



Πολυτεχνείο Κρήτης
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΣ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗΣ
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΣΤΗΝ
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΩΝ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ

ΜΠΑΤΙΣΤΑΚΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΧΑΝΙΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Εξεταστική Επιτροπή

Καθηγητής Γεώργιος Σταυρακάκης (επιβλέπων)

Καθηγητής Μιχάλης Ζερβάκης

Επίκουρος Καθηγητής Μιχάλης Δούμπος

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γεώργιο Σταυρακάκη, για την επίβλεψη της διπλωματικής μου εργασίας, και τον κ. Μιχάλη Ζερβάκη, για την συμμετοχή του στην εξεταστική επιτροπή.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Μιχάλη Δούμπο, για την καθοριστική συμβολή του σε αυτό το εγχείρημα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου, που με βοήθησαν να ζήσω αυτή την αξέχαστη εμπειρία.

Στους δικούς μου ανθρώπους

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 ^ο : Εισαγωγή.....	9
Κεφάλαιο 2 ^ο : Εξελικτικοί αλγόριθμοι.....	11
2.1 Εισαγωγή.....	11
2.2 Τι είναι ένας εξελικτικός αλγόριθμος;	11
2.3 Στοιχεία ενός εξελικτικού αλγορίθμου	14
2.3.1 Αναπαράσταση.....	15
2.3.2 Συνάρτηση αξιολόγησης.....	16
2.3.3 Πληθυσμός.....	16
2.3.4 Αρχικοποίηση	17
2.3.5 Επιλογή.....	17
2.3.6 Τελεστές αναπαραγωγής.....	18
2.3.7 Αντικατάσταση.....	19
2.3.8 Συνθήκη τερματισμού.....	20
2.4 Εφαρμογές εξελικτικών αλγορίθμων.....	21
2.5 Αξιολόγηση εξελικτικών αλγορίθμων.....	21
2.6 Γενετικοί αλγόριθμοι.....	22
2.6.1 Ιστορικά στοιχεία.....	23
2.6.2 Μεθοδολογία γενετικών αλγορίθμων.....	24
2.6.2.1 Τελεστές γενετικών αλγορίθμων.....	24
2.6.3 Αξιολόγηση γενετικών αλγορίθμων.....	30
2.6.4 Πεδία εφαρμογής γενετικών αλγορίθμων.....	31
Κεφάλαιο 3 ^ο : Πολυκριτήρια βελτιστοποίηση	
3.1 Εισαγωγή.....	33

3.2 Κύρια σημεία της πολυκριτήριας βελτιστοποίησης.....	34
3.3 Βελτιστότητα Pareto.....	36
3.3.1 Ασθενής βελτιστότητα Pareto.....	37
3.4 Εφαρμογή εξελικτικών αλγορίθμων στην επίλυση πολυκριτήριων προβλημάτων	39
3.5 Σημαντικά ζητήματα στην σχεδίαση αλγορίθμων πολυκριτήριας εξελικτικής βελτιστοποίησης.....	41
3.5.1 Υπολογισμός καταλληλότητας.....	41
3.5.2 Διατήρηση ποικιλίας.....	42
3.5.3 Ελιτισμός.....	42
3.6 Κατηγοριοποίηση αλγορίθμων πολυκριτήριας εξελικτικής βελτιστοποίησης..	42
3.6.1 Προσεγγίσεις βασιζόμενες στο συνδυασμό αντικειμενικών συναρτήσεων.....	43
3.6.2 Προσεγγίσεις βασιζόμενες στον πληθυσμό.....	43
3.6.3 Προσεγγίσεις βασιζόμενες στο σύνολο Pareto.....	44

Κεφάλαιο 4^ο : Διαχείριση χαρτοφυλακίου

4.1 Η έννοια της απόδοσης.....	48
4.2 Η έννοια του κινδύνου.....	49
4.3 Σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου.....	49
4.3.1 Το μοντέλο του Markowitz.....	49
4.3.2 Το μοντέλο μέσου-διακύμανσης.....	50
4.3.3 Περιορισμοί για το πλήθος των μετοχών.....	52
4.3.4 Κριτική για την σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου.....	53
4.3.5 Επιλογή και διαχείριση χαρτοφυλακίων.....	53
4.4 Η έννοια της Value at Risk (VaR).....	54
4.4.1 Υπολογισμοί της VaR.....	55

4.4.2 Ιστορική προσομοίωση.....	56
---------------------------------	----

Κεφάλαιο 5^ο : Εφαρμογή πολυκριτήριας εξελικτικής βελτιστοποίησης στην κατασκευή επενδυτικών χαρτοφυλακίων

5.1 Εισαγωγή.....	58
5.2 Σκοπός της εργασίας.....	59
5.3 Μεθοδολογία επίλυσης.....	60
5.4 Δεδομένα.....	61
5.5 Ο αλγόριθμος.....	62
5.6 Μοντελοποίηση του προβλήματος.....	62
5.6.1 Υπολογισμός των αντικειμενικών συναρτήσεων.....	62
5.6.2 Αναπαράσταση των λύσεων.....	64
5.7 Διαδικασίες του αλγορίθμου.....	65
5.7.1 Εντοπισμός μη-κυριαρχούμενων λύσεων.....	65
5.7.2 Κατάταξη λύσεων.....	66
5.7.3 Υπολογισμός πυκνότητας των λύσεων του αποτελεσματικού συνόλου.....	66
5.7.4 Επιλογή λύσεων.....	68
5.7.5 Γενετικοί τελεστές.....	69
5.7.6 Βασική δομή του αλγορίθμου.....	70
5.8 Αποτελέσματα.....	72
5.8.1 Δεδομένα εισόδου.....	73
5.8.2 Παράμετροι.....	73
5.8.3 Αντικειμενικές συναρτήσεις.....	74
5.8.4 Αποτελέσματα των χαρτοφυλακίων με μεταγενέστερα αποτελέσματα.....	74

5.8.5 Μέτρηση της ποιότητας των λύσεων βάσει της έκτασης των παραμέτρων.....	74
5.8.6 Αναμενόμενη απόδοση-κίνδυνος.....	75
5.8.7 Τρεις αντικειμενικές συναρτήσεις (απόδοση, κίνδυνος, VaR)	79
5.8.8 Όλες οι αντικειμενικές συναρτήσεις.....	81
5.8.9 Σύγκριση αποτελεσμάτων, ανά περίπτωση αντικειμενικών συναρτήσεων.....	82
5.8.10 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων με μελλοντικά δεδομένα.....	86
5.8.11 Αξιολόγηση μετοχών.....	91
 Κεφάλαιο 6 ^ο : Συμπεράσματα.....	94
6.1 Μελλοντική εργασία.....	96
 Αναφορές.....	98

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Στην επιστήμη των μηχανικών, η βελτιστοποίηση προβλημάτων αποτελεί ένα πεδίο τεράστιας σημασίας και ευρείας εφαρμογής. Τα περισσότερα προβλήματα βελτιστοποίησης του πραγματικού κόσμου χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη πολλαπλών κριτηρίων, και ορίζονται ως πολυκριτήρια προβλήματα.

Οι δυνατότητες που παρέχει ο χώρος της πληροφορικής, θεωρούνται σημαντικές για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Σε αυτά τα πλαίσια, μια κατηγορία αλγορίθμων που βασίζονται στην εξελικτική διαδικασία, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, εφαρμόζονται στην διαδικασία επίλυσης πολυκριτήριων προβλημάτων. Αυτοί οι αλγόριθμοι, καλούνται πολυκριτήριοι εξελικτικοί αλγόριθμοι, και θεωρούνται ιδανικοί για την προσέγγιση πολυκριτήριων προβλημάτων. Για αυτό το λόγο, στον χώρο των εξελικτικών αλγορίθμων, παρατηρείται έντονη ερευνητική δραστηριότητα, με σκοπό με περαιτέρω αξιοποίηση της εφαρμογής των εξελικτικών αλγορίθμων.

Στις σύγχρονες οικονομικές συνθήκες, ένα πρόβλημα το οποίο απασχολεί έντονα τους ερευνητές, είναι η βέλτιστη δυνατή κατασκευή χαρτοφυλακίων. Η πρώτη εργασία η οποία ακόμα και σήμερα έχει ευρεία εφαρμογή είναι η «Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου» από τον Markowitz, βάσει της οποίας, η βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου ορίζεται από το μοντέλο μέσου-διακύμανσης, όπου η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου πρέπει να μεγιστοποιείται, ενώ η διασπορά να ελαχιστοποιείται. Οι σύγχρονες μελέτες, προτείνουν μια εναλλακτική μορφή υπολογισμού του κινδύνου, την Value at Risk (VaR). Σημαντικός παράγοντας στην κατασκευή χαρτοφυλακίων, είναι και το μέγεθος του.

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι αρχίζουν και εφαρμόζονται αρκετά συχνά, στην επίλυση του πολυκριτήριου προβλήματος της κατασκευής βέλτιστων χαρτοφυλακίων. Η πλέον κλασσική μορφή του προβλήματος είναι η βελτιστοποίησή του, βάσει του μοντέλου μέσου-διακύμανσης. Στα πλαίσια του προβλήματος, υπάρχει συνήθως και ένας περιορισμός στο μέγιστο μέγεθος που μπορεί να έχει ένα χαρτοφυλάκιο.

Στα πλαίσια της εργασίας, υλοποιείται ο εξελικτικός αλγόριθμος NSGA-II, με σκοπό την βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων. Η προσέγγιση της επίλυσης γίνεται με τρεις τρόπους. Ο πρώτος είναι το μοντέλου μέσου-διακύμανσης, ο δεύτερος εισάγει την VaR στον υπολογισμό του κινδύνου, και ο τρίτος είναι η εισαγωγή του μεγέθους του χαρτοφυλακίου, ως κριτήριο βελτιστοποίησης. Επίσης, υπάρχει περιορισμός για το ελάχιστο και το μέγιστο μέγεθος των χαρτοφυλακίων, όπως επίσης για το ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής μίας μετοχής, σε ένα χαρτοφυλάκιο.

Στο 2^ο κεφάλαιο, παρουσιάζονται αναλυτικά οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, οι εφαρμογές τους, καθώς και μια σημαντική κατηγορία εξελικτικών αλγορίθμων, οι γενετικοί αλγόριθμοι.

Στο κεφάλαιο 3, αναλύονται όλες οι αρχές και οι τεχνικές της πολυκριτήριας βελτιστοποίησης και ο ορισμός των βέλτιστων συνόλων. Επίσης, γίνεται αναφορά στην εφαρμογή των εξελικτικών αλγορίθμων, στην επίλυση πολυκριτήριων προβλημάτων, οι αρχές της σχεδίασής τους, καθώς και η κατηγοριοποίησή τους.

Στο 4^ο κεφάλαιο, παρουσιάζονται, όλα τα χρήσιμα ζητήματα της διαχείρισης χαρτοφυλακίων. Γίνεται αναφορά στις έννοιες του κινδύνου, της απόδοσης, στην προσέγγιση και τους υπολογισμούς της VaR. Επίσης, γίνεται αναλυτική αναφορά στην σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου.

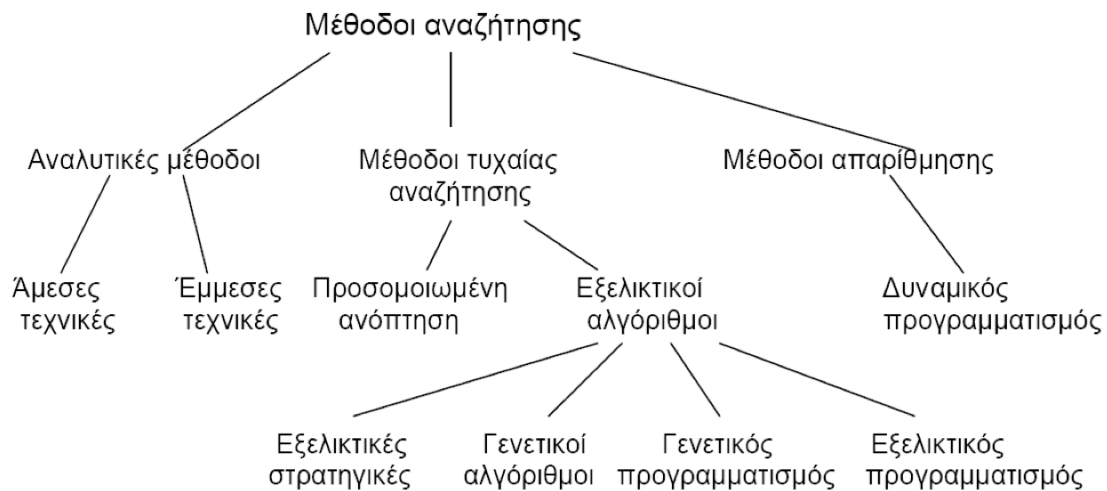
Στο 5^ο κεφάλαιο, αναφέρεται η εφαρμογή των εξελικτικών αλγορίθμων, στην διαδικασία κατασκευής επενδυτικών χαρτοφυλακίων. Παρουσιάζεται ο σκοπός της εργασίας, τα δεδομένα, και οι αντικειμενικές συναρτήσεις του προβλήματος. Επίσης, γίνεται αναλυτική παρουσίαση των διαδικασιών που ακολουθεί ο αλγόριθμος της εφαρμογής. Τέλος, παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του αλγορίθμου.

Στο 6^ο και τελευταίο κεφάλαιο, αναφέρονται τα συμπεράσματα από την υλοποίηση της εργασίας, καθώς και οι δυνατότητες για μελλοντική εργασία.

Κεφάλαιο 2: Εξελικτικοί Αλγόριθμοι

2.1 Εισαγωγή

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι είναι στοχαστικές μέθοδοι αναζήτησης, οι οποίες έχουν εφαρμοσθεί σε ποικίλα προβλήματα αναζήτησης, βελτιστοποίησης και μηχανικής μάθησης. Η βασική ιδέα των εξελικτικών είναι πως οι πιθανές λύσεις ομαδοποιούνται σε έναν πληθυσμό, και επεξεργάζονται με ανταγωνιστικό τρόπο, ώστε να καταλήξουν σε μία βέλτιστη λύση. Στο σχήμα 1 παρουσιάζεται μία ταξινόμηση των μεθόδων αναζήτησης.



Σχήμα 1. Ταξινόμηση μεθόδων αναζήτησης

2.2 Τι είναι ένας εξελικτικός αλγόριθμος;

Σύμφωνα με την ιστορία του αντικειμένου των εξελικτικών αλγορίθμων, υπάρχουν αρκετές εκδοχές εξελικτικών αλγορίθμων. Η κοινή υποκείμενη ιδέα πίσω από όλες αυτές τις τεχνικές είναι η ίδια: δοθέντος ενός πληθυσμού ατόμων (individuals) η πίεση του περιβάλλοντος προκαλεί φυσική επιλογή (επιβίωση του καταλληλότερου) που προκαλεί μια αύξηση στην καταλληλότητα (fitness) του πληθυσμού. Δοθείσας μια συνάρτησης ποιότητας (quality function) που πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι δυνατόν να δημιουργηθούν τυχαία σύνολα υποψηφίων λύσεων π.χ. στοιχεία από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, και να εφαρμόσουμε την συνάρτηση ποιότητας σαν μία γενική μέτρηση της καταλληλότητας—όσο υψηλότερη μέτρηση, τόσο το καλύτερο. Βασιζόμενοι σε αυτή

την έννοια της καταλληλότητας, κάποιες από τις καλύτερες υποψήφιας λύσεις επιλέγονται να ώστε να δημιουργήσουν την επόμενη γενιά, εφαρμόζοντας επανασυνδυασμό (recombination) και/ή μετάλλαξη (mutation) σε αυτές. Ο επανασυνδυασμός είναι ένας τελεστής που εφαρμόζεται σε δύο ή περισσότερες επιλεγμένες υποψήφιας λύσεις (οι αποκαλούμενοι ως γονείς). Η μετάλλαξη εφαρμόζεται σε μία υποψήφιας λύση και καταλήγει σε μια νέα υποψήφιας λύση. Εκτελώντας επανασυνδυασμό και μετάλλαξη οδηγούμαστε σε ένα νέο σύνολο υποψήφιας λύσεων (the offsprings) το οποίο ανταγωνίζεται –βασιζόμενο στην καταλληλότητά του (fitness)– με τα παλιά σύνολα λύσεων για μία θέση στην επόμενη γενιά. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι μία υποψήφιας λύση με επαρκή καταλληλότητα να βρεθεί ή να μέχρι να φτάσει η διαδικασία στο υπολογιστικό όριο ενός προηγούμενου συνόλου

Σε αυτή τη διαδικασία υπάρχουν δύο θεμελιώδεις δυνάμεις που σχηματίζουν τη βάση των εξελικτικών συστημάτων

- Οι τελεστές διαφοροποίησης (επανασυνδυασμός και μετάλλαξη) που δημιουργούν την κατάλληλη ποικιλομορφία και έτσι διευκολύνουν την καινοτομία (novelty), και
- η επιλογή που δρα ως δύναμη αύξησης της ποιότητας (pushing quality)

Η συνδυασμένη εφαρμογή διαφοροποίησης και επιλογής γενικά οδηγεί στη βελτίωση των τιμών καταλληλότητας σε διαδοχικούς πληθυσμούς. Στην περίπτωση που μια διαδικασία είναι προς βελτιστοποίηση, επιτυγχάνεται προσέγγιση των βέλτιστων δυνατών τιμών, οι οποίες λαμβάνουν όλο και κοντινότερες τιμές, κατά την εξέλιξη της διαδικασίας. Εναλλακτικά, εξέλιξη παρατηρείται συχνά σαν μία διαδικασία προσαρμογής. Από αυτήν την προοπτική, η καταλληλότητα δεν φαίνεται σαν μια αντικειμενική συνάρτηση που πρέπει να βελτιστοποιηθεί, αλλά σαν μία έκφραση των περιβαλλοντικών απαιτήσεων. Αυξάνοντας αυτές τις απαιτήσεις όλο και περισσότερο, προκύπτει μια αυξημένη βιωσιμότητα, ανακλώμενη σε ένα μεγαλύτερο αριθμό απογόνων (offsprings). Η εξελικτική διαδικασία κάνει τον πληθυσμό να προσαρμόζεται στο περιβάλλον όλο και καλύτερα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι πολλά στοιχεία μιας τέτοιας εξελικτικής διαδικασίας είναι στοχαστικά. Κατά τη διάρκεια της επιλογής, τα άτομα με τις καλύτερες συνθήκες καταλληλότητας έχουν περισσότερες ευκαιρίες να επιλεγθούν σε σχέση με τα άτομα που υστερούν σε επίπεδα καταλληλότητας, αλλά τυπικά ακόμα και τα αδύναμα άτομα έχουν την δυνατότητα να γίνουν γονείς ή ακόμα να επιβιώσουν. Για τον επανασυνδυασμό των ατόμων η επιλογή των τμημάτων (pieces) που θα επανασυνδυαστούν είναι τυχαία. Παρομοίως για την μετάλλαξη, τα κομμάτια που θα μεταλλαχθούν εντός μίας υποψήφιας λύσης, και τα νέα κομμάτια που θα τα αντικαταστήσουν, επιλέγονται τυχαία. Η γενική μορφή ενός εξελικτικού αλγορίθμου παρουσιάζεται, σε ψευδό-κώδικα, στο ακόλουθο σχήμα.

ΑΡΧΗ

ΑΡΧΙΚΟΠΟΙΗΣΗ Πληθυσμού με τυχαίες υποψήφιας λύσεις

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ κάθε υποψήφιας λύσης

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού

1.ΕΠΙΛΟΓΗ γονέων

2.ΕΠΑΝΑΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ γονέων

3.ΜΕΤΑΛΛΑΞΗ στους απογόνους

4.ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ των νέων υποψηφίων

5.ΕΠΙΛΟΓΗ ατόμων για την επόμενη γεννιά

ΤΕΛΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΤΕΛΟΣ

Σχήμα 2.Γενική μορφή εξελικτικού αλγορίθμου σε ψευδό-κώδικα.

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί πως αυτή η μορφή ενός εξελικτικού αλγορίθμου εμπίπτει στην κατηγορία των generate-and-test αλγορίθμων. Η εξέλιξη (φυσική κατάσταση) αναπαριστά μια ευρετική εκτίμηση της ποιότητας της λύσης και η διαδικασία αναζήτησης οδηγείται από τους τελεστές διακύμανσης και επιλογής. Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι διαθέτουν έναν αριθμό χαρακτηριστικών που μπορούν να βοηθήσουν την τοποθέτησή τους εντός της οικογένειας των generates-and-test μεθόδων:

- Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι βασίζονται στον πληθυσμό (population based) .
- Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούν κυρίως επανασυνδυασμό (recombination) για να συνδυάσουν πληροφορίες από περισσότερες υποψήφιας λύσεις σε μια νέα υποψήφια λύση.
- Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι είναι στοχαστικοί.

Οι ποικίλες παραλλαγές μίας εξελικτικής προσέγγισης που έχουμε αναφέρει προηγουμένως ακολουθούν τις ανώτερες γενικές αρχές ,και διαφέρουν μόνο σε τεχνικές λεπτομέρειες. Για παράδειγμα, η αναπαράσταση μίας υποψήφιας λύσης συχνά χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει διαφορετικά streams.Τυπικά, οι υποψήφιας λύσεις

στους γενετικούς αλγορίθμους αναπαρίστανται από strings σε ένα πεπερασμένο αλφάβητο, διανύσματα πραγματικών τιμών στον εξελικτικό προγραμματισμό και με δέντρα στον γενετικό προγραμματισμό. Όλες αυτές οι διαφορές έχουν μία κύρια ιστορική προέλευση. Τεχνικά, μια δοθείσα αναπαράσταση ίσως είναι προτιμότερη έναντι άλλων εάν συνδυάζει το δοθέν πρόβλημα καλύτερα, τότε κάνει την κωδικοποίηση των υποψηφίων λύσεων ευκολότερη ή περισσότερο φυσική. Πρακτικά, για την επίλυση ενός προβλήματος ικανοποίησης, η σαφής επιλογή είναι να χρησιμοποιηθούν bit-strings μήκους n , όπου n είναι ο αριθμός των λογικών μεταβλητών, συνεπώς ο κατάλληλος εξελικτικός αλγόριθμος θα πρέπει να είναι ένας γενετικός αλγόριθμος. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε πώς ο επανασυνδυασμός και η μετάλλαξη που εφαρμόζονται σε υποψήφιες λύσεις πρέπει να συνδυάσουν την δοθείσα αναπαράσταση. Έτσι για παράδειγμα, στον γενετικό προγραμματισμό ο τελεστής επανασυνδυασμού λειτουργεί σε δέντρα, ενώ στους γενετικούς αλγορίθμους λειτουργεί σε strings. Σε αντίθεση με τους τελεστές διαφοροποίησης, η επιλογή συνοψίζει μόνο τις πληροφορίες της καταλληλότητας, συνεπώς λειτουργεί ανεξάρτητα από την τρέχουσα αναπαράσταση.

Όπως δηλώνεται από την περιγραφή ενός εξελικτικού αλγορίθμου σε μορφή ψευδό-κώδικα, αλλά και από το διάγραμμα ροής του σχήματος 3 η διαδικασία που ακολουθεί ένας εξελικτικός αλγόριθμος είναι ο εξής.

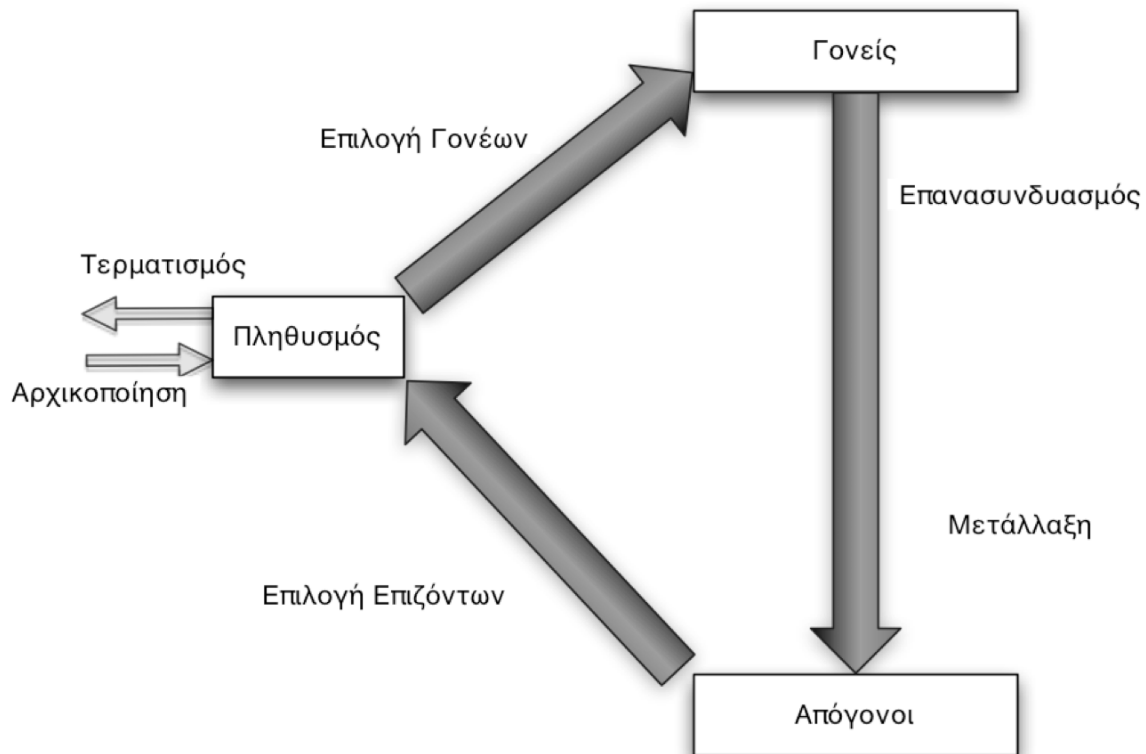
- ✓ Αρχικοποιείται με τυχαίες διαδικασίες ο πληθυσμός.
- ✓ Επιλέγονται οι γονείς εκτελώντας την διαδικασία της επιλογής.
- ✓ Δημιουργούνται οι απόγονοι που προκύπτουν από τους τελεστές της διασταύρωσης και της μετάλλαξης.
- ✓ Αξιολογούνται οι απόγονοι ώστε να αποτελέσουν τον νέο πληθυσμό.

2.3 Στοιχεία ενός εξελικτικού αλγορίθμου

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε λεπτομερώς τα κομμάτια ενός εξελικτικού αλγορίθμου. Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι διαθέτουν έναν αριθμό από στοιχεία, διαδικασίες ή τελεστές που πρέπει να καθοριστούν για να ορίσουμε έναν εξελικτικό αλγόριθμο [1]. Τα κύρια στοιχεία που ορίζονται και στο Σχήμα 3 είναι:

- 1) Αναπαράσταση(ορισμός των ατόμων)
- 2) Συνάρτηση αξιολόγησης

- 3) Πληθυσμός
- 4) Συντελεστές διακύμανσης, επανασυνδυασμού και μετάλλαξης
- 5) Μηχανισμός επιλογής επιζώντων(αντικατάσταση)



Σχήμα 3. Η γενική μορφή ενός εξελικτικού αλγορίθμου σε διάγραμμα ροής.

Τα στοιχεία αυτά πρέπει να προσδιοριστούν έτσι ώστε να οριστεί με ακρίβεια ένας συγκεκριμένος εξελικτικός αλγόριθμος. Επιπλέον, για να μπορέσουμε να ορίσουμε έναν εκτελέσιμο αλγόριθμο, οι διαδικασίες αρχικοποίησης και τερματισμού πρέπει επίσης να οριστούν.

2.3.1 Αναπαράσταση (Ορισμός των ατόμων)

Το πρώτο βήμα στον ορισμό ενός εξελικτικού αλγορίθμου είναι η σύνδεση του “πραγματικού κόσμου” με τον “κόσμο” του εξελικτικού αλγορίθμου. Ουσιαστικά είναι η γέφυρα ανάμεσα στο πλαίσιο εφαρμογής του αυθεντικού προβλήματος και του χώρου

λύσης του προβλήματος, όπου θα πραγματοποιηθεί η εξέλιξη. Οι αντικειμενικοί στόχοι που σχηματίζουν πιθανές λύσεις μέσα στο πλαίσιο εφαρμογής του αυθεντικού προβλήματος αναφέρονται ως φαινότυποι (phenotypes) (φαινότυποι) και η κωδικοποίησή τους, τα άτομα μέσα στον εξελικτικό αλγόριθμο καλούνται γενότυποι (genotypes). Το πρώτο βήμα σχεδίασης καλείται **αναπαράσταση (representation)** αφού είναι ο ορισμός μιας αντιστοίχισης από τους φαινότυπους σε ένα σύνολο γενοτύπων που αναπαριστούν αυτά τους φαινότυπους. Ο εξελικτικός υπολογισμός χρησιμοποιεί πολλά συνώνυμα για να ορίσει στοιχεία των δύο χώρων. Από την πλευρά του πλαισίου του αρχικού προβλήματος, **υποψήφια λύση**, φαινότυποι και **άτομο** χρησιμοποιούνται για να υποδηλώσουν σημεία στον χώρο των δυνατών λύσεων. Από την πλευρά των εξελικτικών αλγορίθμων γενότυποι, **χρωμόσωμα και άτομο** χρησιμοποιούνται για σημεία στον χώρο που η εξελικτική αναζήτηση θα πραγματοποιηθεί. [2]

2.3.2 Συνάρτηση Αξιολόγησης (Evaluation Function)

Ο ρόλος της συνάρτησης αξιολόγησης είναι η αναπαράσταση των απαιτήσεων που πρέπει να προσαρμοστούν. Ειδικότερα, ορίζει τι σημαίνει βελτίωση. Από την προοπτική της επίλυσης του προβλήματος, αναπαριστά τη διαδικασία της επίλυσης σε ένα εξελικτικό πλαίσιο. Τεχνικά, είναι μια συνάρτηση ή διαδικασία που ορίζει ένα μέτρο ποιότητας για τους γενοτύπους. Τυπικά, αυτή η συνάρτηση απαρτίζεται από ένα μέτρο ποιότητας στον χώρο του φαινότυπου και την αντίστροφη αναπαράσταση. Η συνάρτηση αξιολόγησης καλείται συνήθως ως συνάρτηση καταλληλότητας (fitness function) στον εξελικτικό υπολογισμό.

Αρκετά συχνά το αρχικό πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί από έναν εξελικτικό αλγόριθμο είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Σε αυτή την περίπτωση ο όρος αντικειμενική συνάρτηση (objective function) χρησιμοποιείται στο πλαίσιο του αρχικού προβλήματος και η συνάρτηση αξιολόγησης μπορεί να είναι πανομοιότυπη της δοθείσας αντικειμενικής συνάρτησης.

2.3.3 Πληθυσμός (Population)

Ο ρόλος του πληθυσμού είναι να διατηρήσει (την αναπαράσταση) των δυνατών λύσεων. Ο πληθυσμός είναι ένα σύνολο από γενοτύπους. Ο πληθυσμός σχηματίζει τη μονάδα της εξέλιξης. Τα άτομα είναι αντικείμενα στατικά, που δεν αλλάζουν ή προσαρμόζονται, ο πληθυσμός είναι που αλλάζει. Δοθείσας μιας αναπαράστασης, ο ορισμός ενός πληθυσμού μπορεί να είναι τόσο απλός, όπως να προσδιοριστεί ο αριθμός των ατόμων που είναι μέσα στον πληθυσμό, δηλαδή το μέγεθος του πληθυσμού. Σε σχεδόν όλες τις εφαρμογές των εξελικτικών αλγορίθμων το μέγεθος του πληθυσμού παραμένει σταθερό, και δεν αλλάζει κατά τη διάρκεια της εξελικτικής αναζήτησης.

2.3.4 Αρχικοποίηση

Η αρχικοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία δημιουργείται ο αρχικός πληθυσμός ο οποίος θα είναι η είσοδος ενός εξελικτικού αλγορίθμου. Στις περισσότερες εφαρμογές εξελικτικών αλγορίθμων η διαδικασία της αρχικοποίησης είναι σχετικά απλή. Μια συνηθισμένη τακτική είναι να δημιουργούνται τυχαία επιλεγμένα άτομα. Σε αυτό το στάδιο του εξελικτικού αλγορίθμου, μπορούν να προσδιοριστούν οι ειδικές ευριστικές συναρτήσεις σε έναν αρχικό πληθυσμό που θα χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη καταλληλότητα.

Για να ξεκινήσει η εξελικτική διαδικασία του αλγορίθμου, απαιτείται η δημιουργία ενός αρχικού πληθυσμού λύσεων. Η δημιουργία αυτού του αρχικού πληθυσμού είναι συνήθως μια τυχαία διαδικασία. Στην περίπτωση που το εύρος των υποψηφίων λύσεων χαρακτηρίζεται από μικρό πλήθος, η τυχαία αρχικοποίηση παρέχει περισσότερο ή λιγότερο ομοιόμορφα δείγματα από τον χώρο λύσεων. Ο αλγόριθμος μπορεί στη συνέχεια να ξεκινήσει την αναζήτηση της ευρύτερης περιοχής λύσεων του αρχικού πληθυσμού, στην προσπάθεια εύρεσης των περισσότερων "υποσχόμενων" περιοχών λύσεων.

Σε κάποιες περιπτώσεις, υπάρχει η πιθανότητα οι λύσεις του αρχικού πληθυσμού να μην αντιπροσωπεύουν ικανοποιητικά το σύνολο του χώρου αναζήτησης. Σε αυτή την περίπτωση είναι απαραίτητη η εφαρμογή συστηματικών διαδικασιών αρχικοποίησης [3], ώστε να εξασφαλιστεί η μια ομοιόμορφη αναπαράσταση στον αρχικό πληθυσμό.

2.3.5 Επιλογή

Ο μηχανισμός επιλογής γονέων είναι ένας σημαντικός μηχανισμός κατά τη διαδικασία της δημιουργίας των επόμενων γενεών για τον εξελικτικό αλγόριθμο. Ουσιαστικά η διαδικασία της επιλογής (parent selection) αφορά το διαχωρισμό ανάμεσα στα άτομα (individuals) βασιζόμενη στην ποιότητα τους ώστε να επιτρέπει στο καλύτερα άτομα να γίνουν γονείς για τα παιδιά που θα απαρτίζουν τις επόμενες γενιές. Ένα άτομο είναι ένας **γονέας** εάν έχει επιλεγθεί να υποβληθεί σε παραλλαγή έτσι ώστε να δημιουργήσει απογόνους. Κατά τη διαδικασία του εξελικτικού υπολογισμού, η διαδικασία επιλογής γονέων είναι συνήθως πιθανολογική. Έτσι, τα άτομα τα οποία έχουν υψηλή ποιότητα, διαθέτουν μεγαλύτερες πιθανότητες να γίνουν γονείς σε σχέση με εκείνα τα άτομα που δεν διαθέτουν ανάλογη ποιότητα. Παρόλα αυτά, ακόμα και τα άτομα που διαθέτουν χαμηλή ποιότητα έχουν συχνά μια μικρή αλλά θετική πιθανότητα να γίνουν γονείς, αλλιώς η συνολική αναζήτηση θα γινόταν τόσο άπληστη ώστε να παραμείνει ακινητοποιημένη σε ένα τοπικό βέλτιστο.

