$, υποδεικνύει ότι η εναλλακτική δραστηριότητα x_j είναι με βεβαιότητα κακή. Οι δυο αυτές περιπτώσεις αντιστοιχούν στις δυο ακόλουθες προτάσεις:

1. «Η εναλλακτική δραστηριότητα x_j είναι με βεβαιότητα καλή» (πρόταση 1)
2. «Η εναλλακτική δραστηριότητα x_j είναι με βεβαιότητα κακή» (πρόταση 2)

Στόχο της μεθόδου είναι η εκτίμηση της αξιοπιστίας των προτάσεων αυτών χρησιμοποιώντας της έννοιες της συμφωνίας – ασυμφωνίας όπως έχουν αναλυθεί στη μέθοδο ELECTRE TRI. Η υλοποίηση των ελέγχων συμφωνίας – ασυμφωνίας βασίζεται στις ίδιες πληροφορίες που χρειάζονται στη μέθοδο ELECTRE TRI (βάρη κριτηρίων, κατώφλια προτίμησης, αδιαφορίας και βέτο). Τα αποτελέσματα των ελέγχων συμφωνίας – ασυμφωνίας περιλαμβάνουν της εκτίμηση του δείκτη συμφωνίας – ασυμφωνίας για καθένα από τους παραπάνω ισχυρισμούς.

Με βάση όλες τις παραπάνω πληροφορίες, η διαδικασία ταξινόμησης των εναλλακτικών ολοκληρώνεται σε τρία επίπεδα:

<u>1° Επίπεδο</u>: Στο πρώτο επίπεδο εξετάζεται εάν μια εναλλακτική μπορεί να εκχωρηθεί σε μια από τις κατηγορίες C_1, C_2, C_5, C_8 και C_9 (οι κατηγορίες αυτές δεν περιέχουν καμία βεβαιότητα στο εάν η εναλλακτική είναι καλή, κακή ή αβέβαιη). Οι δείκτες αξιοπιστίας των προτάσεων 1 και 2 για μια εναλλακτική δραστηριότητα xj συμβολίζονται αντίστοιχα ως $σ_1(x_j)$ και $σ_2(x_j)$. Τότε η ταξινόμηση μιας δραστηριότητας $χ_j$ πραγματοποιείται ως εξής (Με θ και γ συμβολίζονται δύο κατώφλια μεταξύ 0,5 και 1, τα οποία ορίζονται από τον αναλυτή):

- Εάν $σ_1(x_j) = 0 \wedge σ_2(x_j) = 0$ τότε $x_j \in C_5$ (κατηγορία αβέβαιων επιδόσεων)
- Εάν $σ_1(x_j) = 0 \wedge σ_2(x_j) > β$ τότε $x_j \in C_9$ (κατηγορία ιδιαίτερα χαμηλών επιδόσεων)
- Εάν $σ_1(x_j) = 0 \wedge σ_2(x_j) \in (0, β]$ τότε $x_j \in C_8$ (κατηγορία χαμηλών επιδόσεων)
- Εάν $σ_1(x_j) > γ \wedge σ_2(x_j) = 0$ τότε $x_j \in C_1$ (κατηγορία ιδιαίτερα υψηλών επιδόσεων)

- Εάν $\sigma_1(x_j) \in (0, \gamma] \wedge \sigma_2(x_j) = 0$ τότε $x_j \in C_2$ (κατηγορία υψηλών επιδόσεων)

2° Επίπεδο: Στο δεύτερο επίπεδο διερευνάται η πιθανή ένταξη μιας εναλλακτικής δραστηριότητες στα ακόλουθα τρία ασαφή σύνολα κατηγοριών:

1. {Καλές κατηγορίες}={C_3, C_4, C_5}
2. {Αβέβαιες κατηγορίες}={C_4, C_5, C_6}
3. {Κακές κατηγορίες}={C_5, C_6, C_7}

Η ταξινόμηση πραγματοποιείται ως εξής:

- Εάν $\sigma_1(x_j) - \sigma_2(x_j) > \gamma$ τότε $x_j \in$ {Καλές κατηγορίες}
- Εάν $0\sigma_1(x_j) - \sigma_2(x_j)$ a τότε $x_j \in$ {Αβέβαιες κατηγορίες}
- Εάν $\sigma_2(x_j) - \sigma_1(x_j) > \gamma$ τότε $x_j \in$ {Κακές κατηγορίες}

(Ως σ συμβολίζεται ένα νέο κατώφλι μεταξύ 0,5 και 1).

3° Επίπεδο: Στα προηγούμενα δύο επίπεδα ο υπολογισμός των δεικτών αξιοπιστίας των προτάσεων 1 και 2 πραγματοποιείται χωρίς να τεθεί βέτο από κανένα κριτήριο. Στο τρίτο επίπεδο της διαδικασίας, η ισχύς των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν στο επίπεδο 2, εξετάζεται περαιτέρω επιτρέποντας στα κριτήρια αξιολόγησης να θέσουν βέτο. Η σαφής ταξινόμηση των εναλλακτικών δραστηριοτήτων καθορίζεται μέσω ενός δέντρου αποφάσεων το οποίο αναπτύσσεται για κάθε ένα από τα σύνολα {Καλές κατηγορίες}, {Αβέβαιες κατηγορίες} και {Κακές κατηγορίες}, βάσει των τιμών των δεικτών αξιοπιστίας των προτάσεων 1 και 2, λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη τα βέτο που θέτουν τα κριτήρια αξιολόγησης.

3.2.3.14 Μέθοδος PROAFTN και η διαδικασία του Perny (Perny, 1998; Belacel, 2000; Doumpos & Zopounidis, 2002)

Η μέθοδος ELECTRE TRI όσο και η μέθοδος N-TOMIC είναι κατάλληλες για την επίλυση προβλημάτων ταξινόμησης, όπου οι κλάσεις είναι διατεταγμένες (χαρακτηρίζονται από μια αλληλουχία οριακών αντικειμένων αναφοράς). Η κύρια διαφορά της μεθόδου PROAFTN (Belacel, 2000) και της μεθόδου του Perny (Perny, 1998) είναι η δυνατότητα εφαρμογής τους σε προβλήματα ταξινόμησης όπου οι κλάσεις είναι ονομαστικές (χαρακτηρίζονται από ένα η περισσότερα κεντρικά αντικείμενα που ονομάζονται πρότυπα, τα οποία θεωρούνται αντιπροσωπευτικά της κατηγορίας).

Σε αυτή τη βάση, τόσο η PROAFTN όσο και η μέθοδος Perny αναπτύσσουν μια ασαφή σχέση αδιαφορίας που αποτιμά την ισχύ της πρότασης “η εναλλακτική x_j είναι αδιάφορη στο πρότυπο r_k”. Η ανάπτυξη της σχέσης ασαφούς αδιαφορίας προκύπτει με παρόμοια διαδικασία με αυτή της μεθόδου ELECTRE TRI. Αρχικά οι ενδείξεις που υποστηρίζουν (δεν υποστηρίζουν) τον παραπάνω ισχυρισμό χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο συμφωνίας (ασυμφωνίας). Η υλοποίηση των δυο ελέγχων οδηγεί στην εκτίμηση του δείκτη αξιοπιστίας σ(x_j, r_k) που μετράει το βαθμό αδιαφορίας μεταξύ της εναλλακτικής x_j και του προτύπου r_k. Ο δείκτης χρησιμοποιείται για την ταξινόμηση των εναλλακτικών. Η διαδικασία ταξινόμησης συνίσταται από τη σύγκριση των εναλλακτικών με όλα τα πρότυπα αναφοράς και την ανάθεση της εναλλακτικής στην κλάση την οποία η εναλλακτική είναι πιο όμοια με το αντίστοιχο πρότυπο, δηλαδή:

$$x_j \in C_k \Leftrightarrow \max\{\sigma(x_j, r_1), \sigma(x_j, r_2), \dots, \sigma(x_j, r_q)\}$$

Αναλυτική περιγραφή των μεθόδων και των διαδικασιών ανάθεσης των παραπάνω μεθόδων μπορεί να αναζητηθεί στις εργασίες των (Perny, 1998; Belacel, 2000).

3.3 Μέθοδοι που βασίζονται στο θεωρητικό ρεύμα της Πολυκριτήριας Χρησιμότητας

3.3.1 Η οικογένεια των μεθόδων UTA

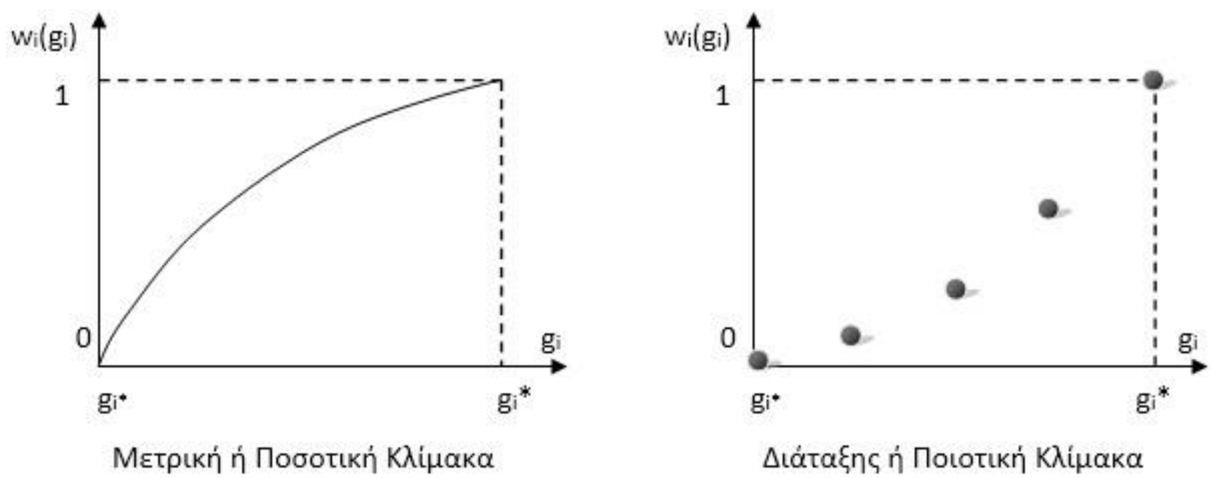
Η οικογένεια μεθόδων UTA ανήκει στις μεθόδους που βασίζονται στο ρεύμα της Πολυκριτήριας Χρησιμότητας, ενώ ταυτόχρονα βασίζονται στη μονότονη παλινδρόμηση για την ανάλυση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα. Οι μέθοδοι της οικογένειας, έχουν τη δυνατότητα χειρισμού ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων. Μπορούν να εφαρμοστούν όταν το μοντέλο σύνθεσης των κριτηρίων είναι μια προσθετική συνάρτηση χρησιμότητας (additive utility function). Η συνάρτηση αυτή διαμορφώνεται με τεχνικές μονόδρομης παλινδρόμησης και γραμμικού προγραμματισμού. Παρακάτω παραθέτονται όλες οι γνωστές επεκτάσεις της μεθόδου UTA.

3.3.1.1 UTA

Η μέθοδος UTA προτάθηκε από τους (Jacquet-Lagreze & Siskos, 1982). Στόχος της μεθόδου είναι, δεδομένου ενός συνόλου πολυκριτήριων εκτιμήσεων και μιας διάταξης των εναλλακτικών, να υπολογιστεί μια προδιάταξη που θα είναι όσο πιο συνεπής με την αρχική προδιάταξη του αποφασίζοντα.

Ακολουθεί το μοντέλο UTA-UTASTAR όπως περιγράφεται από τους (Jacquet-Lagreze & Siskos, 1982; Siskos & Yannacopoulos, 1985; Siskos, et al., 2005).

Έστω A = {a_1, a_2, …, a_m} το σύνολο των εναλλακτικών επιλογών και g = {g_1, g_2, …, g_n} η συνεπής οικογένεια κριτηρίων, όπου κάθε κριτήριο αναπαριστά μία ποιοτική ή ποσοτική μεταβλητή (Σχήμα 3.8). Έτσι για κάθε εναλλακτική $a_i \in A$ το διάνυσμα $g(a_i) = [g_1(a_i), g_2(a_i), …, g_n(a_i)]$ αναπαριστά την πολυκριτήρια εκτίμηση της.



Σχήμα 3.8. Μονότονη συνάρτηση μερικής χρησιμότητας (Ματσατσίνης, 2010).

Μια κλασσική επιχειρησιακή στάση εκτίμησης ενός μοντέλου ολικής προτίμησης ενός αποφασίζοντα οδηγεί στη σύνθεση (aggregation) όλων των κριτηρίων σε ένα μοναδικό κριτήριο, το οποίο ονομάζεται συνάρτηση χρησιμότητας (utility function) (Roy, 1971; Keeney & Raiffa, 1976):

$$U(g) = U(g_1, g_2, \dots, g_n) \quad (1)$$

Συμβολίζοντας με P την αυστηρή προτίμηση και I την αδιαφορία τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες της συνάρτησης χρησιμότητας:

$$U[g(a)] > U[g(b))] \iff a\ P\ b \quad (2)$$

$$U[g(a)] = U[g(b))] \iff a\ I\ b \quad (3)$$

Η σχέση R = P ⋃ I είναι μια ασθενής διάταξη.

Η συνάρτηση χρησιμότητας είναι προσθετική όταν είναι της μορφής:

$$U\left(\underline{g}(a)\right) = \sum_{i=1}^{m} u_i(g_i(a)) \quad (4)$$

Όπου $u_i(g_i(a))$ η μερική χρησιμότητα (marginal utility) ή μερική συνάρτηση αξίας (marginal value function) της απόφασης a ως προς το κριτήριο g_i.

Μερική χρησιμότητα $u_i(g_i)$ είναι πλήρως ορισμένη από το κριτήριο g_i και ένα βάρος p_i. Το νόημα της προσθετικής συνάρτησης χρησιμότητας είναι ότι η ολική χρησιμότητα μιας εναλλακτικής επιλογής ισούται με το άθροισμα των μερικών χρησιμοτήτων των κριτηρίων στα οποία αυτή εκτιμάται. Κανονικοποιώντας τις τιμές των μερικών χρησιμοτήτων στο διάστημα [0, 1], οι παραπάνω σχέσεις παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$U\left(\underline{g}(a)\right) = \sum_{i=1}^{m} p_i w_i(g_i(a)) \quad (5)$$

Όπου $w_i(g_i(a)) = \frac{1}{p_i} u_i\big(g_i(\alpha)\big) \; \gamma\iota\alpha \; \acute{o}\lambda\alpha \; \tau\alpha \; i$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \qquad (6)$$

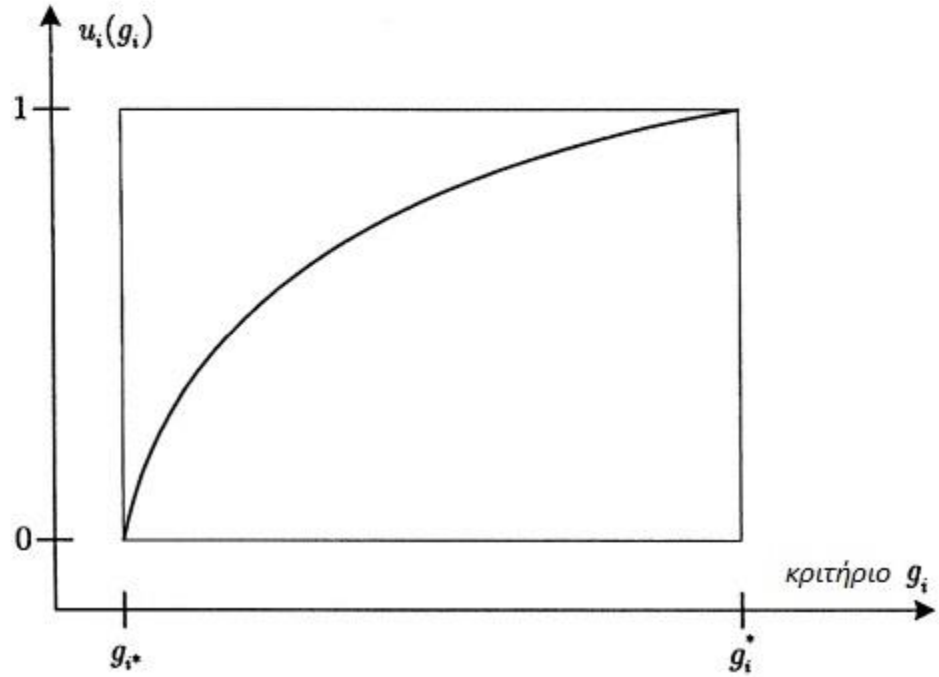
Όπου οι παράμετροι p_i είναι οι συντελεστές βάρους των i κριτηρίων, οι οποίοι εκφράζουν τη σχετική σημαντικότητα του συγκεκριμένου κριτηρίου απέναντι στα υπόλοιπα κριτήρια.

Ορίζουμε με g_{i*} τη λιγότερο επιθυμητή τιμή του κριτηρίου i και με g_i^* την περισσότερο επιθυμητή τιμή του. Οπότε θα έχουμε αντιστοίχως:

$w_i(g_{i*}) = 0$

$w_i(g_i *) = 1$ για κάθε κριτήριο i

Στο σχήμα 3.9 δίνεται η κανονικοποιημένη μερική (περιθωριακή) συνάρτηση χρησιμότητας ενός κριτηρίου.



Σχήμα 3.9. Κανονικοποιημένη μερική συνάρτηση χρησιμότητας (Siskos, et al., 2005)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4), οι περιορισμοί κανονικοποίησης (6) γίνονται:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_{i*}) = 0 \qquad \text{για όλα τα } i \end{cases} \tag{7}$$

Δεδομένα Εισόδου

Έστω Gi = [gi*, gi*] με i = 1, 2, …, n, τα υποδιαστήματα στα οποία οι τιμές κάθε κριτηρίου υπολογίζονται και ονομάζουμε διάστημα συνέπειας $G = X_{i=1}^{n} G_i$.

Οι υποκειμενικές προτιμήσεις είναι μια διάταξη (weak order) R = (P, I) σε ένα σύνολο, έστω A', από πραγματικές ή εικονικές εναλλακτικές επιλογές με πολυκριτήριες εκτιμήσεις στο G. Τα δεδομένα αποτελούνται από τις πολυκριτήριες εκτιμήσεις και την προδιάταξη R οριζόμενη στο A'. Η μέθοδος που περιγράφεται στη συνέχεια υλοποιείται σε δυο βήματα: την εκτίμηση μιας βέλτιστης χρησιμότητας και την ανάλυση ευαισθησίας της, χρησιμοποιώντας ειδικές τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού.

Βήμα 1: Εκτίμηση μια βέλτιστης συνάρτησης χρησιμότητας U*(g)

Όταν μια ή περισσότερες κλίμακες εκτίμησης G_i είναι συνεχείς ή όταν περιέχουν μεγάλο αριθμό εναλλακτικών επιλογών εκτίμησης ενός κριτηρίου g_i^j είναι δυνατός ο υπολογισμός των αντίστοιχων συναρτήσεων μερικών χρησιμοτήτων με ένα σταδιακό γραμμικό τρόπο. Υποθέτουμε ότι οι ακραίες τιμές g_{i*}, g_i^* για κάθε κριτήριο είναι πεπερασμένες και ότι μπορούμε να χωρίσουμε το διάστημα [g_{i*}, g_i^*] σε (a_i - 1) ίσα υποδιαστήματα. Η τιμή του a_i δίνεται από τον αναλυτή, ο οποίος με αυτό τον τρόπο καθορίζει το πλήθος των ενδιάμεσων τιμών των μερικών χρησιμοτήτων u_i που επιθυμεί να υπολογιστούν. Τα τελικά σημεία g_i^j δίνονται από τη σχέση:

$$g_i^j = g_{i*} + \frac{j-1}{a_i-1}(g_i^* - g_{i*})$$

Οι μεταβλητές για τον υπολογισμό είναι οι $u_i\left(g_i^j\right)$. Οι μερικές χρησιμότητες μιας εναλλακτικής επιλογής a υπολογίζονται μέσω γραμμικής παρεμβολής. Έτσι για $g_i(a)$ $[g_i^j, g_i^{j+1}]$ έχουμε:

$$u_i[g_i(a)] = u_i\left(g_i^j\right) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j}\left[u_i\left(g_i^{j+1}\right) - u_i\left(g_i^j\right)\right]$$

Όταν το διάστημα G_i έχει διακριτές τιμές τότε μπορεί να επιλεγεί η τιμή του a ίση με το πλήθος αυτών των εναλλακτικών επιλογών.

Παίρνοντας υπόψη τις σχέσεις (2), (3) και (4) ορίζουμε:

$$U'[g(a)] = \sum_{i=1}^{n} u_i[g_i(a)] + \sigma(a) \quad \text{για κάθε } \alpha \in A' \qquad (8)$$

Όπου σ(a) είναι ένα πιθανό σφάλμα όσον αφορά τη χρησιμότητα:

$$U'[g(a)] = \sum_{i=1}^{n} u_i[g_i(a)]$$

Η εισαγωγή των μεταβλητών σ(a) ≥ 0 με a ∈ A', αντί των μεταβλητών τύπου z_{ab} για όλα τα ζεύγη (a, b) ∈ R που χρησιμοπουείται σε άλλες μεθόδους γίνεται δυνατή λόγω της μεταβατικότητας του R.

Είναι χρήσιμο να γράψουμε όλες τις ισότητες και τις ανισότητες των τύπων (2) και (3). Γράφουμε:

$$U'[g(a)] - U'[g(b)] \geq \delta \Leftrightarrow a\,P\,b \qquad (9)$$

$$U'[g(a)] - U'[g(b)] = \delta \Leftrightarrow a\,I\,b$$

Όπου δ ένας μικρός πραγματικός αριθμός εξαρτώμενος στο [A’]. Η τιμή του δ πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε να διαχωρίζει σημαντικά δυο τάξεις της R προδιάταξης. Δεν μπορεί επίσης να παίρνει τιμές μεγαλύτερες της $\frac{1}{Q}$, όπου Q ο αριθμός διαφορετικών ομάδων στο R.

Από τις σχέσεις (8) και (9) παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^{n}\{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) \geq \delta \Leftrightarrow a\ P\ b \quad (10)$$

Και για τα διαφορετικά ζεύγη εναλλακτικών έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n}\{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) = 0 \Leftrightarrow a\ I\ b \quad (11)$$

Παίρνουμε τρείς εναλλακτικές επιλογές a, a' και a'',οι οποίες ανήκουν στις ακόλουθες διαφορετικές τάξεις του R (a P a' και a' P a'') και έχουμε από τη σχέση (10):

$$\sum_{i=1}^{n} u_i[g_i(a)] - \sum_{i=1}^{n} u_i\ [g_i(a')] + \sigma(a) - \sigma(a') \geq \delta$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i[g_i(a')] - \sum_{i=1}^{n} u_i\ [g_i(a")] + \sigma(a') - \sigma(a") \geq \delta$$

Προσθέτοντας τις δυο ανισότητες έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i[g_i(a)] - \sum_{i=1}^{n} u_i\ [g_i(a")] + \sigma(a) - \sigma(a") \geq 2\delta\ \Rightarrow a\ P\ a"$$

Έτσι η συνθήκη της σχέσης (10) για το ζεύγος (a, a'') δεν δίνει περισσότερη πληροφόρηση από αυτή που είναι γνωστή μέσω των προτιμήσεων μεταξύ των (a, a') και (a', a'').

Παρόμοια έχουμε τις ακόλουθες συνέπειες:

$$a\ P\ a' \kappa\alpha\acute{\iota}\ a' I\ a"\ \Rightarrow\ a\ P\ a"$$

$$a\ I\ a' \kappa\alpha\acute{\iota}\ a' I\ a"\ \Rightarrow\ a\ I\ a"$$

Η ιδιότητα της μεταβατικότητας που χρησιμοποιείται στο μοντέλο μας απαγορεύει να αναλύσουμε τις μη μεταβατικές προτιμήσεις. Αλλιώς για να εκτιμήσουμε ένα οφείλουμε κάθε ζεύγος να συνδέεται με είτε μια είτε με δυο μεταβλητές σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + z_{ab} \geq \delta \Leftrightarrow a\,P\,b \\ \sum_{i=1}^{n}\{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + z_{ab} - z_{ba} = 0 \Leftrightarrow a\,P\,b \\ \mu\varepsilon\ z\ \geq 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Με βάση τη μονοτονικότητα των προτιμήσεων, οι μερικές χρησιμότητες $u_i(g_i)$ θα πρέπει να ικανοποιούν το σύνολο των ακόλουθων περιορισμών:

$$u_i\left(g_i^{j+1}\right) - u_i\left(g_i^{j}\right) \geq s_i \quad \text{με } i = 1, 2, \ldots, \text{n και j} = 1, 2, \ldots, a_i - 1 \quad (13)$$

Όπου $s_i \geq 0$ είναι κατώφλια αδιαφορίας οριζόμενα για κάθε κριτήριο g_i. Δεν είναι απαραίτητο να ορίσουμε κατώφλια αδιαφορίας σε αυτό το μοντέλο ($s_i = 0$). Παρόλα αυτά, όταν η εκτίμηση g_i και η υποκειμενική προτίμηση R δίνονται από το ίδιο άτομο, ίσως θα ήταν χρήσιμο να εισαχθεί ένα τέτοιο κατώφλι έτσι ώστε να αποφευχθούν φαινόμενα όπως $u_i\left(g_i^{j+1}\right) = u_i\left(g_i^{j}\right)$ όταν $g_i^{j+1}\ P\ g_i^{j}$.

Αρχικά μπορεί να μελετηθεί η περίπτωση όπου $s_i = 0$ για κάθε I και μετά να επιλεγούν τα κατώφλια για μερικά κριτήρια όταν είναι γνωστά τα πρώτα σύνολα των βαρών $u_i(g_i^*)$.

Οι χρησιμότητες $u_i\left(g_i^{j}\right)$ υπολογίζονται μέσω γραμμικού προγραμματισμού με τις σχέσεις (7), (10), (11) και (13) ως περιορισμούς.

Για απλότητα χρησιμοποιείται μια γραμμική αντικειμενική συνάρτηση, η οποία ελαχιστοποιεί τη συνολική απόκλιση:

$$F = \sum_{a\,\in A\prime} \sigma(a) \qquad (14)$$

Το προς επίλυση γραμμικό πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{cases} [min]F = \sum_{a\,\in A\prime} \sigma(\alpha)\ \ \kappa\acute{\alpha}\tau\omega\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau o\upsilon\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}\varsigma \\ \sum_{i=1}^{n}\{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) \geq \delta\ \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ a\ P^*\ b \\ \sum_{i=1}^{n}\{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) = 0\ \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ a\ I^*\ b \\ u_i\left(g_i^{j+1}\right) - u_i\left(g_i^{j}\right) \geq s_i \quad \forall\ i\ \kappa\alpha\acute{\iota}\ j \\ \sum_{i=1}^{n} u_i(g_i^*) \\ u_i(g_{i*}) = 0, u_i\left(g_i^{j}\right) \geq 0, \sigma(a) \geq 0\ \ \forall\ i, j\ \kappa\alpha\acute{\iota}\ a\ \in A' \end{cases} \qquad (PL\ 1)$$

Η δομή του γραμμικού προβλήματος είναι τέτοια που θα ήταν προτιμότερο να λυθεί το δυικό του (PL 2). Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η εισαγωγή τεχνητών μεταβλητών με αποτέλεσμα την οικονομία υπολογιστικού χρόνου και μνήμης.

Η επίλυση του PL1 ή PL2 οδηγεί σε μια βέλτιστη συνάρτηση χρησιμότητας U*(g) και σε ένα αντίστοιχο σύνολο πιθανών σφαλμάτων {σ(a), a ∈ A'}.

<u>Βήμα 2: Εκτίμηση του συνόλου U των συναρτήσεων χρησιμότητας μέσω της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης (post optimality)</u>

Μέχρι τώρα έχουμε εκτιμήσει μια βέλτιστη συνάρτηση χρησιμοτήτων U*(g), η οποία είναι μια βέλτιστη αριθμητική αναπαράσταση της σχέσης προτιμήσεων R. Εάν η βέλτιστη F* της (PL1) ή η G* της (PL2) είναι 0, σημαίνει ότι το πολύεδρο των αποδεκτών λύσεων για $u_i(g_i)$ δεν είναι κενό και ότι πολλές συναρτήσεις χρησιμότητας οδηγούν σε μια τέλεια αναπαράσταση της σχέσης R.

Επίσης όταν η βέλτιστη τιμή F* είναι αυστηρά θετική (περίπτωση κενού πολυέδρου), η συζήτηση, όσον αφορά τη βέλτιστη αντικειμενική, δείχνει στη συνέχεια ότι άλλες λύσεις, λιγότερο καλές της F, μπορούν να βελτιώσουν ένα άλλο κριτήριο ικανοποίησης που ονομάζεται συντελεστή συσχέτισης τ του Kendall. Η εμπειρία με το μοντέλο επιβεβαιώνει ότι μη βέλτιστες συναρτήσεις χρησιμότητας U(g) (για τις οποίες F > F*) δίνουν προδιατάξεις R', οι οποίες είναι πιο κοντά στο R από τις προδιατάξεις που προκύπτουν από την επίσης καλούμενη βέλτιστη χρησιμότητα U*(g).

Μερικά κλασσικά φαινόμενα του μαθηματικού προγραμματισμού όπως ο αρχικός ή ο δυικός εκφυλισμός και ως τα φαινόμενα συσχέτισης κριτηρίων στη στατιστική δεν λαμβάνονται υπόψη στην αναζήτηση μιας βέλτιστης λύσης. Επομένως είναι απαραίτητη η διερεύνηση των λύσεων που βρίσκονται γύρω από το βέλτιστο σημείο που παίρνουμε. Η ανάλυση αυτή ονομάζεται ανάλυση μετα-βελτιστοποίησης και γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο.

Έστω F* = G* είναι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του (PL1) ή του (PL2) και ας εξετάσουμε ένα πραγματικό κατώφλι k(F*) το οποίο είναι μια πολύ μικρή αναλογία του F*. Η k-ανάλυση βελτιστοποίησης συνίσταται στη διερεύνηση των κορυφών ενός νέου πολύεδρου το οποίο προκύπτει από την προσθήκη του περιορισμού:

$$F \leq F^* + k(F^*) \qquad (16)$$

Η οποία μπορεί να γραφεί επίσης:

$$-\sum_{a \in A'} \sigma(\alpha) \geq -[F^* + k(F^*)] \qquad (17)$$

Στους περιορισμούς του γραμμικού προγράμματος (PL1) ή του (PL2).

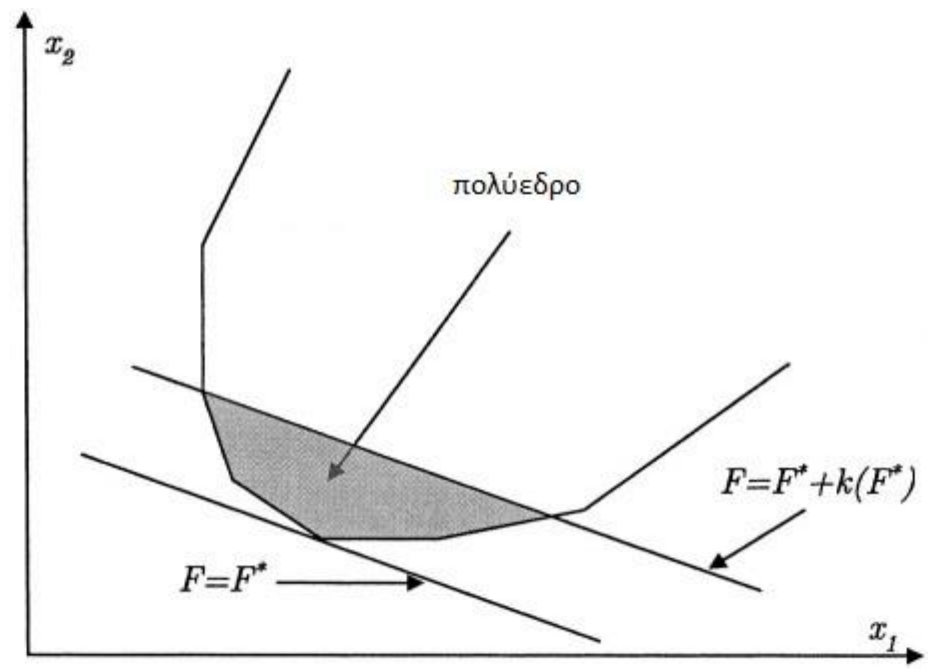
Το σύνολο U των αποδεκτών συναρτήσεων χρησιμότητας ως αριθμητική αναπαράσταση της σχέσης προτίμησης ορίζεται από το ακόλουθο πολύεδρο:

$$U'x \geq b' \quad (18)$$

$$x \geq 0$$

Όπου U’ και b’ είναι αντιστοίχως οι πίνακες U και b της (PL1’) (κανονική μορφή του PL1) με τη συμπληρωματική προσθήκη της (17). Στο σχήμα 3.10. αναπαρίσταται το πολύεδρο σε δυο διαστάσεις.

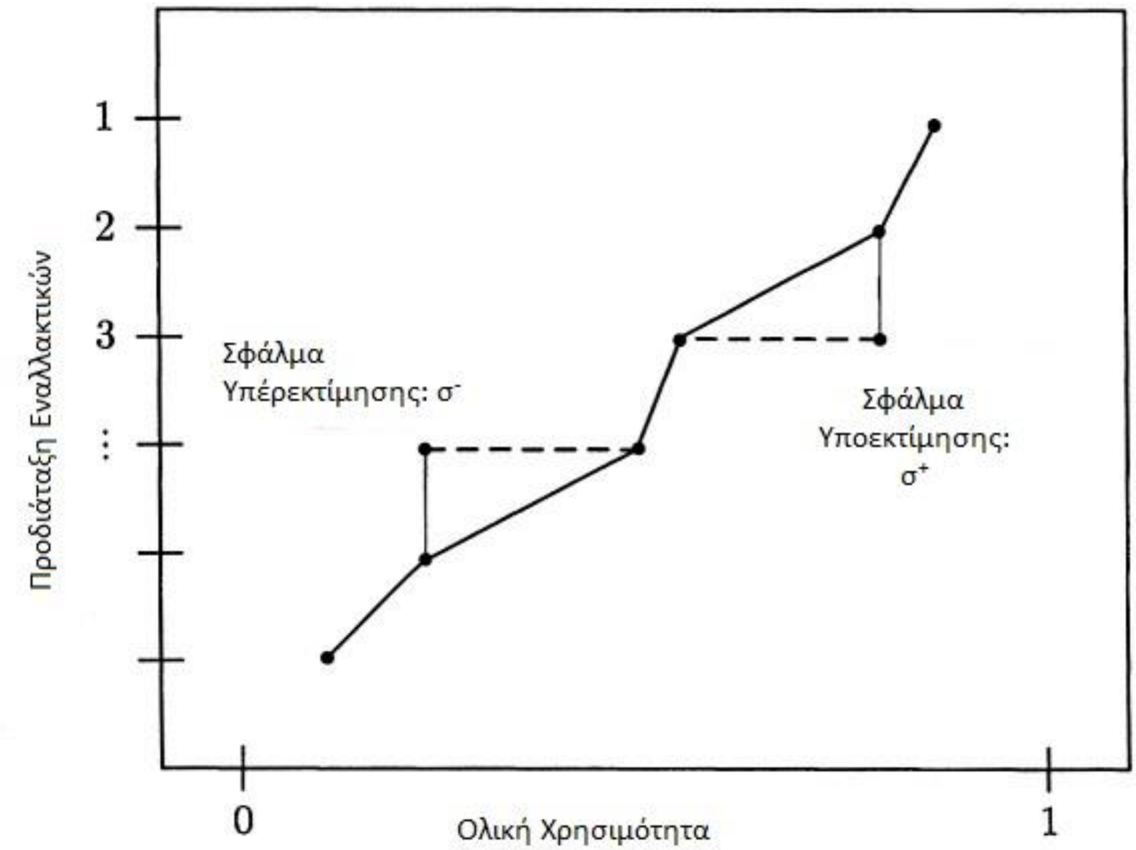
Οι αλγόριθμοι που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να διερευνηθεί η U είναι μέθοδοι διακλάδωσης και ορίου (branch and bound) ή τεχνικές από το χώρο της θεωρίας των γράφων (λαβυρίνθου) κα. Μέσω της μεταβολής της παραμέτρου k(F*) και κατά συνέπεια του συνόλου U μπορεί να διαπιστωθεί η σταθερότητα της U*(g). Από αυτή την ανάλυση ευαισθησίας μπορούμε να συμπεράνουμε από τα $u_i(g_i)$ διαστήματα ή μέσες τιμές ή ακόμη βάση της μοντελοποίησης των ατομικών προτιμήσεων των πολλαπλών συναρτήσεων χρησιμότητας συμφώνων με R μέσω σαφώς ορισμένων ή ασαφών σχέσεων υπεροχής.



Σχήμα 3.10. Ανάλυση μετα-βελτιστοποίησης – διερεύνηση του ανοικτού πολυέδρου (Siskos, et al., 2005)

3.3.1.2 Μέθοδος UTASTAR (Siskos & Yannacopoulos, 1985; Siskos, et al., 2005)

Η μέθοδος UTASTAR προτάθηκε από τους (Siskos & Yannacopoulos, 1985), ως βελτίωση της αρχικής μεθόδου UTA. Στη UTA, για κάθε εναλλακτική $α \in A_R$, υπήρχε ένα σφάλμα σ(α) προς ελαχιστοποίηση. Αυτή η συνάρτηση σφάλματος δεν ήταν επαρκής για να ελαχιστοποιήσει πλήρως τη διασπορά των σημείων γύρω από τη μονότονη καμπύλη όπως βλέπουμε στο Σχήμα 3.11. Το πρόβλημα δημιουργείται από σημεία που βρίσκονται δεξιά μεριά της καμπύλης, από τα οποία θα ήταν προτιμότερη η αφαίρεση μιας ποσότητας χρησιμότητας και όχι η αύξηση χρησιμότητας.



Σχήμα 3.11. Καμπύλη μονότονης παλινδρόμησης (Siskos, et al., 2005)

Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα, οι συγγραφείς εισάγουν μια διπλή συνάρτηση σφάλματος που επιτρέπει καλύτερη σταθεροποίηση των σημείων σύρω από την καμπύλη. Έτσι έχουμε:

$$u'[g(a)] = \sum_{i=1}^{n} u_i[g_i(a)] - \sigma^+(a) + \sigma^-(\alpha) \;\; \forall \, a \; \in \; A_R$$

Όπου $σ^+$ και $σ^-$ είναι τα σφάλματα υπερεκτίμησης και υποεκτίμησης αντίστοιχα.

Επιπλέον, άλλη μια σημαντική τροποποίηση αφορά τους περιορισμούς μονοτονίας των κριτηρίων, οι οποίοι λαμβάνονται υπόψη με το μετασχηματισμό των μεταβλητών:

$$w_{ij} = u_i\left(g_i^{j+1}\right) - u_i\left(g_i^{j}\right) \geq 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n \; \kappa\alpha\acute{\iota}\; j = 1, 2, \dots, a_i - 1$$

Έτσι οι συνθήκες μονοτονίας αντικαθίστανται από περιορισμούς μη αρνητικότητας για τις μεταβλητές w_{ij} (για $s_i = 0$).