Οι πιο διαδεδομένες τεχνικές είναι οι μέθοδοι αναλογίας καταλληλότητας (fitness-proportionate). Σε αυτές τις μεθόδους, η πιθανότητα επιλογής ενός ατόμου είναι

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j \in P} f_j},$$

όπου f_i είναι η τιμή της καταλληλότητας ενός ατόμου i , και p_i είναι η πιθανότητα να συμμετέχει το άτομο i στη διαδικασία της αναπαραγωγής.

Το κύριο πρόβλημα αυτής της μεθόδου είναι πως στην περίπτωση που υπάρχουν άτομα του πληθυσμού με αρκετά καλύτερες τιμές καταλληλότητας σε σύγκριση με τα υπόλοιπα άτομα, τότε μπορούν να "ελέγχουν" τον πληθυσμό. Για την αποφυγή αυτής της κατάστασης, ακολουθείται μια μέθοδος που δεν βασίζεται στην καταλληλότητα των ατόμων, αλλά στην κατάταξή τους στον πληθυσμό (linear ranking), ακολουθώντας τις παρακάτω πιθανότητες [59]

$$p_i = \frac{1}{P} \left[n^- + (n^+ - n^-) \frac{i-1}{|P|-1} \right]$$

Όπου p_i είναι η πιθανότητα να επιλεγεί η $i^{\text{οστη}}$ καλύτερη λύση, ενώ n^- και n^+ είναι παράμετροι που καθορίζουν τη συχνότητα επιλογής της χειρότερης και της καλύτερης λύσης αντίστοιχα ($n^- + n^+ = 2$, $1 \leq n^+ \leq 2$).

Υπάρχουν αρκετές διαφορετικές προσεγγίσεις [4,5] στην διαδικασία επιλογής.

2.3.6 Τελεστές Αναπαραγωγής (Variation Operators)

Οι τελεστές αναπαραγωγής έχουν ως στόχο να δημιουργήσουν νέα άτομα, έχοντας ως αφετηρία άτομα από παλαιότερες γενιές. Ουσιαστικά από τους τελεστές απόκλισης αναμένεται να δημιουργηθούν οι νέες υποψήφιες λύσεις. Οι δύο τελεστές απόκλισης που αναλύονται είναι η διασταύρωση (crossover) και η μετάλλαξη (mutation).

Διασταύρωση

Η διαδικασία της διασταύρωσης είναι ένας δυαδικός τελεστής απόκλισης. Η διασταύρωση χρησιμοποιεί δεδομένα από δύο (συνήθως είναι δύο, αλλά είναι δυνατόν να είναι και περισσότεροι [7]) άτομα-γονείς τα οποία επιλέγονται να διασταυρωθούν για να δημιουργήσουν τους αντίστοιχους απογόνους. Η βασική αρχή λειτουργίας της διασταύρωσης είναι πως συνδυάζοντας δύο γονείς μπορούμε να δημιουργήσουμε απογόνους. Αυτοί οι απόγονοι διαθέτουν κάποια επιθυμητά χαρακτηριστικά, τα οποία επιθυμούμε να κληρονομήσουν και οι απόγονοί τους. Η διασταύρωση είναι μια στοχαστική διαδικασία. Η επιλογή των γονέων που θα επιλεγθούν να συμμετάσχουν στη διασταύρωση γίνεται με τυχαίο τρόπο (μία τυχαία επιλογή ατόμων-γονέων από ένα σύνολο πληθυσμού). Επίσης με τυχαίο τρόπο δύναται να επιλεγθούν και ποιά μέρη των

γονέων θα αξιοποιηθούν στη διασταύρωση ή ακόμα και ο τρόπος που θα ακολουθηθεί για τη διαδικασία. Η διασταύρωση αξιοποιείται και εφαρμόζεται με διαφορετικό τρόπο σε διάφορα αντικείμενα του εξελικτικού υπολογισμού. Στους γενετικούς αλγορίθμους αποτελεί τον κύριο συντελεστή απόκλισης, στο γενετικό προγραμματισμό είναι ο μόνος διαθέσιμος τελεστής απόκλισης ενώ τέλος στον εξελικτικό προγραμματισμό δεν έχει καμία απολύτως εφαρμογή.

Στην περίπτωση κατά την οποία οι απόγονοι προέρχονται εξολοκλήρου από τον συνδυασμό των γονιών τους, η διασταύρωση ορίζεται ως μεταδιδόμενη (transmitting) [8,9]. Αυτός ο τύπος διασταύρωσης ακολουθείται στις περιπτώσεις διασταύρωσης ενός σημείου (single point crossover) και της ομοιόμορφης διασταύρωσης [10].

Μετάλλαξη

Η διαδικασία της μετάλλαξης είναι ένας μοναδιαίος τελεστής αναπαραγωγής. Η μετάλλαξη εφαρμόζεται σε ένα άτομο (γενότυπο) και παραδίδει έναν τροποποιημένο μεταλλαγμένο άτομο, το οποίο καλείται **απόγονος**. Η διαδικασία της μετάλλαξης χαρακτηρίζεται από την στοχαστικότητα της. Η διαδικασία της μετάλλαξης αξιοποιείται με διαφορετικό τρόπο και σημασία σε διάφορες μορφές εξελικτικού προγραμματισμού. Στους γενετικούς αλγορίθμους αξιοποιείται σαν μια διαδικασία για την ανανέωση των γονιδίων ,στον εξελικτικό προγραμματισμό είναι ο μοναδικός τελεστής απόκλισης ενώ στον γενετικό προγραμματισμό δεν χρησιμοποιείται ευρέως.

Σαν τελεστής αναπαραγωγής, η μετάλλαξη θεωρείται δευτερευούσης σημασίας, σε σχέση με τη διασταύρωση, που έχει ως στόχο να διατηρήσει την ποικιλομορφία του πληθυσμού, εισάγοντας νέες λύσεις στον πληθυσμό, αλλά σε χαμηλό ποσοστό (σε σχέση με την συνεισφορά της διασταύρωσης).

2.3.7 Αντικατάσταση (Replacement)

Η διαδικασία της αντικατάστασης έχει αρκετές ομοιότητες με τη διαδικασία της επιλογής. Ο λόγος αυτής της ομοιότητας είναι πως έχει ως σκοπό το διαχωρισμό των ατόμων βάσει της ποιότητάς τους. Γνωρίζοντας πως το μέγεθος του πληθυσμού παραμένει σταθερό¹, είναι απαραίτητη μια διαδικασία επιλογής η οποία θα επιτρέπει στα άτομα που θα διαθέτουν τις ανάλογες απαιτήσεις, που συνήθως είναι η συνάρτηση καταλληλότητας. Τα άτομα που διαθέτουν καλύτερη συνάρτηση καταλληλότητας έχουν και σε αυτήν τη διαδικασία πλεονέκτημα στην επιλογή τους για την επόμενη γενιά. Επίσης, η διαδικασία της αντικατάστασης εφαρμόζεται ενώ έχουν δημιουργηθεί απόγονοι από τους επιλεχθέντες γονείς. Μια διαφορά ανάμεσα στη διαδικασία της αντικατάστασης και στη

¹ Δεν είναι υποχρεωτικό [11], αλλά ακολουθείται σαν κοινή τακτική

διαδικασία της επιλογής είναι πως η αντικατάσταση είναι ντετερμινιστική ενώ η επιλογή είναι στοχαστική διαδικασία.

Η αντικατάσταση μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους:

- ❖ Αντικατάσταση του χειρότερου ατόμου : Ο πληθυσμός ταξινομείται βάσει της καταλληλότητας του και τα νέα άτομα αντικαθιστούν τα χειρότερα του πληθυσμού
- ❖ Τυχαία αντικατάσταση: Τα άτομα που αντικαθιστώνται επιλέγονται με τυχαίο τρόπο.
- ❖ Tournament αντικατάσταση: Ένα υποσύνολο α ατόμων επιλέγεται τυχαία, και το χειρότερο από αυτά επιλέγεται για αντικατάσταση. Αξίζει να σημειωθεί πως εάν ισχύει ότι $\alpha=1$, πραγματοποιείται τυχαία αντικατάσταση.
- ❖ Άμεση αντικατάσταση: Οι απόγονοι αντικαθιστούν τους γονείς τους.

2.3.8 Συνθήκη Τερματισμού

Η συνθήκη τερματισμού είναι η συνθήκη η οποία θα τερματίζει τη λειτουργία του εξελικτικού αλγορίθμου. Στις συνθήκες τερματισμού για έναν εξελικτικό αλγόριθμο μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση το πρόβλημα που καλούμαστε να βελτιστοποιήσουμε διαθέτει ένα βέλτιστο επίπεδο καταλληλότητας που προκύπτει από τη βέλτιστη δυνατή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος. Σε αυτή την περίπτωση, όταν η λειτουργία του αλγορίθμου φτάσει σε αυτό το επίπεδο, η συνθήκη τερματισμού ενεργοποιείται και ο αλγόριθμος πρέπει να σταματάει την λειτουργία του. Επειδή όμως γνωρίζουμε πως οι εξελικτικοί αλγόριθμοι είναι στοχαστικές διαδικασίες, υπάρχει πάντα η πιθανότητα να μην φθάσει ο αλγόριθμος σε μια βέλτιστη λύση, άρα να μην ικανοποιηθεί ποτέ η συνθήκη τερματισμού, με αποτέλεσμα να μην τελειώσει ποτέ ο αλγόριθμος. Είναι προφανές πως σε αυτή την περίπτωση πρέπει να τεθεί μια εφαρμόσιμη συνθήκη τερματισμού ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να τερματίσει ο αλγόριθμος. Οι πλέον εφαρμοσμένες τεχνικές για συνθήκες τερματισμού είναι :

- Όταν παρέρχεται ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμών κύκλων της κεντρικής μονάδας επεξεργαστή
- Όταν ο συνολικός αριθμός εκτιμήσεων της καταλληλότητας να φθάνει ένα δοθέν όριο

- Για ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, η βελτίωση της καταλληλότητας να παραμένει κάτω από μια τιμή-κατώφλι
- Η ποικιλία του πληθυσμού πέφτει κάτω από ένα δοθέν όριο.

2.4 Εφαρμογές Εξελικτικών Αλγορίθμων

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι έχουν αρκετές εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα βελτιστοποίησης σε τομείς όπως η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, οι οικονομικές προβλέψεις, η επεξεργασία εικόνας και τα νευρωνικά δίκτυα. Κάποιες τέτοιες εφαρμογές είναι [17]:

- Εύρεση της βέλτιστης διάταξης ηλεκτρικών κυκλωμάτων με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής
- Μοντελοποίηση βιολογικών προτύπων
- Εύρεση των βέλτιστων στρατηγικών κίνησης σε θέματα ρομποτικής
- Δημιουργία ταξινομητών για σύνολα δεδομένων, με συχνή εφαρμογή νευρωνικών δικτύων
- Σύγκριση διαφορετικών εικόνων με σκοπό τον εντοπισμό συγκεκριμένων αντικειμένων
- Στην οικονομία, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι έχουν ευρεία εφαρμογή σε εκτιμήσεις κινδύνων και αναλύσεις επενδυτικών αποφάσεων
- Προβλήματα σχεδίασης με υπολογιστή

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούνται επίσης σε διάφορα πολύπλοκα προβλήματα βελτιστοποίησης, σε τομείς όπως οι τηλεπικοινωνίες, τα αναλογικά κυκλώματα και η βιομηχανική παραγωγή.

2.5 Αξιολόγηση Εξελικτικών Αλγορίθμων

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, ως μέθοδοι αναζήτησης και βελτιστοποίησης, χαρακτηρίζονται από το πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους [18] .

Πλεονεκτήματα

- Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, χαρακτηρίζονται από το μεγάλο εύρος εφαρμογών που διαθέτουν, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που δεν υπάρχουν διαθέσιμες αναλυτικές τεχνικές που μπορούν να παράγουν αξιόπιστες λύσεις.
- Δεν υπάρχουν υποθέσεις για το χώρο ορισμού του προβλήματος.
- Χαμηλό κόστος ανάπτυξης ενός εξελικτικού αλγορίθμου.
- Άμεση Προσαρμογή των σημαντικών παραμέτρων.
- Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι είναι αποδοτικά παραλληλίσими.

Μειονεκτήματα

- Σε αντίθεση με τους κοινούς αλγορίθμους βελτιστοποίησης, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι δεν μπορούν να παρουσιάσουν εγγυημένα αποτελέσματα σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα εκτέλεσης.
- Ο καθορισμός των παραμέτρων γίνεται πολλές φορές βασιζόμενος σε δοκιμές ή σε αναγνώριση λαθών.
- Σήμερα δεν υπάρχει κάποιο σοβαρό θεωρητικό υπόβαθρο, αντιθέτως χρειάζεται αρκετή πρόοδος.

2.6 Γενετικοί Αλγόριθμοι

Οι **γενετικοί αλγόριθμοι** αποτελούν την πλέον δημοφιλή τεχνική βελτιστοποίησης στην κατηγορία των εξελικτικών αλγορίθμων και βασίζονται στους μηχανισμούς της γενετικής και της εξέλιξης που παρατηρείται στους ζωντανούς οργανισμούς. Η κύρια ιδέα ενός γενετικού αλγορίθμου είναι η διατήρηση ενός πληθυσμού λύσεων και η εξέλιξή του με την πάροδο του χρόνου, όπου και δημιουργούνται νέοι πληθυσμοί. Στον πίνακα 1 παρουσιάζεται μια αντιστοιχία ανάμεσα στους όρους που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των βιολογικών προτύπων και των διαδικασιών των γενετικών αλγορίθμων.

Πίνακας 1 Βιολογικό Πρότυπο και Γενετικοί Αλγόριθμοι [19]

ΒΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ	ΓΕΝΕΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ
Γονίδιο	Παράμετρος
Χρωμόσωμα	Υποψήφια Λύση
Πληθυσμός	Σύνολο Υποψηφίων Λύσεων
Πιθανότητα Επιβίωσης	Συνάρτηση Βελτιστοποίησης
Μετάλλαξη	Τυχαία Αναζήτηση Λύσης
Διασταύρωση	Σύνθεση Λύσεων
Γενιά	Ανακύκλωση

Η κύρια αιτία της όλο και αυξανόμενης αποδοχής των γενετικών αλγορίθμων είναι η ευρεία δυνατότητα εφαρμογής τους, η ευκολία χρήσης αλλά και τεράστιες προοπτικές τους. Η εισαγωγή των γενετικών αλγορίθμων στις τεχνικές αναζήτησης και βελτιστοποίησης έγινε από τον Holland την δεκαετία του 1960. Στην αρχική εκδοχή του Holland η αναπαράσταση των πληθυσμών ήταν κωδικοποιημένη στο δυαδικό σύστημα (ακολουθίες που περιελάμβαναν 0 ή 1). Στις διάφορες υλοποιήσεις που ακολούθησαν, εφαρμόστηκαν ποικίλοι τρόποι αναπαράστασης των πληθυσμών.

2.6.1 Ιστορικά Στοιχεία

Η ανάπτυξη των γενετικών αλγορίθμων έγινε από τον Holland την δεκαετία του 1960 και η περεταίρω ανάπτυξη τους τις δεκαετίες του 1960 και 1970 από τον Holland και τους φοιτητές του. Η αρχική ιδέα του Holland για τους γενετικούς αλγορίθμους δεν ήταν η λύση σύνθετων προβλημάτων, αλλά η μελέτη της λειτουργίας της προσαρμογής στη φύση και η ανάπτυξη σχετικών μεθόδων οι οποίες θα μπορούσαν να υλοποιηθούν σε υπολογιστές.

Οι γενετικοί αλγόριθμοι του Holland είναι μια μέθοδος στην οποία δημιουργείται αρχικά ένας πληθυσμός και οι απόγονοι του παράγονται μέσω της διαδικασίας της φυσικής επιλογής και των τελεστών διασταύρωσης και μετάλλαξης. Κάθε χρωμόσωμα αποτελείται από πολλά γονίδια, και κάθε γονίδιο διαθέτει έναν συγκεκριμένο αριθμό διαφορετικών εκδόσεων. Η επιλογή καθορίζει ποιο από αυτά τα χρωμοσώματα θα κληθούν να δημιουργήσουν απογόνους. Ο τελεστής της διασταύρωσης πραγματοποιεί ένα είδος

ανταλλαγής ανάμεσα σε δύο χρωμοσώματα ενώ τέλος, ο τελεστής της μετάλλαξης επιλέγει τυχαία μια έκδοση για ένα γονίδιο.[20]

2.6.2 Μεθοδολογία Γενετικών Αλγορίθμων

Οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι διαδικασίες αναζήτησης και βελτιστοποίησης που αντλούν τις βασικές αρχές λειτουργίας τους από την γενεαλογική θεωρία. Κάποιες θεμελιώδεις αρχές της γενετικής προσαρμόζονται και χρησιμοποιούνται ώστε να κατασκευαστούν αλγόριθμοι αναζήτησης εύρωστοι και που απαιτούν την ελάχιστη δυνατή πληροφορία για τα χαρακτηριστικά του προβλήματος.

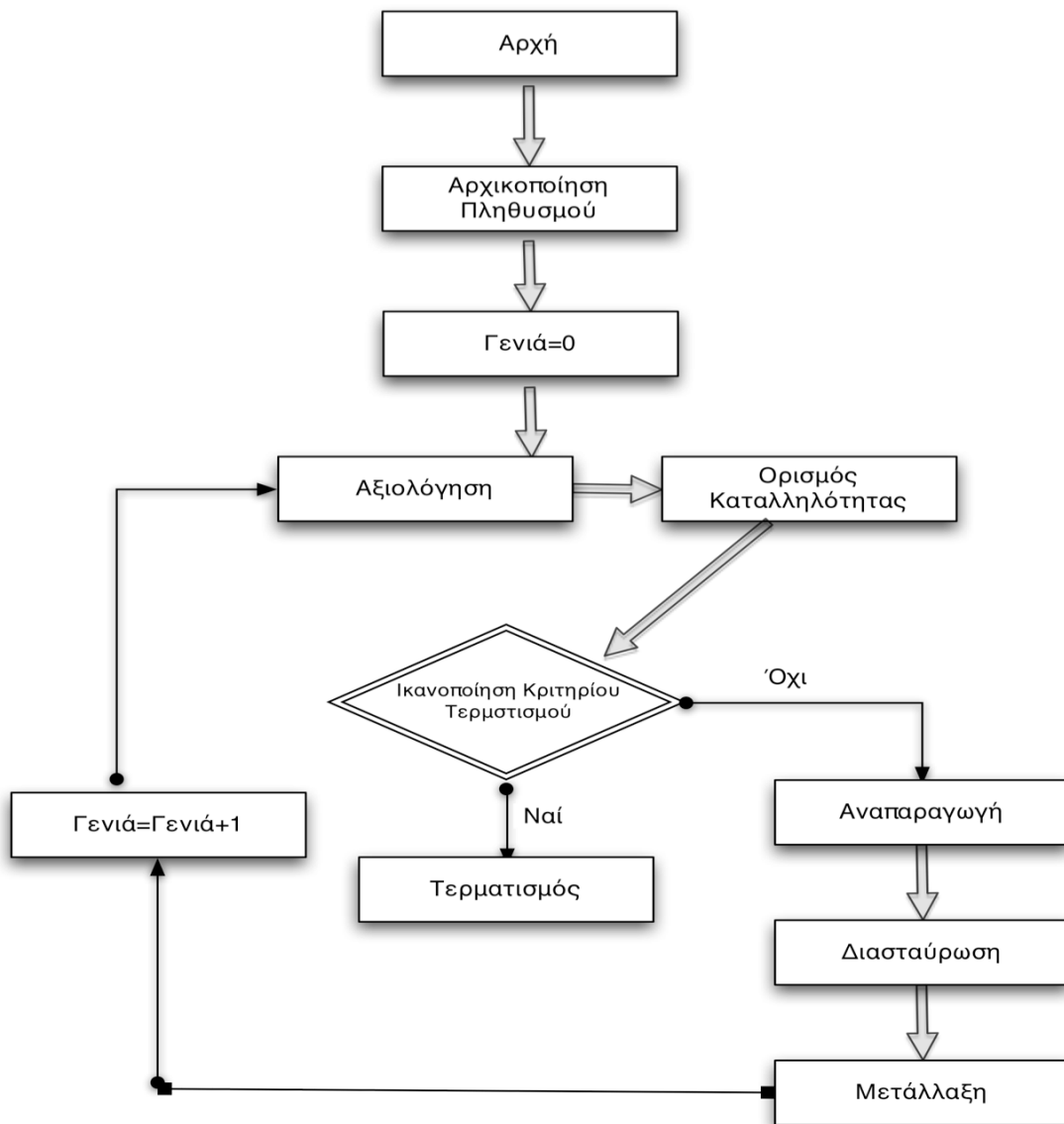
Στους γενετικούς αλγορίθμους, ο πληθυσμός (ή αλλιώς χρωμοσώματα) είναι ένα σύνολο κωδικοποιημένων υποψηφίων λύσεων σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Αυτές οι υποψήφια λύσεις, συνήθως αναπαριστώνται από συμβολοσειρές 0 ή 1, αλλά είναι αποδεκτοί και άλλοι τρόποι αναπαράστασης.

Αρχικά δημιουργείται τυχαία ένας πληθυσμός. Κατόπιν, ξεκινάει η εξελικτική διαδικασία, η οποία λαμβάνει χώρα στις επόμενες γενιές. Για κάθε γενιά που παράγεται, γίνεται εκτίμηση της συνάρτησης αξιολόγησης για κάθε άτομο του πληθυσμού. Στην συνέχεια, ένας αριθμός ατόμων επιλέγονται με στοχαστική διαδικασία, έχοντας ως κριτήριο την τιμή της συνάρτησης αξιολόγησης. Αυτά τα επιλεγμένα άτομα, υπόκεινται στις διαδικασίες τροποποίησης του πληθυσμού (διασταύρωση και μετάλλαξη), σχηματίζοντας με αυτό τον τρόπο έναν καινούργιο πληθυσμό. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται κάθε φορά που εκτελείται ο αλγόριθμος. Ο τερματισμός του αλγορίθμου γίνεται όταν ο αριθμός των γενεών φθάσει τον μέγιστο δυνατό αριθμό, ή όταν η λύση που παράγει ο αλγόριθμος φθάσει σε ένα επιθυμητό επίπεδο αξιολόγησης. Είναι σκόπιμο να σημειωθεί πως στην περίπτωση που ο αλγόριθμος τερματίσει λόγω των μέγιστων επιτρεπόμενων γενεών, τότε ενδέχεται να μην προκύπτουν αξιολόγα αποτελέσματα. Στο σχήμα παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής ενός γενετικού αλγορίθμου.

2.6.2.1 Τελεστές Γενετικών Αλγορίθμων

Αρχικοποίηση

Στην αρχή της εκτέλεσης ενός γενετικού αλγορίθμου, δημιουργείται με τυχαία διαδικασία ένας αρχικός πληθυσμός. Αυτός ο πληθυσμός αποτελείται ουσιαστικά από κωδικοποιημένες υποψήφια λύσεις. Για κάθε άτομο του αρχικού πληθυσμού, υπολογίζεται η συνάρτηση αξιολόγησής του. Η διαδικασία είναι αντίστοιχη με αυτή που έχει περιγραφεί για τους εξελικτικούς αλγορίθμους.



Σχήμα 4. Διάγραμμα Ροής ενός Γενετικού Αλγορίθμου

Συνάρτηση Αξιολόγησης

Όπως και με τους εξελικτικούς αλγορίθμους, έτσι και με τους γενετικούς αλγορίθμους, είναι απαραίτητος ο ορισμός της βελτιστότητας για να ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Ο ρόλος και η χρησιμότητα της συνάρτησης αξιολόγησης είναι αντίστοιχος με τους εξελικτικούς αλγορίθμους.

Επιλογή

Κατά την επανάληψη του αλγορίθμου και την δημιουργία των νέων γενεών, πραγματοποιείται η διαδικασία της επιλογής, στην οποία επιλέγονται τα άτομα εκείνα τα οποία θα συνεχίσουν να αναπαράγουν την επόμενη γενιά πληθυσμού. Το βασικό κριτήριο για τα άτομα που θα επιλεγθούν είναι η τιμή της συνάρτησης αξιολόγησης τους. Με αυτό το κριτήριο, άτομα που υπερτερούν σε καταλληλότητα έχουν περισσότερες πιθανότητες να επιλεγούν για να δημιουργήσουν την επόμενη γενιά. Υπάρχουν όμως και μέθοδοι επιλογής που βασίζονται σε τυχαία δείγματα πληθυσμού, οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρονοβόρες. Η πλειοψηφία των μεθόδων επιλογής, είναι στοχαστικές έχοντας ως σκοπό να συμπεριλάβουν στην επιλογή τους, άτομα τα οποία δεν διακρίνονται για την τιμή της συνάρτησης καταλληλότητάς τους, δίνοντας την δυνατότητα για μεγαλύτερη ποικιλία λύσεων, στις επόμενες γενιές. Μια ιδιαίτερα δημοφιλής και ποιοτική μέθοδος επιλογής είναι η μέθοδος Tournament Selection [6]. Η λογική αυτής της μεθόδου είναι η πραγματοποίηση πολλών διαδικασιών αποκλεισμού (Tournaments) ανάμεσα σε λίγα άτομα. Οι νικητές αυτών των διαδικασιών επιλέγονται για να συνεχίσουν στην αναπαραγωγή της επόμενης γενιάς. Η tournament selection, θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο, καθώς θα εφαρμοστεί στην υλοποίηση του αλγορίθμου της εργασίας.

Τελεστές Αναπαραγωγής

Με την επιτυχή εκτέλεση της διαδικασίας επιλογής, ακολουθεί η διαδικασία της αναπαραγωγής, ώστε να έχουμε τον νέο πληθυσμό υποψηφίων λύσεων. Εμπνευσμένη από την βιολογική διαδικασία της αναπαραγωγής, επιλέγονται δύο άτομα-γονείς για να παραχθεί το άτομο-παιδί. Η διαδικασία της αναπαραγωγής συνεχίζεται, μέχρι να δημιουργηθεί το επιθυμητό μέγεθος πληθυσμού. Αν και η πλειοψηφία των εφαρμογών, λαμβάνουν δύο γονείς, υπάρχουν έρευνες που ισχυρίζονται πως η επιλογή περισσότερων γονέων θα μπορούσε να οδηγήσει σε καλύτερα αποτελέσματα.

Είναι αναμενόμενο, ο νέος πληθυσμός που παράγεται να παρουσιάζει καλύτερες επιδόσεις σε θέματα απόδοσης, καθώς για την δημιουργία του, επιλέγονται άτομα του προηγούμενου πληθυσμού που διακρίνονται στην συνάρτηση καταλληλότητας.

Οι δύο τελεστές που εφαρμόζονται για την αναπαραγωγή του νέου πληθυσμού είναι η **διασταύρωση** και η **μετάλλαξη**.

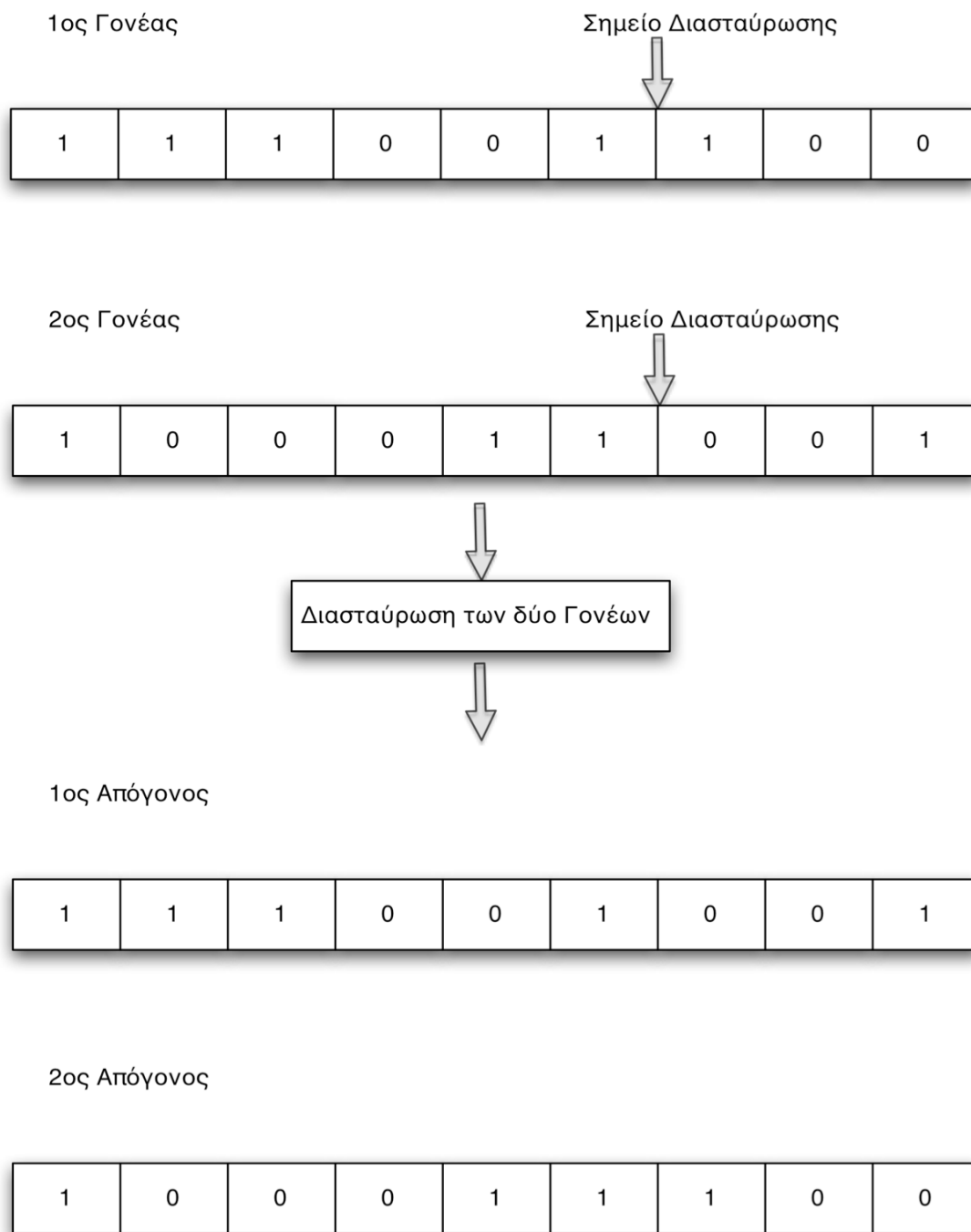
Διασταύρωση (Crossover)

Η βασική ιδέα της διασταύρωσης είναι πως ο συνδυασμός δύο χρωμοσωμάτων (γονέων), οδηγεί στην δημιουργία δύο νέων χρωμοσωμάτων (απόγονοι). Ο λόγος που πραγματοποιείται η διασταύρωση είναι πως οι δύο απόγονοι που προκύπτουν είναι καλύτεροι (καταλληλότεροι) από τους απογόνους, αν κληρονομήσουν τα καλύτερα χαρακτηριστικά των γονιών τους. Η διασταύρωση είναι μέρος της εξελικτικής διαδικασίας του αλγορίθμου και πραγματοποιείται σύμφωνα με την πιθανότητα διασταύρωσης που ορίζεται.

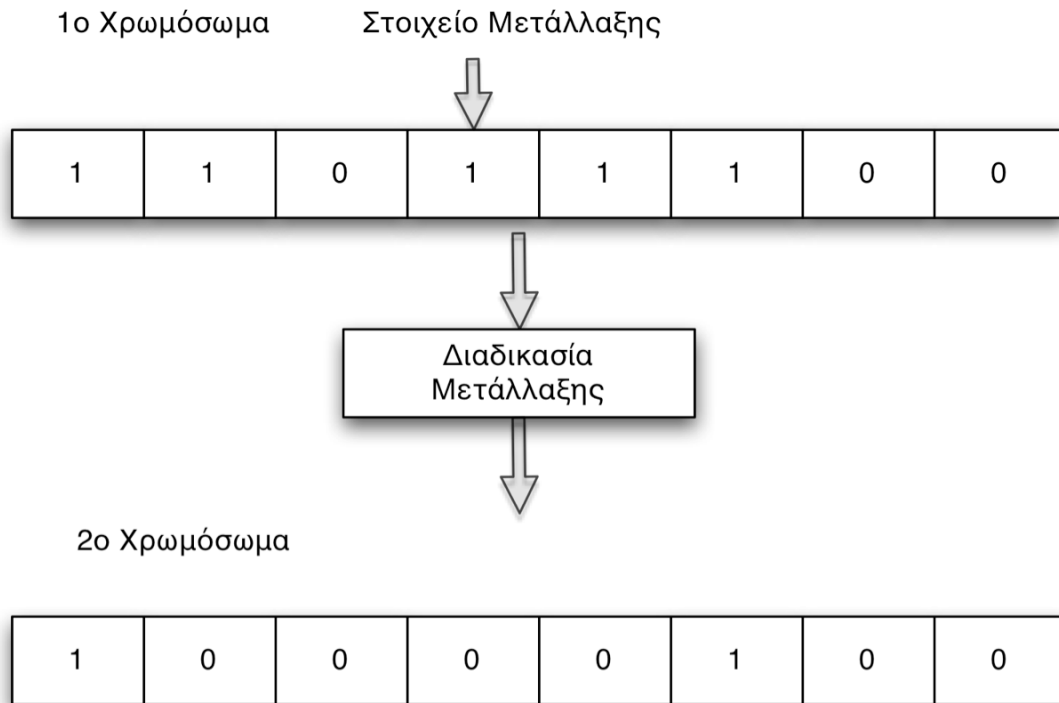
Κατά την εκτέλεση της διασταύρωσης, επιλέγεται τυχαία ένα σημείο διασταύρωσης, βάσει του οποίου γίνεται η ανταλλαγή γονιδίων από τα δύο χρωμοσώματα-γονείς. Τα γονίδια που βρίσκονται αριστερά από το σημείο διασταύρωσης του πρώτου γονέα, αντιγράφεται στον πρώτο παιδί, ενώ αντίστοιχα, τα γονίδια που βρίσκονται δεξιά από το σημείο διασταύρωσης του δεύτερου γονέα, αντιγράφονται επίσης στο πρώτο παιδί. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και την δημιουργία του δεύτερου παιδιού, αντιγράφοντας τα γονίδια αριστερά από το σημείο διασταύρωσης από τον δεύτερο γονέα στο δεύτερο παιδί, και τα γονίδια του πρώτου γονέα που βρίσκονται δεξιά από το σημείο διασταύρωσης, επίσης στο δεύτερο παιδί. Στο σχήμα 5 δίνεται ένα παράδειγμα διασταύρωσης.