Ο αλγόριθμος UTASTAR συνοψίζεται παρακάτω:

Βήμα 1:

Εκφράζονται οι ολικές χρησιμότητες των εναλλακτικών $u[g(a_k)], k = 1, 2, \dots, m$, πρώτα με όρους οριακών μεταβλητών $u_i(g_i)$, και έπειτα με όρους μεταβλητών w_{ij} μέσω των ακόλουθων διατυπώσεων:

$$\begin{cases} u_i(g_i^1) = 0 \;\forall\, i = 1, 2, \dots, n \\ u_i\left(g_i^j\right) = \sum_{t=1}^{j-1} w_{it} \;\; \forall\, i = 1, 2, \dots, n \; \kappa\alpha\acute{\iota}\; j = 2, 3, \dots, a_i - 1 \end{cases}$$

Βήμα 2:

Εισάγουμε δυο συναρτήσεις σφάλματος σ^+ και σ^- στο A_R πηγαίνοντας από την κορυφή στη βάση της προδιάταξης γράφοντας για κάθε ζεύγος τις αναλυτικές εκφράσεις:

$$\Delta(a_k, a_{k+1}) = u[g(a_k)] - \sigma^+(\alpha_\kappa) + \sigma^-(a_k) - u[g(a_{k+1})] + \sigma^+(\alpha_{\kappa+1}) - \sigma^-(\alpha_{\kappa+1})$$

Βήμα 3:

Επίλυση του Γ.Π. :

$$\begin{cases} [min]z = \sum_{k=1}^{m} [\sigma^+(a_k) + \sigma^-(\alpha_\kappa)] \; \upsilon\pi\acute{o}\; \tau o\upsilon\varsigma\; \pi\varepsilon\rho\iota o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}\varsigma \\ \left.\begin{matrix} \Delta(a_k, a_{k+1}) \geq \delta \; \varepsilon\acute{\alpha}\nu\; \alpha_\kappa \succ a_{k+1} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) = 0 \; \varepsilon\acute{\alpha}\nu\; \alpha_\kappa \sim a_{k+1} \end{matrix}\right\} \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} = 1 \\ w_{ij} \geq 0, \sigma^+(\alpha_\kappa) \geq 0, \sigma^-(\alpha_\kappa) \geq 0 \quad \forall\, i, j\; \kappa\alpha\acute{\iota}\; k \end{cases}$$

Όπου δ ένας μικρός θετικός αριθμός.

Βήμα 4:

Ελέγχουμε την ύπαρξη πολλαπλών βέλτιστων λύσεων ή πολύ κοντά στο βέλτιστο. Στην περίπτωση μη μοναδικότητας, βρίσκουμε τη μέση προσθετική συνάρτηση των βέλτιστών (ή πολύ κοντά στο βέλτιστο) λύσεων που μεγιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση:

$$u_i(g_i^*) = \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$$

Στο πολύεδρο περιορισμών του Γ.Π. που σχηματίζεται από το νέο περιορισμό:

$$\sum_{k=1}^{m} [\sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)] \leq z^* + \varepsilon$$

Όπου z* είναι η βέλτιστη τιμή του ΓΠ του βήματος 3 και ε ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

3.3.1.3 UTA II (Ματσατσίνης, 2010)

Με δεδομένα το σύνολο των κριτηρίων και μια προδιάταξη προτιμήσεων από τον αποφασίζοντα, η μέθοδος UTA II (Siskos, 1980) επιχειρεί μια καλύτερη απόδοση των βαρών των κριτηρίων, που σχηματίζουν την αθροιστική συνάρτηση, όπως ακολουθεί:

Ορίζουμε:

A_i : το στοιχείο (ανάθεση) i στο διάνυσμα των προτιμήσεων των εναλλακτικών

g_i : το στοιχείο (κριτήριο) j στο διάνυσμα των κριτηρίων

$g_j(A_i)$: την επίδοση της εναλλακτικής A_i στο κριτήριο g_j

g_{j*} : το χειρότερο επίπεδο στο κριτήριο g_j

g_j^* : το καλύτερο επίπεδο στο κριτήριο g_j

$u_j(g_j)$: μια αύξουσα συνάρτηση χρησιμότητας που αντιστοιχεί τις τιμές του g_j στο [0, 1]

P_j : τα ζητούμενα βάρη των κριτηρίων

$U(g)$: η ολική συνάρτηση χρησιμότητας

Για ένα σύνολο κριτηρίων n έχουμε:

$$U(g) = \sum_{j=1}^{n} p_j u_j(g_j) \qquad (1)$$

$$u_j(g_{j*}) = 0 \qquad (2)$$

$$u_j(g_j^*) = 0 \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \qquad (4)$$

Έστω $A_R = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ το σύνολο των εναλλακτικών επιλογών που κατέταξε ο αποφασίζων σε σειρά προτίμησης. Η εναλλακτική A_1 είναι στην κορυφή των προτιμήσεων του αποφασίζοντα και η A_k στο τέλος. Για κάθε συνεχόμενο ζεύγος εναλλακτικών επιλογών η σειρά προτίμησης σημαίνει:

Προτίμηση αν $A_j \succ A_{j+1}$

Ή

Αδιαφορία αν $A_j \sim A_{j+1}$

Ακολουθούν τα τέσσερα βήματα της μεθόδου UTA II για τον προσδιορισμό των βαρών:

Βήμα 1: Έκφραση των συναρτήσεων ολικής χρησιμότητας των επιλεγμένων εναλλακτικών επιλογών σύμφωνα με τη σχέση (1), δηλαδή με τους όρους των βαρών των κριτηρίων.

$$U[g(A_i)] = \sum_{j=1}^{n} p_j u_j\left[g_j(A_i)\right] \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, k \qquad (7)$$

Η συνάρτηση χρησιμότητας σε ένα ντετερμινιστικό περιβάλλον είναι μια αύξουσα συνάρτηση που αντιστοιχεί τις επιδόσεις των κριτηρίων αξιολόγησης στο διάστημα [0, 1]. Αν υπάρχει προτίμηση μεταξύ δυο εναλλακτικών σε κάποιο κριτήριο g_i τότε $u(g_i(A_j)) > u(g_i(A_{j+1}))$, ενώ για την περίπτωση αδιαφορίας μεταξύ δυο εναλλακτικών η συνάρτηση χρησιμότητας εκφράζεται με την ισότητα $u(g_i(A_j)) = u(g_i(A_{j+1}))$.

Για την εκτίμηση των συναρτήσεων μερικών χρησιμοτήτων υπάρχουν διάφορες μέθοδοι (Σίσκος, 2008). Ενδεικτικά αναφέρουμε τη μέθοδο μέσης αξίας (Keeney & Raiffa, 1976), τη μέθοδο παραχώρησης (Oppenheimer, 1978) και τη μέθοδο MABETH (Bana e Costa & Vansnick, 1994).

Βήμα 2: Για κάθε εναλλακτική επιλογή A_i εισάγουμε δυο σφάλματα σ_i^+ και σ_i^- και γράφουμε για κάθε ζεύγος συνεχόμενων εναλλακτικών στη διάταξη, την αναλυτική έκφραση διαφοράς:

$$\Delta(A_i, A_{i+1}) = U[g(A_i)] - \sigma_i^+ + \sigma_i^- - [U[g(A_{i+1})] - \sigma_{i+1}^+ + \sigma_{i+1}^-] \qquad (8)$$

Βήμα 3: Λύση του νέου γραμμικού προβλήματος:

$$min\, z = \sum_{i=1}^{k} (\sigma_i^+ + \sigma_i^-) \qquad (9)$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\Delta(A_i, A_{i+1}) \geq \delta \qquad \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad A_i \succ A_{i+1}$$

$$\Delta(A_i, A_{i+1}) = 0 \qquad \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad A_i \sim A_{i+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$

$$p_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k$$

$$\sigma_i^+ \geq 0, \sigma_i^- \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$$

Όπου δ ένας μικρός θετικός αριθμός.

Βήμα 4: Ανάλυση ευστάθειας. Ο αλγόριθμος αναζητά άλλες βέλτιστες λύσεις ή λύσεις πολύ κοντά στο βέλτιστο, του προηγούμενου γραμμικού προβλήματος. Εάν οι λύσεις δεν είναι μοναδικές, η UTA υπολογίζει τα μέσα βάρη από το σύνολο των βέλτιστων (ή κοντά στο βέλτιστο) λύσεων που μεγιστοποιούν την αντικειμενική $z_j = p_j$ $\forall$ j= 1, 2, .., n στο πολύεδρο που ορίζουν οι παραπάνω περιορισμοί αλλά και ο ακόλουθος επιπλέον περιορισμός

$$\sum_{i=1}^{k} (\sigma_i^+ + \sigma_i^-) \leq z^* + \varepsilon$$

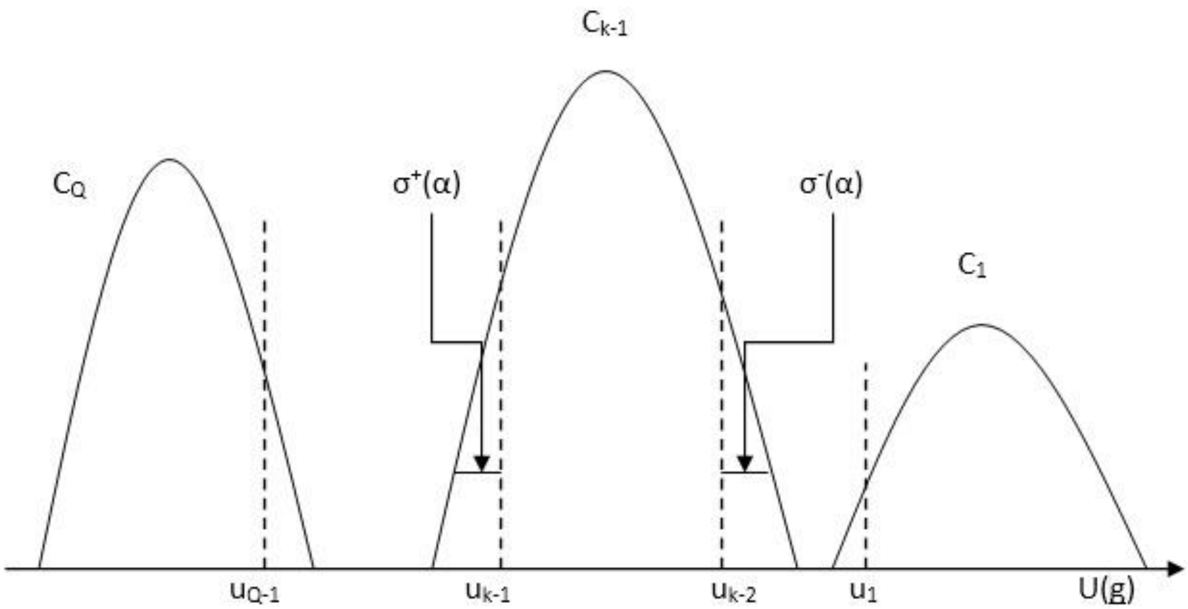
Όπου z^* η βέλτιστη λύση του γραμμικού προβλήματος του 3ου βήματος του αλγορίθμου και ε ένα πολύ μικρό ποσοστό του z^*.

3.3.1.4 Μέθοδος UTADIS

Σκοπός της μεθόδου UDATIS (Utilités Additives DIScriminantes) (Devaud, et al., 1980), (Jacquet-Lagreze & Siskos, 1982), (Jacquet-Largerze, 1995) είναι η ανάπτυξη μίας προσθετικής συνάρτησης χρησιμότητας που θα ταξινομεί ένα σύνολο εναλλακτικών σε προκαθορισμένες ομάδες, με το ελάχιστο σφάλμα ταξινόμησης. Επομένως η μέθοδος αναφέρεται σε προβλήματα κατηγοριοποίησης (προβληματική β), όπου οι n εναλλακτικές a_1, a_2, ..., a_n πρέπει να κατηγοριοποιηθούν σε Q κλάσεις αδιαφορίας $C_1, C_2, \ldots, C_q$, βάσει m κριτηρίων $g_1, g_2, \ldots, g_m$. Οι κλάσεις ορίζονται εκ των προτέρων ακόλουθα:

$$C_1 P C_2 \ldots C_{Q-1} P C_Q$$

Όπου: η P υποδηλώνει τη σχέση σαφούς προτίμησης μεταξύ των κλάσεων. Η κατανομή των κλάσεων ανάλογα με την υπολογιζόμενη ολική χρησιμότητα παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.12.



Σχήμα 3.12. Κατανομή των κλάσεων ανάλογα με την ολική χρησιμότητα (Ζοπουνίδης, et al., 1996)

Στην περίπτωση αυτή οι εναλλακτικές επιλογές κατηγοριοποιούνται συγκρίνοντας τις χρησιμότητες τους με τα πρότυπα χρησιμοτήτων u_i ($u_1 > u_2 > \ldots > u_{Q-1}$) που διαχωρίζουν τις κλάσεις μεταξύ τους ως εξής:

$$U(a) \geq u_1 \Rightarrow a \in C_1$$

$$u_1 > U(a) \geq u_2 \Rightarrow a \in C_2$$

……………………………………

$$u_{k-1} > U(a) \geq u_k \Rightarrow a \in C_k$$

……………………………………

$$U(a) < u_{Q-1}\ a \in C_Q$$

Οι μερικές χρησιμότητες αλλά και τα πρότυπα χρησιμοτήτων μπορούν να υπολογισθούν επιλύοντας το ακόλουθο γραμμικό πρόβλημα:

$$\min F = \sum_{a \in C_1} \sigma^+(\alpha) + \ldots + \sum_{a \in C_j} [\sigma^+(\alpha) + \sigma^-(\alpha)] + \ldots + \sum_{a \in C_k} \sigma^-(\alpha)$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i[g_i(\alpha)] - u_1 + \sigma^+(\alpha) \geq 0 \quad \forall\, a \in C_1$$

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i[g_i(\alpha)] - u_{k-1} - \sigma^-(\alpha) \leq -\delta \\ \textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i[g_i(\alpha)] - u_k + +(\alpha) \geq 0 \end{aligned}\right\} \forall\, a \in C_k$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i[g_i(\alpha)] - u_{Q-1} - \sigma^-(\alpha) \leq -\delta \quad \forall\, a \in C_Q$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{a_i - 1} w_{ij} = 1$$

$$u_{k-1} - u_k \geq s \qquad k = 2, 3, \ldots, Q-1$$

$$W_{ij} \geq 0, \quad \sigma^+(\alpha) \geq 0, \quad \sigma^-(\alpha) \geq 0$$

Όπου δ είναι ένας μικρός θετικός αριθμός ο οποίος υποδηλώνει την προτίμηση των ορίων χρησιμοτήτων από τις εναλλακτικές επιλογές, ενώ το s είναι ένας μικρός θετικός αριθμός ο οποίος δηλώνει την προτίμηση μεταξύ των ορίων που διαχωρίζουν τις κλάσεις.

Παρόμοια είναι και η λειτουργία των μεθόδων UTADIS I, UTADIS II και UTADIS III. Οι διαφορές των μεθόδων εντοπίζονται στον τρόπο με τον οποίο μετριέται το σφάλμα ταξινόμησης. Πιο συγκεκριμένα, στη μέθοδο UTADIS I παράλληλα με την ελαχιστοποίηση του μεγέθους των εσφαλμένων ταξινομήσεων γίνεται και η μεγιστοποίηση των αποστάσεων των σωστά ταξινομημένων εναλλακτικών ενεργειών από τα όρια χρησιμοτήτων. Με τον τρόπο αυτό επιχειρείται ουσιαστικά η απομάκρυνση των εναλλακτικών ενεργειών διαφορετικών ομάδων, κάτι που αναμένεται να οδηγήσει στην ανάπτυξη περισσότερο αξιόπιστων μοντέλων με μεγαλύτερη ικανότητα πρόβλεψης. Τόσο στη μέθοδο UTADIS όσο και στη μέθοδο UTADIS I, η ανάπτυξη του μοντέλου προσθετικής χρησιμότητας για την όσο το δυνατόν πιο ακριβή ταξινόμηση των εναλλακτικών ενεργειών, γίνεται έμμεσα ελαχιστοποιώντας το βαθμό στον οποίο οι εναλλακτικές ενέργειες παραβιάζουν τα όρια χρησιμοτήτων. Στη μέθοδο UTADIS II χρησιμοποιούνται τεχνικές ακέραιου προγραμματισμού προκειμένου η ανάπτυξη του μοντέλου ταξινόμησης (προσθετική συνάρτηση χρησιμότητας) να γίνει έτσι ώστε να επιτευχθεί η άμεση ελαχιστοποίηση του συνολικού πλήθους των εσφαλμένων ταξινομήσεων. Βέβαια κατά την προσέγγιση αυτή δεν λαμβάνεται υπόψη ο βαθμός στον οποίο οι εσφαλμένες ταξινομήσεις παραβιάζουν τα όρια χρησιμοτήτων. Τέλος, η μέθοδος UTADIS III είναι το αποτέλεσμα του συνδυασμού των μεθόδων UTADIS I και UTADIS Π, δηλαδή επιχειρείται η ελαχιστοποίηση του πλήθους των εσφαλμένων ταξινομήσεων και παράλληλα η μεγιστοποίηση των αποστάσεων των σωστά ταξινομημένων εναλλακτικών από τα όρια χρησιμοτήτων που διαχωρίζουν τις ομάδες.

(Ματσατσίνης, 2010; Siskos, et al., 2005)

Αναλυτικές περιγραφές των τριών μεθόδων γίνονται στις εργασίες των (Doumpos & Zopounidis, 1998) και (Zopounidis & Doumpos, 1997; Zopounidis & Doumpos, 1998; Zopounidis & Doumpos, 1999a; Zopounidis & Doumpos, 1999b).

3.3.1.5 Stochastic UTA (Siskos, 1983; Siskos, et al., 2005)

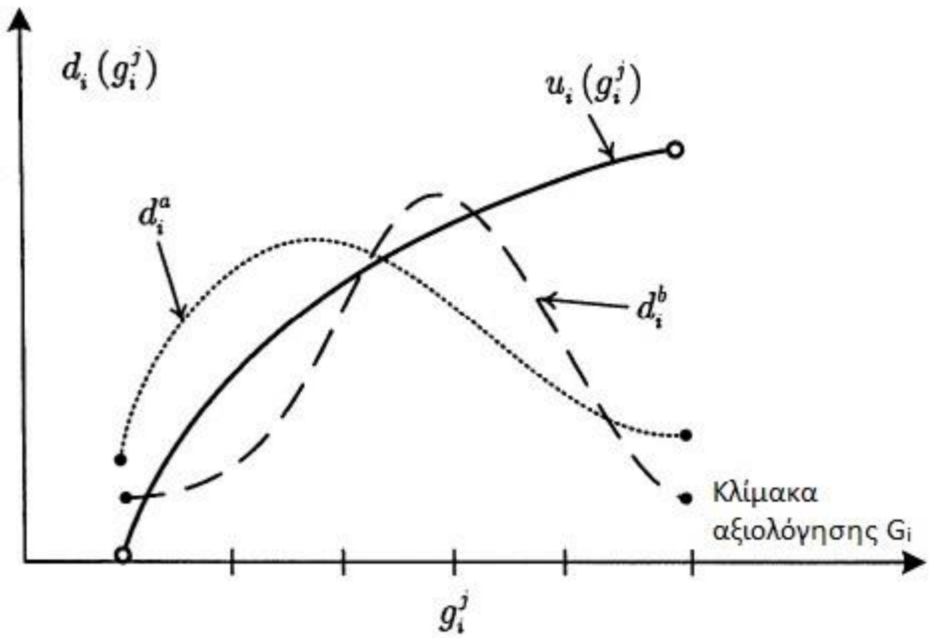
Μέσα στο πλαίσιο της υποβοήθηση αποφάσεων πολυκριτήριων προβλημάτων υπό καθεστώς αβεβαιότητας, ο (Siskos, 1983) πρότεινε μια νέα εκδοχή της UTA (Stochastic UTA), στην οποία το μοντέλο προτίμησης προκύπτει από κατάταξη αναφοράς και είναι μια προσθετική συνάρτηση χρησιμότητας της μορφής:

$$u(d^a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i} d_i^a(g_i^j) u_i(g_i^j)$$

Υπο των περιορισμών:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_i^*) = 0, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Όπου d_i^a η κατανεμημένη αξιολόγηση της εναλλακτικής α στο i-στό κριτήριο, $d_i^a(g_i^j)$ είναι η πιθανότητα η επίδοση της εναλλακτικής α στο i-στό κριτήριο να είναι g_i^j, $u_i(g_i^j)$ είναι η οριακή τιμή της επίδοσης g_i^j, d^a είναι το διάνυσμα της κατανεμημένης αξιολόγησης της εναλλακτικής α και $u(d^a)$ είναι η ολική χρησιμότητα της εναλλακτικής α (βλέπε Σχήμα 3.13).



Σχήμα 3.13. Αναδιανεμητική αξιολόγηση και συνάρτηση οριακής τιμής (Siskos, et al., 2005)

Η ολική χρησιμότητα είναι της μορφής von Neumann-Morgenstern (βλ. (Keeney, 1980)) για την περίπτωση διακριτών g_i, όπου:

$$\sum_{j=1}^{a_i} d_i^a\left(g_i^j\right) = 1$$

Η προσθετική συνάρτηση χρησιμότητας έχει τις ίδιες ιδιότητες όπως και η συνάρτηση τιμής:

$$\begin{cases} u(d^a) > u(d^b) \Leftrightarrow a \succ b \quad (\pi\rho o\tau i\mu\eta\sigma\eta) \\ u(d^a) = u(d^b) \Leftrightarrow a \sim b \quad (\alpha\delta\iota\alpha\varphi o\rho i\alpha) \end{cases}$$

Παρόμοια με τις μεθόδους UTA και UTASTAR που παραθέσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, η Stochastic UTA συνθέτει μια κατάταξη προτιμήσεων των εναλλακτικών (Siskos & Assimakopoulos, 1989). Ο αλγόριθμος περιγράφεται παρακάτω:

Βήμα 1: Εκφράζουμε τις ολικές αναμενόμενες χρησιμότητες των εναλλακτικών $u(d^{ak})$, k = 1, 2, …, m με τη μορφή μεταβλητών:

$$w_{ij} = u_i\left(g_i^{j+1}\right) - u_i\left(g_i^{j}\right) \geq 0 \qquad (1)$$

Βήμα 2: Εισάγουμε δυο συναρτήσεις σφάλματος σ⁺ και σ⁻ γράφοντας τις ακόλουθες εκφράσεις για κάθε διαδοχικό ζεύγος δράσεων στην κατάταξη:

$$\Delta(a_k, a_{k+1}) = u(d^{a_k}) - \sigma^+(\alpha_\kappa) + \sigma^-(\alpha_\kappa) - u(d^{a_{k+1}}) + \sigma^+(\alpha_{\kappa+1}) - \sigma^-(\alpha_{\kappa+1}) \quad (2)$$

Βήμα 3: Επίλυση του ΓΠ:

$$\begin{cases} [min]z = \sum_{k=1}^{m} [\sigma^+(a_k) + \sigma^-(\alpha_\kappa)] \; υπό\; τους\; περιορισμούς \\ \left.\begin{array}{c} \Delta(a_k, a_{k+1}) \geq \delta \; εάν\; \alpha_\kappa \succ a_{k+1} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) = 0 \; εάν\; \alpha_\kappa \sim a_{k+1} \end{array}\right\} \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i - 1} w_{ij} = 1 \\ w_{ij} \geq 0, \sigma^+(\alpha_\kappa) \geq 0, \sigma^-(\alpha_\kappa) \geq 0 \qquad \forall\; i, j \; καί\; k \end{cases}$$

Όπου δ ένας μικρός θετικός αριθμός.

Βήμα 4: Έλεγχος για την ύπαρξη πολλαπλών ή πολύ κοντά στο βέλτιστο λύσεων.

3.3.1.6 Quasi UTA (Scannella & Beuthe, 2001; Beuthe, et al., 2000)

Η εξαγωγή μιας μη γραμμικής συνάρτησης χωρίς περιορισμούς της μορφής της είναι ιδιαίτερα κοστοβόρα με την έννοια των απαιτούμενων πληροφοριών, όπως για παράδειγμα οι δηλώσεις προτίμησης του αποφασίζοντα, ώστε να εκμαιευτεί η ακριβής μορφή της συνάρτησης. Προκειμένου να διατηρηθεί η μη γραμμικότητα, προτάθηκε μια αναδρομική εκθετική δομή, που ορίζει κάθε μερική συνάρτηση μόνο από μία παράμετρο καμπυλότητας γ (Beuthe, et al., 2000). Η γενική μορφή της συνάρτησης είναι:

$$u_j\left(X_{ij}(k,n)\right) = \frac{\frac{\gamma - \gamma^k}{1-\gamma}}{\frac{\gamma - \gamma^n}{1-\gamma}} \cdot u_j^* = \frac{\gamma - \gamma^k}{\gamma - \gamma^n} \cdot u_j^* \;,$$

$$1 \leq k \leq n \quad καί \quad \forall \gamma \neq 1$$

$$u_j\left(X_{ij}(k,n)\right) = \frac{k-1}{n-1} \cdot u_j^* \ ,$$

$$1 \leq k \leq n \quad καί \ \ \gamma = 1$$

Όπου το k αντιστοιχεί σε ένα ακέραιο όριο, το n είναι ο αριθμός των ορίων, και X_j^* είναι ή μέγιστη τιμή στο τελευταίο όριο για το κριτήριο j. Όταν το γ ισούται με μονάδα, η συνάρτηση είναι γραμμική, εάν γ > 1 η συνάρτηση είναι κυρτή, ενώ εάν γ < 1 η συνάρτηση είναι κοίλη. Έτσι με κόστος την απώλεια ευελιξίας, μειώνεται ο αριθμός των παραμέτρων σε μια μόνο παράμετρο καμπυλότητας (γ) και μια μεταβλητή βάρους για κάθε μερική συνάρτηση. Η διαδικασία αυτή επιτρέπει τη συντόμευση της διαδικασίας των ερωτήσεων καθώς απαιτούνται πολύ λιγότερες εκφράσεις προτίμησης για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων.

Η διαδικασία Quasi-UTA μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο αναλυτικό μοντέλο UTA, περιλαμβάνοντας ωστόσο σημαντικές αλλαγές στον υπολογισμό του, καθώς μετατρέπεται σε ένα μη γραμμικό, μη κυρτό πρόγραμμα. Η διαδικασία μπορεί επίσης να αξιοποιηθεί στη βάση μιας συνθετικής προσέγγισης που εκτιμά κάθε μερική συνάρτηση ξεχωριστά.

Προκειμένου να διατηρηθεί η συνάφεια της συνολικής χρησιμότητας ανεξάρτητα της επιλογής παραμέτρου n, προτείνεται η προσαρμογή των μερικών συναρτήσεων, επιβάλλοντας όρους συνάφειας μεταξύ της καμπυλότητας των συναρτήσεων. Δοθέντων δυο διαφορετικών τιμών ορίων n και m ως προς ένα κριτήριο X_j που κυμαίνεται μεταξύ του διαστήματος $[X_{j^*}, X_j^*]$, η σχέση μεταξύ των δεικτών των ορίων k και p πρέπει να είναι τέτοια ώστε k = p = 1 στο X_{j^*} και k = n, p = m στο X_j^*. Αυτό ακριβώς συνεπάγεται της παρακάτω σχέσης, μεταξύ k και p που εξασφαλίζει ίδιες τιμές μερικών χρησιμοτήτων σε κοινά σημεία στην κλίμακα του κριτηρίου δοθέντος ενός αριθμού ορίων n ως σημείο αναφοράς για όλα τα κριτήρια, ανεξάρτητα της επιλογής του m για το συγκεκριμένο κριτήριο.

$$k = \frac{n-1}{m-1}p + \frac{m-n}{m-1} \text{ ή } p = \frac{m-1}{n-1}k + \frac{n-m}{n-1}$$

Δοθείσας μίας κοινής κλίμακας αναφοράς n ορίων, η μερική συνάρτηση χρησιμότητας ενός κριτηρίου με m όρια πρέπει να οριστεί ως:

$$u_j\left(X_{ij}(p,m,n)\right) = \frac{\gamma - \gamma^{[\frac{n-1}{m-1}p + \frac{m-n}{m-1}]}}{\gamma - \gamma^n} u_j^* = v_j . u_j^*, \quad 1 \leq p \leq m \quad καί \ \forall \ \gamma \neq 1$$

$$u_j\left(X_{ij}(p,m,n)\right) = \frac{\frac{n-1}{m-1}p + \frac{m-n}{m-1} - 1}{n-1} u_j^* = v_j . u_j^*, \quad 1 \leq p \leq m \quad καί \, \gamma = 1$$

3.3.1.7 UTAMKEN

Η μέθοδος προτάθηκε από τους (Jacquet-Lagreze & Siskos, 1982). Το μοντέλο ελαχιστοποιεί τον αριθμό των μη εφικτών ζευγών του R στην ασθενή διάταξη R' που δίνεται από τη U(g). Η πρόταση αυτή είναι ισοδύναμη με τη μεγιστοποίηση του τ του Kendall. Η λύση επιτυγχάνεται μέσω ενός μικρού γραμμικού προγράμματος όπου οι μεταβλητές γ(ab) της αντικειμενικής συνάρτησης είναι διακριτές μεταβλητές που παίρνουν τιμή 1 όποτε η σχέση προτίμησης παραβιάζεται και την τιμή 0 όταν ικανοποιείται. Το σφάλμα του σφάλματος ελαχιστοποιείται υπό τους ακόλουθους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{N}\{u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))\} + M \times \gamma(ab) \geq \delta \quad \Leftrightarrow aPb,$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N}\{u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))\} + M \times \gamma(ab) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{N}\{u_i(g_i(b)) - u_i(g_i(a))\} + M \times \gamma(ba) \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow aIb$$

Με γ(ab) = 0 ή 1 $\forall (ab) \in R$ και M ένας μεγάλος αριθμός. Τα δυο πρώτα σύνολα περιορισμών πρέπει να τεθούν για όλα τα ζεύγη περιορισμών. Εάν η διαφορά $U[g(a)] - U[g(b)]$ για ένα ζεύγος $(a, b) \in \mathbb{R}$ είναι μεγαλύτερη από δ, τότε γ(ab) = 0 και η εκτίμηση είναι αποδεκτή, διαφορετικά γ(ab) = 1 και δεν είναι εφικτή.

Μειονέκτημα της μεθόδου θεωρείται ο μεγάλος αριθμός επαναλήψεων που απαιτούνται για την εύρεση λύσης, εξαιτίας του μεγάλου αριθμού διακριτών μεταβλητών (Beuthe & Scannella, 2001).

3.3.1.8 UTA^{GMS} (Greco, et al., 2008)

Η μέθοδος προτάθηκε από τους Greco, Mousseau, Slowinski (Greco, et al., 2008) για την πολυκριτήρια ταξινόμηση ενός συνόλου εναλλακτικών A χρησιμοποιώντας ένα σύνολο συναρτήσεων προσθετικής αξίας που προκύπτουν μέσω ανάλυσης παλινδρόμησης. Οι πληροφορίες προτίμησης που παρέχονται από τον αποφασίζοντα είναι ένα σύνολο συγκρίσεων κατά ζεύγη για ένα υποσύνολο εναλλακτικών $A^R \subseteq A$, και ονομάζονται εναλλακτικές αναφοράς (reference alternatives). Το μοντέλο προτίμησης είναι το σύνολο όλων των προσθετικών συναρτήσεων αξίας συμβατών με τις πληροφορίες προτίμησης. Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο, μπορούν να εξαχθούν δυο σχέσεις του συνόλου A: τη αναγκαία σχέση ασθενούς προτίμησης που υπάρχει για κάθε ζεύγος εναλλακτικών a, b αν και μόνο αν για όλες τις συμβατές συναρτήσεις αξίας η a προτιμάται της b, και η πιθανή ασθενής προτίμηση που υφίσταται για το ζεύγος αν και μόνο αν τουλάχιστον μια συμβατή συνάρτηση αξίας a προτιμάται της b. Οι σχέσεις αυτές δημιουργούν την αναγκαία και πιθανή κατάταξη των εναλλακτικών οι οποίες είναι μια μερική και μια πλήρης προδιάταξη αντίστοιχα. Η μέθοδος $\mathrm{UTA}^{\mathrm{GMS}}$ προορίζεται για διαδραστική χρήση, με ένα αυξανόμενο υποσύνολο A^R και προοδευτική εισαγωγή δεδομένων διμερών συγκρίσεων. Όταν δεν παρέχονται πληροφορίες προτίμησης, η σχέση αναγκαίας ασθενούς προτίμησης είναι μια σχέση ασθενούς υπεροχής, και η σχέση πιθανής προτίμησης είναι πλήρης σχέση. Κάθε νέα διμερής σύγκριση εναλλακτικών αναφοράς για την οποία η σχέση υπεροχής δεν ισχύει, ενισχύει την αναγκαία σχέση αποδυναμώνει την πιθανή σχέση, έτσι ώστε να συγκλίνει με την αύξηση την πληροφοριών προτίμησης. Επιπλέον η μέθοδος μπορεί να υποστηρίξει προβλήματα που οι εκφράσεις προτίμησης δεν είναι με μορφή προσθετικών συναρτήσεων.

Η νέα μέθοδος $\mathrm{UTA}^{\mathrm{GMS}}$ ανήκει στις μεθόδους μονότονης παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας ένα σύνολο προσθετικών συναρτήσεων αξίας $U(a) = \sum_{i=1}^{n} u_i(a)$ ως μοντέλο προτίμησης. Ένα από τα χαρακτηριστικά της γνωρίσματα είναι ότι λαμβάνει υπόψη το σύνολο όλων των συναρτήσεων αξίας που είναι συμβατές με τις πληροφορίες προτίμησης που δίνονται από τον αποφασίζοντα. Επιπλέον κάνει χρήση γενικευμένων μη φθίνουσων οριακών συναρτήσεων αξίας αντί μόνο γραμμικών.

Έστω ότι ο αποφασίζων παρέχει πληροφορίες προτίμησης με τη μορφή συγκρίσεων κατά ζεύγη των εναλλακτικών αναφοράς από $A^R \subseteq A$. Αυτές οι πληροφορίες προτίμησης είναι μια μερική προδιάταξη του A^R και συμβολίζεται με $\gtrsim$. Μια συνάρτηση αξίας ονομάζεται συμβατή εάν είναι ικανή να επαναφέρει τη μερική προδιάταξη $\gtrsim$. Επιπλέον κάθε συμβατή συνάρτηση αξίας επιφέρει μια κατάταξη σε ολόκληρο το σύνολο A.

Συγκεκριμένα, για κάθε δυο εναλλακτικές a, b ∈ A, μια συμβατή συνάρτηση αξίας U κατατάσσει τις a, b με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

- Η a προτιμάται της b διότι U(a) > U(b),
- Η b προτιμάται της a διότι U(a) < U(b),
- Η a είναι αδιάφορη της b διότι U(a) = U(b).

Προκύπτουν τα ακόλουθα δυο ερωτήματα:

- Οι εναλλακτικές a και b κατατάσσονται με τον ίδιο τρόπο από όλες τις συμβατές συναρτήσεις αξίας?
- Υπάρχει έστω μία συμβατή συνάρτηση αξίας που κατατάσσει την a εξίσου καλά με τη b (ή τη b εξίσου καλά με την a)?

Συγκεντρώνοντας τις απαντήσεις αυτών των ερωτήσεων για όλα τα ζεύγη εναλλακτικών (a, b) ∈ A μπορούμε να εξάγουμε μια αναγκαία σχέση ασθενούς προτίμησης $\gtrsim^N$, στην περίπτωση που U(a) ≥ U(b) για όλες τις συμβατές συναρτήσεις αξίας, και μια πιθανή σχέση ασθενούς προτίμησης $\gtrsim^P$ του Α στην περίπτωση που U(a) ≥ U(b) για τουλάχιστον μια συμβατή συνάρτηση αξίας.

Να υπενθυμίσουμε ότι οι σχέσεις προτίμησης $\gtrsim^N$ και $\gtrsim^P$ έχουν νόημα μόνο εφόσον υπάρχει τουλάχιστον μια συμβατή συνάρτηση αξίας. Επομένως, εφόσον το αντίθετο δεν έχει δηλωθεί με σαφήνεια, υποθέτουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια συμβατή συνάρτηση αξίας. Παρατηρούμε επίσης ότι σε αυτή την περίπτωση για κάθε a, b ∈ A^R,

$a \gtrsim b \Rightarrow a \gtrsim^N b$

και

$a \succ b \Rightarrow ; \acute{o}\chi\iota\ (b \gtrsim^P a).$

Πράγματι, εάν $a \gtrsim b$, τότε για κάθε συμβατή συνάρτηση αξίας, U(a) ≥ U(b) και επομένως $a \gtrsim^N b$. Επιπλέον εάν $a \succ b$, τότε για κάθε συμβατή συνάρτηση αξίας U(a) > U(b), και κατά συνέπεια, δεν υπάρχει συμβατή συνάρτηση αξίας τέτοια ώστε U(b) ≥ U(a), που σημαίνει ότι δεν ισχύει η σχέση $(b \gtrsim^P a)$.

Τυπικά, μια γενικευμένη συμβατή προσθετική συνάρτηση αξίας είναι μια προσθετική συνάρτηση αξίας $U(a) = \sum_{i=1}^{n} u_i(a)$ που ικανοποιεί το ακόλουθο σύνολο περιορισμών:

$$\left.\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} U(c) > U(d) \Leftrightarrow c \succ d, \\ U(c) = U(d) \Leftrightarrow c \sim d, \end{array}\right\} \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ c, d\ \in A^R, \\ u_i\left(g_i\left(a_{\tau i(j)}\right)\right) - u_i\left(g_i\left(a_{\tau i(j-1)}\right)\right) \geq 0, i = 1, \dots n, j = 2, \dots m, \\ u_i\left(g_i\left(a_{\tau i(1)}\right)\right) \geq 0,\ u_i\left(g_i\left(a_{\tau i(m)}\right)\right) \leq\ u_i(\beta_\iota), \iota = 1, \dots, n, \\ u_i(a_i) = 0, \qquad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} u_i(\beta_i) = 1 \end{array}\right\} \left(E^{A^R}\right)$$

Όπου τ_i είναι η μετάθεση στο σύνολο των δεικτών των εναλλακτικών του A^R που τις αναδιατάσσει σύμφωνα με την αύξουσα επίδοση στο κριτήριο g_i.

$$g_i\left(a_{\tau i(1)}\right) \leq g_i\left(a_{\tau i(2)}\right) \leq \cdots \leq g_i\left(a_{\tau i(m-1)}\right) \leq g_i\left(a_{\tau i(m)}\right)$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι εξαιτίας αυτής της διατύπωσης του προβλήματος ανάλυσης παλινδρόμησης, δεν απαιτείται γραμμική παρεμβολή για να εκφράσει την οριακή αξία οποιασδήποτε εναλλακτικής αναφοράς. Η UTA^{GMS} λαμβάνει υπόψη όλες τις συμβατές προσθετικές συναρτήσεις αξίας ενώ η κλασσική ανάλυση παλινδρόμησης UTA γίνεται με ένα υποσύνολο των συμβατών προσθετικών συναρτήσεων.

3.3.2 Λοιπές μέθοδοι που βασίζονται στη θεωρία Πολυκριτήριας Χρησιμότητας

3.3.2.1 Μέθοδος MACBETH (Bana e Costa & Vansnick, 1994; Ματσατσίνης, 2010)

Η μέθοδος MACBETH (Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique), προτάθηκε από τους (Bana e Costa & Vansnick, 1994) και πρόκειται για μια αλληλεπιδραστική προσέγγιση, που βοηθά τον αποφασίζοντα να εκτιμήσει τη συνολική ελκυστικότητα (global attractivity) ενός συνόλου εναλλακτικών (actions) λαμβάνοντας υπόψη πολλαπλά κριτήρια.

Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ το σύνολο των προς σύγκριση εναλλακτικών από τον αποφασίζοντα D θεωρώντας k θεμελιώδη κριτήρια.

Η μέθοδος MACBETH κατασκευάζει μια κλίμακα διαστημάτων (interval scale) βασιζόμενη στις εκτιμήσεις του αποφασίζοντα D ως προς την ελκυστικότητα των εναλλακτικών του συνόλου A. Επομένως, στόχος της μεθόδου είναι η δημιουργία μιας αριθμητικής κλίμακας:

$v : A \longrightarrow R : a \to v(a)$ που θα ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- $\forall\, a, b\ \in A, v(a) > v(b)$ αν και μόνο αν ο αποφασίζων D εκτιμά ότι η εναλλακτική επιλογή a είναι πιο ελκυστική από τη b.
- Αν η a είναι πιο ελκυστική από τη b και η c πιο ελκυστική από τη d, τότε ο λόγος

$$\frac{v(a) - v(b)}{v(c) - v(d)}$$

  Εκφράζει τη σχετική δύναμη της διαφοράς ελκυστικότητας των a και b λαμβάνοντας ως μονάδα αναφοράς τη διαφορά ελκυστικότητας των c και d.

Η πληροφορία της σχετικής απόστασης των εναλλακτικών σχετίζεται με το βαθμό που τα στοιχεία του συνόλου A διαθέτουν την Q ιδιότητα (υποκειμενική ή αντικειμενική), είναι διαθέσιμη αν ο αποφασίζων D καταχωρήσει τα στοιχεία του συνόλου A σε ένα κατακόρυφο άξονα έτσι ώστε:

1. $\forall\, a, b\ \in A$ το στοιχείο a τοποθετείται κάτω από το b αν και μόνο αν ο αποφασίζων D θεωρήσει ότι το a έχει καλύτερη επίδοση από το b στην ιδιότητα Q.
2. Οι σχετικές αποστάσεις των σημείων που αντιστοιχούν στα στοιχεία του συνόλου A αντιστοιχούν στην αντίληψη του αποφασίζοντα D για τις σχετικές αποστάσεις των στοιχείων ως προς την ιδιότητα Q.

Η διαδικασία με την οποία η μέθοδος MACBETH εξάγει μια κλίμακα που ικανοποιεί τις προηγούμενες συνθήκες είναι η εξής:

1. Αρχικά δημιουργείται ένα ερωτηματολόγιο όπου κάθε ερώτηση αφορά μόνο δυο εναλλακτικές και σε κάθε στοιχείο a του συνόλου A αντιστοιχείται ένας πραγματικός αριθμός μ(a) που ποσοτικοποιεί τις πληροφορίες προτίμησης του αποφασίζοντα D.
2. Έπειτα, σε συνεργασία με τον αποφασίζοντα καθορίζεται το κατά πόσο η κλίμακα που κατασκευάστηκε προηγουμένως ικανοποιεί τη συνθήκη σχετικών αποστάσεων.

Στο πρώτο στάδιο της μεθόδου (ερωτηματολόγιο) ζητείται από τον αποφασίζοντα D να κάνει σημασιολογικές εκτιμήσεις ως προς τη διαφορά ελκυστικότητας των εναλλακτικών, δηλαδή $\forall\ a, b\ \in A \times A$ με a ≠ b, ο αποφασίζων καλείται να απαντήσει αν η a είναι ελκυστικότερη της b και εάν αυτό ισχύει ερωτάται αν η διαφορά ελκυστικότητας είναι για αυτόν πολύ μικρή (very weak), μικρή (weak), μέτρια (moderate), ισχυρή (strong), πολύ ισχυρή (very strong) ή απόλυτη (extreme).

Ανάλογα με τις απαντήσεις του αποφασίζοντα D, ακολουθείται η εξής ορολογία:

- a P b όταν ο αποφασίζων D εκτιμά ότι η a είναι πιο ελκυστική από τη b (P είναι μια δυαδική σχέση στο A).
- Όταν a P b τότε ο αποφασίζων πρέπει να εκτιμήσει τη διαφορά ελκυστικότητας μεταξύ a και b:

(a, b) ανήκει στην κατηγορία C_0 όταν ο αποφασίζων D εκτιμά ότι δεν υφίσταται καμία διαφορά ελκυστικότητας μεταξύ a και b, δηλαδή (a, b) ∈ C_0

(a, b) ανήκει στην κατηγορία C_1 όταν ο αποφασίζων D εκτιμά ότι η διαφορά ελκυστικότητας μεταξύ a και b είναι πολύ ασθενής, δηλαδή (a, b) ∈ C_1

(a, b) ανήκει στην κατηγορία C_2 όταν ο αποφασίζων D εκτιμά ότι η διαφορά ελκυστικότητας μεταξύ a και b είναι ασθενής, δηλαδή (a, b) ∈ C_2

(a, b) ανήκει στην κατηγορία C_3 όταν ο αποφασίζων D εκτιμά ότι η διαφορά ελκυστικότητας μεταξύ a και b είναι μέτρια δηλαδή (a, b) ∈ C_3

(a, b) ανήκει στην κατηγορία C_4 όταν ο αποφασίζων D εκτιμά ότι η διαφορά ελκυστικότητας μεταξύ a και b είναι ισχυρή, δηλαδή (a, b) ∈ C_4

(a, b) ανήκει στην κατηγορία C_5 όταν ο αποφασίζων D εκτιμά ότι η διαφορά ελκυστικότητας μεταξύ a και b είναι πολύ ισχυρή, δηλαδή (a, b) ∈ C_5

(a, b) ανήκει στην κατηγορία C_6 όταν ο αποφασίζων D εκτιμά ότι η διαφορά ελκυστικότητας μεταξύ a και b είναι απόλυτη, δηλαδή (a, b) ∈ C_6

Οι κατηγορίες C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, και C_6 μπορούν να θεωρηθούν ως έξι δυαδικές σχέσεις στο A, οπότε:

$$P = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$$

Οι δυαδικές σχέσεις P, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, και C_6 θεωρούνται ασύμμετρες και ∀ i, j ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6} με i ≠ j ισχύει $C_i \cap C_j = \emptyset$. Οι συνθήκες αυτές υποτίθεται ότι επαληθεύονται κατά τη διάρκεια αλληλεπίδρασης με τον αποφασίζοντα D.

Οι αρχικές απαντήσει του αποφασίζοντα D σχηματίζουν ένα πίνακα εκτιμήσεων:

$$M = [m_{ab}|(a,b) \in A \times A]\ με \begin{cases} m_{ab} = 0\ αν\ και\ μόνο\ αν\ (όχι\ a\ P\ b) \\ m_{ab} = k\ αν\ και\ μόνο\ αν\ (a,b) \in\ C_k \end{cases}$$

Στο δεύτερο στάδιο της μεθόδου, είναι απαραίτητη η χρήση κανόνων μέτρησης ώστε να αναπαρασταθούν αριθμητικά οι ποιοτικές πληροφορίες που παρέχει ο αποφασίζων D. Η μέθοδος MACBETH κάνει χρήση των δυο ακόλουθων κανόνων για να αντιστοιχίσει ένα πραγματικό αριθμό μ(a) σε κάθε στοιχείο a:

Κανόνας I: $\forall\ a, b\ \in A : a\ P\ b\ \Leftrightarrow \mu(a) > \mu(b)$

Δηλαδή η τιμή που αντιστοιχείται στη εναλλακτική a είναι αυστηρώς μεγαλύτερη από την τιμή που αντιστοιχεί στην εναλλακτική b αν και μόνο αν για τον αποφασίζοντα D η a είναι προτιμότερη της b.

Κανόνας II: $\forall\ k, k' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ με\ k \neq k', καί$

$\forall\ a, b, c, d\ \in A\ με\ (a, b) \in\ C_k\ καί\ \in\ C_{k'}$:

$k > k' \Leftrightarrow \mu(a) - \mu(b) > \mu(c) - \mu(d)$

Δηλαδή όταν τα ζεύγη (a,b) και (c, d) δεν ανήκουν στην ίδια κατηγορία, η διαφορά μεταξύ τιμών που αντιστοιχούνται στο a και b είναι αυστηρά μεγαλύτερη της διαφοράς τιμών που αντιστοιχείται στο c και d αν και μόνο αν η διαφορά ελκυστικότητας μεταξύ a,b, εκτιμάται ότι είναι μεγαλύτερη της διαφοράς ελκυστικότητας μεταξύ c και d.

Όταν οι εκτιμήσεις του αποφασίζοντα είναι συνεπείς με την κατασκευή της κλίμακας σχετικών αποστάσεων τότε λέμε ότι ο πίνακας εκτιμήσεων είναι συνεπής.

Ο περιορισμός k ≠ k' δικαιολογείται καθώς όταν τα ζεύγη (a, b) και (c, d) ανήκουν στην ίδια κατηγορία, δεν προκύπτουν πληροφορίες σχετικά με τη σχέση μεταξύ των διαφορών μ(a) – μ(b) και μ(c) – μ(d). Δεν υπάρχει λόγος να θεωρήσουμε ότι μ(a) – μ(b) = μ(c) – μ(d), καθώς τότε θα ήταν δυνατό να αντιστοιχεί ένας μοναδικός αριθμός σε κάθε κατηγορία.

Η μέθοδος MACBETH μπορεί να διαχειριστεί καταστάσεις ασυμβατότητας. Οι περιπτώσεις ασυμβατότητας εμφανίζονται όταν οι εκτιμήσεις του αποφασίζοντα D είναι ασυμβίβαστες με την κατασκευή της κλίμακας σχετικών αποστάσεων. Η μέθοδος MACBETH αναγνωρίζει τρείς κατηγορίες ασυμβατότητας:

Πρώτη κατηγορία: δεν είναι δυνατή η αντιστοιχία μιας τιμής σε κάθε στοιχείο του συνόλου A με τρόπο που να ικανοποιείται η συνθήκη μονοτονίας. Παράδειγμα , όταν δηλωθεί ότι δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ x και y, δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ y και z και η εναλλακτική x είναι προτιμότερη της z.

Δεύτερη Κατηγορία: οι εκτιμήσεις του αποφασίζοντα είναι τέτοιες που είναι δυνατή η αντιστοιχία μιας τιμής σε κάθε στοιχείο του συνόλου A έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη μονοτονίας, ωστόσο υπάρχει τουλάχιστον μια ασυμφωνία μεταξύ συγκριτικών και σημασιολογικών εκτιμήσεων, η οποία δεν επιτρέπει την ικανοποίηση της συνθήκης μονοτονίας και της συνθήκης σχετικών αποστάσεων ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει διαφορά στην ποσότητα ιδιότητας στα x και y, που έχουν περισσότερη από τη z, ωστόσο η διαφορά μεταξύ x και z δεν είναι ίδια με τη διαφορά y και z.

Τρίτη Κατηγορία: οι εκτιμήσεις του αποφασίζοντα είναι τέτοιες ώστε:

- Είναι δυνατή η αντιστοίχιση μιας τιμής σε κάθε στοιχείο του συνόλου A με τρόπου που να ικανοποιείται η συνθήκη μονοτονίας,
- Δεν υπάρχει συμφωνία μεταξύ συγκριτικών και σημασιολογικών εκτιμήσεων, αλλά υπάρχει ασυμφωνία (μια η περισσότερες) μεταξύ των σημασιολογικών εκτιμήσεων, οι οποίες καθιστούν αδύνατη την ικανοποίηση της συνθήκης σχετικών αποστάσεων. Η περίπτωση αυτή αναφέρεται ως σημασιολογική ασυνέπεια.

Εάν οι εκτιμήσεις του αποφασίζοντα είναι ασύμβατες με την κατασκευή μιας κλίμακας σχετικών αποστάσεων, είναι αδύνατο να συσχετιστεί μια τιμή για κάθε στοιχείο του συνόλου A. Στην περίπτωση αυτή προτείνεται αλλαγή των αρχικών εκτιμήσεων.

Σε πολλά πρακτικά προβλήματα, οι πληροφορίες μονοτονίας είναι επαρκείς για να καθορίσουν την ελκυστικότητα των επιλογών, δίχως να απαιτείται η κατασκευή αριθμητικής κλίμακας.

3.3.2.2 Μέθοδος MUSA (Γρηγορούδης, 1999; Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000; Grigoroudis & Siskos, 2002; Ματσατσίνης, 2010)

Η μέθοδος MUSA (MUlticriteria Satisfaction Analysis) (Γρηγορούδης, 1999; Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000; Grigoroudis & Siskos, 2002), ανήκει στις μεθόδους αναλυτικής – συνθετικής προσέγγισης. Η μέθοδος απαντά στο πρόβλημα της μέτρησης ανάλυσης της ικανοποίησης. Η μέθοδος έχει τη δυνατότητα διαχείρισης ποσοτικών, όσο και ποιοτικών δεδομένων, ενώ η συλλογή των δεδομένων γίνεται με τη βοήθεια ερωτηματολογίων. Βασικός στόχος της μεθόδου είναι σύνθεση των προτιμήσεων ενός συνόλου πελατών σε μία ποσοτική μαθηματική συνάρτηση αξιών. Πιο συγκεκριμένα, η ικανοποίηση κάθε πελάτη καθορίζεται από ένα σύνολο μεταβλητών που εκφράζουν τα χαρακτηριστικά του προϊόντος ή υπηρεσίας. Κάνουμε την υπόθεση ότι η συνολική ικανοποίηση του πελάτη εξαρτάται από ένα σύνολο κριτηρίων (X_1, X_2, …, X_n). Τα κριτήρια αυτά τα ονομάζουμε μεταβλητές ικανοποίησης. Τα δεδομένα της μεθόδου θα συλλεχθούν με τη βοήθεια ενός απλού αλλά εξειδικευμένου ερωτηματολογίου, το οποίο ζητά από τον κάθε πελάτη να εκφράζει τη συνολική όσο και την επιμέρους ικανοποίηση για κάθε χαρακτηριστικό του προϊόντος ή υπηρεσίας. Οι προτιμήσεις των πελατών εκφράζονται μέσω μιας προκαθορισμένης μονότονης κλίμακας. Στον Πίνακα 3.5 παρουσιάζεται ο ορισμός των μεταβλητών της μεθόδου.

Y	Συνολική ικανοποίηση του πελάτη
A	Αριθμός επιπέδων της κλίμακας ικανοποίησης
y^m	Το m επίπεδο συνολικής ικανοποίησης (m = 1, 2, …, a)
N	Αριθμός κριτηρίων
X_i	Ικανοποίηση του πελάτη σύμφωνα με το i κριτήριο (i = 1, 2, …, n)
$α_i$	Αριθμός επιπέδων της κλίμακας ικανοποίησης του κριτηρίου i
x_i^k	Το k επίπεδο ικανοποίησης του κριτηρίου i (k = 1, 2, …, $α_i$)
Y*	Συνάρτηση αξιών του Y (συνάρτηση ολικής ικανοποίησης)
y^{*m}	Αξία του ym επιπέδου ικανοποίησης
X_i^*	Συνάρτηση αξιών του X_i (συνάρτηση μερικής ικανοποίησης)
x_i^{*K}	Αξία του x_i^K επιπέδου ικανοποίησης

Πίνακας 3.5. Μεταβλητές της μεθόδου MUSA (Ματσατσίνης, 2010)

Η μέθοδος MUSA ακολουθεί τις γενικές αρχές της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης υπό περιορισμούς, χρησιμοποιώντας τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού για την επίλυση της (Jacquet-Lagreze & Siskos, 1982), (Siskos & Yannacopoulos, 1985), (Siskos, 1985), (Siskos, et al., 2005). Η βασική εξίσωση της ανάλυσης παλινδρόμησης είναι η ακόλουθη:

$$\begin{cases} Y^* = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i^* \\ \sum_{i=1}^{n} b_i = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

όπου οι συναρτήσεις Y^* και X_i^* είναι κανονικοποιημένες στο διάστημα [0, 100] ενώ b_i είναι ο συντελεστής βάρους του κριτηρίου i.

Ακολουθούν οι περιορισμοί κανονικοποίησης:

$$\begin{cases} \qquad y^{*1} = 0, \quad y^{*a} = 100 \\ x_i^{*k} = 0, \;\; x_i^{*a_i} = 100 \quad για\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \qquad (2)$$

Οι σχέσεις προτίμησης μοντελοποιούν τους περιορισμούς μονοτονίας των συναρτήσεων Y* και X* και περιγράφονται παρακάτω:

$$\begin{cases} y^{*m} \leq y^{*m+1} \Leftrightarrow y^m \leq y^{m+1} \quad για\ m = 1, 2, \dots, a-1 \\ y^{*m} \leq y^{*k+1} \Leftrightarrow y^k \leq y^{k+1} \quad για\ k = 1, 2, \dots, a-1 \end{cases} \quad (3)$$

Όπου:

≥ προτίμηση ή ισοδυναμία,

≤ μη προτίμηση.

Οι Y* και X_i* είναι μονότονες και αύξουσες διακριτές συναρτήσεις.

Εισάγοντας μια διπλή μεταβλητή σφάλματος , η βασική εξίσωση της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης είναι η εξής:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i^* - \sigma^+ + \sigma^- \quad (4)$$

Όπου σ^+ και σ^- το σφάλμα υπερεκτίμησης και υποεκτίμησης αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τους προηγούμενους ορισμούς και παραδοχές, το πρόβλημα της εκτίμησης της ικανοποίησης των πελατών μοντελοποιείται ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με στόχο την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των μεταβλητών σφάλματος, κάτω από τους περιορισμούς:

- Εξίσωση ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης για κάθε πελάτη.
- Περιορισμοί κανονικοποίησης των Y* και X_i* στο [0, 100].
- Περιορισμοί μονοτονίας των Y* και X_i*.

Προκειμένου να μειωθεί η υπολογιστική δυσκολία ανεύρεσης της βέλτιστης λύσης μπορούμε να εξαλείψουμε τους περιορισμούς μονοτονίας. Αυτό γίνεται με τη χρήση νέων μεταβλητών, οι οποίες εκφράζουν τα διαδοχικά βήματα αύξησης των συναρτήσεων Y* και X_i* (Siskos and Yannakopoulos, 1985, Siskos 1985) και ορίζονται ακολούθως:

$$\begin{cases} z_m = y^{*m+1} - y^{*m}\ για\ m = 1, 2, \dots, a-1 \\ w_{ik} = b_i x_i^{*k+1} - b_i x_i^{*k}\ για\ k = 1, 2, \dots, a_i - 1\ καί\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5)$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω εξίσωσης οι αρχικές μεταβλητές απόφασης γράφονται ως εξής:

$$\begin{cases} y^{*m} = \sum_{i=1}^{m-1} z_t \quad για\ m = 2, 3, \dots, a \\ b_i x_i^{*k} = \sum_{t=1}^{k-1} w_{it} \quad για\ k = 2, 3, \dots, a_i\ καί\ i = 1, 2, .., n \end{cases} \quad (6)$$

Εισάγοντας τις νέες μεταβλητές z_m και w_{ik} και από τις δυο προηγούμενες εξισώσεις η εξίσωση (4) γράφεται:

$$\sum_{m} z_m = \sum_{i} \sum_{k} w_{ik} - \sigma^+ + \sigma^- \qquad (7)$$

Θεωρώντας ότι ο πελάτης j έχει εκφράσει την ικανοποίηση του με βάση τις καθορισμένες κλίμακες Y και X_i δηλαδή:

$$\begin{cases} \text{ολική ικανοποίηση} \quad \bar{y}^j = y^{tj} \ \text{καί} \ \bar{y}^j \in Y = \{y^1, y^2, \dots, y^{tj}, \dots, y^a\} \\ \text{μερική ικανοποίηση} \ \ \bar{x}^j = x_i^{tji} \ \text{καί} \ \bar{x}_i^j \in X_i = \left\{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{tji}, \dots, x_i^{ai}\right\} \ \text{για} \ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

Οπότε η εξίσωση (7) γίνεται:

$$\sum_{m=1}^{t_j - 1} z_m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{t_{ji} - 1} w_{ik} - \sigma^+ + \sigma^- \quad \forall j \quad (9)$$

Έτσι το γραμμικό πρόγραμμα διαμορφώνεται ακολούθως:

$$\begin{cases} [min]F = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^+ + \sigma_j^- \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{t_{ji}-1} w_{ik} - \sum_{m=1}^{t_j - 1} z_m - \sigma_j^+ + \sigma_j^- = 0 \ \ \text{για} \ j = 1, 2, \dots, M \\ \sum_{m=1}^{a-1} z_m = 100 \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{a_{ji}-1} w_{ik} = 100 \\ z_m \geq 0, w_{ik} \geq 0 \qquad \forall\, m, i, k \\ \sigma_j^+ \geq 0, \sigma_j^- \geq 0 \quad \text{για} \ j = 1, 2, \dots, M \end{cases} \qquad (10)$$

Όπου M ο συνολικός αριθμός πελατών.

Οι αρχικές μεταβλητές του προβλήματος μπορούν να υπολογιστούν από τη βέλτιστη λύση του προηγούμενου γραμμικού προβλήματος, καθώς:

$$\begin{cases} y^{*m} = \sum_{t=1}^{m-1} Z_t \quad \text{για } m = 2, 3, \dots, a \\ b_i = \dfrac{\sum_{t=1}^{a_i-1} w_{it}}{100} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ x_i^{*k} = 100 \dfrac{\sum_{t=1}^{k-1} w_{it}}{\sum_{t=1}^{a_i-1} w_{it}} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \text{ καί } k = 2, 3, \dots, a_i \end{cases} \tag{11}$$

Τα οριακά σημεία των συναρτήσεων ικανοποίησης y^{*1}, x_i^{*1} υπολογίζονται με βάση τους περιορισμούς κανονικοποίησης.

Ο αλγόριθμος της μεθόδου MUSA ολοκληρώνεται με τη φάση της μεταβελτιστοποίησης και απαιτεί τη μορφοποίηση και επίλυση n γραμμικών προγραμμάτων, ίσος με τον αριθμό κριτηρίων. Τα γραμμικά προγράμματα μεγιστοποιούν το βάρος b_i κάθε κριτηρίου και περιγράφονται ακολούθως:

$$\begin{cases} [max]F' = \sum_{k=1}^{a_i-1} w_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \\ F = F^* + \varepsilon \\ \text{όλοι οι περιορισμοί του γ.π. } 10 \end{cases}$$

Όπου ε ένας μικρός θετικός αριθμός και F^* η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του γραμμικού προγράμματος.

Η τελική λύση των μεταβλητών της μεθόδου MUSA υπολογίζεται από τη μέση τιμή των βέλτιστων λύσεων που προκύπτουν από τα γραμμικά προγράμματα.

3.3.2.3 Μέθοδος M.H.DIS (Zopounidis & Doumpos, 2000)

Η μέθοδος προτάθηκε από τους (Zopounidis & Doumpos, 2000). Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μεθόδου M.H.DIS σε σχέση με άλλες πολυκριτήριες τεχνικές ταξινόμησης συνοψίζεται στις ακόλουθες προτάσεις.

1. Η μέθοδος M.H.DIS διαχωρίζει τις ομάδες προοδευτικά, ξεκινώντας με το διαχωρισμό της πρώτης ομάδας (καλύτερες εναλλακτικές) από τις υπόλοιπες, και έπειτα προχωρά στο διαχωρισμό των εναλλακτικών που ανήκουν στις υπόλοιπες ομάδες.
2. Χρησιμοποιεί τρείς διαφορετικές μετρήσεις της ληφθείσας ποιότητας διάκρισης. Αρχικά πραγματοποιείται η ελαχιστοποίηση του σφάλματος ταξινόμησης, χρησιμοποιώντας όρους απόστασης (L_1 - norm). Στο δεύτερο βήμα, η μέθοδος ελαχιστοποιεί τον αριθμό εσφαλμένων ταξινομήσεων που προέκυψαν μετά το πρώτο βήμα (L_o - norm). Τέλος πραγματοποιείται η μεγιστοποίηση της σαφήνειας του διαχωρισμού (L_∞- norm).

Έστω $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ το σύνολο των n εναλλακτικών που θα ταξινομηθούν σε q διατεταγμένες κλάσεις $C_1 \succ C_2 \succ \dots \succ C_q$ (η C_1 είναι προτιμώμενη της C_2, η C_2 της C_3 κ.ο.κ). Κάθε εναλλακτική αξιολογείται με βάση ένα σύνολο $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ που αποτελείται από m κριτήρια. Η αξιολόγηση κάθε εναλλακτικής a στο κριτήριο g_i συμβολίζεται g_{ia}. Με βάση το σύνολο εναλλακτικών Α, για κάθε κριτήριο προς αξιολόγηση ορίζεται το σύνολο $V_i = \{g_i^1, g_i^2, \dots, g_i^{p_i}\}$, που αποτελείται από τις διαφορετικές τιμές του κριτηρίου g_i. Οι τιμές p_i κατατάσσονται από τη μικρότερη τιμή g_i^1 μέχρι τη μεγαλύτερη $g_i^{p_i}$.

Η μέθοδος ταξινομεί προοδευτικά τις εναλλακτικές στις προκαθορισμένες κλάσεις, ξεκινώντας από την κλάση C_1 (καλύτερες εναλλακτικές). Οι εναλλακτικές που ταξινομήθηκαν στην κλάση C_1 (ορθά είτε εσφαλμένα) αποκλείονται από μια περαιτέρω μελέτη. Στο δεύτερο βήμα στόχος είναι η αναγνώριση των εναλλακτικών που ανήκουν στην κλάση C_2 , όπου, ξανα, οι εναλλακτικές που τοποθετούνται στην κλάση ορθά ή μη, εξαιρούνται στη συνέχιση της μελέτης. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι την ταξινόμηση όλων των εναλλακτικών στις προκαθορισμένες κλάσεις. Ο αριθμός βημάτων σε αυτή διαδικασία ιεραρχικής διάκρισης είναι q-1.

Στην διαδικασία ιεραρχικής διάκρισης γίνεται η παραδοχή ότι οι προτιμήσεις του αποφασίζοντα είναι μια αύξουσα μονότονη συνάρτηση στην κλίμακα του κριτηρίου (τα κριτήρια στα οποία η προτίμηση αυξάνεται για χαμηλότερες τιμές, μπορούν να μετατραπούν σε κριτήρια αύξουσας προτίμησης με αντιστροφή του προσήμου). Επομένως, όταν η επίδοση μίας εναλλακτικής ως προς ένα κριτήριο αυξάνεται, η απόφαση σχετικά με την ταξινόμηση της εναλλακτικής σε μια υψηλότερη (καλύτερη) κλάση είναι ευνοϊκότερη σε σχέση με την ταξινόμηση της σε μια χαμηλότερη (χειρότερη) κλάση. Η απόφαση της ταξινόμησης δομείται από τον ακόλουθο κανόνα:

Η ταξινόμηση μιας εναλλακτικής α σε μία από τις προκαθορισμένες κλάσεις $\mathrm{C}_1 \succ \mathrm{C}_2 \succ \dots \succ \mathrm{C}_\mathrm{q}$ θα καθοριστεί στη βάση των χρησιμοτήτων των εναλλακτικών επιλογών σε σχέση με την ταξινόμηση της α, που σημαίνει ότι, τη σύγκριση της χρησιμότητας που ταξινομεί την α στην κλάση C_1 σε σχέση με τη χρησιμότητα που ταξινομεί την α στην κλάση C_2. Επιλέγεται η απόφαση ταξινόμησης με τη μέγιστη χρησιμότητα.

Οι χρησιμότητες που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο M.H.DIS υπολογίζονται μέσω μιας προσθετικής συνάρτησης χρησιμότητας που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$U_k\left(\underline{g}\right) = \sum_{i=1}^{m} u_{ki}(g_i) \in [0,1]$$

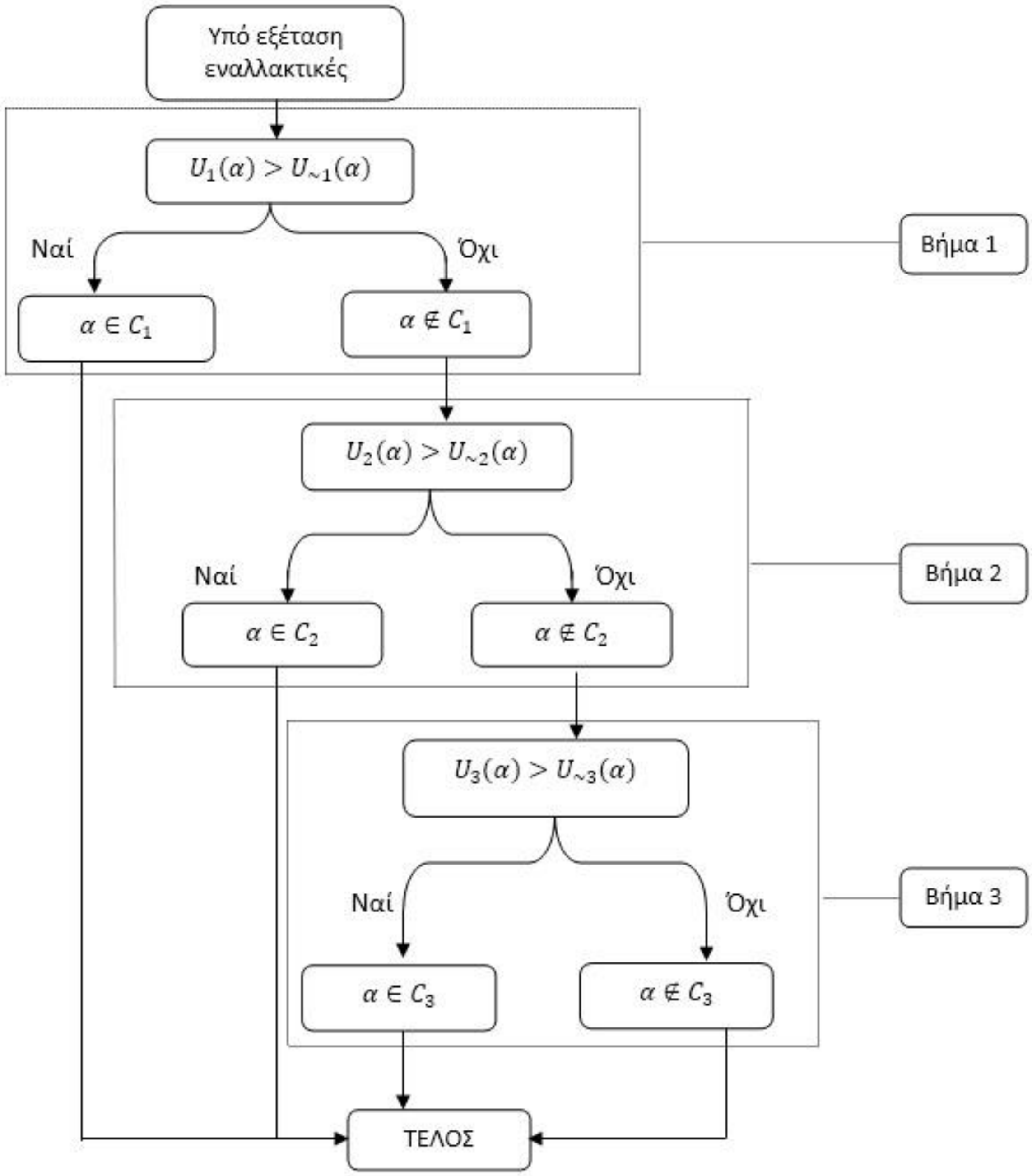
Η $U_k\left(\underline{g}\right)$ συμβολίζει τη χρησιμότητα ταξινόμησης οποιασδήποτε εναλλακτικής στην κλάση C_k με βάση τις επιδόσεις της εναλλακτικής στο σύνολο κριτηρίων g. Ο όρος $u_{ki}(g_i)$ συμβολίζει την αντίστοιχη οριακή συνάρτηση χρησιμότητας που αφορά την ταξινόμηση οποιασδήποτε εναλλακτικής στην κλάση C_k ως προς ένα συγκεκριμένο κριτήριο g_i. Η παραπάνω υπόθεση που αφορά τη μονοτονία των προτιμήσεων του αποφασίζοντα στη κλίμακα κριτηρίων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $u_{ki}(g_i)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση στην κλίμακα του κριτηρίου, ενώ η οριακή χρησιμότητα της απόφασης που αφορά την ταξινόμηση της εναλλακτικής ως προς το κριτήριο g_i σε μια κλάση χαμηλότερη της C_k [συμβολίζεται $u_{\sim ki}(g_i)$] θα είναι μια φθίνουσα συνάρτηση στην κλίμακα του κριτηρίου.

Σε κάθε βήμα k της διαδικασίας ιεραρχικού διαχωρισμού (k = 1, 2, …, q - 1), κατασκευάζονται δυο συναρτήσεις χρησιμότητας. Η πρώτη αντιστοιχεί στη χρησιμότητα της απόφασης για κατάταξη της εναλλακτικής στην κλάση C_k [συμβολίζεται ως $U_k\left(\underline{g}\right)$], ενώ η δεύτερη αντιστοιχεί στη χρησιμότητα της απόφασης για μη ταξινόμηση της εναλλακτικής στην κλάση C_k [συμβολίζεται $U_{\sim k}\left(\underline{g}\right)$]. Οι δυο συναρτήσεις χρησιμότητας υλοποιούνται για όλες τις υπό εξέταση εναλλακτικές. Η ταξινόμηση μια εναλλακτικής α με επιδόσεις g_α στα κριτήρια, βασιζόμενη στις δυο συναρτήσεις χρησιμότητας γίνεται ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ U_k\left(\underline{g_a}\right) > U_{\sim k}\left(\underline{g_a}\right)\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha \in C_k \\ \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ U_k\left(\underline{g_a}\right) < U_{\sim k}\left(\underline{g_a}\right)\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha \notin C_k \end{array}\right\}$$

Κατά την ανάπτυξη του μοντέλου, η περίπτωση όπου $U_k\left(\underline{g_a}\right) = U_{\sim k}\left(\underline{g_a}\right)$ θεωρείται εσφαλμένη ταξινόμηση. Σε μια τέτοια περίπτωση η χρήση των προσθετικών συναρτήσεων χρησιμότητας δεν δημιουργεί ξεκάθαρη ταξινόμηση των εναλλακτικών και απαιτείται περαιτέρω ανάλυση. Η ανάλυση αυτή θα βασιστεί στην εξέταση των οριακών χρησιμοτήτων $u_{ki}(g_{ia})$ και $u_{\sim ki}(g_{ia})$, ώστε να καθοριστεί πώς η επίδοση των εναλλακτικών σε κάθε κριτήριο επηρρεάζει την ταξινόμηση τους.

Ακολουθώντας τον παραπάνω κανόνα ταξινόμησης, η συνολική διαδικασία ιεραρχικής διάκρισης, παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα 3.14.



Σχήμα 3.14. Η διαδικασία ιεραρχικής διάκρισης (Zopounidis & Doumpos, 2000)

Σύμφωνα με τη διαδικασία ιεραρχικής διάκρισης που μόλις περιγράψαμε, η ταξινόμηση των εναλλακτικών σε q κλάσεις, απαιτεί την ανάπτυξη 2(q - 1) συναρτήσεων χρησιμότητας. Η εκτίμηση αυτών των συναρτήσεων χρησιμότητας, επιτυγχάνεται με τεχνικές μαθηματικού προγραμματισμού. Πιο ειδικά, σε κάθε βήμα της διαδικασίας ιεραρχικής διάκρισης, επιλύονται δυο γραμμικά προγράμματα και ένα πρόγραμμα μικτού ακέραιου, ώστε να εκτιμηθούν βέλτιστα οι δυο συναρτήσεις χρησιμότητας.

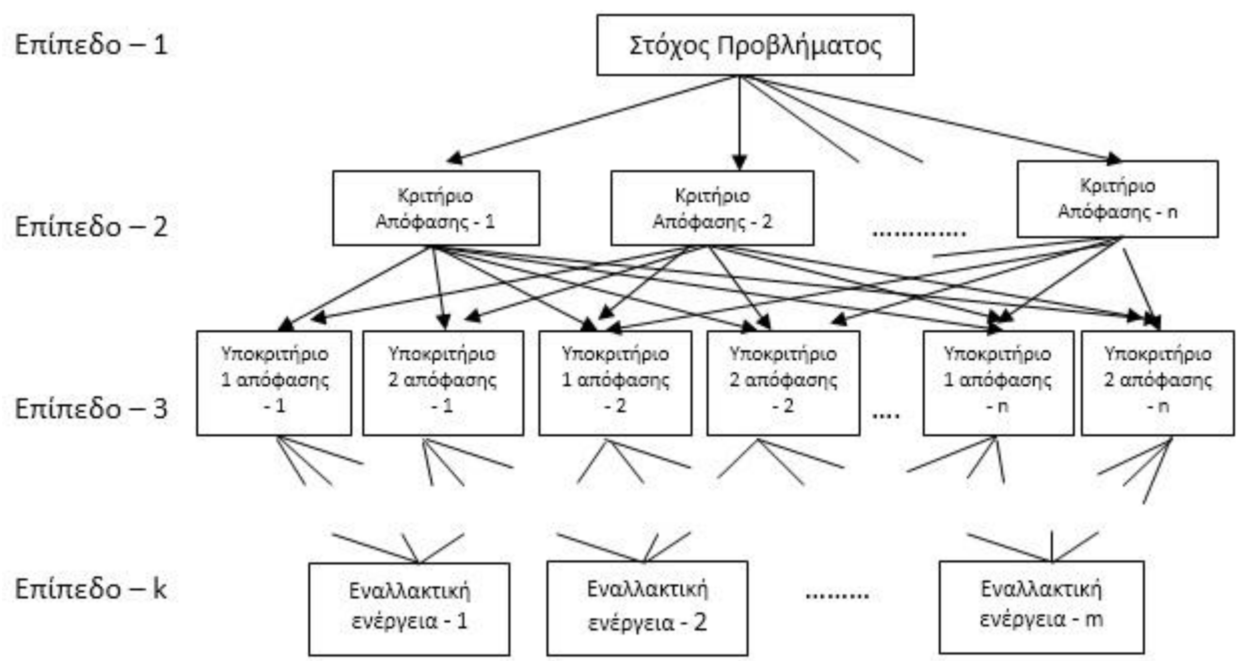
3.3.2.4 Μέθοδος AHP (Saaty, 1980a; Saaty, 1980b; Ματσατσίνης, 2010)

Η μέθοδος AHP (Analytical Hierarchy Process - AHP) προτάθηκε από τον Thomas Saaty (βλ. (Saaty, 1980a), (Saaty, 1980b)) και είναι μια θεωρία μέτρησης της υποκειμενικής απόστασης μεταξύ των κριτηρίων. Η μέθοδος μπορεί να διαχειριστεί ποιοτικά και ποσοτικά δεδομένα.

Η μέθοδος αποτελείται από τέσσερα βήματα:

1. Ιεραρχική δόμηση του προβλήματος.
2. Εισαγωγή των δεδομένων.
3. Εκτίμηση των σχετικών βαρών των κριτηρίων απόφασης.
4. Συνδυασμός των σχετικών βαρών των κριτηρίων, ώστε να αξιολογηθούν οι εναλλακτικές επιλογές.

Στο αρχικό βήμα, ο αποφασίζων καλείται να δομήσει ιεραρχικά το πρόβλημα (σχήμα 3.15). Στην κορυφή της ιεραρχίας τοποθετείται ο γενικός στόχος του προβλήματος. Στη δεύτερη βαθμίδα τοποθετούνται τα κριτήρια απόφασης, καθένα από τα οποία αναλύεται σε επιμέρους υποκριτήρια που το επηρεάζουν. Στην τελευταία βαθμίδα τοποθετούνται οι εναλλακτικές επιλογές του προβλήματος.



Σχήμα 3.15. Ιεραρχική δόμηση της διαδικασίας λήψης απόφασης μέσω της μεθόδου AHP (Zahedi, 1986)

Στο δεύτερο βήμα ο αποφασίζων καλείται να εισάγει το δεδομένα του προβλήματος, εκφράζοντας τις προτιμήσεις του μέσω διμερών συγκρίσεων όλων των στοιχείων για κάθε επίπεδο της ιεραρχίας. Συγκεκριμένα, ο αποφασίζων συγκρίνει ανά δυο όλα τα στοιχεία ενός επιπέδου μεταξύ τους υπό το πρίσμα κάθε φορά ενός στοιχείου του προηγούμενου επιπέδου της ιεραρχίας. Έτσι παρατηρώντας το σχήμα 3.15, ο αποφασίζων δεν απαιτείται να κάνει καμία σύγκριση, καθώς το επίπεδο αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο. Στο δεύτερο επίπεδο πρέπει να συγκρίνει ανά δύο όλα τα στοιχεία (κριτήρια) του επιπέδου σε σχέση με το γενικότερο στόχο του πρώτου επιπέδου. Στο τρίτο επίπεδο ο αποφασίζων συγκρίνει όλα τα στοιχεία του επιπέδου ανά δύο, κάνοντας όμως συγκρίσεις κάθε φορά υπό το πρίσμα ενός διαφορετικού κριτηρίου του δευτέρου επιπέδου. Η διαδικασία τερματίζεται με τις συγκρίσεις όλων των εναλλακτικών λύσεων του τελευταίου επιπέδου της ιεραρχίας, σε σχέση με τα στοιχεία του προηγούμενου επιπέδου.

Για την αποτύπωση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα κατά τη διαδικασία των συγκρίσεων χρησιμοποιείται μια αριθμητική κλίμακα από το 1 έως το 9 όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.6.

Αριθμητική τιμή	Επεξήγηση
1	Τα συγκρινόμενα στοιχεία είναι ίσης σημασίας
3	Το ένα στοιχείο είναι ελαφρά πιο σημαντικό από το άλλο
5	Το ένα στοιχείο είναι πολύ πιο σημαντικό από το άλλο
7	Το ένα στοιχείο είναι πάρα πολύ πιο σημαντικό από το άλλο
9	Το ένα στοιχείο είναι απολύτως πιο σημαντικό από το άλλο
2, 4, 6, 8	Ενδιάμεσες τιμές

Πίνακας 3.6. Η κλίμακα Προτίμησης της AHP (Saaty, 1980b; Ματσατσίνης, 2010)

Στο τρίτο βήμα, γνωρίζοντας πλέον τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα από το προηγούμενο βήμα υπολογίζονται τα σχετικά βάρη των στοιχείων σε σχέση με τα στοιχεία του προηγούμενου επιπέδου, βάσει των οποίων έγιναν οι συγκρίσεις.