Μετάλλαξη (Mutation)

Η μετάλλαξη είναι η διαδικασία κατά την οποία πραγματοποιείται τυχαία τροποποίηση των τιμών ενός χρωμοσώματος, έχοντας ως κύριο σκοπό την βελτίωση της ποικιλίας και της εξέλιξης του πληθυσμού. Επίσης, αποφεύγεται η πιθανότητα τα χρωμοσώματα να έχουν τις ίδιες τιμές, μετά από την δημιουργία πολλών γεννιών. Η συχνότητα πραγματοποίησης της μετάλλαξης, εξαρτάται από την πιθανότητα μετάλλαξης, η οποία συνήθως ορίζεται στην υλοποίηση του γενετικού αλγορίθμου. Μεγαλύτερη πιθανότητα μετάλλαξης, αυξάνουν την πιθανότητα να καταστραφούν καλές υποψήφιες λύσεις, βελτιώνουν όμως την ποικιλομορφία του πληθυσμού [19]. Στο σχήμα 6 δίνεται ένα παράδειγμα υλοποίησης μετάλλαξης.



Σχήμα 5. Παράδειγμα Διασταύρωσης



Σχήμα 6. Παράδειγμα Μετάλλαξης

Παρατηρήσεις για τις γενιές λύσεων που προκύπτουν από γενετικούς αλγορίθμους

- ✓ Υπάρχουν διαφωνίες ανάμεσα σε ερευνητές γενετικών αλγορίθμων για την σημασία της διασταύρωσης, της μετάλλαξης και την σύγκριση μεταξύ τους. Πολλοί υποστηρίζουν πως η διασταύρωση είναι πολύ σημαντικός τελεστής, ενώ η μετάλλαξη εφαρμόζεται μόνο για να μην χαθούν κάποιες υποψήφιες λύσεις. Άλλοι ερευνητές υποστηρίζουν πως σε μεγάλου μεγέθους ομοιόμορφους πληθυσμούς η διασταύρωση εξυπηρετεί την λειτουργία του γενετικού αλγορίθμου, αναπαράγοντας νέες λύσεις που δημιουργήθηκαν αρχικά μέσω της μετάλλαξης, ενώ σε ανομοιόμορφους πληθυσμούς η διασταύρωση έχει σχεδόν παρεμφερή αποτελέσματα με την διαδικασία της μετάλλαξης.
- ✓ Διάφορες παράμετροι των γενετικών αλγορίθμων, όπως η πιθανότητες διασταύρωσης και μετάλλαξης αλλά και το μέγεθος του πληθυσμού είναι παράγοντες που επηρεάζουν την απόδοση του γενετικού αλγορίθμου. Σήμερα υπάρχουν κάποια όρια στον ορισμό των παραπάνω παραμέτρων, αλλά βρίσκονται σε θεωρητικό επίπεδο.

- ✓ Είναι αρκετά σύνθητες οι γενετικοί αλγόριθμοι να μπορούν να υπολογίσουν ποιοτικές λύσεις, ακόμα και για σύνθετες αναζητήσεις.[21]

2.6.3 Αξιολόγηση Γενετικών Αλγορίθμων

Οι γενετικοί αλγόριθμοι αποτελούν την πλέον εφαρμόσιμη τεχνική εξελικτικών αλγορίθμων, που παρουσιάζει διάφορα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα σε ζητήματα υλοποίησης και εφαρμογών

- ❖ Οι γενετικοί αλγόριθμοι δεν έχουν ιδιαίτερες μαθηματικές απαιτήσεις για τα προβλήματα που καλούνται να βελτιστοποιήσουν. Επίσης είναι σε θέση να χειριστούν όλα τα είδη αντικειμενικών συναρτήσεων και όλους τους πιθανούς περιορισμούς που μπορεί να προϋποθέτει ο ορισμός του προβλήματος, που μπορεί να είναι ορισμένοι σε διακριτό, συνεχές ή συνδυασμένο χώρο αναζήτησης.
- ❖ Χαρακτηρίζονται για την αξιολογή ευελιξία τους, που τους επιτρέπει να εφαρμοστούν σε διάφορες υβριδικές μορφές γενετικών αλγορίθμων με άλλες μεθόδους, δίνοντας τη δυνατότητα αποδοτικής υλοποίησης για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.
- ❖ Οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι ιδιαίτερα αποδοτικοί ως μέθοδοι γενικευμένης αναζήτησης. Οι κλασσικές τεχνικές πραγματοποιούν συγκρίσεις που γίνονται ανάμεσα σε κοντινές τιμές και η διαδικασία οδηγείται σε τοπικά βέλτιστα σημεία. Η ολική βέλτιστη λύση (global optimal solution) , μπορεί να βρεθεί μόνο αν το πρόβλημα διαθέτει συγκεκριμένες ιδιότητες κυρτότητας, που εξασφαλίζουν πως το τοπικό ολικό είναι και ολικό βέλτιστο.
- ❖ Οι γενετικοί αλγόριθμοι δίνουν τεράστιες δυνατότητες επέκτασης και διαμόρφωσης, ανάλογα με τις ξεχωριστές ανάγκες κάθε υλοποίησης. Πολλές από τις λειτουργίες που έχουν εφαρμοσθεί σε γενετικούς αλγορίθμους διαφέρουν αρκετά από εκείνες της γενετικής εξέλιξης.

Πέραν όλων των πλεονεκτημάτων που αναφέρθησαν, στους γενετικούς αλγορίθμους έχει ασκηθεί κριτική για διάφορα προβλήματα στη χρήση τους σε σύγκριση με εναλλακτικές τεχνικές αναζήτησης και βελτιστοποίησης

- ❖ Η διαδικασία εκτέλεσης ενός γενετικού αλγορίθμου απαιτεί επαναλαμβανόμενο υπολογισμό των συναρτήσεων καταλληλότητας, γεγονός που κάνει ιδιαίτερα πολύπλοκη την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Σε πολλά προβλήματα της πραγματικότητας, ο συνεχής υπολογισμός της συνάρτησης καταλληλότητας μπορεί να είναι απαγορευτικά πολύπλοκος και χρονοβόρος. Η λύση σε αυτό το εμπόδιο είναι ο υπολογισμός και η εφαρμογή μιας προσεγγιστικής συνάρτησης καταλληλότητας.
- ❖ Η επιλογή της βέλτιστης λύσης του προβλήματος γίνεται σε σύγκριση με τις άλλες διαθέσιμες υποψήφιες λύσεις. Συνεπώς, υπάρχει ο κίνδυνος, η συνθήκη τερματισμού να μην οδηγεί σε όλες τις περιπτώσεις στη συνολικά βέλτιστη λύση.
- ❖ Σε συγκεκριμένα προβλήματα αναζήτησης και βελτιστοποίησης, οι εναλλακτικές τεχνικές θεωρούνται ως αποτελεσματικότερες σε σχέση με τους γενετικούς αλγορίθμους. Ακόμα και σήμερα, είναι ανοιχτή η ερώτηση, αν υπάρχουν προβλήματα που οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι η καταλληλότερη τεχνική για την αντιμετώπισή τους.

2.6.4 Πεδία Εφαρμογής Γενετικών Αλγορίθμων

Οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι ιδιαίτερα εφαρμόσιμοι στην επίλυση προβλημάτων χρονοπρογραμματισμού ή προβλημάτων οργανωτικού προγραμματισμού, ενώ πολλά λογισμικά προγραμματισμού και διαχείρισης εργασιών είναι βασισμένα σε γενετικούς αλγορίθμους. Επίσης εφαρμόζονται σε προβλήματα μηχανικής, ενώ συχνά εφαρμόζονται στη διαδικασία γενικευμένης βελτιστοποίησης (global optimization). Συγκεκριμένα παραδείγματα από τομείς που εφαρμόζονται οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι:

- Σε προβλήματα βελτιστοποίησης συστημάτων ελέγχου [22,23,24]
- Σε εφαρμογές τεχνητής νοημοσύνης και μηχανικής μάθησης
- Στην υλοποίηση νευρωνικών δικτύων [25]
- Σε θέματα software engineering
- Στη λήψη οικονομικών και επενδυτικών αποφάσεων
- Στα βιοιατρικά συστήματα
- Στον σχεδιασμό ηλεκτρονικών κυκλωμάτων ισχύος [26]
- Στην βελτιστοποίηση δικτύων μεταφορών
- Σε προβλήματα σχεδιασμού τηλεπικοινωνιακών διατάξεων [27]
- Στην βελτιστοποίηση συστημάτων παραγωγής [28]
- Σε προβλήματα εφοδιαστικής αλυσίδας

Κεφάλαιο 3: Πολυκριτήρια βελτιστοποίηση

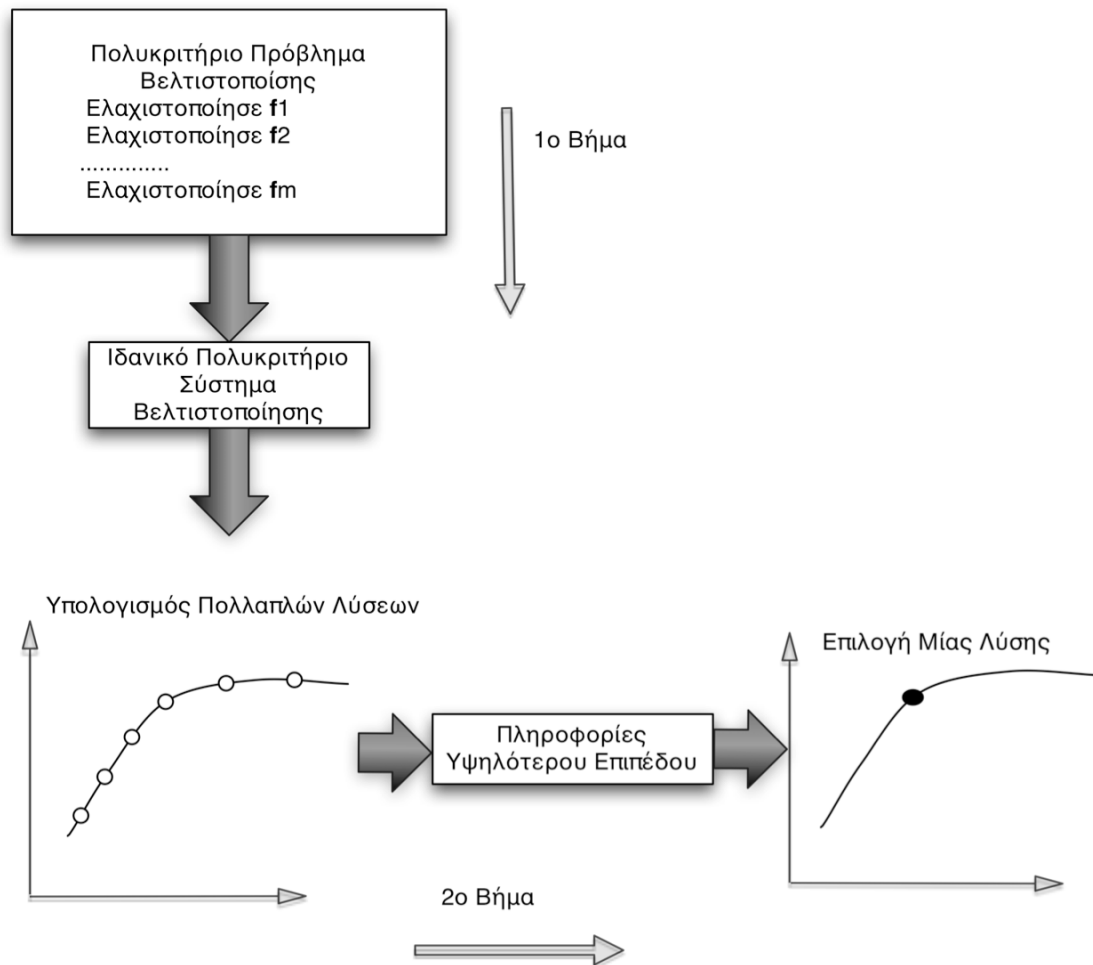
3.1 Εισαγωγή

Η έννοια της βελτιστοποίησης αναφέρεται στη διαδικασία εύρεσης μιας ή περισσότερων λύσεων που να ανταποκρίνονται στις μέγιστες τιμές ενός ή περισσότερων κριτηρίων. Η ανάγκη εύρεσης τέτοιων βέλτιστων λύσεων σε ένα πρόβλημα προέρχεται κυρίως από την ακραία επιδίωξη είτε του σχεδιασμού μιας λύσης για το ελάχιστο δυνατό κόστος της κατασκευής (fabrication), είτε για την μέγιστη δυνατή αξιοπιστία, είτε για άλλους λόγους. Εξαιτίας όλων αυτών των ακραίων (extreme) ιδιοτήτων των βέλτιστων λύσεων, οι μέθοδοι βελτιστοποίησης έχουν τεράστια σημασία στην πράξη.

Όταν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μοντελοποιεί ένα φυσικό πρόβλημα που εμπεριέχει μόνο μία αντικειμενική συνάρτηση, η διαδικασία εύρεσης της βέλτιστης λύσης καλείται *μονό-κριτήρια βελτιστοποίηση*. Στην σημερινή εποχή υπάρχουν αναλυτικοί και ευρετικοί αλγόριθμοι μονοκριτήριας βελτιστοποίησης. Επιπρόσθετα αρχές ντετερμινιστικής αναζήτησης περιέχονται σε έναν αλγόριθμο όπως και αρχές στοχαστικής αναζήτησης οι οποίες επιτρέπουν στους αλγορίθμους βελτιστοποίησης να βρίσκουν γενικά βέλτιστες λύσεις περισσότερο αξιόπιστα.

Όταν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης εμπεριέχει περισσότερες από μία αντικειμενικές συναρτήσεις, η διαδικασία εύρεσης μίας ή περισσότερων βέλτιστων λύσεων είναι γνωστή ως *πολύ-κριτήρια βελτιστοποίηση*. Εφόσον η πολυκριτήρια βελτιστοποίηση εμπεριέχει πολλαπλές αντικειμενικές συναρτήσεις, είναι προφανές ότι η μονοκριτήρια βελτιστοποίηση είναι μια εκφυλισμένη περίπτωση πολυκριτήριας βελτιστοποίησης.

Τα περισσότερα προβλήματα αναζήτησης και βελτιστοποίησης στον πραγματικό κόσμο φυσιολογικά εμπεριέχουν πολλαπλούς στόχους. Οι ακραίες αρχές που αναφέρθηκαν παραπάνω δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε μόνο ένα αντικείμενο, την στιγμή που τα υπόλοιπα αντικείμενα είναι επίσης σημαντικά. Διαφορετικές λύσεις ίσως δημιουργήσουν παραχωρήσεις ανάμεσα σε διαφορετικά αντικείμενα. Μια λύση που είναι άριστη σε ένα κριτήριο απαιτεί έναν συμβιβασμό με τα άλλα κριτήρια του προβλήματος. Συνεπώς απαγορεύεται η επιλογή μιας λύσης η οποία είναι βέλτιστη ως προς ένα μόνο κριτήριο. Στο ακόλουθο σχήμα μια ιδανική διαδικασία πολυκριτήριας βελτιστοποίησης.



Σχήμα 7. Διαδικασία Πολυκριτήριας Βελτιστοποίησης

3.2 Κύρια σημεία της πολυκριτήριας βελτιστοποίησης

Ορισμός 1 (Γενικό Ελάχιστο)

Δοθείσας μιας συνάρτησης $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \neq \emptyset, x \in \Omega$, η τιμή $f^* = f(x^*) > -\infty$ καλείται γενικό ελάχιστο αν και μόνο αν

$$\forall x \in \Omega: f(x^*) \leq f(x).$$

Τότε, το x^* είναι η γενικά ελάχιστη λύση, η f είναι η αντικειμενική συνάρτηση, και το σύνολο Ω είναι ο εφικτός χώρος ($\Omega \in S$), όπου S είναι το σύνολο του χώρου αναζήτησης.

Ορισμός 2 (Γενική Μορφή Πολυκριτήριου Προβλήματος Βελτιστοποίησης)

Η βασική έννοια της πολυκριτήριας βελτιστοποίησης είναι πως το πολυκριτήριο πρόβλημα διαθέτει ορισμένες συναρτήσεις που πρέπει να βελτιστοποιηθούν (να μεγιστοποιηθούν ή να ελαχιστοποιηθούν) από μία λύση X , έχοντας επίσης να διαχειριστεί διαφόρους περιορισμούς.

Έστω ότι X ορίζουμε ένα διάνυσμα από μεταβλητές απόφασης $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, όπου κάθε μεταβλητή απόφασης $x_i \in R$ είναι περιορισμένη ως προς το χαμηλότερο όριο x_i^L και το ανώτατο όριο x_i^U . Αυτά τα όρια αποτελούν τον χώρο μεταβλητής απόφασης ή απλούστερα τον χώρο απόφασης D και οι M αντικειμενικές συναρτήσεις $f_m(x)$ ορίζουν μια απεικόνιση από τον χώρο D στον αντικειμενικό χώρο Z . Η απεικόνιση είναι ανάμεσα στο n -διάστατο διάνυσμα λύσεων $x \in D$ και στο M -διάστατο διάνυσμα αντικειμενικών συναρτήσεων $f_m(x) \in Z$, έτσι ώστε κάθε $x \in D$ να αντιστοιχεί σε ένα σημείο $y \in Z$.

Μπορούμε να ορίσουμε την γενική μορφή ενός πολυκριτήριου προβλήματος ως:

$$\text{Ελαχιστοποίηση/Μεγιστοποίηση } f_m(x), \quad m=1,2,\dots,M$$

$$\text{Υπό: } g_j(x) \geq 0 \quad j=1,2,\dots,J$$

$$h_k(x) = 0 \quad k=1,2,\dots,K$$

$$x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)} \quad i=1,2,\dots,n$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω γενική μορφή του προβλήματος έχουμε J περιορισμούς ανισότητας και K περιορισμούς ισότητας. Οι λύσεις που ικανοποιούν αυτούς τους περιορισμούς καλούνται εφικτές (feasible) λύσεις και ανήκουν στο εφικτό μέρος του χώρου απόφασης $S_D \in D$ όπου οι περιορισμένες συναρτήσεις αντιστοιχούν στο εφικτό κομμάτι του χώρου αντικειμένων $S_Z \subset Z$.

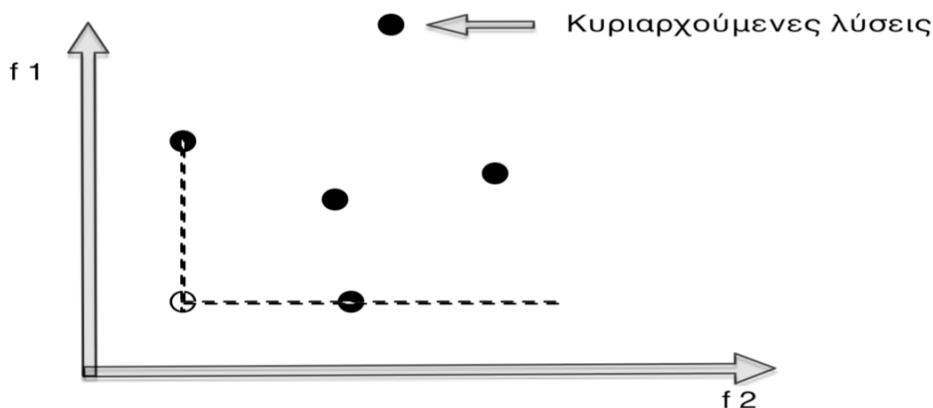
Η μετάβαση από μονοκριτήρια σε πολυκριτήρια προβλήματα βελτιστοποίησης εισάγει μια πρόκληση στη σύγκριση των λύσεων, αφού η απόδοση είναι τότε ένα διάνυσμα αντικειμενικών τιμών σε αντίθεση με ένα απλό μονόμετρο (scalar) διάνυσμα. Η αντιμετώπιση του θέματος βασίζεται στην εισαγωγή της κυριαρχίας Pareto.

Ορισμός 3 (Pareto Κυριαρχία)

Ένα διάνυσμα m ($m_1, m_2, \dots, m_k$) κυριαρχεί του διανύσματος $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ δηλαδή $m \succ n$, αν και μόνο αν

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, m_i \leq n_i \wedge \exists i \in \{1, \dots, k\} : m_i < n_i$$

Από τον παραπάνω ορισμό συνεπάγεται πως η κυριαρχούσα (dominating) λύση είναι, υπό την πολυκριτήρια έννοια, η καλύτερη επιλογή. Η σχέση κυριαρχίας επιτρέπει μια κατάταξη, σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο του Pareto. Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζονται γραφικά οι σχέσεις κυριαρχίας.



Σχήμα 8. Σχέσεις Κυριαρχίας

3.3 Βελτιστότητα Pareto (Pareto Optimality)

Σε αυτό το σημείο γίνεται η εισαγωγή σε ένα πολύ σημαντικό τομέα της πολυκριτήριας βελτιστοποίησης, σε αυτόν της βελτιστότητας (optimality).

Επειδή στα περισσότερα προβλήματα πολυκριτήριας βελτιστοποίησης, υπάρχει μια οι διάφορες αντικειμενικές συναρτήσεις οδηγούν σε διαφορετικές βέλτιστες λύσεις, είναι αδύνατο να βρεθεί και να υπολογισθεί η μια λύση, η οποία θα είναι βέλτιστη ταυτόχρονα για όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις του προβλήματος.

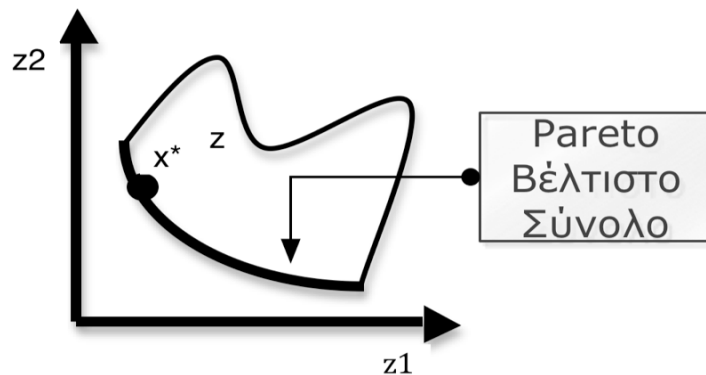
Υπάρχουν διανύσματα λύσεων τα στοιχεία των οποίων μπορούν να υποστούν βελτίωση, μόνο αν υπάρξει επιδείνωση για τουλάχιστον ένα από τα υπόλοιπα στοιχεία. Ο Edgeworth πρότεινε αυτόν τον ορισμό το 1881. Αυτός ο ορισμός συχνά καλείται **βελτιστότητα**

Pareto , λόγω του Vilfredo Pareto, ο οποίος το ανέπτυξε περαιτέρω. Ο ορισμός της βελτιστότητας Pareto είναι ο ακόλουθος

Ορισμός 1 (Βελτιστότητα Pareto)

Μία λύση $x^* \in S$ είναι βέλτιστη κατά Pareto εάν δεν υπάρχει άλλη λύση $x \in S$ τέτοια ώστε $f_i(x) \leq f_i(x^*)$, όπου $i=1 \dots k$ και $f_i(x) < f_i(x^*)$ για τουλάχιστον έναν δείκτη j .

Ένα διάνυσμα αντικειμενικών συναρτήσεων $z^* \in Z$, είναι βέλτιστο κατά Pareto, εάν δεν υπάρχει άλλο διάνυσμα αντικειμενικών συναρτήσεων $z \in Z$, τέτοιο ώστε να ισχύει $z_i \leq z_i^*$, για όλα τα $i=1 \dots k$, και $z_j < z_j^*$ για τουλάχιστον έναν δείκτη j . Ισοδύναμα, ένα διάνυσμα z^* είναι βέλτιστο κατά Pareto εάν το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης x που αντιστοιχεί σε αυτό, είναι και αυτό βέλτιστο κατά Pareto. Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το Pareto βέλτιστο σύνολο.



Σχήμα 9. Βέλτιστο Σύνολο Pareto

3.3.1 Ασθενής Βελτιστότητα Pareto (Weak Pareto optimality)

Πέραν του ορισμού του βέλτιστου συνόλου Pareto, ένας άλλος ορισμός βέλτιστου συνόλου που έχει εφαρμογή είναι ο ορισμός της ασθενούς βελτιστότητας Pareto.

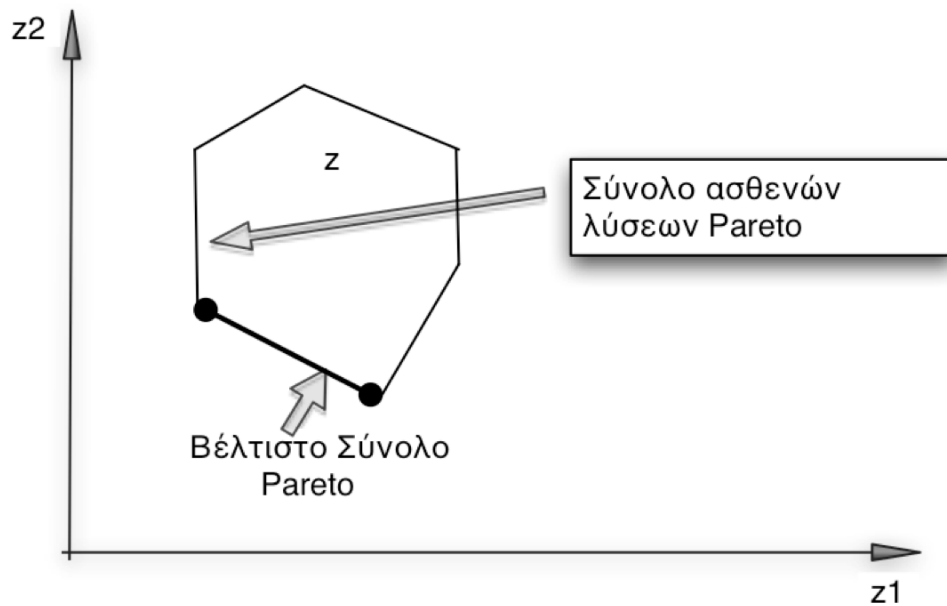
Ουσιαστικά το σύνολο ασθενών λύσεων Pareto αποτελεί ένα υπερσύνολο του συνόλου Pareto που ορίσθηκε παραπάνω.

Ορισμός

Μία λύση $x^* \in S$ είναι ασθενής κατά Pareto βέλτιστη εάν δεν υπάρχει άλλη λύση $x \in S$ τέτοια ώστε $f_i(x) < f_i(x^*)$, για κάθε $i=1, \dots, k$.

Ένα διάνυσμα αντικειμενικών συναρτήσεων $z^* \in Z$, είναι βέλτιστο κατά Pareto, εάν δεν υπάρχει άλλο διάνυσμα αντικειμενικών συναρτήσεων $z \in Z$, τέτοιο ώστε να ισχύει $z_i < z_i^*$, για όλα τα $i=1, \dots, k$.

Ισοδύναμα, ένα διάνυσμα z^* είναι ασθενές βέλτιστο κατά Pareto εάν το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης x που αντιστοιχεί σε αυτό, είναι και αυτό ασθενή βέλτιστο κατά Pareto. Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το σύνολο ασθενών λύσεων Pareto.



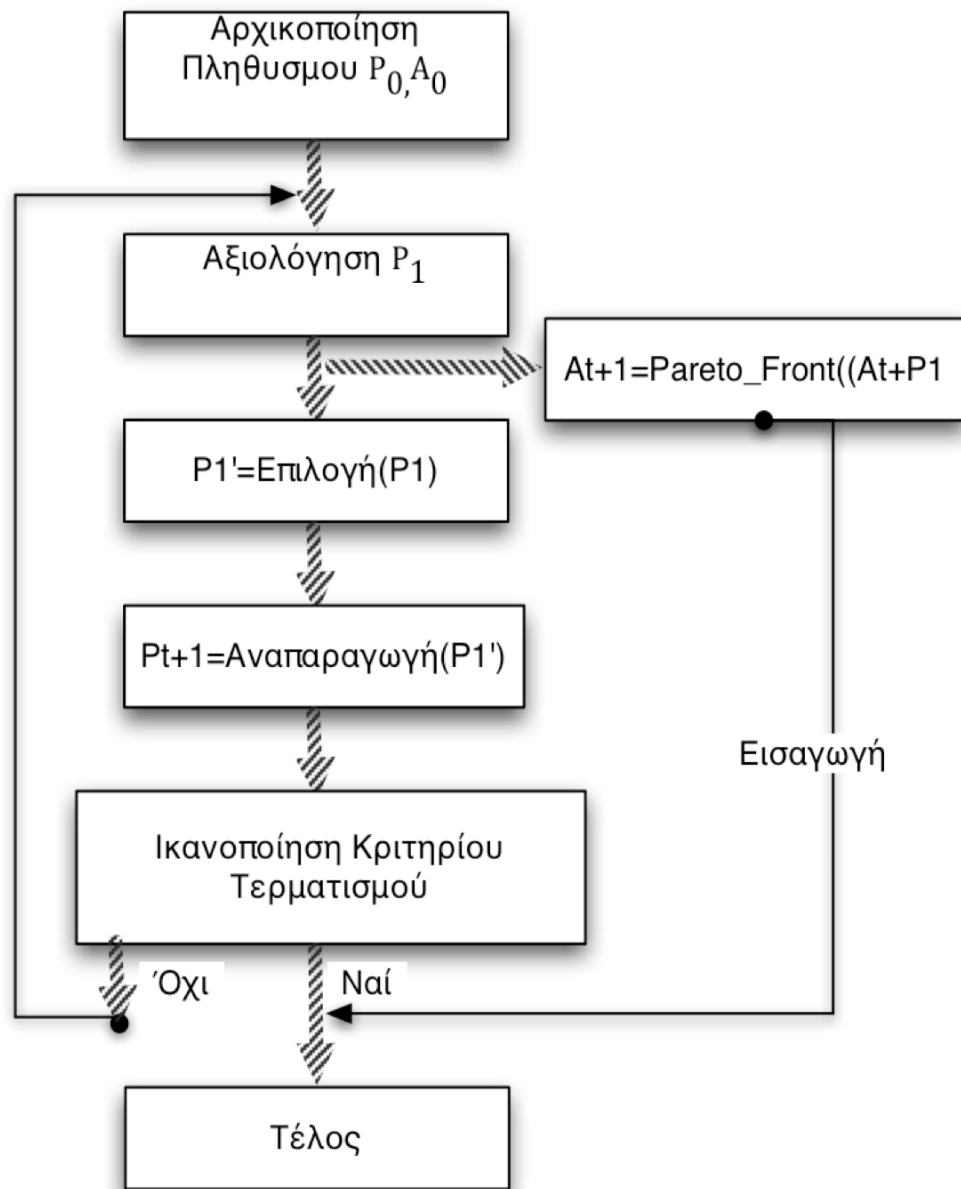
Σχήμα 10. Ασθενή Pareto Βέλτιστα Διανύσματα

3. 4 Εφαρμογή Εξελικτικών Αλγορίθμων στην επίλυση Πολυκριτήριων Προβλημάτων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα περισσότερα προβλήματα που χρειάζονται βελτιστοποίηση, είναι προβλήματα που διαθέτουν δύο ή περισσότερες αντικειμενικές συναρτήσεις προς βελτιστοποίηση. Αυτός είναι ο κύριος λόγος που ο όρος βέλτιστη λύση έχει ανάγκη ενός εναλλακτικού ορισμού. Σε αυτό το σημείο αποδεικνύεται ιδιαίτερα σημαντικός ο ορισμός του βέλτιστου συνόλου Pareto, που αντιπροσωπεύει εκείνες τις βέλτιστες λύσεις που ταυτόχρονα εξασφαλίζουν την καλύτερη δυνατή αρμονία, ανάμεσα στις αντικειμενικές συναρτήσεις του προβλήματος. Ουσιαστικά, καθορίζονται οι επιθυμητές λύσεις για τις οποίες ισχύει πως μία αντικειμενική συνάρτηση δεν μπορεί να βελτιωθεί, χωρίς να χειροτερέψουν οι άλλες αντικειμενικές συναρτήσεις.

Για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων, ιδανικοί θεωρούνται οι εξελικτικοί αλγόριθμοι. Η πρώτη εφαρμογή εξελικτικών αλγορίθμων έγινε το 2002 [45], όποτε και απεδείχθησαν ιδιαίτερα αποδοτικοί. Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι είναι ιδανικοί για την επίλυση υπολογιστικά δύσκολων πολυκριτήριων προβλημάτων, επειδή έχουν τη δυνατότητα να επεξεργάζονται ταυτόχρονα ένα σύνολο πιθανών λύσεων (τον αποκαλούμενο ως πληθυσμό) και να παράγουν αρκετές λύσεις που ανήκουν στο βέλτιστο σύνολο Pareto. Η εφαρμογή των εξελικτικών αλγορίθμων στην επίλυση πολυκριτήριων εξελικτικών προβλημάτων, είναι αυτό που σήμερα αποκαλείται πολυκριτήρια εξελικτική βελτιστοποίηση. Ουσιαστικά, ένας πολυκριτήριος εξελικτικός αλγόριθμος αποτελεί μια επέκταση της λειτουργίας ενός εξελικτικού αλγορίθμου.

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι ακολουθούν μια απλή στρατηγική αναζήτησης, βασισμένη στον πληθυσμό. Η διαδικασία της επιλογής ακολουθεί επίσης μια απλή στρατηγική, γεγονός που καθιστά αρκετά απλή την μετατροπή του αλγορίθμου σε αλγόριθμο πολυκριτήριας εξελικτικής βελτιστοποίησης. Αρχικά, η επιλογή πραγματοποιείται σε πολυκριτήριες τιμές, όπως το κριτήριο της κυριαρχίας Pareto. Το δεύτερο σημαντικό σημείο είναι η εισαγωγή ενός δευτερεύοντος πληθυσμού, ο οποίος έχει ως στόχο να διατηρεί το σύνολο των Pareto βέλτιστων λύσεων. Στα σχήματα που ακολουθούν απεικονίζεται η επέκταση που πραγματοποιείται σε έναν εξελικτικό αλγόριθμο [43]. Στο σχήμα 11 ακολουθεί το διάγραμμα ροής ενός πολυκριτήριου εξελικτικού αλγορίθμου.



Σχήμα 11. Διάγραμμα Ροής Πολυκριτήριου Εξελικτικού Αλγορίθμου

3.5 Σημαντικά Ζητήματα στη Σχεδίαση των Αλγορίθμων Πολυκριτήριας Εξελικτικής Βελτιστοποίησης

Δύο θεμελιώδη θέματα στο σχεδιασμό πολυκριτήριων εξελικτικών αλγορίθμων είναι να οδηγείται η αναζήτηση κατά το σύνολο Pareto, και να διατηρείται ένα ποικίλο σύνολο μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Ο πρώτος στόχος είναι σχετικός με το συνδυασμό της επιλογής. Ο δεύτερος στόχος σχετίζεται γενικά με την διαδικασία της επιλογή έτσι ώστε να αποφευχθεί η ύπαρξη πανομοιότυπων λύσεων. Τέλος, ο συνδυασμός των παραπάνω οδηγεί σε ένα εξίσου σημαντικό ζήτημα, αυτό του ελιτισμού, δηλαδή, τον τρόπο που πρέπει να ακολουθηθεί ώστε να μην χαθούν μη-κυριαρχούμενες λύσεις.

3.5.1 Υπολογισμός Καταλληλότητας ²

Μια προσέγγιση που εφαρμόζεται από διάφορες παραδοσιακές τεχνικές είναι να αθροίζονται οι στόχοι του προβλήματος σε μία παραμετροποιημένη αντικειμενική συνάρτηση. Οι παράμετροι της συνάρτησης ποικίλουν κατά την εκτέλεση με σκοπό να βρεθούν οι μη-κυριαρχούμενες λύσεις.

Μια άλλη προσέγγιση, η οποία βασίζεται στα κριτήρια του προβλήματος, πραγματοποιεί εναλλαγές ανάμεσα στους στόχους του προβλήματος, κατά τη διάρκεια της επιλογής. Κάθε φορά, ένα άτομο επιλέγεται για να συμμετάσχει στην αναπαραγωγή, ενώ ένα διαφορετικό κριτήριο αποφασίζει ποια μέλη του πληθυσμού θα αντιγραφούν. Δύο παραδείγματα αυτής της προσέγγισης δόθηκαν από τον Schaffer [30], και τον Kursawe [29].

Μια εναλλακτική προσέγγιση υπολογισμού της καταλληλότητας βασιζόμενη την κυριαρχία Pareto δόθηκε από τον Goldberg [32]. Ένας τρόπος υλοποίησης της προσέγγισης είναι να υπολογισθεί ο βαθμός κυριαρχίας, δηλαδή ο αριθμός των ατόμων από τα οποία κυριαρχείται ένα άτομο. Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιηθεί το βάθος κυριαρχίας. Ο πληθυσμός κατανέμεται σε επίπεδα, και το βάθος κυριαρχίας αναφέρεται σε ποίο επίπεδο ανήκει ένα άτομο. Ανεξάρτητα από την τεχνική που ακολουθείται, ο υπολογισμός της καταλληλότητας σχετίζεται με το σύνολο του πληθυσμού.

² Για περισσότερες πληροφορίες παρακαλώ ανατρέξτε [31]

3.5.2 Διατήρηση Ποικιλίας

Η πλειοψηφία των πολυκριτήριων εξελικτικών αλγορίθμων, προσπαθούν να διατηρήσουν την ποικιλία στην προσέγγιση του συνόλου Pareto, ενσωματώνοντας την πληροφορία της πυκνότητας στη διαδικασία της επιλογής. Η πιθανότητα ενός ατόμου να επιλεγεί για την επόμενη γενιά, είναι μικρότερη όσο η πυκνότητα των ατόμων της "γειτονιάς" μεγαλώνει.

Τέτοιες διαδικασίες βασίζονται στην χρήση συναρτήσεων πυρήνα [33] σε αλγορίθμους πλησιέστερων γειτόνων [33] ή σε ιστογράμματα [33].

3.5.3 Ελιτισμός

Ο ελιτισμός επιλαμβάνεται του προβλήματος της απώλειας καλών λύσεων, κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, που οφείλεται κυρίως σε κάποια τυχαία γεγονότα. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι ο συνδυασμός του παλαιού πληθυσμού, με τους απογόνους που παράγονται, και στη συνέχεια η εφαρμογή μιας ντετερμινιστικής διαδικασίας επιλογής. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας δευτερεύων πληθυσμός, ο οποίος θα συντηρεί τις καλές λύσεις που έχουν αντιγραφεί στο νέο πληθυσμό.

Το περισσότερο δημοφιλές κριτήριο που χρησιμοποιείται είναι αυτό της κυριαρχίας. Ο δευτερεύων πληθυσμός πραγματοποιεί συγκρίσεις μόνο για την εκάστοτε προσέγγιση του συνόλου Pareto, εξοικονομώντας σημαντικούς υπολογιστικούς πόρους. Τα μέλη του δευτερεύοντος πληθυσμού που είναι κυριαρχούμενα, διαγράφονται από τον πληθυσμό.

Οι περισσότεροι πολυκριτήριοι εξελικτικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούν ένα συνδυασμό κυριαρχίας και πυκνότητας ώστε να διαλέξουν τα άτομα εκείνα που θα στελεχώσουν το δευτερεύων πληθυσμό της κάθε γενιάς. Υπάρχει όμως το ενδεχόμενο, η εφαρμογή αυτής της τεχνικής να οδηγήσει στο πρόβλημα της επιδείνωσης, δηλαδή τα άτομα που βρίσκονται στο δευτερεύον πληθυσμό σε μια δεδομένη γενιά, να κυριαρχούνται από άτομα τα οποία απάρτιζαν το δευτερεύον πληθυσμό σε διαφορές προηγούμενες γενιές και απερρίφθησαν στην συνέχεια. Πρόσφατα, έχει υλοποιηθεί μια τεχνική η οποία έχει τη δυνατότητα να εξασφαλίζει την αποφυγή αυτού του προβλήματος και ταυτόχρονα να διατηρείται ένα ποικίλο σύνολο Pareto [34].

3.6 Κατηγοριοποίηση Αλγορίθμων Πολυκριτήριας Εξελικτικής Βελτιστοποίησης

Η πλέον διαδεδομένη και απλή μέθοδος κατηγοριοποίησης είναι αυτή που βασίζεται στο μηχανισμό επιλογής που εφαρμόζεται.

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, οι κατηγορίες των πολυκριτήριων εξελικτικών αλγορίθμων είναι

- ❖ Συνδυασμού των αντικειμενικών συναρτήσεων
- ❖ Προσεγγίσεις βασιζόμενες στον πληθυσμό
- ❖ Προσεγγίσεις βασιζόμενες στο σύνολο Pareto

3.6.1 Προσεγγίσεις βασιζόμενες στο συνδυασμό των αντικειμενικών συναρτήσεων

Η πιο ευθεία μέθοδος επίλυσης πολυκριτήριων προβλημάτων είναι ο συνδυασμός σε μια συνάρτηση (π.χ. η πρόσθεσή τους). Αυτές οι μέθοδοι θεωρούνται αρκετά υποβαθμισμένες από τους ερευνητές, γιατί αντιμετωπίζουν ιδιαίτερα προβλήματα περιορισμών.[35]

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα

- Είναι εύκολοι στη δημιουργία.
- Είναι αποδοτικοί.
- Οι γραμμικοί συνδυασμοί των βαρών δεν λειτουργούν, στην περίπτωση που το Pareto Front δεν είναι κυρτό.

3.6.2 Προσεγγίσεις βασιζόμενες στον πληθυσμό

Σε αυτή την προσέγγιση, ο πληθυσμός χρησιμοποιείται για να διεκδικεί την ποικιλία της αναζήτησης, χωρίς όμως να ενσωματώνει το σύνολο Pareto στη διαδικασία της επιλογής. Το πλέον κλασσικό παράδειγμα μιας τέτοιας προσέγγισης αποτελεί ο αλγόριθμος Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA). Ο αλγόριθμος VEGA χρησιμοποιεί κάποιους υπό-πληθυσμούς οι οποίοι βελτιστοποιούν κάθε αντικειμενική συνάρτηση ξεχωριστά. Το κύριο πρόβλημα του VEGA είναι πως η διαδικασία επιλογής που ακολουθεί έρχεται σε αντίθεση με την κυριαρχία Pareto.

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα

- Είναι εύκολος στην υλοποίηση
- Δεν διαθέτει έναν αποδοτικό μηχανισμό διατήρησης της ποικιλίας του πληθυσμού
- Δεν παράγει πάντα μη-κυριαρχούμενα διανύσματα

3.6.3 Προσεγγίσεις βασιζόμενες στο σύνολο Pareto

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι προσεγγίσεις αλγορίθμων οι οποίοι ενσωματώνουν το σύνολο Pareto στην υλοποίηση του μηχανισμού επιλογής που διαθέτουν. Αυτή η προσέγγιση προτάθηκε από τον Goldberg [45], με σκοπό να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα που αντιμετώπιζε ο αλγόριθμος VEGA. Χρησιμοποιούν διαβαθμίσεις μη-κυριαρχούμενων λύσεων και επιλογή για να μετακινούν τον πληθυσμό κατά το σύνολο Pareto. Επίσης χρειάζονται μια διαδικασία διαβάθμισης και τεχνικές διατήρησης της ποικιλίας του πληθυσμού. Σε αντίθετη περίπτωση, ο αλγόριθμος θα τείνει να συγκλίνει σε μια και μοναδική λύση, λόγω της στοχαστικού θορύβου που υπεισέρχεται στην διαδικασία.

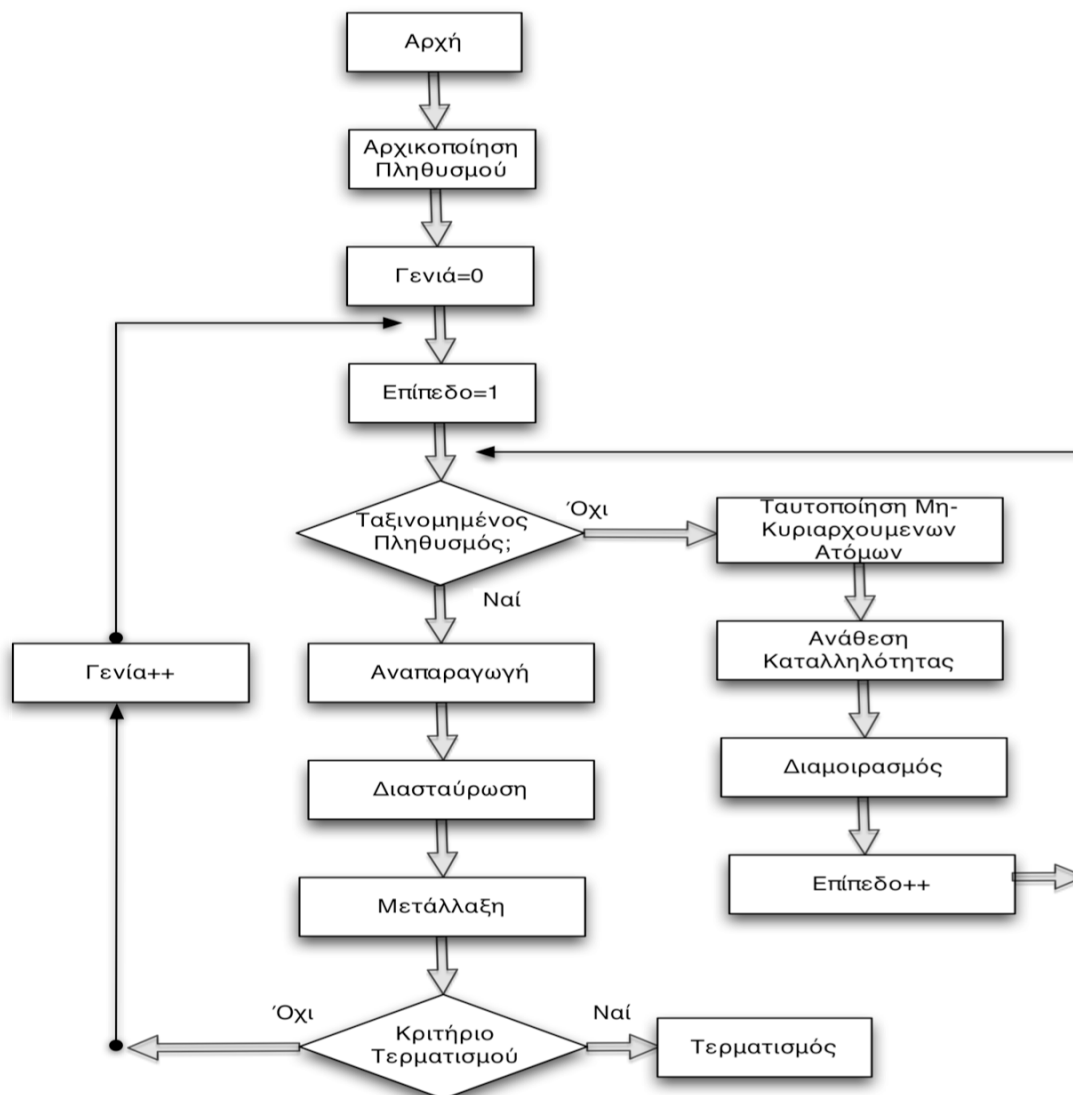
Ακολουθεί η αναφορά και μια σύντομη περιγραφή εξελικτικών αλγορίθμων, οι οποίοι εφαρμόζουν προσεγγίσεις στο σύνολο Pareto:

Pure Pareto Ranking [32] Προτάθηκε από τον Goldberg, και μετακινεί τον πληθυσμό, προωθώντας λύσεις που είναι μη-κυριαρχούμενες. Κύριο μειονέκτημα είναι η μεγάλη πολυπλοκότητα.

Multi-Objective Evaluation Algorithm (MOGA) [36] Προτάθηκε από τους Fonseca, Fleming και το κύριο χαρακτηριστικό του είναι πως κάθε άτομο διαθέτει έναν βαθμό, ο οποίος ορίζει από πόσα άλλα άτομα του πληθυσμού κυριαρχείται. Όλα τα μη-κυριαρχούμενα μέλη του πληθυσμού διαθέτουν την ίδια βαθμολογία και έχουν τις ίδιες πιθανότητες επιλογής του για την επόμενη γενιά του πληθυσμού. Ο MOGA ήταν ο πιο διάσημος αλγόριθμος της πρώτης γενιάς πολυκριτήριων εξελικτικών αλγορίθμων.

Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA) Προτάθηκε από τους Srinivas, Deb [33]. Χρησιμοποιεί διάφορα επίπεδα κατηγοριοποίησης των ατόμων του πληθυσμού. Πριν την διαδικασία της επιλογής, πραγματοποιείται βαθμολόγηση σύμφωνα με την αρχή της μη-κυριαρχίας. Όλα τα μη κυριαρχούμενα άτομα κατηγοριοποιούνται στο ίδιο επίπεδο με μία εικονική τιμή καταλληλότητας, η οποία είναι ανάλογη του μεγέθους του πληθυσμού. Για τη διατήρηση της ποικιλίας του πληθυσμού, τα κατηγοριοποιημένα άτομα μοιράζονται με την τιμή της καταλληλότητάς τους. Η διαδικασία συνεχίζεται, μέχρι να κατηγοριοποιηθούν όλα τα άτομα του πληθυσμού. Στη διαδικασία της επιλογής, άτομα τα οποία βρίσκονται σε υψηλότερο επίπεδο ταξινόμησης, έχουν περισσότερες πιθανότητες να αντιγράψουν για τα επόμενα στάδια του πληθυσμού.

Ο NSGA είναι σχετικά απλός στην υλοποίησή του, όμως είναι ιδιαίτερα ευαίσθητος στον παράγοντα διαμοιρασμού που επηρεάζει την δυνατότητα ποικιλομορφίας του πληθυσμού. Έχει εφαρμοσθεί στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων στον τομέα της σχεδίασης συστημάτων ελέγχου. Στο σχήμα 12 που ακολουθεί, περιγράφεται ο αλγόριθμος NSGA σε διάγραμμα ροής.



Σχήμα 12. Διάγραμμα Ροής NSGA

Niched Pareto Genetic Algorithm [37] Χρησιμοποιεί μια διαδικασία επιλογής βασισμένη στην κυριαρχία Pareto, που καλείται Tournament Selection. Δύο άτομα του πληθυσμού επιλέγονται τυχαία και στη συνέχεια συγκρίνονται με ένα υποσύνολο του πληθυσμού. Στην περίπτωση που το ένα άτομο είναι κυριαρχούμενο και το άλλο μη κυριαρχούμενο, τότε το μη κυριαρχούμενο επιλέγεται. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει διαφορά (είναι και τα δύο άτομα κυριαρχούμενα ή μη κυριαρχούμενα), η επιλογή γίνεται βάσει της τιμής της καταλληλότητας.

Θεωρείται αρκετά εύκολος στη υλοποίηση και αρκετά αποδοτικός, καθώς δεν εφαρμόζεται βαθμολόγηση κατά Pareto σε ολόκληρο τον πληθυσμό και έχει μια σχετικά καλή συνολική απόδοση. Αρνητικό στοιχείο του είναι πως χρειάζεται να οριστεί το μέγεθος που θα έχει το Tournament Selection (Tournament Size).

Strength Pareto Evolutionary Algorithm [38] Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος χρησιμοποιεί έναν δευτερεύων πληθυσμό που διατηρεί τις μη κυριαρχούμενες που έχουν ήδη υπολογισθεί. Στην συνέχεια υπολογίζεται μία τιμή δύναμης, με πανομοιότυπο τρόπο που ο MOGA κάνει βαθμολόγηση. Η δύναμη ενός ατόμου υπολογίζεται από την δύναμη των μη κυριαρχούμενων ατόμων που κυριαρχούν το συγκεκριμένο άτομο. Για την διατήρηση της ποικιλομορφίας, εφαρμόζεται μια τεχνική ομαδοποίησης.

Pareto Archived Evolution Strategy (PAES) [39] Χρησιμοποιεί την εξελικτική στρατηγική (1+1), σε συνδυασμό με την διατήρηση ενός δευτερεύοντος πληθυσμού που θα διατηρεί ένα σύνολο ατόμων που είναι μη κυριαρχούμενα, που έχουν ήδη υπολογισθεί. Για την διατήρηση της ποικιλομορφίας, εφαρμόζεται ένα προσαρμοστικό δίκτυο.

Micro Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization [40] Η εισαγωγή του αλγορίθμου έγινε από τους Coello Coello και Toscano, και διαθέτει έναν μικρό πληθυσμό που χρειάζεται μια τεχνική επαναρχικοποίησης. Ο τυχαία αρχικοποιημένος πληθυσμός οδηγείται σε ένα σύστημα αποθήκευσης, που στην συνέχεια τον διαχωρίζει σε δύο διακριτά σύνολα, ένα σταθερό και ένα ανατοποθετούμενο. Το ανατοποθετούμενο σύνολο, υπόκειται στις διαδικασίες της διασταύρωσης και της μετάλλαξης, όπως και σε μια διαδικασία ελιτιστικής επιλογής. Το σταθερό σύνολο δεν υπόκειται σε καμία αλλαγή, εξασφαλίζοντας με αυτό τον τρόπο την ποικιλομορφία του πληθυσμού. Μία αρκετά γνωστή εφαρμογή του αλγορίθμου είναι στην επίλυση του προβλήματος διαχείρισης μιας προσαρμοστικής κατανεμημένης βάσης δεδομένων.

General Multi-Objective Program (GENMOP) [41] Χαρακτηρίζεται ως μια παράλληλη διαδικασία, η οποία αρχικά εφαρμόσθηκε στην έρευνα βιολογικών θεραπειών. Χρησιμοποιεί ένα "αρχείο" των προηγούμενων πληθυσμών, και τους βαθμολογεί. Τα άτομα με τον υψηλότερο βαθμό, χρησιμοποιούνται με τα άτομα τα οποία ανήκουν στον τρέχοντα πληθυσμό, με σκοπό να δημιουργηθεί ο νέος πληθυσμός. Ένα ιδιαίτερα κρίσιμο μειονέκτημα είναι η αρκετά μεγάλη πολυπλοκότητα της μεθόδου, καθώς απαιτείται Pareto βαθμολόγηση για τα αποθηκευμένα άτομα των προηγούμενων πληθυσμών, σε κάθε γενιά.

Non Dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA -II) [42] Ο αλγόριθμος NSGA, αναφέρθηκε παραπάνω, αποτελεί έναν από τους πρώτους εξελικτικούς αλγορίθμους που παρουσιάστηκαν. Παρόλα αυτά έχει "κατηγορηθεί" για διάφορα προβλήματα και μειονεκτήματα σε θέματα απόδοσης και πολυπλοκότητας.

Ο NSGA χαρακτηρίζεται από την ιδιαίτερα υψηλή πολυπλοκότητα, η οποία είναι $O(MN^2)$, όπου M ο αριθμός των αντικειμένων και N το μέγεθος του πληθυσμού. Συνεπώς, είναι ένας ιδιαίτερα απαιτητικός υπολογιστικά αλγόριθμος για μεγάλα μεγέθη πληθυσμού. Αυτή η μεγάλη πολυπλοκότητά του συμβαίνει λόγω της έλλειψης ελιτισμού του αλγορίθμου. Σύμφωνα με πρόσφατες έρευνες[48,49], ο ελιτισμός μπορεί να βελτιώσει σε μεγάλο βαθμό την απόδοση του αλγορίθμου σε θέματα πολυπλοκότητας. Επίσης, ο NSGA, για να επιτύχει ποικιλομορφία στον πληθυσμό εφαρμόζει μια τεχνική διαμοιρασμού. Για την υλοποίηση αυτής της τεχνικής, είναι αναγκαίος ο αρχικός ορισμός της παραμέτρου διαμοιρασμού

Ο αλγόριθμος NSGA-II είναι σε θέση να επιλύσει τα προβλήματα λειτουργίας του NSGA. Είναι αρκετά βελτιωμένος στην πολυπλοκότητα του ($O(MN^2)$), ενώ εφαρμόζει και ελιτισμό. Για την ύπαρξη ποικιλομορφίας στον πληθυσμό, εφαρμόζει μια διαδικασία εκτίμησης της πυκνότητας, υπολογίζοντας την μέση απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία.

Αρχικά, δημιουργείται τυχαία ένας πληθυσμός, ο οποίος ταξινομείται βασιζόμενος στην μη-κυριαρχία. Η καταλληλότητα του κάθε ατόμου ισούται με το επίπεδο στο οποίο έχει ταξινομηθεί. Για την δημιουργία της επόμενης γενιάς, πραγματοποιούνται οι διαδικασίες της δυαδικής επιλογής, του επανασυνδυασμού, της διασταύρωσης και της μετάλλαξης.

Αυτή την στιγμή αποτελεί έναν από τους πλέον δημοφιλείς αλγορίθμους με ευρεία εφαρμογή σε πολυκριτήρια προβλήματα βελτιστοποίησης.

Κεφάλαιο 4: Διαχείριση Χαρτοφυλακίου

4.1 Η έννοια της απόδοσης

Ως απόδοση ορίζεται η ποσοστιαία μεταβολή της επένδυσης για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Εάν ένα χρεόγραφο, τη χρονική στιγμή t έχει αξία S_t , ενώ τη χρονική στιγμή t έχει αξία S_{t-1} , η απόδοση ορίζεται ως

$$r = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

Με αυτό τον τρόπο υπολογίζεται η αριθμητική απόδοση. Σε μια σειρά T περιόδων με αποδόσεις $r_1, r_2, \dots, r_T$, η συνολική απόδοση R υπολογίζεται ως

$$R = \prod_{t=1}^T (1 + r_t) - 1$$

Και η μέση (αναμενόμενη) απόδοση ορίζεται ως

$$E(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της απόδοσης είναι η γεωμετρική απόδοση που υπολογίζεται ως

$$r^G = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

Οι αριθμητικές και οι γεωμετρικές αποδόσεις συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$r^G = \ln(1 + r)$$

Συνεπώς, για μια σειρά T περιόδων, η συνολική γεωμετρική απόδοση των υπολογίζεται από το άθροισμα

$$R^G = \sum_{t=1}^T r_t^G$$

4.2 Η έννοια του κινδύνου

Ο κίνδυνος είναι μια σημαντική παράμετρος στη διαδικασία αξιολόγησης και βελτιστοποίησης ενός χαρτοφυλακίου. Ως κίνδυνος ορίζεται οποιαδήποτε απόκλιση από το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Στον μαθηματικό ορισμό του κινδύνου, εφαρμόζεται ο υπολογισμός της διασποράς. Για μια σειρά T περιόδων, η διασπορά των αποδόσεων ορίζεται ως

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [r_t - E(r)]^2$$

Η διασπορά είναι ένα μέτρο αξιολόγησης του χαρτοφυλακίου, το οποίο πρέπει να ελαχιστοποιείται. Όσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά, τόσο μεγαλύτερος ο κίνδυνος απόκλισης από τα αναμενόμενα αποτελέσματα.

4.3 Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου

4.3.1 Το μοντέλο του Markowitz

Ο Harry Markowitz, στο άρθρο του Portfolio Selection [14], παρουσίασε την πρωτοπόρα εργασία του για την επιλογή και διαχείριση χαρτοφυλακίων. Ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τις έννοιες της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου στις αποφάσεις του επενδυτή

Η θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις

- Οι επενδυτές έχουν συγκεκριμένο επενδυτικό ορίζοντα,
- Κάθε χαρακτηρίζεται από μια κατανομή πιθανοτήτων των αναμενόμενων αποδόσεων. Η κατανομή χαρακτηρίζεται από τη μέση τιμή (αναμενόμενη απόδοση) και τη διασπορά (κίνδυνος),
- Η απόδοση και η διασπορά είναι μέτρα ικανά να χαρακτηρίσουν ένα χαρτοφυλάκιο,
- Οι επενδυτές ακολουθούν κάποιες βασικές αρχές στην επενδυτική συμπεριφορά τους. Προτιμούν να επενδύσουν σε μεγαλύτερες αποδόσεις για ένα δεδομένο επίπεδο κινδύνου, όπως προτιμούν να επενδύουν με τον λιγότερο δυνατό κίνδυνο για επενδύσεις με την ίδια αναμενόμενη απόδοση,
- Το διαθέσιμο ποσό προς επένδυση είναι καθορισμένο,
- Στο τέλος της επένδυσης, ο επενδυτής θα ρευστοποιήσει τους τίτλους που διαθέτει, και είτε θα το καταναλώσει, είτε θα στραφεί εκ νέου σε κάποια επένδυση,

Η εργασία του Markowitz αποτελεί την πρώτη επιστημονική προσέγγιση της βελτιστοποίησης των χαρτοφυλακίων. Οι παραπάνω υποθέσεις αποτελούν τη βάση του προσδιορισμού του βέλτιστου χαρτοφυλακίου υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Ουσιαστικά, η θεωρία χαρτοφυλακίου προσπαθεί να προσδιορίσει τις δυνατότητες του βέλτιστου δυνατού συνδυασμού μεμονωμένων μετοχών σε χαρτοφυλάκια με δεδομένη αναμενόμενη απόδοση και κίνδυνο, το οποίο τελικά θα μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα του επενδυτή.

4.3.2 Το μοντέλο μέσου-διακύμανσης

Το ρίσκο και η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου P που αποτελείται από N μετοχές με κίνδυνο, μπορεί να υπολογιστεί από το συνδυασμό των αποδόσεων και του ρίσκου των διακριτών μετοχών, όταν οι μετοχές που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο μπορούν να περιγραφούν από τις κατανομές των αποδόσεών τους. Το χαρτοφυλάκιο P θα έχει αναμενόμενη απόδοση

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N x_i r_i$$

Όπου r_i η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής i . Η διασπορά του χαρτοφυλακίου ορίζεται ως

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

Όπου x_i είναι το ποσοστό της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο, έτσι ώστε $\sum_{i=1}^N x_i = 1$, σ_{ij} η συνδιακύμανση ανάμεσα στις αποδόσεις των μετοχών i, j

Ο Markowitz στην εργασία του για την θεωρία των χαρτοφυλακίων [15], λαμβάνει υπόψη του μόνο την αναμενόμενη απόδοση και τη διασπορά. Για το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ενός χαρτοφυλακίου, υπάρχουν δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, που είναι σε ανταγωνισμό μεταξύ τους, η αναμενόμενη απόδοση και η διασπορά.

Το μαθηματικό μοντέλο της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου ορίζεται ως

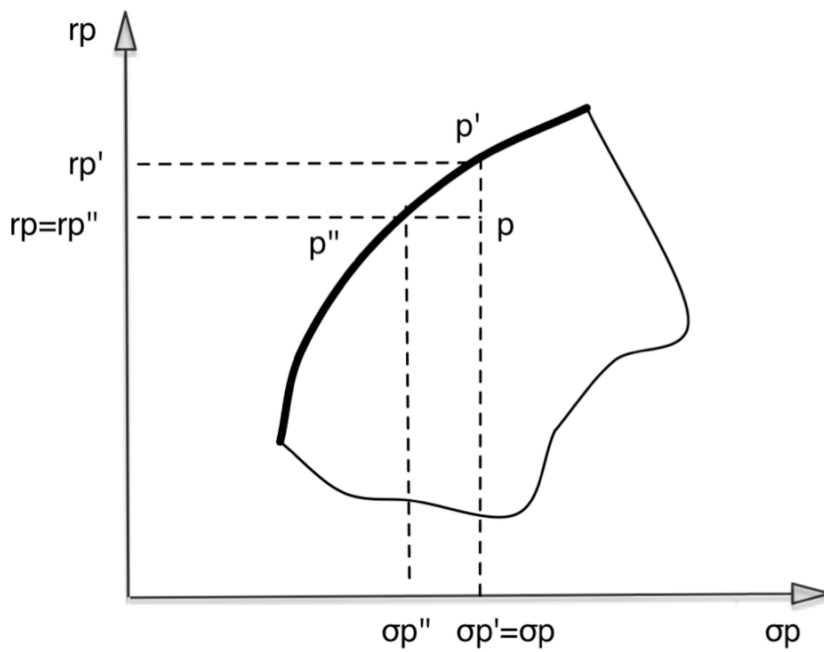
$$\min_{x_i} \sigma_p^2$$

Υπό

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$r_p = \sum_i x_i r_i$$

$$\sum_i x_i = 1$$



Σχήμα 13. Σύνολο Pareto βέλτιστων χαρτοφυλακίων, σύμφωνα με το μοντέλο του Markowitz

Από το σχήμα 13 είναι προφανές πως το χαρτοφυλάκιο με τον ελάχιστο κίνδυνο δεν είναι και το χαρτοφυλάκιο με την μέγιστη απόδοση. Επίσης μπορεί να διαπιστωθεί πως για ένα χαρτοφυλάκιο P που δεν βρίσκεται στο περίγραμμα (μαύρη γραμμή), υπάρχει ένα άλλο χαρτοφυλάκιο P'' με την ίδια αναμενόμενη απόδοση αλλά με μικρότερο κίνδυνο, αλλά και ένα χαρτοφυλάκιο P' που έχει τον ίδιο κίνδυνο με το χαρτοφυλάκιο P , αλλά μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση. Σε αυτή την περίπτωση, το χαρτοφυλάκιο P είναι ένα υποδεέστερο χαρτοφυλάκιο, ενώ τα χαρτοφυλάκια P' και P'' χαρακτηρίζονται αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια.

Γίνεται αντιληπτό πως δεν μπορεί να γίνει καμία σύγκριση ανάμεσα στα δύο αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια, καθώς η αναμενόμενη απόδοση και ο κίνδυνος είναι ανταγωνιστικά κριτήρια. Δηλαδή είναι στην αποκλειστική διάθεση του επενδυτή, εάν θα προτιμήσει ένα "υποσχόμενο" χαρτοφυλάκιο με μεγαλύτερο κίνδυνο, ή ένα χαρτοφυλάκιο περισσότερο ακίνδυνο άλλα με χαμηλότερη αναμενόμενη απόδοση.

Σαν συμπέρασμα διαπιστώνεται πως δεν υπάρχει η δυνατότητα να βελτιστοποιηθεί η μία αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος(π.χ. η απόδοση) χωρίς να "χειροτερέψει" η άλλη αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.

Ο παραπάνω ορισμός είναι για την περίπτωση που η κατασκευή του χαρτοφυλακίου δεν υπόκειται σε κανέναν περιορισμό. Στην πλειοψηφία των προβλημάτων βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου, υπάρχουν αρκετοί περιορισμοί. Η κύρια μορφή περιορισμού που παρατηρείται σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι ο περιορισμός για το πλήθος των μετοχών που συμμετέχουν στο χαρτοφυλάκιο.

4.3.3 Περιορισμοί για το πλήθος των μετοχών

Θεωρητικά, οι επενδυτές έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν χαρτοφυλάκια, που να αποτελούνται από όσες μετοχές είναι διαθέσιμες. Οι ερευνητικές εργασίες που έχουν πραγματοποιηθεί όμως, μπορούν να οδηγήσουν σε μία αρκετά διαφορετική προσέγγιση στον αριθμό των μετοχών που απαρτίζουν ένα χαρτοφυλάκιο. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου μπορεί να μειώσει τον κίνδυνο στον οποίο είναι εκτεθειμένοι οι επενδυτές. Σύμφωνα με αρκετές ερευνητικές προσεγγίσεις, ένα χαρτοφυλάκιο που απαρτίζεται από ένα μικρό αριθμό μετοχών, μπορεί να χαρακτηρίζεται από ένα καλό βαθμό διαφοροποίησης. Τα στατιστικά στοιχεία αυτών των προσεγγίσεων βασίζονται σε μια τυχαία επιλογή διαφορετικών μετοχών και αναλύοντας την ελάχιστη συνεισφορά αυτών των επιπλέον μετοχών.

Για το πρόβλημα βελτιστοποίησης του χαρτοφυλακίου υπό περιορισμούς, το μαθηματικό μοντέλο είναι

$$\min_{x_i} \sigma_p^2$$

Υπό

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$r_p = \sum_i x_i r_i$$

$$\sum_i x_i = 1$$

$$x_i \geq z_i x^{\min}$$

$z_i = 1$, εάν η μετοχή συμμετέχει στο χαρτοφυλάκιο, αλλιώς 0

$$\sum_{i=1}^N z_i \leq K, \text{ όπου } K \text{ ο επιθυμητός αριθμός μετοχών στο χαρτοφυλάκιο}$$

4.3.4 Κριτική της Σύγχρονης Θεωρίας Χαρτοφυλακίου

Πέραν της τεράστιας σημασίας της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου, υπάρχουν κάποια ζητήματα, για τα οποία έχει ασκηθεί κριτική.

- ❖ Η σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου, χρησιμοποιεί το μαθηματικό μοντέλο της διασποράς, ώστε να μετρήσει τον κίνδυνο, το οποίο είναι δικαιολογημένο σε περιπτώσεις που η αναμενόμενη απόδοση είναι ελλειπτικά κατανεμημένη (π.χ. κανονικά κατανεμημένες αναμενόμενες αποδόσεις). Σε περιπτώσεις όμως γενικά κατανεμημένων αποδόσεων, άλλοι τρόποι μέτρησης του κινδύνου είναι αποτελεσματικότεροι.
- ❖ Η σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου δεν λαμβάνει υπόψη κοινωνικές, προσωπικές ή στρατηγικές διαστάσεις. Ο μόνος σκοπός είναι να μεγιστοποιηθεί η απόδοση προσαρμοσμένη στον κίνδυνο, χωρίς κανένα "σεβασμό" σε οποιεσδήποτε άλλες συνέπειες. Επίσης, η απόλυτη εξάρτηση της μεθόδου από τις τιμές των μετοχών την καθιστά ευάλωτη σε όλες τις πιθανές δυσλειτουργίες της αγοράς (π.χ. ασυμμετρία πληροφοριών).