Γνωρίζοντας τα ακριβή βάρη των στοιχείων w_i των στοιχείων n ενός επιπέδου, τότε ο πίνακας A των διμερών συγκρίσεων έχει την εξής μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

Σε αυτή την περίπτωση τα βάρη των στοιχείων ενός επιπέδου σε σχέση με τα στοιχεία του προηγούμενου επιπέδου υπολογίζονται από τη σχέση:

$$A * W = n * W$$

Όπου $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ είναι το διάνυσμα των πραγματικών σχετικών βαρών και n είναι ο αριθμός των στοιχείων του επιπέδου.

Η μέθοδος υποθέτει ότι ο αποφασίζων δεν γνωρίζει τα πραγματικά βάρη των στοιχείων, επομένως ο πίνακας Α θα περιέχει ασυμβατότητες. Η εκτίμηση των πραγματικών βαρών θα γίνει βάσει της σχέσης:

$$\hat{A} * \widehat{W} = \lambda_{max} * \widehat{W}$$

Όπου $\hat{A}$ ο πίνακας των συγκρίσεων που έγιναν από τον αποφασίζοντα, λ_{max} η μέγιστη ιδιοτιμή του Πίνακα Α (ισχύει $\lambda_{max} \geq n$) και $\widehat{W}$ η εκτίμηση του διανύσματος W των πραγματικών σχετικών βαρών.

Στο τέταρτο βήμα της μεθόδου γίνεται ο συνδυασμός των σχετικών βαρών των στοιχείων όλων των επιπέδων ώστε να υπολογιστούν τα βάρη των εναλλακτικών λύσεων του τελευταίου επιπέδου (επίπεδο k) της ιεραρχίας. Ο υπολογισμός δίνεται πολλαπλασιάζοντας όλους τους πίνακες των εκτιμώμενων σχετικών βαρών των στοιχείων όλων των επιπέδων:

$$C[1, k] = \prod_{j=2}^{k} B_j$$

Όπου C[1, k] είναι ο πίνακας των βαρών των στοιχείων k του επιπέδου (εναλλακτικές επιλογές) σε σχέση με το γενικό στόχο του προβλήματος (πρώτο επίπεδο) και B_J ο πίνακας των εκτιμώμενων σχετικών βαρών των στοιχείων του j επιπέδου της ιεραρχίας σε σχέση με όλα τα στοιχεία του επιπέδου j-1. Τα βάρη των εναλλακτικών που υπολογίζονται δίνουν κατ' ουσία μια τιμή – επίδοση (σκορ) για κάθε εναλλακτική, βάση του οποίου λαμβάνεται η απόφαση.

3.3.2.5 Modified AHP (Belton & Gear, 1983; Dyer, 1990; Βλάχος, 2007)

Η μέθοδος αποτελεί επέκταση της αρχικής μεθόδου AHP (βλ. (Belton & Gear, 1983; Dyer, 1990)). Τα συγκριτικά πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι τα εξής:

- Η Modified AHP παράγει μια ασθενή γραμμική κατάταξη των εναλλακτικών.
- Η μέθοδος επιτρέπει στις διάφορες τιμές οποιουδήποτε ζεύγους εναλλακτικών να ποσοτικοποιηθούν.
- Σχετικά απλή μέθοδος προσδιορισμού βαρών των κριτηρίων.
- Η Modified AHP δεν παρουσιάζει την ευπάθεια της αρχικής AHP στη μεταστροφή της κατάταξης.

Έστω v_{ij} η αξιολόγηση της εναλλακτικής a_j ως προς το κριτήριο κ_ι. Ένας τρόπος για να αποτραπεί η αντιστροφή της κατάταξης είναι η κανονικοποίηση των αξιολογήσεων των εναλλακτικών προς ένα κριτήριο με ένα τρόπο ώστε να μην εξαρτάται από τον αριθμό των εναλλακτικών που είναι υπό εξέταση. Η κανονικοποίηση προτάθηκε από τον (Dyer, 1990). Έτσι, η αξιολόγηση v_{ij} τροποποιείται ακολούθως:

$$v'_{ij} = \frac{v_{ij} - \min[v_{ij}]}{\max[v_{ij}] - \min[v_{ij}]}$$

Όπου $\min[v_{ij}]$ και $\max[v_{ij}]$ είναι οι ελάχιστες και μέγιστες πιθανές τιμές για το κριτήριο κ_ι. Ο υπολογισμός των βαρών w_iτων κριτηρίων κ_ι γίνεται σύμφωνα με την αρχική μέθοδο AHP. Η τελική αξιολόγηση κάθε εναλλακτικής π_j υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{n} w_i v'_{ij}$$

Εκτός από την παραπάνω τροποποίηση της αρχικής AHP, έχει προταθεί και μια ακόμη τροποποίηση της για διαχείριση ασαφών δεδομένων από τους (Zeng, et al., 2007).

3.3.2.6 Μέθοδος SMART και SMARTS (Edwards, 1977; von Winterfeldt & Edwards, 1986; Edwards & Barron, 1994; Καραπέτσας, 2002)

Η μέθοδος SMART (Simple MultiAttribute Rating Technique), έχει περιγραφεί αναλυτικά από τους (Edwards, 1977), (von Winterfeldt & Edwards, 1986) και (Edwards & Barron, 1994), και αποτελεί την απλούστερη μέθοδος της θεωρίας πολυκριτήριας χρησιμότητας. Το γραμμικό μοντέλο συνάρτησης της μεθόδου περιγράφεται ακολούθως:

$$Max \sum_{j=1}^{k} w_j u_{ij} \quad \forall \ i = 1, \dots, n$$

Όπου w_j είναι το βάρος του κριτηρίου και u_{ij} η χρησιμότητα της εναλλακτικής i στο κριτήριο j. Η τεχνική της μεθόδου αποτελείται από τα εξής στάδια:

(α) Καθορισμός του αποφασίζοντα ή των αποφασιζόντων.

(β) Καθορισμός των εναλλακτικών δράσεων.

(γ) Καθορισμό των κριτηρίων που σχετίζονται με τη διαδικασία λήψης της απόφασης. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση των δένδρων χρησιμότητας (Value Trees).

(δ) Για κάθε ιδιότητα – κριτήριο, καθορίζεται η χρησιμότητα που μετρά την απόδοση των εναλλακτικών με βάση αυτή την ιδιότητα. Ο καθορισμός μπορεί να γίνει με απευθείας βαθμολόγηση ή με χρήση συναρτήσεων χρησιμότητας. Η απευθείας βαθμολόγηση είναι προφανής για συγκεκριμένα κριτήρια (παράδειγμα το κόστος), ενώ για άλλα απαιτείται εκτίμηση με βάση την ακόλουθη διαδικασία:

(δ1) Στην καλύτερη εναλλακτική αντιστοιχείται η τιμή 100 και στη χειρότερη η τιμή 0.

(δ2) Για τις υπόλοιπες εναλλακτικές χρησιμοποιείται μια κλίμακα διαστημάτων με βάση την οποία γίνονται συγκρίσεις για τις διαφορές μεταξύ των εναλλακτικών.

(ε) Καθορισμός του βάρους κάθε κριτηρίου χρησιμοποιώντας την τεχνική «swing weights» εφόσον χρειάζεται. Τα βάρη αυτά εκφράζουν τη σημαντικότητα κάθε κριτηρίου για τον αποφασίζοντα. Η τεχνική Swing αφορά τη σύγκριση της αλλαγής από τη χειρότερη στην καλύτερη τιμή μιας εναλλακτικής σε σχέση με την αλλαγή από τη χειρότερη στην καλύτερη τιμή μιας άλλης εναλλακτικής. Η μέθοδος SMARTS προκύπτει από τη SMART με χρήση της τεχνικής Swing.

(στ) Σε κάθε εναλλακτική αντιστοιχείται μια σταθμισμένη μέση αξία. Η αξία αυτή αποτελεί μέτρο της απόδοσης κάθε εναλλακτικής στο σύνολο των κριτηρίων.

(ζ) Λήψη αρχικής απόφασης με βάση τα αποτελέσματα.

(η) Χρήση ανάλυσης ευαισθησίας για τον καθορισμό της ισχύος (robustness) του αποτελέσματος. Στόχος είναι να καθοριστεί η ευαισθησία του αποτελέσματος σε μικρές αλλαγές των δεδομένων εισόδου.

3.3.2.7 Μέθοδος SMARTER (Edwards & Barron, 1994; Καραπέτσας, 2002)

Η μέθοδος SMARTER προτάθηκε από τους (Edwards & Barron, 1994) ως μια βελτιωμένη έκδοση της αρχικής μεθόδου SMART. Οι βασικές σκέψεις για τη δημιουργία της μεθόδου ήταν ότι οι απλές τεχνικές είναι περισσότερο εύχρηστες και χρήσιμες για τους περισσότερους αποφασίζοντες και είναι πολύ πιθανό να εξάγουν αξιόπιστα αποτελέσματα. Οι διαφορές της μεθόδου SMARTER σε σχέση με τη SMART είναι οι ακόλουθες:

- Οι συναρτήσεις χρησιμότητας έχουν προσεγγιστεί από απλές γραμμικές συναρτήσεις.

- Η τεχνική «swing weights» έχει προσεγγιστεί από τη μέθοδο Rank Order Centroid (ROC) weights. Τα βάρη των k κριτηρίων ($w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_k$) υπολογίζονται ως εξής:

$$w_1 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}}{k}$$

$$w_2 = \frac{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}}{k}$$

$$w_3 = \frac{0 + 0 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}}{k}$$

………………

$$w_k = \frac{0 + 0 + 0 + \cdots + \frac{1}{k}}{k}$$

Γενικά, αν ο αριθμός των κριτηρίων είναι Κ, τότε ο βάρος κάθε κριτηρίου είναι:

$$\left(\frac{1}{k}\right)\sum_{i=k}^{K}\left(\frac{1}{i}\right)$$

3.3.2.8 Multiattribute Value Theory (MAVT) (Keeney & Raiffa, 1976; Simpson, 1994)

Οι Keeney and Raifa (Keeney & Raiffa, 1976) σκιαγραφούν τις συνθήκες για χρήση της μεθόδου MAVT. Έστω ένα πρόβλημα απόφασης με δυο εναλλακτικές A και B που αξιολογούνται σε δυο κριτήρια I και J. Επομένως οι A και B μπορούν να εκφραστούν σαν διανύσματα, π.χ. A = (α_i, α_j) και B = (b_i, b_j). Μια ιδιότητα που ένας αποφασίζων ίσως θελήσει να προσδιορίσει είναι η αμοιβαία ανεξαρτησία προτίμησης των κριτηρίων. Το κριτήριο I είναι προτιμησιακά ανεξάρτητο του J εάν για όλα τα α_i, b_i, οι προτιμήσεις στο κριτήριο I:

$$\text{για κάποιο } a_j \in J, (\boldsymbol{a}_i, a_j) \leq (b_i, a_j) \Rightarrow (\boldsymbol{a}_i, \beta_j) \leq (b_i, \beta_j)\ \forall\ \beta_j \in J$$

Εάν η ίδια σχέση υπάρχει μεταξύ J και I, τότε τα κριτήρια είναι αμοιβαία προτιμησιακά ανεξάρτητα. Η ιδιότητα αυτή επεκτείνεται και σε προβλήματα με περισσότερα κριτήρια.

Επιπλέον, ο αποφασίζων μπορεί να θέσει μια ασθενή διάταξη των προτιμήσεων.

$$\alpha_j \leq b_j$$

Όταν γίνονται εκτιμήσεις για την οριακή αξία μιας ιδιότητας (κριτήριο) ανεξάρτητα από άλλες ιδιότητες, τότε μπορεί να είναι απαραίτητες περισσότερες παραδοχές. Οι (Dyer & Sarin, 1979) εισήγαγαν την έννοια της ανεξαρτησίας διαφοράς, η οποία, εάν υπάρχει, οδηγεί στο σχηματισμό μιας συνολικής προσθετικής συνάρτησης αξίας. Εάν αυτές οι ιδιότητες συνέπειας ευσταθούν, το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με μια προσθετική συνάρτηση αξίας της μορφής:

$$V(A) = V\left(a_1, a_2, \dots, a_j\right) = v_1(a_1) + v_2(a_2) + \cdots, v_j\left(a_j\right)$$

Όπου $v_1, v_2\, \kappa\alpha\acute{\iota}\, v_j$ είναι οι συστατικές συναρτήσεις αξίας. Η συστατική συνάρτηση αξίας μετατρέπει τις επιδόσεις σε μία κοινή κλίμακα. Οι συστατικές συναρτήσεις αξίας είναι μοναδικές μέχρι το συσχετισμένο μετασχηματισμό τους. Δηλαδή οι συναρτήσεις v είναι της μορφής:

$$v_p' = \gamma_{v_p} + \delta$$

Και είναι θετικές αύξουσες συναρτήσεις.

Η σχέση της προσθετικής συνάρτησης αξίας θα δώσει μια συνολική εικόνα όπου μπορεί να βασιστεί η κατάταξη των εναλλακτικών. Η ανάλυση ευαισθησίας θα χρησιμοποιηθεί για να ελεγχθεί εάν τυχόν ανακρίβειες εντός του αρχικού μοντέλου επηρεάζουν το αποτέλεσμα. Συχνά χρησιμοποιούνται γραφικές μέθοδοι, όταν είναι άμεσα αντιληπτό πως τροποποιήσεις σε μια επίδοση ή ένα βάρος κριτηρίου θα έχουν αντίκτυπο στην τελική κατάταξη των εναλλακτικών.

3.4 Verbal Decision Analysis (VDA)

3.4.1 Κύριες αρχές της Verbal Decision Analysis

Ο στόχος των μεθόδων λήψης αποφάσεων που εφαρμόζονται σε αδόμητα προβλήματα πρέπει να είναι η υποβοήθηση του αποφασίζοντα στη δόμηση του προβλήματος (σχηματισμός ενός συνόλου εναλλακτικών και κριτηρίων) και να διαμορφώσουν μια συνεπή τακτική για την αξιολόγηση – σύγκριση των πολυκριτήριων εναλλακτικών. Καθώς η ανθρώπινη κρίση είναι η κεντρική πηγή πληροφοριών σε μη δομημένα προβλήματα, οι προτεινόμενες μέθοδοι πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους τους περιορισμούς της ανθρώπινης διαδικασίας επεξεργασίας πληροφοριών καθώς και την ψυχολογική εγκυρότητα των δεδομένων εισόδου στην ανάλυση της απόφασης. Τα παραπάνω απαιτούν ότι οι μέθοδοι πρέπει (Moshkovich, et al., 2005):

1. Να χρησιμοποιούν γλώσσα για την περιγραφή του προβλήματος που θα είναι φυσική προς τον αποφασίζοντα.
2. Να γίνονται ψυχολογικά έγκυρες μετρήσεις των κριτηρίων και ψυχολογικά έγκυρες διαδικασίες εξαγωγής των προτιμήσεων.
3. Να ενσωματώνουν τρόπους για να ελέγχουν τη συνέπεια των πληροφοριών του αποφασίζοντα.
4. Να είναι «διαφανείς» προς τον αποφασίζοντα και να παρέχουν επεξήγηση του αποτελέσματος

Παρόμοια με τις μεθόδους υπεροχής (Roy, 1996), οι μέθοδοι VDA δημιουργούν σχέσεις υπεροχής μεταξύ εναλλακτικών, γεγονός που οδηγεί στην πλειονότητα των περιπτώσεων σε μια μερική διάταξη. Ταυτόχρονα, οι VDA έχουν σχεδιαστεί ώστε να εξάγουν μια σχέση προτίμησης που μπορεί να εφαρμοστεί σε μελλοντικές περιπτώσεις, ενώ οι μέθοδοι υπεροχής μπορούν να συγκρίνουν μόνο ένα δεδομένο σύνολο εναλλακτικών επιλογών.

Επιπλέον, η VDA βασίζεται στις ίδιες αρχές με τη θεωρία πολυκριτήριας χρησιμότητας, αλλά προσανατολίζεται στη λεκτική μορφή της εξαγωγής της προτίμησης και της αξιολόγησης των εναλλακτικών επιλογών, χωρίς να χρησιμοποιεί ποσοτικά δεδομένα (Moshkovich & Mechitov, 2013).

3.4.2 Μέθοδος ZAPROS

Η μέθοδος σχεδιάστηκε για την επίλυση προβλημάτων κατάταξης (προβληματική γ), από μια ομάδα Ρώσων επιστημόνων υπό την ηγεσία του Larichev (Larichev & Moshkovic, 1995). Το όνομα ZAPROS αποτελεί σύντμηση των Ρωσικών λέξεων που μεταφράζονται: Closed Procedures near Reference Situation (Κλειστές Διαδικασίες κοντά σε Καταστάσεις Αναφοράς). Η μέθοδος είναι βασισμένη στην εφαρμογή ποιοτικών λεκτικών κλιμάκων και συμβιβασμών στις κλίμακες των ζευγών των κριτηρίων πλησίον δυο καταστάσεων αναφοράς. Στόχος είναι η κατασκευή μιας κοινής κλίμακας διάταξης για όλα τα κριτήρια.

Διατύπωση του προβλήματος (Moshkovich, et al., 2005):

Δίνονται:

1. Υπάρχει ένα σύνολο n κριτηρίων για αξιολόγηση των εναλλακτικών.
2. X_i είναι ένα πεπερασμένο σύνολο πιθανών λεκτικών αξιών στην κλίμακα του κριτηρίου i = 1, 2, …, n όπου $|X_i| = n_i$.
3. $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ το σύνολο όλων των πιθανών διανυσμάτων στο διάστημα των n κριτηρίων.
4. $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m\} \subseteq X$ το υποσύνολο διανυσμάτων του X που περιγράφουν τις πραγματικές εναλλακτικές.

Απαιτείται η κατάταξη των εναλλακτικών του συνόλου A με βάση τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για την περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των εναλλακτικών:

- $\succeq_i$ είναι η σχέση ασθενούς προτίμησης ως προς το κριτήριο i : για a, b ∈ A, a $\succeq_i$ b σημαίνει ότι η a είναι τουλάχιστον όσο καλή είναι η b ως προς το κριτήριο i.

- $\succ_i$ είναι η σχέση αυστηρής προτίμησης ως προς το κριτήριο i : για a, b ∈ A, a $\succ_i$ b εάν a $\succeq_i$ b και όχι b $\succeq_i$ a

- $\sim_i$ είναι η σχέση αδιαφορίας ως προς το κριτήριο i : a, b ∈ A, a $\sim_i$ b εάν a $\succeq_i$ b και b $\succeq_i$ a

- $\succeq$ είναι η σχέση ασθενούς προτίμησης : για a, b ∈ A, a $\succeq$ b σημαίνει ότι η a είναι τουλάχιστον όσο καλή είναι η b

- $\succ$ είναι η σχέση αυστηρής προτίμησης : a, b ∈ A, a $\succ$ b εάν a $\succeq$ b και όχι b $\succeq$ a

- $\sim$ είναι η σχέση αδιαφορίας : a, b ∈ A, a $\sim$ b εάν a $\succeq$ b και b $\succeq$ a

Καθώς θα γίνει χρήση μόνο ποιοτικών εκτιμήσεων για τη σύγκριση των εναλλακτικών, το πρώτο βήμα είναι η διαμόρφωση ποιοτικών κλιμάκων για τα κριτήρια. Τυπικά, η τοποθέτηση αξιών ενός κριτηρίου ως προς μια κλίμακα, απαιτούν από τον αποφασίζοντα να επιλέξει την προτιμώμενη εναλλακτική από δύο υποθετικά διανύσματα του συνόλου X, που διαφέρουν στις εκτιμήσεις ως προς ένα κριτήριο (με όλες τις άλλες εκτιμήσεις να είναι στο ίδιο επίπεδο). Αυτή η πληροφορία επιτρέπει το σχηματισμό μιας σχέσης αυστηρής προτίμησης $\succeq_i$ για κάθε κριτήριο i = 1, 2, …, n.

Το επόμενο βήμα για την εξαγωγή της προτίμησης βασίζεται στη σύγκριση σε μια ποιοτική μορφή των συνδυασμών των αξιολογήσεων ως προς δυο κριτήρια. Ζητείται από τον αποφασίζοντα να κάνει τις παραχωρήσεις διάταξης για κάθε ζεύγος κριτηρίων για κάθε πιθανό ζεύγος τιμών στην κλίμακα τους. Η ίδια πληροφορία μπορεί να εξαχθεί με πολύ λιγότερες ερωτήσεις, συγκρίνοντας δύο υποθετικά διαστήματα του X που διαφέρουν στις εκτιμήσεις ως προς δυο κριτήρια (με τις υπόλοιπες εκτιμήσεις να είναι στο ίδια επίπεδο). Ο αριθμός των συγκρίσεων για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς κριτηρίων μπορεί να παραμένει πολύ μεγάλος. Η μέθοδος ZAPROS χρησιμοποιεί μόνο ένα τμήμα αυτής της πληροφορίας για την κατασκευή της κοινής κλίμακας διάταξης. Ζητείται από τον αποφασίζοντα να συγκρίνει ζεύγη υποθετικών διανυσμάτων από το Y ⊂ X, με κάθε διάνυσμα να έχει τις καλύτερες δυνατές για όλα τα κριτήρια εκτός από ένα. Ο αριθμός αυτών των διανυσμάτων δεν είναι μεγάλος $|\boldsymbol{Y}| = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{n_i} - \mathbf{1}) + \mathbf{1}$.

Στόχος είναι η κατασκευή μίας πλήρους διάταξης όλων των διανυσμάτων του Y με βάση τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα. Εάν οι συγκρίσεις δεν παραβιάζουν τη μεταβατικότητα των προτιμήσεων, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πλήρη διάταξη των διανυσμάτων του Y με βάση αυτές τις πληροφορίες, δημιουργώντας την Κοινή Κλίμακα Διάταξης. Η Κατασκευή της κοινής κλίμακας διάταξης (JOS) μας προσφέρει ένα απλό κανόνα για τη σύγκριση των πολυκριτήριων εναλλακτικών.

Αντικαθιστώντας την αξιολόγηση ενός κριτηρίου με τη διάταξη της κοινής κλίμακας διάταξης και τα επανατοποθετούμε σε αύξουσα σειρά έτσι ώστε:

$$JOS_1(a) \leq JOS_2(a) \leq \cdots \leq JOS_n(a)$$

Ακολουθεί ο κανόνας σύγκρισης δυο εναλλακτικών:

Η εναλλακτική a δεν είναι λιγότερο προτιμώμενη από την εναλλακτική b εάν για κάθε i = 1, …,n $\quad JOS_i(a) \leq JOS_i(b)$

Η κατασκευή και εφαρμογή της κοινής κλίμακας διάταξης, όπως περιεγράφηκε παραπάνω, βασίζεται σε δυο υποθέσεις: τη μεταβατικότητα των προτιμήσεων του αποφασίζοντα και τη ανεξαρτησία προτίμησης των ζευγών των κριτηρίων.

(Moshkovich, et al., 2005)

3.4.3 ZAPROS III (Moshkovich, et al., 2005)

Ο (Larichev, 2001) πρότεινε μια τροποποίηση της μεθόδου και την ονόμασε ZAPROS III. Η μέθοδος αυτή, απαιτεί τη σύγκριση όλων των αξιολογήσεων των κριτηρίων για όλα τα κριτήρια και χρησιμοποιεί τις πληροφορίες αυτές για τη σύγκριση των πραγματικών εναλλακτικών. Ο αριθμός των συγκρίσεων μπορεί να είναι μεγάλος, επομένως είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αυτή για σχετικά μικρότερης έκτασης προβλήματα (μικρότερος αριθμός κριτηρίων και μικρός αριθμός πιθανών αξιολογήσεων κριτηρίων με σχετικά μεγάλο αριθμό πραγματικών εναλλακτικών).

Η μέθοδος ZAPROS III εισάγει την έννοια της Ποιοτικής Απόκλισης (Quality Variation - CV), η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα της αλλαγής μιας τιμής στην κλίμακα ενός κριτηρίου. Ο αποφασίζων καλείται να συγκρίνει όλες τις πιθανές Ποιοτικές Αποκλίσεις για κάθε ζεύγος κριτηρίων με την παραδοχή ότι όλες οι υπόλοιπες τιμές των κριτηρίων είναι στο ίδιο επίπεδο. Ο αριθμός των ποιοτικών αποκλίσεων για κάθε κλίμακα είναι $n_i(n_i - 1)/2$, όπου n_i είναι ο αριθμός των πιθανών τιμών στην κλίμακα αξιολόγησης του κριτηρίου. Επιπλέον, ο αποφασίζων πρέπει να συγκρίνει κάποιες ποιοτικές αποκλίσεις της ίδιας κλίμακας. Μόλις ολοκληρωθούν όλες οι συγκρίσεις για τα δυο κριτήρια, όλες οι ποιοτικές αποκλίσεις ταξινομούνται σχηματίζοντας την Κοινή Κλίμακα Ποιοτικής Απόκλισης (Joint Scale Quality Variation - JSQV).

Παρόμοια με την αρχική μέθοδο ZAPROS, προτείνεται να γίνουν οι συγκρίσεις σε δυο καταστάσεις αναφοράς: με όλες τις καλύτερες και όλες τις χειρότερες τιμές σε σχέση με τα υπόλοιπα κριτήρια. Εάν από τις συγκρίσεις προκύπτει το ίδιο JSQV, τα κριτήρια θα θεωρούνται ανεξάρτητα ως προς την προτίμηση.

Αυτές οι κατατάξεις γίνονται για όλα τα ζεύγη κριτηρίων και χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μιας Κοινής Κλίμακας Απόκλισης των Κριτηρίων (Joint Scale of Criteria Variations - JSCV). Εάν κατά τη διαδικασία προκύψουν παραβιάσεις στη μεταβατικότητα των προτιμήσεων παρουσιάζονται στον αποφασίζοντα ο οποίος καλείται να τις διευθετήσει. Κάθε QV κάθε κριτηρίου έχει μια κατάταξη. Αυτή η κατάταξη χρησιμοποιείται για τη σύγκριση των εναλλακτικών. Στη μέθοδο ZAPROS III προτείνεται κάθε πραγματική εναλλακτική να παρουσιαστεί σαν συνδυασμός των JSCV κατατάξεων.

Παρόλο που ο όγκος των επιπρόσθετων πληροφοριών σχετικά με τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα είναι σχετικά μεγάλος, είναι πιθανό να υπάρχουν μη συγκρίσιμες εναλλακτικές. Στη ZAPROS III προτείνεται η διαδοχική επιλογή μη κυριαρχούντων πυρήνων. Οι εναλλακτικές του πρώτου πυρήνα κατατάσσονται στη θέση 1. Μια εναλλακτική έχει κατάταξη r εάν κυριαρχείται από μια εναλλακτική που έχει κατάταξη r – 1 και η ίδια κυριαρχεί μια εναλλακτική με κατάταξη r + 1. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος κάποιες εναλλακτικές μπορεί να έχουν ασαφή κατάταξη.

3.4.4 STEP – ZAPROS (Moshkovich, et al., 2005)

Η μέθοδος αυτή αντιμετωπίζει την εφαρμογή διακριτών προτιμήσεων για σύγκριση πραγματικών εναλλακτικών ως μια διαδικασία που αποτελείται από τρία βήματα:

1. Χρήση του κανόνα κυριαρχίας για τη σύγκριση των πραγματικών εναλλακτικών σε σχέση με κλίμακες διάταξης.
2. Κατασκευή Κοινής Κλίμακας Διάταξης και χρήση της για σύγκριση των εναλλακτικών. Όταν επιτυγχάνεται η απαιτούμενη ακρίβεια της απόφασης σταματάμε.
3. Χρήση ποιοτικών παραχωρήσεων για σύγκριση των πραγματικών εναλλακτικών. Χρήση διαδικασιών επαναδόμησης εάν η απαιτούμενη ακρίβεια δεν επιτευχθεί.

Επιπρόσθετες συγκρίσεις διεξάγονται μόνο όταν είναι απαραίτητο και μόνο αφότου έχουν πραγματοποιηθεί οι απαραίτητες συγκρίσεις. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η διαδικασία προσανατολίζεται στην επαρκή ανάκτηση των απαραίτητων πληροφοριών.

Κατά τη σύγκριση των πραγματικών εναλλακτικών με τη χρήση της Κοινής Κλίμακας Διάταξης, οι εναλλακτικές αξιολογούνται μέσω των κατατάξεων JOS(a) και JOS(b). Εάν οι εναλλακτικές a και b είναι μη συγκρίσιμες σημαίνει ότι έχουμε τουλάχιστον δύο κατατάξεις τέτοιες ώστε $JOS_i(a) < JOS_i(b)$ ενώ $JOS_j(a) < JOS_j(b)$. Αυτές οι κατατάξεις εκφράζουν τις αξιολογήσεις των κριτηρίων στην κλίμακα JOS.

Η ιδέα είναι ο σχηματισμός δυο διανυσμάτων από το X που θα διαφέρουν στις αξιολογήσεις τους μονάχα σε δυο κριτήρια. Οι διαφορετικές τιμές τω κριτηρίων εκφράζουν την αντίφαση στις κατατάξεις JOS(a) και JOS(b).

Καθώς η σύγκριση αυτών των ειδικά διαμορφωμένων διανυσμάτων εκφράζει τη σύγκριση ενός ζεύγους εναλλακτικών σε μια κοινή κλίμακα διάταξης, αναφέρεται ως Κοινή κλίμακα Διάταξης Ζεύγους και σχηματίζει τον ακόλουθο κανόνα για σύγκριση των πραγματικών εναλλακτικών:

Η εναλλακτική a δεν είναι προτιμώμενη της εναλλακτικής b εάν για κάθε ζεύγος κριτηρίων με τιμές (a_i, a_j) της εναλλακτικής a υπάρχει ένα ζεύγος τιμών (b_k, b_l) την εναλλακτικής b τέτοιο ώστε $PJOS(a_i, a_j) \leq PJOS(b_k, b_l)$.

Η ανεξαρτησία των κριτηρίων ελέγχεται κατά την κατασκευή της Κοινής Κλίμακας Διάταξης. Η μεταβατικότητα των προτιμήσεων στο τρίτο βήμα ελέγχεται μερικώς κατά τη διαδικασία της σύγκρισης. Επίσης είναι από τεχνικής άποψης εφικτό να διεξαχθούν επιπρόσθετες συγκρίσεις (όπως στη ZAPROS) για τη διασφάλιση της μεταβατικότητας. Η εφαρμογή της επαφίεται στην κρίση του σύμβουλου απόφασης.

Τα συνολικά στοιχεία καταλήγουν πως η μέθοδος ZAPROS είναι περισσότερο αποδοτική για περιπτώσεις που τα κριτήρια είναι λίγα και ο αριθμός των εναλλακτικών είναι σχετικά μεγάλος.

3.4.5 Μέθοδος ORCLASS (Moshkovich, et al., 2005)

Τα πολυκριτήρια προβλήματα που έχουν ποιοτικές κλίμακες κριτηρίων και ταξινομούνται σε ποιοτικές κλάσεις ονομάστηκαν προβλήματα ποιοτικής ταξινόμησης (Ordinal Classification - ORCLASS). Όπως και η μέθοδος ZAPROS, η ORCLASS αναπτύχθηκε στη δεκαετία του 1980 από μία ομάδα Ρώσων επιστημόνων με επικεφαλής τον Larichev (Larichev & Moshkovich, 1994).

Η επίσημη διατύπωση του υπό εξέταση προβλήματος προϋποθέτει τη χρήση κλιμάκων κριτηρίων με πεπερασμένο αριθμό λεκτικών αξιολογήσεων – «τιμών» στο διάστημα των κριτηρίων.

Δίνονται:

1. Υπάρχει ένα σύνολο n κριτηρίων για αξιολόγηση των εναλλακτικών.

2. X_i είναι ένα πεπερασμένο σύνολο πιθανών λεκτικών αξιών στην κλίμακα του κριτηρίου i = 1, 2, …, n όπου $|X_i| = n_i$.

3. $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ το σύνολο όλων των πιθανών διανυσμάτων στο διάστημα των n κριτηρίων.

4. $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m\} \subseteq X$ το υποσύνολο διανυσμάτων του X που περιγράφουν τις πραγματικές εναλλακτικές.

5. $C = \{C_1, \dots, C_i, \dots, C_k\}$ είναι το σύνολο των ομάδων – κλάσεων ταξινόμησης.

Απαιτείται η ταξινόμηση των εναλλακτικών του A στις ομάδες C με βάση τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα.

Θα γίνει χρήση του συμβολισμού που χρησιμοποιήθηκε στις μεθόδους ZAPROS, ενώ επιπρόσθετα, ο συμβολισμός C(a) σημαίνει η κλάση για την εναλλακτική a, για παράδειγμα $C(a) = C_2$ σημαίνει ότι η εναλλακτική a ανήκει στη δεύτερη κλάση.

Παρόμοια με τη μέθοδο ZAPROS, υποθέτουμε ότι η ποιοτική κλίμακα των κριτηρίων διαμορφώνει μια σχέση κυριαρχίας ανάμεσα στα διανύσματα του X. Στην ποιοτική ταξινόμηση υπάρχει μια και σχέση διάταξης ανάμεσα στις κλάσεις. Αυτό σημαίνει πως οι εναλλακτικές της κλάσης C_1 προτιμώνται της κλάσης C_2 κ.ο.κ. Οι λιγότερο προτιμώμενες εναλλακτικές τοποθετούνται στην κλάση C_k. Αφού τα διανύσματα του X παρουσιαστούν στον αποφασίζοντα του ζητείται να καθορίσει την κατάλληλη κλάση. Η εγκυρότητα αυτής της μορφής έκφρασης της προτίμησης έχει διερευνηθεί σχολαστικά και έχει κριθεί αποδεκτή. Είναι επίσης πιθανό να ζητηθεί από τον αποφασίζοντα να κατασκευάσει ένα καθολικό κανόνα ταξινόμησης στο χώρο των κριτηρίων, από τα πιθανά διανύσματα του X. Ωστόσο αυτό δεν κρίνεται πρακτικό, ακόμα και για μικρού μεγέθους προβλήματα. Η ποιοτική φύση των κλιμάκων των κριτηρίων και των κλάσεων ταξινόμησης επιτρέπουν το σχηματισμό μιας σχέσης αυστηρής προτίμησης: εάν το διάνυσμα x τοποθετηθεί σε καλύτερη κλάση από το y, τότε το x προτιμάται του y. Για οποιαδήποτε διανύσματα x, y ∈ X, όπου $C(x) = C_i$ και $C(y) = C_j$, εάν $i < j$ τότε $x \succ y$. Κατά συνέπεια μπορούμε να σχηματίσουμε μια συνθήκη μη αντικρουόμενης ταξινόμησης των διανυσμάτων x και y: εάν το διάνυσμα x κυριαρχεί στο y και τοποθετείται στην i-στή κλάση, τότε το διάνυσμα y πρέπει να τοποθετηθεί σε μια κλάση που δεν είναι προτιμότερη της i. Για οποιαδήποτε διανύσματα x, y ∈ X εάν το y κυριαρχείται από το x ($x \succ y$) και $C(x) = C_i$, τότε $C(y) = C_j$ όπου $j \geq i$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα εισάγεται η έννοια της επέκτασης κατά κυριαρχία. Εάν το διάνυσμα x ∈ X έχει ταξινομηθεί στην κλάση C_i από τον αποφασίζοντα, τότε για όλα τα y ∈ X τέτοια ώστε $x \succ y$ οι πιθανές κλάσεις είναι C_j όπου $j \geq i$. Για όλα τα y ∈ X τέτοια ώστε $y \succ x$ οι πιθανές κλάσεις είναι C_j όπου $j \leq i$. Κάθε ταξινόμηση ενός διανύσματος από το X από τον αποφασίζοντα περιορίζει τις πιθανές κλάσεις που μπορούν να καταταχθούν για όλα τα διανύσματα του X που κυριαρχούν ή κυριαρχούνται από αυτό. Όταν ο αριθμός των αποδεκτών κλάσεων για ένα διάνυσμα γίνει ίσος με ένα, έχουμε μια μοναδική κλάση να αντιστοιχεί στο διάνυσμα. Χρησιμοποιώντας την επέκταση κατά κυριαρχία, μπορούμε να αποκτήσουμε πληροφορίες ταξινόμησης για κάποια διανύσματα του X που δεν παρουσιάζονται στον αποφασίζοντα.

Επιπλέον υπάρχει ένας απλός τρόπος για να φανούν πιθανά λάθη στις ταξινομήσεις του αποφασίζοντα: εάν μια κλάση είναι εκτός του αποδεκτού εύρους, υπάρχει αντίφαση στην ταξινόμηση. Οι αντιφατικές ταξινομήσεις παρουσιάζονται στον αποφασίζοντα για επανεξέταση.

Η αποτελεσματικότητα των έμμεσων ταξινομήσεων των διανυσμάτων ενός συνόλου X εξαρτάται από τα διανύσματα που παρουσιάζονται στον αποφασίζοντα καθώς και από την κλάση που ταξινομούνται. Ιδεατά, θέλουμε να κάνουμε στον αποφασίζοντα τις ελάχιστες δυνατές ερωτήσεις και να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε μια πλήρη ταξινόμηση των διανυσμάτων του X.

Η ταξινόμηση διάταξης αποτελεί όχι μόνο μια εύκολη μέθοδο εξαγωγής της προτίμησης αλλά και ένα αποτελεσματικό τρόπο παρουσίασης της τελικής ταξινόμησης του συνόλου X. Υποθέτοντας ότι έχουμε μια ταξινόμηση του συνόλου X σε C κλάσεις. Θα θεωρήσουμε το C_i σαν υποσύνολο διανυσμάτων του X, που έχουν εκχωρηθεί στην i-στη κλάση.

Δυο ειδικά σύνολα διανυσμάτων διαφοροποιούνται μεταξύ των υπολοίπων: το κάτω όρια της κλάσης (lower border) LB_i και το άνω όριο (upper border) UB_i. Το άνω όριο περιέχει όλα τα μη κυριαρχούμενα διανύσματα της κλάσης, ενώ το κάτω όριο περιλαμβάνει όλα τα μη κυρίαρχα διανύσματα της κλάσης.

Τα όρια συνοψίζουν τους κανόνες ταξινόμησης. Εάν γνωρίζουμε την ταξινόμηση των διανυσμάτων που ανήκουν στα όρια των κλάσεων, έχουμε επαρκή πληροφορία για την ταξινόμηση οποιουδήποτε διανύσματος του συνόλου X. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι ευρεστικές μέθοδοι είναι προσανατολισμένοι στην εύρεση των οριακών διανυσμάτων προς παρουσίαση στον αποφασίζοντα.

Η πρώτη προσέγγιση βασίστηκε στη μέγιστη «πληροφόρηση» (informativeness) των αταξινόμητων διανυσμάτων. Κάθε κλάση αναπαρίσταται από το «κέντρο» της, δηλαδή από το μέσο των αποτιμήσεων των κριτηρίων που βρίσκονται ήδη σε αυτή την κλάση. Για κάθε μη ταξινομημένο διάνυσμα x για κάθε αποδεκτή κλάση υπολογίζεται η τιμή $p_i(x)$ που εκφράζει πόσο πιθανή ήταν αυτή η κλάση για αυτό το διάνυσμα. Επίσης για κάθε αποδεκτή κλάση έχει αξιολογηθεί ο αριθμός των έμμεσα ταξινομημένων διανυσμάτων $g_i(x)$ εάν το x έχει εκχωρηθεί στην κλάση C_i.

Η «πληροφόρηση» F(x) του διανύσματος x υπολογίστηκε ως:

$$F(x) = \sum p_i(x) g_i(x)$$

Για όλες τις επιτρεπτές κλάσεις. Το διάνυσμα με τη μεγαλύτερη τιμή «πληροφόρησης» επιλέχθηκε για ταξινόμηση από τον αποφασίζοντα. Έπειτα, γίνεται η επέκταση κατά κυριαρχία και η «πληροφόρηση» για όλα τα διανύσματα υπολογίζεται ξανά.

Οι προσομοιώσεις έχουν δείξει υψηλή αποτελεσματικότητα της διαδικασίας με μονάχα 5 με 15% ταξινόμηση των διανυσμάτων του συνόλου X από τον αποφασίζοντα. Μειονέκτημα της προσέγγισης αυτής αποτελεί η υψηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα.

Μια διαφορετική προσέγγιση προτάθηκε από τους (Larichev, et al., 1991). Για κάθε μη ταξινομημένο διάνυσμα ορίζεται ο ελάχιστος αριθμός έμμεσα ταξινομημένων διανυσμάτων στην περίπτωση αποδεκτών κλάσεων και το διάνυσμα με τη μεγαλύτερη τιμή επιλέγεται για ταξινόμηση από τον αποφασίζοντα. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα αυτής της προσέγγισης είναι λίγο χαμηλότερη σε σχέση με την προηγούμενη.

3.5 Λοιπές Μέθοδοι

3.5.1 Μέθοδος TOMASO (Roubens, 2001; Marichal, et al., 2005)

Η μέθοδος προτάθηκε από τον (Roubens, 2001). Το όνομα TOMASO σημαίνει: «Tool for Ordinal Multi-Attribute Sorting and Ordering».

Ακολουθεί η διαδικασία TOMASO όπως περιγράφεται από τον (Roubens, 2001).

Έστω A ένα σύνολο πιθανών εναλλακτικών, οι οποίες θα εκχωρηθούν σε ξεχωριστές κλάσεις και έστω N = {1, ..., n} το σύνολο των πλευρών θεώρησης προς ικανοποίηση. Για κάθε πλευρά θεώρησης i ∈ N, οι εναλλακτικές αξιολογούνται με βάση μια κλίμακα διάταξης s_i σημείων, που είναι ένα πλήρως διατεταγμένο σύνολο.

$$X_i \coloneqq \{g_1^i \prec_i g_2^i \prec_i \dots \prec_i g_{s_i}^i\}.$$

Κάνουμε την υπόθεση ότι κάθε εναλλακτική μπορεί να αναγνωριστεί από το αντίστοιχο προφίλ της

$$(x_1, \dots, x_n) \in \times_{i=1}^{n} X_i =: X,$$

Όπου για κάθε $i \in N$, το x_i εκφράζει τη μερική αξιολόγηση του x σε σχέση με την πλευρά θεώρησης i.

Θεωρώντας μια διαμέριση των X σε m μη κενές κλάσεις $\{Cl_t\}_{t=1}^{m}$, ταξινομημένες κατά αύξουσα σειρά, ώστε για κάθε $r, s \in \{1, \dots, m\}$, με r > s, τα στοιχεία του Cl_r έχουν καλύτερη αξιολόγηση απο τα στοιχεία του Cl_s.

Επίσης θέτουμε

$$Cl_r^{\geq} \coloneqq \bigcup_{t \geq r} Cl_t \qquad (r = 1, \dots, m).$$

Η διαδικασία TOMASO έγκειται στη διαμέριση των στοιχείων του A σε κλάσεις $\{Cl_t\}_{t=1}^{m}$. Βασίζεται κατα κύριο λόγο στα ακόλουθα αποτελέσματα που εξάγονται απο τα παρακάτω θεωρήματα, που δηλώνουν ότι: Κάτω από απλές συνθήκες μονοτονίας, είναι πιθανό να βρεθεί μια διακριτή συνάρτηση που διαχωρίζει αυστηρά τις κλάσεις $Cl_1, \dots, Cl_m$ με αριθμητικά κατώφλια.

Για κάθε $x_i \in X_i$ και κάθε $y_{-i} \in X_{-i} \coloneqq \times_{j \in N\{i\}} X_j$ ορίζουμε.

$$x_i y_{-i} = (y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in X.$$

Θεώρημα 1. Οι ακόλουθες δυο εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

1. Για όλα τα $i \in N, t \in \{1, \dots, m\}, x_i, x_i' \in X_i, y_{-i} \in X_{-i}$, έχουμε

$$x_i' \succcurlyeq_i x_i \qquad \text{και} \qquad x_i y_{-i} \in Cl_t \Rightarrow x_i' y_{-i} \in Cl_t^{\geq}.$$

2. Υπάρχουν:

- Συναρτήσεις $g_i: X_i \to \mathbb{R}$ $(i \in N)$ αυστηρά αύξουσες και καλούνται κριτήρια,
- Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που είναι αύξουσα για κάθε όρισμα ονομάζεται συνάρτηση διαχωρισμού.
- m-1 ταξινομημένα κατώφλια $\{z_t\}_{t=2}^{m}$, που ικανοποιούν

$$z_2 \leq z_3 \leq \cdots \leq z_m$$

Έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ και κάθε $t \in \{2, \dots, m\}$, έχουμε

$$f[g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)] \geq z_t \Leftrightarrow x \in Cl_t^{\geq}.$$

Για λόγους πρακτικής χρήσης του αποτελέσματος και προκειμένου να εξάγουμε ένα ουσιαστικό αποτέλεσμα ο (Roubens, 2001). περιόρισε την οικογένεια των πιθανών συναρτήσεων διαχωρισμού σε κλάσεις n-μεταβλητών ορίων Choquet και τις συναρτήσεις κριτηρίων σε κανονικοποιημένες τιμές.

Αυτές οι τιμές, των οποίων η σημασία μπορεί να διαφέρει ανάλογα με την εφαρμογή πρέπει να έχουν ακριβή σημασία για τον αποφασίζοντα.

Μπορούν να εξεταστούν δυο φυσικές προσεγγίσεις: είτε η επίδοση κάθε εναλλακτικής έχει προκύψει στη βάση τις εναλλακτικές του συνόλου A ή η επίδοση έχει προκύψει ανεξάρτητα από τις άλλες εναλλακτικές. Ο αποφασίζων πρέπει να γνωρίζει ότι τα τελικά αποτελέσματα μπορεί να διαφέρουν σημαντικά ανάλογα με την κάθε προσέγγιση. Επομένως συνίσταται η προκαταρκτική ανάλυση του προβλήματος για την κατάλληλη επιλογή της μέτρησης των επιδόσεων.

Στην πρώτη προσέγγιση,, ένας πιθανός τρόπος της δόμησης των επιδόσεων είναι να εξετάσουμε τις συγκρίσεις των εναλλακτικών για κάθε πλευρά θεώρησης. Θεωρούμε $S_i(x)$, την i-στή μερική επίδοση της εναλλακτικής $x \in A$ προς την πλευρά θεώρησης $i \in N$, ως τον αριθμό φορών που η x προτιμάται ως προς κάθε άλλη εναλλακτική του A μείον τον αριθμό των φορών που κάθε εναλλακτική του A προτιμάται της x για την πλευρά θεώρησης i. Επιπλέον κανονικοποιούμε τις επιδόσεις, ώστε το εύρος τους να έχει μήκος τη μονάδα, δηλαδή:

$$S_i^N(x) \coloneqq \frac{S_i(x) + (q-1)}{2(q-1)} \in [0,1] \quad (i \in N),$$

Όπου q = |A|. Η κανονικοποιημένη επίδοση δεν είναι χρησιμότητα και δεν πρέπει να λαμβάνεται υπόψη.

Εξετάζουμε τη δεύτερη προσέγγιση, σύμφωνα με την οποία η επίδοση κάθε εναλλακτικής δεν εξαρτάται από τις άλλες εναλλακτικές του συνόλου A. Σε αυτή την περίπτωση, προτείνουμε στον αποφασίζοντα να ορίζει τις συναρτήσεις επίδοσης σαν συναρτήσεις χρησιμότητας. Εναλλακτικά, μπορούμε να προσεγγίσουμε αυτές τις συναρτήσεις χρησιμότητας με την ακόλουθη γραμμική συνάρτηση.

$$S_i^N(x) = \frac{ord_i(x) - 1}{s_i - 1} \in [0,1] \quad (i \in N)$$

Όπου $ord_i : A \to \{1, \dots, s_i\}$ είναι μια αντιστοίχιση που καθορίζεται απο το $ord_i(x) = r$ αν και μόνο αν $x_i = g_r^i$. Στην τελευταία περίπτωση, το S_i^N δεν εκφράζει απαραίτητα μια πραγματική χρησιμότητα, και πιθανότατα δεν ανταποκρίνεται στη χρησιμότητα που έχει ο αποφασίζων στο νου του. Επομένως θα συνεχίσουμε να το αποκαλούμε επίδοση.

Οι κανονικοποιημένες επιδόσεις κάθε εναλλακτικής x αθροίζονται μέσω ολοκλήρωσης Choquet:

$$\mathbb{C}_u\big(S^N(x)\big) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} S_{(i)}^N(x)\big[u\big(A_{(i)}\big) - u\big(A_{(i+1)}\big)\big],$$

Όπου $S^N(x)$ το $(S_1^N(x), \dots, S_n^N(x))$ και το u εκφράζει μια ασαφή μέτρηση τού N, ένα μονότονο σύνολο συναρτήσεων $u: 2^N \to [0,1]$ για τις οποίε ισχύει $u(\emptyset) = 0$ και $u(N) = 1$. Αυτή η ασαφής μέτρηση δεν μπορεί να εκφράσει τη σημασία κάθε υποσυνόλου πλευρών θεώρησης. Επίσης οι παρανθέσεις που χρησιμοποιούνται για τους δείκτες εκφράζουν την αντιμετάθεση του N έτσι ώστε:

$$S_1^N(x) \le \cdots \le S_n^N(x)$$

Και για κάθε $i \in N, A_{(i)}$ εκφράζει το υποσύνολο $\{(\mathrm{i}), \dots, (\mathrm{n})\}$.

Εξηγούμε πως η ασαφής μέτρηση αξιολογείται σε αυτή τη διαδικασία.

Υποθέτοντας ότι όλες οι εναλλακτικές του $A \subseteq X$ έχουν ήδη ταξινομηθεί σε κλάσεις $Cl_1, \dots, Cl_m$. Σε κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις υπάρχει ένα ασαφές όριο u στο N και m-1 διατεταγμένα κατώφλια $\{z_t\}_{t=2}^{m}$ που ικανοποιούν την:

$$z_2 \le z_3 \le \dots \le z_m$$

Έτσι ώστε για κάθε $x \in A$ και κάθε $t \in \{2, \dots, m\}$, έχουμε

$$\mathbb{C}_u\big(S^N(x)\big) \ge z_t \iff x \in Cl_t^{\geq}.$$

Εάν δεν υπάρχει μια τέτοια ασαφής μέτρηση, τότε τα κατώφλια ορίζονται ακόλουθα:

$$z_t \coloneqq \min_{x \in Cl_t^{\geq}} \mathbb{C}\big(S^N(x)\big) \qquad (t = 2, \dots, m).$$

Σε πραγματικές περιπτώσεις, η ανάθεση των εναλλακτικών δεν είναι γνωστή και πρέπει να καθοριστεί. Ωστόσο η ανάθεση, ή ισοδύναμα η ασαφής μέτρηση u μπορεί να εξαχθεί από ένα υποσύνολο αναφοράς, φτιαγμένο από πρωτότυπα που έχουν ταξινομηθεί εκ των προτέρων από τον αποφασίζοντα.

3.5.2 Μέθοδος TOPSIS (Hwang & Yoon, 1981; Jahanshahloo, et al., 2006)

Η μέθοδος TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) αναπτύχθηκε από τους (Hwang & Yoon, 1981). Η μέθοδος είναι βασισμένη στην αρχή ότι εναλλακτική προς επιλογή πρέπει να έχει τη μικρότερη απόσταση από την Θετική Ιδεατή Λύση (Positive Ideal Solution - PIS) και τη μεγαλύτερη από την Αρνητική Ιδεατή Λύση (Negative Ideal Solution - NIS). Η μέθοδος υποθέτει ότι έχουμε ένα σύνολο m εναλλακτικών και n κριτηρίων, και ότι γνωρίζουμε την επίδοση κάθε εναλλακτικής ως προς κάθε κριτήριο. Ακολουθεί η διαδικασία της μεθόδου:

- Έστω x_{ij} η επίδοση της εναλλακτικής i ως προς το κριτήριο j. Προκύπτει ένας πίνακας $X = (x_{ij})$ διαστάσεων m x n.
- Έστω I το σύνολο των κριτηρίων οφέλους (όσο μεγαλύτερη επίδοση τόσο καλύτερα)

- Έστω J το σύνολο αρνητικών κριτηρίων (κριτήρια κόστους, όσο χαμηλότερη η επίδοση, τόσο καλύτερα).

Με βάση τα παραπάνω, η μέθοδος υλοποιείται μέσα από τα ακόλουθα βήματα:

1) Υπολογίζουμε τον κανονικοποιημένο πίνακα απόφασης. Η κανονικοποιημένη τιμή n_{ij} υπολογίζεται ως εξής:

$$n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2}} \quad i = 1, \dots, m \quad , j = 1, \dots, n.$$

2) Κατασκευάζουμε τον πίνακα των κανονικοποιημένων βαρών.

   Υποθέτοντας ότι έχουμε το σύνολο των βαρών w_j για j = 1, …, n και $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ τότε η κανονικοποιημένη τιμή v_{ij} υπολογίζεται ώς:

$$v_{ij} = w_j n_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

3) Προσδιορίζουμε τη θετική και αρνητική ιδεατή λύση:

$$A^+ = \{v_1^+, \dots, v_n^+\} = \{\left(\max_j v_{ij} \middle| i \in I\right), (\min_j v_{ij} | i \ \in J)\}$$

$$A^- = \{v_1^-, \dots, v_n^-\} = \{\left(\min_j v_{ij} \middle| i \in I\right), (\max_j v_{ij} | i \ \in J)\}$$

4) Υπολογίζουμε τις αποστάσεις χρησιμοποιώντας τη n – διάστατη Ευκλείδεια απόσταση. Η απόσταση κάθε εναλλακτικής από την ιδεατή λύση δίνεται ως εξής:

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^+)^2} \ , \qquad i = 1, \dots, m,$$

   Αντίστοιχα, η απόσταση από την αρνητική ιδεατή λύση δίνεται ως:

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^-)^2} \ , \qquad i = 1, \dots, m,$$

5) Υπολογίζουμε τη σχετική εγγύτητα ως προς την ιδεατή λύση. Η σχετική εγγύτητα της εναλλακτικής A_i ως προς την A^+ ορίζεται ώς:

$$R_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Εφόσον $d_i^- \geq 0$ και $d_i^+ \geq 0$, τότε προφανώς $R_i \in [0, 1]$.

6) Κατατάσσουμε τις εναλλακτικές κατά φθίνουσα σειρά.

Η μέθοδος TOPSIS εισάγει δυο σημεία αναφοράς, ωστόσο δε λαμβάνει υπόψη τη σχετική σημασία των αποστάσεων από τα δύο σημεία.

3.6 Μέθοδοι και τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν συμπληρωματικά για την επίλυση των προβλημάτων

3.6.1 Εισαγωγή

Στο σημείο αυτό θα παραθέσουμε κάποιες μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε στο επόμενο κεφάλαιο, ώστε να φέρουμε τα προβλήματα σε επιλύσιμη μορφή. Η μέθοδος Simos χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό των βαρών του προβλήματος «Επέκταση Μετρό», ενώ η μέθοδος Borda αξιοποιήθηκε για την εξαγωγή μιας πλήρους προδιάταξης των εναλλακτικών, την οποία χρησιμοποιήσαμε σαν δεδομένο εισόδου στην εφαρμογή των μεθόδων UTASTAR και UTA^{GMS} του ίδιου προβλήματος

3.6.2 Μέθοδος Simos (Μέθοδος των καρτών) (Simos, 1990; Σίσκος, 2008)

Στη μέθοδο Simos (Simos, 1990), εφαρμόζεται μια πρακτική διαδικασία κατάταξης κριτηρίων με τη βοήθεια ενός συνόλου καρτών, το οποίο περιλαμβάνει μια κάρτα ανά κριτήριο καθώς και παρόμοιες λευκές κάρτες.

Αρχικά ο αποφασίζων καλείται να επιλέξει τα λιγότερο σημαντικά κριτήρια και που έχουν την ίδια βαρύτητα. Αφού αφαιρεθούν οι κάρτες από το πακέτο, επιλέγονται τα επόμενα λιγότερο σημαντικά κριτήρια, μέχρι την εξάντληση των καρτών με τα ονόματα των κριτηρίων. Εντωμεταξύ, για να πολλαπλασιάσει ο αποφασίζων την απόσταση μεταξύ των κλάσεων παρεμβάλλει 1,2 ή περισσότερες λευκές κάρτες.

Ο υπολογισμός των βαρών, με άθροισμα 100 γίνεται ως εξής:

- **Αριθμός καρτών:** Για κάθε κλάση που δημιουργείται (περιλαμβάνοντας τις κλάσεις των λευκών καρτών) καταγράφονται οι κάρτες που την αποτελούν και υπολογίζεται το άθροισμα τους.
- **Θέσεις:** Για κάθε κάρτα γίνεται η αρίθμηση – θέση 1, 2, 3, … αρχίζοντας από την ουρά κατάταξης μέχρι την κεφαλή. Η θέση της τελευταίας κάρτας είναι ο συνολικός αριθμός των καρτών.
- **Μη κανονικοποιημένα βάρη:** Ως βάρος της κάθε κλάσης υπολογίζεται το άθροισμα των θέσεων της κλάσης δια του αριθμού των καρτών της κλάσης.
- **Κανονικοποιημένα βάρη – στρογγύλευση**: Τα μη κανονικοποιημένα βάρη διαιρούνται δια του αθροίσματος των θέσεων, όπου δεν συνυπολογίζονται οι θέσεις των λευκών καρτών και πολλαπλασιάζονται επί 100. Έπειτα τα βάρη στρογγυλεύονται στον πλησιέστερο ακέραιο.

3.6.3 Μέθοδος Borda (Borda, 1781; Lansdowne & Woodward, 1996)

Η μέθοδος Borda αναπτύχθηκε ανεξάρτητα πολλές φορές, αλλά πήρε το όνομα της από το Γάλλο μαθηματικό Jean-Charles de Borda, ο οποίος σχεδίασε το σύστημα το 1770.

Ο Borda πρότεινε την εξής μέθοδο ψηφοφορίας:

Έστω ότι έχουμε N εναλλακτικές και πολλαπλούς ψηφοφόρους, εκχωρούνται N-1, N-2, .., 0 πόντοι στον πρώτο σε κατάταξη, δεύτερο σε κατάταξη, … και τελευταίο σε κατάταξη στην προτίμηση των ψηφοφόρων. Οι πόντοι κάθε υποψηφίου αθροίζονται για όλους τους ψηφοφόρους και νικητής είναι αυτός με τον μεγαλύτερο αριθμό πόντων.

Αντί για ψηφοφόρους ας υποθέσουμε ότι έχουμε πολλαπλά κριτήρια. Εάν θεωρήσουμε το κάθε κριτήριο σαν ένα ψηφοφόρο και εάν r_{ik} είναι η κατάταξη της εναλλακτικής i στο κριτήριο k, τότε η τιμή Borda για την εναλλακτική i είναι:

$$b_i = \sum_k (N - r_{ik})$$

Οι εναλλακτικές έπειτα κατατάσσονται σύμφωνα με αυτές τις τιμές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

4.1 Εισαγωγή

Η επιλογή των προβλημάτων σύμφωνα με τα οποία θα εφαρμόσουμε και θα αξιολογήσουμε πολυκριτήριες μεθόδους έχει ιδιαίτερη σημασία. Η επιλογή των προβλημάτων έγινε έτσι ώστε να είναι δυνατόν να επιλυθούν με περισσότερες από μια μεθόδους, προκειμένου να είναι εφικτή η σύγκριση των αποτελεσμάτων τους. Επίσης η επιλογή έγινε και με βάση τη διαθεσιμότητα του αντίστοιχου λογισμικού ώστε να καταστεί δυνατή η επίλυση των προβλημάτων. Με βάση τις παραπάνω παραδοχές περιορίσαμε την αναζήτηση προβλημάτων σε προβλήματα τύπου προβληματικής γ, (κατάταξη). Επιπλέον, αποκλείσαμε προβλήματα που περιέχουν ασαφή δεδομένα, καθώς δεν υπάρχουν αρκετές μέθοδοι που να έχουν τη δυνατότητα να τα διαχειριστούν. Αναζητήσαμε προβλήματα κατάλληλα για το σκοπό της εργασίας από το βιβλίο «Μοντέλα Αποφάσεων» του Γιάννη Σίσκου. Από τα 10 προβλήματα αναφοράς με τα οποία πραγματεύεται ο συγγραφέας, 2 είχαν τα κατάλληλα χαρακτηριστικά να αξιοποιηθούν. Ακολουθούν οι εκφωνήσεις των προβλημάτων και η επίλυση τους με τις εξής μεθόδους:

PROMETHEE II (Λογισμικό Visual PROMETHEE http://www.promethee-gaia.net/software.html)

ELECTRE III (Λογισμικό ELECTRE III/IV http://www.lamsade.dauphine.fr/spip.php?article558)

TACTIC (Εφαρμόστηκε χωρίς τη χρήση λογισμικού)

SMART (Λογισμικό Logical Decisions http://www.logicaldecisions.com/)

TOPSIS (Εφαρμόστηκε χωρίς τη χρήση λογισμικού)

UTASTAR (Λογισμικό UTASTAR)

UTA^{GMS} (Λογισμικό VisualUTA http://idss.cs.put.poznan.pl/site/visualuta.html)

ELECTRE II (Εφαρμόστηκε χωρίς τη χρήση λογισμικού)

4.2 Πρόβλημα: Επέκταση μετρό

Η ΑΘΗΝΑΪΚΟ ΜΕΤΡΟ Α.Ε. επιθυμεί να ιεραρχήσει ορθολογικά τα έργα επέκτασης του υπάρχοντος δικτύου του μετρό της Αθήνας. Η ιεράρχηση θα πρέπει να βασίζεται στην αξιολόγηση των έργων με κριτήρια τεχνικό-κοινωνικό-οικονομικά και να υποστηρίζει με σαφήνεια την επίτευξη χρονοδιαγράμματος υλοποίησης των έργων. Τα κριτήρια αυτά ορίζονται ως εξής:

Κοινωνικά κριτήρια:

- g_1: Αριθμός κατοίκων και εργαζομένων που εξυπηρετούνται ανά χιλιόμετρο επέκτασης της γραμμής.
- g_2: Αριθμός διακινούμενων επιβατών ανά χιλιόμετρο επέκτασης της γραμμής ανά μέρα.

Οικονομικά κριτήρια:

- g_3: Κόστος κατασκευής ανά χιλιόμετρο επέκτασης (σε εκατομμύρια €).
- g_4: Δείκτης απόδοσης της επένδυσης (%).

Τεχνικο-οργανωσιακά κριτήρια

- g_5: Δείκτης συνοχής του δικτύου (βαθμολογείται από εμπειρογνώμονες με άριστα το 10).
- g_6: Δείκτης αστικής αναβάθμισης (βαθμολογείται από εμπειρογνώμονες με άριστα το 10).

Μετά από πολύμηνες μελέτες, ο υπεύθυνος του τομέα προγραμματισμού της εταιρείας, κατέληξε στην αξιολόγηση των υπό ιεράρχηση επεκτάσεων που δίνεται στον πίνακα 4.1.

Επέκταση	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
Α	300000	40000	50	10	8	5
Β	180000	35000	35	15	5	8
Γ	100000	20000	25	12	5	6
Δ	150000	30000	30	15	5	6

Πίνακας 4.1. Αξιολόγηση επεκτάσεων του μετρό από τερματικούς σταθμούς.

Στάδιο 1: Αντικείμενο της απόφασης

Σύνολο δράσεων – Προβληματική

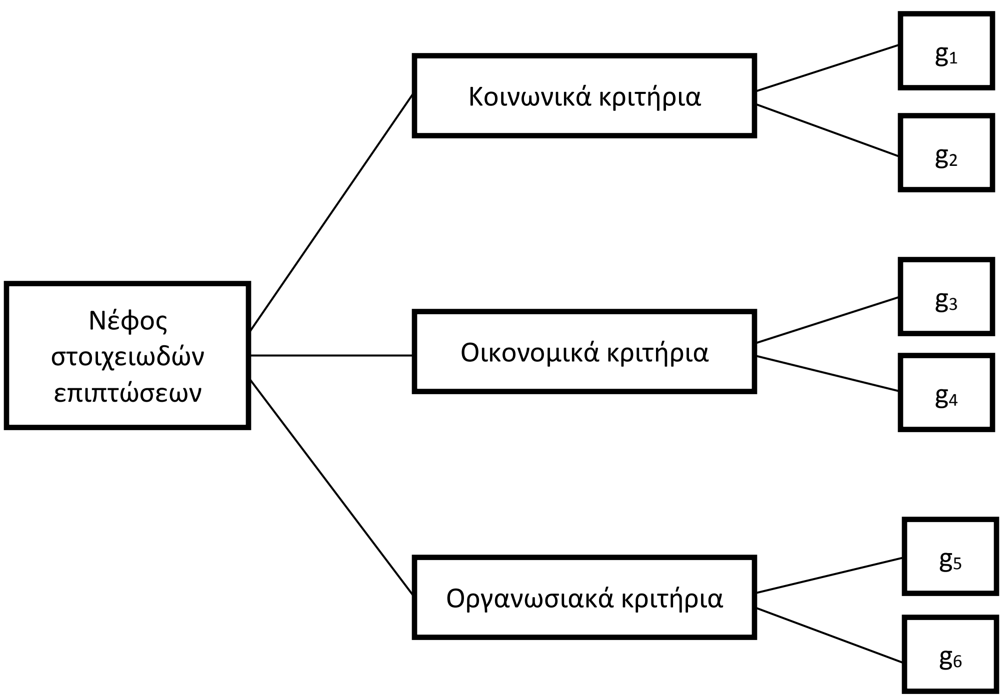
Ως σύνολο δράσεων πρέπει να εκληφθεί εδώ το σύνολο των υπό προγραμματισμό επεκτάσεων του μετρό:

A = {A, B, Γ, Δ}

Το πρόβλημα ιεράρχησης των έργων είναι άμεσα συνυφασμένο με τον προγραμματισμό των επενδύσεων της ΑΘΗΝΑΪΚΟ ΜΕΤΡΟ Α.Ε. Κατά συνέπεια η προβληματική γ της κατάταξης θα επιτρέψει στον υπεύθυνο του τομέα προγραμματισμού να εκπονήσει πρόγραμμα χρηματοδότησης των νέων γραμμών στο άμεσο και απώτερο μέλλον.

Στάδιο 2: Συνεπής οικογένεια κριτηρίων

Η συνεπής οικογένεια των προτεινόμενων κριτηρίων αξιολόγησης έχει δομηθεί στη βάση των τριών αξόνων προτίμησης του σχήματος 4.1. Τη συνθήκη της συνέπειας δεν ικανοποιεί μόνο το κριτήριο g_3 του κόστους κατασκευής ανά χιλιόμετρο γραμμής, το οποίο πρέπει να αλλάξει πρόσημο (αρνητικό κόστος). Όλα τα κριτήρια είναι μετρικά (ποσοτικά).



Σχήμα 4.1. Διαδικασία κατασκευής συνεπούς οικογένειας κριτηρίων για την ιεράρχηση των επεκτάσεων του μετρό.

Ο τομεάρχης προγραμματισμού της ΑΘΗΝΑΪΚΟ ΜΕΤΡΟ Α.Ε. σε ταυτόχρονο ρόλο αναλυτή και «αποφασίζοντος» (με την έγκριση φυσικά του ΔΣ της εταιρίας), κρίνει ότι οι μελλοντικές επεκτάσεις μπορούν να ιεραρχηθούν με τη βοήθεια πολυκριτήριων μεθόδων. Αφού συμβουλεύτηκε τη σχετική βιβλιογραφία, αποφασίζει να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο πλήρους κατάταξης PROMETHEE II. Ένα τέτοιο εγχείρημα τον υποχρεώνει να αντιμετωπίσει τα ακόλουθα δυο προβλήματα:

Πρόβλημα των μικτών διαφορών: Ορισμένοι αριθμητικοί δείκτες που χρησιμοποιήθηκαν για τη μοντελοποίηση των κριτηρίων δεν δίνουν ενδεχομένως την πραγματική εικόνα της κατάστασης που θα επακολουθήσει της κατασκευής των επεκτάσεων, κάτι που δυσκολεύει τις συγκρίσεις που πρέπει να βασιστούν σε μικρές διαφορές αξιολογήσεων. Μπροστά στον κίνδυνο να βγουν λάθος συμπεράσματα, ο τομεάρχης θεωρεί ότι στα δυο πρώτα κριτήρια – αποτελέσματα δημοσκοπήσεων πρέπει να μοντελοποιηθούν ως ψευδοκριτήρια με τα εξής κατώφλια αδιαφορίας q και προτίμησης p (άτομα/ χιλιόμετρο γραμμής):

$q_1 = 20000$, $p_1 = 50000$

$q_2 = 2000$, $p_2 = 8000$

Τα υπόλοιπα κριτήρια είναι πραγματικά κριτήρια. Οι διαπιστώσεις αυτές εντάσσουν τα κριτήρια g_1, g_2 στην κατηγορία 5 του πίνακα 3.1 ενώ τα υπόλοιπα στην κατηγορία 1 του ίδιου πίνακα.

Πρόβλημα βαρύτητας κριτηρίων: Για να προσδιορίσει τα βάρη των κριτηρίων, ο τομεάρχης επιστρατεύει τη μέθοδο Simos. Μετά από συνεννόηση με τα μέλη του διοικητικού συμβουλίου, παίρνει ένα πακέτο με έξι κάρτες, όσα και τα κριτήρια και ένα πακέτο με λευκές που θα εισχωρήσει ενδεχομένως ανάμεσα στις πρώτες για να αναδείξει το μέγεθος της διαφοράς βάρους που χωρίζει τα κριτήρια. Η διαδικασία αυτή αρχίζει με τα λιγότερο σημαντικά κριτήρια { g_5, g_6 }, 1 λευκή κάρτα κλπ. Και τελειώνει με το πιο σημαντικό κριτήριο { g_3 }. Η όλη υπολογιστική διαδικασία περιγράφεται στις διαδοχικές στήλες του πίνακα 4.2 απ' όπου συνάγονται οι εξής συντελεστές βαρύτητας:

$w_1 = 0{,}20$, $w_2 = 0{,}20$, $w_3 = 0{,}33$, $w_4 = 0{,}15$, $w_5 = 0{,}06$, $w_6 = 0{,}06$

Πίνακας 4.2. Υπολογισμός των βαρών των κριτηρίων επέκτασης του μετρό, με τη μέθοδο Simos.

Κλάση	Αριθ. καρτών	Θέσεις	Μη κανον. βάρος	Κανον. Βάρος	Βάρος κλάσης
$\{g_5, g_6\}$	2	1,2	$\frac{1+2}{2}=1{,}5$	$1{,}5\times\frac{100}{27}=5{,}6\rightarrow 6$	12
Λευκή	1	(3)	-	-	-
$\{g_4\}$	1	4	4	$4\times\frac{100}{27}=14{,}8\rightarrow 15$	15
$\{g_1, g_2\}$	2	5,6	$\frac{5+6}{2}=5{,}5$	$5{,}5\times\frac{100}{27}=20{,}4\rightarrow 20$	40
Λευκή	2	(7,8)	-	-	-
$\{g_3\}$	1	9	9	$9\times\frac{100}{27}=33{,}3\rightarrow 33$	33
Άθροισμα	9	27	-	-	100

4.2.1 Επίλυση με τη μέθοδο PROMETHEE II

Υπολογίζουμε τον δείκτη προτίμησης (πίνακας 4.3) και τις θετικές και αρνητικές ροές (ροές εισόδου - εξόδου) (πίνακας 4.4.)

Πίνακας 4.3. Πολυκριτήριος δείκτης προτίμησης μεταξύ επεκτάσεων του μετρό (η διαγώνιος του πίνακα δεν έχει έννοια).

π(Α,Β)=

	Α	Β	Γ	Δ
Α	0	0,36	0,46	0,46
Β	0,54	0	0,61	0,23
Γ	0,54	0,33	0	0,33
Δ	0,54	0,33	0,55	0

Πίνακας 4.4. Κατάταξη επεκτάσεων μετρό μέσω του δείκτη καθαρής ροής υπεροχής της PROMETHEE II.

Επέκταση	Θετική ροή ϕ^+	Αρνητική ροή ϕ^-	Καθαρή ροή φ
Α	0,43	0,54	-0,11
Β	0,46	0,34	0,12
Γ	0,40	0,54	-0,14
Δ	0,47	0,34	0,13

Η PROMETHEE II οδηγεί σε μια κατάταξη ουσιαστικά δυο κλάσεων, της κλάσης (Δ,Β) και της κλάσης (Α,Γ), λόγω των ισχνών διαφορών:

Δ (0,13)

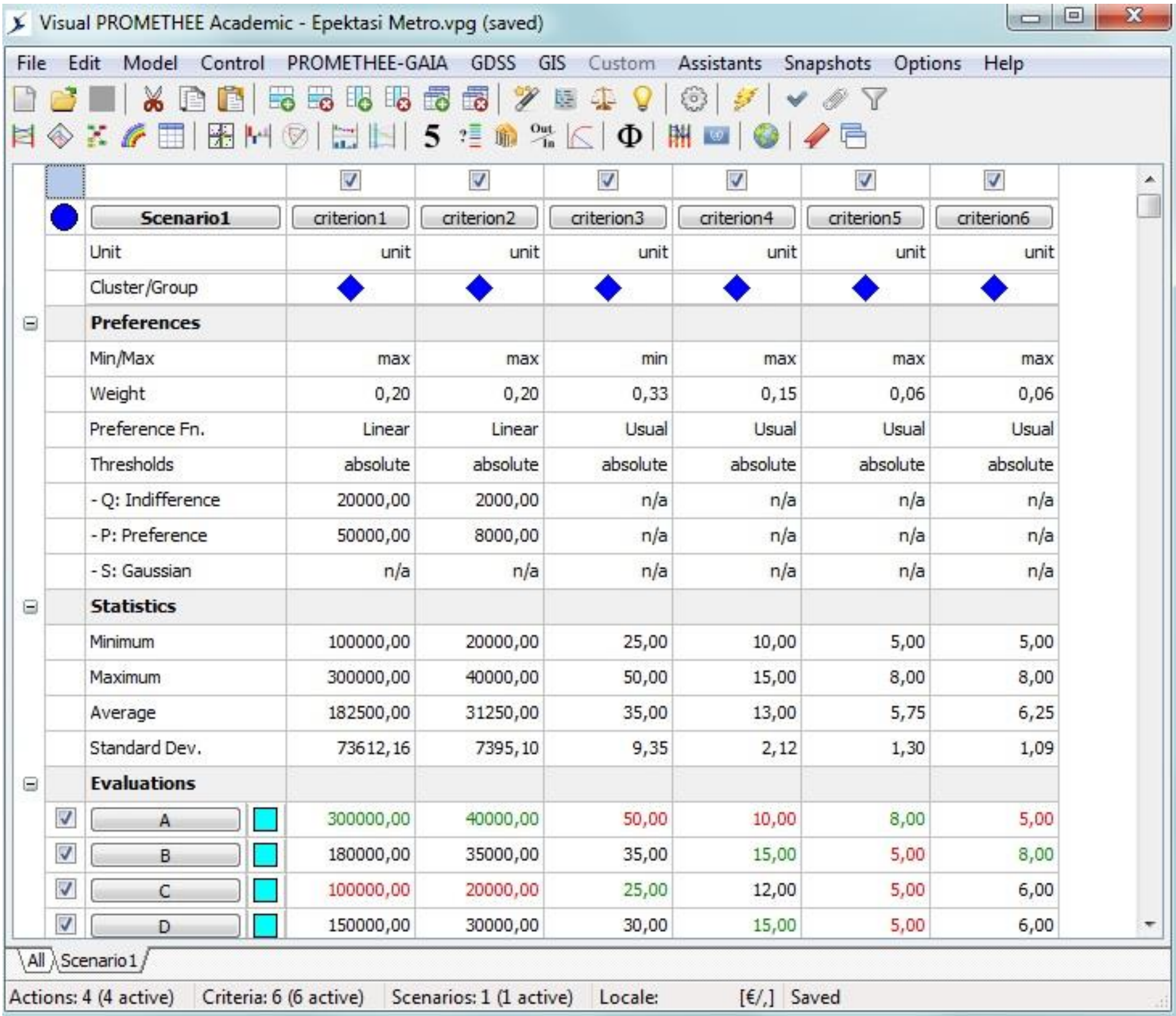
Β (0,12)

Α (-0,11)

Γ (-0,14)

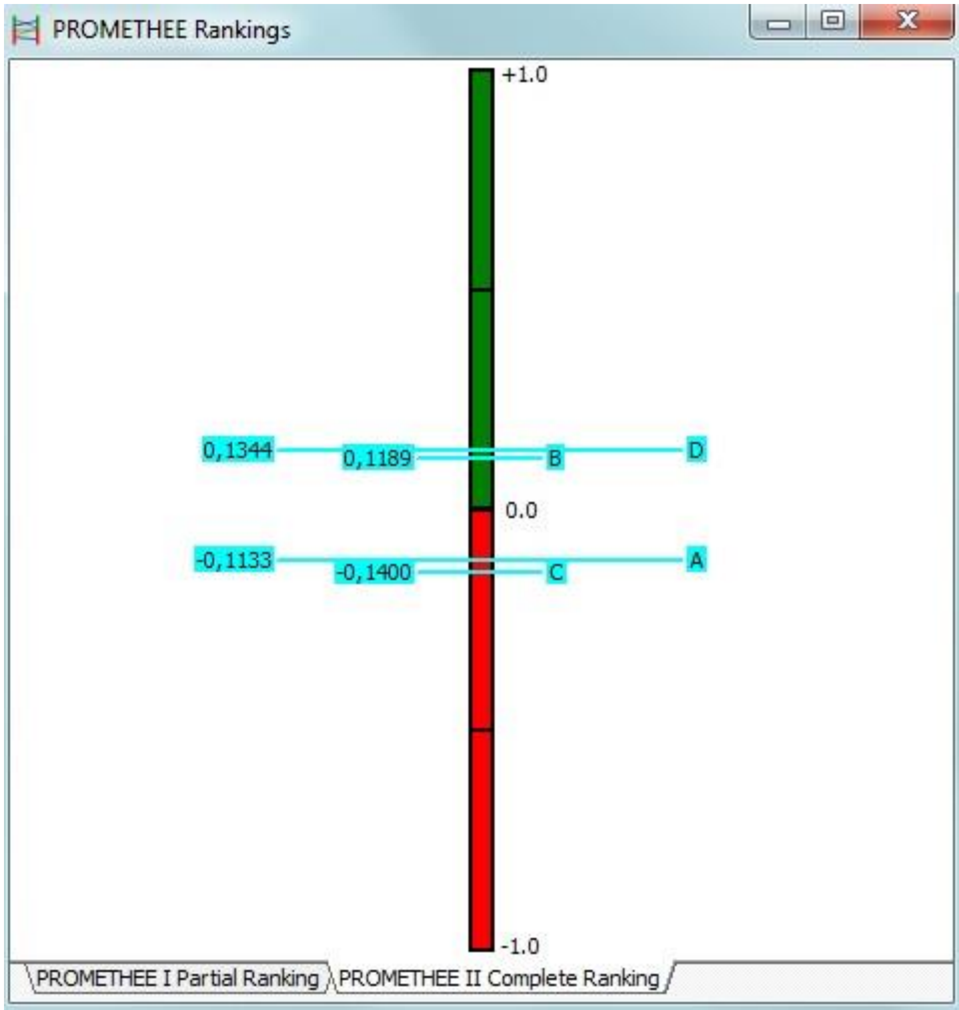
Πρακτικά, για τον τομεάρχη προγραμματισμού, τούτο σημαίνει ότι θα πρέπει να προηγηθούν ταυτόχρονα τα έργα των επεκτάσεων Δ και Β, ενώ οι επεκτάσεις Α και Γ να προγραμματιστούν αργότερα.