4.3.5 Επιλογή και Διαχείριση Χαρτοφυλακίων

Το πρόβλημα της επιλογής και διαχείρισης των χαρτοφυλακίων αποτελεί ένα από τα πλέον ενεργά σημεία της έρευνας εδώ και 50 χρόνια. Ουσιαστικά, ο πυρήνας του προβλήματος είναι η σύνθεση του χαρτοφυλακίου, με σκοπό να μεγιστοποιείται η χρησιμότητα του επενδυτή.

Οι πλέον εφαρμόσιμες τεχνικές που χρησιμοποιούνται με σκοπό τη σύνθεση των χαρτοφυλακίων είναι οι τεχνικές ποσοτικής επένδυσης που αναπτύσσονται στη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου. Αυτές οι τεχνικές μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κατηγορίες, την ενεργητική διαχείριση επενδύσεων και την παθητική διαχείριση επενδύσεων.

A)Ενεργητική διαχείριση επενδύσεων

Η ενεργητική διαχείριση επενδύσεων έχει ως στόχο την καλύτερη απόδοση σε σχέση με την αγορά ή με κάποιο δεδομένο πρότυπο. Το λειτουργικό τους μειονέκτημα είναι πως απαιτούν χρόνο ώστε να προσαρμοστεί η λειτουργία τους σε διάφορες αλλαγές στις κρίσιμες πληροφορίες, ώστε να προσαρμοστούν οι τιμές των χρεογράφων.

Το κρίσιμο σημείο αυτών των τεχνικών είναι επιλογή των μετοχών που θα απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο. Ο συνδυασμός που προκύπτει είναι βασισμένος σε διάφορα θεωρητικά πρότυπα αξιολόγησης. Η ενεργητική διαχείριση επενδύσεων διαμορφώνει χαρτοφυλάκια με μικρό αριθμό μετοχών (σε σχέση με χαρτοφυλάκια που προκύπτουν από την παθητική διαχείριση), καθώς δεν υπάρχει το χρονικό περιθώριο για εκτενή μελέτη για κάθε μετοχή.

Επίσης, μια επένδυση που είναι βασισμένη στην ενεργητική διαχείριση χαρακτηρίζεται από το μεγάλο βαθμό ευελιξίας αλλά και από το διπλό κίνδυνο, τον κίνδυνο της αγοράς και τον κίνδυνο της εταιρείας.

B)Παθητική διαχείριση επενδύσεων

Η αποτύπωση της αγοράς αποτελεί τον κύριο σκοπό της παθητικής διαχείρισης επενδύσεων. Η ορθή λειτουργία των αγορών αποτελεί την βασική προϋπόθεση της τεχνικής, δηλαδή οι νέες πληροφορίες να μπορούν να επηρεάσουν άμεσα τις τιμές των μετοχών.

Σε αυτή την τεχνική, ο μόνος κίνδυνος που χαρακτηρίζει την επένδυση είναι ο κίνδυνος της αγοράς. Επίσης, η παθητική διαχείριση δεδομένων χαρακτηρίζεται για το χαμηλό κόστος που απαιτεί, ενώ ταυτόχρονα είναι απλή σε εφαρμογή.

4.4 Η έννοια της Value at Risk (VaR)

Το σύγχρονο χρηματοοικονομικό περιβάλλον χαρακτηρίζεται από την ιδιαίτερη πολυπλοκότητα και το πλήθος των διαθέσιμων επιλογών. Υπό αυτές τις συνθήκες, η μέτρηση του επενδυτικού κινδύνου καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολη και απαιτητική. Στο μοντέλο του Markowitz, ο κίνδυνος καθορίζεται ως η μέτρηση της διασποράς. Αυτό είναι και ένα σημείο στο οποίο έχει ασκηθεί έντονη κριτική για την σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου.

Η αναγκαιότητα ενός πιο αποτελεσματικού τρόπου υπολογισμού του κινδύνου οδήγησε τους ερευνητές στην *αξία στον κίνδυνο* (Value at Risk) [16]. Είναι ένας τρόπος προσδιορισμού της μέγιστης ζημίας που μπορεί να έχει ο επενδυτής σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα και σε ένα καθορισμένο βαθμό βεβαιότητας (βαθμό εμπιστοσύνης). Η έννοια της VaR απαντά με άμεσο τρόπο στο πρόβλημα της εκτίμησης του επενδυτικού κινδύνου, δίνοντας την δυνατότητα στον αναλυτή να προσδιορίσει την μέγιστη

αναμενόμενη ζημία που μπορεί να υποστεί σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα και σε ένα καθορισμένο βαθμό βεβαιότητας, το οποίο συνήθως ορίζεται στα επίπεδα του 95% ή 99%.

Η VaR αποκτά ιδιαίτερη αναγνώριση είτε σε ερευνητικά πεδία είτε σε εφαρμογή στο χρηματοπιστωτικό σύστημα. Η ανάπτυξη της VaR έγινε από την αμερικανική τράπεζα JP Morgan, η οποία ανέπτυξε το σύστημα Risk Metrics [44], στην προσπάθειά της να δημιουργήσει ένα εργαλείο μέτρησης και παρακολούθησης των αναμενόμενων ζημιών της τράπεζας. Η τράπεζα αποφάσισε να διαθέσει εμπορικά το εργαλείο αλλά και να δημοσιεύσει το υπόβαθρό του, δίνοντας τεράστιες ευκαιρίες στους ερευνητές του αντικειμένου.

4.4.1 Υπολογισμοί της VaR

Η VaR ορίζεται ως η μέγιστη αναμενόμενη ζημία που μπορεί να υποστεί ένας επενδυτής σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Εάν η αξία ενός χαρτοφυλακίου είναι S_0 , η μέγιστη μεταβολή είναι $\Delta S^* = S_0 - S_t^*$, για ένα χρονικό διάστημα t , σε επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - a$, δηλαδή $\Pr(\Delta S > \Delta S^*) = a$.

Γνωρίζουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ίση με

$$r = \frac{S_t - S_0}{S_0} = -\frac{\Delta S}{S_0} \Rightarrow \Delta S = -rS_0$$

Ο υπολογισμός της VaR ανάγεται στον προσδιορισμό της οριακής απόδοσης r^* , έτσι ώστε

$$\Pr(-rS_0 > -r^*S_0) = \Pr(r < r^*) = a$$

Εάν υποθέσουμε πως η απόδοση ακολουθεί την κανονική κατανομή, προκύπτει ότι

$$\Pr(r < r^*) = a \Rightarrow \Pr(Z < Z^* = \frac{r^* - \mu}{\sigma}) = a, \text{ όπου } \mu \text{ η μέση τιμή και } \sigma$$

η τυπική απόκλιση της απόδοσης.

Δεδομένου ότι το Z^* μπορεί να υπολογιστεί από τους πίνακες κατανομής προκύπτει ότι η VaR μπορεί να υπολογισθεί ως

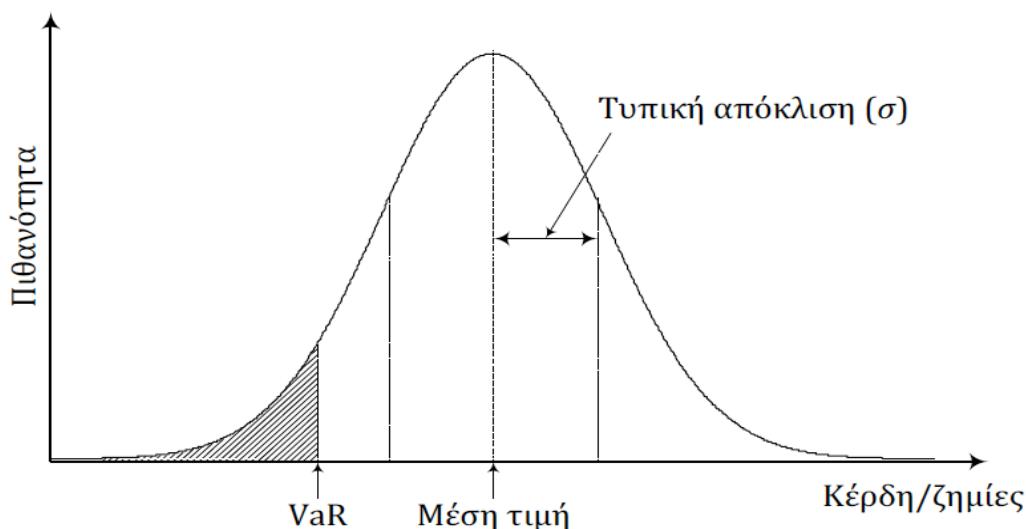
$$VaR = S_0 - S_t^* = S_0 - (1 + r^*)S_0 = -r^*S_0 = -(\mu + Z^*\sigma)S_0$$

Βάσει αυτής της προσέγγισης για τον υπολογισμό της VaR, μπορεί να εφαρμοσθεί και στον υπολογισμό της VaR για χαρτοφυλάκια και υπολογίζεται ως εξής

$$VAR_p = (\mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V})^{1/2}$$

Όπου V είναι το διάνυσμα με τις VaR των επιμέρους χρεογράφων και C είναι ο πίνακας συσχετίσεων των αποδόσεων των χρεογράφων.

Ακολουθεί η σχηματική απεικόνιση της έννοιας της VaR.



Σχήμα 14 Σχηματική απεικόνιση της έννοιας της VaR

4.4.2 Ιστορική Προσομοίωση

Η παραπάνω διαδικασία υπολογισμού της VaR χαρακτηρίζονται για την απλότητά τους, αλλά είναι εφαρμόσιμοι μόνο στις περιπτώσεις που οι αποδόσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή. Επειδή αυτό δεν είναι πάντα εφικτό, έχουν προταθεί κάποιοι εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού της VaR.

Ένας διαδεδομένος τρόπος είναι αυτός της ιστορικής προσομοίωσης. Για τον υπολογισμό της VaR με αυτό τον τρόπο είναι απαραίτητη η συλλογή ενός αριθμού στοιχείων των τιμών των χρεογράφων (που αντιπροσωπεύουν την αξία τους) για μια σειρά $T+1$ χρονικών στιγμών. Με αυτά τα στοιχεία γίνεται ο υπολογισμός της απόδοσης r_t για κάθε χρονική περίοδο $t=1,2,...,T$. Για ένα επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$, η VaR μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την απόδοση r^* για την οποία το πλήθος n των περιπτώσεων όπου $r < r^*$ είναι $n = \alpha T$. Η απόλυτη VaR είναι ίση με $-r^* S_0$ και η σχετική VaR ίση με $(\mu - r^*) S_0$, όπου S_0 η απόδοση και μ η αναμενόμενη απόδοση.

Τα κύρια πλεονεκτήματα της ιστορικής προσομοίωσης (εκτός από την απλότητα του προσδιορισμού) είναι:

- ✓ Δεν υπάρχει καμία προϋπόθεση για την στατιστική κατανομή των αποδόσεων
- ✓ Δεν είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός καμίας παραμέτρου
- ✓ Είναι άμεσα εφαρμόσιμη

Επειδή η ιστορική προσομοίωση χρησιμοποιεί για την διαδικασία του υπολογισμού μόνο ιστορικά στοιχεία, παρουσιάζονται και κάποια μειονεκτήματα στην λειτουργία της:

- ✓ Η συλλογή των δεδομένων πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι όσο το δυνατόν αντιπροσωπευτικότερα της πραγματικότητας
- ✓ Σε περίπτωση που τα ιστορικά δεδομένα αντιπροσωπεύουν ένα αρνητικό γεγονός που δεν είναι ιδιαίτερα πιθανό να επαναληφθεί, τότε μπορεί να παρατηρηθεί σημαντικός επηρεασμός στον υπολογισμό της VaR, η οποία θα προκύπτει να είναι ιδιαίτερα υψηλή. Εάν αυτά τα δεδομένα αφαιρεθούν απότομα, θα παρατηρηθεί μια κατακόρυφη μείωση της τιμής της VaR
- ✓ Μία σημαντική παράμετρος της λειτουργίας της ιστορικής προσομοίωσης είναι το πλήθος των ιστορικών δεδομένων που θα αξιοποιηθούν. Μεγαλύτερο πλήθος δεδομένων σημαίνει και μεγαλύτερη ακρίβεια στις εκτιμήσεις. Όμως, το μεγάλο πλήθος δεδομένων μπορεί να προκαλέσει αρνητικά αποτελέσματα, καθώς τα παλαιότερα δεδομένα ενδέχεται να επηρεάσουν τον υπολογισμό της VaR, αφού πληροφορίες από πιο πρόσφατα δεδομένα ίσως να μην αξιοποιηθούν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Κεφάλαιο 5: Πολυκριτήρια εξελικτική βελτιστοποίηση και εφαρμογή της στην κατασκευή επενδυτικών χαρτοφυλακίων

5.1 Εισαγωγή

Στο τομέα της χρηματοοικονομικής επιστήμης, ένα αρκετά σημαντικό ζήτημα που απασχολεί τους ερευνητές είναι ο τρόπος συνδυασμού μετοχών για τη διαμόρφωση ενός χαρτοφυλακίου. Η συγκεκριμένη διαδικασία καλείται *σύνθεση χαρτοφυλακίου*. Η πρώτη τεκμηριωμένη επιστημονική προσέγγιση έγινε από τον Markowitz, ο οποίος όρισε και το μοντέλο μέσου-διακύμανσης, το οποίο αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Τα δύο κύρια χαρακτηριστικά που μπορούν να μοντελοποιήσουν με μαθηματικό τρόπο ένα χαρτοφυλάκιο, σύμφωνα με τη θεωρία χαρτοφυλακίου είναι η αναμενόμενη απόδοση και ο κίνδυνος, ο οποίος υπολογίζεται ως η διακύμανση των αποδόσεων. Συνεπώς, το πρόβλημα της επιλογής ενός βέλτιστου χαρτοφυλακίου, χωρίς κανένα περιορισμό, μπορεί να ορισθεί ως

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$$

Υπό

$$r_p = \sum_i x_i r_i$$

$$\sum_i x_i = 1$$

ενώ στην περίπτωση που υπάρχουν περιορισμοί στο μέγιστο πλήθος μετοχών ανά χαρτοφυλάκιο, τότε ισχύει

$z_i = 1$, εάν η μετοχή συμμετέχει στο χαρτοφυλάκιο, αλλιώς 0

$$x_i \geq z_i x_i^{\min}$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \leq K, \text{ όπου } K \text{ ο επιθυμητός αριθμός μετοχών στο χαρτοφυλάκιο.}$$

Μια γενική προσέγγιση της επιλογής ενός χαρτοφυλακίου είναι πως στην κατασκευή του λαμβάνονται υπόψη η αναμενόμενη απόδοση και ο κίνδυνος. Είναι προφανές πως στην ιδανική περίπτωση, θα ήταν επιθυμητό να αυξάνεται η απόδοση και ταυτόχρονα να

μειώνεται ο κίνδυνος. Όμως αυτή η περίπτωση θα ήταν εφικτή σε ένα φανταστικό κόσμο. Στην πραγματικότητα, η αύξηση της αναμενόμενης απόδοσης συνοδεύεται με την αύξηση του κινδύνου της επένδυσης. Αυτός είναι ο λόγος που το πρόβλημα του συνδυασμού μετοχών με σκοπό την κατασκευή ενός βέλτιστου χαρτοφυλακίου είναι αρκετά πολύπλοκο.

Η εφαρμογή εξελικτικών αλγορίθμων στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος της κατασκευής είναι αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας. Έχει δημοσιευθεί πλήθος εργασιών που εφαρμόζουν εξελικτικούς αλγορίθμους, με διάφορους συνδυασμούς αντικειμενικών συναρτήσεων.

Οι Lin και Gen [48], εφάρμοσαν έναν γενετικό αλγόριθμο, στην επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου, με αντικειμενικές συναρτήσεις την απόδοση και τον κίνδυνο. Σαν συνάρτηση αξιολόγησης, ορίζουν την

$$eval(u_k) = \frac{f(return)}{f(risk)}$$

όπου $eval(u_k)$ είναι η τιμή της καταλληλότητας για το $k^{στο}$ χρωμόσωμα.

Οι Streichert et al [49], εφάρμοσαν έναν γενετικό αλγόριθμο, με τις αντικειμενικές συναρτήσεις της απόδοσης και του κινδύνου, ενώ υπάρχουν περιορισμοί, στο μέγεθος του χαρτοφυλακίου, στο ελάχιστο ποσό για μία μετοχή. Επίσης, για την επίλυση του προβλήματος, εφαρμόζουν και έναν μεμετικό αλγόριθμο [60].

Στην εργασία των Chang et al [51], γίνεται μια προσέγγιση του προβλήματος της βελτιστοποίησης, με εφαρμογή γενετικού αλγορίθμου αλλά και της μεθόδου αναζήτησης Tabu [62,63,64]. Η εφαρμογή γίνεται λαμβάνοντας υπόψη περιορισμούς στο πλήθος των μετοχών και γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων χωρίς την ύπαρξη περιορισμών.

Στην δημοσίευση των Steuer et al [50], προσεγγίζονται πολλαπλές αντικειμενικές συναρτήσεις, για το πρόβλημα της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων και εξηγούνται τα πλεονεκτήματα της ύπαρξης πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων.

Η εργασία των Moral-Escudero et al [61] αξιολογεί τα αποτελέσματα της εφαρμογής ενός γενετικού αλγορίθμου, στην βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων, βασιζόμενοι στο μοντέλο του Markowitz

Επίσης, ο Roudier [65], εφαρμόζει γενετικό αλγόριθμο, στην προσπάθεια εύρεσης αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων, ακολουθώντας το μοντέλο του Markowitz.

5.2 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή πολυκριτήριας εξελικτικής βελτιστοποίησης με στόχο την κατασκευή χαρτοφυλακίων [48,49].

Σε αυτό το πλαίσιο, είναι αναγκαίος ο ορισμός του προβλήματος βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων ως ένα πρόβλημα πολυκριτήριας βελτιστοποίησης [50].

Στο ορισμό του μοντέλου του Markowitz, το πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου χαρακτηρίζεται από δύο παραμέτρους, την αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο. Σε αυτή την περίπτωση, οι δύο αντικειμενικές συναρτήσεις του προβλήματος θα ήταν η αναμενόμενη απόδοση και ο κίνδυνος. Η πρώτη αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος είναι προς μεγιστοποίηση, ενώ η δεύτερη προς ελαχιστοποίηση.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, έγινε αναφορά σε άλλες δύο σημαντικές παραμέτρους που επηρεάζουν την κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου. Η πρώτη παράμετρος είναι ο μέγιστος αριθμός των μετοχών που μπορούν να συμμετάσχουν στο χαρτοφυλάκιο [51], και η δεύτερη παράμετρος είναι ο εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού του κινδύνου, η VaR. Σε συνδυασμό με τις αντικειμενικές συναρτήσεις που ορίστηκαν παραπάνω, τότε μπορεί ορισθεί ένα πρόβλημα πολυκριτήριας βελτιστοποίησης με τέσσερις αντικειμενικές συναρτήσεις. Η μοναδική συνάρτηση που είναι προς μεγιστοποίηση, είναι η αναμενόμενη απόδοση. Οι υπόλοιπες αντικειμενικές συναρτήσεις είναι προς ελαχιστοποίηση.

Το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος ορίζεται ως :

$$\max(E(r_p))$$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\min(VaR(r_p))$$

$$\min \sum_{i=1}^N z_i$$

$$2 \leq \sum_{i=1}^n z_i \leq 30$$

Υπό:

$$x_i \geq z_i x^{\min} \quad z_i \in \{0,1\}$$

5.3 Μεθοδολογία επίλυσης

Όπως έχει αναφερθεί, οι πολυκριτήριοι εξελικτικοί αλγόριθμοι είναι ένας ιδανικός τρόπος επίλυσης υπολογιστικά δύσκολων πολυκριτήριων προβλημάτων. Η ύπαρξη του περιορισμού του πλήθους των μετοχών (οι μεταβλητές z_i) είναι ο λόγος της αυξημένης πολυπλοκότητας. Τα τελευταία χρόνια, παρατηρείται αύξηση της εφαρμογής εξελικτικών αλγορίθμων, στην επίλυση πολυκριτήριων προβλημάτων βελτιστοποίησης

χαρτοφυλακίων [48]. Το βασικό τους χαρακτηριστικό είναι η κατευθυνόμενη και γενικευμένη αναζήτηση, στην οποία ένας πληθυσμός πιθανών λύσεων διατηρείται από γενιά σε γενιά [52]. Αυτή η προσέγγιση από πληθυσμό σε πληθυσμό είναι αποδοτική στην εύρεση των βέλτιστων λύσεων για τη σύνθεση χαρτοφυλακίων. Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των εξελικτικών αλγορίθμων είναι η δυνατότητά τους να χειρίζονται πολυκριτήριες συναρτήσεις βελτιστοποίησης [52]. Έχουν χρησιμοποιηθεί σε διάφορους τύπους προβλημάτων σε θέματα επιστήμης και τεχνολογίας. Συχνή είναι η εφαρμογή τους σε προβλήματα χρηματοοικονομικής μηχανικής (financial engineering) [53,54].

Στα πλαίσια της εργασίας, θα υλοποιηθεί ο γενετικός αλγόριθμος NSGA- II. Οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι η πλέον δημοφιλής τεχνική εξελικτικών αλγορίθμων που εφαρμόζεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων [56,57]. Οι λόγοι που εφαρμόζονται γενετικοί αλγόριθμοι σε τέτοια προβλήματα είναι [55]:

- ✓ Οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι λιγότερο εξαρτημένοι από την φύση του προβλήματος, σε σχέση με άλλες τεχνικές βελτιστοποίησης και αναζήτησης.
- ✓ Έχουν περισσότερες δυνατότητες εύρεσης γενικευμένων βέλτιστων λύσεων.
- ✓ Έχουν την δυνατότητα να διατηρούν ποικιλομορφία λύσεων στον πληθυσμό, λόγω του τελεστή μετάλλαξης.
- ✓ Η χαμηλή πολυπλοκότητα για την κατάταξη των λύσεων σε μη-κυριαρχούμενα επίπεδα.
- ✓ Επιτρέπουν τον χειρισμό πολλών περιορισμών.
- ✓ Είναι κατάλληλοι για δημιουργία και επεξεργασία τυχαία επιλεγμένων χαρτοφυλακίων.

Στη διαδικασία επίλυσης είναι απαραίτητη η διαθεσιμότητα δεδομένων με σκοπό τον υπολογισμό των αντικειμενικών συναρτήσεων, ώστε να δημιουργηθεί ο αρχικός πληθυσμός και να ξεκινήσει η διαδικασία της εξέλιξης. Από αυτά τα δεδομένα, ο αλγόριθμος ακολουθώντας την εξελικτική διαδικασία, θα δημιουργήσει συνδυασμούς μετοχών (χαρτοφυλάκια), τα οποία θα ικανοποιούν τις αντικειμενικές συναρτήσεις που έχουν ορισθεί.

5.4 Δεδομένα

Η συλλογή των δεδομένων έγινε από ιστοχώρο (www.datatext.gr), ο οποίος διαθέτει στους επισκέπτες του τιμές μετοχών για τα τελευταία χρόνια. Οι επιλεγείσες μετοχές είναι 119, από το δείκτη FTSE 80, αλλά και από το γενικό δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε βάσει των αριθμητικών αποδόσεων των μετοχών.

Επίσης, για την εξελικτική διαδικασία του αλγορίθμου και τη δημιουργία πληθυσμών, χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα μέχρι την ημερομηνία 31/12/2008. Τα υπόλοιπα δεδομένα (έως 7/8/2009), χρησιμοποιούνται ώστε να υπάρχει μια εικόνα της πορείας των μετοχών, σε ένα μεταγενέστερο (σε σχέση με τα δεδομένα που δέχεται ο αλγόριθμος) διάστημα. Στο παράρτημα, παρατίθεται πίνακας με το σύνολο των μετοχών που επιλέχθηκαν.

5.5 Ο Αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος NSGA-II, ο οποίος παρουσιάστηκε συνοπτικά στο κεφάλαιο των γενετικών αλγορίθμων, προτάθηκε από τον Deb το 2001 και θεωρείται ένας από τους πλέον αποδοτικούς σε θέματα αποτελεσμάτων και υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Τα κύρια πλεονεκτήματα του αλγορίθμου είναι :

- Στη διαδικασία κατάταξης των μη-κυριαρχούμενων λύσεων, παρατηρείται μειωμένη υπολογιστική πολυπλοκότητα.
- Ο αλγόριθμος εξασφαλίζει ελιτισμό στη διαδικασία.
- Είναι δυνατός ο χειρισμός περιορισμών του προβλήματος.

Αυτοί είναι οι κύριοι λόγοι που επιλέγεται ο αλγόριθμος NSGA-II στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου. Το επόμενο βήμα είναι η "σύνδεση" του αλγορίθμου με τον πυρήνα του προβλήματος, με άλλα λόγια τα δεδομένα που πρέπει να επεξεργαστεί και τις αντικειμενικές συναρτήσεις.

5.6. Μοντελοποίηση του προβλήματος

Παραπάνω αναφέρθηκαν οι λόγοι της επιλογής του αλγορίθμου για τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου. Σε αυτό το σημείο ορίζεται η μοντελοποίηση του προβλήματος με σκοπό να εναρμονιστεί με τις συνθήκες εκτέλεσης του αλγορίθμου που επιλέχθηκε.

5.6.1 Υπολογισμός των αντικειμενικών συναρτήσεων

Το πρόβλημα πολυκριτήριας βελτιστοποίησης της παρούσας εργασίας διαθέτει τέσσερις αντικειμενικές συναρτήσεις. Οι πλέον κοινές για την κατηγορία του προβλήματος είναι η αναμενόμενη απόδοση και η διασπορά. Η τρίτη αντικειμενική συνάρτηση είναι ο εναλλακτικός και σύγχρονος τρόπος εκτίμησης του κινδύνου, η VaR, και τέλος το πλήθος

των μετοχών που απαρτίζουν ένα χαρτοφυλάκιο. Οι αρχικές τιμές που θα έχουν οι τρεις πρώτες αντικειμενικές συναρτήσεις θα υπολογιστούν βάσει των τιμών των μετοχών που θα είναι διαθέσιμα σαν δεδομένα εισόδου στον αλγόριθμο. Με τη δημιουργία του αρχικού πληθυσμού, υπολογίζονται και οι αντίστοιχες αντικειμενικές συναρτήσεις. Για τους πληθυσμούς που θα δημιουργηθούν, οι αντικειμενικές συναρτήσεις θα είναι αποτέλεσμα των δεδομένων εισόδου, που περιγράφηκαν παραπάνω.

Η μόνη αντικειμενική συνάρτηση που είναι προς μεγιστοποίηση είναι η απόδοση, ενώ οι υπόλοιπες αντικειμενικές συναρτήσεις είναι προς ελαχιστοποίηση.

Περιορισμός Πλήθους μετοχών

Στο κεφάλαιο 4, αναφέρθηκε πως το πρόβλημα της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου είναι ένα πρόβλημα περιορισμένου πλήθους μετοχών. Συνεπώς, η διαδικασία της βελτιστοποίησης προϋποθέτει και την ελαχιστοποίηση του πλήθους των μετοχών που συμμετέχουν σε ένα χαρτοφυλάκιο. Στην εργασία, η αντικειμενική συνάρτηση του πλήθους των μετοχών είναι προς ελαχιστοποίηση. Επίσης, έχει οριστεί ένας ελάχιστος και ένας μέγιστος αριθμός μετοχών που μπορεί να διαθέτει ένα χαρτοφυλάκιο. Ο ελάχιστος αριθμός είναι δύο μετοχές και ο μέγιστος τριάντα μετοχές. Ο περιορισμός αυτός ορίζεται ως

$$2 \leq \sum_i^N z_i \leq 30$$

$z_i = 1$, αν η μετοχή i συμμετέχει στο χαρτοφυλάκιο, αλλιώς 0.

Περιορισμός ποσοστού συμμετοχής μιας μετοχής σε ένα χαρτοφυλάκιο.

Ο δεύτερος περιορισμός του προβλήματος αφορά το ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής μιας μετοχής σε ένα χαρτοφυλάκιο. Εάν μια μετοχή i συμμετέχει σε ένα χαρτοφυλάκιο ($z_i = 1$) τότε ισχύει πως $x_i \geq z_i x^{\min}$. Ουσιαστικά, εάν μια μετοχή συμμετέχει στο χαρτοφυλάκιο, τότε το ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής της είναι ίσο με $x^{\min}$. Έτσι αποκλείεται η κατασκευή χαρτοφυλακίων στα οποία κάποια μετοχή συμμετέχει σε πολύ μικρό ποσοστό (πχ. δεν είναι πρακτικά καλό σε ένα χαρτοφυλάκιο αξίας 1.000.000€ να υπάρχει μία μετοχή στην οποία να έχει επενδυθεί 1€). Στα πλαίσια της εργασίας, η τιμή του περιορισμού $x^{\min}$ είναι $x^{\min} = 0.01$. Αυτό σημαίνει πως μία μετοχή πρέπει να συμμετέχει τουλάχιστον σε ποσοστό 1% στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου που συμμετέχει.

Πλέον, έχει γίνει η μοντελοποίηση του προβλήματος και η "σύνδεση" του με τις απαιτήσεις του αλγορίθμου. Ένα χαρτοφυλάκιο αναπαριστάται στον αλγόριθμο, ως ποσοστά συμμετοχής των διαθέσιμων μετοχών και από τις αντικειμενικές του συναρτήσεις.

5.6.2 Αναπαράσταση των λύσεων

Στον αλγόριθμο της εργασίας, ένας πληθυσμός λύσεων είναι ένα σύνολο από πιθανά χαρτοφυλάκια. Κάθε λύση σε ένα πληθυσμό είναι ένα διάνυσμα της μορφής $y = [v \ K]$. Τα πρώτα 119 στοιχεία στο διάνυσμα v χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου, ενώ το τελευταίο στοιχείο (K) είναι ένας τυχαίος θετικός ακέραιος αριθμός, στο διάστημα $(2,30)$, ο οποίος αντιστοιχεί στο μέγιστο αριθμό μετοχών στο χαρτοφυλάκιο. Τα στοιχεία του διανύσματος v σε συνδυασμό με το μέγιστο πλήθος των μετοχών που μπορεί να έχει ένα χαρτοφυλάκιο και το ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής μιας μετοχής (x^{min}), χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των ποσοστών συμμετοχής ($x_1, x_2, \dots, x_{119} \geq 0, \ x_1 + x_2 + \dots + x_{119} = 1$) των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο ως εξής:

1. Εντοπίζεται το σύνολο Z με τα θετικά στοιχεία του διανύσματος v .
2. Εάν το μέγεθος του συνόλου Z είναι μεγαλύτερο από K , τότε διαμορφώνεται το σύνολο Z_1 με τα K μεγαλύτερα στοιχεία του Z , διαφορετικά $Z_1 = Z$.
3. Για κάθε $i \notin Z_1$ τίθεται $x_i = 0$, ενώ για κάθε $i \in Z_1$, τίθεται:

$$x_i = x^{min} + (1 - x^{min} |Z_1|) \frac{v_i}{\sum_{i \in Z_1} v_i}$$

όπου $|Z_1|$ είναι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Z_1 . Δηλαδή, αρχικά σε κάθε μετοχή του συνόλου Z_1 επενδύεται το ελάχιστο ποσοστό x^{min} , και στη συνέχεια το υπόλοιπο ποσοστό του κεφαλαίου $(1 - x^{min} |Z_1|)$ κατανέμεται στις μετοχές του συνόλου Z_1 κατ'αναλογία με τα αντίστοιχα στοιχεία του διανύσματος v .

Στο στάδιο της αρχικοποίησης κάθε λύση παράγεται ως εξής:

1. Επιλέγεται ένα τυχαίο K από την ομοιόμορφη διακριτή κατανομή στο διάστημα $[2, 30]$.
2. Διαμορφώνεται το διάνυσμα v από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[K/119 - 1, K/119]$, με τον επιπλέον περιορισμό ότι τουλάχιστον δύο στοιχεία του v θα πρέπει να είναι θετικά. Με την επιλογή του διαστήματος $[K/119 - 1, K/119]$ συνδέεται το πλήθος των θετικών στοιχείων του διανύσματος v με το μέγιστο επιτρεπτό πλήθος των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο, στοιχείο που επιτρέπει τη διαμόρφωση ενός καλού αρχικού πληθυσμού λύσεων.

Κατά την εξελικτική διαδικασία του αλγορίθμου, ως πληθυσμός δεν χρησιμοποιούνται τα διανύσματα οι τιμές των οποίων αναπαριστούν τα βάρη των μετοχών σε ένα χαρτοφυλάκιο. Σε αυτά τα διανύσματα, η πλειοψηφία των στοιχείων είναι ίση με μηδέν. Εάν αυτά τα διανύσματα συμμετείχαν στην εξελικτική διαδικασία, τότε δεν θα υπήρχε καθόλου ποικιλομορφία στον πληθυσμό, και η αναπαραγωγή λύσεων

ανάμεσα στις γενεές, δεν θα οδηγούσε στην δημιουργία καλύτερων λύσεων [58]. Η διαδικασία που ακολουθείται στην εργασία, εξασφαλίζει ποικιλομορφία στον πληθυσμό, στοιχείο που είναι απαραίτητο για την επιτυχία της εξελικτικής διαδικασίας

5.7 Διαδικασίες του αλγορίθμου

5.7.1 Εντοπισμός μη κυριαρχούμενων λύσεων

Ο αλγόριθμος NSGA-II, έχει ως βασική διαδικασία του την κατάταξη του πληθυσμού βάσει της σχέσης κυριαρχίας. Σε αυτή τη διαδικασία, κάθε λύση του πληθυσμού πρέπει να συγκριθεί με κάθε άλλη λύση του πληθυσμού, ώστε να διαπιστωθεί αν είναι κυριαρχούμενη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργηθούν επίπεδα κυριαρχίας (fronts). Στο πρώτο επίπεδο, θα βρίσκονται οι λύσεις οι οποίες δεν κυριαρχούνται από καμία λύση του πληθυσμού, στο δεύτερο επίπεδο οι λύσεις που κυριαρχούνται μόνο από τις λύσεις του πρώτου επιπέδου κ.ο.κ. Για την κατάταξη των λύσεων στα μεγαλύτερα επίπεδα, οι λύσεις χαμηλότερων επιπέδων δεν λαμβάνονται υπόψη. Η διαδικασία που εφαρμόζεται περιγράφεται ως εξής:

- Αρχικά, δημιουργείται ένα κενό βοηθητικό σύνολο, όπου θα εισαχθεί η πρώτη λύση του πληθυσμού.
- Κάθε λύση που εισάγεται στο βοηθητικό σύνολο(η δεύτερη λύση και οι επόμενες) συγκρίνονται με όλες τις λύσεις που βρίσκονται στο βοηθητικό σύνολο, μία προς μία.
- Έστω η λύση p . Εάν η λύση p κυριαρχεί³ μιας άλλης λύσης q , τότε η λύση q διαγράφεται από το βοηθητικό σύνολο. Εάν η λύση p κυριαρχείται από μία οποιαδήποτε λύση q , τότε η p αγνοείται.
Ακολουθεί ο ψευδό-κώδικας της διαδικασίας.

$$P' = P(1)$$

εισαγωγή της πρώτης λύσης του πληθυσμού

$$\text{for each } p \in P \wedge p \notin P'$$

έλεγχος αν υπάρχει η λύση p στον προσωρινό πληθυσμό

³ Μία λύση κυριαρχεί μιας άλλης λύσης, αν οι αντικειμενικές της συναρτήσεις δεν είναι χειρότερες από τις αντικειμενικές συναρτήσεις της άλλης και τουλάχιστον μία αντικειμενική συνάρτηση της είναι καλύτερη από την αντικειμενική συνάρτηση της άλλης.