Για την επίλυση της μεθόδου χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό VISUAL PROMETHEE



Scenario1	criterion1	criterion2	criterion3	criterion4	criterion5	criterion6
Unit	unit	unit	unit	unit	unit	unit
Cluster/Group						
Preferences						
Min/Max	max	max	min	max	max	max
Weight	0,20	0,20	0,33	0,15	0,06	0,06
Preference Fn.	Linear	Linear	Usual	Usual	Usual	Usual
Thresholds	absolute	absolute	absolute	absolute	absolute	absolute
- Q: Indifference	20000,00	2000,00	n/a	n/a	n/a	n/a
- P: Preference	50000,00	8000,00	n/a	n/a	n/a	n/a
- S: Gaussian	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
Statistics						
Minimum	100000,00	20000,00	25,00	10,00	5,00	5,00
Maximum	300000,00	40000,00	50,00	15,00	8,00	8,00
Average	182500,00	31250,00	35,00	13,00	5,75	6,25
Standard Dev.	73612,16	7395,10	9,35	2,12	1,30	1,09
Evaluations						
A	300000,00	40000,00	50,00	10,00	8,00	5,00
B	180000,00	35000,00	35,00	15,00	5,00	8,00
C	100000,00	20000,00	25,00	12,00	5,00	6,00
D	150000,00	30000,00	30,00	15,00	5,00	6,00

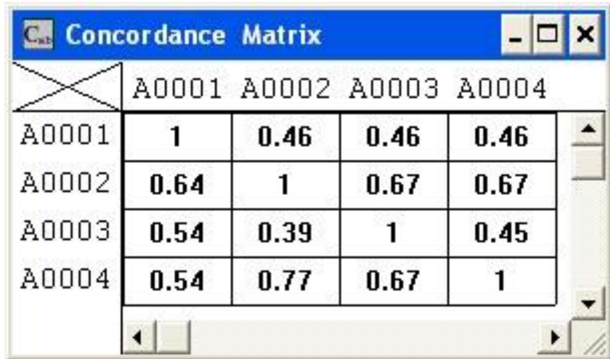
Εικόνα 4.1. Εισαγωγή δεδομένων εισόδου στο λογισμικό Visual PROMETHEE (πρόβλημα επέκταση μετρό)



Εικόνα 4.2. Πλήρης κατάταξη εναλλακτικών με τη μέθοδο PROMETHEE II (πρόβλημα επέκταση μετρό)

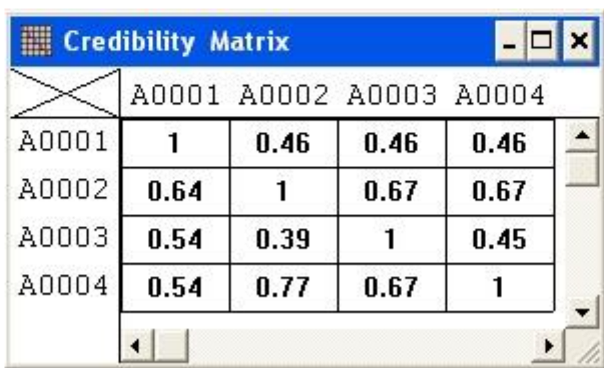
4.2.2 Επίλυση με τη μέθοδο ELECTRE III

Για την επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο ELECTRE III έγινε χρήση του λογισμικού ELECTRE III/IV. Χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια βάρη και επιδόσεις των εναλλακτικών στα επιμέρους κριτήρια. Το κριτήριο κόστους κατασκευής ορίστηκε σαν φθίνων κριτήριο. Η ELECTRE III λειτουργεί με ψευδοκριτήρια, όμως μόνο τα δυο πρώτα κριτήρια του προβλήματος μας είναι ψευδοκριτήρια. Για τα υπόλοιπα αληθή κριτήρια θέσαμε τα κατώφλια αδιαφορίας και προτίμησης στο μηδέν. Διατηρήσαμε τις προεπιλεγμένες τιμές για τις μεταβλητές διύλισης (α, β) = (-0,15, 0,3). Η μέθοδος οδηγεί σε διαφορετική κατάταξη σε σχέση με την PROMETHEE II.



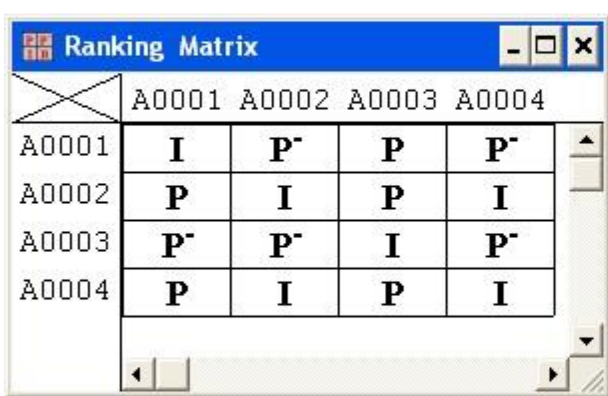
	A0001	A0002	A0003	A0004
A0001	1	0.46	0.46	0.46
A0002	0.64	1	0.67	0.67
A0003	0.54	0.39	1	0.45
A0004	0.54	0.77	0.67	1

Εικόνα 4.3. Πίνακας Σχέσης Συμφωνίας όπως προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου ELECTRE III, με το λογισμικό ELECTRE III/IV.



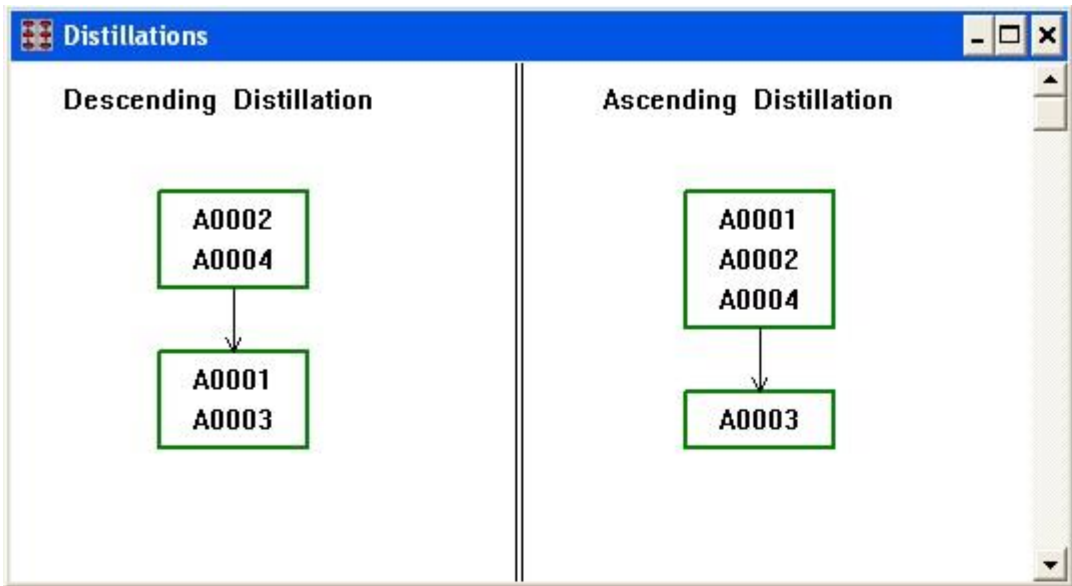
	A0001	A0002	A0003	A0004
A0001	1	0.46	0.46	0.46
A0002	0.64	1	0.67	0.67
A0003	0.54	0.39	1	0.45
A0004	0.54	0.77	0.67	1

Εικόνα 4.4. Πίνακας Βαθμού Αξιοπιστίας όπως προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου ELECTRE III, με το λογισμικό ELECTRE III/IV.

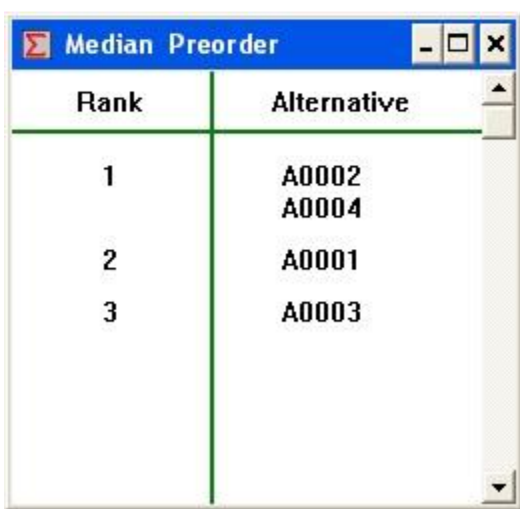


	A0001	A0002	A0003	A0004
A0001	I	P^-	P	P^-
A0002	P	I	P	I
A0003	P^-	P^-	I	P^-
A0004	P	I	P	I

Εικόνα 4.5. Πίνακας Σχέσεων Υπεροχής όπως προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου ELECTRE III, με το λογισμικό ELECTRE III/IV.



Εικόνα 4.6. Κατερχόμενη και Ανερχόμενη διύλιση όπως προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου ELECTRE III, με το λογισμικό ELECTRE III/IV.



Εικόνα 4.7. Ενδιάμεση κατάταξη των εναλλακτικών όπως προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου ELECTRE III, με το λογισμικό ELECTRE III/IV.

Ranks in Final Preorder

Rank	Alternative
1	A0002 A0004
2	A0001
3	A0003

Εικόνα 4.8. Τελική κατάταξη των εναλλακτικών όπως προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου ELECTRE III, με το λογισμικό ELECTRE III/IV.

Η κατάταξη είναι:

1. Β, Δ
2. Α
3. Γ

Η μέθοδος αξιολογεί τις εναλλακτικές Β και Δ ως ισοδύναμες στην πρώτη θέση.

4.2.3 Επίλυση με τη μέθοδο TACTIC

Η μέθοδος TACTIC μπορεί να εφαρμοστεί με ευκολία χωρίς τη βοήθεια λογισμικού. Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε τον συντελεστή επιπέδου συμφωνίας ρ=1. Θα αξιοποιήσουμε τα βάρη που έχουμε εξάγει από τη μέθοδο Simos. Στην εφαρμογή της μεθόδου λάβαμε υπόψη ότι το κόστος είναι φθίνων κριτήριο.

Με την εφαρμογή των σχέσεων

$$aPb \ iff \sum_{j\in \Im_{T(a,b)}} \lambda_j > \sum_{j\in \Im_{T(b,a)}} \lambda_j$$

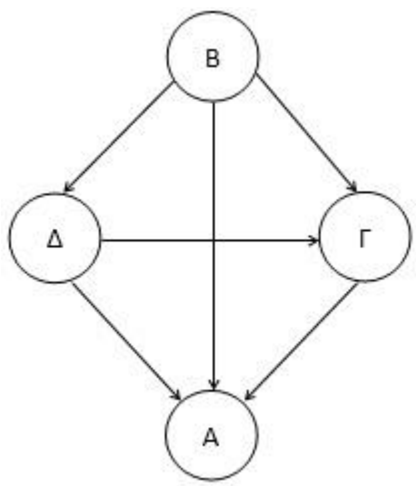
$$aIb \ iff \sum_{j\in \Im_{T(a,b)}} \lambda_j = \sum_{j\in \Im_{T(b,a)}} \lambda_j$$

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (πίνακας 4.5.)

	Α	Β	Γ	Δ
Α		-P	-P	-P
Β	P		P	P
Γ	P	-P		-P
Δ	P	-P	P	

Πίνακας 4.5. Σχέσεις προτίμησης των εναλλακτικών που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου TACTIC

Και προκύπτει το ακόλουθο γράφημα υπεροχής (σχήμα 4.2):



Σχήμα 4.2. Γράφημα υπεροχής από τη μέθοδο TACTIC

Από το οποίο εξάγουμε χωρίς δυσκολία την τελική κατάταξη:

1. Β
2. Δ
3. Γ

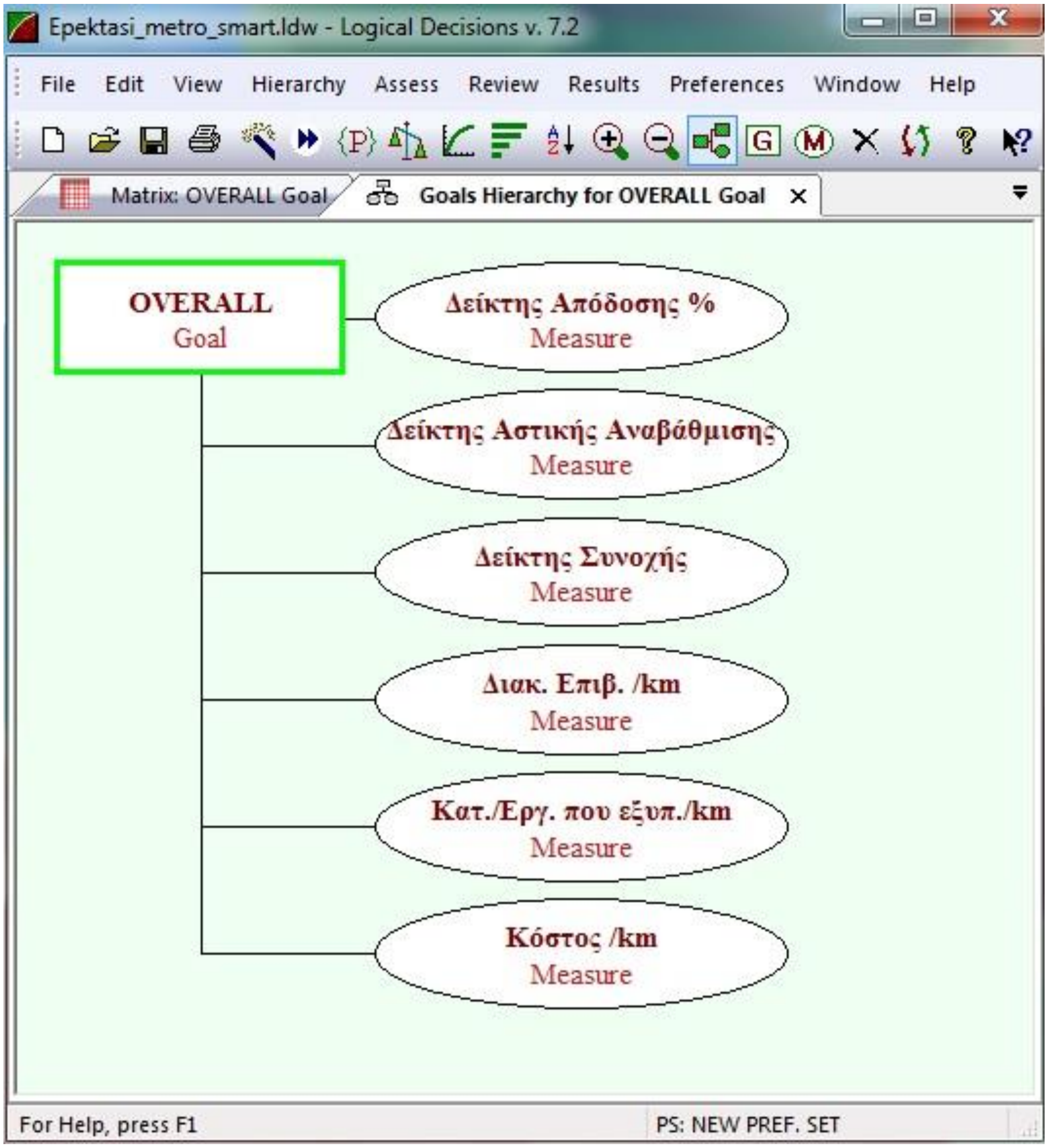
4. Α

4.2.4 Επίλυση με τη μέθοδο Smart

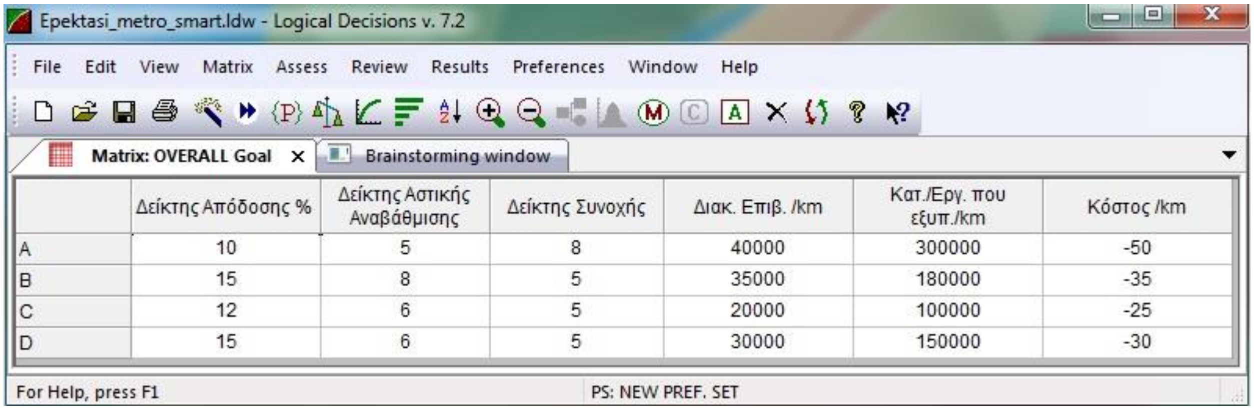
Με τη βοήθεια του λογισμικού Logical Decisions μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο Smart. Θέτοντας για κάθε κριτήριο την λιγότερο και περισσότερο προτιμώμενη τιμή, με βάση τις επιδόσεις των διαθέσιμων εναλλακτικών στο αντίστοιχο κριτήριο, και αξιοποιώντας τα βάρη από τη μέθοδο Simos έχουμε την ακόλουθη κατάταξη:

1. Β
2. Δ
3. Α
4. Γ

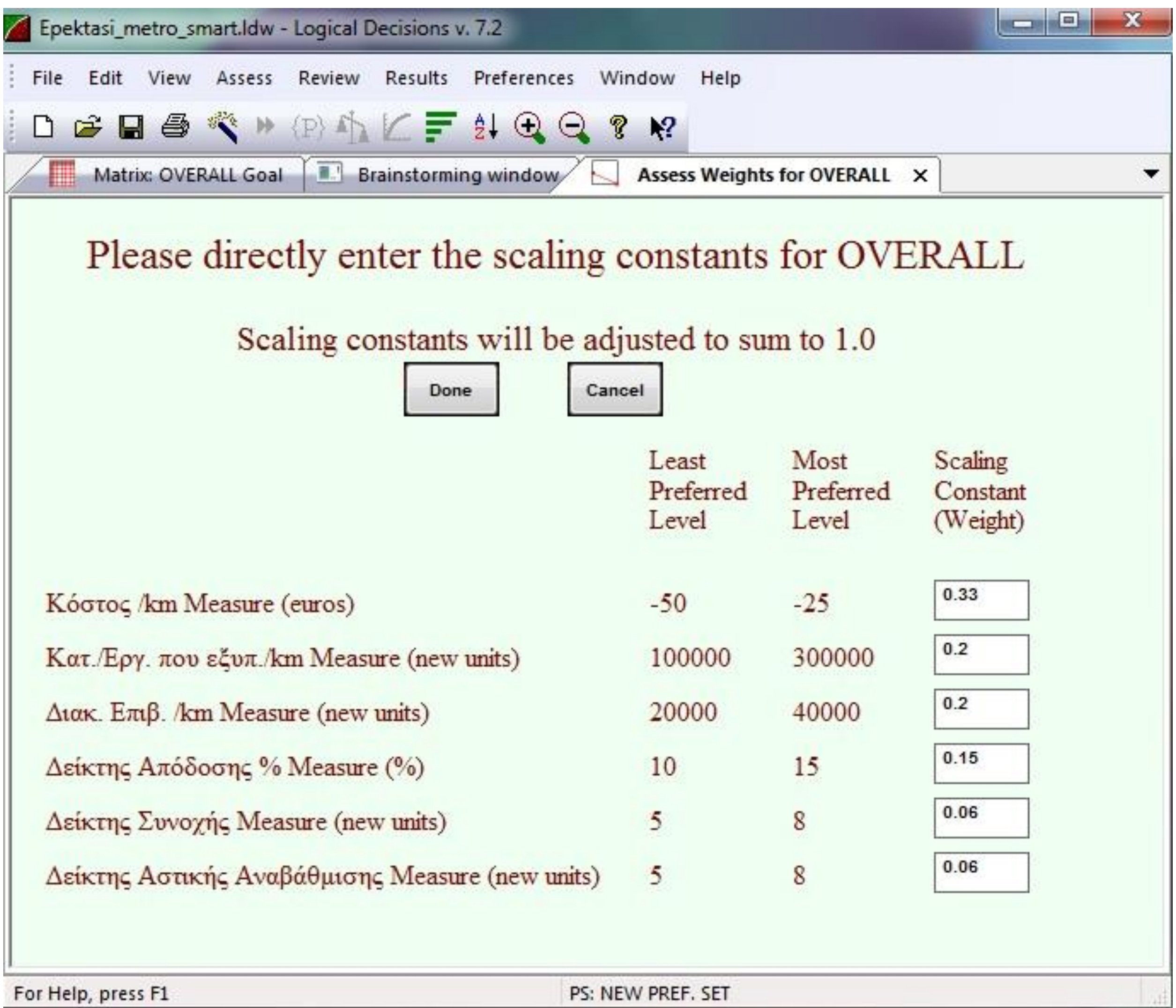
Παρατηρούμε από την εικόνα 4.12 ότι στη συνάρτηση χρησιμότητας των κάθε εναλλακτικών δεν υπάρχει συμμετοχή των κριτηρίων στα οποία οι εναλλακτικές έχουν τις χειρότερες επιδόσεις.



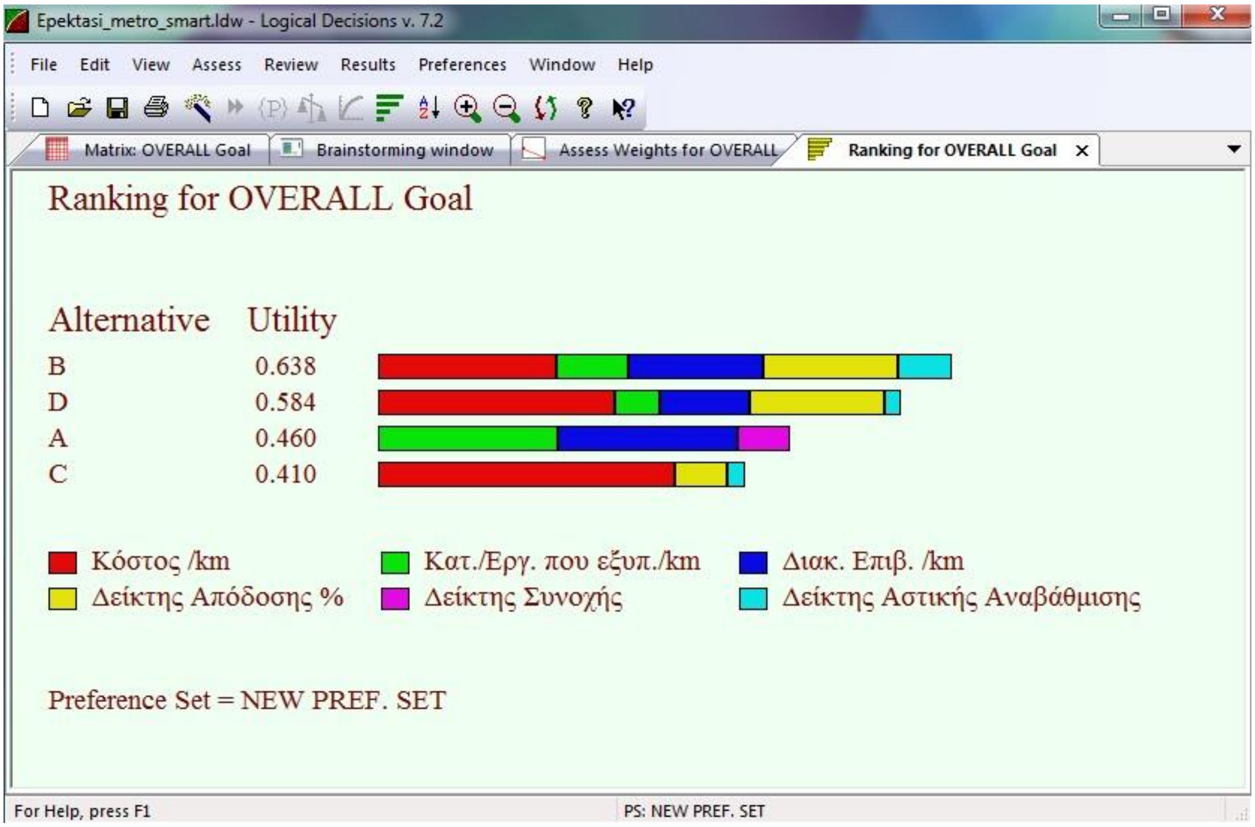
Εικόνα 4.9. Εισαγωγή Κριτηρίων στο λογισμικό Logical Decisions για το πρόβλημα επέκταση μετρό (μέθοδος SMART).



Εικόνα 4.10. Εισαγωγή Πολυκριτήριου πίνακα στο λογισμικό Logical Decisions για το πρόβλημα επέκταση μετρό (μέθοδος SMART).



Εικόνα 4.11. Εισαγωγή βαρών στο λογισμικό Logical Decisions για το πρόβλημα επέκταση μετρό (μέθοδος SMART).



Εικόνα 4.12. Τελική κατάταξη εναλλακτικων όπως προκύπτει από την επίλυση με τη μέθοδο SMART, μέσω του λογισμικού Logical Decisions για το πρόβλημα επέκταση μετρό.

4.2.5 Επίλυση με τη μέθοδο TOPSIS

Η μέθοδος TOPSIS εφαρμόζεται χωρίς τη βοήθεια συγκεκριμένου λογισμικού, αξιοποιώντας τα βάρη των κριτηρίων που έχουμε λάβει με τη βοήθεια της μεθόδου Simos.

Η μέθοδος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Υπολογισμός του κανονικοποιημένου πίνακα απόφασης (πίνακας 4.6).

Κανονικοποιημένος Πίνακας Απόφασης					
0,762247	0,622799	0,690066	0,379595	0,678551	0,394055
0,457348	0,544949	0,483046	0,569392	0,424094	0,630488
0,254082	0,3114	0,345033	0,455514	0,424094	0,472866
0,381123	0,467099	0,414039	0,569392	0,424094	0,472866

Πίνακας 4.6. Κανονικοποιημένος πίνακας απόφασης

2. Κατασκευή του Πίνακα Κανονικοποιημένων βαρών (πίνακας 4.7).

Πίνακας Κανονικοποιημένων Βαρών					
0,152449	0,12456	0,227722	0,056939	0,040713	0,023643
0,09147	0,10899	0,159405	0,085409	0,025446	0,037829
0,050816	0,06228	0,113861	0,068327	0,025446	0,028372
0,076225	0,09342	0,136633	0,085409	0,025446	0,028372

Πίνακας 4.7. Πίνακας κανονικοποιημένων βαρών.

3. Προσδιορισμός θετικής και αρνητικής ιδεατής λύσης

$A^{+} = \{0{,}152449 , 0{,}12456 , 0{,}113861 , 0{,}085409 , 0{,}040713 , 0{,}037829\}$

$A^{-} = \{0{,}050816 , 0{,}06228 , 0{,}227722 , 0{,}056939, 0{,}025446 , 0{,}023643\}$

4. Υπολογισμός της Ευκλείδιας απόστασης κάθε εναλλακτικής απο τη θετική και αρνητική ιδεατή λύση:

$d_1^{+} = 0{,}11822 , \quad d_1^{-} = 0{,}120171$
$d_2^{+} = 0{,}079173 , \quad d_2^{-} = 0{,}097537$
$d_3^{+} = 0{,}121747 , \quad d_3^{-} = 0{,}114527$
$d_4^{+} = 0{,}087298 , \quad d_4^{-} = 0{,}10366$

5. Υπολογίζουμε τη σχετική εγγύτητα ως προς την ιδεατή λύση.

$R_1 = 0{,}504092$

$R_2 = 0{,}551961$

$R_3 = 0{,}48472$

$R_4 = 0{,}54284$

6. Κατάταξη των εναλλακτικών κατά φθίνουσα σειρά.
   1. B

2. Δ
3. Α
4. Γ

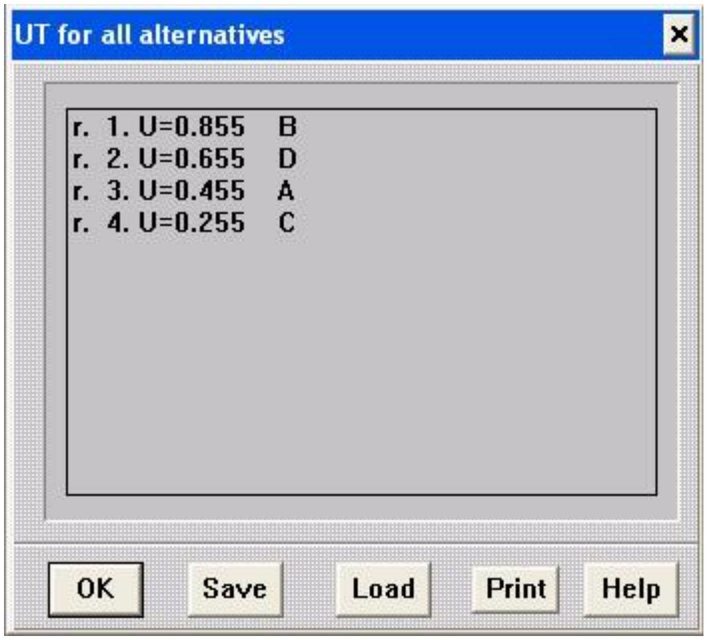
4.2.6 Επίλυση με τη μέθοδο UTASTAR

Για να επιλυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο UTASTAR απαιτείται η ύπαρξη μια πλήρους κατάταξης απο τον αποφασίζονα. Καθώς το πρόβλημα δεν μας παρέχει τέτοιου είδους πληροφορία, θα εξάγουμε μια κατάταξη που θα εισάγουμε στη μέθοδο UTASTAR, από τη μέθοδο κατάταξης Borda. Η κατάταξη της μεθόδου Borda είναι η ακόλουθη:

1. Β
2. Δ
3. Α
4. Γ

Εισάγοντας την παραπάνω κατάταξη μαζί με τα υπόλοιπα δεδομένα του προβλήματος στο λογισμικό UTASTAR, Προκύπτει μια τελική κατάταξη των εναλλακτικών, όμοια με την κατάταξη που εισάγαμε, δηλαδή:

1. Β
2. Δ
3. Α
4. Γ



Εικόνα 4.13. Τελική κατάταξη εναλλακτικών του προβλήματος επέκταση μετρό με τη μέθοδο UTASTAR

4.2.7 Επίλυση με τη μέθοδο UTA^{GMS}

Για την εφαρμογή της μεθόδου UTA^{GMS} απαιτείται ως δεδομένο εισόδου μια μερική προδιάταξη. Καθώς το πρόβλημα δεν μας παρέχει τέτοιου είδους πληροφορία, θα εξάγουμε μια κατάταξη που θα εισάγουμε στη μέθοδο UTASTAR, από τη μέθοδο κατάταξης Borda.

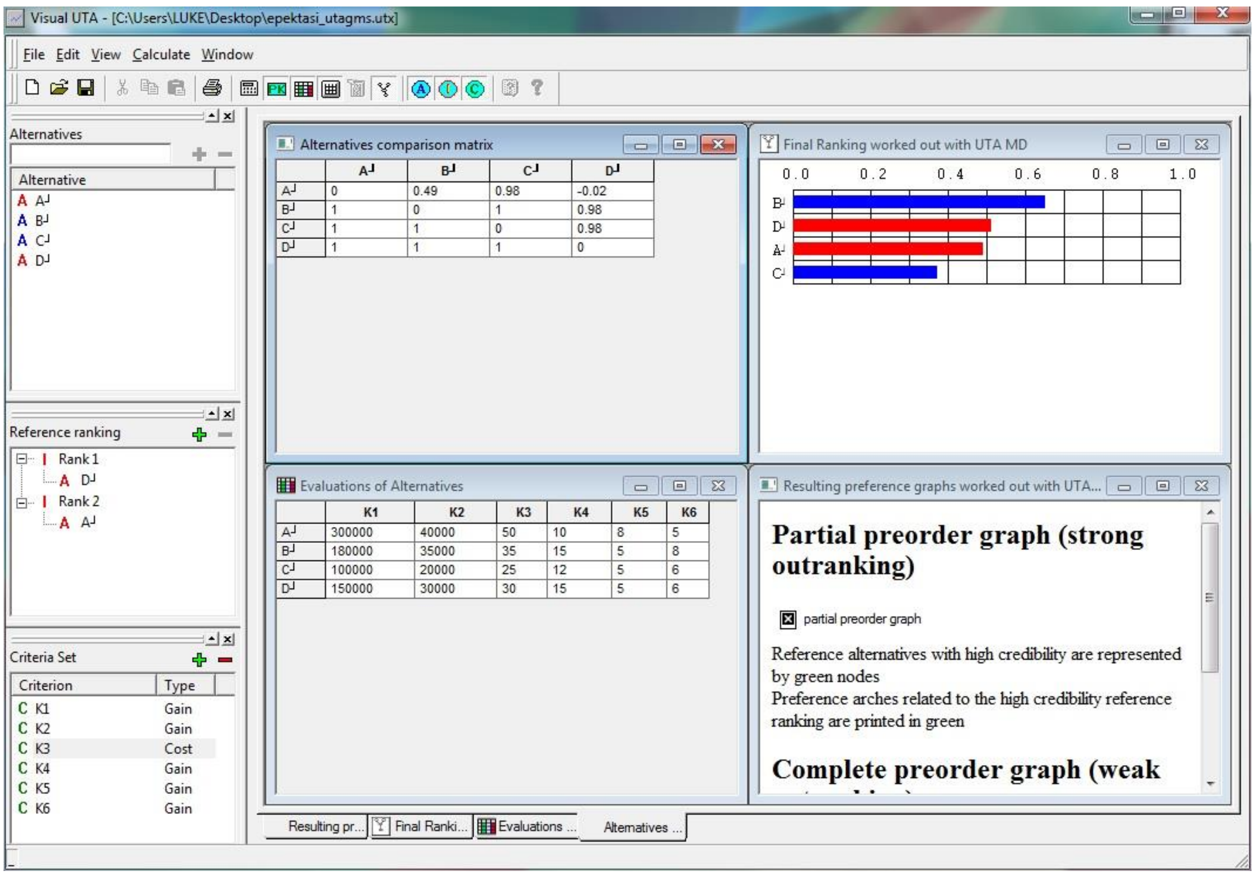
Η κατάταξη της μεθόδου Borda είναι η ακόλουθη:

5. Β
6. Δ
7. Α
8. Γ

Η μέθοδος θα εφαρμοστεί με τη χρήση του λογισμικού Visual Uta.

Εισάγοντας τμήμα της κατάταξης προτίμησης προκύπτει η ακόλουθη κατάταξη (βλ. εικόνα 4.14):

1. Β
2. Δ
3. Α
4. Γ



Εικόνα 4.14. Αποτελέσματα επίλυσης με τη μέθοδο UTA^{GMS} για το πρόβλημα επέκταση μετρό.

4.3 Πρόβλημα: Επιτροπή διαγωνισμού

Μεγάλος οργανισμός διαχείρισης τυχερών παιχνιδιών έχει πραγματοποιήσει διεθνή δημόσιο διαγωνισμό για την προμήθεια έξυπνων τερματικών σταθμών, στον οποίο υπέβαλλαν προσφορά 5 εταιρίες με κωδικούς E_1, E_2, E_3, E_4, E_5. Το έργο της αξιολόγησης των προσφορών έχει ανατεθεί σε πενταμελή επιτροπή αξιολόγησης η οποία οφείλει να βαθμολογήσει τις προσφορές με άριστα το 10 βασισμένη μόνο στα τεχνικά δεδομένα του φακέλου της κάθε προσφοράς. Η συνολική βαθμολόγηση των τεχνικών προφορών είναι πολύ κρίσιμη διότι βγάζει ουσιαστικά το νικητή, καθώς διαθέτει συντελεστή βαρύτητας 75% στο τελικό αποτέλεσμα, ενώ η οικονομική προσφορά υπολογίζεται κατά 25%.

Οι βαθμολογίες των πέντε κριτών της επιτροπής K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, δίνονται στον πίνακα 4.8.

Πίνακας 4.8. Αξιολόγηση τεχνικών προσφορών για τον διαγωνισμό τερματικών.

Προσφορά	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
E_1	5	7	9	8	8
E_2	6	5	7	5	6
E_3	9	8	8	7	10
E_4	6	9	9	9	9
E_5	8	5	7	6	6

Ο τεχνικός αναλυτής, στον οποίο έχει ανατεθεί το έργο του συντονισμού των εργασιών της επιτροπής, προκειμένου να υποστηρίζει τον οργανισμό στην απόφαση επιλογής του καλύτερου προμηθευτή, θεωρεί το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα πολυκριτήριας επιλογής, παίρνοντας υπόψη ότι τα μέλη της επιτροπής έχουν ίσα δικαιώματα έκφρασης άποψης και άσκησης βέτο. Ακόμη κάνει δεκτή την υπόθεση ότι υπάρχει ισχυρή συναίνεση της επιτροπής υπέρ μίας προσφοράς, με θετικά τα 4/5 των μελών της επιτροπής, ενώ ασθενής συναίνεση υπάρχει με θετικά τα 3/5 των μελών της επιτροπής.

Στάδιο 1: Αντικείμενο της απόφασης

Σύνολο δράσεων

Το έργο του τεχνικού αναλυτή εστιάζεται, αρχικά στη σύνθεση των αξιολογήσεων που έχουν δώσει οι πέντε κριτές και εν συνεχεία στην ενσωμάτωση της οικονομικής προσφοράς στη συνολική (τεχνική) αξιολόγηση, για να προκριθεί η καλύτερη προσφορά. Τούτο το τελευταίο, όμως, δεν μπορεί να γίνει αν δεν κατατεθεί και κοινοποιηθεί στους ενδιαφερόμενους το αποτέλεσμα της τεχνικής αξιολόγησης.

Ο τεχνικός αναλυτής επιλέγει προφανώς ως σύνολο δράσεων τις πέντε ανταγωνίστριες εταιρίες του διαγωνισμού:

$A = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$

Προβληματική

Η προβληματική για τον οργανισμό είναι βεβαίως η προβληματική α (επιλογή της πιο συμφέρουσας προσφοράς). Για τον τεχνικό αναλυτή, όμως, ο οποίος πρέπει να αναδείξει μια συνολική τεχνική αξιολόγηση για όλες τις εταιρίες, η προβληματική πρέπει να είναι η γ (κατάταξη). Επίσης, επειδή η τεχνική αξιολόγηση με βαρύτητα 75% πρόκειται να συμπεριλάβει και την οικονομική προσφορά των εταιριών, με βαρύτητα 25%, η αναζητούμενη κατάταξη των εταιριών πρέπει να συνοδεύεται από ένα ποσοτικό δείκτη αξιολόγησης. Η τελευταία αυτή απαίτηση θα επιτρέψει την εφαρμογή ενός αναλυτικού τύπου της μορφής:

$$u(E_i) = 75\frac{b_i}{B} - 25\frac{c_i}{C} \quad (4.1)$$

Όπου:

$u(E_i)$: Συνολική αξιολόγηση της εταιρίας E_i

b_i : Τεχνική αξιολόγηση της εταιρίας E_i

B : Μέγιστη τιμή τεχνικής αξιολόγησης

c_i : Οικονομική προσφορά της εταιρίας E_i

C : Προϋπολογισμός διαγωνισμού

Στάδιο 2: Συνεπής οικογένεια κριτηρίων

Ο τεχνικός αναλυτής μοντελοποιεί το πρόβλημα της τεχνικής αξιολόγησης ως πρόβλημα πολυκριτήριας αξιολόγησης, θεωρώντας ότι κάθε κριτής είναι ένα μετρικό κριτήριο με κοινή κλίμακα αξιολόγησης 0-10. Οι συνθήκες της επάρκειας και του μη πλεονασμού ισχύουν εκ των πραγμάτων, δεδομένου ότι τα μέλη της επιτροπής έχουν οριστεί από το διοικητικό συμβούλιο του οργανισμού και δεν μπορεί να είναι ούτε περισσότερα (επάρκεια), ούτε λιγότερα από πέντε (μη πλεονασμός).

Ο τεχνικός αναλυτής θέλει να ανταποκριθεί στις επιταγές της φόρμουλας (4.1), προτείνοντας ένα ποσοτικό δείκτη αξιολόγησης (τεχνική αξιολόγηση), που θα προκύπτει από το άθροισμα των βαθμολογιών των πέντε κριτών (σταθμισμένος μέσος με βάρη ίσα με τη μονάδα). Επειδή φοβάται «μην πέσει θύμα» των μεγάλων διαφορών που ενδέχεται να έχει δώσει κάποιος κριτής, θα χρησιμοποιήσει τη μέθοδο κατάταξης ELECTRE II για να βεβαιωθεί για την ορθότητα της κατάταξης των προσφορών.

4.3.1 Μέθοδος σταθμισμένου μέσου

Αθροίζοντας τις βαθμολογίες της κάθε προσφοράς στον πίνακα 4.8 προκύπτει η κατάταξη του πίνακα 4.9.

Πίνακας 4.9. Κατάταξη προσφορών διαγωνισμού με τη βοήθεια του σταθμισμένου μέσου ($p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1$)

Προσφορά	Συνολική Βαθμολογία	Θέση Κατάταξης
Ε3, Ε4	42	1,2
Ε1	37	3
Ε5	32	4
Ε2	29	5

4.3.2 Επίλυση με τη μέθοδο ELECTRE II

Η εφαρμογή της ELECTRE II από τον αναλυτή γίνεται με τις εξής προδιαγραφές - παραμέτρους:

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0{,}2$

Κατώφλια βέτο (ενιαία):

$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = 4$

Κατώφλια συμφωνίας ισχυρής και ασθενούς υπεροχής:

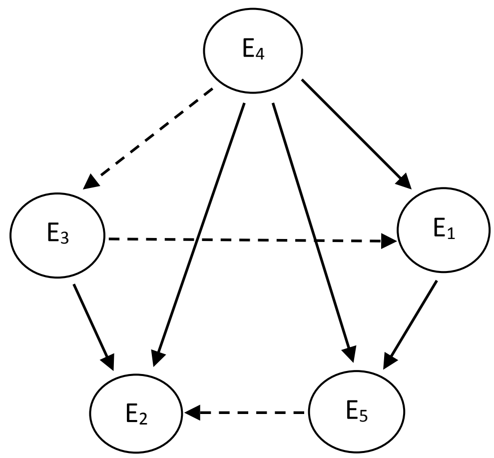
$$s^1 = \frac{4}{5} = 0{,}8\,, \qquad s^2 = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Με τα δεδομένα αυτά, ο αλγόριθμος ELECTRE II δίνει κατά σειρά τα αποτελέσματα:

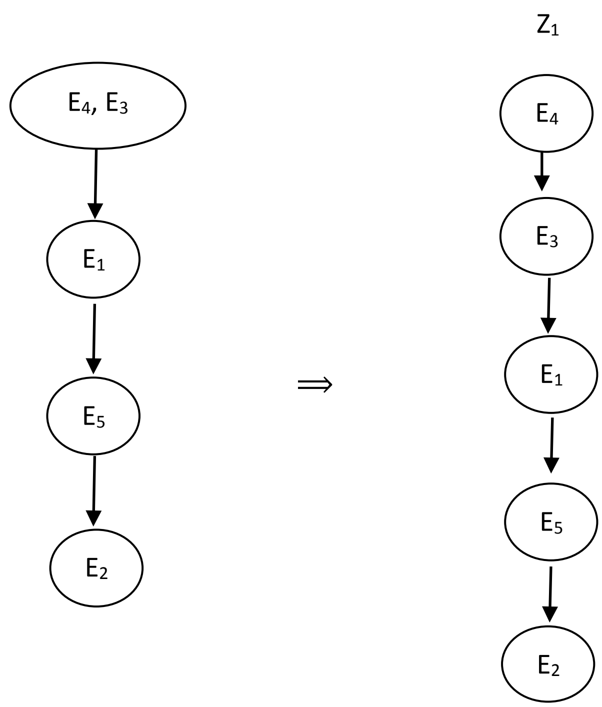
- Πίνακας - δείκτης συμφωνίας 4.10 (κυκλώνονται τα ζεύγη που πληρούν τον έλεγχο συμφωνίας για ισχυρή ($s^1 = 0{,}8$) και ασθενή ($s^2 = 0{,}6$) υπεροχή και διαγράφονται εκείνα που δεν πληρούν και τον έλεγχο διαφωνίας).
- Γράφημα υπεροχής (Σχήμα 4.3) (ισχυρή: συνεχή τόξα, ασθενής: συνεχή και διακεκομμένα τόξα).
- Κατερχόμενη διάταξη (Σχήμα 4.4 , Z_1: Κατάταξη με προσθήκη S^2).
- Ανερχόμενη διάταξη (Σχήμα 4.5 , Z_2: Κατάταξη με προθήκη S^2).
- Τελική κατάταξη $Z = Z_1 \cap Z_2$ (Σχήμα 4.6.).

	Ε1	Ε2	Ε3	Ε4	Ε5
Ε1	1	0,8	0,4	0,2	0,8
Ε2	0,2	1	0	0,2	0,6
Ε3	0,6	1	1	0,4	1
Ε4	1	1	0,6	1	0,8
Ε5	0,2	1	0	0,2	1

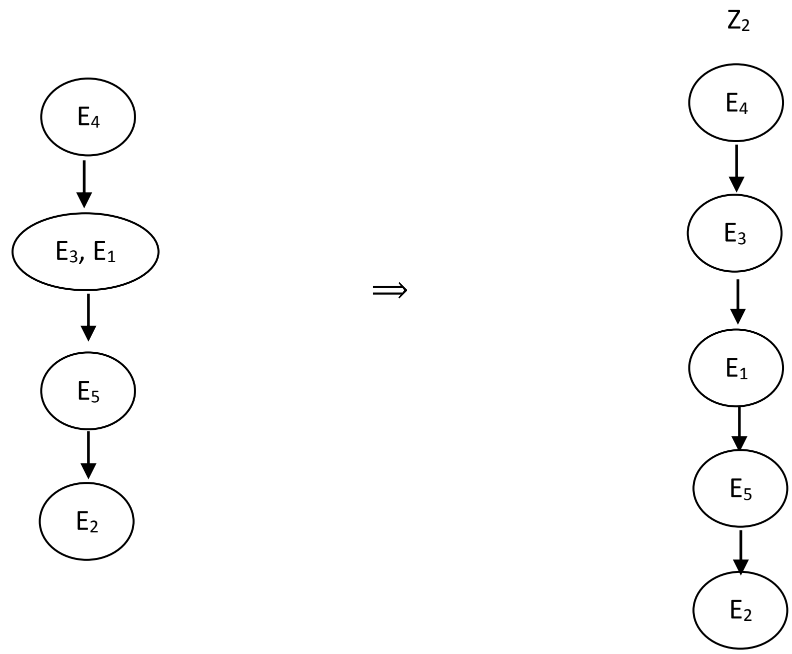
Πίνακας 4.10. Πίνακας συμφωνίας για την επιλογή προσφοράς διαγωνισμού.



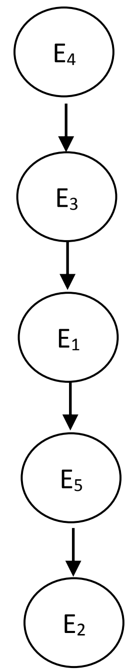
Σχήμα 4.3. Γράφημα υπεροχής ELECTRE II μεταξύ προσφορών διαγωνισμού.



Σχήμα 4.4. Κατερχόμενη κατάταξη ELECTRE II των προσφορών διαγωνισμού.



Σχήμα 4.5. Ανερχόμενη κατάταξη ELECTRE II των προσφορών διαγωνισμού.



Σχήμα 4.6. Τελική κατάταξη προσφορών διαγωνισμού

Η τελική κατάταξη είναι:

1. Ε4
2. Ε3
3. Ε1
4. Ε5
5. Ε2

4.3.3 Επίλυση με τη μέθοδο TACTIC

Σαν εναλλακτική μέθοδο επίλυσης του προβλήματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο TACTIC. Για λόγους απλότητας ο συντελεστής επιπέδου συμφωνίας (ρ) θα έχει την τιμή 1. Τα βάρη, όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις θα θεωρηθούν ίσα (0,2). Επίσης θα γίνει εφαρμογή της μεθόδου ώστε να μην υπάρχει δυνατότητα ασυγκρισιμότητας, δηλαδή με παραδοσιακή δομή προτιμήσεων, που υπάρχουν μόνο σχέσεις προτίμησης και αδιαφορίας (P,I).

Με την εφαρμογή των σχέσεων

$$aPb \;\; iff \sum_{j \in \Im_{T(a,b)}} \lambda_j > \sum_{j \in \Im_{T(b,a)}} \lambda_j$$

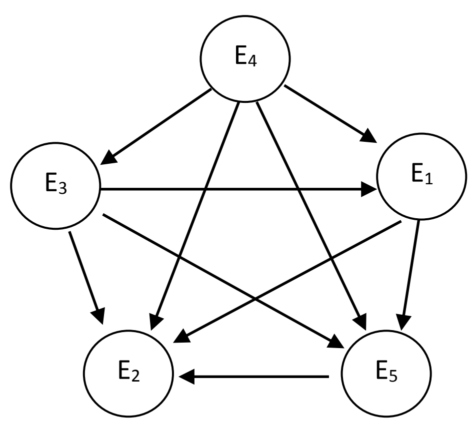
$$aIb \;\; iff \sum_{j \in \Im_{T(a,b)}} \lambda_j = \sum_{j \in \Im_{T(b,a)}} \lambda_j$$

Προκύπτει ο πίνακας 4.11.

	E1	E2	E3	E4	E5
E1		P	-P	-P	P
E2	-P		P	-P	-P
E3	P	-P		-P	P
E4	P	P	P		P
E5	-P	P	-P	-P	

Πίνακας 4.11. Σχέσεις προτίμησης των εναλλακτικών που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου TACTIC

Έτσι προκύπτει το ακόλουθο γράφημα υπεροχής (Σχήμα 4.7):



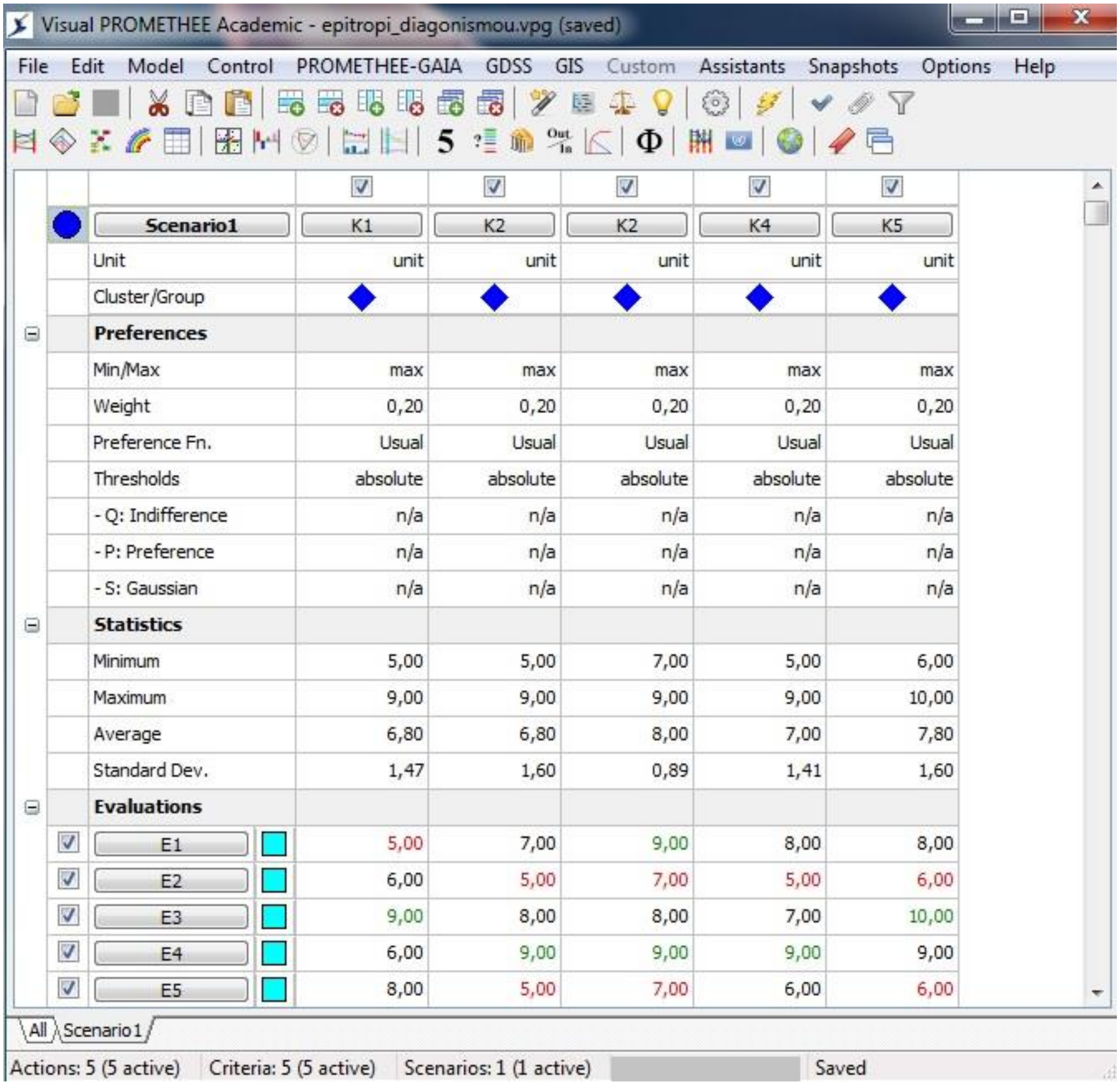
Σχήμα 4.7. Γράφημα υπεροχής μεθόδου TACTIC

Εύκολα προκύπτει η ακόλουθη κατάταξη:

1. E_4
2. E_3
3. E_1
4. E_5
5. E_2

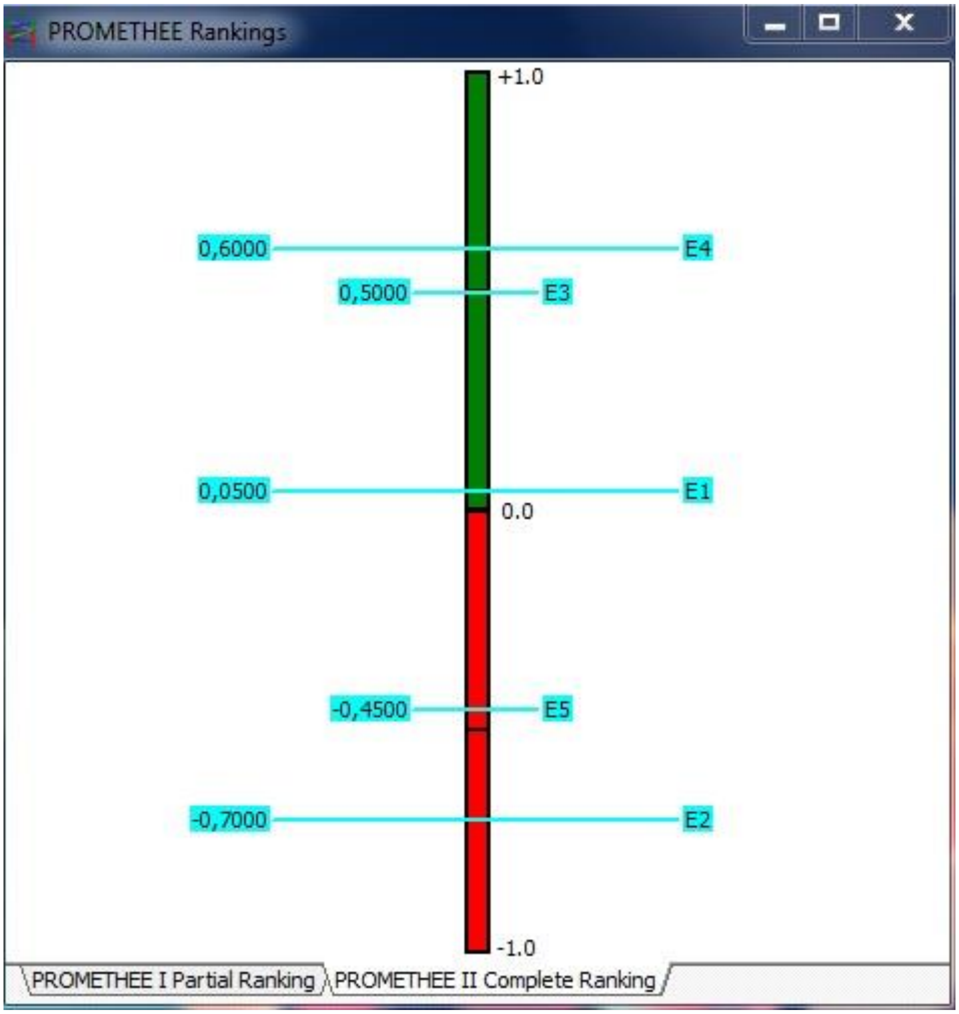
4.3.4 Επίλυση με τη μέθοδο PROMETHEE II

Με τη βοήθεια του λογισμικού Visual PROMETHEE μπορούμε να εξάγουμε μια τελική κατάταξη μέσω της μεθόδου PROMETHEE II. Θέτουμε όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις ίσες τιμές στα βάρη των κριτηρίων (0,2), ενώ δεν θα εισάγουμε κατώφλια προτίμησης και αδιαφορίας.



Εικόνα 4.15. Εισαγωγή δεδομένων εισόδου στο λογισμικό Visual Promethee (πρόβλημα επιτροπή διαγωνισμού)

Προκύπτει η ακόλουθη πλήρης κατάταξη (βλ. εικόνα 4.16)

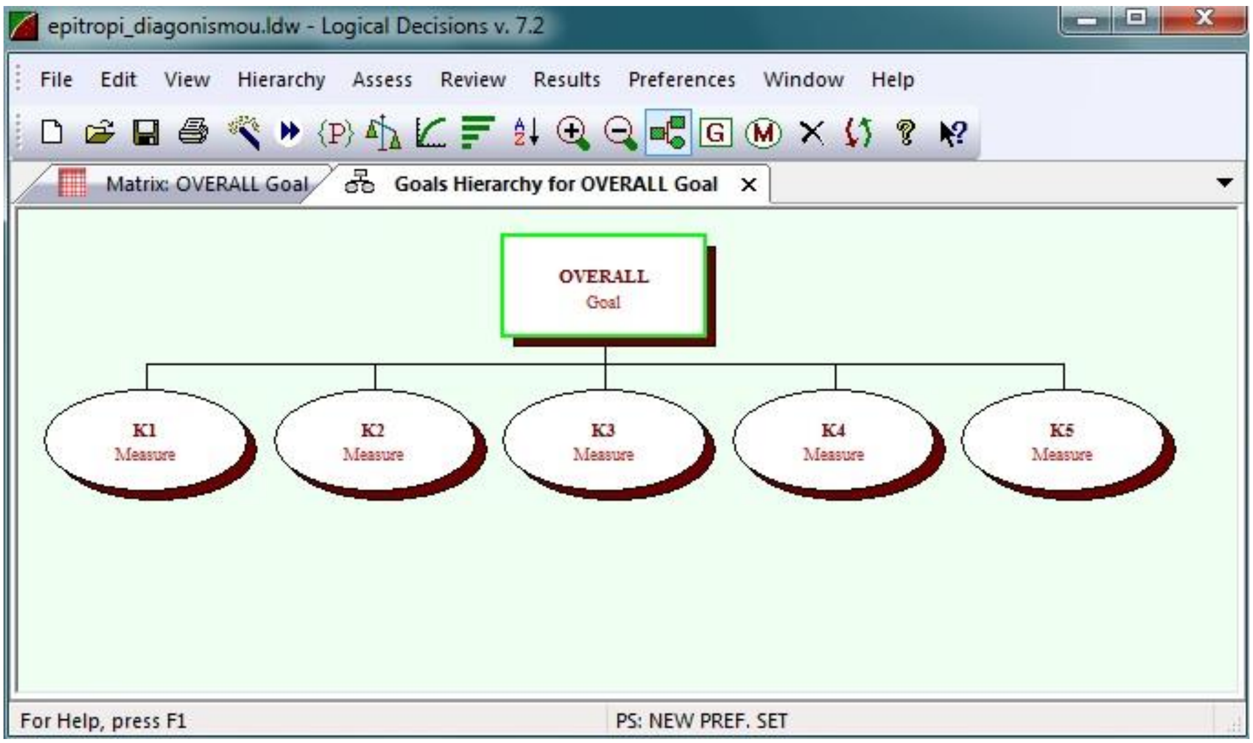


Εικόνα 4.16. Πλήρης κατάταξη εναλλακτικών με τη μέθοδο PROMETHEE II (πρόβλημα επιτροπή διαγωνισμού)

1. E4 (0,60)
2. E3 (0,50)
3. E1 (0,05)
4. E5 (-0,45)
5. E2 (-0,70)

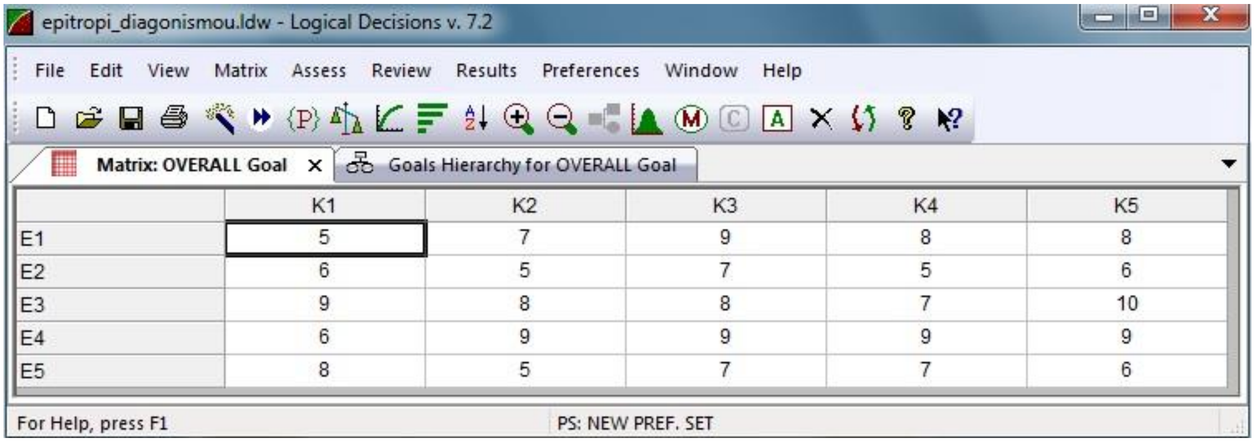
4.3.5 Επίλυση με τη μέθοδο Smart

Αξιοποιώντας το λογισμικο Logical Decisions έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε χρήση της μεθόδου Smart. Ο καθορισμός των κριτηρίων γίνεται με χρήση δένδρων χρησιμότητας (βλ. εικόνα 4.17).



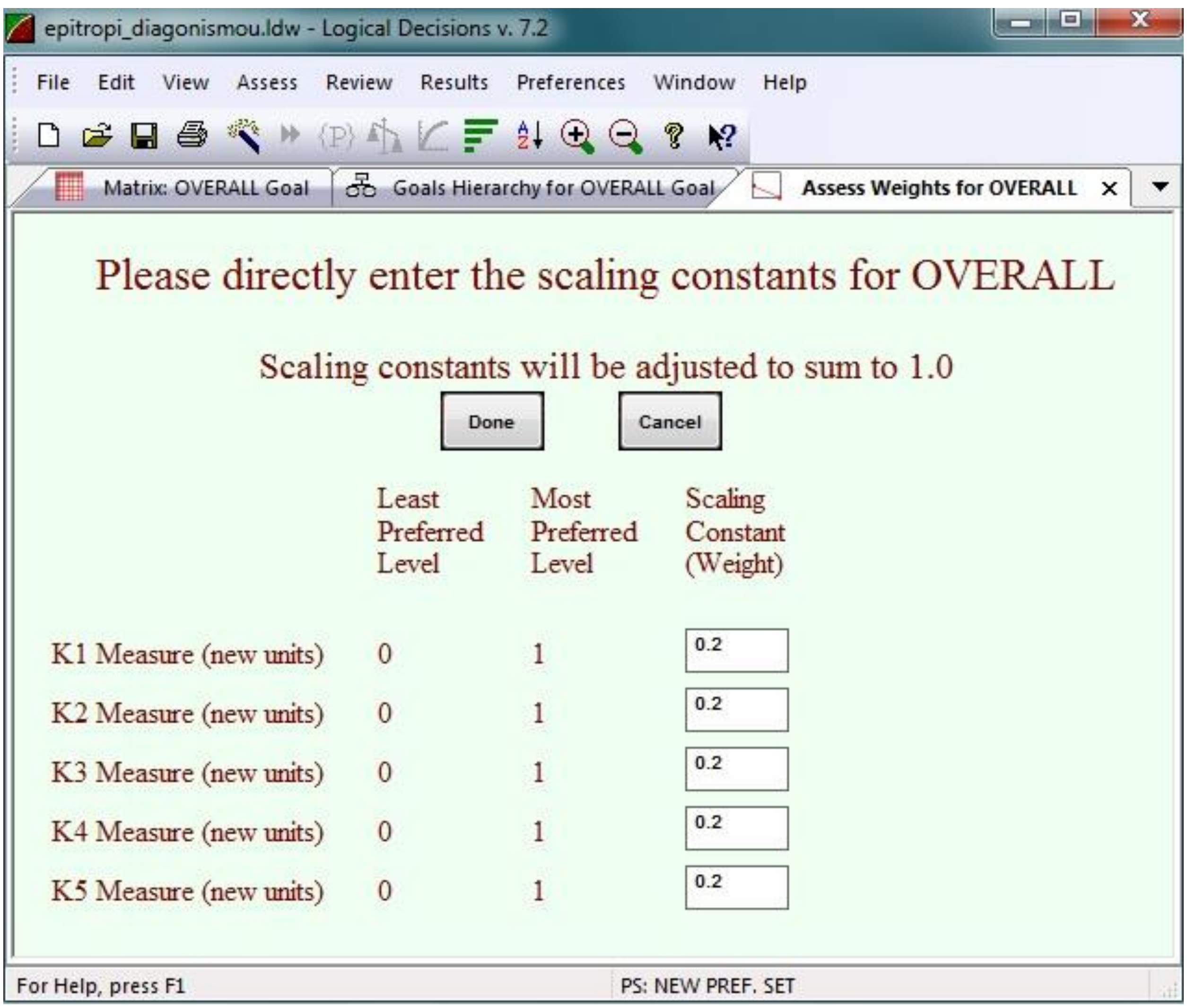
Εικόνα 4.17. Καθορισμός κριτηρίων μεθόδου SMART, μέσω του λογισμικού Logical Decisions (πρόβλημα επιτροπή διαγωνισμού).

Με τα δεδομένα που μας παρέχονται από την εκφώνηση του προβλήματος, γίνεται επιλογή της απευθείας βαθμολόγησης (Direct rating).



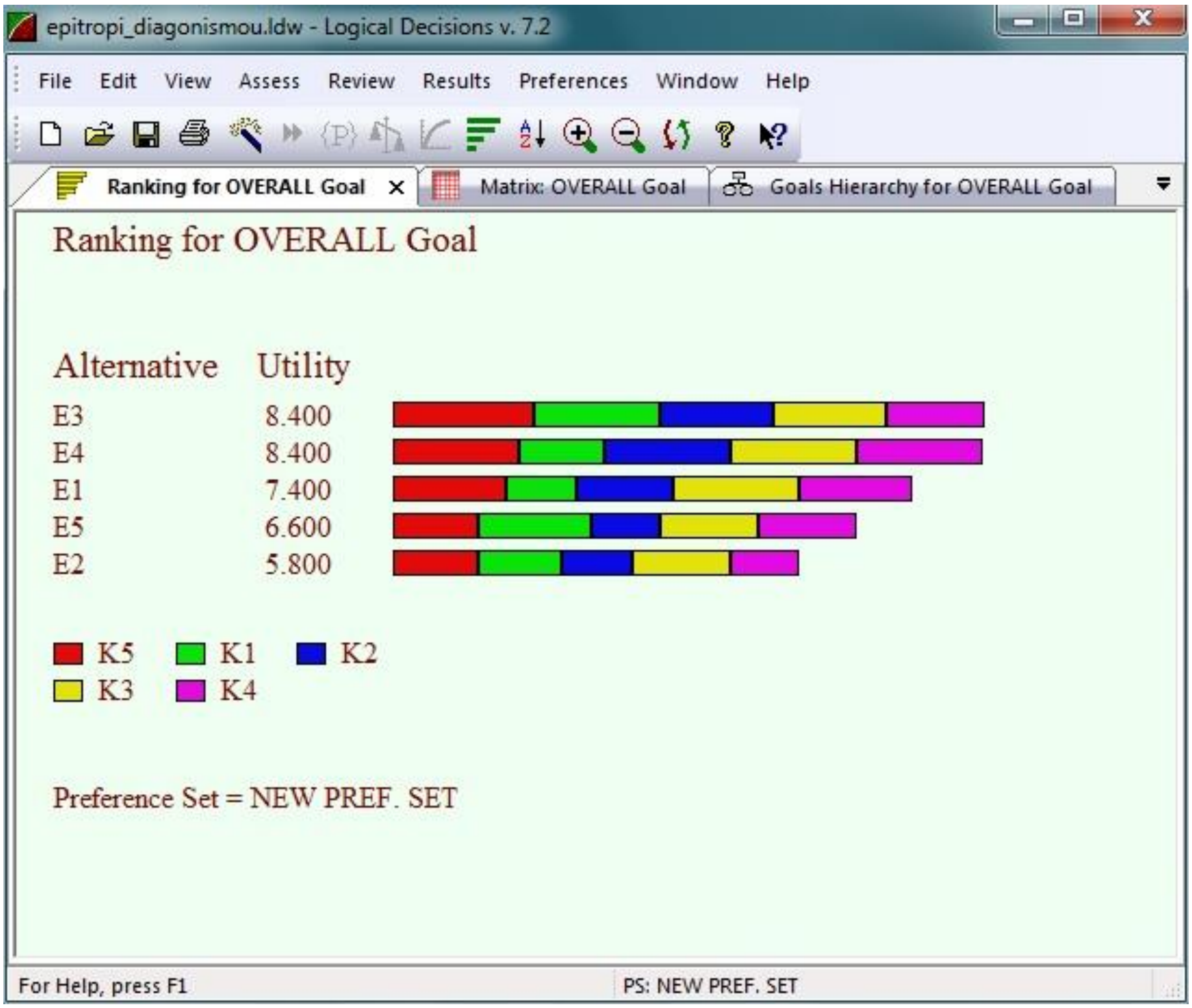
	K1	K2	K3	K4	K5
E1	5	7	9	8	8
E2	6	5	7	5	6
E3	9	8	8	7	10
E4	6	9	9	9	9
E5	8	5	7	7	6

Εικόνα 4.18. Εισαγωγή πολυκριτήριου πίνακα στο λογισμικό Logical Decisions για επίλυση με τη μέθοδο SMART (πρόβλημα επιτροπή διαγωνισμού).



Εικόνα 4.19. Εισαγωγή βαρών στο λογισμικό στο λογισμικό Logical Decisions για επίλυση με τη μέθοδο SMART (πρόβλημα επιτροπή διαγωνισμού).

Η μέθοδος μας επιστρέφει μια τελική κατάταξη των εναλλακτικών.



Εικόνα 4.20 Τελική κατάταξη εναλλακτικών με τη μέθοδο Smart

Παρατηρούμε ότι οι εναλλακτικές Ε3 και Ε4 ισοβαθμούν (Εικόνα 4.20.)

Η τελική κατάταξη είναι:

1. Ε3, Ε4

2. E1
3. E5
4. E2

4.3.6 Επίλυση με τη μέθοδο TOPSIS

Θεωρώντας ισοβαρείς τις απόψεις των πέντε κριτών μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο TOPSIS. Ακολουθούν τα αποτελέσματα της εφαρμογής των έξι βημάτων της μεθόδου:

1. Υπολογισμός του κανονικοποιημένου πίνακα απόφασης (πίνακας 4.12).

Κανονικοποιημένος Πίνακας Απόφασης				
0,321412	0,448129	0,5	0,500979	0,449325
0,385695	0,320092	0,388889	0,313112	0,336994
0,578542	0,512148	0,444444	0,438357	0,561656
0,385695	0,576166	0,5	0,563602	0,50549
0,514259	0,320092	0,388889	0,375735	0,336994

Πίνακας 4.12. Κανονικοποιημένος Πίνακας Απόφασης

2. Κατασκευή του Πίνακα Κανονικοποιημένων βαρών (πίνακας 4.13).

Πίνακας Κανονικοποιημένων Βαρών				
0,064282	0,089626	0,1	0,100196	0,089865
0,077139	0,064018	0,077778	0,062622	0,067399
0,115708	0,10243	0,088889	0,087671	0,112331
0,077139	0,115233	0,1	0,11272	0,101098
0,102852	0,064018	0,077778	0,075147	0,067399

Πίνακας 4.13. Πίνακας κανονικοποιημένων βαρών

3. Προσδιορισμός θετικής και αρνητικής ιδεατής λύσης

$A^{+} = \{0{,}115708\ , 0{,}115233\ , 0{,}1\ , 0{,}11272\ , 0{,}112331\}$

$A^{-} = \{0{,}064282\ , 0{,}064018\ , 0{,}077778\ , 0{,}062622\ , 0{,}067399\}$

4. Υπολογισμός της Ευκλείδιας απόστασης κάθε εναλλακτικής απο τη θετική και αρνητική ιδεατή λύση:

$d_1^+ = 0{,}062944\ ,\qquad d_1^- = 0{,}055372$
$d_2^+ = 0{,}095567\ ,\qquad d_2^- = 0{,}012856$
$d_3^+ = 0{,}030246\ ,\qquad d_3^- = 0{,}083005$
$d_4^+ = 0, 040172,\qquad d_4^- = 0{,}083232$
$d_5^+ = 0{,}081931\ ,\qquad d_5^- = 0{,}040552$

5. Υπολογίζουμε τη σχετική εγγύτητα ως προς την ιδεατή λύση.
$R_1 = 0{,}468001$
$R_2 = 0{,}118576$
$R_3 = 0{,}732928$
$R_4 = 0{,}674467$
$R_5 = 0{,}331082$

6. Κατάταξη των εναλλακτικών κατά φθίνουσα σειρά.

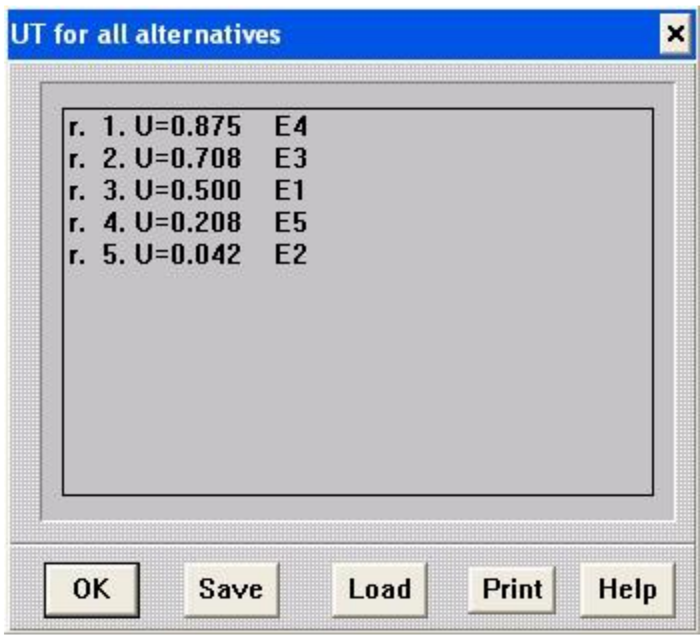
   1. E3
   2. E4
   3. E1
   4. E5
   5. E2

4.3.7 Επίλυση με τη μέθοδο UTASTAR

Για να επιλυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο UTASTAR απαιτείται η ύπαρξη μια πλήρους κατάταξης απο τον αποφασίζονα. Καθώς το πρόβλημα δεν μας παρέχει τέτοιου είδους πληροφορία, θα αξιοποιήσουμε την κατάταξη που προκύπτει από τη μέθοδο σταθμισμένου μέσου.

Η προδιάταξη γίνεται αποδεκτή από τη μέθοδο UTASTAR οπότε η τελική κατάταξη είναι:

1. E4
2. E3
3. E1
4. E5
5. E2



Εικόνα 4.21. Τελική κατάταξη εναλλακτικών του προβλήματος επέκταση μετρό με τη μέθοδο UTASTAR

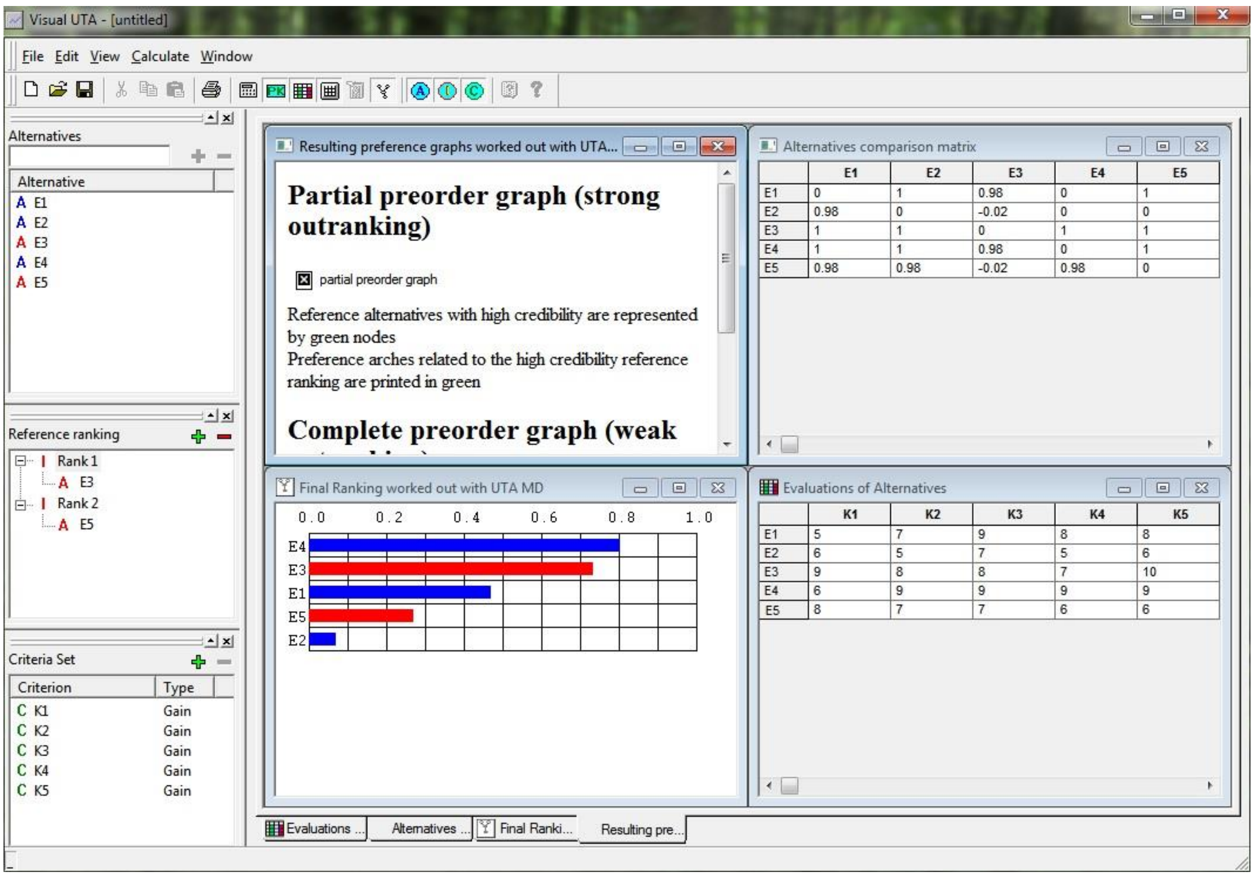
4.3.8 Επίλυση με τη μέθοδο UTA^{GMS}

Η UTA^{GMS} απαιτεί μια εκτίμηση προτίμησης για ένα υποσύνολο εναλλακτικών από τον αποφασίζοντα. Παρόλο που από την εκφώνηση του προβλήματος δεν μας παρέχεται η συγκεκριμένη πληροφορία, θα αξιοποιήσουμε την κατάταξη που προκύπτει από το σταθμισμένο μέσο. Η μέθοδος εκτελέστηκε με το λογισμικό Visual UTA (βλ. εικόνα 4.22).

Στην κατάταξη αναφοράς θα εισάγουμε την προτίμηση της εναλλακτικής E3, έναντι της E5.