$P' = P' \cup p$ εισαγωγή της λύσης p στον προσωρινό πληθυσμό

for each $q \in P' \wedge q \neq p$ σύγκριση της λύσης p με τις άλλες λύσεις του P'

if $p \prec q$ then $P' = P' - q$ εάν η p κυριαρχεί έναντι άλλων λύσεων, διαγράφονται

if $q \prec p$ then $P' = P' - p$ εάν η p κυριαρχείται από άλλες λύσεις, διαγράφεται

Η παραπάνω διαδικασία κατατάσσει τον πληθυσμό βάσει των μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Όμως, υπολογίζεται μόνο το πρώτο επίπεδο μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Για να γίνει κατάταξη του πληθυσμού σε όλα τα δυνατά επίπεδα (όλες οι λύσεις πρέπει να ανήκουν σε κάποιο επίπεδο), οι λύσεις που τελικά θα παραμείνουν στο βοηθητικό πληθυσμό, πρέπει να διαγραφούν από τον κύριο πληθυσμό.

5.7.2 Κατάταξη λύσεων

Η διαδικασία της προηγούμενης ενότητας επαναλαμβάνεται μέχρι να μην απομείνει καμία λύση στον κύριο πληθυσμό, δηλαδή όλες οι λύσεις να ανήκουν σε κάποιο επίπεδο κυριαρχίας. Ο τελικός αριθμός των επιπέδων διαφέρει ανάλογα με τις λύσεις και τη φύση του προβλήματος. Στο τέλος της διαδικασίας, οι λύσεις που δεν κυριαρχούνται από καμία άλλη λύση θα ανήκουν στο επίπεδο 1, λύσεις που κυριαρχούνται μόνο από τις λύσεις του επιπέδου 1, στο επίπεδο 2 κ.ο.κ. Ακολουθεί ο ψευδό-κώδικας της διαδικασίας.

$i = 1$ μετρητής του επιπέδου

while $P \neq \emptyset$

$F_i = \text{find_non_dominated_fronts}(P)$ κατάταξη των λύσεων σε επίπεδα

$P = P - F_i$ αφαίρεση μη κυριαρχούμενων λύσεων

$i = i + 1$ αύξηση του μετρητή επιπέδου

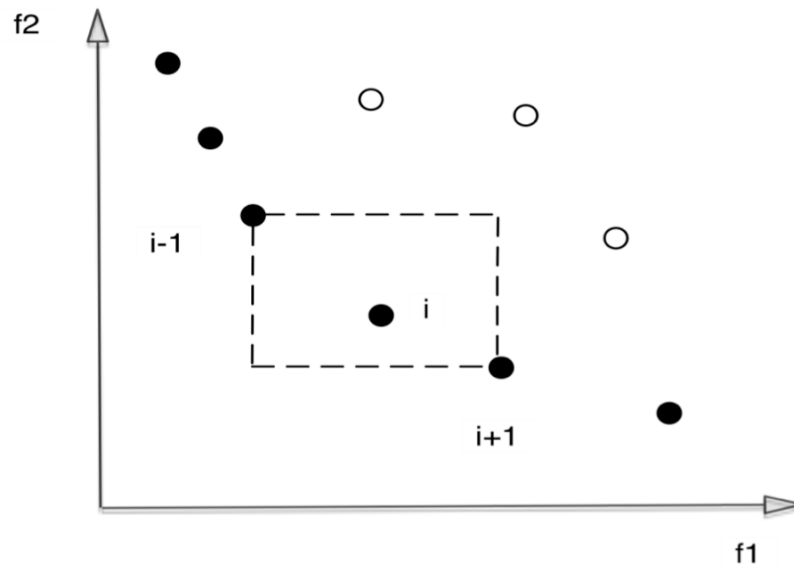
5.7.3 Υπολογισμός της πυκνότητας των λύσεων του αποτελεσματικού συνόλου

Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενα κεφάλαια, ένας σημαντικός ποιοτικός παράγοντας των λύσεων ενός εξελικτικού αλγορίθμου είναι η ποικιλομορφία του πληθυσμού. Η μέθοδος για την επίτευξη αυτής της ποικιλομορφίας που εφαρμόζεται στον αλγόριθμο NSGA-II βασίζεται στην εκτίμηση της πυκνότητας γύρω από μία λύση του πληθυσμού. Αυτή η εκτίμηση επιτυγχάνεται υπολογίζοντας τη μέση απόσταση δύο σημείων, για όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις. Η υπολογιζόμενη απόσταση (crowding

distance) είναι μια εκτίμηση του μεγαλύτερου ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου που σχηματίζεται, το οποίο συμπεριλαμβάνει μια λύση, χωρίς να συμπεριλαμβάνει καμία άλλη λύση του πληθυσμού, όπως φαίνεται και στο σχήμα 15.

Για την υλοποίηση του υπολογισμού της, απαιτείται η κατάταξη των λύσεων βάσει κάθε αντικειμενικής συνάρτησης. Για κάθε αντικειμενική συνάρτηση, οι ακραίες λύσεις λαμβάνουν άπειρη τιμή. Για όλες τις υπόλοιπες λύσεις, υπολογίζεται η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών λύσεων, δηλαδή η διαφορά των τιμών κάθε αντικειμενικής συνάρτησης και αθροίζονται οι αποστάσεις για κάθε αντικειμενική συνάρτηση.

Αξίζει να σημειωθεί πως ο υπολογισμός αυτός γίνεται σε λύσεις οι οποίες ανήκουν στο ίδιο επίπεδο μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Με το υπολογισμό της απόστασης, μπορούν να συγκριθούν δύο λύσεις ως προς τον βαθμό συγγένειας τους με άλλες λύσεις του πληθυσμού. Μια λύση με μικρότερη τιμή σε αυτό το μέτρο της απόστασης, είναι πιο παρεμφερής προς άλλες λύσεις.



Σχήμα 15 Υπολογισμός της πυκνότητας των λύσεων ενός αποτελεσματικού συνόλου

Ο ψευδό-κώδικας που ακολουθεί περιγράφει τη διαδικασία υπολογισμού του παραπάνω μέτρου την πυκνότητας για λύσεις, οι οποίες ανήκουν στο ίδιο επίπεδο μη-κυριαρχούμενων λύσεων.

$$k = |I|$$

Υπολογίζεται πλήθος των λύσεων σε ένα δεδομένο επίπεδο μη-κυριαρχούμενων λύσεων

for each objective function m

$$I = \text{sort}(I, m)$$

Κατάταξη (αύξουσα) για κάθε αντικειμενική συνάρτηση

$$I(1)_{dist} = I(k)_{dist} = \infty$$

Οι ακραίες λύσεις παίρνουν άπειρη τιμή

$$\text{for } i = 2 : (k - 1)$$

Οι υπόλοιπες λύσεις του συνόλου

$$I(i)_{dist} = I(i)_{dist} + (I(i + 1)m - I(i - 1)m)$$

end

end

Ως $I(i).m$ αναφέρεται η τιμή της $m^{στη}$ αντικειμενικής συνάρτησης για την $i^{στη}$ λύση του συνόλου.

5.7.4 Επιλογή λύσεων

Σε ένα γενετικό αλγόριθμο, η διαδικασία της επιλογής είναι αυτή που αποφασίζει για την επιλογή των λύσεων, που θα συμμετάσχουν στη διαδικασία της δημιουργίας πληθυσμών-απογόνων, ως γονείς. Μια αρκετά δημοφιλής τεχνική για την υλοποίηση της επιλογής είναι η tournament selection. Σε αυτή την τεχνική, οι λύσεις που επιλέγονται να συνεχίσουν στη διαδικασία της αναπαραγωγής, ως γονείς, προκύπτουν μέσω μίας διαδικασίας προκριματικού "αγώνα", ανάμεσα σε έναν αριθμό λύσεων. Ο αριθμός αυτός, καθορίζεται από μια παράμετρο, την tour_size , η οποία ορίζει πόσες λύσεις θα συμμετάσχουν σε αυτόν τον προκριματικό αγώνα. Τα βήματα της επιλογής λύσεων είναι τα ακόλουθα:

1. Επιλέγεται με τυχαίο τρόπο, ένας αριθμός λύσεων
2. Οι λύσεις αυτές κατατάσσονται βάσει (α) του επιπέδου μη-κυριαρχούμενων λύσεων στο οποίο ανήκουν (β) της πυκνότητας
3. Στον πρώτο γύρο, επιλέγεται η πρώτη λύση-γονέας. Για την επιλογή και του δεύτερου γονέα, επαναλαμβάνεται η διαδικασία (με άλλες τυχαία επιλεγμένα λύσεις), σε δεύτερο προκριματικό γύρο.

Η διαδικασία της επιλογής πραγματοποιείται βάσει του τελεστή $\prec_n$, ο οποίος ορίζεται ως:

Για δύο λύσεις n, m ισχύει ότι

$$n \prec_n m \text{ εάν } (n_{rank} < m_{rank}) \text{ ή } ((n_{rank} = m_{rank}) \text{ και } (n_{dist} > m_{dist}))$$

Αυτό σημαίνει πως ανάμεσα σε δύο λύσεις που βρίσκονται σε διαφορετικό επίπεδο μη-κυριαρχούμενων λύσεων, είναι προτιμητέα η λύση που ανήκει στο χαμηλότερο επίπεδο. Στην περίπτωση που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, είναι προτιμητέα η λύση η οποία ανήκει σε μια περιοχή λύσεων που είναι λιγότερο πυκνή.

5.7.5 Γενετικοί Τελεστές

Η βασική αρχή της εξελικτικής διαδικασίας είναι η δημιουργία των απογόνων. Όλοι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι προσομοιώνουν τον τρόπο που η φύση χρησιμοποιεί. Ο αλγόριθμος NSGA-II, για τη διαδικασία της εξέλιξης εφαρμόζει επιλογή γονέων, binary crossover και polynomial mutation. Η συνάρτηση tournament selection επιλέγει τους δύο γονείς οι οποίοι θα διασταυρωθούν για να προκύψουν οι δύο λύσεις-απόγονοι. Η διαδικασία της διασταύρωσης γίνεται ως εξής:

$$c_{1,k} = \frac{1}{2}[(1 - \beta_k)p_{1,k} + (1 + \beta_k)p_{2,k}]$$

$$c_{2,k} = \frac{1}{2}[(1 + \beta_k)p_{1,k} + (1 - \beta_k)p_{2,k}]$$

Όπου $c_{i,k}$ το $k^{\text{στο}}$ γονίδιο του $i^{\text{στου}}$ απογόνου, $p_{i,k}$ το $k^{\text{στο}}$ γονίδιο του $i^{\text{στου}}$ γονέα και β_k είναι ένας τυχαίος αριθμός που δημιουργείται έχοντας την πυκνότητα

$$p(\beta) = \frac{1}{2}(n_c + 1)\beta^{n_c}, \text{ αν } 0 \leq \beta \leq 1$$

$$p(\beta) = \frac{1}{2}(n_c + 1)\frac{1}{\beta^{n_c+2}}, \text{ αν } \beta > 1$$

Αυτή η κατανομή λαμβάνεται από έναν ομοιόμορφα κατανεμημένο τυχαίο αριθμό^u στο διάστημα (0,1), και n_c ο δείκτης κατανομής της διασταύρωσης⁴.

Ο άλλος γενετικός τελεστής, η μετάλλαξη, θεωρείται ως δευτερεύουσας σημασίας, και χρησιμοποιείται μόνο για τη διατήρηση της ποικιλομορφίας στον πληθυσμό. Η μετάλλαξη πραγματοποιείται ως συμπληρωματική διαδικασία αναπαραγωγής και πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται διασταύρωση. Η απόφαση για το ποιος τελεστής αναπαραγωγής θα πραγματοποιηθεί, εξαρτάται από την πιθανότητα διασταύρωσης. Στην περίπτωση που δεν πραγματοποιηθεί διασταύρωση, πραγματοποιείται η ακόλουθη διαδικασία:

⁴ Καθορίζει πόσο διαφοροποιούνται τα παιδιά από τους γονείς τους

- Από την διαδικασία της επιλογής λύσεων επιλέγονται δύο γονείς.
- Ορίζεται η πιθανότητα μετάλλαξης $= \frac{1}{M}$, όπου M ο αριθμός των μετοχών
- Δημιουργούνται τυχαία δύο διανύσματα u_1, u_2 ίδιου μεγέθους με αυτά των γονέων, από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.
- Πραγματοποιείται μετάλλαξη, μόνο στα στοιχεία των γονέων για τα οποία ισχύει $u_i(j) < \frac{1}{M}$
- Οι τιμές των στοιχείων που μεταλλάσσονται προκύπτουν από την ακόλουθη διαδικασία:

$$c_k = p_k + \delta_k$$

Όπου c_k ο απόγονος, p_k ο γονέας και δ_k μια μικρή διακύμανση, η οποία υπολογίζεται από μια πολυωνυμική κατανομή ως εξής:

$$\delta_k = (2r_k)^{\frac{1}{n_m+1}} - 1, \text{ εάν } r_k < 0.5$$

$$\delta_k = 1 - [2(1 - r_k)]^{\frac{1}{n_m+1}}, \text{ εάν } r_k \geq 0.5$$

Όπου r_k ένας ομοιόμορφα κατανομημένος τυχαίος αριθμός μεταξύ $(0,1)$ και n_m είναι μία παράμετρος που καθορίζει την μορφή της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής δ_k .

5.7.6 Βασική δομή του αλγορίθμου

Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου είναι η αρχικοποίηση του πληθυσμού. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία της επιλογής και τους γενετικούς τελεστές, δημιουργείται ένας πληθυσμός απόγονος. Οι δύο αυτοί πληθυσμοί είναι του ίδιου μεγέθους. Ο αλγόριθμος NSGA-II, εφαρμόζει ελιτισμό συγκρίνοντας τον παρόντα πληθυσμό με τις καλύτερες λύσεις των προηγούμενων πληθυσμών. Συνεπώς, η διαδικασία είναι διαφορετική μετά την αρχική γενιά.

Αρχικά, δημιουργείται ένας πληθυσμός $R_t = P_t \cup Q_t$, μεγέθους $2N$ όπου P_t ο πληθυσμός-γονέας και Q_t ο πληθυσμός-απόγονος, και οι δύο μεγέθους N . Ο πληθυσμός που δημιουργείται, προκύπτει από τη διαδικασία της επιλογής και από την εφαρμογή των γενετικών τελεστών της διασταύρωσης και της μετάλλαξης. Ακολουθεί ο αλγόριθμος της διαδικασίας για τη δημιουργία της επόμενης γενιάς.

$t = 0$

$P_t = \text{initialize_population}$

Δημιουργία του αρχικού πληθυσμού

$Q_t = \text{new_population}(P_t)$

Δημιουργία του πληθυσμού απογόνου

$R_t = P_t \cup Q_t$

Ένωση των δύο πληθυσμών

$F = \text{fast_Non_Dominated_sort}(R_t)$ Κατάταξη των λύσεων σε επίπεδα $F_1, F_2 \dots$

$P_{t+1} = \emptyset$

$i = 1$

while $|P_{t+1}| + |F_i| \leq N$

Έλεγχος για το μέγεθος του νέου πληθυσμού

$\text{crowding_distance}(F_i)$

Υπολογισμός της πυκνότητας λύσεων για το επίπεδο F_i

$P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$

Εισαγωγή του $i^{\text{στού}}$ μη κυριαρχούμενου επιπέδου στον πληθυσμό

$i = i + 1$

end

$\text{Sort}(F_i, \prec_n)$

Κατάταξη των λύσεων του επιπέδου F_i βάσει του τελεστή

$\prec_n$

$P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i[1 : (N - |P_{t+1}|)]$ Επιλέγονται τα πρώτα $(N - |P_{t+1}|)$ στοιχεία του επιπέδου F_i

$Q_{t+1} = \text{new_population}(P_{t+1})$

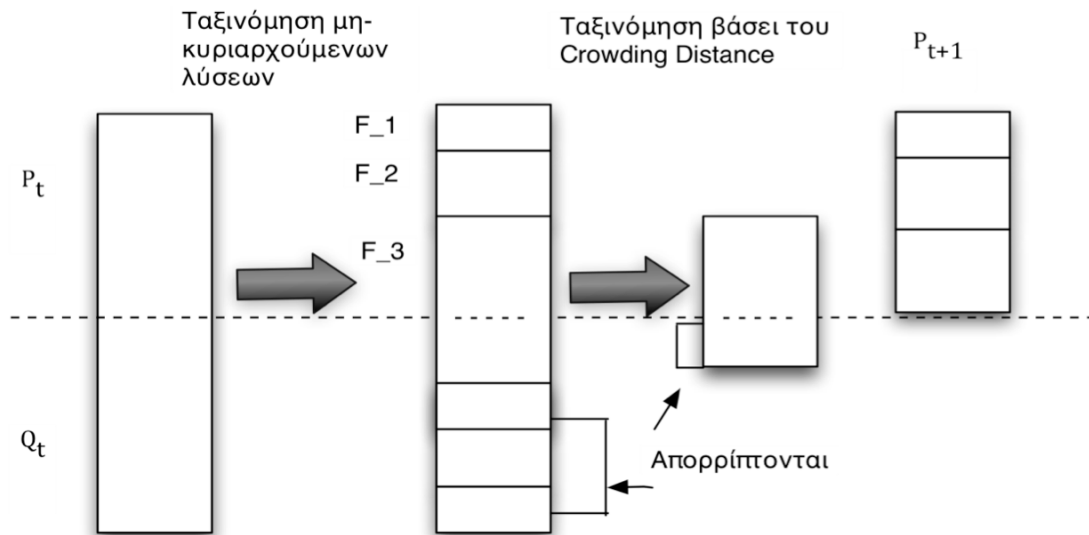
Δημιουργία του πληθυσμού-απογόνου

$t = t + 1$

Ο πληθυσμός R_t ταξινομείται αρχικά σε επίπεδα μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Οι λύσεις που βρίσκονται στο επίπεδο F_1 είναι οι καλύτερες λύσεις και πρέπει να έχουν μεγαλύτερη προτεραιότητα από κάθε άλλη λύση στον πληθυσμό. Εάν το επίπεδο F_1 είναι μικρότερου μεγέθους από N , τότε επιλέγονται όλες οι λύσεις του για τον νέο πληθυσμό P_{t+1} . Οι υπόλοιπες λύσεις που χρειάζονται για να δημιουργηθεί ο πληθυσμός P_{t+1} επιλέγονται από τα υπόλοιπα επίπεδα, ανάλογα με την κατάταξή τους. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου κανένα επίπεδο F να μην μπορεί να αποδώσει λύσεις. Γενικά, οι λύσεις που βρίσκονται σε όλα επίπεδα είναι περισσότερες από τις λύσεις που χρειάζονται για τη δημιουργία του πληθυσμού. Για να επιλεγθούν ακριβώς N λύσεις, η επιλογή γίνεται βάσει του επιπέδου κατάταξης και της πυκνότητας των λύσεων.

Αφού δημιουργηθεί ο πληθυσμός P_{t+1} , εφαρμόζοντας τη διαδικασία της επιλογής και τους γενετικούς τελεστές δημιουργείται ο πληθυσμός Q_{t+1} . Αυτοί οι πληθυσμοί, θα συνδυαστούν με τη σειρά τους για τον πληθυσμό R_{t+1} , ενώ η διαδικασία θα συνεχιστεί για να προκύψουν οι πληθυσμοί P_{t+2} , Q_{t+2} .

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται σχηματικά η συνολική διαδικασία του αλγορίθμου NSGA-II.



Σχήμα 16. Περίγραμμα της βασικής λειτουργίας του NSGA-II [42]

5.8 Αποτελέσματα

Εισαγωγή

Μετά την ολοκλήρωση της υλοποίησης του αλγορίθμου, ακολουθεί η εκτέλεση για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Όπως αναφέρθηκε, τα δεδομένα εισόδου χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, σε αυτά που θα χρησιμοποιηθούν για την εξελικτική διαδικασία του αλγορίθμου, και σε εκείνα τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της απόδοσης του αλγορίθμου.

5.8.1 Δεδομένα εισόδου

Τα δεδομένα εισόδου είναι αυτά τα οποία παρέχουν στον αλγόριθμο τον υπολογισμό των απαραίτητων ποσοτήτων, όπως αυτή της αναμενόμενης απόδοσης και της διασποράς, αλλά και την ημερήσια απόδοση κάθε μετοχής. Αυτά τα δεδομένα χρησιμοποιούνται τόσο κατά τη διάρκεια της δημιουργίας πληθυσμών λύσεων, όσο και για την αξιολόγηση της ποιότητας αυτών των λύσεων, σε μελλοντικά δεδομένα.

5.8.2 Παράμετροι

Η πρώτη παράμετρος του αλγορίθμου, είναι το μέγεθος που θα έχουν οι πληθυσμοί λύσεων οι οποίοι θα δημιουργούνται, δηλαδή πόσα χαρτοφυλάκια θα περιέχει κάθε πληθυσμός που θα παράγεται σε κάθε εκτέλεση του αλγορίθμου.

Η δεύτερη παράμετρος έχει να κάνει με τη διαδικασία αναπαραγωγής και είναι η πιθανότητα διασταύρωσης, η οποία καθορίζει το ποσοστό των λύσεων που θα αναπαραχθούν μέσω διασταύρωσης και το ποσοστό των λύσεων που θα αναπαραχθούν μέσω της διαδικασίας της μετάλλαξης που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η τρίτη και τελευταία παράμετρος είναι ο αριθμός των γενεών που θα διαρκεί η εξελικτική διαδικασία, μέχρι ο αλγόριθμος να φθάνει στον τερματισμό του.

Οι τιμές των παραμέτρων για τις οποίες εκτελέστηκε ο αλγόριθμος, ακολουθούν στον πίνακα 2.

Μέγεθος πληθυσμού		
200	400	
Αριθμός γενεών		
500	1000	
Πιθανότητα διασταύρωσης		
0.4	0.6	0.9

Πίνακας 2. Τιμές παραμέτρων του αλγορίθμου

Από τον πίνακα 1, προκύπτει πως ο αλγόριθμος θα έχει ως έξοδο δώδεκα διαφορετικούς συνδυασμούς αποτελεσμάτων. Για κάθε μία από αυτές τις παραμέτρους, ο αλγόριθμος θα εκτελεσθεί επαναληπτικά για δέκα φορές.

5.8.3 Αντικειμενικές συναρτήσεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσθηκαν οι τέσσερις αντικειμενικές συναρτήσεις του προβλήματος βελτιστοποίησης της εργασίας, οι οποίες είναι η αναμενόμενη απόδοση, ο κίνδυνος, η VaR και το πλήθος των μετοχών του χαρτοφυλακίου.

Ο αλγόριθμος θα εκτελεστεί, λαμβάνοντας υπόψη τη βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση /ελαχιστοποίηση) όλων των αντικειμενικών συναρτήσεων, αλλά και λαμβάνοντας υπόψη μόνο δύο ή τρεις αντικειμενικές συναρτήσεις.

Στην περίπτωση που ο αλγόριθμος θα πρέπει να βελτιστοποιήσει δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, αυτές θα είναι η αναμενόμενη απόδοση και ο κίνδυνος. Αυτή η προσέγγιση αποτελεί την πιο απλή μορφή στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος της κατασκευής επενδυτικών χαρτοφυλακίων, και είναι η προσέγγιση που πρότεινε ο Markowitz στο μοντέλο μέσου-διακύμανσης.

Στην περίπτωση των τριών αντικειμενικών συναρτήσεων, λαμβάνονται υπόψη η αναμενόμενη απόδοση, ο κίνδυνος και η VaR. Με αυτόν τον τρόπο επιχειρείται να αξιολογηθεί η επίπτωση στην κατασκευή χαρτοφυλακίων που εισάγεται με την προσθήκη της VaR ως αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.

Σε όλες τις περιπτώσεις αντικειμενικών συναρτήσεων, υπάρχει περιορισμός στο μέγιστο και ελάχιστο πλήθος μετοχών, καθώς και στο ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής μίας μετοχής σε ένα χαρτοφυλάκιο.

Στην συνέχεια της εργασίας θα παρουσιαστούν αποτελέσματα για όλες τις περιπτώσεις αντικειμενικών συναρτήσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω.

5.8.4 Αποτελέσματα των χαρτοφυλακίων με μεταγενέστερα δεδομένα

Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, δημιουργούνται πληθυσμοί λύσεων, για κάθε μία από τις περιπτώσεις παραμέτρων ή αντικειμενικών συναρτήσεων. Για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις, οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, προκύπτουν από παρελθοντικά δεδομένα εισόδου. Ένας τρόπος αξιολόγησης αυτών των πληθυσμών λύσεων, είναι οι υπολογισμός των αντίστοιχων αντικειμενικών συναρτήσεων, βάσει μελλοντικών δεδομένων εισόδου, δεδομένων δηλαδή που είναι μεταγενέστερα από αυτά που χρησιμοποιούνται για την εξελικτική διαδικασία του αλγορίθμου.

5.8.5 Μέτρηση της ποιότητας των λύσεων βάσει της έκτασης των παραμέτρων

Ένας σημαντικός παράγοντας που καθορίζει την ποιότητα των λύσεων ενός αλγορίθμου πολυκριτήριας εξελικτικής βελτιστοποίησης, είναι η ποικιλομορφία των πληθυσμών λύσεων. Είναι επιθυμητό, οι λύσεις που παράγονται από έναν αλγόριθμο, να καλύπτουν όσο το δυνατόν μεγαλύτερη έκταση από τον χώρο των πιθανών λύσεων. Οι Zitler, Deb, Thiele [46] προτείνουν ένα τρόπο αξιολόγησης των λύσεων, βάσει της ποικιλομορφίας των λύσεων. Για τις μεταβλητές απόφασης, που στα πλαίσια της εργασίας είναι τα βάρη των μετοχών, η αξιολόγηση των λύσεων γίνεται από τον τύπο

$$M3(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \max\{\|a'_i - b'_i\|, \mathbf{a}'_i, \mathbf{b}'_i \in X\}},$$

ενώ για τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, η αξιολόγηση γίνεται από τον τύπο

$$M3(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \max\{\|p'_i - q'_i\|, \mathbf{p}'_i, \mathbf{q}'_i \in Y\}},$$

όπου X , το σύνολο που περιέχει τις μεταβλητές απόφασης, και Y το σύνολο με τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Οι τιμές των $M3(X)$, $M3(Y)$, λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $[0, |X|]$, $[0, |Y|]$, όπου $|X|$, $|Y|$, τα μέτρα των αντίστοιχων συνόλων. Όσο μεγαλύτερη η τιμή που λαμβάνουν οι συναρτήσεις, τόσο πιο ποιοτικά είναι τα αποτελέσματα. Οι συναρτήσεις $M3(X)$, $M3(Y)$ χρησιμοποιούν την μέγιστη έκταση για κάθε διάσταση για την εκτίμηση εύρους στο οποίο το σύνολο λύσεων αναπτύσσεται.

Για τον υπολογισμό της $M3(Y)$, λαμβάνονται υπόψη μόνο οι αντικειμενικές συναρτήσεις που είναι προς βελτιστοποίηση, ανάλογα με την περίπτωση εφαρμογής τους. Επίσης, γίνεται κανονικοποίηση των τιμών με τον ακόλουθο τρόπο:

$$f(:,i) = \frac{f(:,i) - \left[\frac{\sum_{j=1}^N f(j,i)}{N} \right]}{\sigma(f(:,i))}$$

Όπου $f(:,i)$ το διάνυσμα που περιέχει τις τιμές της $i^{\text{στης}}$ αντικειμενικής συνάρτησης.

5.8.6 Αναμενόμενη απόδοση– Κίνδυνος

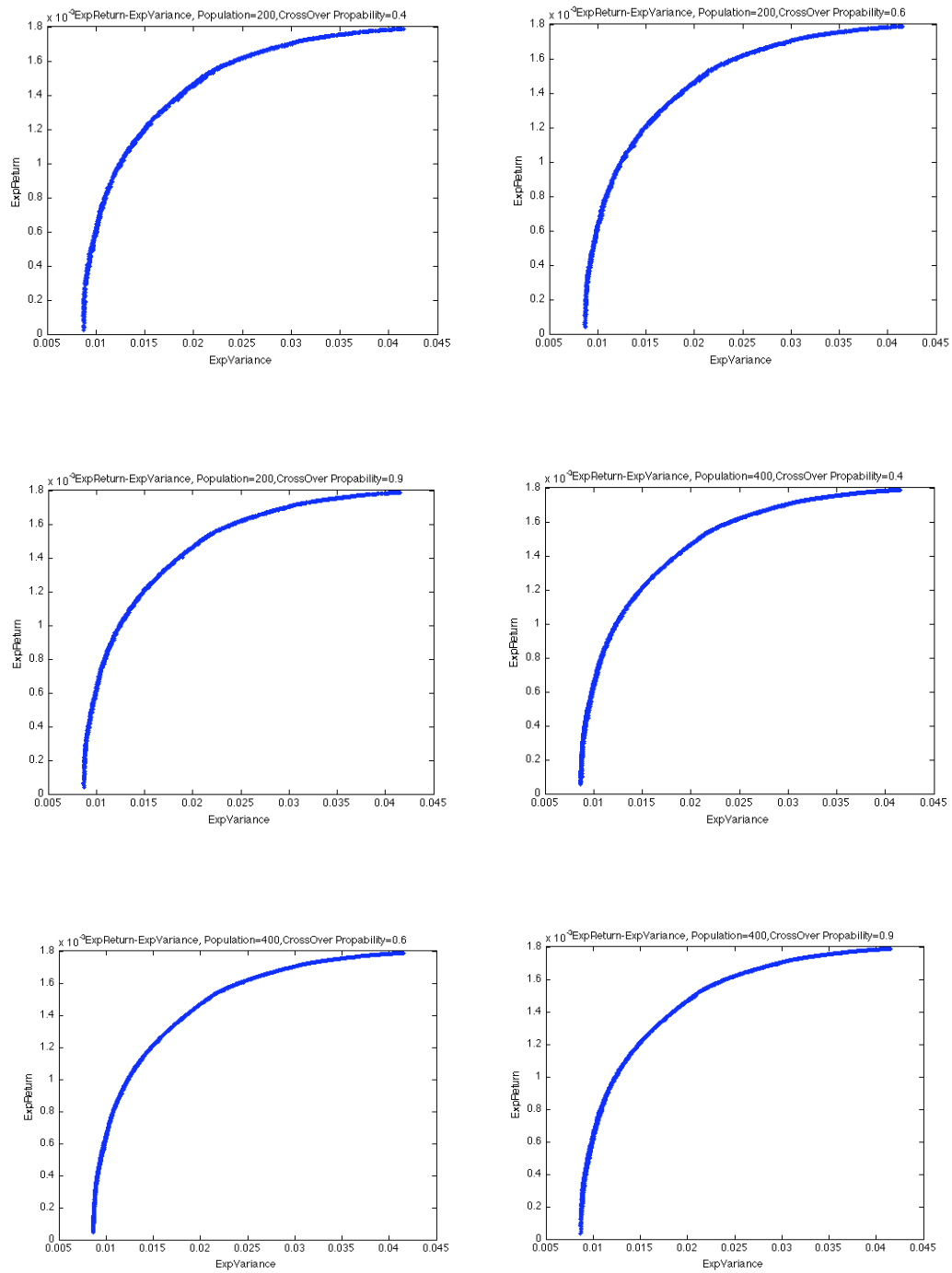
Σε αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα βελτιστοποίησης διαθέτει δύο αντικειμενικές συναρτήσεις και ορίζεται ως

$$\max(E(r_p))$$

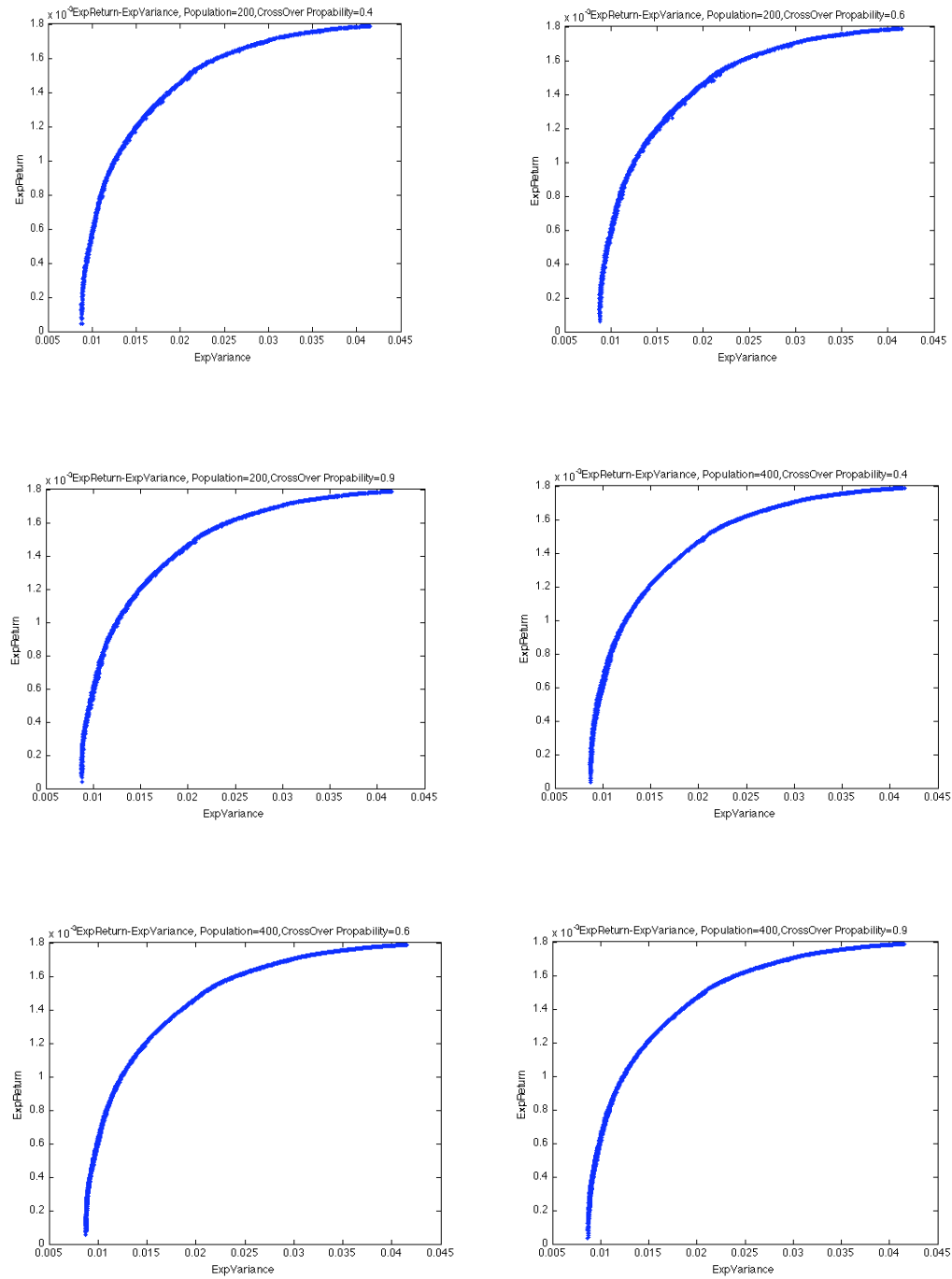
$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$x_i \geq z_i x^{\min}$$

και $2 \leq \sum_{i=1}^N z_i \leq 30$ $z_i = 1$, εάν η μετοχή συμμετέχει στο χαρτοφυλάκιο, αλλιώς 0.



Σχήμα 17 Αναμενόμενη απόδοση-κίνδυνος, για αριθμό γενεών 1000.



Σχήμα 18 Αναμενόμενη απόδοση-κίνδυνος, για αριθμό γενεών 500.

Όλες οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις αναπαριστούν τη σχέση ανάμεσα στην απόδοση και τη διασπορά. Όλα τα χαροφυλάκια των γραφικών παραστάσεων θεωρούνται αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια, δηλαδή κανένα χαρτοφυλάκιο του συνόλου δεν είναι υποδιέστερο από κάποιο άλλο χαρτοφυλάκιο, στο ίδιο σύνολο.

Στο κεφάλαιο της διαχείρισης χαρτοφυλακίων, είχε αναφερθεί πως η απόδοση και η διασπορά, είναι αντικειμενικές συναρτήσεις, οι οποίες βρίσκονται σε ανταγωνισμό μεταξύ τους, δηλαδή πως η βελτιστοποίηση της μίας αντικειμενικής συνάρτησης, οδηγεί σε χειρότερη την άλλη αντικειμενική συνάρτηση. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τις γραφικές παραστάσεις. Όσο αυξάνεται η απόδοση, η διασπορά επίσης αυξάνεται. Είναι σαφές, πως στην περίπτωση που ένας επενδυτής επιθυμεί να αυξήσει την απόδοση της επένδυσής, τότε θα πρέπει να αυξηθεί και ο κίνδυνος για αυτή την επένδυση.

Επίσης, παρατηρείται πως για να αυξηθεί η απόδοση, πάνω από 0.001, ο ρυθμός αύξησης της διασποράς γίνεται μεγαλύτερος, σε σχέση με της αύξηση της απόδοσης σε χαμηλότερα επίπεδα. Ειδικότερα, για να αυξηθεί η απόδοση για τιμές πάνω από 0.0016, ο ρυθμός αύξησης της διασποράς είναι ιδιαίτερα μεγάλος.

Τέλος, η αύξηση της απόδοσης για χαμηλές τιμές (0.0002-0,0008) συνοδεύεται από χαμηλό ρυθμό αύξησης της διασποράς.

Πίνακας 3. Μέσοι όροι αποτελεσμάτων για δύο αντικειμενικές συναρτήσεις

Γενεές	Πληθυσμός	CP	Απόδοση	Κίνδυνος	VaR	Πλήθος μετοχών	M3(X)	M3(Y)
1000	200	0,4	0,001201	0,02005	0,10999	7,303	1,4114	4,7399
1000	200	0,6	0,001201	0,02005	0,10999	7,455	1,4179	4,7447
1000	200	0,9	0,001208	0,02010	0,11039	7,657	1,3769	4,7703
1000	400	0,4	0,001203	0,01991	0,11092	8,143	1,3487	4,7320
1000	400	0,6	0,001198	0,01971	0,11015	8,234	1,3412	4,7846
1000	400	0,9	0,001198	0,01964	0,11013	8,601	1,3345	4,7862
500	200	0,4	0,001223	0,02031	0,11053	6,528	1,4328	4,8331
500	200	0,6	0,001215	0,02020	0,10963	6,735	1,4502	4,7796
500	200	0,9	0,001201	0,01991	0,10938	7,100	1,4183	4,7928
500	400	0,4	0,001221	0,02004	0,11096	7,607	1,3734	4,8860
500	400	0,6	0,001206	0,01989	0,10981	7,430	1,3740	4,7883
500	400	0,9	0,001215	0,01990	0,11035	7,679	1,3634	4,8821
Μέσος όρος			0.001208	0.01998	0.11026	7.532	1,4020	4,7933

Στον παραπάνω πίνακα καταγράφεται ο μέσος όρος των τιμών των αντικειμενικών συναρτήσεων, για όλες τις επαναληπτικές εκτελέσεις του αλγορίθμου, για την περίπτωση που λαμβάνονται υπόψη οι δύο αντικειμενικές συναρτήσεις. Ο μέσος όρος της αναμενόμενης απόδοσης είναι 0,001208, του κινδύνου είναι 0,01998, της VaR 0,1102659 ενώ ο μέσος όρος του πλήθους των μετοχών είναι 7,532 μετοχές ανά χαρτοφυλάκιο.

Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων, δεν παρατηρούνται αξιόλογες αλλαγές στις τιμές των αποτελεσμάτων. Η μέγιστη τιμή της απόδοσης είναι 0,001223, για πληθυσμό μεγέθους 200, 500 γενιές και $CP=0,6$. Η ελάχιστη τιμή του κινδύνου είναι 0,01964, για πληθυσμό μεγέθους 400, 1000 γενιές και $CP=0,9$. Η μέγιστη διαφορά στην απόδοση είναι της τάξης του 2%, ενώ η μέγιστη διαφορά για τον κίνδυνο είναι της τάξης του 2,8%.

Ο μέσος όρος της VaR είναι 0,1102659, που σημαίνει πως υπάρχει 1% πιθανότητα να υπάρχουν απώλειες ίσες με το 11% του ποσού της επένδυσης.

Η τιμή της συνάρτησης $M3(X)$, μειώνεται στην περίπτωση που ο πληθυσμός έχει μέγεθος 400, ενώ επίσης παρατηρείται μια μικρή μείωση για πιθανότητα διασταύρωσης 0,9. Για την τιμή της συνάρτησης $M3(Y)$, δεν παρατηρούνται αξιόλογες μεταβολές, για τις διάφορες τιμές παραμέτρων.

Τέλος, παρατηρείται αρκετά μικρό μέγεθος χαρτοφυλακίων, καθώς κατά μέσο όρο ένα χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από 7,532 μετοχές, κατά πολύ λιγότερο δηλαδή του μέγιστου επιτρεπόμενου ορίου, που έχει ορισθεί σε τριάντα μετοχές.

5.8.7 Τρείς αντικειμενικές συναρτήσεις (Αναμενόμενη απόδοση, κίνδυνος, VaR)

Σε αυτή την περίπτωση προστίθεται και η τρίτη αντικειμενική συνάρτηση, η VaR, η οποία είναι προς ελαχιστοποίηση.

Αρχικά, παρατηρείται μείωση της VaR, σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση, όπως είναι και αναμενόμενο. Κατά μέσο όρο, η VaR έχει τιμή 0,1016480, και είναι μειωμένη κατά 8,5%, σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση. Η ελάχιστη τιμή της VaR είναι 0,1003936 για πληθυσμό μεγέθους 400, 500 γενιές και $CP=0,9$ και η μέγιστη είναι 0,1025963 για πληθυσμό μεγέθους 200,1000 γενιές και $CP=0,9$, με την ποσοστιαία διαφορά να είναι ίση με 2,2%.

Πίνακας 4. Μέσοι όροι αποτελεσμάτων για τρεις αντικειμενικές συναρτήσεις

Γενεές	Πληθυσμός	CP	Απόδοση	Κίνδυνος	VaR	Πλήθος μετοχών	M3(X)	M3(Y)
1000	200	0,4	0,001210	0,02157	0,10231	4,734	1,9276	5,8274
1000	200	0,6	0,001229	0,02171	0,10191	4,585	1,8648	5,8630
1000	200	0,9	0,001230	0,02165	0,10259	4,686	1,7454	5,9130
1000	400	0,4	0,001228	0,02147	0,10119	4,901	1,8551	5,9063
1000	400	0,6	0,001219	0,02136	0,10078	4,875	1,8311	5,8745
1000	400	0,9	0,001222	0,02142	0,10045	4,847	1,8139	5,8713
500	200	0,4	0,001222	0,02148	0,10161	4,749	1,9152	5,9268
500	200	0,6	0,001237	0,02184	0,10241	4,452	1,9569	5,9114
500	200	0,9	0,001232	0,02171	0,10183	4,492	1,9004	5,9963
500	400	0,4	0,001236	0,02167	0,10232	4,848	1,8749	5,9164
500	400	0,6	0,001247	0,02162	0,10193	4,709	1,8785	5,9500
500	400	0,9	0,001226	0,02130	0,10039	4,896	1,8118	6,0147
Μέσος όρος			0,001228	0,02157	0,10164	4,731	1,8646	5,9143

Η απόδοση είναι ελαφρώς αυξημένη, σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση και κατά μέσο όρο είναι ίση με 0,001228, αυξημένη κατά 1,65%, ενώ είναι αυξημένος ο κίνδυνος, που κατά μέσο όρο έχει τιμές 0,02157, αυξημένος κατά 8%. Η μέγιστη τιμή της απόδοσης είναι 0,001247, για πληθυσμό μεγέθους 400, 500 γενιές και CP=0,6. Η ελάχιστη τιμή του κινδύνου είναι 0,02184, για πληθυσμό μεγέθους 400, 1000 γενιές και CP=0,9. Η μέγιστη διαφορά για τον κίνδυνο είναι της τάξης του 2,5%.

Η τιμή της συνάρτησης M3(X), μειώνεται στην περίπτωση που ο πληθυσμός έχει μέγεθος 400, ενώ επίσης παρατηρείται μια μικρή μείωση για πιθανότητα διασταύρωσης 0,9. Για την συνάρτηση M3(Y), δεν παρατηρούνται ιδιαίτερες μεταβολές στις τιμές, για τις διάφορες παραμέτρους. Σε αυτή την περίπτωση αντικειμενικών συναρτήσεων, παρατηρείται μια μικρή αύξηση της τιμή της, σε σχέση με την περίπτωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων.

Τέλος, με την προσθήκη της VaR ως αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος, παρατηρείται σημαντική μείωση του πλήθους των μετοχών που απαρτίζουν ένα χαρτοφυλάκιο, τα οποία κατά μέσο όρο διαθέτουν 4,731 μετοχές, και είναι μειωμένο κατά 37%. Συμπεραίνεται λοιπόν, πως η ελαχιστοποίηση της VaR, οδηγεί σε χαρτοφυλάκια με μειωμένο πλήθος μετοχών.

5.8.8 Όλες οι αντικειμενικές συναρτήσεις

Με την προσθήκη του πλήθους των μετοχών ως αντικειμενική συνάρτηση, το πρόβλημα βελτιστοποιείται με το σύνολο των αντικειμενικών συναρτήσεων που αναπτύχθηκαν στην περιγραφή του προβλήματος.

Πίνακας 5. Μέσοι όροι αποτελεσμάτων για όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις

Γενεές	Πληθυσμός	CP	Απόδοση	Κίνδυνος	VaR	Πλήθος μετοχών	M3(Y)	M3(Y)
1000	200	0,4	0,001149	0,02300	0,10388	2,626	2,8369	8,1318
1000	200	0,6	0,001149	0,02286	0,10410	2,686	2,6942	7,5072
1000	200	0,9	0,001151	0,02299	0,10342	2,540	2,6650	7,2726
1000	400	0,4	0,001147	0,02289	0,10349	2,624	2,7037	9,0239
1000	400	0,6	0,001149	0,02295	0,10339	2,532	2,6191	7,7962
1000	400	0,9	0,001144	0,02290	0,10284	2,534	2,6440	7,2776
500	200	0,4	0,001134	0,02260	0,10384	2,941	2,7264	7,4989
500	200	0,6	0,001133	0,02244	0,10350	3,067	2,6504	7,4905
500	200	0,9	0,001140	0,02244	0,10316	3,002	2,6837	7,4631
500	400	0,4	0,001138	0,02270	0,10236	2,738	2,6978	7,4689
500	400	0,6	0,001135	0,02264	0,10306	2,902	2,6909	9,2275
500	400	0,9	0,001130	0,02250	0,10127	2,843	2,7520	7,7058
Μέσος όρος			0.001142	0.02274	0.10319	2,753	2,6970	7.8220

Αρχικά, το πλήθος το μετοχών μειώνεται αισθητά, σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα, σε σχέση με την πρώτη περίπτωση, η μείωση είναι 63%, ενώ σε σχέση με την δεύτερη περίπτωση είναι μειωμένο κατά 42%. Επίσης, ο μέσος όρος του πλήθους των μετοχών έχει ελαχιστοποιηθεί σε αρκετά μεγάλο βαθμό, καθώς έχει πλησιάσει αρκετά το ελάχιστο όριο του πλήθους, που έχει ορισθεί να είναι δύο μετοχές.

Η απόδοση είναι η χαμηλότερη από τις τρεις περιπτώσεις, και κατά μέσο όρο είναι ίση με 0,001142, είναι δηλαδή μειωμένη κατά 5.5% σε σχέση με την πρώτη περίπτωση, και κατά 7% σε σχέση με την δεύτερη περίπτωση. Η μέγιστη τιμή της απόδοσης είναι 0,001151 για πληθυσμό μεγέθους 200, 1000 γενιές και CP=0,9 και η μέγιστη διαφορά της απόδοσης είναι της τάξης του 1,8%. Η ελάχιστη τιμή του κινδύνου είναι 0,02244, για πληθυσμό μεγέθους 200, 500 γενιές και CP=0,6,0,9, ενώ η μέγιστη διαφορά του κινδύνου είναι 2,5%. Η ελάχιστη τιμή της VaR είναι 0,1012763, για πληθυσμό μεγέθους 400, 500 γενιές και CP=0,9, ενώ η μέγιστη διαφορά της VaR είναι 2,7%.

Η τιμή της συνάρτησης $M3(X)$, μειώνεται στην περίπτωση που ο πληθυσμός έχει μέγεθος 400, ενώ επίσης παρατηρείται μια μικρή μείωση για πιθανότητα διασταύρωσης 0,9. Η μεγαλύτερη τιμή της είναι για την περίπτωση που ο πληθυσμός είναι 200, οι γενιές 1000 και η πιθανότητα διασταύρωσης 0,4. Για την τιμή της συνάρτησης $M3(Y)$, παρατηρούνται μεταβολές για τιμές της CP 0,4, 0,6. Η μεγαλύτερη τιμή παρατηρείται για την περίπτωση 500 γενεών, CP=0,6 και 200 μέγεθος πληθυσμού.

Και σε αυτήν την περίπτωση, δεν παρατηρείται κάποια αξιολογη διαφορά ανάμεσα στα αποτελέσματα για τις διάφορες περιπτώσεις των τιμών των παραμέτρων.

5.8.9 Σύγκριση αποτελεσμάτων, ανά περίπτωση αντικειμενικών συναρτήσεων.

Σε αυτό το σημείο, συγκρίνονται οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις αποτελεσμάτων.

Για την αντικειμενική συνάρτηση της απόδοσης, δεν παρατηρούνται ιδιαίτερες αποκλίσεις, για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις αποτελεσμάτων. Η μέγιστη απόδοση παρατηρείται για την περίπτωση των τριών αντικειμενικών συναρτήσεων, που είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από την περίπτωση με τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις.

Για την αντικειμενική συνάρτηση του κινδύνου, παρατηρείται μια αξιολογη μείωση του, για την περίπτωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων, ειδικά σε σχέση με την περίπτωση του συνόλου των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Για την αντικειμενική συνάρτηση της VaR, η χαμηλότερη τιμή της παρατηρείται για την περίπτωση των τριών αντικειμενικών συναρτήσεων, αλλά και για το σύνολο των αντικειμενικών συναρτήσεων είναι μειωμένη. Ελαφρώς αυξημένη είναι για την περίπτωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων

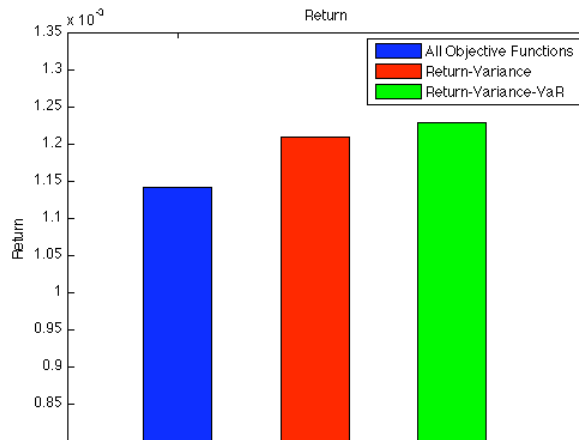
Στην περίπτωση του συνόλου των αντικειμενικών συναρτήσεων, το πλήθος το μετοχών αγγίζει το ελάχιστο όριο για την σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου. Ακόμα και για την περίπτωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων, το μέγεθος (κατά μέσο όρο) των χαρτοφυλακίων είναι ιδιαίτερα μικρό, ενώ η προσθήκη της VaR ως αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος, μειώνει αισθητά το μέγεθος των χαρτοφυλακίων.

Από τον υπολογισμό της συνάρτησης $M3(X)$, γίνεται μια ποιοτική αξιολόγηση των λύσεων, βάσει της έκτασης που βρίσκονται οι λύσεις. Για την περίπτωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων, η τιμή της $M3(X)$ κατά μέσο όρο είναι 1,4020, για τις τρεις αντικειμενικές συναρτήσεις είναι 1,8646 και για το σύνολο των αντικειμενικών συναρτήσεων είναι 2,6970. Προκύπτει πως στην περίπτωση που αλγόριθμος καλείται να ελαχιστοποιήσει το μέγεθος του χαρτοφυλακίου, οι πληθυσμοί λύσεων που προκύπτουν καλύπτουν μεγαλύτερη έκταση στο χώρο, και συνεπώς χαρακτηρίζονται για την καλύτερη ποικιλομορφία τους.

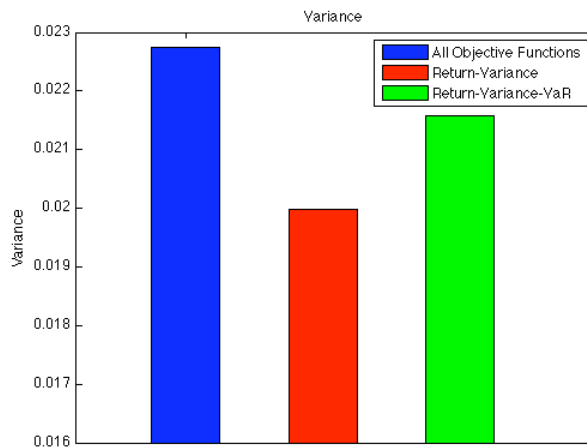
Για τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, παρατηρείται μεγαλύτερη ποικιλομορφία για την περίπτωση όλων των αντικειμενικών συναρτήσεων, όπου η συνάρτηση $M3(Y)$,

έχει κατά μέσο όρο 7,8220, ενώ η χαμηλότερη τιμή για την συνάρτηση είναι για την περίπτωση και των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων, με μέσο όρο 4,7933. Συνεπώς, η προσθήκη πολλαπλών κριτηρίων, εξασφαλίζει μεγαλύτερη ποικιλομορφία, στις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων.

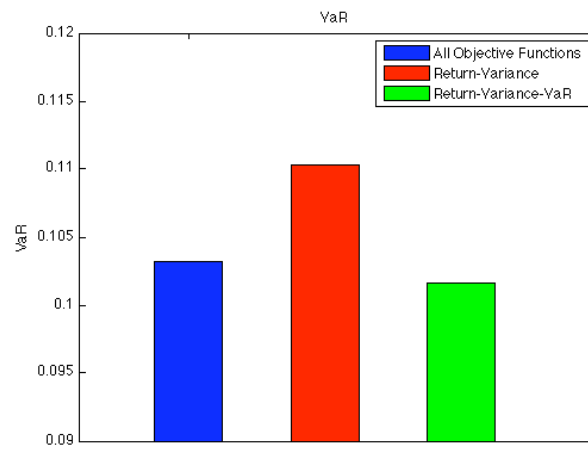
Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις, για κάθε μία από τις αντικειμενικές συναρτήσεις, σε σχέση με κάθε περίπτωση εφαρμογής αντικειμενικών συναρτήσεων.



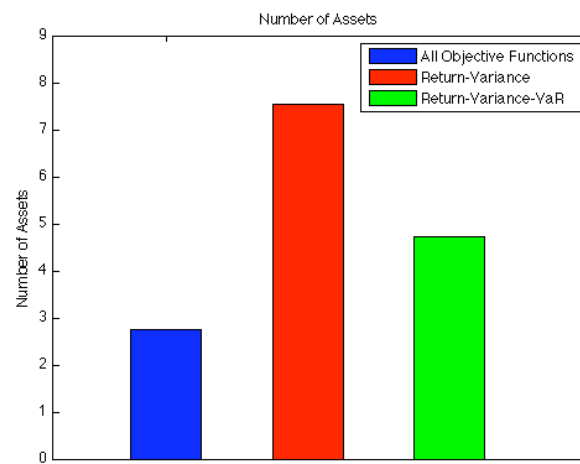
Σχήμα 19 Αναμενόμενη απόδοση για όλες τις περιπτώσεις



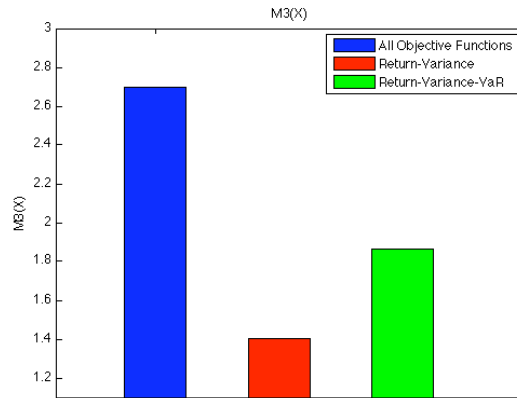
Σχήμα 20 Κίνδυνος για όλες τις περιπτώσεις



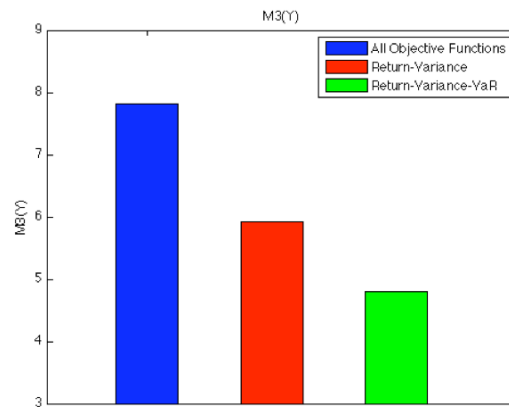
Σχήμα 21 VaR για όλες τις περιπτώσεις



Σχήμα 22 Πλήθος μετοχών για όλες τις περιπτώσεις



Σχήμα 23 Τιμή της $M3(X)$ για όλες τις περιπτώσεις



Σχήμα 24 Τιμή της $M3(Y)$ για όλες τις περιπτώσεις

5.8.10 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων, με μελλοντικά δεδομένα

Το αποτέλεσμα του αλγορίθμου είναι η δημιουργία βέλτιστων πληθυσμών λύσεων, δηλαδή ποσοστών συμμετοχής των μετοχών σε ένα χαρτοφυλάκιο. Οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, που παρουσιάστηκαν παραπάνω, προκύπτουν από τα δεδομένα των τιμών των μετοχών ως την ημερομηνία 31/12/2008. Για να γίνει κάποια αξιολόγηση των χαρτοφυλακίων που δημιουργεί ο αλγόριθμος, παρουσιάζονται οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, για δεδομένα μετοχών από 1/1/2009, έως 7/8/2009. Ουσιαστικά, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που θα είχε ένας επενδυτής εάν επένδυε στα χαρτοφυλάκια που δημιούργησε ο αλγόριθμος.

Δύο αντικειμενικές συναρτήσεις (Αναμενόμενη απόδοση-κίνδυνος)

Πίνακας 6. Μέσοι όροι αποτελεσμάτων για δύο αντικειμενικές συναρτήσεις

Γενεές	Πληθυσμός	CP	Απόδοση	Κίνδυνος	VaR	M3(Y)
1000	200	0,4	0,0018569	0,02138	0,0547244	5,0036
1000	200	0,6	0,0018565	0,02145	0,0549732	5,0128
1000	200	0,9	0,0018565	0,02145	0,0549732	4,9656
1000	400	0,4	0,0018678	0,02128	0,0546800	4,7551
1000	400	0,6	0,0018552	0,02107	0,0542670	4,8727
1000	400	0,9	0,0018528	0,02100	0,0542500	4,9256
500	200	0,4	0,0018683	0,02159	0,0553252	5,0902
500	200	0,6	0,0018529	0,02145	0,0549499	5,0794
500	200	0,9	0,0018445	0,02122	0,0546133	5,0745
500	400	0,4	0,0018895	0,02143	0,0548219	4,9917
500	400	0,6	0,0018753	0,02123	0,0544784	4,9835
500	400	0,9	0,0018669	0,02127	0,0546170	4,9621
Μέσος όρος			0.0018621	0.02131	0.0547099	4,9764

Οι παραπάνω πίνακες παρουσιάζουν τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, για μελλοντικά δεδομένα, για την περίπτωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων. Ο μέσος όρος της απόδοσης, για όλες τις τιμές των παραμέτρων είναι 0,0018621, και είναι κατά 35% αυξημένη, σε σχέση με την απόδοση με τα ιστορικά δεδομένα. Ο κίνδυνος είναι κατά μέσο όρο ίσος με 0,02131, και είναι αυξημένος κατά 6%, σε σχέση με τον κίνδυνο με τα ιστορικά δεδομένα. Η VaR είναι κατά μέσο όρο ίση με 0,0547099 και είναι μειωμένη κατά 50%. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων, δεν παρατηρούνται αξιόλογες αλλαγές στις τιμές των αποτελεσμάτων.

Παρατηρείται απόκλιση, κυρίως στις τιμές της απόδοσης και της VaR. Η απόδοση είναι αρκετά αυξημένη, ο κίνδυνος είναι ελαφρώς αυξημένος, ενώ η VaR είναι αισθητά μειωμένη. Παρότι τα χαρτοφυλάκια, είναι αρκετά πιο αποδοτικά, τα αποτελέσματα δεν είναι ευσταθή, λόγω των αυξημένων αποκλίσεων που παρατηρούνται.

Για τις τιμές της συνάρτησης M3(Y), δεν παρατηρούνται ιδιαίτερες αποκλίσεις, για τις διάφορες περιπτώσεις παραμέτρων. Επίσης, σε σχέση με την τιμή του M3(Y) από τα ιστορικά δεδομένα, δεν παρατηρείται σημαντική απόκλιση.

Τρεις αντικειμενικές συναρτήσεις (Αναμενόμενη απόδοση-κίνδυνος-VaR)

Πίνακας 7. Μέσοι όροι αποτελεσμάτων για τρεις αντικειμενικές συναρτήσεις

Γενεές	Πληθυσμός	CP	Απόδοση	Κίνδυνος	VaR	M3(Y)
1000	200	0,4	0,0018666	0,02292	0,0575281	6,6296
1000	200	0,6	0,0018074	0,02329	0,0580510	6,7450
1000	200	0,9	0,0018216	0,02307	0,0576741	6,1721
1000	400	0,4	0,0018262	0,02295	0,0575742	7,2487
1000	400	0,6	0,0018315	0,02283	0,0575140	6,4934
1000	400	0,9	0,0018315	0,02296	0,0576349	7,2112
500	200	0,4	0,0018227	0,02296	0,0574382	6,8787
500	200	0,6	0,0018350	0,02335	0,0582734	6,8969
500	200	0,9	0,0018391	0,02323	0,0580409	6,5756
500	400	0,4	0,0018710	0,02322	0,0585120	7,0919
500	400	0,6	0,0018352	0,02311	0,0579189	7,1984
500	400	0,9	0,0018302	0,02279	0,0574293	6,5669
Μέσοι όροι			0,0018348	0,02306	0,0577991	6,8090

Οι παραπάνω πίνακες παρουσιάζουν τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, για μελλοντικά δεδομένα, για την περίπτωση των τριών αντικειμενικών συναρτήσεων. Ο μέσος όρος της απόδοσης, για όλες τις τιμές των παραμέτρων είναι 0,0018348, και είναι κατά 33% αυξημένη, σε σχέση με την απόδοση με τα ιστορικά δεδομένα. Ο κίνδυνος είναι κατά μέσο όρο ίσος με 0,02306, και είναι αυξημένος κατά 6,4%, σε σχέση με τον κίνδυνο με τα ιστορικά δεδομένα. Η VaR είναι κατά μέσο όρο ίση με 0,0577991 και είναι μειωμένη κατά 43%. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων, δεν παρατηρούνται αξιόλογες αλλαγές στις τιμές των αποτελεσμάτων.

Παρατηρείται απόκλιση, κυρίως στις τιμές της απόδοσης και της VaR. Η απόδοση είναι αρκετά αυξημένη, ο κίνδυνος είναι ελαφρώς αυξημένος, ενώ η VaR είναι αισθητά μειωμένη. Παρότι τα χαρτοφυλάκια, είναι αρκετά πιο αποδοτικά, τα αποτελέσματα δεν είναι ιδιαίτερα ευσταθή, λόγω των σημαντικών αποκλίσεων που παρατηρούνται, στις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, ανάμεσα στα αποτελέσματα από τα ιστορικά και τα μελλοντικά δεδομένα.

Σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση, διαπιστώνεται πως η απόδοση είναι ελαφρώς μειωμένη, αλλά είναι αυξημένος ο κίνδυνος και η VaR. Σε σχέση με τις τιμές των παραμέτρων, για τα ιστορικά δεδομένα, παρατηρούνται αποκλίσεις, αλλά είναι μειωμένες, σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Για την συνάρτηση M3(Y), παρατηρούνται μικρές αποκλίσεις, ενώ η μέγιστη τιμή της είναι για CP 0,4, γενεές 1000 και μέγεθος πληθυσμού 200. Σε σχέση με την περίπτωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων, η

τιμή της $M3(Y)$ είναι αυξημένη. Σε σύγκριση με τα ιστορικά δεδομένα, παρατηρείται μικρή αύξηση.

Όλες οι αντικειμενικές συναρτήσεις

Πίνακας 8. Μέσοι όροι αποτελεσμάτων για όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις

Γενεές	Πληθυσμός	CP	Απόδοση	Κίνδυνος	VaR	$M3(Y)$
1000	200	0,4	0,001473	0,02315	0,0544728	9,7669
1000	200	0,6	0,001445	0,02291	0,0533312	9,0154
1000	200	0,9	0,001433	0,02300	0,0538329	8,8924
1000	400	0,4	0,001399	0,02305	0,0538368	10,7507
1000	400	0,6	0,001434	0,02298	0,0536872	9,2735
1000	400	0,9	0,001432	0,02296	0,0539222	9,0382
500	200	0,4	0,001592	0,02290	0,0551750	8,9015
500	200	0,6	0,001478	0,02267	0,0538892	8,9299
500	200	0,9	0,001516	0,02266	0,0544410	9,2491
500	400	0,4	0,001443	0,02282	0,0538440	9,9834
500	400	0,6	0,001479	0,02291	0,0543648	10,7883
500	400	0,9	0,001456	0,02261	0,0536464	9,3655
Μέσοι όροι			0,001465	0,02288	0,0540370	9,4962

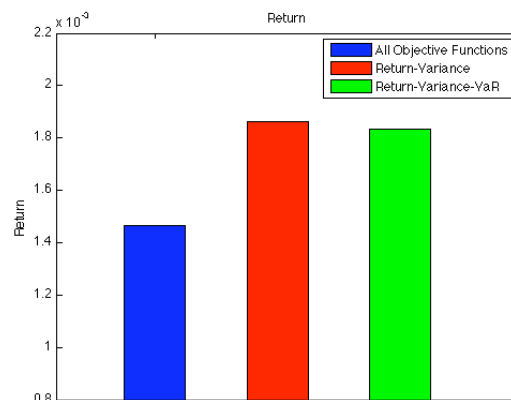
Οι παραπάνω πίνακες παρουσιάζουν τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, για μελλοντικά δεδομένα, για την περίπτωση όλων των αντικειμενικών συναρτήσεων. Ο μέσος όρος της απόδοσης, για όλες τις τιμές των παραμέτρων είναι 0,001465, και είναι κατά 22% αυξημένη, σε σχέση με την απόδοση με τα ιστορικά δεδομένα. Ο κίνδυνος είναι κατά μέσο όρο ίσος με 0,02288, και είναι αυξημένος κατά 0,6%, σε σχέση με τον κίνδυνο με τα ιστορικά δεδομένα. Η VaR είναι κατά μέσο όρο ίση με 0,0540370 και είναι μειωμένη κατά 47%. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων, δεν παρατηρούνται αξιόλογες αλλαγές στις τιμές των αποτελεσμάτων.

Παρατηρείται απόκλιση, κυρίως στις τιμές της απόδοσης και της VaR. Η απόδοση είναι αρκετά αυξημένη, αλλά αρκετά πιο κοντά στις τιμές που προκύπτουν από τα ιστορικά δεδομένα, ο κίνδυνος είναι ίδιος (αμελητέα διαφορά), ενώ η VaR είναι αισθητά μειωμένη. Τα αποτελέσματα για τα ιστορικά δεδομένα είναι αρκετά πιο ευσταθή, για αυτή την περίπτωση, και σε σύγκριση με τις άλλες περιπτώσεις. Για την τιμή της VaR παρατηρούνται και σε αυτή την περίπτωση πολύ μεγάλες αποκλίσεις. Για τον υπολογισμό των τιμών της συνάρτησης $M3(Y)$, οι τιμές για τα αποτελέσματα των αντικειμενικών συναρτήσεων, δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες αποκλίσεις σε σχέση με τις τιμές από τα ιστορικά δεδομένα, και παραμένει ίδια η κατάταξη για τις περιπτώσεις εφαρμογής των

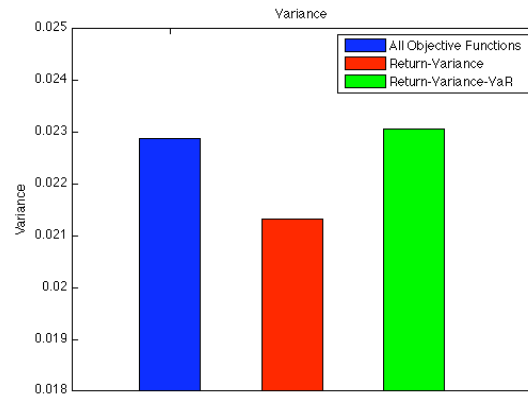
αντικειμενικών συναρτήσεων. Μεγαλύτερες τιμές παρατηρούνται για την περίπτωση όλων των αντικειμενικών συναρτήσεων, ενώ η χαμηλότερες για την περίπτωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων. Για τα μελλοντικά δεδομένα, παρατηρείται μεγαλύτερη ποικιλομορφία, για τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση, διαπιστώνεται πως η απόδοση είναι μειωμένη, ο κίνδυνος μειωμένος και η VaR ελαφρώς μειωμένη, ενώ οι αποκλίσεις ανάμεσα στα ιστορικά και μελλοντικά δεδομένα μειώνονται (για την απόδοση και τον κίνδυνο). Άρα, η χρήση πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων, βελτιώνει την ευστάθεια των αποτελεσμάτων.

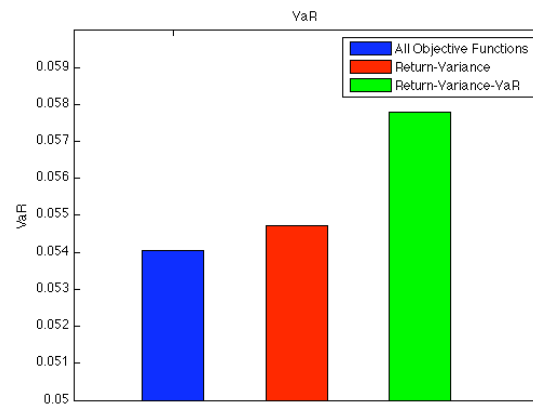
Ο λόγος που και στις τρεις περιπτώσεις παρατηρείται αύξηση της απόδοσης, είναι πως σε σχέση με τα μελλοντικά δεδομένα, η απόδοση των μετοχών είναι ιδιαίτερα αυξημένη. Ο μέσος όρος της απόδοσης είναι 0,0024, ενώ με τα ιστορικά δεδομένα είναι 0,00018, ενώ οι μετοχές που έχουν θετική απόδοση είναι 107 και για τα ιστορικά δεδομένα είναι 71. Για την περίοδο που αξιολογούνται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου, σχεδόν το σύνολο των μετοχών έχει θετική απόδοση, και με μεγαλύτερες τιμές. Επίσης, αυτή την περίοδο, παρατηρείται σημαντική άνοδος του Γενικού Δείκτη τιμών κατά 30%, και του δείκτη FTSE 80 κατά 15%. Αυτά τα στοιχεία είναι ικανά να επηρεάσουν τα μελλοντικά αποτελέσματα, κυρίως ως προς τη τιμή της απόδοσης, όπου παρατηρούνται αποκλίσεις.



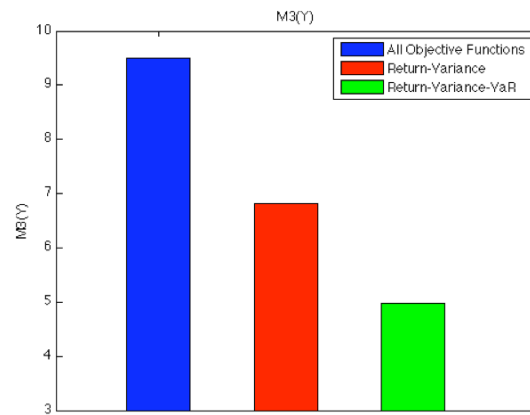
Σχήμα 23 Αναμενόμενη απόδοση, για όλες τις περιπτώσεις με μελλοντικά δεδομένα



Σχήμα 24 Κίνδυνος, για όλες τις περιπτώσεις με μελλοντικά δεδομένα



Σχήμα 25 VaR, για όλες τις περιπτώσεις με μελλοντικά δεδομένα



Σχήμα 26 Τιμή της $M3(Y)$, για όλες τις περιπτώσεις με μελλοντικά δεδομένα

5.8.11 Αξιολόγηση μετοχών

Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, δημιουργήθηκαν 108.000 χαρτοφυλάκια. Αυτά τα χαρτοφυλάκια χωρίζονται σε κατηγορίες, ανάλογα με ποιες αντικειμενικές συναρτήσεις έγινε η βελτιστοποίηση. Στους πίνακες που ακολουθούν, παρουσιάζονται οι μετοχές με τις περισσότερες ή λιγότερες συμμετοχές στην κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου.

Όλες οι αντικειμενικές συναρτήσεις

Οι πέντε συχνότερες μετοχές

Πίνακας 9. Οι πέντε συχνότερες μετοχές για την περίπτωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων

Μετοχή	ΦΛΕΞΟ	ΣΕΝΤΡ	ΑΛΑΠΙΣ	ΑΛΤΕΡ	ΠΛΑΙΣΙΟ
Συμμετοχές	22193	20745	12078	6701	5945

Αναμενόμενη απόδοση-κίνδυνος

Πίνακας 10. Οι πέντε συχνότερες μετοχές για την περίπτωση των τριών αντικειμενικών συναρτήσεων

Μετοχή	ΑΛΑΠΙΣ	ΠΑΡΝ	ΑΛΤΕΡ	ΜΙΓ	ΣΕΝΤΡ
Συμμετοχές	26957	23157	23050	22926	22422

Αναμενόμενη απόδοση-κίνδυνος-VaR

Πίνακας 11. Οι πέντε συχνότερες μετοχές για την περίπτωση όλων των αντικειμενικών συναρτήσεων

Μετοχή	ΑΛΑΠΙΣ	ΠΑΡΝ	ΦΛΕΞΟ	ΣΕΝΤΡ	ΑΛΤΕΡ
Συμμετοχές	27057	21101	20021	19950	18138

Σύνολο χαρτοφυλακίων

Πίνακας 12. Οι πέντε συχνότερες μετοχές για το σύνολο των χαρτοφυλακίων

Μετοχή	ΑΛΑΠΙΣ	ΦΛΕΞΟ	ΣΕΝΤΡ	ΠΑΡΝ	ΑΛΤΕΡ
Συμμετοχές	66092	63592	63117	48385	47889

Εκτελώντας τον αλγόριθμο, για όλες τις περιπτώσεις βελτιστοποίησης των αντικειμενικών συναρτήσεων, προκύπτουν 108000 αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια. Το μέγεθος των χαρτοφυλακίων είναι αρκετά μικρό, ιδιαιτέρως για την περίπτωση που ο αλγόριθμος ελαχιστοποιεί το πλήθος των μετοχών. Παρατηρείται πως συγκεκριμένες μετοχές, συμμετέχουν σε ιδιαίτερα μεγάλο αριθμό χαρτοφυλακίων. Η μετοχή ΑΛΑΠΙΣ, συμμετέχει σε 66092 χαρτοφυλάκια, δηλαδή στο 61% των χαρτοφυλακίων που δημιουργούνται, η ΦΛΕΞΟ, σε 63592 χαρτοφυλάκια ή στο 59% των χαρτοφυλακίων, ενώ η μετοχή ΣΕΝΤΡ συμμετέχει σε 63117 χαρτοφυλάκια, ή περίπου στο 59% των χαρτοφυλακίων. Αυτά τα ποσοστά είναι ιδιαίτερα υψηλά, καθώς οι διαθέσιμες μετοχές που μπορούν να συμμετέχουν σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι 119.

Στην περίπτωση που ο αλγόριθμος βελτιστοποιεί όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις, οι συμμετοχές των μετοχών είναι χαμηλότερες. Αυτό είναι φυσιολογικό, καθώς το πλήθος των μετοχών ανά χαρτοφυλάκιο, είναι αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση, και ο μέσος όρος του πλήθους είναι 2,7 μετοχές ανά χαρτοφυλάκιο. Η μετοχή ΦΛΕΞΟ, έχει 22193 συμμετοχές σε 36000 χαρτοφυλάκια, δηλαδή ποσοστό συμμετοχής 62%, ενώ η μετοχή ΣΕΝΤΡ έχει 20745 συμμετοχές, δηλαδή ποσοστό συμμετοχής 57%.

Στην περίπτωση της βελτιστοποίησης των τριών αντικειμενικών συναρτήσεων, ο μέσος όρος του πλήθους των μετοχών αυξάνεται σε 4,7 μετοχές ανά χαρτοφυλάκιο. Η πιο συχνή μετοχή είναι η ΑΛΑΠΙΣ, με 27057 συμμετοχές και ποσοστό 75%, ενώ η μετοχή ΠΑΡΝ έχει 21101 συμμετοχές και ποσοστό 58%. Σε αυτή την περίπτωση, οι υπόλοιπες πέντε πιο συχνές μετοχές, έχουν και αυτές ποσοστά συμμετοχής ίσα ή μεγαλύτερα με 50%. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς τα μεγέθη των χαρτοφυλακίων είναι αυξημένα, σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση, συνεπώς περισσότερες μετοχές έχουν την δυνατότητα να απαρτίζουν ένα χαρτοφυλάκιο.

Στην περίπτωση βελτιστοποίησης των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων, το πλήθος των μετοχών ανά χαρτοφυλάκιο είναι κατά μέσο όρο 7,5. Η μετοχή ΑΛΑΠΙΣ, έχει 26957 συμμετοχές και ποσοστό 74%, ενώ η μετοχή ΠΑΡΝ έχει 23157 συμμετοχές και ποσοστό 64%. Και σε αυτή την περίπτωση, η πρώτη πεντάδα των συχνότερων μετοχών έχει υψηλό ποσοστό συμμετοχής που είναι υψηλότερο του 62%. Αυτό το γεγονός είναι αναμενόμενο, καθώς σε αυτή την περίπτωση, το πλήθος των μετοχών ανά χαρτοφυλάκιο είναι το υψηλότερο από όλες τις περιπτώσεις, με αρκετά σημαντική διαφορά.

Για το διάστημα των ιστορικών δεδομένων, η μετοχή ΣΕΝΤΡ (η οποία συμμετέχει σε 63000 χαρτοφυλάκια) , έχει την μεγαλύτερη απόδοση από όλες τις μετοχές, η μετοχή ΠΑΡΝ, έχει την δεύτερη μεγαλύτερη απόδοση, η μετοχή ΑΛΑΠΙΣ, την τρίτη, ενώ η μετοχή ΑΛΤΕΡ (συμμετέχει σε 48000 χαρτοφυλάκια) έχει την πέμπτη μεγαλύτερη απόδοση. Η μετοχή ΦΛΕΞΟ, με 63500 συμμετοχές, είναι η 22^η μετοχή σε απόδοση. Παρατηρείται λοιπόν, πως η απόδοση των μετοχών επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την συμμετοχή τους στην σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου.

Οι μετοχές που δεν έχουν συμμετοχή σε κανένα χαρτοφυλάκιο, έχουν όλες αρνητικές αποδόσεις, με εξαίρεση τις μετοχές ΣΑΙΚΛ, ΣΙΔΕ, ΧΑΙΔΕ, ΡΙΑΚΕ, οι οποίες έχουν θετικές

αποδόσεις. Συνεπώς, δεν είναι δεδομένο πως όταν μια μετοχή παρουσιάζει θετικές αποδόσεις για μία περίοδο, θα συμμετέχει στην κατασκευή αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων.

Τέλος, μετοχές με μεγάλα ποσοστά συμμετοχής επηρεάζουν και την απόδοση των χαρτοφυλακίων. Η μετοχή ΑΛΑΠΙΣ, με ποσοστό συμμετοχής 61%, αυξάνει την απόδοση της σε ποσοστό 87%, η μετοχή ΠΑΡΝ αυξάνει την απόδοσή της σε ποσοστό 367%, ενώ η μετοχή ΣΕΝΤΡ, σε ποσοστό 13%. Η μετοχή ΑΛΤΕΡ έχει μείωση απόδοσης σε ποσοστό 164% και παρουσιάζει αρνητική απόδοση, ενώ η μετοχή ΦΛΕΞΟ παρουσιάζει μείωση απόδοσης 70%.

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Τα περισσότερα προβλήματα βελτιστοποίησης του πραγματικού κόσμου είναι προβλήματα που πρέπει να βελτιστοποιηθούν πολλά κριτήρια, ενώ οι περιορισμοί είναι ο λόγος που η βελτιστοποίηση τέτοιου είδους προβλημάτων είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα. Τα τελευταία χρόνια, παρατηρείται εκτεταμένη έρευνα στον τομέα των αλγορίθμων που επιλύουν πολυκριτήρια προβλήματα, με στόχο την εύρεση των βέλτιστων λύσεων και της μείωσης της πολυπλοκότητας.

Στα πλαίσια της εργασίας, γίνεται προσέγγιση των προβλήματος της κατασκευής επενδυτικών χαρτοφυλακίων, ως ένα πρόβλημα πολυκριτήριας βελτιστοποίησης. Για την επίλυση του προβλήματος, εφαρμόζεται ο γενετικός αλγόριθμος NSGA-II.

Τα συμπεράσματα για τα αποτελέσματα και την εφαρμογή του αλγορίθμου είναι αρκετά ενδιαφέροντα.

Πολλές έρευνες για τη σύνθεση χαρτοφυλακίου αναφέρουν πως ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο πρέπει να αποτελείται από μικρό αριθμό μετοχών. Σε δύο περιπτώσεις εκτέλεσης του αλγορίθμου, το πλήθος των μετοχών δεν συμμετέχει σαν αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος. Από την εκτέλεση του αλγορίθμου προκύπτει πώς:

1. Στην περίπτωση που βελτιστοποιούνται δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, η σύνθεση αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων, ακολουθώντας το μοντέλο μέσου-διακύμανσης του Markowitz, τείνει να ελαχιστοποιεί το πλήθος των μετοχών ανά χαρτοφυλάκιο. Ενδεικτικά, ο μέγιστος αριθμός μετοχών σε χαρτοφυλάκιο είναι 15, ο μισός δηλαδή σε σχέση με τον μέγιστο επιτρεπόμενο, που είναι 30, ενώ το 10% των χαρτοφυλακίων απαρτίζεται από 2 μετοχές, το οποίο είναι το ελάχιστο όριο.
2. Με την εφαρμογή της VaR ως αντικειμενική συνάρτηση, παρατηρείται μείωση του πλήθους των μετοχών ανά χαρτοφυλάκιο. Συμπεραίνεται ότι η ελαχιστοποίηση της τιμής της VaR, οδηγεί τον αλγόριθμο σε αισθητή μείωση του πλήθους των μετοχών. Ενδεικτικά, μόνο δύο χαρτοφυλάκια απαρτίζονται από δέκα μετοχές, ενώ το 20% των χαρτοφυλακίων αποτελούνται από 2-3 μετοχές.
3. Με την συμπλήρωση των αντικειμενικών συναρτήσεων του προβλήματος, ο αλγόριθμος οδηγείται σε μεγάλο βαθμό στο ελάχιστο επιτρεπόμενο πλήθος μετοχών. Το 67% των χαρτοφυλακίων έχουν πλήθος μετοχών ίσο με δύο, ενώ μόλις το 12% των χαρτοφυλακίων απαρτίζονται με περισσότερες από τέσσερις μετοχές.

Συνεπώς, είναι απολύτως εφικτή η κατασκευή αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων και με μικρό αριθμό μετοχών. Αυτό το γεγονός είναι αναμενόμενο, καθώς στο ελληνικό χρηματιστήριο, λίγες μετοχές είναι αυτές οι οποίες καθορίζουν την γενικότερη πορεία του.

Το κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου, είναι ο αριθμός των γενεών για τις οποίες εκτελείται. Στα πλαίσια της εργασίας, ο αριθμός των γενεών λαμβάνει τις τιμές 500 και 1000. Όπως προκύπτει και από τα αποτελέσματα, οι διαφορές στα αποτελέσματα είναι αμελητέες και ανεξάρτητες από τον αριθμό των γενεών. Αυτό συμβαίνει επειδή με την εκτέλεση 500 γενεών, ο αλγόριθμος επιτυγχάνει ικανοποιητικά αποτελέσματα βελτιστοποίησης των αντικειμενικών συναρτήσεων. Επειδή η αύξηση των αριθμού των γενεών σημαίνει και αύξηση στον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου, η επιλογή του αριθμού των γενεών να είναι ίση με 500, αποδίδει το ίδιο ποιοτικά αποτελέσματα, σε αρκετά λιγότερο απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης.

Μία άλλη σημαντική παράμετρος του αλγορίθμου είναι το μέγεθος του πληθυσμού. Όπως και στην περίπτωση των γενεών, έτσι και με την περίπτωση του μεγέθους του πληθυσμού, οι τιμές είναι δύο, 200 και 400. Από τα αποτελέσματα του αλγορίθμου, το μέγεθος του πληθυσμού δεν επηρεάζει ποιοτικά τα αποτελέσματα και δεν παρατηρούνται αξιόλογες μεταβολές για κάθε τιμή. Η σημασία όμως αυτής της παραμέτρου είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την πολυπλοκότητα της κατάταξης των λύσεων σε επίπεδα μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Η πολυπλοκότητα αυτής της διαδικασίας είναι $O(MN^2)$, όπου N το μέγεθος του πληθυσμού. Συνεπώς, όταν ο αλγόριθμος εκτελείται με πληθυσμό 400, η πολυπλοκότητα της κατάταξης των λύσεων είναι 4-πλάσια σε σχέση με την πολυπλοκότητα στην περίπτωση που ο πληθυσμός έχει μέγεθος 200 λύσεις. Από την εκτέλεση του αλγορίθμου, παρατηρήθηκε σημαντική διαφορά στον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης, ανάμεσα στις δύο τιμές. Σαν συμπέρασμα, ο ορισμός του μεγέθους του πληθυσμού ίσο με 200 λύσεις, αποδίδει ποιοτικά αποτελέσματα με ικανοποιητική πολυπλοκότητα.

Επίσης, δεν παρατηρείται διαφορά για τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις στην τιμή της πιθανότητας διασταύρωσης (crossover probability). Μεγάλη πιθανότητα διασταύρωσης σημαίνει πως για την αναπαραγωγή λύσεων επιλέγονται λύσεις, με ποιοτικά κριτήρια. Μικρότερη πιθανότητα διασταύρωσης, σημαίνει πως επιλέγονται συχνότερα, τυχαίες λύσεις για αναπαραγωγή, αυξάνοντας την ποικιλομορφία του πληθυσμού. Από τα αποτελέσματα του αλγορίθμου, συμπεραίνεται πως ακόμα και στην περίπτωση της μικρής πιθανότητας διασταύρωσης, τα αποτελέσματα δεν επηρεάζονται, και η ποικιλομορφία οδηγεί τον αλγόριθμο σε εξίσου ποιοτικά αποτελέσματα.

Στα πλαίσια της εργασίας, έγινε προσέγγιση της VaR, ως εναλλακτικού τρόπου υπολογισμού του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου. Η VaR, μείωσε το πλήθος των μετοχών, ενώ αύξησε οριακά την απόδοση. Το πρόβλημα της VaR όμως, είναι η μεγάλη απόκλιση της τιμής που προκύπτει από τα ιστορικά δεδομένα, σε σχέση με τα μελλοντικά δεδομένα.

Η κύρια διαφορά ανάμεσα στο μοντέλο μέσου διακύμανσης, με την προσθήκη της VaR είναι η αισθητή μείωση του μεγέθους των χαρτοφυλακίων.

Τα πιο ευσταθή αποτελέσματα (σύγκριση αποτελεσμάτων ιστορικών-μελλοντικών δεδομένων), προκύπτουν από την περίπτωση βελτιστοποίησης και των τεσσάρων αντικειμενικών συναρτήσεων, ιδιαίτερα για τις τιμές της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου. Παρατηρείται λοιπόν πως σε αυτή την περίπτωση, ο αλγόριθμος είναι σε θέση να κατασκευάσει χαρτοφυλάκια, τα οποία μπορούν να ακολουθήσουν σε πολύ μεγάλο βαθμό τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων του μοντέλου μέσου – διακύμανσης, για μελλοντικά δεδομένα. Σε αυτή την αποτελεσματική προσέγγιση, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και το πλήθος των μετοχών, καθώς για μικρά χαρτοφυλάκια, είναι ευκολότερο να γίνει μια σωστή πρόβλεψη για τη μελλοντική πορεία. Αξίζει να σημειωθεί πως, παρότι για τις δύο άλλες περιπτώσεις αντικειμενικών συναρτήσεων, τα χαρτοφυλάκια αποδεικνύονται πιο κερδοφόρα, η σωστότερη επιλογή ενός επενδυτή θα ήταν να επιλέξει την τελευταία περίπτωση αντικειμενικών συναρτήσεων, λόγω της μεγαλύτερης αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων. Μεγάλες αποκλίσεις στις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, μπορούν να οδηγήσουν στο ευχάριστο αποτέλεσμα της κερδοφορίας, αλλά μπορούν με τον ίδιο τρόπο να οδηγήσουν και στην απώλεια της επένδυσης.

Για την απόκλιση των τιμών, ευθύνεται και το γεγονός πως οι τιμές των μετοχών από τα ιστορικά δεδομένα είναι 997, ενώ για τα μελλοντικά δεδομένα είναι μόλις 147. Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, σε αυτή την περίοδο, παρατηρήθηκαν ξαφνικές αυξήσεις στις αποδόσεις των μετοχών, οι οποίες ενδέχεται να έγιναν εξαιτίας ενός πολιτικού ή οικονομικού γεγονότος, το οποίο κανένας αλγόριθμος δεν είναι σε θέση να προβλέψει.

Αποδεικνύεται, πως οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι ικανοί να λύσουν σε ικανοποιητικό βαθμό το πρόβλημα της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων. Η μοντελοποίηση του προβλήματος με τέσσερις αντικειμενικές συναρτήσεις αποδίδει αξιόπιστα αποτελέσματα, στα οποία ένας επενδυτής μπορεί να βασισθεί ώστε να δημιουργήσει μια επενδυτική στρατηγική.

6.1 Μελλοντική εργασία

Όσο αυξάνεται η πολυπλοκότητα στις διεθνείς χρηματοοικονομικές αγορές, τόσο γίνεται περισσότερο αναγκαία η ανάπτυξη μεθόδων που θα μπορούν να οδηγήσουν σε αποτελεσματικές επενδύσεις. Η βελτίωση των δυνατοτήτων των σύγχρονων υπολογιστικών συστημάτων σε συνδυασμό με την έρευνα στους αλγορίθμους βελτιστοποίησης, αφήνουν αρκετά περιθώρια ανάπτυξης σε προβλήματα χρηματοοικονομικής μηχανικής. Η παρούσα εργασία αποδεικνύει πως η εφαρμογή περισσότερων των τριών κριτηρίων βελτιστοποίησης αυξάνει την αξιοπιστία τέτοιων μεθόδων. Ζητήματα στα οποία υπάρχει περιθώρια εκτενούς έρευνας είναι:

- Ανάπτυξη εναλλακτικών μεθόδων τοπικής αναζήτησης, με δυνατότητα αποτελεσματικού χειρισμού των περιορισμών.
- Μείωση της πολυπλοκότητας, στην περίπτωση περιορισμών.
- Αύξηση της αξιοπιστίας της VaR, ειδικά στην περίπτωση που λειτουργεί σαν αντικειμενική συνάρτηση [15].
- Δυνατότητα άμεσης λήψης αποφάσεων για επενδυτικές κινήσεις.
- Το κριτήριο τερματισμού να μην ορίζεται σαν παράμετρος, αλλά να λειτουργεί σαν κριτήριο επιτυχίας του επιθυμητού στόχου.
- Περαιτέρω και ακριβής προσδιορισμός των παραμέτρων των αλγορίθμων πολυκριτήριας εξελικτικής βελτιστοποίησης.
- Ανάπτυξη μεθόδων αξιολόγησης των αποτελεσμάτων.

Αναφορές

- [1]. A.E. Eiben, J.E. Smith, Introduction to evolutionary Computing, Springer 2003
- [2]. Z. Michalewicz, Genetic Algorithms + Data Structures=Evolution Programs. Springer-Verlan, Berlin, 1992
- [3]. C.R. Reeves. Using genetic algorithms with small populations. In S. Forrest, editor, Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms, pages 92-99, San Mateo CA, 1993. Morgan Kaufmann.
- [4]. K. Deb and D. Goldberg. A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms. In G.J. Rawlins, editor, Foundations of Genetic Algorithms, pages 69-93, San Mateo, CA, 1991.
- [5]. E. Cantu-Paz. Order statistics and selection methods of evolutionary algorithms. Information Processing Letters, 82(1):15-22, 2002.
- [6]. T. Bickle and L. Thiele. A mathematical analysis of tournament selection. In L.J. Eshelman, editor, Proceedings of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms, pages 9-16, San Francisco CA, 1995. Morgan Kaufmann.
- [7]. A.E. Eiben, P.-E. Raue, and Zs. Ruttkay. Genetic algorithms with multi- parent recombination. In Y. Davidor, H.-P. Schwefel, and R. Mäanner , editors, Parallel Problem Solving From Nature III, volume 866 of Lecture Notes in Computer Science, pages 78-87. Springer-Verlag, 1994.
- [8]. C. Cotta and J.M. Troya. Information processing in transmitting recombination. Applied Mathematics Letters, 16(6):945-948, 2003.
- [9]. N.J. Radclire. The algebra of genetic algorithms. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 10:339-384, 1994.
- [10] G. Syswerda. Uniform crossover in genetic algorithms. In J.D. Schaffer, editor, Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms, pages 2-9, San Mateo, CA, 1989. Morgan Kaufmann
- [11]. F. Fernandez, L. Vanneschi, and M. Tomassini. The efect of plagues in genetic programming: A study of variable-size populations. In C. Ryan et al., editors, Genetic Programming, Proceedings of EuroGP'2003, volume 2610 of Lecture Notes in Computer Science, pages 320-329, Berlin Heidelberg, 2003. Springer-Verlag.

- [12]. M.L. Cramer. A representation for the adaptive generation of simple sequential programs. In J.J. Grefenstette, editor, Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms, Hillsdale NJ, 1985. Lawrence Erlbaum Associates.
- [13] J.R. Koza. Genetic Programming. MIT Press, Cambridge MA, 1992.
- [14] H.Markowitz, Portfolio Selection, Journal of finance, 7/1, 77-91
- [15] D. Maringer, Portfolio Management with Heuristic Optimization, University of Erfurt, Germany, Springer, ISBN-10 0-387-25852-3 (HB)
- [16] F. Stambaugh , Risk and Value at Risk, European Management Journal, 14/6, 612-621
- [17]. J.M Rogero, A. Tiwari, O. Minaux, P.A. Rubini, R. Roy and G. Jared, Applications of Evolutionary Algorithms for Solving Real-life Design Optimization Problems. 2000
- [18] Introduction to Evolutionary Algorithms, Leiden University
- [19] Π. Γεωργιάκης, Εφαρμογή Γενετικών Αλγορίθμων στην Παραγωγή Ηλεκτρικής Ενέργειας, , Τεχν. Χρον. Επιστ. Έκδ. ΤΕΕ, ΙΙΙ, τεύχ. 1-2 2004, Tech. Chron. Sci. J. TCG, ΙΙΙ, No 1-2
- [20] S. Mpatzelis, Modeling and optimal design of a fuel cell energy storage system using rejected energy wind parks in isolated electric grids, Diploma Thesis, Electronic and Computer engineering department, Technical University of Crete, 2009
- [21] http://en.wikipedia.org/wiki/Genetic_algorithm
- [22] Ng, K.C., Switching Control Systems and Their Design Automation via Genetic Algorithms, PhD Thesis, University of Glasgow, 1995.
- [23] Li, Y., et al.. Genetic algorithm automated approach to design of sliding mode control systems, Int J Control, 63(4), 721–739, 1996.
- [24] K. Michail, Optimized Configuration of Sensing Elements for Control and Fault Tolerance Applied to an Electro-Magnetic Suspension, PhD Thesis, Loughborough University, UK, 2009.
- [25] O.Syed, Applying Genetic Algorithms to Recurrent Neural Networks for Learning Network Parameters and Architecture, M.Sc Thesis.

- [26] Zhang, J., Lo, W.L., and Chung, H., Pseudocoevolutionary Genetic Algorithms for Power Electronic Circuits Optimization, IEEE Trans Systems, Man, and Cybernetics, Part C., Vol.36, No.4, July 2006, pp. 590–598.
- [27] BiSNET/e – Distributed Software Systems Group, University of Massachusetts, Boston, <http://dssg.cs.umb.edu/wiki/index.php/BiSNET/e>
- [28] T. Bagchi. "Multiobjective Scheduling by Genetic Algorithms". Multiobjective Scheduling by Genetic Algorithms, 1999.
- [29] F. Kursawe. A variant of evolution strategies for vector optimization. In H.-P. Schwefel and R. Maanner, editors, Parallel Problem Solving from Nature, pages 193–197, Berlin, 1991. Springer.
- [30] J. D. Schaffer. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In J. J. Grefenstette, editor, Proceedings of an International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications, pages 93–100, Pittsburgh, PA, 1985. sponsored by Texas Instruments and U.S. Navy Center for Applied Research in Artificial Intelligence (NCARAI).
- [31] E. Zitzler, M. Laumanns, and S. Bleuler, A Tutorial on Evolutionary Multiobjective Optimization, Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK),
- [32] D. E. Goldberg. Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.
- [33] N. Srinivas and K. Deb. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. Evolutionary Computation, 2(3):221–248, 1994.
- [34] M. Laumanns, L. Thiele, E. Zitzler, and K. Deb. Archiving with guaranteed convergence and diversity in multi-objective optimization. In W. B. Langdon, E. Cantu-Paz, K. Mathias, R. Roy, D. Davis, R. Poli, K. Balakrishnan, V. Honavar, G. Rudolph, J. Wegener, L. Bull, M. A. Potter, A. C. Schultz, J. F. Miller, E. Burke, and N. Jonoska, editors, GECCO 2002: Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, pages 439–447, New York, 9–13 July 2002. Morgan Kaufmann Publishers.
- [35] I. Das and J. Dennis, A Closer Look at Drawbacks of Minimizing Weighted Sums of Objectives for Pareto Set Generation in Multicriteria Optimization Problems. Structural Optimization, 14(1):63–69, 1997.
- [36] C. Fonseca and P. Fleming. Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization. In Stephanie Forrest, editor, Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms, pages 416–423, San Mateo,

California, 1993. University of Illinois at Urbana-Champaign, Morgan Kauffman Publishers.

[37] J. Horn, N. Nafpliotis, and D. Goldberg. A Niche Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization. In Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence, volume I, pages 82-87, Piscataway, New Jersey, June 1994. IEEE Service Center.

[38] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Approach. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 3(4):257-271, November 1999.

[39] J. Knowles and D. Corne. M-PAES: A Memetic Algorithm for Multiobjective Optimization. In 2000 Congress on Evolutionary Computation, volume 1, pages 325-332, Piscataway, New Jersey, July 2000. IEEE Service Center.

[40] C. Coello Coello. A Short Tutorial on Evolutionary Multiobjective Optimization. In Eckart Zitzler, Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele, Carlos A. Coello Coello, and David Corne, editors, First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, pages 21-40. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science No. 1993, 2001.

[41] M. Knarr, M. Goltz, G. Lamont, and J. Huang, Bioremediation of Perchlorate-Contaminated Groundwater using a Multi-Objective Parallel Evolutionary Algorithm. In Congress on Evolutionary Computation (GEC12003), volume 1, pages 1604-1611, Piscataway, New Jersey, December 2003. IEEE Service Center.

[42] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 6(2):182-197, April 2002.

[43] C. Coello Coello, Evolutionary Multi-Objective Optimization and its Use in Finance

[44] <http://www.sinica.edu.tw/mirror/econwpa.wustl.edu/EconFAQ/node64.html>

[45] C. Coello Coello, D. Van Veldhuizen, and G. Lamont. Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems. Kluwer Academic Publishers, New York, May 2002.

[46] E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, Comparison of multiobjective evolutionary algorithms, Empirical results. Evolutionary computation, Vol8, pp. 173-195, 2000

[47] G. Rudolf, Evolutionary search under partially ordered sets, Technical report No. Ci 67/99, Dortmund, Department of computer science, University of Dortmund

- [48] Chi-Ming Lin, M. Gen, An Effective Decision-Based Genetic Algorithm Approach to Multiobjective Portfolio Optimization Problem, , Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, 2007, no. 5, 201 - 210
- [49] H. Ulmer, A. Zell, F. Streichert, Evolutionary Algorithms and the Cardinality Constrained Portfolio Optimization Problem, Center for Bioinformatics Tübingen (ZBIT), University of Tübingen
- [50] R. Steuer and Y. Qi Terry, College of Business University of Georgia, Markus Hirschberger Department of Mathematics University of Eichstätt-Ingolstadt Multiple Objectives in Portfolio Selection.
- [51] T. J. Chang, N. Meade, J.E. Beasley, Y.M. Sharaiha Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization, , Computers & Operations Research 27 (2000) 1271-1302
- [52] M. Gen and R. Cheng, Genetic Algorithms and Engineering Optimization, John Wiley, New York, 2000.
- [53] S. Arnone, A. Loraschi and A. Tettamanzi A Genetic Approach to Portfolio Selection, in Neural Network World, International Journal on Neural and Mass-Parallel Computing and Information Systems (3)6:597-604, 1993
- [54] F. Schlottmann, and D. Seese A Hybrid Genetic-Quantitative Method for Risk-Return Optimization of Credit Portfolios, Proceedings of the Conference of Quantitative Methods in Finance, University of Technology, Sydney, Australia, p. 55, 2001.
- [55] Chi-Cheong, Genetic Algorithms in Portfolio Optimization, Society for Computational Economics in its series Computing in Economics and Finance 2001 with number 204
- [56] P. Skolpadungket, K. Dahal, and N. Harnpornchai, 'Portfolio optimization using multi-objective genetic algorithms', in IEEE Congress of Evolutionary Computation, 2007.
- [57] A. Bakar, N. Adam, S. Hassan, GA-Based Portfolio Optimization Technique, Conference on scientific and social research, 2009,
- [58] D. Maringer and O. Oyewumi, Index tracking with constrained portfolios, Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management, 15, 57-71 (2007) DOI: 10.1002/osaf.285
- [59] J.E. Baker. Adaptive selection methods for genetic algorithms. In J.J. Grefenstette, editor, Proceedings of an international conference on Genetic Algorithms, pages 101-111. Lawrence Earlbaum, 1985.

- [60] P. Moscato On Evolution, Search, Optimization, Genetic Algorithms and Martial Arts: Towards Memetic Algorithms, Caltech Concurrent Computation Program, C3P Report 826, 1989
- [61] R. Moral-Escudero, R. Ruiz-Torrubiano, and A. Suárez, Selection of Optimal Investment Portfolios with Cardinality Constraints, Member IEEE, 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation Sheraton Vancouver Wall Centre Hotel, Vancouver, BC, Canada July 16-21, 2006
- [62] F. Glover, M. Laguna, Tabu Search. Kluwer, Norwell, MA, 1997.
- [63] F. Glover Tabu Search — Part I, ORSA Journal on Computing 1989 1: 3, 190-206.
- [64] F. Glover Tabu Search — Part II, ORSA Journal on Computing 1990 2: 1, 4-32.
- [65] F. Roudier, Portfolio Optimization and Genetic Algorithms, Master's Thesis Department of Management, Technology and Economics – DMTEC Chair of Entrepreneurial Risks – ER