Η τελική κατάταξη που λαμβάνουμε δεν διαφοροποιείται σε σχέση με την εκτίμηση που εισάγουμε στο μοντέλο. Η τελική κατάταξη που εξάγεται είναι η ακόλουθη:

1. E4
2. E3
3. E1
4. E5
5. E2



Εικόνα 4.22. Αποτελέσματα επίλυσης με τη μέθοδο UTA^{GMS} για το πρόβλημα επιτροπή διαγωνισμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο επιλύσαμε τα δυο προβλήματα αναφοράς με όλες τις δυνατές μεθόδους με τις οποίες μπορούν να επιλυθούν. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε τα αποτελέσματα και τις ομοιότητες και διαφορές που παρουσιάζονται.

5.2 Πρόβλημα Επέκταση μετρό

	Μέθοδος						
Κατάταξη	PROMETHEE II	ELECTRE III	TACTIC	SMART	TOPSIS	UTASTAR	UTA^{GMS}
1	Δ	Β,Δ	Β	Β	Β	Β	Β
2	Β	-	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
3	Α	Α	Γ	Α	Α	Α	Α
4	Γ	Γ	Α	Γ	Γ	Γ	Γ

Πίνακας 5.1. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα όλων των μεθόδων που εφαρμόστηκαν για το πρόβλημα: Επέκταση μετρό

Το πρόβλημα Επέκταση μετρό κατέστη δυνατό να επιλυθεί με επτά μεθόδους, με βάση τα διαθέσιμα δεδομένα. Από τις επτά μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε, μόνο οι μέθοδοι PROMETHEE II και ELECTRE III έχουν τη δυνατότητα πλήρους αξιοποίησης των διαθέσιμων δεδομένων εισόδου, δηλαδή των κατωφλιών προτίμησης και αδιαφορίας. Οι υπόλοιπες μέθοδοι (TACTIC, SMART, TOPSIS, UTASTAR, UTA^{GMS}) χρησιμοποιήθηκαν χωρίς να λάβουν υπόψη τα παραπάνω κατώφλια καθώς δεν έχουν τη δυνατότητα διαχείρισης τέτοιου είδους δεδομένων. Επιπλέον για τις μεθόδους UTASTAR και UTA^{GMS} χρησιμοποιήσαμε μια αρχική κατάταξη η οποία δεν παρέχεται από τον αποφασίζοντα, αλλά προήλθε ως αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεθόδου Borda, επομένως τα αποτελέσματα της μεθόδου θα σχολιαστούν με επιφύλαξη. Θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας κάθε φορά μια διαφορετική μέθοδο ως σημείο αναφοράς.

5.2.1 Μέθοδος PROMETHEE II

Η μέθοδος PROMETHEE II τοποθετεί την εναλλακτική Δ στην πρώτη θέση της κατάταξης, κάτι που τη διαφοροποιεί από όλες τις υπόλοιπες μεθόδους που εφαρμόσαμε. Στη δεύτερη θέση είναι η εναλλακτική Β, που είναι στην πρώτη θέση για όλες τις υπόλοιπες μεθόδους. Οι διαφορές αυτές προκύπτουν εξαιτίας της ύπαρξης των κατωφλιών προτίμησης και αδιαφορίας στα πρώτα δυο κριτήρια, καθώς δημιουργείται μια ασθενής προτίμηση της Β έναντι της Δ, η οποία ευνοεί τελικά την τελευταία να ανέλθει στη τελική κατάταξη. Τελευταίες κατατάσσονται οι Α και Γ αντίστοιχα, γεγονός με το οποίο συμφωνούν οι μέθοδοι ELECTRE III, SMART, TOPSIS, UTASTAR και UTA^{GMS}.

5.2.2 Μέθοδος ELECTRE III

Η μέθοδος ELECTRE III δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες διαφορές με την πλειοψηφία των υπολοίπων μεθόδων. Ως μοναδική ιδιαιτερότητα που προέκυψε από την εφαρμογή της μπορούμε να αναφέρουμε την αξιολόγηση των εναλλακτικών Β και Δ ως ισοδύναμες στην πρώτη θέση, ως αποτέλεσμα της αξιοποίησης των κατωφλιών προτίμησης και αδιαφορίας. Οι εναλλακτικές Α και Γ τοποθετούνται στην τρίτη και τέταρτη θέση αντίστοιχα, όπως στην πλειονότητα τον μεθόδων.

5.2.3 Μέθοδος TACTIC

Η μέθοδος TACTIC εμφανίζει παρόμοια αποτελέσματα με τις μεθόδους SMART, TOPSIS, UTASTAR και UTA^{GMS}, με μόνη διαφορά την τοποθέτηση της Γ στην τρίτη και της Α στην τελευταία. Οι διαφοροποιήσεις των αποτελεσμάτων της μεθόδου TACTIC σε σχέση με τη μέθοδο ELECTRE III οφείλονται στην αξιοποίηση των κατωφλιών προτίμησης και αδιαφορίας από την τελευταία.

5.2.4 Μέθοδοι SMART, TOPSIS, UTASTAR και UTA^{GMS}

Οι συγκεκριμένες μέθοδοι εξάγουν κοινά αποτελέσματα.

5.2.5 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

Έχοντας λάβει υπόψιν τα αποτελέσματα όλων των μεθόδων που χρησιμοποιήσαμε, μπορούμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για τις αξιολογήσεις των εναλλακτικών. Πάρα τις διαφορές στη σειρά της κατάταξης από μέθοδο σε μέθοδο μπορούμε να σχηματίσουμε μια εικόνα για την κάθε εναλλακτική. Οι εναλλακτικές Β και Δ είναι με συνέπεια στις 2 καλύτερες θέσεις σε όλες τις μεθόδους και οι Α και Γ στις 2 χειρότερες. Η Β είναι πρώτη σε 6 μεθόδους ενώ η χειρότερη κατάταξη της είναι η 2η θέση στη μέθοδο PROMETHEE II, με πολύ μικρή διαφορά από την πρώτη. Τέλος παρατηρούμε ότι οι μέθοδοι που αξιοποίησαν πλήρως τα διαθέσιμα δεδομένα των κριτηρίων, δηλαδή τα κατώφλια προτίμησης και αδιαφορίας (PROMETHEE II, ELECTRE III), είναι οι μόνες που κατέταξαν την εναλλακτική Δ στην πρώτη θέση. Αυτό συμβαίνει διότι στα συγκεκριμένα κριτήρια που έχουμε κατώφλια, προκύπτει ασθενής υπεροχή της Β έναντι της Δ.

5.3 Πρόβλημα Επιτροπή Διαγωνισμού

	Μέθοδος							
Κατάταξη	Σταθμ. Μέσος	ELECTRE II	TACTIC	PROMETHEE II	SMART	TOPSIS	UTASTAR	UTA^{GMS}
1	E3, E4	E4	E4	E4	E3, E4	E3	E4	E4
2	-	E3	E3	E3	-	E4	E3	E3
3	E1	E1	E1	E1	E1	E1	E1	E1
4	E5	E5	E5	E5	E5	E5	E5	E5
5	E2	E2	E2	E2	E2	E2	E2	E2

Πίνακας 5.2. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα όλων των μεθόδων που εφαρμόστηκαν για το πρόβλημα: Επιτροπή διαγωνισμού

Το πρόβλημα Επιτροπή διαγωνισμού επιλύθηκε με επτά μεθόδους. Στον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 5.2) εμφανίζονται τα αποτελέσματα των μεθόδων καθώς και τα αποτελέσματα του σταθμισμένου μέσου, που εφαρμόστηκε από το συγγραφέα του προβλήματος και επιπλέον αξιοποιήθηκε ως δεδομένο εισόδου για τις μεθόδους UTASTAR και UTA^{GMS}. Η μοναδική μέθοδος η οποία αξιοποίησε τα κατώφλια βέτο, καθώς και τα κατώφλια ισχυρής και ασθενούς υπεροχής είναι η ELECTRE II. Οι μέθοδοι TACTIC, PROMETHEE II, SMART, TOPSIS επιλύθηκαν με μοναδικό δεδομένο εισόδου τον πολυκριτήριο πίνακα και τα βάρη των κριτηρίων. Θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας κάθε φορά μια διαφορετική μέθοδο ως σημείο αναφοράς.

5.3.1 Μέθοδος ELECTRE II, TACTIC, PROMETHEE II, UTASTAR και UTA^{GMS}

Οι συγκεκριμένες μέθοδοι εξάγουν κοινά αποτελέσματα.

5.3.2 Μέθοδος SMART

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου προκύπτει ισοβαθμία στην πρώτη θέση των εναλλακτικών Ε3 και Ε4. Πέραν αυτής της ιδιαιτερότητας, οι υπόλοιπες εναλλακτικές κατατάσσονται στις ίδιες θέσεις με το προηγούμενο σύνολο μεθόδων.

5.3.3 Μέθοδος TOPSIS

Η μέθοδος TOPSIS διαφοροποιείται από όλες τις υπόλοιπες μεθόδους με την τοποθέτηση της Ε3 στην πρώτη θέση, αφήνοντας την Ε4 στη δεύτερη. Στις υπόλοιπες θέσεις δεν προκύπτουν αλλαγές.

5.3.4 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν υπήρξαν σημαντικές διαφορές στις κατατάξεις των εναλλακτικών μεταξύ των μεθόδων που χρησιμοποιήσαμε. Η Ε4 είναι στην πρώτη θέση σε πέντε μεθόδους, και ισοβαθμεί στην πρώτη θέση με την Ε3 στη μέθοδο SMART. Η μοναδική μέθοδος που κατατάσσει μόνη πρώτη την εναλλακτική Ε3 είναι η TOPSIS. Τα κατώφλια βέτο που χρησιμοποιήθηκαν στη μέθοδο ELECTRE II δεν διαφοροποίησαν την τελική κατάταξη της μεθόδου.

5.4 Συμπεράσματα – Αποτίμηση Έρευνας

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η αξιολόγηση της εφαρμογής μεθόδων πολυκριτήριας ανάλυσης στην επίλυση προβλημάτων. Από τη μελέτη της βιβλιογραφίας έγινε κατανοητό ότι για να γίνει αξιολόγηση και σύγκριση των μεθόδων θα πρέπει να γίνει με κάποιες παραμέτρους. Θα ήταν αδόκιμο για παράδειγμα να συγκρίνουμε μεθόδους που έχουν διαφορετική προβληματική και κυρίως διαφορετική μεθοδολογική προσέγγιση. Ξεκινώντας θέτοντας ως βασική παράμετρο κατηγοριοποίησης των μεθόδων την προβληματική για την αξιολόγηση τους, προέκυψε ότι δεν υπάρχουν διαθέσιμα λογισμικά για μεθόδους προβληματικής τύπου α και β για να εξάγουμε συμπεράσματα. Επομένως αυτόματα περιοριστήκαμε στην έρευνα μεθόδων προβληματικής τύπου γ. Η αξιολόγηση των μεθόδων έχει νόημα να γίνει επιλύοντας το ίδιο πρόβλημα με όλες τις δυνατές μεθόδους. Σε αυτό το σημείο έπρεπε να αναζητήσουμε προβλήματα κατάλληλα προς επίλυση από όσο το δυνατόν μεγαλύτερο φάσμα μεθόδων. Με αυτή την αρχή και τον περιορισμό του διαθέσιμου λογισμικού το σύνολο των προς εξέταση μεθόδων περιορίστηκε ακόμα περισσότερο, καθώς μέθοδοι πολύ ειδικού χαρακτήρα, όπως για παράδειγμα η μέθοδος Stochastic UTA, λόγω της δυνατότητας αξιοποίησης στοχαστικών δεδομένων, δεν είναι δυνατόν να συγκριθεί άμεσα με τις υπόλοιπες μεθόδους. Αναζητώντας προβλήματα από τα προβλήματα αναφοράς του βιβλίου Μοντέλα Αποφάσεων του Γιάννη Σίσκου, απορρίφθηκαν πολλά ως ακατάλληλα για την έρευνα μας διότι είτε δεν σχετίζονται άμεσα με την πολυκριτήρια ανάλυση, είτε επιλύονται με τεχνικές που αποτελούν υπόβαθρο για την υλοποίηση άλλων μεθόδων, είτε η προβληματική και τα δεδομένα εισόδου περιορίζουν την αξιοποίηση τους από μεθόδους πέρα από την προτεινόμενη από το συγγραφέα.

Καταλήξαμε στην επιλογή των προβλημάτων «Επιτροπή διαγωνισμού» και «Επέκταση μετρό». Τα προβλήματα αυτά μας έδωσαν τη δυνατότητα να αξιοποιήσουμε αρκετές μεθόδους. Βέβαια για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις μεθόδους αναγκαστήκαμε να μην χρησιμοποιήσουμε κάποια δεδομένα του προβλήματος (κατώφλια προτίμησης, αδιαφορίας, βέτο, κατώφλια ισχυρής-ασθενούς υπεροχής), καθώς κάποιες μέθοδοι δεν είχαν δυνατότητα να τα αξιοποιήσουν. Επιπλέον, μη διαθέτοντας πλήρεις ή μερικές κατατάξεις, που είναι απαραίτητο δεδομένο για κάποιες μεθόδους - προς χάριν παράθεσης των μεθόδων – χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο του σταθμισμένου μέσου και τη μέθοδο Borda για να εξάγουμε κατατάξεις, ώστε να διευρύνουμε τις μεθόδους που θα χρησιμοποιήσουμε.

Οι παραπάνω συμβιβασμοί που κάναμε προκειμένου να μπορέσουμε να παρουσιάσουμε παραπάνω μεθόδους από τις αυστηρά ενδεδειγμένες, μας οδηγούν σε ένα ασφαλές συμπέρασμα. Και αυτό είναι πως όσο περισσότερη και έγκυρη πληροφόρηση έχουμε για να μοντελοποιηθεί η προτίμηση του αποφασίζοντα τόσο ακριβέστερα είναι και τα αποτελέσματα που εξάγονται. Και αυτό διότι στο πρόβλημα Επέκταση Μετρό, οι μεγαλύτερες διαφοροποιήσεις στην τελική κατάταξη προκύπτουν από την αξιοποίηση ή μη του συνόλου των διαθέσιμων δεδομένων. Σε κάθε περίπτωση δεν μπορούμε να γνωρίζουμε κατά πόσο ικανοποιούν και εάν μπορούν να γίνουν αποδεκτά τα αποτελέσματα από τον αποφασίζοντα.

Επιπλέον συγκεντρώνοντας στοιχεία για το σύνολο των μεθόδων που μελετήσαμε, κατασκευάσαμε ένα γράφημα ταξινόμησης των μεθόδων, με βάση τα δεδομένα εισόδου που απαιτούνται για την εφαρμογή τους (βλ. Σχήμα 5.1). Η συγκεκριμένη ταξινόμηση μπορεί να διευκολύνει τον αναλυτή στην γρήγορη επιλογή μίας ή περισσότερων μεθόδων προς χρήση, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος που καλείται να επιλύσει.

5.5 Δυνατότητες επέκτασης

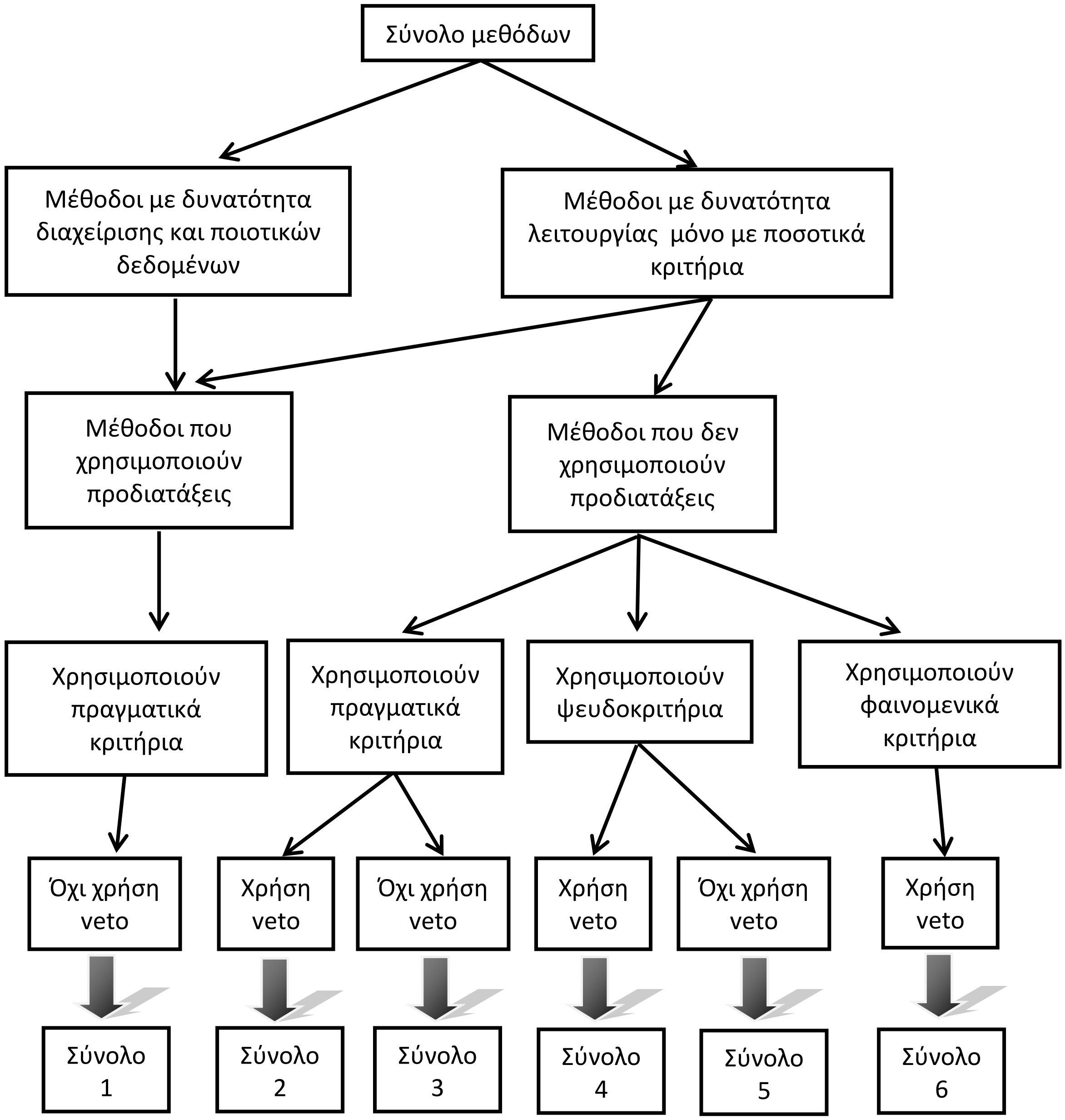
Τέλος, οφείλουμε να παραθέσουμε προτάσεις για μελλοντική επέκταση και βελτίωση της παρούσας εργασίας.

Στο παρόν πλαίσιο, υπάρχουν μέθοδοι που δεν μπορέσαν να χρησιμοποιηθούν διότι δεν υπήρχε πρόσβαση στο λογισμικό τους. Εναπόκειται σε μελλοντικούς αναλυτές η προσπάθεια αναζήτησης και απόκτησης λογισμικού που σε πολλές περιπτώσεις αποτελεί εμπορικό προϊόν.

Επιπλέον, μπορούν να αναζητηθούν προβλήματα με διαθέσιμα δεδομένα επαρκή για αξιοποίηση από μεγαλύτερο φάσμα μεθόδων. Ακόμη μπορούν να προστεθούν επιπλέον παράμετροι στην αξιολόγηση των μεθόδων όπως για παράδειγμα η ταχύτητα επίλυσης μέσω λογισμικού, ανάλογα με τις διαστάσεις του προβλήματος (scaling).

Προκειμένου να μπορέσουμε να έχουμε μια καθολική αξιολόγηση των μεθόδων πολυκριτήριας ανάλυσης προτείνεται η αναζήτηση κατάλληλων προβλημάτων και συνεργασία για λήψη δεδομένων και αποτύπωση των προτιμήσεων των κατά περίπτωση αποφασιζόντων, έτσι ώστε να διαμορφώσουμε ένα συνεπές πλαίσιο, με σκοπό την ευρύτερη αξιοποίηση μεθόδων. Η αξιολόγηση των μεθόδων να γίνει με βάση τις απόψεις του ίδιου του αποφασίζοντα επί των αποτελεσμάτων.

Σχήμα 5.1. Δενδροειδές διάγραμμα ταξινόμησης πολυκριτήριων μεθόδων προβληματικής τύπου γ (πλην των μεθόδων που διαχειρίζονται ασαφή δεδομένα) ως προς τα δεδομένα εισόδου



Μέθοδοι με δυνατότητα διαχείρισης ποιοτικών δεδομένων εισόδου

ΚΑΙ

Μέθοδοι με δυνατότητα διαχείρισης ποσοτικών δεδομένων εισόδου, με ύπαρξη προδιάταξης

Σύνολο 1

UTA

UTA II

UTASTAR

UTAMP 1

UTAMP 2

UTAMIME

UTASTARMIME

UTAMKEN

UTA^{GMS}

Μέθοδοι με δυνατότητα διαχείρισης ποσοτικών δεδομένων εισόδου, πραγματικών κριτηρίων, χωρίς ύπαρξη προδιάταξης, με χρήση κατωφλιών veto

Σύνολο 2

ELECTRE II

Μέθοδοι με δυνατότητα διαχείρισης ποσοτικών δεδομένων εισόδου, πραγματικών κριτηρίων, χωρίς ύπαρξη προδιάταξης, χωρίς χρήση κατωφλιών veto

<u>Σύνολο 3</u>

Οικογένεια PROMETHEE

TACTIC

MAPPAC

PRAGMA

TOPSIS

SMART

SMARTS

SMARTER

AHP

Modified AHP

MAVT

Μέθοδοι με δυνατότητα διαχείρισης ποσοτικών δεδομένων εισόδου, ψευδοκριτηρίων, χωρίς ύπαρξη προδιάταξης, με χρήση κατωφλιών veto

<u>Σύνολο 4</u>

ELECTRE III

Μέθοδοι με δυνατότητα διαχείρισης ποσοτικών δεδομένων εισόδου, ψευδοκριτηρίων, χωρίς ύπαρξη προδιάταξης, χωρίς χρήση κατωφλιών veto

Σύνολο 5

Οικογένεια PROMETHEE

Μέθοδοι με δυνατότητα διαχείρισης ποσοτικών δεδομένων εισόδου, φαινομενικών κριτηρίων, χωρίς ύπαρξη προδιάταξης, με χρήση κατωφλιών veto

Σύνολο 6

TACTIC

Βιβλιογραφία

Adams, E. & Fagot, R., 1959. *A model for riskless choice.* 4 επιμ. s.l.:Behavioral Science.

Bana e Costa, C. & Vansnick, J.-C., 1994. MACBETH: An Interactive Path Towards the Construction of Cardinal Value Functions. *Internationl Transaction in Operational Research,* Τόμος 1, pp. 489-500.

Belacel, 2000. Multicriteria assignment method PROAFTN: Methodology and medical application. *European Journal of Operational Research ,* Τόμος 125.

Belton, V. & Gear, T., 1983. On a short-coming of Saaty's method of the analytic hierarchies. *Omega,* Τόμος 11, pp. 228-230.

Benayoun, R., Montgolfier, J. D., Tergny, J. & Larichev, O., 1971. *Linear Programming with multiple objective functions: Step Method (STEM).* s.l.:s.n.

Beuthe, M., Eeckhoudt, L. & Scannella, G., 2000. A Practical multicriteria methodology for assessing risky public investments. *Socio-Economic Planning Sciences,* Τόμος 34, pp. 121-139.

Beuthe, M. & Scannella, G., 2001. Comparative analysis of UTA multicriteria methods. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 130, pp. 246-262.

Borda, J.-C., 1781. *MÉMOIRE SUR LES ÉLECTIONS AU SCRUTIN.* s.l.:Memoires des l.

Brans, J., 1982. *L' inginerie de la decision. Elaboration d' instrumens d' aide a la decision. Methode de PROMETHEE.* Quebec, Canada: Presses de l' Universite Laval.

Brans, J. & Mareschal, B., 2005. PROMETHEE Methods. Στο: J. Figueira, S. Greco & M. Ehrgott, επιμ. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys.* Boston, Dordrecht, London: Springer Verlag.

Brans, J., Vincke, P. & Mareschal, B., 1986. How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 24, pp. 228-238.

Brans, J. & Vinke, P., 1985. A preference rankiing organisation method. *Management Science,* 31(6), pp. 647-656.

Chen, S. & Hwang, C., 1992. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making:Methods and Applications.* Berlin: Springer-Verlag.

De Keyser, W. & Peeters, P., 1994. ARGUS – A new multiple criteria method based on the general idea of outranking. Στο: M. Paruccini, επιμ. *Applying Multiple Criteria Aid for Decision to Environmental Management.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 263-278.

Devaud, J., Groussaurd, G. & Jacquet-Lagreze, E., 1980. *Une Methode de construction de functions d' utiliti additives rendant compte de jegements.* Bochum, s.n.

Doumpos, M. & Zopounidis, C., 1998. The use of yje preference disaggregation analysis in the assessment of financial risks. *Fuzzy Economic Review,* Τόμος 3, pp. 39-57.

Doumpos, M. & Zopounidis, C., 2002. *Multicriteria Decision Aid Classification Methods.* s.l.:Kluwer Academic Publishers.

Dyer, J., 1990. Remarks on the Analytic Hierarchy Process. *Management Science,* Τόμος 36, pp. 249-258.

Dyer, J. & Sarin, R., 1979. Measurable multiattribute value functions. *Operations Research,* Τόμος 27, pp. 810-822.

Edwards, W., 1977. How to use multiattribute utility measurement for social decisionmaking. *EEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* Τόμος 7, pp. 326-340.

Edwards, W. & Barron, F., 1994. SMARTS and SMARTER: Improved simple methods for multiattribute utility measurement. *Organizational Behavior and Human Decision Processes,* Τόμος 60, pp. 306-325.

Figueira, J., Greco, S. & Ehrgott, M., 2005. *Multiple Criteria Decision Analysis - State of the Art Surveys.* s.l.:Springer.

Figueira, J., Mousseau, V. & Roy, B., 2005. *ELECTRE Methods.* s.l.:Springer.

Geoffrion, A., Dyer, J. & Feinberg, A., 1972. *An interactive approach for multicriterion optimization withapplication to the operation of an Academic Department.* 4 επιμ. s.l.:Management Science.

Giarlotta, A., 1998. Passive and active compensability multicriteria analysis (PACMAN). *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis,* Τόμος 7, pp. 204-216.

Greco, S., 1997. A new PCCA method: IDRA. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 98, p. 587–601.

Greco, S., Mousseau, V. & Slowinski, R., 2008. Ordinal regression revisited: Multiple criteria ranking using a set of additive value functions. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 191, pp. 416-436.

Grigoroudis, E. & Siskos, Y., 2002. Preference disaggregation for measuring and analyzing customere satisfaction:The MUSA method. *European Journal of Operationl Research,* Volume 143, pp. 148-170.

Hadar, J. & Russel, W., 1969. Rules for ordering uncertain prospects. *The American Economic Review,* Τόμος 59, pp. 25-34.

Hinloopen, E. & Nijkamp, P., 1986. Regime-methods voor ordinal multicriteria-analyses.. Στο: *Kwantitatieve Methoden.* s.l.:s.n., pp. 61-78.

Huang, C., Kira, D. & Vertinsky, I., 1969. Stochastic dominance rules for multiattribute utility functios. *Review of Economic Studies,* Τόμος 41, p. 611–616.

Hwang, C. & Yoon, K., 1981. *Multiple Attribute Decision Making Methods and Applications.* Berlin Heidelberg: Springer.

Jacquet-Lagreze, E. & Siskos, J., 1982. Assesing a set of additive utility functions for multicriteria decision making:The UTA method. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 10, pp. 151-164.

Jacquet-Largerze, E., 1995. An application of the UTA discriminant model for the evaluaation of R & D projects. Στο: P. Pardalos, Y. Siskos & C. Zopounidis, επιμ. *Advances in Multicriteria Analysis.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 203-211.

Jahanshahloo, G., Lotfi, F. H. & Izadikhah, M., 2006. An algorithmic method to extend TOPSIS for decision-making problems with interval data. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 175, pp. 1375-1384.

Jaquet-Lagreze, E., Meziani, R. & Slowinski, R., 1987. MOLP with an interactive assessment of a piecewise linear utility function. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 31, pp. 350-357.

Keeney, R., 1980. *Siting Energy Facilities.* New York: Academic Press.

Keeney, R. & Raiffa, H., 1976. *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs.* New York: Wiley.

Lansdowne, Z. & Woodward, B., 1996. Applying the Borda Ranking Method. *Air Force Journal of Logistics,* Τόμος XX, pp. 27-29.

Larichev, O., 2001. Ranking multicriteria alternatives: The method ZAPROS III. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 131.

Larichev, O. & Moshkovic, H., 1995. ZAPROS-LM– A method and system for ordering multiattribute alternatives. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 82.

Larichev, O. & Moshkovich, H., 1994. An approach to ordinal classification problems. *International Transactions of Operational Research,* Τόμος 1, pp. 375-385.

Larichev, O. και συν., 1991. *Knowledge Acquisition for the Construction of Full and Contradiction Free Knowledge Bases.* Groningen: IecProGamma.

Le Teno, J. & Mareschal, B., 1998. An interval version of PROMETHEE for the comparison of building products design with ill-defined data on enviroment quality. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 109, pp. 522-529.

Leclercq, J., 1984. Propositions d'extensions de la notion de dominance en présence de relations d'ordre sur le pseudo-critéres: MELCHIOR. *Revue Belge de Recherche Operationnelle, de Statistique et d' Informatique,* Τόμος 24.

Marichal, J.-L., Meyer, P. & Roubens, M., 2005. Sorting multi-attribute alternatives: The TOMASO method. *Computers & Operations Research,* Τόμος 32, p. 861–877.

Marichal, J.-L. & Roubens, M., 2001. On a sorting procedure in the presence of qualitative interacting points of view. Στο: J. Chojcan & J. Leski, επιμ. *Fuzzy sets and their applications.* s.l.:Silesian University Press.

Martel, J.-M. & Matarazzo, B., 2005. Other Outranking Approaches. In: J. Figueira, S. Greco & M. Ehrgott, eds. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys.* s.l.:Springer.

Martel, J. & Zaras, K., 1997. *Modeling preferences using stochastic and probabilistic dominances.* Facultés Universitaires Catholiques de Mons, Belgium, s.n., p. 256–260.

Massaglia, R. & Ostanello, A., 1991. N-tomic: a support system for multicriteria segmentation problems. Στο: P. Korhonen, A. Lewandowski & J. Wallenius, επιμ. *Multiple Criteria Decision Support.* Berlin: Springer Verlag, pp. 167-174.

Matarazzo, B., 1986. Multicriteria analysis of preferences by means of pairwise actions and criterion comparisons (MAPPAC). *Applied Mathematics and Computation,* Τόμος 18, pp. 119-141.

Matarazzo, B., 1988. Preference global frequencies in multicriterion analysis (PRAGMA).. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 36, pp. 36-49.

Matarazzo, B., 1990. A pairvise criterion comparison approach: The MAPPAC and PRAGMA methods. Στο: C. Bana & Costa, επιμ. *Readings in Multiple Criteria Decision Aid.* Berlin: Springer Verlag, pp. 253-273.

Miller, D. & Starr, M., 1969. *Executive decisions and operations research.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Moshkovich, H. & Mechitov, A., 2013. Verbal Decision Analysis: Foundations and Trends. *Advances in Decision Sciences.*

Moshkovich, H., Mechitov, A. & Olson, D., 2005. Verbal Decision Analysis. Στο: J. Figueira, S. Greco & M. Ehrgott, επιμ. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys.* s.l.:Springer.

Oppenheimer, K., 1978. AA P roxy Approach to Multi-Attribute Decision Making. *Management Science,* Τόμος 24, pp. 675-689.

Paelinck, J., 1976. Qualitative multiple criteria analysis, environmental protection and multiregional development. *Papers of the Regional Science Association,* Τόμος 36.

Pardalos, P., Siskos, Y. & Zopounidis, C., 1995. *Advances in Multicriteria Analysis.* s.l.:Kluwer Academic Publishers.

Perny, P., 1998. An Interactive Multiobjective Procedure for Selecting Medium-Term Countermeasures after Nuclear Accidents. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis,* Τόμος 7, pp. 48-60.

Rogers, M., Bruen, M. & Maystre, L.-Y., 2000. *ELECTRE and Decision Support: Methods and applications in engineering and infastructure investment.* s.l.:Kluwer Academic Publisher.

Roubens, M., 1982. Preference relations on actions and criteria in multicriteria decision making. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 10, pp. 51-55.

Roubens, M., 2001. Ordinal multiattribute sorting and ordering in the presence of interacting points of view. Στο: D. Bouyssou, και συν. επιμ. *Aiding decisions with multiple criteria: essays in honor of Bernard Roy.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Roy, B., 1968. Classement et choix en presence de points de vue multiples (la methode ELECTRE). *Revue Francaise d' informatique et de Recherche Operetionelle,* Τόμος 8, pp. 57-75.

Roy, B., 1971. Problems and methods with mupltiple objective functions. *Mathematical Programming,* 1(1), pp. 239-266.

Roy, B., 1976. *From optimization to multimedia decision aid:Three main operational attitudes.* s.l.:Springer-Verlag.

Roy, B., 1985. *Methodologie multicritecre d'aide a la Decision.* Paris: Economica.

Roy, B., 1990. *The Outranking Approach and the foundations of ELECTRE methods.* Springer-Verlag ed. s.l.:s.n.

Roy, B., 1996. *Multicriteria Methodology for Decision Aiding.* Dordchert: Kluwer Academic Publishers.

Roy, B. & Bouyssou, D., 1993. *Aide multicrietre a la Decision: Methodes et Cas.* Paris: Economica.

Roy, B. & Hugonnard, J.-C., 1982. Classement des prolongements de lignes de metro en banlieue parisienne (presenation d' une methode multicritere originale). *Cahiers du CERO,* 24(2-3-4), pp. 153-171.

Roy, B. & Vincke, P., 1981. Multicriteria analysis: Survey and new tendencies. *European Journal of Operational Research,* Τόμος 8, pp. 207-218.

Saaty, T., 1980a. *The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation.* New York: McGraw-Hill.

Saaty, T., 1980b. The analytic hierarchy process. *Decision Support Systems,* Τόμος 8, pp. 343-359.

Scannella, G. & Beuthe, M., 2001. Assessing Risky Public Investments with MUSTARD. *JOURNAL OF MULTI-CRITERIA DECISION ANALYSIS,* Τόμος 10, pp. 287-302.

Simos, J., 1990. L' evaluation environnementale: Un processus cognitif negocie. *These de doctorat.*

Simpson, L., 1994. *MAVT and Outranking A Comparison of Two Multi-Criteria Decision Analytic Methods.* s.l.:University of Leeds.

Siskos, J., 1980. Comment modeliser les preferences au moyen de fonctions d' utilite additives. *RAIRO Recherche Operationelle,* 14(1), pp. 53-82.

Siskos, J. & Yannacopoulos, D., 1985. UTASTAR: An ordinal regression method for building additive value functions. *Investigaao Operational,* Τόμος 5, pp. 39-53.

Siskos, Y., 1983. Analyse de systèmes de décision multicritère en univers aléatoire. *Foundations of Control Engineering,* Volume 10, pp. 193-212.

Siskos, Y., 1985. Analyses de regression et programmation lineaire. *Revue de Statistique Appliquee,* Τόμος XXXII, pp. 41-55.

Siskos, Y. & Assimakopoulos, N., 1989. Multicriteria highway planning: A case study. *Mathematical and Computer Modelling,* Volume 12, pp. 1401-1410.

Siskos, Y., Grigoroudis, E. & Matsatsinis, N., 2005. Outranking theory and the UTA methods. Στο: J. Figueira, S. Greco & M. Ehrgott, επιμ. *Multiple Criteria Decision Analysis-State of the Art Surveys, Internationl series in Operations Research and Management Science.* s.l.:Springer, pp. 297-344.

Valee, D. & Zielniewicz, P., 1994. *ELECTRE III-IV (version 3.x) - Aspects methodologiques.* s.l.:Universide de Paris-Dauphpine.

Vansnick, J., 1986. On the problem of weighs in multiple criteria decision making (the noncompensatory approach). *European Journal of Operational Research,* Τόμος 24, pp. 288-294.

Vincke, P., 1992. *Multicriteria Decision-Aid.* New York: J. Wiley.

von Winterfeldt, D. & Edwards, W., 1986. *Decision analysis and behavioral research.* New York: Cambridge University Press.

Voogd, H., 1982. Multicriteria evaluation with mixed qualitative and quantitative data. *Environment and Planning,* Issue 9, pp. 221-236.

Yntena, D. & Torgerson, W., 1961. *Man-computer cooeration in decision requiring common sense.* s.l.:IRE Transactions on Human Factors in Electronics hfe-2.

Zahedi, F., 1986. The Analytic Hierarchy Process: A Survey of the Method and Its Applications. *Interfaces,* Τόμος 16, pp. 96-108.

Zeng, J., Min, A. & Smith, N., 2007. Application of fuzzy based decision making methodology to construction Project risk assessment. *International Journal of Project Management,* Volume 25, pp. 589-600.

Zionts, S. & Wallenius, J., 1976. *An interactive programming method for solving the multiple criteria problem.* 2 επιμ. s.l.:Management Science.

Zopounidis, C. & Doumpos, M., 1997. Amulticriteria method for sorting decision problems under uncertainty. *Fuzzy Economic Review,* Τόμος 2, pp. 3-15.

Zopounidis, C. & Doumpos, M., 1998. Developing a multicriteria decision support system for financial classification problems:THE FINCLASS system,. *Optimization Methods and Software,* Τόμος 8, pp. 277-304.

Zopounidis, C. & Doumpos, M., 1999a. Business failure prediction usin UTADIS multicriteria analysis. *Joournal of the Operational Research Society,* Τόμος 50, pp. 1138-1148.

Zopounidis, C. & Doumpos, M., 1999b. A multicriteria decision aid methodology for sorting decision problems:The case of financial distress. *Computational Economics,* Τόμος 14, pp. 197-218.

Zopounidis, C. & Doumpos, M., 2000. Building Additive Utilities for Multi-group Hierarchical Discrimination: The M.H.DIS method. *Optimization Methods and Software,* 14(3), pp. 219-240.

Βλάχος, Κ., 2007. *Ανάπτυξη της βάσης γνώσης ενός έμπειρου συστήματος για την επιλογή μεθόδων πολυκριτήριας ανάλυσης.* Χανιά: Πολυτεχνείο Κρήτης Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης - Διπλωματική Εργασία.

Γρηγορούδης, Ε., 1999. *Μεθοδολογία Μέτρησης και Ανάλυσης Ικανοποίησης: Μια πολυκριτήρια αναλυτική-συνθετική προσέγγιση.* s.l.:Διδακτορική Διατριβή Πολυτεχνείο Κρήτης.

Γρηγορούδης, Ε. & Σίσκος, Γ., 2000. *Ποιότητα υπηρεσιών και μέτρηση ικανοποίησης του πελάτη.* s.l.:Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Ζοπουνίδης, Κ., Δούμπος, Μ. & Ματσατσίνης, Ν., 1996. *Πολυκριτήρια Ευφυή Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων για την Αξιολόγηση των Επιδόσεων και της Βιωσιμότητας των Επιχειρήσεων.* Αθήνα: Ίων.

Ζοπουνίδης, Κ., Δούμπος, Μ. & Ματσατσίνης, Ν., 1996. *Πολυκριτήρια Ευφυή Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων για την Αξιολόγηση των Επιδόσεων και της Βιωσιμότητας των Επιχειρήσεων.* Αθήνα: Ίων.

Καραπέτσας, Κ., 2002. *Πολυκριτήρια Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων: Καταγραφή και παρουσίαση των κυριότερων συστημάτων και αξιολόγηση τους με βάση πολυκριτήριες μεθόδους υποστήριξης αποφάσεων.* Χανιά: Πολυτεχνείο Κρήτης.

Ματσατσίνης, Ν., 2010. *Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων.* 1η επιμ. Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Σίσκος, Γ., 2008. *Μοντέλα Αποφάσεων.* 1η επιμ. Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Σίσκος, Ι., 1992. *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακη Έρευνα.* s.l.:Τμημα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης.