Ανάλυση συχνότητας μέσω προβολών σε βάσεις ανεξάρτητων συνιστωσών

Παρδάλης Βασίλειος

Εξεταστική επιτροπή:
Καθηγητής Ζερβάκης Μιχαήλ (επιβλέπων)
Αναπληρωτής Καθηγητής Μπάλας Κωνσταντίνος
Καθηγητής Σταυρακάκης Γεώργιος

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Πολυτεχνείο Κρήτης

Χανιά, Οκτώβριος 2010

Περιεχόμενα

Ευρετήριο Εικόνων

Εικόνα **Σελίδα**

Ευρετήριο Πινάκων

Πίνακας **Σελίδα**

Ευχαριστίες

Πριν από όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, Κώστα, Διαλεκτή, Κατερίνα και Γεωργία για την ψυχολογική και οικονομική υποστήριξή τους σε όλη τη διάρκεια της φοιτητικής μου ζωής, χωρίς την οποία δε θα ήταν εφικτό να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κ. Μιχαήλ Ζερβάκη για την επίβλεψη και την καθοδήγησή του στην εργασία αυτή, για την προθυμία του να με βοηθήσει οποτεδήποτε είχα κάποιο πρόβλημα και γενικότερα για τη συνεργασία μας, η οποία υπήρξε άψογη. Επίσης ευχαριστώ προκαταβολικά τους κ. Μπάλα Κωνσταντίνο και κ. Σταυρακάκη Γεώργιο για την ανάγνωση του κειμένου και τις τυχόν παρατηρήσεις τους.

Φυσικά, δεν μπορώ να μην ευχαριστήσω το μεταπτυχιακό φοιτητή Κώστα Μιχαλόπουλο, χωρίς τη βοήθεια του οποίου δεν θα είχαν ξεπεραστεί δυσκολίες που συνάντησα κατά την εκπόνηση της διπλωματικής αυτής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Βλάση, τον Κώστα, τον Κωνσταντίνο, Σταυρούλα, Βασίλη (αλλά και πάρα πολλούς ακόμη) που στάθηκαν στο πλευρό μου στα εύκολα και κυρίως στα δύσκολα, τα τελευταία χρόνια. Δεν θα μπορούσα βέβαια να παραλείψω την κοπέλα μου Μαρία που πίστεψε σε μένα και ήταν δίπλα μου σε όλες τις φάσεις της ζωής μου, από τις σπουδές μου, την στρατιωτική μου θητεία μέχρι και σε πολύ δύσκολες στιγμές.

Οκτώβριος 2010,

Παρδάλης Βασίλειος

Αφιερωμένο στην οικογένεια μου…

Εισαγωγή

Τα χωρο-χρονικά χαρακτηριστικά (spatio-temporal features) μπορούν να εξαχθούν από δύο διαστάσεων ICA, η οποία όμως απαιτεί εκτεταμένους υπολογισμούς και είναι ευαίσθητη στο θόρυβο εξαιτίας του μεγάλου αριθμού των απροσδιοριστιών. Σε αυτή την εργασία παρουσιάζεται μία μέθοδος δύο επιπέδων, όπου τα χωρικά και χρονικά χαρακτηριστικά εξάγονται σε ακολουθία χρησιμοποιώντας την ICA μαζί με επιπλέον ρυθμίσεις από το χρήστη.

Πρώτα χρησιμοποιείται η χωρική ICA για να εξάγει τις χωρικά κατανεμημένες πηγές και δευτερευόντως η ICA εισάγεται στο χρονικό πεδίο για τους παράγοντες των χωρικών πηγών. Αυτή η δύο επιπέδων μέθοδος παρέχει πολύ καλύτερα χαρακτηριστικά από μόνο την χωρική ICA, και είναι υπολογιστικά πιο αποδοτική από την 2-διαστάσεων ICA. Εφαρμόζουμε αυτή την τεχνική σε συνθετικά δεδομένα και σε πραγματικά δεδομένα εγκεφαλογραφήματος.

Το εγκεφαλογράφημα καταγράφει ταυτόχρονα σήματα από διάφορες εγκεφαλικές λειτουργίες οι οποίες προέρχονται από διαφορετικές περιοχές του εγκεφάλου. Εξάγοντας επομένως τα χωρικά και χρονικά χαρακτηριστικά του εγκεφαλογραφήματος μπορούμε να έχουμε μία καλύτερη εικόνα για τις διαφορετικές διεργασίες οι οποίες λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια του πειράματος.

Κεφάλαιο 1

Το Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (ΗΕΓ)

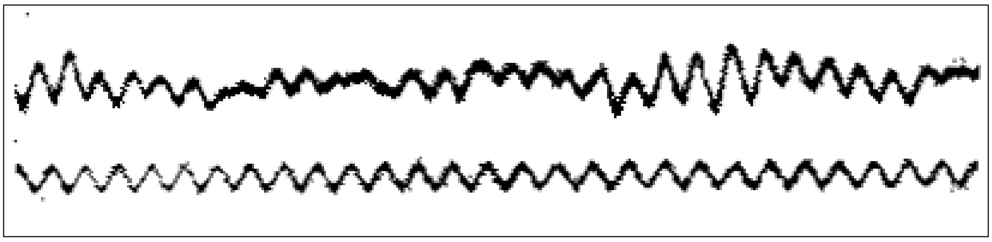
Με τον όρο Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (ΗΕΓ) εννοούμε την καταγραφή της βιοηλεκτρικής δραστηριότητας του εγκεφάλου με ηλεκτρόδια που τοποθετούνται στο τριχωτό της κεφαλής. Η χρήση του ΗΕΓ στη νευρολογία είναι ευρύτατη, καθώς αποτελεί μια μέθοδο φθηνή, ανώδυνη και απλή στην εφαρμογή της. Τα σήματα που καταγράφονται στο κρανίο, χρησιμοποιούνται για κλινικούς και ερευνητικούς λόγους.

Η κλινική χρήση του ΗΕΓ αφορά στη διάγνωση επιληπτικών κρίσεων, εγκεφαλοπαθειών (Alzheimer Disease, κ.ά.), στη διαπίστωση εγκεφαλικού θανάτου, καθώς και κρανιοεγκεφαλικών κακώσεων. Μοντέρνες εφαρμογές αφορούν τη χρήση του στην επικοινωνία ανθρώπου-μηχανής, με στόχο τη βελτίωση της ποιότητας ζωής ατόμων με αναπηρίες, αλλά και εμπορικές εφαρμογές καταναλωτικού χαρακτήρα (βιντεοπαιχνίδια).

1.1 Ιστορικά στοιχεία του ΗΕΓ

Ο Γερμανός ψυχολόγος και ψυχίατρος Hans Berger (1873-1941) ξεκίνησε την έρευνα στο ανθρώπινο ΗΕΓ το 1920. Έδωσε στη συσκευή το όνομά του και μερικές φορές θεωρείται ότι ανακάλυψε το ΗΕΓ, αν και είχαν κάνει και άλλοι παρόμοια πειράματα [1]. Ο Berger ανακοίνωσε δημόσια ότι ήταν δυνατή η καταγραφή των ασθενών ηλεκτρικών ρευμάτων που δημιουργούνται στην περιοχή του εγκεφάλου, χωρίς το "άνοιγμα" του κρανίου, και απεικόνισή τους πάνω σε χαρτί.

Δεν περιορίστηκε μόνο εκεί, αλλά και κατέδειξε ότι η δραστηριότητα που κατέγραφε άλλαζε ανάλογα με την κατάσταση του εγκεφάλου (ύπνος, αναισθησία) ή ακόμα και ανάλογα με ορισμένες νευρολογικές ασθένειες όπως η επιληψία.[2]



Εικόνα 1.1: *Το πρώτο εγκεφαλογράφημα όπως καταγράφηκε από τον Hans Berger. Το κάτω είναι ένα ημιτονοειδές σήμα αναφοράς συχνότητας 10 Hz.*

1.2 Χαρακτηριστικά του Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος

Μέσα στον εγκέφαλο, οι νευρώνες παράγουν τα δικά τους ηλεκτρικά πεδία, τα οποία μετρούνται σε μV. Το ΗΕΓ είναι μία εξέταση που καταγράφει και απεικονίζει αλλαγές στην πιθανή διαφορά δυναμικού μεταξύ ζευγών ηλεκτροδίων που τοποθετούνται στο ανθρώπινο κρανίο. Ένας μη υγιής εγκέφαλος θα παρουσιάζει μεγάλες μεταβολές στο ηλεκτρικό δυναμικό, σε σύγκριση με το δυναμικό που παράγεται από ένα υγιή εγκέφαλο.

Εικόνα 1.2: *Η μορφή του ΗΕΓ όπως καταγράφεται από τον ηλεκτροεγκεφαλογράφο. Διακρίνεται η δραστηριότητα του εγκεφάλου κατά μήκος του ΗΕΓ. Κάθε γραμμή αφορά και ένα κανάλι, δηλαδή κάθε ένα ηλεκτρόδιο τοποθετημένο στο κρανίο.*

Η λειτουργία του ηλεκτροεγκεφαλογράφου στηρίζεται στην καταγραφή των διαφορών δυναμικού στην εξωτερική επιφάνεια του κρανίου ως αποτέλεσμα της λειτουργίας του εγκεφάλου. Τα μετρούμενα σήματα είναι ασθενή της τάξης περίπου του 1μV έως 200μV. Είναι αναγκαία λοιπόν η όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ενίσχυση των σημάτων. Η τοποθέτηση των ηλεκτροδίων είναι επίσης καθοριστικής σημασίας για την πλήρη καταγραφή των σημάτων.

Η δραστηριότητα που καταγράφεται στο ΗΕΓ διακρίνεται σε τρεις βασικές κατηγορίες[3]:

1. ***Αυθόρμητη δραστηριότητα.*** Κάθε αυθόρμητη δραστηριότητα που συμβαίνει στο κρανίο ή στον εγκέφαλο, δηλαδή η δραστηριότητα που υπάρχει συνεχώς στον εγκέφαλο ενός ατόμου υπό την απουσία οιοδήποτε ερεθίσματος. Η αυθόρμητη δραστηριότητα πολλές φορές μπορεί να θεωρηθεί ως θόρυβος αν κάποιος ενδιαφέρεται για παρακινητική επεξεργασία, αλλά μπορεί να γίνει πολύ πληροφοριακή όσον αφορά τη διανοητική-ψυχική κατάσταση ενός ατόμου και πολύ συχνά χρησιμοποιείται στη έρευνα του ύπνου. Συγκεκριμένοι τύποι ταλαντευόμενης δραστηριότητας, όπως τα κύματα άλφα, αποτελούν μέρος της αυθόρμητης δραστηριότητας.

   Οι περισσότερες εργασίες στις νευροεπιστήμες έχουν επικεντρωθεί στην απόκριση του εγκεφάλου σε κάποιο ερέθισμα ή συμβάν. Ωστόσο, ο εγκέφαλος είναι πολύ ενεργός ακόμα και στην απουσία κάποιας σαφής εισόδου ή εξόδου. Η αυθόρμητη δραστηριότητα ερευνάται χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα που απαιτεί τα αντικείμενα να ανοίξουν και να κλείσουν τα μάτια τους συγκεκριμένες στιγμές, ενώ η δραστηριότητα του ΗΕΓ καταγράφεται. Η έρευνα στην αυθόρμητη δραστηριότητα οδήγησε στην υπόθεση ότι συγκεκριμένες περιοχές του εγκεφάλου αποτελούν ένα δίκτυο υποστηρίζοντας μία κύρια κατάσταση της λειτουργίας του εγκεφάλου.

2. ***Προκλητά δυναμικά.*** Τα Προκλητά Δυναμικά (Π.Δ.) ή Evoked Potentials (EP) είναι οι διαφορές δυναμικού που μετρώνται στην δερματική επιφάνεια του κεφαλιού και οι οποίες προκαλούνται ως προετοιμασία ή ως απόκριση σε κάποιο συγκεκριμένο γεγονός - ερέθισμα. Εφόσον τα Π.Δ. αντικατοπτρίζουν εγκεφαλική δραστηριότητα σχετιζόμενη με ένα εξωτερικό ερέθισμα, είναι αυτά τα οποία μπορούμε να μελετήσουμε μέσω προδιαγεγραμμένων πειραματικών διαδικασιών στο εργαστήριο. Διακρίνονται σε οπτικά (εμφάνιση εικόνων, λάμψεις, αλλαγη χρωμάτων κ.ά.), ακουστικά (ήχοι, τόνοι διαφόρων συχνοτήτων και έντασης, κ.ά.) και σωματο-αισθητικά (μικρής διάρκειας και έντασης ηλεκτρικά ρεύματα που ερεθίζουν κάποια συγκεκριμένα νεύρα).

   Τα Π.Δ. χωρίζονται επίσης σε ενδογενή και εξωγενή. Τα εξωγενή έχουν να κάνουν με τη φύση του εξωτερικού ερεθίσματος (ένταση, συχνότητα, κτλ). Αντίθετα, τα ενδογενή εξαρτώνται ουσιαστικά από την ψυχολογική κατάσταση του ατόμου και έχουν τη βάση τους στην ψυχολογική επίδραση του εξωτερικού ερεθίσματος στον άνθρωπο. Αλλάζουν ανάλογα με το αν το ερεθισμα είναι γνωστό ή άγνωστο, αν είναι δυσάρεστο ή ευχάριστο, αν θυμίζει στον εξεταζόμενο μια προγενέστερη προσωπική του εμπειρία κτλ.

3. ***Βιοηλεκτρικά γεγονότα.*** Εξετάζονται με τη χρήση μικροηλεκτροδίων και αφορούν ένα νευρώνα.

1.2.1 Καταγραφή Προκλητών Δυναμικών

Η καταγραφή των Π.Δ. γίνεται τόσο επεμβατικά, δηλαδή με τοποθέτηση μέσα στον εγκέφαλο απαγωγών υπό μορφή πολύ λεπτών βελονών, όσο και μη-επεμβατικά, με τοποθέτηση απαγωγών στην εξωτερική επιφάνεια του κεφαλιού. Η καταγραφή των Π.Δ. γίνεται χρησιμοποιώντας ακριβώς τον ίδιο εξοπλισμό που χρησιμοποιείται για την καταγραφή του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος (ΗΕΓ). Για καλύτερη εποπτεία της εγκεφαλικής δραστηριότητας αλλά και για συγκριτική μελέτη της λειτουργίας διαφόρων περιοχών του εγκεφάλου είναι απαραίτητη η λήψη πολλών ταυτόχρονων σημάτων από διαφορετικά σημεία του ανθρώπινου κρανίου.

Ένα από τα σημαντικά προβλήματα κατά τη διαδικασία καταγραφής Π.Δ. είναι ότι τα σήματα του ΗΕΓ είναι ιδιαίτερα ασθενή οπότε καθίσταται προβληματική η καταγραφή τους παρουσία θορύβου. Ο θόρυβος προκύπτει από δύο κυρίως πηγές.

- Από το ίδιο το ΗΕΓ που καταγράφει τα σήματα του εγκεφάλου τα οποία είναι απαραίτητα για την λειτουργία του ανθρώπινου οργανισμού. Τα σήματα αυτά (θόρυβος) παρεμβάλλουν στο επιθυμητό σήμα (ηλεκτρικό σήμα που παράγεται ως απόκριση σε συγκεκριμένο ερέθισμα). Τις περισσότερες φορές ο θόρυβος είναι ισχυρότερος του επιθυμητού σήματος όποτε γίνεται προβληματική η μέτρηση των Π.Δ.

- Από το θόρυβο που δημιουργείται από συσκευές η μηχανήματα του περιβάλλοντος χώρου (τεχνητός θόρυβος).

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών μπορούν να εφαρμοστούν οι εξής τεχνικές:

1. ***Εξαγωγή του μέσου όρου.*** Το πείραμα επαναλαμβάνεται πολλές φορές και το σήμα που λαμβάνεται είναι ο μέσος όρος των σημάτων των επιμέρους μετρήσεων. Έστω ότι $r_i(t)$ είναι το μετρούμενο σήμα κατά την διάρκεια της επανάληψης i. Το σήμα αυτό θεωρείται ότι αποτελείται από το επιθυμητό σήμα $s_i(t)$ και τον θόρυβο $n_i(t)$ που αντιπροσωπεύει τα σήματα του εξελισσόμενου ΗΕΓ, τα οποία είναι άσχετα με το εκμαιευμένο

ερέθισμα της διαδικασίας. Είναι λοιπόν:

$$r_i(t) = s_i(t) + n_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

όπου M είναι ο αριθμός των επαναλήψεων. Αν πάρουμε τον μέσο όρο από τα λαμβανόμενα σήματα τότε θα είναι:

$$E\{r_i(t)\} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} r_i(t) = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{M} s_i(t) + \sum_{i=1}^{M} n_i(t)\right)$$

Το επιθυμητό σήμα $s_i(t)$, το οποίο προέρχεται από το εκμαιευμένο ερέθισμα, είναι το ίδιο σε κάθε επανάληψη. Δηλαδή, $s_i(t) = s(t)$.

Αντίθετα, ο θόρυβος $n_i(t)$ εφόσον υπάρχει δεν σχετίζεται με το εκμαιευμένο γεγονός και μπορεί να θεωρηθεί ασυσχέτιστη τυχαία διαδικασία με μέσο όρο μηδέν. Έτσι προκύπτει ότι:

$$E\{r_i(t)\} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} s_i(t) + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} n_i(t) = \frac{1}{M}\cdot M \cdot s(t) + 0 = s(t)$$

Με αυτό τον τρόπο "αποθορυβοποιείται" το σήμα και λαμβάνεται μόνο το επιθυμητό σήμα, δηλαδή αυτό που σχετίζεται αποκλειστικά με το Π.Δ.

2. ***Μετρήσεις εντός ηλεκτρομαγνητικά θωρακισμένου δωματίου (κλωβός Faraday)***. Με αυτό τον τρόπο αντιμετωπίζεται, καθώς εξουδετερώνονται, τα εξωτερικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία, δηλαδή τα πεδία που δημιουργούνται από ηλεκτροκινητήρες, γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας, κινητά τηλέφωνα, κ.α. Η καταγραφή των Π.Δ. παρουσιάζει κάποιους περιορισμούς, οι οποίοι οφείλονται κυρίως στην κατάσταση του εξεταζόμενου. Πιο συγκεκριμένα, ο εξεταζόμενος ενδεχομένως προσαρμόζεται ή εξοικειώνεται με τα ερεθίσματα όποτε η καταγραφή τους δεν είναι ακριβής.

   Επίσης, μετά από κάποιο χρόνο, ο εξεταζόμενος κουράζεται ή στρέφει αλλού την προσοχή του επηρεάζοντας τα Π.Δ. στην ένταση και στο χρόνο. Για το λόγο αυτό χρειάζεται να υπάρχει κάποιος μέγιστος αριθμός επαναλήψεων, πέραν των οποίων γίνεται η παραδοχή ότι οι μετρήσεις δεν είναι αξιόπιστες. Ακόμη, πρέπει να γίνεται τακτικά έλεγχος της κατάστασης του εξεταζόμενου κατά την διάρκεια της διαδικασίας καταγραφής. Ωστόσο, αρκετές φορές απαιτείται απεριοδικός χρονισμός αλλεπάλληλων πειραμάτων ώστε να αποφεύγεται η εξοικείωση με τα ερεθίσματα.

1.3 Εγκεφαλικοί ρυθμοί

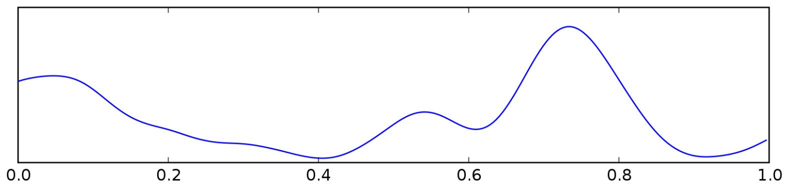
Οι διαφορές δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων καταγράφεται στο ΗΕΓ με τη μορφή καμπυλών που ονομάζονται εγκεφαλικοί ρυθμοί. Τα περισσότερα εγκεφαλικά σήματα που παρατηρούνται στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα βρίσκονται στη ζώνη συχνοτήτων 1-20 Hz. Οι χαρακτηριστικότερες παράμετροι των εγκεφαλικών ρυθμών είναι η συχνότητα και η μορφολογία τους.

Στον πίνακα 1.1 φαίνονται οι πέντε βασικοί εγκεφαλικοί ρυθμοί, που ονομάζονται διεθνώς με γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου.

Ρυθμός	**Συχνότητα (Hz)**	**Πλάτος (μV)**
Δέλτα (δ)	0.5 - 4	έως 100 - 200
Θήτα (θ)	4 - 8	< 30
Άλφα (α)	8 - 13	30 - 50
Βήτα (β)	13 - 30	< 20
Γάμμα (γ)	30 - 100	-

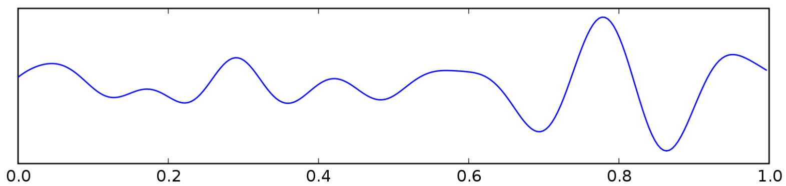
Πίνακας 1.1: *Οι ρυθμοί του εγκεφαλογραφήματος*

- *Δέλτα.* Ο ρυθμός αυτός χαρακτηρίζεται από μεγάλες εντάσεις και μικρές διακυμάνσεις. Σχετίζεται με τον βαθύ ύπνο στους ενήλικες και είναι ο κυρίαρχος ρυθμός στα βρέφη.



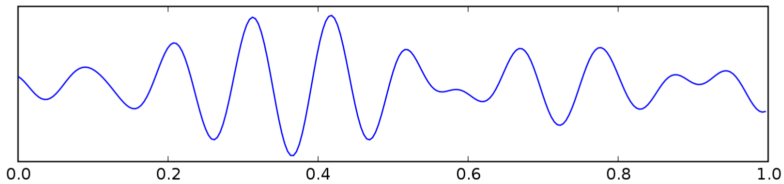
Εικόνα 1.3: *Ρυθμός Δέλτα*

- *Θήτα.* Παρουσιάζεται κατά τη διάρκεια βαθιάς περισυλλογής και ελαφρού ύπνου. Η δραστηριότητα του ρυθμού Θήτα φανερώνεται κατά τη διάρκεια της λειτουργίας της βραχυπρόθεσμης μνήμης και όταν ο εγκέφαλος βρίσκεται σε "ετοιμότητα".



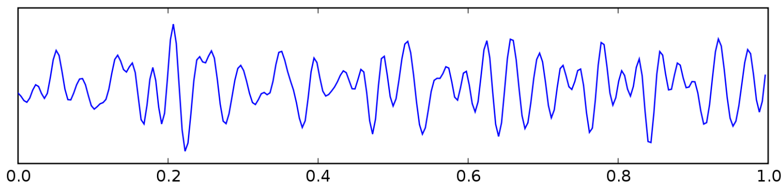
Εικόνα 1.4: *Ρυθμός Θήτα*

- *Άλφα.* Ο ρυθμός Άλφα εμφανίζεται σε βαθιά χαλάρωση και όταν έχουμε έντονο το στοιχείο της φαντασίας. Εμφανίζεται στο 75% των ενηλίκων. Ο ρυθμός Άλφα πήρε το όνομά του από τον Hans Berger γιατί ήταν ο πρώτος που παρατηρήθηκε. Εμφανίζεται με το κλείσιμο των ματιών και με τη χαλάρωση του ατόμου και εξασθενεί με το άνοιγμα των ματιών ή τη διανοητική προσπάθεια.



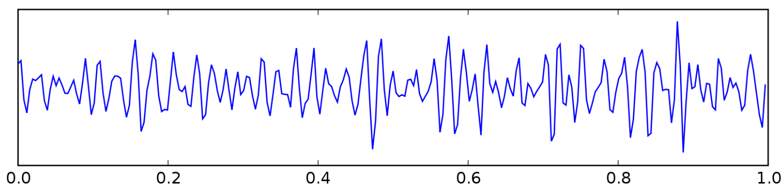
Εικόνα 1.5: *Ρυθμός Άλφα*

- *Βήτα.* Είναι ο ρυθμός που συνδέεται με την κανονική συνείδηση και καταγράφεται κατά τη διάρκεια των καθημερινών δραστηριοτήτων ενός ανθρώπου. Είναι ο ρυθμός που κυριαρχεί σε ένα φυσιολογικό άτομο. Ο ρυθμός Βήτα συνδέεται με πολλές παθολογίες και συνέπειες φαρμάκων. Μπορεί να είναι απών ή μειωμένος σε περιοχές όπου υπάρχει εγκεφαλική κάκωση. Είναι ο κύριος ρυθμός σε ασθενείς που είναι ανήσυχοι, σε εγρήγορση ή έχουν τα μάτια τους ανοιχτά.



Εικόνα 1.6: *Ρυθμός Βήτα*

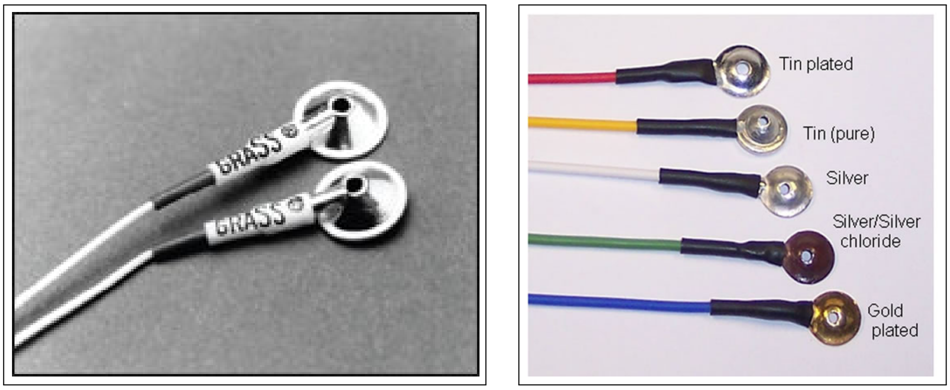
- *Γάμμα.* Ο ρυθμός Γάμμα έχει τις μεγαλύτερες συχνότητες. Αν και δεν είναι πολλά αυτά που γνωρίζουμε για αυτό το ρυθμό, η έρευνα δείχνει ότι εμφανίζεται κατά τις εκρήξεις της διορατικότητας και την υψηλού επιπέδου επεξεργασία πληροφοριών.



Εικόνα 1.7: *Ρυθμός Γάμμα*

1.4 Ηλεκτρόδια

Η ανίχνευση της διαφοράς δυναμικού μεταξύ των διαφόρων σημείων του τριχωτού της κεφαλής γίνεται με τη χρήση ηλεκτροδίων. Τα ηλεκτρόδια που χρησιμοποιούνται στο ΗΕΓ είναι δίσκοι διαμέτρου 5-10 mm και αποτελούνται από διάφορα κράματα αργύρου.



(α′) *Τύπος ηλεκτροδίου* **(β′)** *Είδη κραμάτων*

Εικόνα 1.8: *Στις εικόνες φαίνεται α') ένας τύπος ηλεκτροδίου και β') τα κράματα που κατασκευάζονται.*

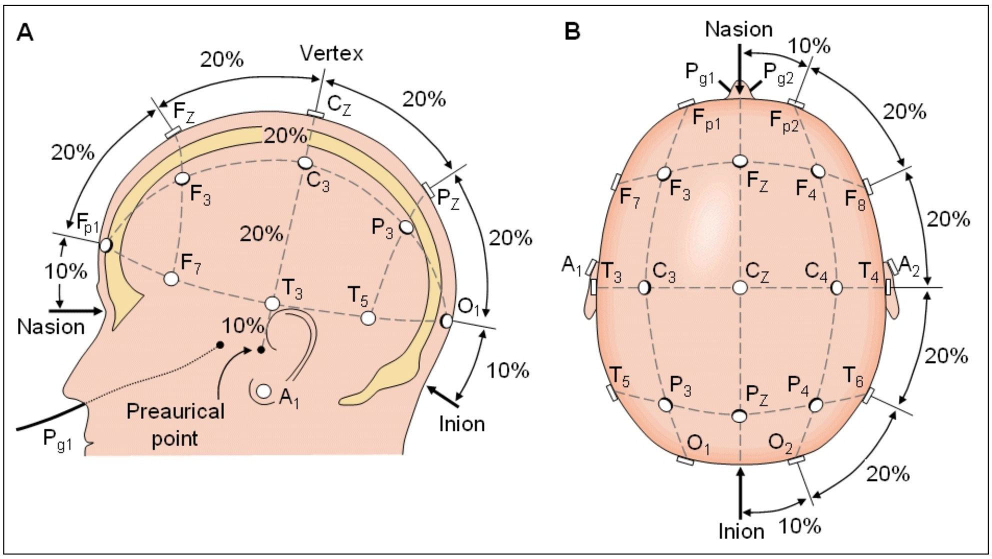
Για την επίτευξη καλής επαφής, το δέρμα καθαρίζεται καλά με οινόπνευμα, ενώ το ηλεκτρόδιο εμποτίζεται με ειδική αγώγιμη γέλη. Σε ειδικές συνθήκες μπορεί να απαιτείται ακινητοποίηση των ηλεκτροδίων (ανήσυχοι ασθενείς, καταγραφή κατά τη διάρκεια του ύπνου κ.ά.) οπότε και χρησιμοποιείται ειδική κάσκα, όπως στην εικόνα (1.9).

1.4.1 Τοποθέτηση ηλεκτροδίων - Το διεθνές σύστημα 10-20

Η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδος για την περιγραφή της τοποθέτησης των ηλεκτροδίων σε συγκεκριμένες θέσεις κατά μήκος του κεφαλιού είναι το διεθνές σύστημα 10-20. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε για να διασφαλιστεί η τυποποιημένη επανάληψη, έτσι ώστε να μπορούν να συγκριθούν οι μελέτες πάνω σε ένα αντικείμενο, αλλά και τα αντικείμενα μεταξύ τους.

Αυτό το σύστημα βασίζεται στη σχέση μεταξύ της θέσης του ηλεκτροδίου και της περιοχής του εγκεφαλικού φλοιού. Το “10” και το “20” αναφέρονται στο γεγονός ότι οι πραγματικές αποστάσεις μεταξύ γειτονικών ηλεκτροδίων είναι ίσες με το 10% ή 20% της συνολικής απόστασης από πίσω έως μπροστά και αριστερά έως δεξιά του κρανίου. Κάθε περιοχή ηλεκτροδίων περιγράφεται από ένα γράμμα, το οποίο προσδιορίζει το λοβό, μαζί με έναν αριθμό ή ένα άλλο γράμμα για να προσδιορίσει την ημισφαιρική θέση [4, 5].

Εικόνα 1.9: *Ειδική κάσκα που επιτρέπει την ακινητοποίηση των ηλεκτροδίων.*

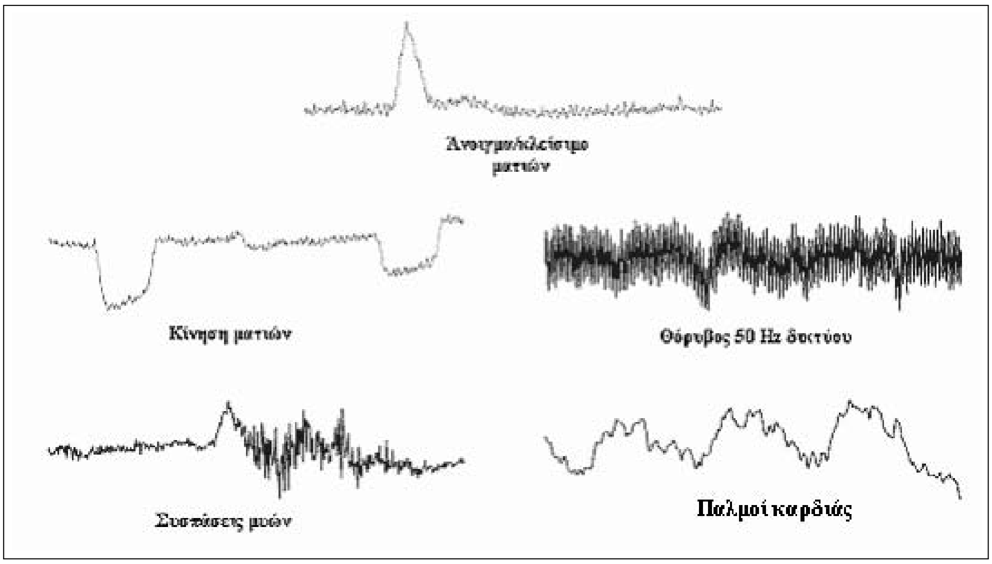


Εικόνα 1.10: *Διεθνές πρότυπο σύστημα 10-20 για την τοποθέτηση των ηλεκτροδίων στο ΗΕΓ. Το ηλεκτρόδιο αναφοράς συνήθως τοποθετείται στο αυτί στο σημείο A1 ή A2*

Στην εικόνα (1.10) φαίνονται τα γράμματα που χρησιμοποιούνται αναλόγως σε ποιο μέρος του κρανίου αναφερόμαστε. Παρατηρούμε ότι στο αριστερό ημισφαίριο έχουμε μονούς αριθμούς και στο δεξί ζυγούς.

1.5 Τεχνικά σφάλματα (Artifacts)

Ως τεχνικό σφάλμα ορίζεται κάθε μη εγκεφαλική δραστηριότητα που επιδρά στην καταγραφή του ΗΕΓ. Τα πιο χαρακτηριστικά τεχνικά σφάλματα αποτελούν το άνοιγμα-κλείσιμο των βλεφάρων, η οφθαλμική κίνηση, οι μυικές συσπάσεις, οι παλμοί της καρδιάς και ο θόρυβος του δικτύου διανομής ηλεκτρικής ενέργειας που στην Ελλάδα είναι 50 Hz.



Εικόνα 1.11: *Κυματομορφές των κυριότερων τεχνικών σφαλμάτων*

Όπως φαίνεται και στην εικόνα (1.11) έχουμε τα εξής τεχνικά σφάλματα:

- *Άνοιγμα-κλείσιμο των βλεφάρων.* Πρόκειται για τεχνικό σφάλμα το οποίο είναι πολύ συχνό σε καταγραφές ΗΕΓ. Το σήμα που παράγει έχει πλάτος αρκετές φορές μεγαλύτερο από τα εγκεφαλικά σήματα. Για το λόγο αυτό μπορεί να καταγραφεί ακόμη και από τα ηλεκτρόδια που τοποθετούνται στο πίσω μέρος του κεφαλιού. Βέβαια, στα κοντινά στα μάτια ηλεκτρόδια είναι ιδιαίτερα αισθητό (F_{p1}, F_{p2}).

- *Οφθαλμική κίνηση.* Το σήμα του συγκεκριμένου τεχνικού σφάλματος παράγεται από την κίνηση του ματιού. Η επίδρασή του στα πιο απομακρυσμένα από τα μάτια ηλεκτρόδια είναι μεγαλύτερη από αυτή των βλεφάρων.

- *Θόρυβος δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας.* Το σήμα του συγκεκριμένου τεχνικού σφάλματος προσβάλλει τα εγκεφαλικά σήματα κατά τη μεταφορά των τελευταίων, από τα ηλεκτρόδια στη συσκευή εγγραφής. Η υψηλή αυτή συχνότητα των 50 Hz αφαιρείται από την καταγραφή του ΗΕΓ μέσω φιλτραρίσματος.

- *Μυικές συσπάσεις.* Πρόκειται για σήματα ποικίλων συχνοτήτων τα οποία παράγονται από τις συσπάσεις κάποιων μυών του προσώπου ή του αυχένα. Η θέση των μυών αυτών καθορίζει και τα ηλεκτρόδια στα οποία καταγράφεται το τεχνικό σφάλμα.

- *Παλμοί της καρδιάς.* Το συγκεκριμένο τεχνικό σφάλμα παράγει σήμα συχνότητας 1.2 Hz, το οποίο προκαλείται από τη συστολή-διαστολή των αιμοφόρων αγγείων κατά τις συσπάσεις της καρδιάς.

Από τα τεχνικά σφάλματα που παρουσιάζονται παραπάνω, μόνο ο θόρυβος του δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να απορριφθεί με την εφαρμογή κατάλληλου φίλτρου. Για την απομάκρυνση των υπόλοιπων κρίνεται απαραίτητη η χρήση της ICA (παράγραφος 2.4).

Κεφάλαιο 2

Γραμμικοί Μέθοδοι Προβολής

Ένα θεμελιώδες πρόβλημα στην έρευνα νευρωνικών δικτύων, καθώς επίσης και σε πολλούς άλλους επιστημονικούς κλάδους, βρίσκει μια κατάλληλη απεικόνιση με τη χρήση πολλών μεταβλητών δεδομένων, δηλαδή τυχαίων διανυσμάτων. Για λόγους υπολογιστικής και εννοιολογικής απλότητας, η απεικόνιση αναζητείται συχνά ως γραμμικός μετασχηματισμός από τα αρχικά δεδομένα. Με άλλα λόγια, κάθε συνιστώσα απεικόνισης είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των αρχικών μεταβλητών, γνωστός ως γραμμική μέθοδος μετασχηματισμού. Είναι αυτός που περιλαμβάνει την ανάλυση κυρίαρχων συνιστωσών, την ανάλυση παράγοντα και την αναζήτηση προβολής.

2.1 Κατηγορίες αλγορίθμων

Υπάρχουν τρεις κατηγορίες αλγορίθμων[13] ανάλογα με τα κριτήρια βάση των οποίων υπολογίζεται η λύση της εξίσωσης (2.2). Αυτοί είναι:

1. ***Χωρικοί αλγόριθμοι ICA (Spatial ICA)***.

   Οι αλγόριθμοι αυτοί δεν λαμβάνουν υπόψιν τους τη χρονική εξάρτηση των δεδομένων. Θεωρούν ότι οι πηγές των δεδομένων είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες διαδικασίες, δηλαδή απλές ανεξάρτητες μεταβλητές. Υπολογίζουν την χωρική εξάρτηση των δεδομένων με διάφορες τεχνικές, όπως η οριακή εντροπία (π.χ. RADICAL)[7], η αμοιβαία πληροφορία (π.χ. MLICA)[8], η εντροπία (π.χ. Infomax)[9], οι cross-cumulants (π.χ. JADE)[10] και η μη γραμμική cross-correlation (π.χ. kernel ICA)[11].

   Αν και ο αλγόριθμός μας ανήκει στην επόμενη κατηγορία, στην υλοποίησή του χρησιμοποιείται ο χωρικός ICA, ο οποίος επεξηγείται στην παράγραφο 2.4.

2. ***Χρονικοί αλγόριθμοι ICA (Temporal ICA)***.

   Οι αλγόριθμοι αυτοί θεωρούν ότι οι πηγές των δεδομένων δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες διαδικασίες και χρησιμοποιούν την χρονική εξάρτηση των δεδομένων για να διαχωρίσουν τις πηγές (π.χ. TDSEP)[12].

   Στη χρονική ICA (ή ενός καναλιού ICA), η ICA χρησιμοποιείται ξεχωριστά σε κάθε χωρική πηγή. Για κάθε $u_i(t)$ από τον $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ldots u_n(t)]^T$, όπου n είναι ο αριθμός των πηγών, η χρονική ICA εφαρμόζεται για πλαισιωμένα δείγματα σε ένα κινούμενο χρονικό παράθυρο όπως το

   $$\tilde{\mathbf{u}}_i(t) = [u_i(t) : u_i(t-1) : \ldots : u_i(t-m+1)]^T$$

   όπου το μήκος του πλαισίου m είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων που χρειάζεται για να υπάρχει αρκετή χρονική πληροφορία. Έτσι, το $\tilde{\mathbf{u}}_i(t)$ αναπαρίσταται σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσεων, και οι χρονικές συνιστώσες μπορούν να εξαχθούν από τους κανόνες μάθησης της χωρικής ICA. Σε αυτή την κατηγορία αλγορίθμων ανήκει και η μέθοδος που χρησιμοποιούμε σε αυτή την εργασία και επεξηγείται αναλυτικότερα στην παράγραφο 3.3.

3. ***Χωρο-χρονικοί αλγόριθμοι ICA (Spatio-temporal ICA)***.

   Οι αλγόριθμοι αυτοί χρησιμοποιούν τις ιδιότητες και της χρονικής και της χωρικής δομής των δεδομένων και χρησιμοποιούν τον τυφλό διαχωρισμό πηγών για να διαχωρίσουν τις πηγές, όμως απαιτούν εκτεταμένους υπολογισμούς και είναι ευαίσθητοι στο θόρυβο εξαιτίας του μεγάλου αριθμού των απροσδιοριστιών.

   Στη χωρο-χρονική ICA η μέθοδος των καθυστερήσεων (§3.3), όπως και στη χρονική ICA, χρησιμοποιείται και επαναλαμβάνεται για κάθε κανάλι ενδιαφέροντος. Με αυτό τον τρόπο μια σειρά από πίνακες καθυστέρησης "στοιβάζονται" για να σχηματίσουν ένα πλήρη πίνακα δεδομένων τέτοιο ώστε

   $$U^{Tot} = \left[\left(U^1\right)^T \quad \cdots \quad (U^n)^T \right]^T$$

   για ένα σύστημα n καναλιών των N δειγμάτων, τέτοιο ώστε ο U^{Tot} να είναι ένας $nm \times N$ πίνακας. Εφαρμόζεται σε αυτόν η χωρική ICA και δίνει ένα αριθμό από ανεξάρτητες συνιστώσες. Για κάθε συνιστώσα, κάθε στήλη του πίνακα μίξης αποτελείται από n φίλτρα μίξης, ένα για κάθε κανάλι υπολογισμού. Όπως και στη χρονική ICA, οι ανεξάρτητες συνιστώσες μπορούν να προβληθούν πίσω στο χώρο υπολογισμού για κάθε από τα n κανάλια. Ακόμα, αρκετά φίλτρα μίξης μπορούν να χωριστούν σε διαφορετικούς υποχώρους, αν και σε αυτή την περίπτωση , σε αντίθεση με τη χρονική ICA, τα φίλτρα μίξης είναι επίσης κατανεμημένα σε n χωρικές τοποθεσίες.

2.1.1 Προϋποθέσεις για Χωρικό ICA

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε τη μοναδικότητα της λύσης πρέπει να κάνουμε τις παρακάτω παραδοχές:

1. ***Όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές με εξαίρεση μία θα πρέπει να έχουν μη κανονική κατανομή.***

   Αν θεωρήσουμε πως οι ανεξάρτητες μεταβλητές $s_1, s_2, \ldots, s_n$ έχουν κανονική κατανομή και τότε κάθε γραμμικός μετασχηματισμός τους $\mathbf{x} = \mathbf{As}$ θα έχει κανονική κατανομή και τα στοιχεία x_i θα είναι μη συσχετισμένα. Σε μεταβλητές με κανονική κατανομή απλή μη συσχέτιση συνεπάγεται και ανεξαρτησία. Επομένως, οποιοσδήποτε γραμμικός μετασχηματισμός είναι και η λύση του προβλήματος.

2. ***Ο αριθμός των παρατηρούμενων δεδομένων*** $\mathbf{m}$ ***πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσος με τον αριθμό των ανεξάρτητων πηγών*** $\mathbf{m} \geq \mathbf{n}$.

   Ο περιορισμός αυτός δεν είναι αναγκαίος. Ακόμα και στην περίπτωση που $m < n$ ο πίνακας μίξης A μπορεί να αναγνωριστεί, αν και οι ενεργοποιήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών δεν μπορούν να ανακτηθούν λόγω της μη αντιστρεψιμότητας του A. Η υπάρχουσα θεωρία της ICA δεν ισχύει για αυτή την περίπτωση και έτσι είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε αυτή την υπόθεση.

3. ***Όλες οι στήλες του*** A ***πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.***

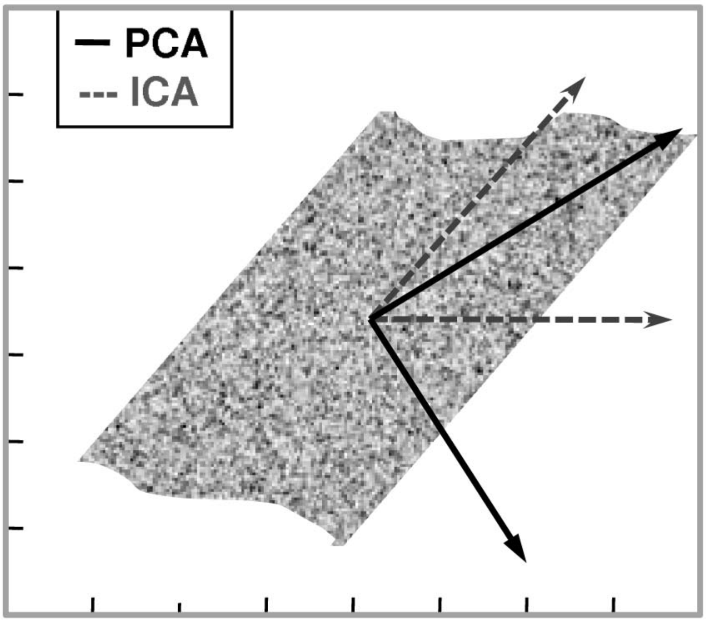
   Η προϋπόθεση αυτή είναι αναγκαία για προφανείς λόγους καθώς αν ο πίνακας δεν έχει όλες τις στήλες του γραμμικά ανεξάρτητες αυτό σημαίνει πως δύο ανεξάρτητες μεταβλητές ταυτίζονται.

Η χωρική ICA θα περιγραφεί αναλυτικά στην παράγραφο 2.4.

2.2 ICA *vs* PCA

Στην ανάλυση μας θα ασχοληθούμε με τις πιο διαδεδομένες γραμμικές μεθόδους, την PCA και την ICA. Μέχρι στιγμής στις περισσότερες μελέτες γίνεται επεξεργασία των δεδομένων μονό με τον αλγόριθμο ICA ή μονό με τον PCA. Σε αυτή την εργασία θα συνδυάσουμε τις δυο μεθόδους. Στο συνδυασμό αυτό η PCA θα χρησιμοποιηθεί για να επεξεργαστεί τα δεδομένα πριν από τον ICA αλγόριθμο, μειώνοντας έτσι τον όγκο των δεδομένων και κάνοντας παράλληλα και απαλοιφή μεγάλου μέρους των συνιστωσών θορύβου.

Οι δύο μέθοδοι είναι γραμμικοί συνδυασμοί οι οποίοι υπολογίζουν ένα νέο σύνολο διανυσμάτων βάσης για τα στοιχεία. Η μέθοδος ICA είναι ουσιαστικά μια γενίκευση της PCA και είναι μια ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδος για ανάλυση σε ανεξάρτητες μεταβλητές. Η PCA παράγει μια ορθογώνια βάση με τη βοήθεια της οποίας μετασχηματίζει τα δεδομένα. Η ICA μετασχηματίζει τα δεδομένα με τη βοήθεια ανεξάρτητων μεταβλητών[14].



Εικόνα 2.1: *Σύγκριση μεταξύ ICA και PCA. Στην εικόνα φαίνεται η ορθογώνια βάση που έχει υπολογιστεί από την PCA και η μη ορθογώνια από την ICA. Είναι ξεκάθαρο ότι η ICA εκφράζει με μεγαλύτερη ακρίβεια τα δεδομένα.*

Από τον ορισμό η PCA προβάλει τα δεδομένα σε ένα ορθογώνιος πλαίσιο, σε άξονες αναφοράς που ορίζονται από δευτεροβάθμιους συντελεστές. Αυτοί προκύπτουν από τη μεγιστοποίηση της διακύμανσης των προβαλλόμενων στοιχείων κατά μήκος των ορθογώνιων κατευθύνσεων. Ο στόχος της μεθόδους είναι να συμπεριλάβει όσο το δυνατόν περισσότερη πληροφορία της πηγής σε κάθε συνιστώσα.

Είναι μια καλή μέθοδος επομένως για τη μείωση του όγκου των δεδομένων, με ταυτόχρονη μείωση των διαστάσεων. Θα πρέπει όμως να τονίσουμε ότι είναι μια *lossy διαδικασία* και σε περιπτώσεις όπου είναι απαραίτητη η ακρίβεια στην ανάλυση των δεδομένων η εφαρμογή της θα πρέπει να περιορίζεται αρκετά.

Η ICA είναι ιδανική σε εφαρμογές όπως ο διαχωρισμός σημάτων ήχου, στις τηλεπικοινωνίες ή στην επεξεργασία των ιατρικών σημάτων. Η πιο σημαντική διάφορα μεταξύ των δυο αλγορίθμων είναι ότι οι άξονες στην ICA δεν είναι απαραιτήτως ορθογώνιοι. Επίσης η κατεύθυνση των αξόνων δεν υπολογίζεται μονό από συντελεστές δευτέρου βαθμού αλλά και μεγαλυτέρων.

Γι' αυτό τα δεδομένα εκφράζονται πιο σωστά και με μεγαλύτερη ακρίβεια στους μη ορθογώνιους άξονες, όπως φαίνεται και στην εικόνα 2.1. Ο υπολογισμός των συνιστωσών γίνεται με μεγιστοποίηση της εντροπίας των δεδομένων. Επομένως η ICA βρίσκει τα διανύσματα επάνω στα οποία οι προβολές είναι ανεξάρτητες. Επίσης έχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε τον αριθμό των ανεξάρτητων πηγών.

Ουσιαστικά, η PCA και η ICA έχουν διαφορετική και συμπληρωματική λογική. Ο στόχος της PCA είναι να συμπεριλάβει όσο περισσότερη πληροφορία γίνεται σχετικά με τη διακύμανση της πηγής σε κάθε διαδοχική συνιστώσα, ενώ ο στόχος της ICA είναι να χωριστούν οι ανεξάρτητες πηγές πληροφορίας όσο το δυνατόν πιο ξεκάθαρα.

2.3 Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA)

Η PCA είναι μια μέθοδος ευρέως χρησιμοποιούμενη λόγω της απλότητας και της ικανότητας της να εξάγει πληροφορία από ομάδες δεδομένων με μη παραμετρικό τρόπο. Χρησιμοποιείται για την ανάλυση στατιστικών στοιχείων και την εξαγωγή χαρακτηριστικών γνωρισμάτων λαμβάνοντας υπόψη ένα σύνολο πολλών μεταβλητών. Ο σκοπός της μεθόδου αυτής είναι να υπολογιστεί η πιο ουσιαστική βάση, πάνω στην οποία θα εκφραστούν τα δεδομένα. Η νέα αυτή βάση θα έχει ένα μικρότερο σύνολο μεταβλητών με το λιγότερο δυνατό πλεονασμό.

Ο πλεονασμός μετριέται με βάση το συσχετισμό μεταξύ των στοιχείων. Στόχος αυτής της διαδικασίας είναι στη νέα βάση να έχει φιλτραριστεί ο θόρυβος και να είναι πιο ξεκάθαρη η δομή των δεδομένων μας. Διευκολύνει επίσης στη μείωση των διαστάσεων των δεδομένων έτσι ώστε να έχουμε μικρότερο όγκο πληροφοριών.

2.3.1 Περιγραφή της μεθόδου

Η PCA είναι μια μέθοδος δευτέρου βαθμού. Οι μέθοδοι δευτέρου βαθμού χρησιμοποιούν μονό την πληροφορία που περιέχεται στον πινάκα συνδιακύμανσης των αρχικών δεδομένων x, που αποτελείται από όλα τα διανύσματα των δεδομένων, με ένα διάνυσμα ανά στήλη. Η μεταβλητή x περιγράφεται πλήρως από τους συντελεστές της αν έχει κανονική κατανομή.

Η PCA είναι ένας ορθογώνιος γραμμικός μετασχηματισμός που μετασχηματίζει τα στοιχεία σε ένα νέο ισότιμο σύστημα έτσι ώστε η μέγιστη διαφορά από οποιαδήποτε προβολή των στοιχείων να βρίσκεται στην πρώτη συντεταγμένη (αποκαλούμενη πρώτο κύριο συστατικό), η δεύτερη μέγιστη διαφορά στη δεύτερη συντεταγμένη, κ.ό.κ.

Κατά τη διάρκεια του μετασχηματισμού αυτού υπολογίζονται οι μεταβλητές, έστω $s = s_1, \ldots, s_n$,οι οποίες αντιπροσωπεύουν το μέγιστο ποσό διακύμανσης από n μεταβλητές. Ορίζουμε $w = \{w_1, ..., w_n\}$ τις διευθύνσεις των μεταβλητών , δηλαδή την προβολή στην διεύθυνση της οποίας μεγιστοποιείται η προβολή. Τότε η μέθοδος ορίζεται με επαναληπτικό τρόπο και έτσι έχουμε την πρώτη μεταβλητή να είναι η προβολή στη διεύθυνση της οποίας μεγιστοποιείται η διακύμανση της προβολής, δηλαδή το κύριο συστατικό w_1 του συνόλου στοιχείων x ,υποθέτοντας ότι έχουμε μηδέν εμπειρικό μέσο όρο (ο εμπειρικός μέσος όρος της διανομής έχει αφαιρεθεί από το σύνολο στοιχείων)[6].

$$\mathbf{w}_1 = \arg\max_{\|\mathbf{w}\|=1} \operatorname{var}\{\mathbf{w}^T\mathbf{x}\} = \arg\max_{\|\mathbf{w}\|=1} E\{(\mathbf{w}^T\mathbf{x})^2\}$$

Για $k-1$ μεταβλητές, δηλαδή principal components έχουμε:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}$$

Ο μετασχηματισμός από τον οποίο προκύπτουν οι κύριες μεταβλητές είναι:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}$$

2.3.2 Αλλαγή Βάσης

Η PCA υπολογίζει τις πιο χρήσιμες βάσεις για να επαναπροσδιορίσει ένα θορυβώδες, πολλαπλών τιμών σύνολο δεδομένων, με την ελπίδα ότι αυτή η νέα βάση θα φιλτράρει το θόρυβο και θα αποκαλύψει κρυμμένα δυναμικά.

Ένας πιο ακριβής ορισμός του στόχου μας είναι να πάρουμε πιο ακριβή δεδομένα επίσης. Για κάθε χρονικό δείγμα, καταγράφονται δεδομένα που αποτελούνται από πολλαπλές τιμές (τάση, θέση κ.ά.). Ο αριθμός τύπων των μετρήσεων είναι η διάσταση του σετ δεδομένων. Γενικά, κάθε δείγμα δεδομένων είναι ένα διάνυσμα σε χώρο m-διαστάσεων, όπου m είναι ο αριθμός των τύπων μετρήσεων. Αντίστοιχα, κάθε χρονικό δείγμα είναι ένα διάνυσμα που βρίσκεται σε ένα m-διαστάσεων διανυσματικό χώρο βαθμονομημένο σε ορθοκανονική βάση. Όλα αυτά τα διανύσματα μετρήσεων σε αυτό το χώρο είναι γραμμικός συνδυασμός αυτού του σετ από μοναδιαίου μήκους διανύσματα βάσης.

Μία απλή επιλογή μιας βάσης **B** είναι ο μοναδιαίος πίνακας **I**:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

όπου κάθε γραμμή είναι ένα διάνυσμα βάσης b_i με m συνιστώσες.

Η παραπάνω επιλογή βάσης δεν μας βοηθάει και πολύ. Η PCA κάνει μια απλή αλλά πολύ δυνατή θεώρηση: τη *γραμμικότητα*. Η γραμμικότητα απλοποιεί το πρόβλημα περιορίζοντας τις ενδεχόμενες βάσεις και υλοποιεί την υπονοούμενη θεώρηση της συνέχειας στο σετ δεδομένων. Με αυτή τη θεώρηση πλέον η PCA περιορίζεται στο να εκφράσει τα δεδομένα ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης της.

Έστω **X** και **Y** είναι πίνακες διαστάσεων $m \times n$ σχετιζόμενοι με τον γραμμικό μετασχηματισμό **P**. Ο πίνακας **X** είναι το αρχικά καταγεγραμμένο σετ δεδομένων και ο **Y** μια επαναπροσδιορισμένη αναπαράσταση των αρχικών δεδομένων.

$$\mathbf{PX} = \mathbf{Y} \tag{2.1}$$

Ορίζουμε επίσης ότι:

- p_i είναι οι γραμμές του **P**
- x_i οι στήλες του **X**
- y_i οι στήλες του **Y**

Η εξίσωση (2.1) αναπαριστά μια αλλαγή της βάσης και για αυτό μπορεί να έχει πολλές εξηγήσεις:

1. Ο **P** είναι ένας πίνακας που μετατρέπει το **X** σε **Y**
2. Γεωμετρικά, ο **P** ειναι μια περιστροφή και έκταση που πάλι μετατρέπει το **X** σε **Y**

3. Οι γραμμές του πίνακα **P**, $\{p_1, \cdots, p_m\}$, είναι ένα σετ νέων διανυσμάτων βάσης για την έκφραση των στηλών του πίνακα **X**.

Η τελευταία περίπτωση δεν είναι προφανής μπορεί να εξηγηθεί γράφοντας τα ακριβή αποτελέσματα του **PX**:

$$\mathbf{PX} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} p_1 \cdot x_1 & \cdots & p_1 \cdot x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m \cdot x_1 & \cdots & p_m \cdot x_n \end{bmatrix}$$

Η μορφή κάθε στήλης του **Y** είναι:

$$y_i = \begin{bmatrix} p_1 \cdot x_i \\ \vdots \\ p_m \cdot x_i \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι κάθε συντελεστής του y_i παράγεται από το x_i και την αντίστοιχη γραμμή του **P**. Με άλλα λόγια ο j^{th} συντελεστής του y_i είναι μια προβολή στην j^{th} γραμμή του **P**. Έτσι, οι γραμμές του **P** είναι όντως ένα νέο σετ διανυσμάτων βάσης για αναπαράσταση των στηλών του **X**.

Θεωρώντας γραμμικότητα το πρόβλημα ελαττώνεται στο να να βρεθεί η κατάλληλη αλλαγή βάσης. Τα διανύσματα γραμμές $\{p_1, \cdots, p_m\}$ σε αυτή τη μετατροπή, θα είναι τώρα οι κύριες συνιστώσες του **X**.

2.3.3 Επίλυση της PCA

Θεωρούμε ότι το σετ δεδομένων μας είναι **X**, ένας $m \times n$ πίνακας, όπου m είναι ο αριθμός των τύπων μέτρησης και n ο αριθμός των δεδομένων δοκιμών (data trials). Στόχος είναι να βρούμε κάποιον ορθοκανονικό πίνακα **P** όπου $\mathbf{Y} = \mathbf{PX}$ τέτοιο ώστε ο πίνακας συνδιακύμανσης του **Y** να είναι διαγωνιοποιημένος. Οι γραμμές του **P** είναι οι κύριες συνιστώσες του **X**.

Ξεκινάμε γράφοντας τον πίνακα συνδιακύμανσης του **Y** με όρους τη μεταβλητή της επιλογή μας **P**:

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_Y &= \frac{1}{n-1}\mathbf{YY}^T \\ &= \frac{1}{n-1}(\mathbf{PX})(\mathbf{PX})^T \\ &= \frac{1}{n-1}\mathbf{PXX}^T\mathbf{P}^T \\ &= \frac{1}{n-1}\mathbf{P}(\mathbf{XX}^T)\mathbf{P}^T \\ \mathrm{S}_Y &= \frac{1}{n-1}\mathbf{PAP}^T \end{aligned}$$

Όπως φαίνεται ορίσαμε ένα νέο πίνακα $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$, όπου $\mathbf{A}$ είναι συμμετρικός.

Για ένα συμμετρικό πίνακα ισχύει ότι:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T$$

όπου $\mathbf{D}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας και $\mathbf{E}$ είναι ένας πίνακας με ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ ταξινομημένοι σε στήλες. Ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει $(r \cdot m)$ ορθοκανονικές ιδιοτιμές όπου r είναι η τάξη του πίνακα. Η τάξη του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι μικρότερη από το m όταν ο $\mathbf{A}$ είναι εκφυλισμένος. Διατηρώντας τον περιορισμό της ορθοκανονικότητας μπορούμε να θεραπεύσουμε αυτή την κατάσταση επιλέγοντας $(m - r)$ ορθοκανονικά διανύσματα για να συμπληρώσουμε τον πίνακα $\mathbf{E}$. Αυτά τα πρόσθετα διανύσματα δεν επηρεάζουν την τελική λύση επειδή οι διακυμάνσεις που σχετίζονται με αυτή την διεύθυνση είναι μηδέν.

Επιλέγουμε πίνακα $\mathbf{P}$ τέτοιο, ώστε κάθε γραμμή του p_i να είναι μια ιδιοτιμή του $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$. Κάνοντας αυτή την επιλογή έχουμε ότι $\mathbf{P} = \mathbf{E}^T$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{P}$. Με αυτή την εξίσωση και το γεγονός ότι $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ τελειώνουμε τον υπολογισμό του S_Y.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_Y &= \frac{1}{n-1}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^T \\
&= \frac{1}{n-1}\mathbf{P}(\mathbf{D}\mathbf{P})\mathbf{P}^T \\
&= \frac{1}{n-1}(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)\mathbf{D}(\mathbf{P}\mathbf{P}^T) \\
&= \frac{1}{n-1}(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{D}(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}) \\
\mathrm{S}_Y &= \frac{1}{n-1}\mathbf{D}
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι οι κύριες συνιστώσες του $\mathbf{X}$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$. Πρακτικά, εφαρμόζοντας την PCA σε ένα σετ δεδομένων $\mathbf{X}$ συνεπάγεται την αφαίρεση του μέσου κάθε τύπου μέτρησης και τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$.

2.4 Χωρική Ανάλυση Ανεξάρτητων Συνιστωσών

Η μέθοδος ICA είναι πρόσφατα αναπτυγμένη με στόχο την εύρεση μιας γραμμικής απεικόνισης των μη-κανονικών (non-Gaussian) δεδομένων, έτσι ώστε οι συνιστώσες να είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Μια τέτοια απεικόνιση φαίνεται να καταλαμβάνει ουσιαστική δομή των δεδομένων σε πολλές εφαρμογές, συμπεριλαμβανομένης της εξαγωγής χαρακτηριστικών γνωρισμάτων και του διαχωρισμού των σημάτων.

Ας θεωρήσουμε ένα παράδειγμα: έστω ότι είμαστε σε ένα δωμάτιο όπου μιλούν δύο άνθρωποι ταυτόχρονα. Έχουμε δύο μικρόφωνα, τα οποία κρατάμε σε διαφορετικές θέσεις. Τα μικρόφωνα δίνουν δύο καταγραφές σημάτων στο χρόνο, τα οποία μπορούν να περιγραφούν από τα $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Κάθε ένα από τα καταγεγραμμένα σήματα είναι ένα σταθμισμένο άθροισμα των λεκτικών σημάτων που εκπέμπονται από τους δύο ομιλητές τα οποία περιγράφονται από τα $s_1(t)$ και $s_2(t)$.

Αυτό μπορεί να εκφραστεί με τις εξής γραμμικές εξισώσεις:

$$x_1(t) = a_{11}s_1 + a_{12}s_2$$

$$x_2(t) = a_{21}s_1 + a_{22}s_2$$

όπου $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ είναι μερικές παράμετροι που εξαρτώνται και από τις αποστάσεις των μικροφώνων των ομιλητών.

Θα ήταν πολύ χρήσιμο αν μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα δύο αρχικά λεκτικά σήματα $s_1(t)$ και $s_2(t)$ χρησιμοποιώντας μόνο τα καταγεγραμμένα σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Αυτό ονομάζεται coctail-party problem.

2.4.1 Ορισμός της ICA

Συγγενικό πρόβλημα του coctail-party είναι ο "Τυφλός" Διαχωρισμός Πηγών (Blind Source Separation - BSS). Σύμφωνα με αυτό m χρονικά σήματα $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$ τα οποία ονομάζονται σήματα-απαγωγές (channels) ή σήματα-μίξης (mixtures), προκύπτουν από m γραμμικούς συνδυασμούς n χρονικών σημάτων $s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t)$, τα οποία ονομάζονται σήματα-πηγές (sources) ή σήματα-συνιστώσες (components):

$$x_i(t) = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{in}s_n$$

όπου $i = 1, 2, \ldots, m$ και $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in} \in \mathbb{R}$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ανεξάρτητες συνιστώσες s_i και οι γραμμικές μίξεις τους x_i έχουν μηδενική μέση τιμή. Ακόμα και αν κάτι τέτοιο δεν ισχύει, οι παρατηρούμενες μεταβλητές x_i μπορούν να κεντρικοποιηθούν αφαιρώντας τη μέση τιμή τους.

Χρησιμοποιώντας πίνακες οι παρατηρούμενες μίξεις x_i μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \tag{2.2}$$

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να αναφερόμαστε στις στήλες του πίνακα $\mathbf{A}$, οπότε το μοντέλο μετατρέπεται στη μορφή:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i s_i \tag{2.3}$$

Η εξίσωση (2.2) ονομάζεται μοντέλο ICA. Το μοντέλο περιγράφει τη διαδικασία με την οποία οι συνιστώσες s_i παράγουν τις παρατηρούμενες μεταβλητές x_i.

Οι ανεξάρτητες συνιστώσες s_i είναι λανθάνουσες μεταβλητές, δηλαδή δεν μπορούν να παρατηρηθούν άμεσα. Ο πίνακας μίξης $\mathbf{A}$ θεωρείται άγνωστος. Τα μόνα δεδομένα είναι οι παρατηρούμενες μεταβλητές x_i, δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{x}$, από το οποίο πρέπει να εκτιμηθούν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{s}$. Αυτό πρέπει να γίνει με όσο το δυνατόν γενικότερες υποθέσεις.

Η αφετηρία για τη μέθοδο ICA είναι η υπόθεση ότι οι συνιστώσες s_i είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Επίσης, είναι αναγκαία η υπόθεση ότι οι ανεξάρτητες συνιστώσες δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή, χωρίς βέβαια να απλουστεύεται το πρόβλημα υποθέτοντας γνωστές τις κατανομές τους. Επιπλέον, για λόγους απλότητας, ο πίνακας $\mathbf{A}$ μπορεί να θεωρηθεί τετραγωνικός.

Αφού υπολογιστεί ο πίνακας $\mathbf{A}$, μπορεί να υπολογιστεί και ο αντίστροφός του, $\mathbf{W}$, ώστε οι ανεξάρτητες συνιστώσες να μπορούν να υπολογιστούν από την εξίσωση:

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

2.4.1.1 Περί Ανεξαρτησίας

Ο μόνος περιορισμός που τίθεται από τη διατύπωση του προβλήματος είναι οι πηγές να είναι, μεταξύ τους, στατιστικά ανεξάρτητες.

Δύο τυχαίες μεταβλητές y_1 και y_2 θεωρούνται ανεξάρτητες αν η πληροφορία για την τιμή της y_1 δεν προσφέρει καμία πληροφορία για την τιμή της y_2 και αντίστροφα.

Η ανεξαρτησία μπορεί να οριστεί με τη χρήση της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ). Η κοινή ΣΠΠ $p(y_1, y_2)$ των y_1 και y_2, συνδέεται με τις οριακές ΣΠΠ $p_1(y_1)$ και $p_2(y_2)$ με τις εξισώσεις:

$$p_1(y_1) = \int p(y_1, y_2) dy_2 \quad \text{και} \quad p_2(y_2) = \int p(y_1, y_2) dy_1$$

Οι y_1 και y_2 είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν:

$$p(y_1, y_2) = p_1(y_1) p_2(y_2)$$

Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται για οποιονδήποτε αριθμό n τυχαίων μεταβλητών, οπότε η κοινή ΣΠΠ είναι γινόμενο n παραγόντων, δηλαδή:

$$p(y_1, \ldots, y_n) = p_1(y_1) \ldots p_n(y_n) = \prod_{i=1}^{n} p_n(y_n)$$

Η υπόθεση της στατιστικής ανεξαρτησίας αποτελεί και κριτήριο επιτυχίας του διαχωρισμού. Συνεπώς, ο διαχωρισμός των σημάτων θεωρείται επιτυχής αν τα διαχωρισμένα σήματα που εκτιμούνται ικανοποιούν το κριτήριο της στατιστικής ανεξαρτησίας, δηλαδή αν και μόνο αν η κοινή ΣΠΠ $p_s(s)$ ισούται με το γινόμενο των ΣΠΠ των ξεχωριστών σημάτων s_i, δηλαδή:

$$p_s(s) = p_{s_1}(s_1)p_{s_2} \dots p_{s_n}(s_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{s_i}(s_i)$$

2.4.1.2 Στατιστική ανεξαρτησία και αποσυσχέτιση

Από τον προαναφερθέντα ορισμό της στατιστικής ανεξαρτησίας προκύπτει μια σημαντική ιδιότητα των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Για δύο συναρτήσεις h_1 και h_2 προκύπτει ότι η συνδιασπορά τους είναι ίση με το γινόμενο των επιμέρους διασπορών τους. Έτσι:

$$E\{h_1(y_1)h_2(y_2)\} = E\{h_1(y_1)\}E\{h_2(y_2)\}$$

Επομένως, οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι και ασυσχέτιστες. Το αντίθετο βέβαια δεν ισχύει, δηλαδή οι ασυσχέτιστες μεταβλητές δεν είναι κατ' ανάγκην και ανεξάρτητες.

Πολλές μέθοδοι ICA εκμεταλλεύονται την ιδιότητα αυτή, καθώς περιορίζοντας την διαδικασία εκτίμησης των ανεξάρτητων συνιστωσών σε ασυσχέτιστες μόνο συνιστώσες, το πρόβλημα απλοποιείται.

2.5 Κανόνες υπολογισμού της ICA

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem) είναι ένα κλασσικό αποτέλεσμα στην θεωρία της πιθανότητας και υποστηρίζει ότι η κατανομή ενός αθροίσματος από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τείνουν προς μια κανονική (Gaussian) κατανομή, υπό ορισμένες συνθήκες. Κατά συνέπεια, ένα άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών έχει συνήθως μια κατανομή που είναι πιο κοντά σε κανονική, από τις δύο αρχικές τυχαίες μεταβλητές.

Υποθέτουμε ότι τα δεδομένα του διανύσματος $\mathbf{x}$ κατανέμονται σύμφωνα με τα δεδομένα του προτύπου ICA, δηλαδή είναι ένα μείγμα ανεξάρτητων συνιστωσών. Για απλότητα, υποθέτουμε ότι σε αυτό το τμήμα όλες οι ανεξάρτητες συνιστώσες έχουν τις ίδιες κατανομές. Για να υπολογίσουμε μία από τις ανεξάρτητες συνιστώσες, εξετάζουμε ένα γραμμικό συνδυασμό των x_i. Αυτό φαίνεται εδώ

$$y = \mathbf{w}^T\mathbf{x} = \sum_i w_i x_i$$

όπου $\mathbf{w}$ είναι ένα καθορισμένο διάνυσμα. Αν το $\mathbf{w}$ ήταν μία από τις γραμμές του αντιστρόφου πίνακα του $\mathbf{A}$, αυτός ο γραμμικός συνδυασμός θα ήταν ίσος με μία από τις ανεξάρτητες συνιστώσες. Στην πράξη, δεν μπορούμε να καθορίσουμε ένα τέτοιο $\mathbf{w}$ ακριβώς, επειδή δεν γνωρίζουμε τον πίνακα $\mathbf{A}$, αλλά μπορούμε να βρούμε έναν υπολογισμό που δίνει μια καλή προσέγγιση.

Για να δούμε πως αυτό οδηγεί στο βασικό κανόνα του υπολογισμού ICA, κάνουμε μια αλλαγή των μεταβλητών, καθορίζοντας το $\mathbf{z} = \mathbf{A}^T\mathbf{w}$. Έπειτα έχουμε το

$$y = \mathbf{w}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{z}^T\mathbf{s}$$

όπου y είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των s_i, με βάρη που δίνονται από τα z_i. Από τη στιγμή που το άθροισμα ακόμα και δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών είναι περισσότερο κανονικό από τις αρχικές μεταβλητές, το $\mathbf{z}^T\mathbf{s}$ είναι περισσότερο κανονικό από οποιαδήποτε s_i, και το πιο ελάχιστα κανονικό όταν αυτό στην πραγματικότητα είναι ίσο με ένα από τα s_i. Σε αυτήν την περίπτωση, προφανώς μόνο ένα από τα στοιχεία z_i του $\mathbf{z}$ είναι μη μηδενικό (σημειώνουμε ότι τα s_i είχαν θεωρηθεί να έχουν τις ίδιες κατανομές).

Επομένως, θα μπορούσαμε να πάρουμε ως $\mathbf{w}$ ένα διάνυσμα που μεγιστοποιεί τη μη κανονικότητα του $\mathbf{w}^T\mathbf{x}$. Ένα τέτοιο διάνυσμα αντιστοιχεί (στο μετασχηματισμένο ισοδύναμο σύστημα) σε ένα $\mathbf{z}$, το όποιο έχει μόνο μία μη μηδενική συνιστώσα. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathbf{w}^T\mathbf{x} = \mathbf{z}^T\mathbf{s}$ ισούται με μία από τις ανεξάρτητες συνιστώσες[15].

2.5.1 Μη Κανονικά μέτρα

Για να χρησιμοποιήσουμε τη μη κανονικότητα στην ICA, πρέπει να έχουμε ένα ποσοτικό μέτρο μη κανονικότητας μιας τυχαίας μεταβλητής y. Για να απλοποιήσουμε τα πράγματα θεωρούμε ότι η y έχει μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ίση με ένα.

2.5.1.1 Κύρτωση

Το κλασσικό μέτρο της μη κανονικότητας είναι η κύρτωση ή αλλιώς τέταρτου βαθμού παράγοντας. Η κύρτωση του y ορίζεται ως:

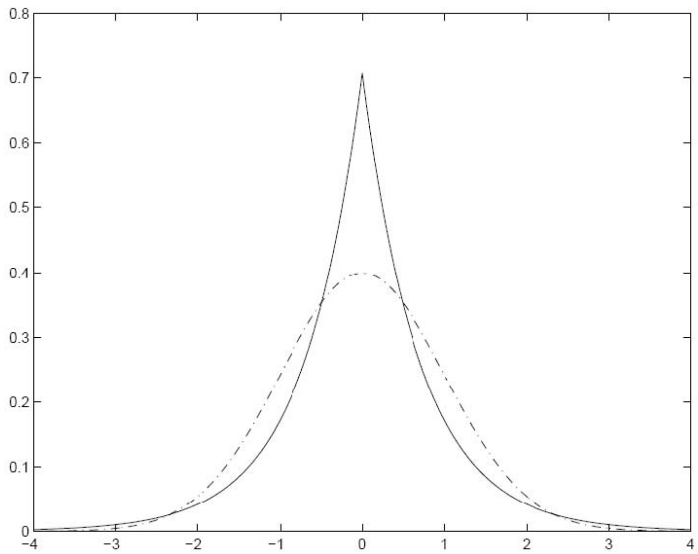
$$kurt(y) = E\{y^4\} - 3(E\{y^2\})^2$$

Στην πράξη, δεδομένου ότι υποθέσαμε ότι το y έχει μοναδιαία διακύμανση, η δεξιά πλευρά απλοποιείται σε $E\{y^4\} - 3$. Αυτό δείχνει ότι η κύρτωση είναι απλά μια κανονικοποιημένη εκδοχή της τέταρτης στιγμής (moment) του $E\{y^4\}$. Για μία κανονική y, η τέταρτη στιγμή ισούται με $3(E\{y^2\})^2$. Κατά συνέπεια, η κύρτωση είναι μηδέν για μια κανονική τυχαία μεταβλητή. Για τις πιο πολλές (αλλά όχι όλες) μη κανονικές τυχαίες μεταβλητές, η κύρτωση είναι μη μηδενική.

Η κύρτωση μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική. Τυχαίες μεταβλητές που έχουν αρνητική κύρτωση ονομάζονται υπο-κανονικές και εκείνες με θετική υπερ-κανονικές. Οι υπερκανονικές τυχαίες μεταβλητές έχουν τυπικά μία αιχμηρή ΣΠΠ με μακριές άκρες, δηλαδή η ΣΠΠ είναι σχετικά μεγάλη στο μηδέν και στις μεγάλες τιμές της μεταβλητής, ενώ στις ενδιάμεσες τιμές είναι μικρή. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κατανομή Laplace, της οποίας η ΣΠΠ δίνεται από:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\sqrt{2}|y|)$$

και παρουσιάζεται στην εικόνα (2.2).



Εικόνα 2.2: *Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Laplace, που είναι μια τυπική υπερ-κανονική κατανομή. Για σύγκριση, δίνεται και η κανονική κατανομή με διακεκομμένη γραμμή. Και οι δύο πυκνότητες είναι κανονικοποιημένες σε μοναδιαία διακύμανση.*

Η απόλυτη τιμή της κύρτωσης χρησιμοποιείται ευρέως ως μη κανονικό μέτρο στην ICA και σε σχετικούς τομείς. Ο κύριος λόγος είναι η απλότητά της, υπολογιστικά και θεωρητικά. Υπολογιστικά, η κύρτωση μπορεί να υπολογιστεί απλά με τη χρησιμοποίηση της τέταρτης δύναμης των δειγμάτων δεδομένων. Η θεωρητική ανάλυση απλοποιείται λόγω της ακόλουθης γραμμικής ιδιότητας:

Αν x_1 και x_2 είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ισχύει ότι:

$$kurt(x_1 + x_2) = kurt(x_1) + kurt(x_2)$$

και

$$kurt(ax_1) = a^4 kurt(x_1)$$

όπου a είναι μεταβλητή.

2.5.1.2 Αρνητική εντροπία (Negentropy)

Ένα δεύτερο πολύ σημαντικό μέτρο της μη κανονικότητας είναι να ληφθεί υπόψιν η negentropy, η οποία βασίζεται στην πληροφορία της θεωρητικής ποσότητας της εντροπίας.

Η *εντροπία* είναι η βασική έννοια στη θεωρία της πληροφορίας. Η εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής μπορεί να ερμηνευτεί ως ο βαθμός των πληροφοριών που δίνει η παρατήρηση της μεταβλητής. Όσο περισσότερο "τυχαία" είναι η μεταβλητή (δηλαδή απρόβλεπτη και μη δομημένη) τόσο μεγαλύτερη είναι η εντροπία της.

Η εντροπία H, για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή Y, ορίζεται ως:

$$H(Y) = -\sum_i P(Y = a_i) \log P(Y = a_i)$$

όπου a_i είναι οι πιθανές τιμές της Y. Αυτός ο πολύ γνωστός ορισμός μπορεί να γενικευτεί για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και διανύσματα, οπότε σ' αυτή την περίπτωση ονομάζεται *διαφορική εντροπία.*

Η διαφορική εντροπία H ενός τυχαίου διανύσματος (y) με πυκνότητα $f(\mathbf{y})$ ορίζεται ως:

$$H(\mathbf{y}) = -\int f(\mathbf{y}) \log f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της θεωρίας της πληροφορίας είναι ότι η κανονική μεταβλητή έχει τη μεγαλύτερη εντροπία μεταξύ όλων των τυχαίων μεταβλητών ίσης διαφοράς. Αυτό σημαίνει ότι η εντροπία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο μη κανονικότητας. Στην πραγματικότητα, αυτό δείχνει ότι η κανονική κατανομή είναι η πιο τυχαία ή η πιο ελάχιστα δομημένη από τις κατανομές. Η εντροπία είναι μικρή για κατανομές που συγκεντρώνονται ορισμένες τιμές σίγουρα, δηλαδή όταν η μεταβλητή είναι σαφώς συγκεντρωμένη ή έχει μία ΣΠΠ που είναι πολύ αιχμηρή.

Για να χρησιμοποιηθεί ένα μέτρο μη κανονικότητας που είναι μηδέν για μία κανονική μεταβλητή και πάντα μη αρνητική, συχνά χρησιμοποιείται μια ελαφρώς τροποποιημένη εκδοχή του ορισμού της διαφορικής εντροπίας, αποκαλούμενη ως negentropy. Η negentropy J ορίζεται ως:

$$J(\mathbf{y}) = H(\mathbf{y}_{gauss}) - H(\mathbf{y})$$

όπου $\mathbf{y}_{gauss}$ είναι μια τυχαία κανονική μεταβλητή του ίδιου πίνακα συνδιακύμανσης $\mathbf{y}$. Λόγω των προαναφερθέντων ιδιοτήτων η negentropy είναι πάντα μη αρνητική και είναι μηδέν, αν και μόνο αν, ο $\mathbf{y}$ έχει κανονική κατανομή.

Το πλεονέκτημα της χρησιμοποίησης της negentropy ως μέτρο μη κανονικότητας, είναι ότι δικαιολογείται ικανοποιητικά από τη στατιστική θεωρία. Στην πραγματικότητα η negentropy είναι υπό κάποια έννοια ο βέλτιστος εκτιμητής της μη κανονικότητας, εφόσον λάβουμε υπόψιν τις στατιστικές ιδιότητες. Το πρόβλημα στη χρησιμοποίηση της negentropy είναι η μεγάλη δυσκολία υπολογισμού της.

2.5.2 Ελαχιστοποίηση της Αμοιβαίας Πληροφορίας

Μία άλλη προσέγγιση για την εκτίμηση της ICA, είναι η ελαχιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας. Ξεκινώντας από άλλη αφετηρία, η προσέγγιση αυτή που βασίζεται στη θεωρία της πληροφορίας, οδηγεί στην ίδια αρχή της εύρεσης μη κανονικών (μη γκαουσιανών) κατευθύνσεων και εξηγεί τη σκοπιμότητα των ευριστικών μεθόδων που αναπτύχθηκαν παραπάνω.

2.5.2.1 Αμοιβαία Πληροφορία

Χρησιμοποιώντας την έννοια της διαφορικής εντροπίας, η αμοιβαία πληροφορία I μεταξύ m τυχαίων μεταβλητών y_i, $i = 1, \ldots, m$ ορίζεται ως εξής:

$$I(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} H(y_i) - H(\mathbf{y})$$

Η αμοιβαία πληροφορία είναι ένα φυσικό μέτρο της εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών. Είναι πάντα μη αρνητική και μηδενική, αν και μόνο αν, οι μεταβλητές είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Επομένως, η αμοιβαία πληροφορία λαμβάνει υπόψιν όλη τη δομή εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών, και όχι μόνο τη συνδιασπορά τους.

Η αμοιβαία πληροφορία μπορεί να ερμηνευτεί χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εντροπίας ως μήκος κωδικοποίησης. Οι όροι $H(y_i)$ δίνουν τα μήκη κωδικοποίησης των y_i όταν κωδικοποιηθούν ξεχωριστά, και ο όρος $H(\mathbf{y})$ το μήκος κωδικοποίησης όταν το $\mathbf{y}$ κωδικοποιηθεί ως διάνυσμα, δηλαδή όταν όλες οι συνιστώσες κωδικοποιηθούν στον ίδιο κώδικα. Επομένως η αμοιβαία πληροφορία δείχνει τη μείωση στο μήκος κωδικοποίησης που επέρχεται όταν κωδικοποιείται όλο το διάνυσμα αντί για τις ξεχωριστές συνιστώσες.

Γενικά, έχουμε μικρότερο μήκος κωδικοποίησης όταν κωδικοποιείται όλο το διάνυσμα. Όταν όμως οι συνιστώσες του y_i είναι στατιστικά ανεξάρτητες, δηλαδή καμία δεν παρέχει πληροφορία για οποιαδήποτε άλλη, τότε το κέρδος στην κωδικοποίηση είναι μηδενικό.

Μια σημαντική ιδιότητα της αμοιβαίας πληροφορίας είναι ότι για έναν αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό $\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ ισχύει ότι:

$$I(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_i H(y_i) - H(\mathbf{x}) - \log|\det \mathbf{W}| \tag{2.4}$$

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν θεωρήσουμε τις y_i ασυσχέτιστες και με μοναδιαία διασπορά. Αυτό σημαίνει ότι

$$E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} = \mathbf{W}E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}\mathbf{W}^T = \mathbf{I}$$

Με βάση την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\det \mathbf{I} = 1 = (\det \mathbf{W}E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}\mathbf{W}^T) = (\det \mathbf{W})(\det E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\})(\det \mathbf{W}^T)$$

δηλαδή η $(\det \mathbf{W})$ είναι σταθερή. Επιπλέον, για y_i μοναδιαίας διασποράς, η εντροπία και η negentropy διαφέρουν μόνο κατά μία σταθερά και στο πρόσημο. Άρα προκύπτει ότι

$$I(y_1, y_2, \ldots, y_n) = C - \sum_i J(y_i) \tag{2.5}$$

όπου C μια σταθερά που δεν εξαρτάται από τον $\mathbf{W}$. Αυτό δείχνει τη θεμελιώδη σχέση μεταξύ negentropy και αμοιβαίας πληροφορίας.

2.5.2.2 Ορισμός της ICA μέσω της Αμοιβαίας Πληροφορίας

Είναι εμφανές ότι η Αμοιβαία Πληροφορία μπορει να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο για την εύρεση του μετασχηματισμού ICA. Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο μετασχηματισμό των παρατηρούμενων μίξεων $\mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{x}$, όπου πρέπει να προσδιοριστεί ο πίνακας $\mathbf{W}$ ώστε να ελαχιστοποιηθεί η αμοιβαία πληροφορία των μετασχηματισμένων συνιστωσών s_i.

Από τη εξίσωση (2.5) είναι προφανές ότι η εύρεση ενός αντιστρέψιμου πίνακα $\mathbf{W}$ που θα ελαχιστοποιεί την αμοιβαία πληροφορία είναι ισοδύναμη με την εύρεση κατευθύνσεων που μεγιστοποιούν τη negentropy, ή αυστηρότερα η εκτίμηση ICA μέσω ελαχιστοποίησης της αμοιβαίας πληροφορίας είναι ισοδύναμη με τη μεγιστοποίηση του αθροίσματος των μη κανονικοτήτων των εκτιμήσεων, όταν οι εκτιμήσεις έχουν περιοριστεί ώστε να είναι ασυσχέτιστες. Αν και ο περιορισμός αυτός δεν είναι αναγκαίος, υπεραπλουστεύει τους υπολογισμούς.

Άρα η προσέγγιση της ICA ως ελαχιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας δικαιολογεί την ευριστική μέθοδο της εύρεσης κατευθύνσεων που μεγιστοποιούν τη μη κανονικότητα.

2.5.2.3 Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Μια πολύ δημοφιλής προσέγγιση για την εκτίμηση του μοντέλου ICA είναι η εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας, η οποία είναι ισοδύναμη της ελαχιστοποίησης της αμοιβαίας πληροφορίας.

Ορίζοντας τον πίνακα $\mathbf{A}^{-1}$ ως $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)^T$ η λογαριθμική πιθανοφάνεια έχει τη μορφή

$$L = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} \log f_i(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(t)) + T \log|\det \mathbf{W}|$$

όπου οι f_i είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας των s_i, οι οποίες εδώ θεωρούνται γνωστές και $\mathbf{x}(t)$ όπου $t = 1, \ldots, T$ είναι τα δείγματα του $\mathbf{x}$.

2.5.2.4 Η αρχή Infomax

Έστω ένα νευρωνικό δίκτυο με διάνυσμα εισόδου $\mathbf{x}$ και εξόδους της μορφής $\varphi_i(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x})$, όπου οι φ_i είναι μη γραμμικές βαθμωτές συναρτήσεις και $\mathbf{w}_i$ τα διανύσματα βάρους των νευρώνων. Ζητείται η μεγιστοποίηση της εντροπίας των εξόδων (infomax):

$$L_2 = H\left(\varphi_i(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{w}_n^T \mathbf{x})\right)$$

Εάν οι φ_i επιλεχθούν σωστά, αυτό το πλαίσιο επιτρέπει και την εκτίμηση του μοντέλου ICA. Το αναπάντεχο αποτέλεσμα είναι ότι η αρχή της μεγιστοποίησης της εντροπίας του δικτύου (infomax) είναι ισοδύναμη με την εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας. Αυτή η ισοδυναμία απαιτεί, για μη γραμμικές φ_i που χρησιμοποιούνται στο νευρωνικό δίκτυο, να επιλεγούν οι αθροιστικές ΣΠΠ που αντιστοιχούν στις f_i.

2.5.2.5 Σύνδεση Μέγιστης Πιθανοφάνειας με Αμοιβαία Πληροφορία

Η σύνδεση μεταξύ πιθανοφάνειας και αμοιβαίας πληροφορίας γίνεται φανερή με την εξέταση της μέσης τιμής της λογαριθμικής πιθανοφάνειας:

$$\frac{1}{T} E\{L\} = \sum_{i=1}^{n} E\left\{\log f_i\left(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}\right)\right\} + \log|\det \mathbf{W}|$$

Εάν οι f_i είναι ίσες με τις κατανομές των $\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}$, τότε ο πρώτος όρος θα είναι ίσος με $-\sum_i H\left(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}\right)$. Έτσι η πιθανοφάνεια θα είναι ίση, με τη διαφορά μιας σταθεράς, με την αρνητική τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας όπως αυτή ορίζεται στην εξίσωση (2.4).

Στην πραγματικότητα η σύνδεση είναι ακόμα μεγαλύτερη. Αυτό γιατί στην πράξη δεν είναι γνωστές οι κατανομές των ανεξάρτητων συνιστωσών. Μια λογική προσέγγιση θα ήταν η εκτίμηση της πυκνότητας των $\mathbf{w}_i^T\mathbf{x}$ σαν μέρος της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας, και η χρήση αυτής της εκτίμησης για την προσέγγιση της πυκνότητας των s_i. Σε αυτή την περίπτωση πιθανοφάνεια και αμοιβαία πληροφορία είναι πρακτικά ισοδύναμες.

Υπάρχει μια μικρή λεπτομέρεια που μπορεί να αποδειχθεί πολύ σημαντική στην πράξη. Το πρόβλημα με την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας είναι ότι πρέπει να γίνει σωστή εκτίμηση για τη φύση των f_i. Δεν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια, αλλά μάλλον είναι αρκετό να εκτιμηθεί σωστά αν είναι υπερ-κανονικές (υπερ-γκαουσιανές) ή υπο-κανονικές. Αν όμως δεν γίνει σωστά η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας θα οδηγήσει σε τελείως λανθασμένα αποτελέσματα. Αντίθετα, με τη χρήση λογικών μέτρων μη κανονικότητας δεν εμφανίζονται τέτοια προβλήματα.

2.6 Προ-επεξεργασία της ICA

Πριν εφαρμοστεί ένας αλγόριθμος ICA στα δεδομένα, είναι συνήθως πολύ χρήσιμο να γίνει κάποια προ-επεξεργασία. Σε αυτό το τμήμα περιγράφουμε μερικές τεχνικές προ-επεξεργασίας που κάνουν το πρόβλημα της εκτίμησης της ICA απλούστερο.

2.6.1 Centering

Η πιο βασική και απαραίτητη προ-επεξεργασία είναι η κεντροποίηση (centering) του $\mathbf{x}$, δηλαδή η αφαίρεση του μέσου διανύσματος $\mathbf{m} = E\{\mathbf{x}\}$, ώστε το $\mathbf{x}$ να γίνει μία μεταβλητή μηδενικής μέσης τιμής. Αυτό υπονοεί ότι το $\mathbf{s}$ είναι επίσης μηδενικής μέσης τιμής, όπως μπορεί να φανεί και από την εξίσωση (2.2).

Αυτή η προ-επεξεργασία γίνεται για να απλοποιήσουμε τους αλγόριθμους ICA. Δεν σημαίνει ότι η μέση τιμή δεν θα μπορούσε να υπολογιστεί. Μετά από τον υπολογισμό του πίνακα μίξης $\mathbf{A}$ με κεντροποιημένα στοιχεία, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εκτίμηση με την προσθήκη του μέσου διανύσματος $\mathbf{s}$ στις κεντροποιημένες εκτιμήσεις του $\mathbf{s}$. Το μέσο διάνυσμα του $\mathbf{s}$ δίνεται από το $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{m}$, όπου $\mathbf{m}$ είναι η μέση τιμή που αφαιρέθηκε κατά την προ-επεξεργασία.

2.6.2 Whitening

Μια άλλη χρήσιμη στρατηγική προ-επεξεργασίας στην ICA είναι το whitening των μεταβλητών. Αυτό σημαίνει ότι πριν από την εφαρμογή του αλγορίθμου ICA (και μετά από το centering), μετασχηματίζουμε το παρατηρούμενο διάνυσμα $\mathbf{x}$ γραμμικά, έτσι ώστε να λάβουμε το νέο διάνυσμα $\tilde{\mathbf{x}}$ που είναι white, δηλαδή οι συνιστώσες του είναι ασυσχέτιστες και οι διακυμάνσεις τους ισούνται με μονάδα. Με άλλα λόγια, ο πίνακας συνδιακύμανσης του $\tilde{\mathbf{x}}$ είναι ίσος με τον μοναδιαίο πίνακα:

$$E\{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\} = \mathbf{I}$$

Ο μετασχηματισμός whitening είναι πάντα πιθανός. Μια δημοφιλής μέθοδος για whitening είναι να χρησιμοποιηθεί η ανάλυση ιδιοτιμών (Eigen-value Decomposition - EVD) του πίνακα συνδιακύμανσης $E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) = \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T$, όπου $\mathbf{E}$ είναι ο ορθογώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$ και $\mathbf{D}$ ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του, $\mathbf{D} = diag(d_1, \ldots, d_n)$. Σημειώνεται ότι το $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$ μπορεί να υπολογιστεί από τα διαθέσιμα δείγματα $\mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(T)$. Το whitening μπορεί τώρα να γίνει:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{E}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T\mathbf{x} \tag{2.6}$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{D}^{-1/2}$ υπολογίζεται από μια απλή συνιστώσα συνάρτησης όπως $\mathbf{D}^{-1/2} = diag(d_1^{-1/2}, \ldots, d_n^{-1/2})$. Είναι εύκολο τώρα να ελεγχθεί ότι $E\{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\} = \mathbf{I}$.

Το whitening μετατρέπει τον πίνακα μίξης σε ένα νέο $\tilde{\mathbf{A}}$. Από τις εξισώσεις (2.2) και (2.6) έχουμε ότι:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{E}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{s}$$

Η χρησιμότητα του whitening βρίσκεται στο γεγονός ότι ο νέος πίνακας μίξης $\tilde{\mathbf{A}}$ είναι ορθογώνιος. Αυτό μπορεί να φανεί από την εξής εξίσωση:

$$E\{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\} = \tilde{\mathbf{A}}E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^T\}\tilde{\mathbf{A}}^T = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^T = \mathbf{I}$$

Εδώ βλέπουμε ότι το whitening μειώνει τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να υπολογιστούν. Αντί να χρειάζονται υπολογισμό n^2 παράμετροι, που είναι τα στοιχεία του αρχικού πίνακα $\mathbf{A}$, πρέπει μόνο να υπολογίσουμε το νέο ορθογώνιο πίνακα μίξης $\tilde{\mathbf{A}}$. Ένας ορθογώνιος πίνακας περιέχει $n(n-1)/2$ βαθμούς ελευθερίας. Παραδείγματος χάριν, σε δύο διαστάσεις, ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός καθορίζεται από μια ενιαία γωνιακή παράμετρο. Σε μεγαλύτερες διαστάσεις, ένας ορθογώνιος πίνακας περιέχει μόνο περίπου τις μισές παραμέτρους από έναν αυθαίρετο πίνακα. Κατά συνέπεια κάποιος μπορεί να πει ότι το whitening λύνει το μισό πρόβλημα της ICA. Επειδή το whitening είναι μια πολύ απλή και τυποποιημένη διαδικασία, είναι καλή ιδέα να μειώνεται η πολυπλοκότητα του προβλήματος με αυτό τον τρόπο.

Μπορεί επίσης να είναι χρήσιμο να μειώνουμε τις διαστάσεις των δεδομένων την ίδια στιγμή που κάνουμε whitening. Κατόπιν κοιτάμε τις ιδιοτιμές d_j του $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$ και απορρίπτουμε εκείνες που είναι πολύ μικρές, όπως ακριβώς γίνεται συχνά στη στατιστική τεχνική της ανάλυσης κύριων συνιστωσών (PCA). Αυτό συχνά επιδρά στη μείωση του θορύβου.

Εικόνα 2.3: *Στην αριστερή εικόνα βλέπουμε την κοινή κατανομή των παρατηρηθέντων μίξεων* $\{x_1, x_2\}$ *(Οριζόντιος άξονας:* x_1*, Κατακόρυφος:* x_2*). Στην μεσαία φαίνονται οι whitened συνιστώσες* z_1, z_2*. Στην δεξιά φαίνεται η κοινή κατανομή των ανεξάρτητων συνιστωσών* $\{s_1, s_2\}$ *με ομοιόμορφες κατανομές (Οριζόντιος άξονας:* s_1*, Κατακόρυφος:* s_2*)*

Μια γραφική απεικόνιση της επίδρασης του whitening φαίνεται στην εικόνα 2.3. Φαίνεται ότι το τετράγωνο που μας δείχνει την κατανομή είναι τώρα μια περιστραμμένη έκδοση του αρχικού τετραγώνου.

2.7 Απροσδιοριστίες της ICA

Σαν ειδική περίπτωση του Τυφλού Διαχωρισμού Σημάτων, η ICA κληρονομεί τις απροσδιοριστίες του, οι οποίες εκφράζονται ως εξής:

1. ***Δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί η διασπορά των ανεξάρτητων συνιστωσών.***

   Από την εξίσωση (2.3) είναι εμφανές ότι οποιοσδήποτε πολλαπλασιασμός με μια από τις συνιστώσες s_i μπορεί να ακυρωθεί με αντίστοιχη διαίρεση της αντίστοιχης στήλης $\mathbf{a}_i$. Κατά συνέπεια, είναι δυνατόν το πλάτος των ανεξάρτητων συνιστωσών να θεωρηθεί φραγμένο. Από τη στιγμή που τις θεωρούμε τυχαίες μεταβλητές, η πιο απλή προσέγγιση είναι να υποθέσουμε ότι κάθε συνιστώσα έχει μοναδιαία διασπορά: $E\{s_i^2\} = 1$. Στη συνέχεια ο πίνακας $\mathbf{A}$ προσαρμόζεται ώστε να λαμβάνεται υπόψη ο παραπάνω περιορισμός. Εν τούτοις, παραμένει η απροσδιοριστία όσον αφορά το πρόσημο των διαχωρισμένων σημάτων, χωρίς όμως αυτό να είναι μεγάλης σημασίας στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές.

2. ***Δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η διατεταγμένη σειρά των ανεξάρτητων συνιστωσών.***

   Από την εξίσωση (2.3) είναι πάλι εμφανές ότι μπορούμε ελεύθερα να μεταβάλλουμε τη σειρά των όρων στο άθροισμα και να αποκαλέσουμε οποιαδήποτε από τις ανεξάρτητες συνιστώσες ως πρώτη. Το μοντέλο ICA μπορεί να μετασχηματιστεί με τη χρήση ενός πίνακα $\mathbf{P}$, ώστε $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{s}$. Τα στοιχεία του γινομένου $\mathbf{P}\mathbf{s}$ είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές s_i με διαφορετική όμως σειρά. Ο πίνακας $\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$ είναι ένας νέος άγνωστος πίνακας μίξης που θα επιλύσει η μέθοδος ICA.

Κεφάλαιο 3

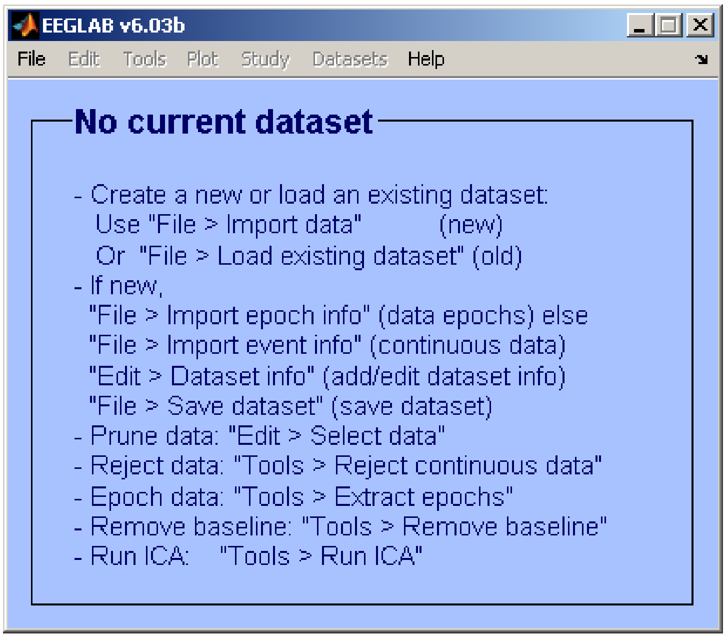
Αλγόριθμος και Υλοποίηση

3.1 Εισαγωγή στο EEGLab

Το EEGLab [16] που ξεκίνησε χάρη στην προσπάθεια των A.Delorme και Makeig [17] αποτελεί μια εργαλειοθήκη (toolbox) του MatLab (The Mathworks, Inc), η οποία συνοδευόμενη από ένα, φιλικό στο χρήστη, γραφικό περιβάλλον χρησιμοποιείται για επεξεργασία συνεχούς ή βιωματικού Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος (continuous - Event-related EEG), οσωνδήποτε καναλιών. Οι συναρτήσεις του EEGLab υποστηρίζουν λειτουργίες όπως η εισαγωγή δεδομένων ΗΕΓ, η εισαγωγή θέσεων των ηλεκτροδιων (channel locations) και πληροφορίας γεγονότων (event information), η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων μέσω διαγραμμάτων XY, τοπογραφικών χαρτών του κρανίου ή απεικονίσεων διπολικών μοντέλων, η προ-επεξεργασία των δεδομένων ΗΕΓ, δηλαδή το φιλτράρισμα, η διαίρεση σε διαδοχικά τμήματα (epochs) και η εξαγωγή της μέσης τιμής, η ανάλυση ICA, η ανάλυση στο πεδίο του χρόνου ή της συχνότητας.

Οι συναρτήσεις του EEGLab ταξινομούνται σε τρία επίπεδα. Στο πρώτο επίπεδο κατατάσσονται αυτές που επιτρέπουν στο χρήστη να αλληλεπιδρά με τα δεδομένα μέσω του γραφικού περιβάλλοντος του EEGLab, χωρίς να είναι αναγκαία η επαφή με τη γραμμή εντολών του MatLab. Το δεύτερο επίπεδο περιέχει συναρτήσεις, οι οποίες δίνουν στο χρήστη τη δυνατότητα να επέμβει στον τρόπο επεξεργασίας των δεδομένων. Το τρίτο επίπεδο αποτελείται από τις συναρτήσεις που οι πεπειραμένοι χρήστες του MatLab μπορούν να γράψουν, χρησιμοποιώντας τις ήδη υπάρχουσες δομές δεδομένων του EEGLab, αλλά και τις συναρτήσεις επεξεργασίας σήματος της MatLab.

Το EEGLab, έχοντας εξασφαλίσει την άδεια GNU για χρήση χωρίς εμπορική εκμετάλλευση και για υλοποίηση ανοιχτού κώδικα (open source development), διανέμεται δωρεάν μέσω του Internet. Συνοδεύεται μάλιστα από δείγματα δεδομένων, ηλεκτρονικό εγχειρίδιο



Εικόνα 3.1: *Αρχικό παράθυρο του EEGLab v6.03b*

κ.ά. Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε η έκδοση v6.03b του EEGLab και η έκδοση R2008b του MatLab.

3.2 Χρήση του EEGLab

Στην πράξη για τη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήθηκε μόνο μια συνάρτηση του EEGLab, η *runica()*, που προσαρμόστηκε κατάλληλα στον υπόλοιπο κώδικα σε MatLab.

Η συνάρτηση *runica()* βασίζεται στον αλγόριθμο Logistic Infomax ICA[18] ο οποίος διαχωρίζει τις πηγές μεγιστοποιώντας τη μεταξύ τους εντροπία και ως συνέπεια ελαχιστοποιώντας την κοινή τους πληροφορία. Σύμφωνα με τους Arnaud Delorme και Scott Makeig, μετά από εκατοντάδες εργαστηριακές δοκιμές, έχει διαπιστωθεί πως ο συγκεκριμένος αλγόριθμος επιστρέφει τις σταθερότερες συνιστώσες. Συνιστώσες, δηλαδή, που διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ δύο διαδοχικών “τρεξιμάτων” του αλγορίθμου.

Επιπλέον μέσω εργαστηριακών αποτελεσμάτων, έχει διαπιστωθεί ότι είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικός, όταν χρησιμοποιείται για την απομόνωση τεχνικών σφαλμάτων [19, 20].

3.3 Μέθοδος των Καθυστερήσεων (Method of Delays - MD)

3.3.1 Κατασκευή και ανάλυση

Η βασική ιδέα της μεθόδου των καθυστερήσεων [21, 22, 23] είναι να κατασκευαστεί ένας πίνακας m-διαστάσεων διανυσμάτων καθυστέρησης από ένα βαθμωτό σετ δεδομένων n-τιμών, $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$, απλώς εξάγοντας συνεχόμενα επικαλυπτόμενα τμήματα μήκους m από το σήμα και χρησιμοποιώντας τα ως διανύσματα στον πίνακα καθυστέρησης [25]:

$$Y_k = \{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m+1}\}$$

Έτσι ο πίνακας καθυστέρησης **Y**, σχηματίζεται βρίσκοντας τα Y_k για συνεχής τιμές του k, και συνδυάζοντάς τα σχηματίζουν:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_{1+\tau} & x_{1+2\tau} & \cdots & x_{1+N\tau} \\ x_{1+\tau} & x_{1+2\tau} & x_{1+3\tau} & \cdots & x_{1+(N+1)\tau} \\ x_{1+2\tau} & x_{1+3\tau} & x_{1+4\tau} & \cdots & x_{1+(N+2)\tau} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1+(m-1)\tau} & x_{1+m\tau} & x_{1+(m+1)\tau} & \cdots & x_{1+(m+N-1)\tau} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

όπου τ είναι ο χρόνος καθυστέρησης, m η διάσταση ενσωμάτωσης και N ο αριθμός των διαδοχικών διανυσμάτων καθυστέρησης [25].

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{N-m}, x_{N-m+1}, \ldots, x_{N-1}, x_N\}$$

Κάθε διάνυσμα αναπαριστά ένα σημείο στην πολλαπλότητα του συστήματος και όλες οι στήλες μαζί ιχνογραφούν την τροχιά σ'αυτή, γενικευμένη από την Ευκλείδεια ενσωμάτωση (Euclidean embedding). Στο [29], έχει δειχθεί ότι η Ευκλείδεια Ενσωμάτωση $\hat{e}$ πρέπει να είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο το D, αλλά πρακτικά πρέπει να είναι τουλάχιστον

$$\hat{e} = 2D + 1$$

Ιδίως όταν εφαρμόζεται σε πραγματικά δεδομένα και εξαιτίας των εξαρτήσεων στα σήματα και στον ενυπάρχοντα θόρυβο, το m χρειάζεται να είναι σημαντικά μεγαλύτερο από το $\hat{e}$. Στην πραγματικότητα, το m χρειάζεται να είναι αρκετά μεγάλο για να συλλάβει την περιεχόμενη πληροφορία, ειδικά όταν τα δεδομένα μας είναι πολύ συσχετισμένα [27].

Έτσι, υπό την προϋπόθεση ότι τα δεδομένα είναι δειγματοληπτημένα χρησιμοποιώντας ένα επαρκή ρυθμό και θέτοντας τον χρόνο καθυστέρησης $\tau = 1$, είναι δυνατό να επιλέξουμε το πρακτικά ελάχιστο μέγεθος του m μόνο λαμβάνοντας υπόψη την ελάχιστη συχνότητα των περιοδικών συνιστωσών που ψάχνουμε [26, 27, 28]:

$$m \geq \frac{f_s}{f_l} \tag{3.2}$$

όπου f_s είναι μια κατάλληλη συχνότητα δειγματοληψίας και f_l η ελάχιστη περιοδική συχνότητα που μας ενδιαφέρει στο μετρούμενο σήμα.

Εφόσον τα δεδομένα που θα επεξεργαστούμε προέρχονται από ηλεκτροεγκεφαλογράφημα, οι συχνότητες που μας ενδιαφέρουν είναι $0.5 - 50Hz$. Επομένως, η συχνότητα δειγματοληψίας που θα χρησιμοποιήσουμε (και για λόγους υπολογιστικού κόστους) θα είναι $f_s = 100Hz$ και εφόσον η ελάχιστη συχνότητα που μας ενδιαφέρει είναι $0.5Hz$, προκύπτει από την εξίσωση (3.2) ότι η κατάλληλη τιμή για το m είναι

$$m = \frac{100}{0.5} = 200$$

Αφού βρήκαμε την βέλτιστη τιμή για το m ο πίνακας (3.1) δημιουργείται χρησιμοποιώντας N διαδοχικά διανύσματα καθυστέρησης. Η τιμή του N βρίσκεται από το μήκος του σήματος προς επεξεργασία N_T ως

$$N = N_T - (m - 1)$$

Τελικά, αφού οι επιλογές των τ, m και N είναι σωστά επιλεγμένες, ο πίνακας $\mathbf{Y}$ είναι πλούσιος σε πληροφορία για τις καταστάσεις του υποκείμενου συστήματος και είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε τα δεδομένα που περιέχονται στον $\mathbf{Y}$ χρησιμοποιώντας μια βολική μέθοδο, όπως η ICA.

3.3.2 Αναδημιουργία Backprojected σήματος

Για να πάρουμε πίσω το backprojected σήμα μας εφαρμόζουμε τη μέθοδο διαγώνιας μέσης τιμής (diagonal averaging method) [26]. Από τον πίνακα που δημιουργείται όταν πολλαπλασιάζουμε τη χρονική βάση με τη συνιστώσα με τη μέθοδο αυτή παίρνουμε το εξαγόμενο σήμα που θέλουμε από το αρχικό σήμα που βάζουμε στον πίνακα καθυστέρησης.

Έστω λοιπόν ότι ο πίνακας $\mathbf{Y}$ είναι η απεικόνιση μιας συνιστώσας στον χώρο ενσωμάτωσης. Αθροίζοντας τις διαγώνιες τιμές και διαιρώντας με το πλήθος τους παίρνουμε το κάθε δείγμα του backprojected σήματος.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_{1+\tau} & x_{1+2\tau} & \cdots & x_{1+N\tau} \\ x_{1+\tau} & x_{1+2\tau} & x_{1+3\tau} & \cdots & x_{1+(N+1)\tau} \\ x_{1+2\tau} & x_{1+3\tau} & x_{1+4\tau} & \cdots & x_{1+(N+2)\tau} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1+(m-1)\tau} & x_{1+m\tau} & x_{1+(m+1)\tau} & \cdots & x_{1+(m+N-1)\tau} \end{bmatrix}$$

Αυτό ακριβώς φαίνεται και στον πίνακα $\mathbf{Y}$. Οι αντίστοιχες εξισώσεις που υλοποιείται είναι:

$$\tilde{\mathbf{X}}_i[j] = \begin{cases} \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j-1} Y_{k,j+1-k} & \text{για} \quad 1 \le j \le m-1 \\ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Y_{k,j+1-k} & \text{για} \quad m \le j \le N+1 \\ \frac{1}{m+N-j}\sum_{k=1}^{m+N-j} Y_{m-k+1,j-m+k} & \text{για} \quad N+2 \le j \le m+N \end{cases}$$

όπου m είναι η διάσταση ενσωμάτωσης, N είναι ο αριθμός των ανυσμάτων καθυστέρησης και j είναι το τρέχον δείγμα για το αναδημιουργημένο σήμα. Το $\tilde{\mathbf{X}}_i[j]$ είναι το αναδημιουργημένο σήμα μας.

3.3.3 Ανάπτυξη μεθόδου

1. Αρχικά παίρνουμε τα δεδομένα που θέλουμε να επεξεργαστούμε. Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας τους είναι μεγαλύτερος από $100Hz$ τα υπο-δειγματοληπτούμε ώστε να γίνουν $100Hz$.

2. Εφαρμόζουμε την Infomax ICA και παίρνουμε τις χωρικές συνιστώσες (spatial components). Όσα κανάλια είχαμε στα αρχικά δεδομένα μας τόσες συνιστώσες θα πάρουμε και μετά.

3. Επιλέγουμε τη συνιστώσα που θέλουμε να επεξεργαστούμε. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε ένα σήμα μόνο κάθε φορά, οπότε αν θέλουμε να επεξεργαστούμε ένα ολόκληρο εγκεφαλογράφημα θα πρέπει να την "τρέξουμε" τόσες φορές όσες και οι συνιστώσες μας. Στην επεξεργασία των συνθετικών δεδομένων η μέθοδος εφαρμόζεται από αυτό το βήμα και μετά (το συνθετικό σήμα έχει συχνότητα δειγματοληψίας $100Hz$).

4. Σύμφωνα με τη μέθοδο (§3.3) μετασχηματίζουμε το σήμα σε πίνακα καθυστέρησης, όπως ο (3.1). Αυτός ο πίνακας θα έχει 200 γραμμές, όσο είναι και ο συντελεστής m.

5. Επιλέγουμε από το διάγραμμα των ιδιοτιμών των κυρίων συνιστωσών (με PCA) του πίνακα πόσες κύριες συνιστώσες, συνεπώς και ανεξάρτητες, θέλουμε να εξάγουμε από

το σήμα μας, επιλέγοντας τέτοιο αριθμό ώστε η πολυτιμότερη μόνο πληροφορία να εξαχθεί, και όχι θόρυβος. Συνήθως επιλέγουμε τις ιδιοτιμές αυτές που έχουμε μέχρι το "γόνατο", δηλαδή μέχρι εκεί που υπάρχει απότομη αλλαγή στις τιμές των ιδιοτιμών ή μέχρι το σημείο που γίνονται πολύ μικρές. Έτσι μειώνεται και η διάσταση του πίνακα δεδομένων. Θα αναφερθούμε περαιτέρω με παράδειγμα στο κεφάλαιο 4.

6. Εφαρμόζουμε στον πίνακα καθυστέρησης την ICA.

7. Οι χρονικές βάσεις που παίρνουμε (οι στήλες του πίνακα μίξης) αποτελούν τις προβολές των ανεξάρτητων συνιστωσών, και περιέχουν ορθογώνια (λόγω PCA) ημιτονοειδή σήματα που αποτελούν το συχνοτικό περιεχόμενο της αρχικής μας συνιστώσας. Επομένως, έχουμε πλέον σήματα που ο γραμμικός τους συνδυασμός μας δίνει το αρχικό σήμα.

8. Για να βρούμε ποιες συχνότητες περιέχονται σε κάθε βάση και συνεπώς σε κάθε συνιστώσα, εφαρμόζουμε σε κάθε μία το μετασχηματισμό Fourier. Εφόσον οι νέες συνιστώσες είναι ανεξάρτητες (λόγω ICA), θα πρέπει οι βάσεις να είναι (όσο γίνεται) καθαρά ημίτονα μιας συγκεκριμένης συχνότητας, που εμπεριέχονται στην αρχική συνιστώσα.

9. Επεξεργασία.

3.3.4 Επεξεργασία και Μεθοδολογίες

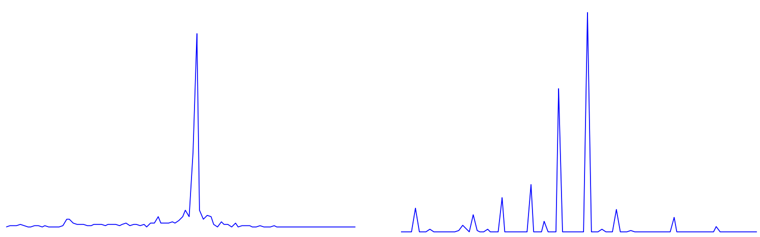
Με τη μέθοδο που αναπτύξαμε διεξοδικά παραπάνω, μπορούμε να αναλύσουμε ένα σήμα (κανάλι, συνιστώσα) στα περιεχόμενα σήματά του. Έτσι, μπορούμε να δούμε σε τι συχνότητες δραστηριοποιείται ο εγκέφαλος του αντικειμένου. Έτσι μπορεί να γίνει ανάλυση συχνοτήτων, αλλά και ζωνοπερατό φιλτράρισμα, αθροίζοντας τις κατάλληλες χρονικές συνιστώσες, στις ζώνες που μας ενδιαφέρουν ή περιμένουμε να δούμε κάτι σημαντικό.

Το πλεονέκτημα που έχουμε με αυτή τη μέθοδο είναι ότι η ανάλυση και οι βάσεις αφορούν το συγκεκριμένο άτομο στο οποίο έγινε το εγκεφαλογράφημα. Έτσι, μας δίδεται η δυνατότητα να απορρίπτουμε το θόρυβο και να κρατάμε την χρήσιμη πληροφορία, εξατομικευμένη κάθε φορά στο συγκεκριμένο άτομο.

Η επεξεργασία αυτή της εξατομικευμένης πληροφορίας γίνεται μέσω των βάσεων. Εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Fourier σε αυτές και τις χωρίζουμε σε δύο κατηγορίες σύμφωνα με το συχνοτικό τους περιεχόμενο. Αυτές είναι οι εξής:

1. ***Αποδεκτές βάσεις***. Οι αποδεκτές βάσεις είναι αυτές που συμμετέχουν και στους δύο τρόπους επεξεργασίας: στην ανάλυση συχνοτήτων και στο ζωνοπερατό φιλτράρισμα. Όταν λέμε αποδεκτές βάσεις εννοούμε ότι, επιλέγονται οι βάσεις εκείνες, που έχουν μία κύρια συχνότητα. Αν υπάρχει και αρμονική άλλης συχνότητας, εκτός από της κύριας, τότε ελέγχουμε αν στο μετασχηματισμό Fourier της βάσης, αυτή η δευτερεύουσα συχνότητα ξεπερνάει το 40% του πλάτους της κύριας. Αν ναι, απορρίπτεται η βάση και η συνιστώσα στην οποία αντιστοιχεί δεν λαμβάνει μέρος στην ανακατασκευή του σήματός. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου 1 λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι αποδεκτές βάσεις.

2. ***Απορριπτέες βάσεις***. Οι απορριπτέες βάσεις, δηλαδή όσες δεν είναι αποδεκτές, μπορούν να συμμετέχουν μαζί με τις αποδεκτές μόνο στο ζωνοπερατό φιλτράρισμα και αυτό υπό προϋποθέσεις. Έτσι, θα πρέπει η ενέργεια του μετασχηματισμού Fourier της βάσης στη ζώνη που μας αφορά να είναι τουλάχιστον το 60% της συνολικής ενέργειας της βάσης. Δηλαδή, ως παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι η απορριπτέα βάση της εικόνας 3.2, θα συμμετέχει στην αναδημιουργία του σήματος, αν η ζώνη συχνοτήτων εμπεριέχει τις δύο κεντρικές ακμές τις, καθότι φαίνεται ότι το άθροισμα της ενέργειας των ακμών αυτών φαίνεται να είναι μεγαλύτερο από το 60% της συνολικής ενέργειας της βάσης. Όσες απορριπτέες βάσεις περάσουν τον έλεγχο που αναφέραμε επιτυχώς, συμμετέχουν μαζί με τις αποδεκτές στην αναδημιουργία του σήματος στη μέθοδο 2.



Εικόνα 3.2: *Αριστερά: Ο μετασχηματισμός Fourier μιας αποδεκτής βάσης. Δεξιά: Ο μετασχηματισμός Fourier απορριπτέας βάσης.*

3.4 Μετρικές απόστασης

Για να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης στην ανάλυση συχνοτήτων, έτσι ώστε να βλέπουμε με μία τιμή μόνο, ποια η διαφορά της εισόδου με την έξοδό μας, χρησιμοποιούμε ορισμένες μετρικές απόστασης.

3.4.1 Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης του Pearson

Ο δειγματικός συντελεστής συσχέτισης του Pearson συμβολίζεται με r και ορίζεται από τον τύπο:

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X \cdot s_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}}$$

$$\text{όπου} \qquad s_{XY} = Cov(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{N-1} \qquad \text{και}$$

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2} \quad , \quad s_Y = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

Έχουμε:

s_{XY}	: η συνδιακύμανση των εντάσεων εισόδου-εξόδου,
s_X	: η τυπική απόκλιση των εντάσεων εισόδου,
s_Y	: η τυπική απόκλιση των εντάσεων εξόδου,
X_i	: η τιμή της έντασης εισόδου,
Y_i	: η τιμή της έντασης εξόδου,
$\overline{X}$	: η μέση τιμή των εντάσεων εισόδου,
$\overline{Y}$	: η μέση τιμή των εντάσεων εξόδου,
N	: ο αριθμός των δειγμάτων (πλήθος εντάσεων)

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r δίνει ένα μέτρο του μεγέθους της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών και παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.

Αν ο συντελεστής είναι θετικός, οι δύο μεταβλητές έχουν θετική συσχέτιση (όταν αυξάνεται η μία, τότε αυξάνεται και η άλλη). Αν ο συντελεστής είναι αρνητικός, οι δύο μεταβλητές έχουν αρνητική συσχέτιση (όταν αυξάνεται η μία, τότε μειώνεται η άλλη).

Ο βαθμός γραμμικής συσχέτισης καθορίζεται από την απόλυτη τιμή του r και όχι από το πρόσημό του.

3.4.2 Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης του Spearman

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης του Spearman ρ, ορισμένες φορές θεωρείται ότι είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης του Pearson, μεταξύ κατεταγμένων μεταβλητών. Οι τιμές X_i, Y_i μετατρέπονται σε x_i, y_i που είναι πλέον τάξεις. Με αυτό τον τρόπο, στη μικρότερη τιμή αντιστοιχεί ο αριθμός 1, στη δεύτερη μικρότερη τιμή αντιστοιχεί ο αριθμός 2 κ.ό.κ.

Το ρ όταν δεν έχουμε ίδιες τιμές δίνεται ως:

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2}{N \cdot (N^2 - 1)}$$

όπου N το πλήθος των τιμών.

Αν υπάρχουν ίδιες τιμές χρησιμοποιείται ο συντελεστής του Pearson ή κάποιος άλλος δείκτης όπως ο Kendall W.

3.4.3 Ο δείκτης Kendall W

Ενώ ο βασικός συντελεστής συσχέτισης του Pearson θεωρεί τιμές κανονικά κατανεμημένες και συγκρίνει δύο σύνολα τιμών, ο δείκτης Kendall W δεν κάνει καμία υπόθεση όσον αφορά τη φύση της κατανομής πιθανότητας και μπορεί να χειριστεί οποιοδήποτε αριθμό διακριτών τιμών.

Ο W είναι γραμμικά συναφής με τη μέση τιμή του συντελεστή ταξικής συσχέτισης (rank correlation) του Spearman μεταξύ όλων των ζευγών τιμών. Χρησιμοποιείται για να καθοριστεί ο βαθμός συμφωνίας μεταξύ δύο ή και περισσοτέρων στηλών.

Υποθέτουμε ότι σε ένα αντικείμενο i (γραμμή των εντάσεων εισόδου-εξόδου για κάθε συχνότητα) δίδεται η τάξη (rank) $r_{i,j}$. Η συνολική τάξη που δίδεται στο αντικείμενο i είναι:

$$R_i = \sum_{j=1}^{k} r_{i,j}$$

Όπως φαίνεται στην ουσία η συνολική τάξη βγαίνει από το άθροισμα των τάξεων των εντάσεων. Η μέση τιμή των συνολικών τάξεων είναι:

$$\overline{R} = \frac{1}{2} k(N+1)$$

Το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων S ορίζεται ως:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(R_i - \overline{R}\right)^2$$

και ο δείκτης Kendall W έτσι γίνεται:

$$W = \frac{12S}{k^2(N^3 - N)}$$

όπου N τα αντικείμενα σε κάθε στήλη (πλήθος εντάσεων) και k οι στήλες (στην περίπτωσή μας $k = 2$, είσοδος-έξοδος).

3.4.4 1-Norm

Η εξίσωση της p-νόρμας είναι:

$$\|\mathbf{z}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{N} |z_i|^p\right)^{1/p}$$

Εδώ χρησιμοποιείται η 1-νόρμα στο διάνυσμα διαφορών, καθότι παραπάνω εκθέτης (τετράγωνο) θα επέφερε μεγάλες τιμές διαφορών. Οπότε ο τύπος της πρώτης νόρμας είναι:

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |z_i| = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|$$

και εφαρμόζεται στο z_i, όπου $z_i = x_i - y_i$ θα είναι η διαφορά των εντάσεων, όπως είναι εμφανές, και N το πλήθος των τιμών διαφορών.

Όσο πιο κοντά είναι η διαφορά στο μηδέν, τόσο πιο πολύ θα μοιάζει (συσχετισμένη) η είσοδος με την έξοδό μας.

3.4.5 Frobenius Norm

Η Frobenius νόρμα (πολλές φορές λέγεται και Ευκλείδεια νόρμα και μπερδεύεται με την 2-νόρμα) ορίζεται από τον τύπο:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{k} |z_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |z_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^2}$$

όπου z_{ij} είναι οι τιμές των διαφορών, όπως στην 1-νόρμα, με N το πλήθος των τιμών και k το πλήθος των στηλών που συγκεκριμένα εδώ είναι $k = 1$, εφόσον εφαρμόζεται στις τιμές των διαφορών.

3.4.6 Μετρική Bhattacharyya

Η αυθεντική ερμηνεία του Bhattacharyya για το μετρικό ήταν γεωμετρική. Θεώρησε δύο πολυωνυμικούς πληθυσμούς που αποτελείται η καθεμιά από k κλάσεις κατηγοριών με συναφείς πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots, p_k$ και $p'_1, p'_2, \ldots, p'_k$ αντίστοιχα.

Τότε εφόσον $\sum_i^k p_i = 1$ και $\sum_i^k p'_i = 1$ παρατήρησε ότι τα $(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_k})$ και $(\sqrt{p'_1}, \sqrt{p'_2}, \ldots, \sqrt{p'_k})$ μπορούν να θεωρηθούν ως δύο συνημίτονα διεύθυνσης δύο ανυσμάτων σε χώρο k διαστάσεων, με ορθογώνιους άξονες.

Σαν μέτρο της απόστασης μεταξύ των δύο πληθυσμών ο Bhattacharyya χρησιμοποίησε το τετράγωνο της γωνίας μεταξύ των ανυσμάτων θέσης. Εάν θ είναι η γωνία μεταξύ των ανυσμάτων τότε:

$$\cos\theta = \sum_{i}^{k} \sqrt{p_i p'_i}$$

και εάν οι δυο πληθυσμοί είναι ίδιοι τότε:

$$\cos\theta = 1$$

που αφορά γωνία $\theta = 0$.

3.5 Θεώρημα Parseval

Στη φυσική και στη μηχανική, το θεώρημα του Parseval συχνά γράφεται ως:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

όπου $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ αναπαριστά το συνεχή μετασχηματισμό Fourier (σε κανονικοποιημένη, μοναδιαία μορφή) του $x(t)$ και f αναπαριστά τη συνιστώσα της συχνότητας του x.

Η εξήγηση αυτής της μορφής του θεωρήματος είναι ότι η συνολική ενέργεια που περιέχεται στην κυματομορφή $x(t)$ αθροισμένη σε όλο το μήκος του χρόνου t ισούται με τη συνολική ενέργεια της κυματομορφής του μετασχηματισμού Fourier $X(f)$ αθροισμένη κατά μήκος όλων των συνιστωσών συχνοτήτων f. Για διακριτά χρονικά σήματα, το θεώρημα γίνεται:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X\left(e^{i\phi}\right)|^2 d\phi$$

όπου X είναι ο διακριτού χρόνου μετασχηματισμός Fourier (DTFT) του x και το ϕ αναπαριστά την γωνιακή συχνότητα (σε ακτίνια ανά δείγμα) του x.

Εναλλακτικά, για το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) (που είναι και αυτός που μας ενδιαφέρει) η σχέση γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \tag{3.3}$$

όπου $X[k]$ είναι ο DFT του $x[n]$, και τα δύο μήκους N.

Είναι φανερό ότι η ενέργεια του σήματος αντιστοιχεί στο τετράγωνο της 2-νόρμας και όταν αφορά το μετασχηματισμό Fourier διαιρούμε το αποτέλεσμα με το σύνολο των δειγμάτων του σήματος μας (μήκος του $x[n]$).

3.6 Ενέργεια και Ισχύς ενός Σήματος

Μια περιοδική ακολουθία με περίοδο N, ώστε $x[n] = x[n+N], \forall n$, αναπαριστάται μέσω της *σειράς Fourier* διακριτού χρόνου ως [33]

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j2\pi kn/N} \tag{3.4}$$

όπου οι N συντελεστές a_k εξαρτώνται από τα δείγματα της περιοδικής ακολουθίας $x[n]$ με την σχέση

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{3.5}$$

Το ζεύγος των εξισώσεων (3.4)-(3.5) επιτρέπει την ανάλυση κατά συχνότητα των σημάτων διακριτού χρόνου. Κάθε συντελεστής a_k παρέχει πληροφορία για το μέγεθος και την φάση των συνιστωσών εκθετικών $e^{j\omega_k n}, \quad \omega_k = 2\pi k/N, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$ τα οποία είναι περιοδικά με περίοδο N. Επίσης, περιοδικοί, με περίοδο N, είναι και οι συντελεστές a_k.

Συνήθως μας ενδιαφέρουν οι συντελεστές $a_k, k = 0, 1, \ldots, N-1$, οι οποίοι αντιστοιχούν στην περιοχή συχνοτήτων $0 \leq \omega_k < 2\pi$.

Μέσω των συντελεστών a_k της σειράς Fourier διακριτού χρόνου μπορεί να προσδιοριστεί και το *φάσμα πυκνότητας ισχύος (power density spectrum) περιοδικών* σημάτων, το οποίο για σήματα με περίοδο N ορίζεται ως:

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2$$

Ισχύει ότι

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k^* e^{-j2\pi kn/N}\right)$$

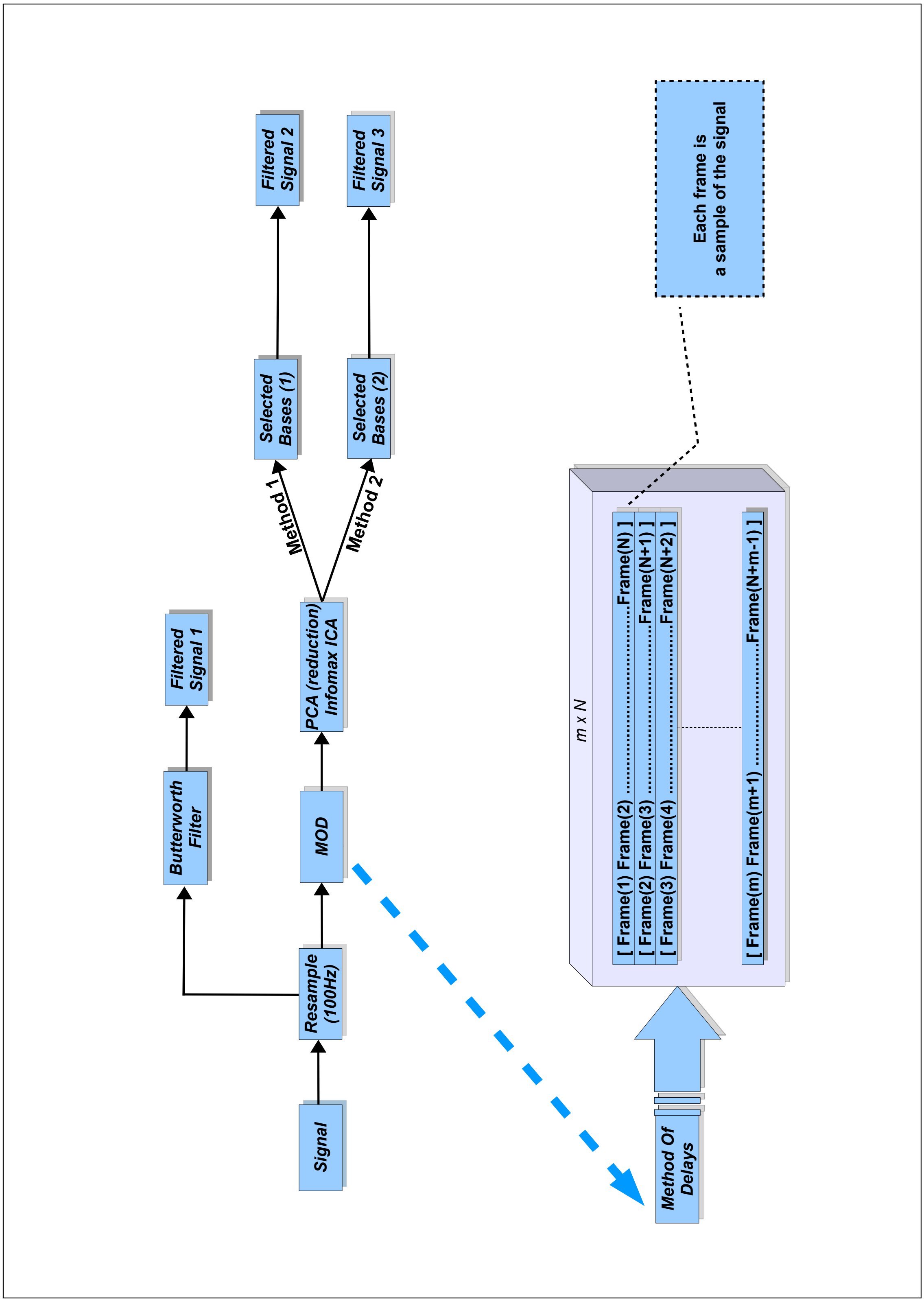
$$= \sum_{k=0}^{N-1} a_k^* \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}\right] \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{P}_x = \sum_{k=0}^{N-1}|a_k|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι η *μέση ισχύς* του σήματος είναι ίση με το άθροισμα των τετραγώνων των επιμέρους συνιστωσών της συχνότητας. Η ακολουθία $\{|a_k|^2\}, k =$

$0, 1, \ldots, N-1$, είναι η κατά συχνότητα κατανομή της ισχύος και ονομάζεται *φάσμα πυκνότητας ισχύος*. Αντίστοιχα, η *ενέργεια* της ακολουθίας $x[n]$ σε μια περίοδο είναι

$$\mathcal{E}_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$



Εικόνα 3.3: *Η διαδικασία που ακολουθούμε στο ζωνοπερατό φιλτράρισμα σε διάγραμμα ροής. Στην εικόνα φαίνεται και η μορφή του πίνακα καθυστέρησης καθώς και ο τρόπος που γίνεται η ολίσθηση.*

Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα μεθόδου σε συνθετικά δεδομένα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση συχνοτήτων και το ζωνοπερατό φιλτράρισμα από την εφαρμογή του αλγορίθμου σε συνθετικά δεδομένα. Με την ανάλυση και το φιλτράρισμα σε συνθετικά δεδομένα, προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι η εφαρμογή της μεθόδου σε πραγματικά δεδομένα, δεν θα έχει απώλεια χρήσιμης πληροφορίας. Οι όποιες απώλειες θα είναι κυρίως θόρυβος.

4.1 Τα συνθετικά δεδομένα

Για να προσομοιωθεί η λειτουργικότητα και αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου που ακολουθήσαμε, τον εφαρμόσαμε σε συνθετικά δεδομένα. Τα συνθετικά δεδομένα που χρησιμοποιούμε αποτελούνται από ένα σήμα z, το οποίο θεωρούμε ότι είναι η χωρική συνιστώσα μας. Εφόσον θεωρηθεί ως συνιστώσα, δεν εφαρμόζουμε το πρώτο στάδιο της μεθόδου, που είναι η εφαρμογή της Infomax ICA και απλά συνεχίζουμε στα υπόλοιπα στάδια με αρχή το στάδιο όπου το σήμα εισάγεται στον πίνακα καθυστέρησης.

Το σήμα z περιέχει 30 συχνότητες, οι οποίες είναι αλληλεπικαλυπτόμενες, και απαρτίζεται από 5000 δείγματα. Ο ρυθμός δειγμάτων που έχουμε ορίσει είναι 100 ανά δευτερόλεπτο ($100Hz$). Λέγοντας 30 συχνότητες εννοούμε ότι το z αποτελείται αθροιστικά από ημίτονα διαφορετικών συχνοτήτων (συνολικά 30) και διαφορετικών ενεργειών. Τα συγκριτικά αποτελέσματα θα περιέχουν αποτελέσματα για το z, όταν δεν εισάγεται σε αυτό θόρυβος, αλλά και όταν έχουμε θόρυβο διαφορετικών επιπέδων.

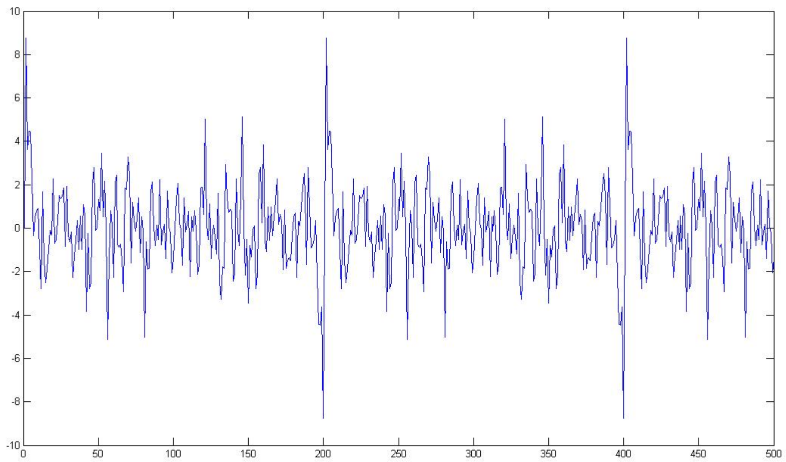
Παρατηρούμε ότι οι βάσεις που εξάγονται είναι, σχεδόν πάντα, ανά δύο η μία μετατοπισμένη έκδοση της άλλης. Αυτό συμβαίνει λόγω της φύσης του πίνακα καθυστέρησης που είναι Hankel[35]. Έτσι, σε κάθε γραμμή του πίνακα καθυστέρησης θα έχουμε μία μετατοπισμένη έκδοση του αρχικού σήματος με διαφορά μόνο δύο δειγμάτων. Εφόσον το σήμα μας, λόγω των ημιτόνων, είναι περιοδικό, κάποια στιγμή σε μία γραμμή θα έχουμε μια μετατοπισμένη έκδοση του περιεχόμενου ημιτόνου που θα είναι συνημίτονο. Επιπροσθέτως, με το γεγονός ότι η PCA μας δίνει ορθογώνιες συνιστώσες (κάθετες μεταξύ τους), σαν αποτέλεσμα έχουμε την εξαγωγή δύο συνιστωσών, για κάθε συχνότητα, μεταξύ τους κάθετες (εσωτερικό γινόμενο μηδέν).

Επομένως, για να μπορέσουμε ή τουλάχιστον να προσπαθήσουμε, να εξάγουμε όλες τις συχνότητες από το συνθετικό μας σήμα θα πρέπει αν περιέχει 30 συχνότητες να επιλέξουμε να εξάγουμε 60 κύριες συνιστώσες. Αυτές αμέσως μετά θα επεξεργαστούν με την ICA και θα μας δώσουν τις ανεξάρτητες συνιστώσες και βάσεις επομένως, από όπου θα εξαχθούν και οι συχνότητες του σήματος.

Αρχικά κατασκευάζουμε ένα σήμα z, που αποτελείται από τις 30 συχνότητες του πίνακα 4.1. Όπως φαίνεται, οι συχνότητες ενυπάρχουν στο σήμα με ενέργειες που παίρνουν τιμές από *0.25*, που αντιστοιχεί σε πλάτος 0.01 του ημιτόνου, μέχρι *1936*, που αντιστοιχεί σε πλάτος 0.88 του ημιτόνου. Η ενέργεια του σήματος *χωρίς θόρυβο* είναι 42.9905 dB.

Συχνότητα (Hz)	2	2.5	3.5	4.5	5	5.5	6	6.5	7	8.5
Ενέργεια ($\mathcal{E}$)	156.25	4.00	0.25	1806.20	1024.00	64.00	1332.30	240.25	462.25	1122.20
Συχνότητα (Hz)	9	10.5	11	12	13.5	14	16	17	18	23.5
Ενέργεια ($\mathcal{E}$)	600.25	342.25	196.00	1936.00	930.25	121.00	400.00	12.25	1560.20	90.25
Συχνότητα (Hz)	25	26.5	27	28.5	29	32	33.5	36	38	43.5
Ενέργεια ($\mathcal{E}$)	529.00	676.00	756.25	841.00	25.00	289.00	1444.00	1225.00	42.25	1681.00

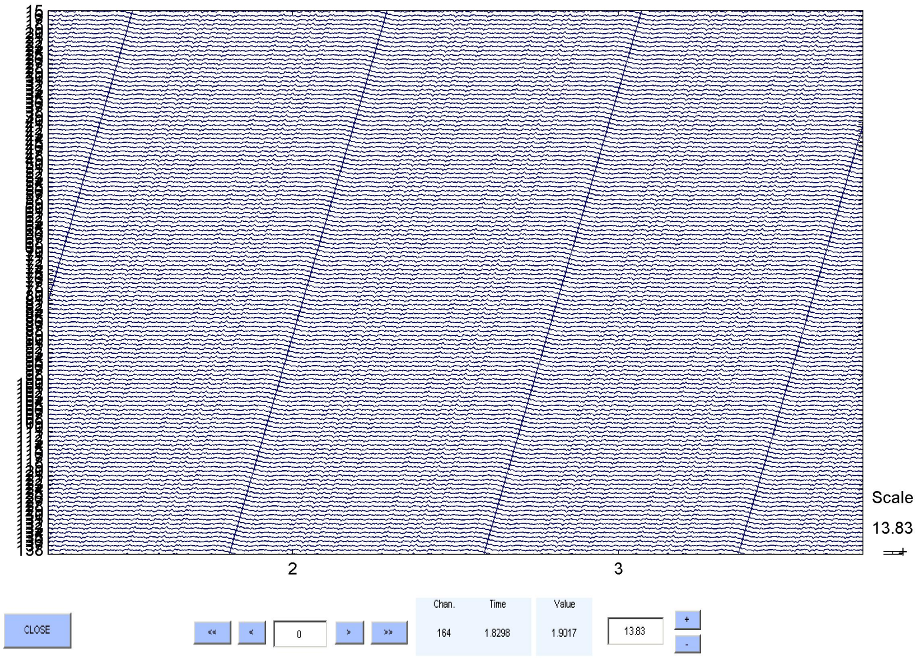
Πίνακας 4.1: *Οι 30 συχνότητες, και οι αντίστοιχες ενέργειές τους, που απαρτίζουν το αρχικό σήμα z*



Εικόνα 4.1: *Τα 500/5000 δείγματα του συνθετικού σήματος*

4.2 Ανάλυση συχνοτήτων

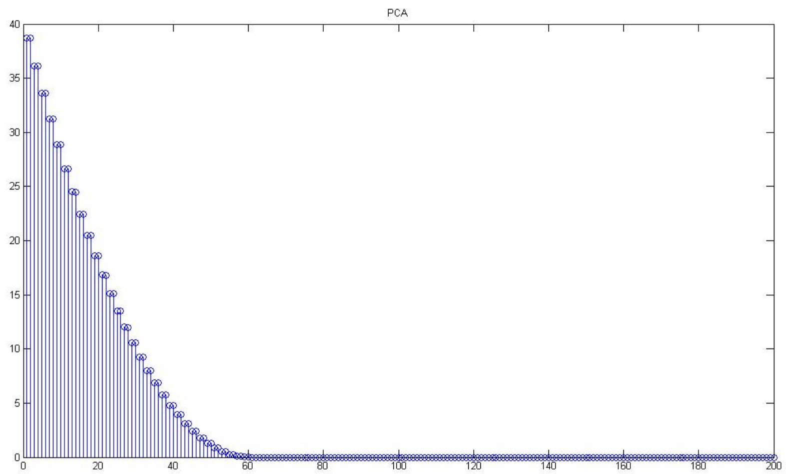
Όπως είπαμε το συνθετικό σήμα θα έχει το ρόλο της συνιστώσας και θα εισαχθεί ως έχει στον πίνακα καθυστέρησης. Ύστερα, βρίσκουμε (μέσω της PCA) και προβάλλουμε τις κύριες χρονικές συνιστώσες του πίνακα καθυστέρησης, για να επιλέξουμε πόσες θέλουμε να εξάγουμε. Στην εικόνα (4.3) φαίνονται οι ιδιοτιμές του πίνακα όταν δεν έχουμε εισάγει στο σήμα θόρυβο. Το αποτέλεσμα το βλέπουμε στην εικόνα (4.2), όπου και φαίνεται η ολίσθηση του σήματος προς τα αριστερά.



Εικόνα 4.2: *Ο πίνακας καθυστέρησης του συνθετικού σήματος. Κάθε γραμμή του πίνακα είναι και μία μετατοπισμένη έκδοση του σήματος. Δείχνουμε τη συγκεκριμένη εικόνα απλά για να φανεί η ολίσθηση του σήματος προς τα αριστερά, κατά τις μετατοπίσεις.*

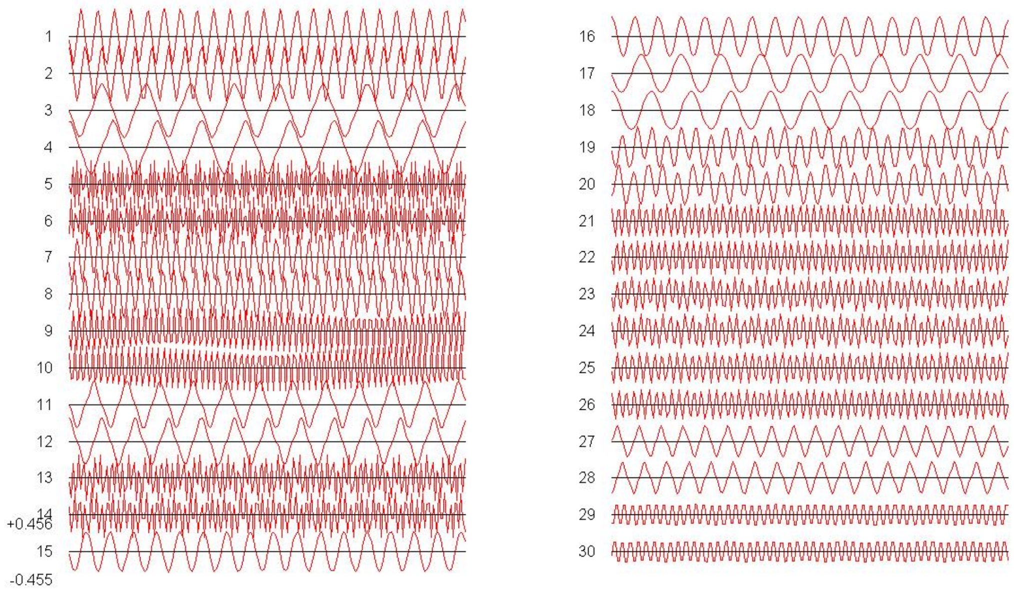
Εφαρμόζουμε την Infomax ICA στον πίνακα καθυστέρησης και παίρνουμε τις ανεξάρτητες συνιστώσες (εικόνα 4.5), καθώς και τον πίνακα μίξης που θα χρησιμοποιήσουμε και στη συνέχεια, αφού περιέχει τις χρονικές μας βάσεις. Σε αυτό το σημείο επιλέγουμε να εξάγουμε 30 χρονικές συνιστώσες ως παράδειγμα, δηλαδή 15 συχνότητες. Στα αποτελέσματά μας θα παρουσιάσουμε τιμές για διαφορετικό πλήθος συνιστωσών, μέχρι και τις 60 που δυνητικά η μέθοδος θα πρέπει να εξάγει όλες τις συχνότητες.

Οι στήλες του πίνακα μίξης είναι οι χρονικές βάσεις μας, δηλαδή τα ημιτονοειδή σήματα, που αποτελούν προβολές των χρονικών συνιστωσών. Στην εικόνα (4.4) φαίνονται αυτές



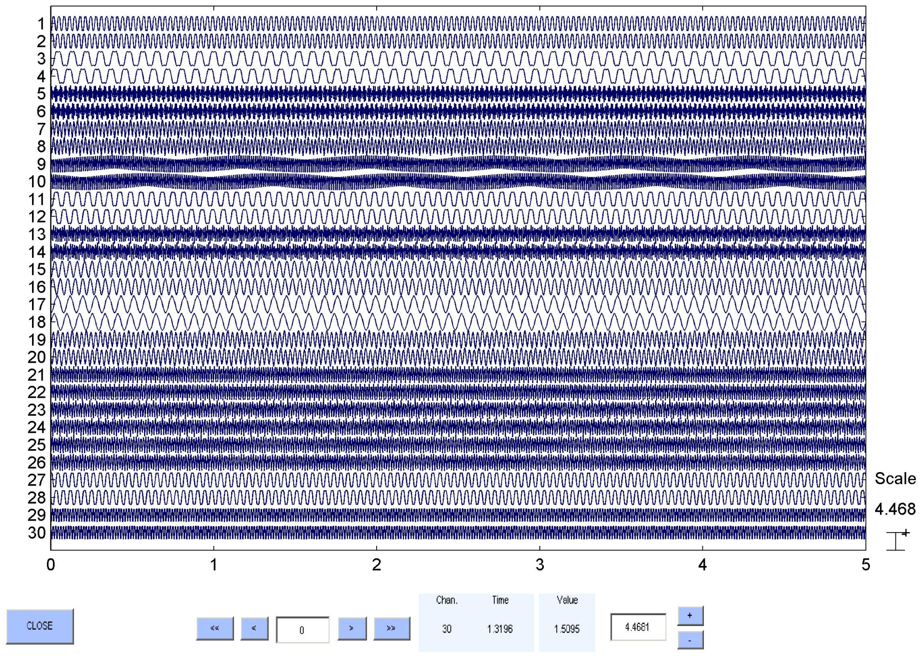
Εικόνα 4.3: *Οι κύριες συνιστώσες (ιδιοτιμές) του πίνακα καθυστέρησης κατά την εφαρμογή της PCA όταν δεν έχουμε θόρυβο στο σήμα. Σε αυτό το στάδιο επιλέγουμε πόσες συνιστώσες θα εξάγουμε από το σήμα.*

ακριβώς. Εφαρμόζουμε στις χρονικές βάσεις το μετασχηματισμό Fourier[34] για να βρούμε το συχνοτικό περιεχόμενο τους. Στην εικόνα (4.6) φαίνονται οι μετασχηματισμοί Fourier των *αποδεκτών* βάσεων, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι και οι 30.



Εικόνα 4.4: *Οι 30 χρονικές βάσεις του συνθετικού σήματος που αντιστοιχούν στις στήλες του πίνακα μίξης.*

Το άθροισμα των ενεργειών των ιδίας συχνότητας συνιστωσών, είναι παραπλήσια (ίδιο όταν δεν έχουμε απορριπτέες βάσεις όπως στο παράδειγμα) με την ένταση, και συνεπώς ενέργεια, του ημιτόνου που εμπεριέχεται στο αρχικό συνθετικό σήμα z.



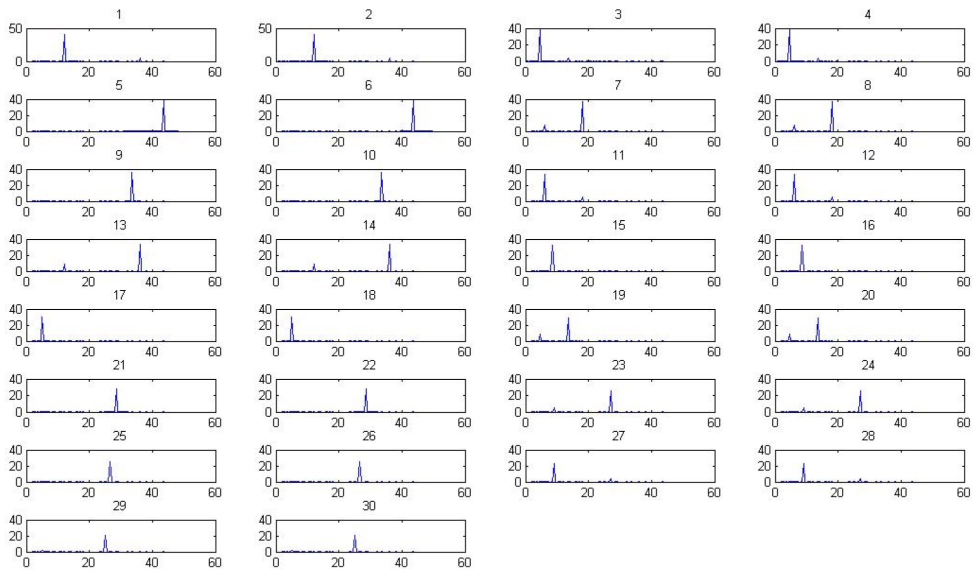
Εικόνα 4.5: *Οι 30 χρονικές συνιστώσες του συνθετικού σήματος μετά και από την εφαρμογή της ICA.*

4.2.1 Αποτελέσματα

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για πλήθος 10 έως και 60 συνιστωσών. Σε κάθε βήμα προσθέτουμε και θόρυβο διαφόρων επιπέδων. Ο θόρυβος χωρίζεται σε τέσσερα επίπεδα με το επίπεδο 0 να σημαίνει ότι στο συνθετικό σήμα δεν έχουμε προσθέσει καθόλου θόρυβο και το επίπεδο 3 να είναι ο μέγιστος θόρυβος, που αντιστοιχεί σχεδόν στη διπλάσια ενέργεια του συνθετικού σήματος.

Όπως είπαμε και στην αρχή του κεφαλαίου, το συνθετικό σήμα έχει ενέργεια της τάξης των 42.9905 dB. Αντίστοιχα, ο θόρυβος (λευκός Γκαουσιανός) έχει ενέργεια που ξεκινάει από το επίπεδο 1 (37.0069 dB), συνεχίζει στο επίπεδο 2 (43.0765 dB) και τελικά στο επίπεδο 3 (46.4890 dB). Η τόσο μεγάλες ποσότητες θορύβου επιλέχθηκαν σκοπίμως για να δειχθεί αφενός ότι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε έχει το πλεονέκτημα της απόρριψης του θορύβου και αφετέρου ότι αντίστοιχου μεγέθους θόρυβος επικρατεί και στο εγκεφαλογράφημα.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους πίνακες (4.2, 4.3, 4.4, 4.5), χρησιμοποιώντας τις μετρικές απόστασης της παραγράφου 3.4. Βασίζονται στις συσχετίσεις των εντάσεων των συχνοτήτων της εισόδου (πίνακας 4.1) με τις εντάσεις των συχνοτήτων της εξόδου. Αν μία συχνότητα δεν εξάγεται από τη μέθοδο, τότε την προσθέτουμε εμείς, αντιστοιχίζοντας της μηδενική ένταση.



Εικόνα 4.6: *Οι 30 μετασχηματισμοί Fourier των χρονικών βάσεων που αντιστοιχούν στο συχνοτικό περιεχόμενο του συνθετικού σήματος. Ο αριθμός πάνω από κάθε γράφημα δηλώνει των αριθμό της χρονικής βάσης.*

Επιπλέον, κυρίως σε περιπτώσεις υπερβολικού θορύβου (επίπεδο 3), ενδέχεται στην έξοδο να εμφανιστεί κάποια συχνότητα που δεν υπάρχει στην είσοδο. Με τον ίδιο τρόπο προσθέτουμε αυτή τη συχνότητα στην είσοδο, αντιστοιχίζοντας και σε αυτήν μηδενική ένταση, ώστε πάντα να υπάρχει ίδια αντιστοιχία συχνοτήτων μεταξύ εισόδου-εξόδου.

Μία ακόμα επιλογή που κάνουμε είναι να κανονικοποιούμε τις εντάσεις εισόδου-εξόδου πριν από τη σύγκριση, ώστε να έχουν άθροισμα ίσο με μονάδα. Δημιουργείται έτσι ίδια βάση σύγκρισης. Κατά συνέπεια, τα αποτελέσματά μας είναι ενημερωμένα κάθε στιγμή στις διαφορετικές δυσκολίες που προκύπτουν.

4.2.2 Συμπεράσματα

Από τους πίνακες (4.2, 4.3, 4.4, 4.5), βγαίνει το συμπέρασμα ότι όταν δεν έχουμε θόρυβο στο σήμα μας, τα καλύτερα αποτελέσματα τα παίρνουμε για 50 συνιστώσες, δηλαδή η μέθοδος από τις 30 συχνότητες που έχουμε στο σήμα, έχει εξάγει σχεδόν το 98,6% της πληροφορίας. Πολύ καλό ποσοστό αν λάβουμε υπόψιν μας ότι αν και θα περιμέναμε στις 60 συνιστώσες να βγουν και οι 30 συχνότητες, η μέθοδος, λόγω της πολύ χαμηλής έντασης μερικών συχνοτήτων, τις εκλαμβάνει ως θόρυβο και τις απορρίπτει.

Για επίπεδο θορύβου 1, φαίνεται ότι τα 37.0069 dB του θορύβου δεν είναι ικανά να μας αλλάξουν τα αποτελέσματα και επομένως έχουμε και πάλι τις καλύτερες τιμές για επιλογή

Σύγκριση τιμών εισόδου - εξόδου						
Επίπεδο θορύβου 0	Ιδιοτιμές (Components)					
0 dB	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
Corr. Pearson	0.6486	0.8341	0.9284	0.9703	0.9870	0.9666
Corr.Spearman	0.6493	0.8354	0.9314	0.9720	0.9866	0.9733
Corr.Kendall	0.5571	0.7198	0.8340	0.8837	0.9187	0.8912
1-Norm	1.3858	0.8839	0.4987	0.2318	0.0907	0.1640
Frob. Norm	0.3494	0.1819	0.1011	0.0506	0.0218	0.0386
Bhatt. Measure	0.5542	0.7468	0.8669	0.9433	0.9857	0.9625

Πίνακας 4.2: *Αποτελέσματα για θόρυβο επιπέδου 0 (0 dB)*

Σύγκριση τιμών εισόδου - εξόδου						
Επίπεδο θορύβου 1	Ιδιοτιμές (Components)					
37.0069 dB	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
Corr. Pearson	0.6471	0.8297	0.9228	0.9603	0.9613	0.9366
Corr.Spearman	0.6466	0.8349	0.9290	0.9692	0.9719	0.9472
Corr.Kendall	0.5323	0.7137	0.8235	0.8789	0.8815	0.8328
1-Norm	1.3858	0.8839	0.4972	0.2311	0.1259	0.1775
Frob. Norm	0.3492	0.1822	0.1013	0.0517	0.0299	0.0410
Bhatt. Measure	0.5541	0.7465	0.8666	0.9428	0.9826	0.9799

Πίνακας 4.3: *Αποτελέσματα για θόρυβο επιπέδου 1 (37.0069 dB)*

Σύγκριση τιμών εισόδου - εξόδου						
Επίπεδο θορύβου 2	Ιδιοτιμές (Components)					
43.0765 dB	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
Corr. Pearson	0.6470	0.8278	0.9072	0.9155	0.8227	0.7593
Corr.Spearman	0.6459	0.8237	0.9114	0.9018	0.8212	0.7971
Corr.Kendall	0.5323	0.6892	0.7813	0.7657	0.6602	0.6089
1-Norm	1.3858	0.8839	0.4989	0.2160	0.2863	0.3651
Frob. Norm	0.3494	0.1820	0.1008	0.0554	0.0651	0.0782
Bhatt. Measure	0.5540	0.7464	0.8653	0.9500	0.9498	0.9216

Πίνακας 4.4: *Αποτελέσματα για θόρυβο επιπέδου 2 (43.0765 dB)*

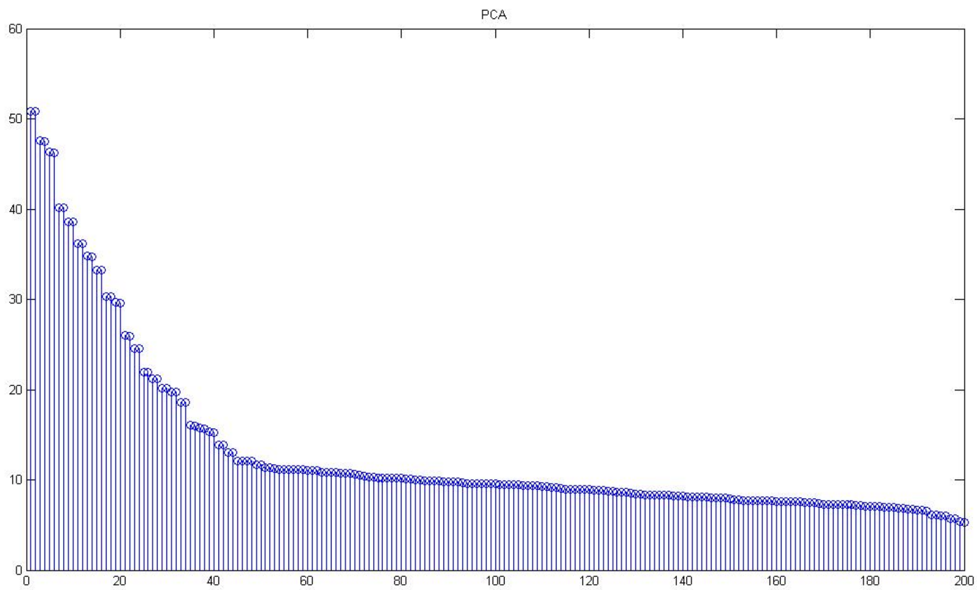
Σύγκριση τιμών εισόδου - εξόδου						
Επίπεδο θορύβου 3	Ιδιοτιμές (Components)					
46.4890 dB	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
Corr. Pearson	0.6481	0.8068	0.8963	0.8453	0.6207	0.5726
Corr.Spearman	0.6479	0.8092	0.9051	0.8548	0.6567	0.6234
Corr.Kendall	0.5406	0.6770	0.7861	0.7235	0.5672	0.5206
1-Norm	1.3858	0.8974	0.5678	0.2971	0.4153	0.4511
Frob. Norm	0.3493	0.1848	0.1136	0.0753	0.1000	0.1117
Bhatt. Measure	0.5542	0.7419	0.8454	0.9302	0.8996	0.8647

Πίνακας 4.5: *Αποτελέσματα για θόρυβο επιπέδου 3 (46.4890 dB)*

50 συνιστωσών, επηρεάζοντας όμως τα μέτρα σύγκρισης, σπρώχνοντάς τα σε χαμηλότερα επίπεδα τιμών.

Όταν ο θόρυβος γίνει επιπέδου 2 και 3 (43.0765 και 46.4890 dB αντίστοιχα), τα αποτελέσματα αλλάζουν αρκετά και βλέπουμε ότι οι μεγαλύτερες τιμές εμφανίζονται όταν έχουμε επιλέξει 40 συνιστώσες. Φαίνεται επομένως ότι ο θόρυβος που προσθέτουμε ενισχύει τις συνιστώσες θορύβου και αυτό φαίνεται και από την εικόνα 4.7 πως πολύ αλλάζει το διάγραμμα των ιδιοτιμών.

Πρέπει να αναφερθεί ότι στην επιλογή λιγότερων ιδιοτιμών οι μετρικές υπολογίστηκαν σε αντιστοιχία με τις *συνολικές συχνότητες* που έχουμε στην είσοδο, με αποτέλεσμα τα χαμηλά αποτελέσματα. Δεν θα είχε νόημα η σύγκριση αν επιλέγαμε να συγκρίνουμε τις συχνότητες που βγαίνουν με τις αντίστοιχες της εισόδου, καθότι έτσι τα αποτελέσματα θα ήταν άριστα σε αρκετές περιπτώσεις.



Εικόνα 4.7: *Οι κύριες συνιστώσες (ιδιοτιμές) του πίνακα καθυστέρησης κατά την εφαρμογή της PCA. Σε αυτό το στάδιο επιλέγουμε πόσες συνιστώσες θα εξάγουμε από το σήμα, επιλέγοντας αυτές με την μεγαλύτερη τιμή. Φαίνεται ωστόσο πόσο επηρεάζει ο θόρυβος επιπέδου 3 τις ιδιοτιμές, σε σύγκριση με την εικόνα (4.3) που δεν έχουμε καθόλου θόρυβο και οι συνιστώσες θορύβου αριστερά του γραφήματος έχουν μηδενικό πλάτος.*

4.3 Ζωνοπερατό φιλτράρισμα σε συνθετικά δεδομένα

Σε αυτό το σημείο πρέπει να δείξουμε την αξιοπιστία της μεθόδου. Έτσι, συγκρίνουμε το αποτέλεσμα των δύο παραλλαγών που αναφέραμε στην παράγραφο 3.3.4. Επομένως, στο ζωνοπερατό φιλτράρισμα των συνθετικών δεδομένων (όπως και των πραγματικών δεδομένων), θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα τριών συνολικά τρόπων ζωνοπερατού φιλτραρίσματος. Αυτοί θα είναι η εφαρμογή Butterworth φίλτρου, το φιλτράρισμα μόνο από τις αποδεκτές βάσεις και τελικά φιλτράρισμα λαμβάνοντας υπόψιν εκτός από τις αποδεκτές και ορισμένες από τις απορριπτέες.

Σε αυτό το μέρος είναι χρήσιμο να αναφερθεί ο λόγος σήματος προς θόρυβο αφού οι συγκρίσεις θα γίνουν σύμφωνα με αυτό το μέτρο.

$$SNR_{dB} = 10 \cdot log_{10} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} |z|^2}{\sum_{i=1}^{N} |n|^2} \right) \tag{4.1}$$

όπου n είναι ο θόρυβος.

Οπότε για τους διάφορους θορύβους και την εφαρμογή τους στην (4.1), ο λόγος σήματος προς κάθε θόρυβο για ολόκληρο το σήμα, θα είναι:

$$SNR_{dB}^{N1} = 5.9835\, dB$$

$$SNR_{dB}^{N2} = -0.0859\, dB$$

$$SNR_{dB}^{N3} = -3.4985\, dB$$

Πρέπει να αναφερθεί ότι το ποσό του θορύβου φαίνεται υπερβολικό, αλλά το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα είναι ένα πολύ θορυβώδες σήμα στην ουσία και έτσι αναλογικά η ποσότητα του θορύβου θα είναι αντίστοιχη.

4.3.1 Πρότυπα συνθετικά σήματα εύρους ζώνης

Εφόσον το σήμα μας είναι συνθετικά κατασκευασμένο από ημίτονα διαφόρων συχνοτήτων, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης με το φιλτραρισμένο σήμα. Έτσι, ανάλογα με τη ζώνη συχνοτήτων που αναφερόμαστε κάθε φορά, δημιουργούμε ένα σήμα z_{sin}, που δεν περιέχει θόρυβο, αθροίζοντας τα ημίτονα των συχνοτήτων που περιέχονται σε αυτή τη ζώνη. Επομένως, για κάθε ζώνη φιλτραρίσματος, δημιουργείται ένα πρότυπο σήμα χωρίς θόρυβο που θα χρησιμοποιηθεί στη σύγκριση των σημάτων.

Οι συχνότητες που απαρτίζουν το κάθε πρότυπο σήμα συγκεκριμένου εύρους συχνοτήτων και οι αντίστοιχες ενέργειές των ημιτόνων φαίνονται στους πίνακες 4.6, 4.7 και 4.8. Η μορφή των προτύπων αυτών σημάτων φαίνεται στην εικόνα 4.8. Οι συνολική ενέργεια (σε dB) των προτύπων σημάτων για κάθε ζώνη είναι:

$$\mathcal{E}_{z_{sin}}^{5-15Hz} = 39.2276\,dB, \quad \mathcal{E}_{z_{sin}}^{10-15Hz} = 35.4722\,dB, \quad \mathcal{E}_{z_{sin}}^{10-20Hz} = 37.4020\,dB$$

Συχνότητα (Hz)	5	5.5	6	6.5	7	8.5
Ενέργεια ($\mathcal{E}$)	1024.00	64.00	1332.30	240.25	462.25	1122.20
Συχνότητα (Hz)	9	10.5	11	12	13.5	14
Ενέργεια ($\mathcal{E}$)	600.25	342.25	196.00	1936.00	930.25	121.00

Πίνακας 4.6: *Οι συχνότητες, και οι αντίστοιχες ενέργειές τους, που θα απαρτίζουν το σήμα z, μετά το φιλτράρισμα* $5 - 15Hz$

Συχνότητα (Hz)	10.5	11	12	13.5	14
Ενέργεια ($\mathcal{E}$)	342.25	196.00	1936.00	930.25	121.00

Πίνακας 4.7: *Οι συχνότητες, και οι αντίστοιχες ενέργειές τους, που θα απαρτίζουν το σήμα z, μετά το φιλτράρισμα* $10 - 15Hz$

Συχνότητα (Hz)	10.5	11	12	13.5	14	16	17	18
Ενέργεια ($\mathcal{E}$)	342.25	196.00	1936.00	930.25	121.00	400.00	12.25	1560.20

Πίνακας 4.8: *Οι συχνότητες, και οι αντίστοιχες ενέργειές τους, που θα απαρτίζουν το σήμα z, μετά το φιλτράρισμα* $10 - 20Hz$

4.3.2 Μέτρο σύγκρισης

Όπως αναφέρθηκε, δεν είναι δυνατόν να ξέρουμε το μέγεθος του θορύβου, όταν από το αρχικό θορυβώδες συνθετικό σήμα θέλουμε να πάρουμε μερικά διακριτά ημίτονα, για τη δημιουργία πρότυπων σημάτων, χωρίς την εφαρμογή κάποιου φίλτρου. Οπότε η καταλληλότερη μέθοδος είναι να συγκρίνουμε τα πρότυπα συνθετικά σήματα κάθε ζώνης, που ξέρουμε ποια είναι, με τα φιλτραρισμένα σήματα σε κάθε ζώνη συχνοτήτων και μέθοδο.

Το ιδανικότερο μέτρο σύγκρισης για αυτό το σκοπό είναι ο λόγος της ενέργειας του πρότυπου σήματος προς την ενέργεια της διαφοράς του πρότυπου από το φιλτραρισμένο σήμα. Ο παρανομαστής ουσιαστικά προσδιορίζει το μέγεθος του σφάλματος (διαφοράς) που έχουν τα δύο σήματα. Επομένως όσο μικρότερος είναι, τόσο αυξάνεται το SNR και συνεπώς τόσο καλύτερο θα είναι και το αποτέλεσμα. Ο τύπος που χρησιμοποιείται είναι ο εξής:

$$SNR_{dB} = 10 \cdot log_{10}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}|z_{sin}|^2}{\sum_{i=1}^{N}|z_{sin} - \hat{z}|^2}\right) \tag{4.2}$$

όπου z_{sin} είναι το πρότυπο συνθετικό σήμα κάθε ζώνης συχνοτήτων που αναλύουμε ($5-15\,Hz$, $10-15\,Hz$, $10-20\,Hz$) και $\hat{z}$ είναι το αντίστοιχο φιλτραρισμένο σήμα με Butterworth φίλτρο και με τις μεθόδους μας, στις αντίστοιχες ζώνες.

Για την εξαγωγή των βάσεων στο ζωνοπερατό φιλτράρισμα λήφθηκαν υπόψιν τα αποτελέσματα της παραγράφου 4.2. Συνεπώς, για τα επίπεδα θορύβου 0 και 1 εξήχθησαν 50 συνιστώσες και για τα επίπεδα θορύβου 2 και 3 οι 40, αφού συνολικά τα αποτελέσματα τη ανάλυσης συχνοτήτων ήταν καλύτερα για αυτό το πλήθος συνιστωσών.

4.3.3 Αποτελέσματα

Με την εφαρμογή της εξίσωσης (4.2), παίρνουμε τα αποτελέσματα που φαίνονται στον πίνακα 4.9. Παρατηρούμε ότι οι μέθοδοι μας βγάζουν σχεδόν πάντα το ίδιο αποτέλεσμα εκτός από την περίπτωση που έχουμε στο σήμα θόρυβο επιπέδου 3 και η ζώνη ανάλυσης είναι αυτή των $5-15\,Hz$. Αυτό συμβαίνει γιατί ακόμα και αν έχουμε απορριπτέες βάσεις, όπως στη συγκεκριμένη περίπτωση, αυτές δεν είναι σίγουρο ότι θα προστεθούν στο αναδημιουργημένο σήμα, ακόμα και αν ανήκουν στην ίδια ζώνη συχνοτήτων, αφού θα πρέπει πρώτα να θεωρηθούν κατάλληλες για συμμετοχή στη μέθοδο 2 (παράγραφος 3.3.4).

Αποτελέσματα SNR_{dB}			
Επίπεδο θορύβου 0 (0 dB)			
	Butterworth	Μέθοδος 1	Μέθοδος 2
$5-15Hz$	13.3846	26.3362	26.3362
$10-15Hz$	21.1606	24.6613	24.6613
$10-20Hz$	21.2781	23.1902	23.1902
Επίπεδο θορύβου 1 (37.0069 dB)			
$5-15Hz$	7.8337	11.8401	11.8401
$10-15Hz$	8.7897	12.5015	12.5015
$10-20Hz$	7.8290	4.0428	4.0428
Επίπεδο θορύβου 2 (43.0765 dB)			
$5-15Hz$	2.7356	6.7156	6.7156
$10-15Hz$	2.3587	6.9030	6.9030
$10-20Hz$	1.3849	3.0996	3.0996
Επίπεδο θορύβου 3 (46.4890 dB)			
$5-15Hz$	-0.2640	4.0662	3.7062
$10-15Hz$	-0.9461	4.7368	4.7368
$10-20Hz$	-2.1036	4.6901	4.6901

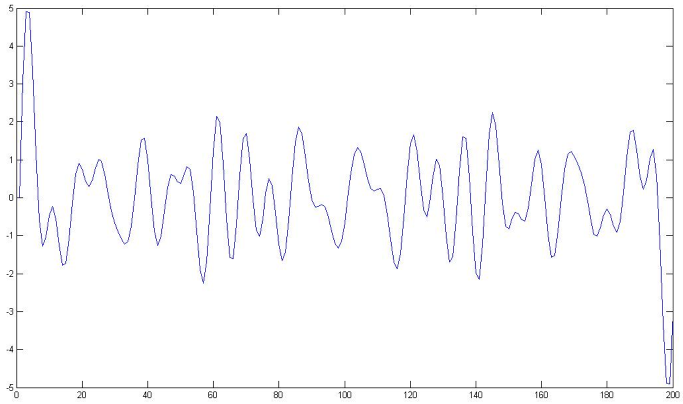
Πίνακας 4.9: *Αποτελέσματα ζωνοπερατού φιλτραρίσματος για συνθετικά δεδομένα σε όλα τα επίπεδα θορύβου.*

Αν και θα έπρεπε η μέθοδος 2 να έχει καλύτερο αποτέλεσμα, δηλαδή μεγαλύτερη τιμή, αυτό δεν συμβαίνει και ο λόγος είναι απλός. Όταν συμμετέχει μία απορριπτέα βάση στην αναδημιουργία, μπορεί μεν η ενέργεια, στο εύρος συχνοτήτων που μας αφορά, να είναι μεγαλύτερη από το 60% της ενέργειας ολόκληρης της βάσης, αλλά δεν γνωρίζουμε κάτι για το συχνοτικό περιεχόμενο της υπόλοιπης βάσης. Έτσι αν αυτή περιέχει το μέγιστο 40% άλλης πληροφορίας, ως προς το πρότυπο σήμα μας η διαφορά είναι μεγαλύτερη, αφού η ενέργεια αυτής της πληροφορίας προστίθεται στο αναδημιουργημένο σήμα.

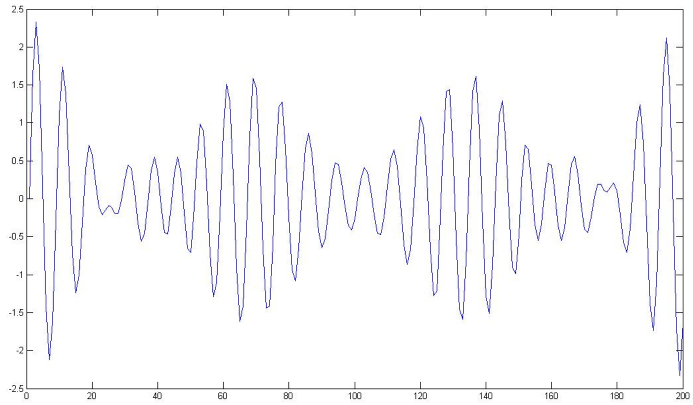
4.3.4 Συμπεράσματα

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος μας έχει σαφώς καλύτερα αποτελέσματα από το φιλτράρισμα με το Butterworth φίλτρο. Αυτό είναι λογικό γιατί όταν το σήμα φιλτράρεται από το Butterworth φίλτρο χάνει μεν τις συχνότητες εκτός της ζώνης που μπορεί να είναι και θόρυβος, αλλά μέσα στη επιλεγμένη ζώνη συχνοτήτων διατηρείται. Εν αντιθέσει, οι μέθοδοι μας, μέσω της επιλογής του κατάλληλου αριθμού συνιστωσών, απορρίπτουν τις συνιστώσες θορύβου εξαρχής κρατώντας μόνο αυτές με τη χρήσιμη πληροφορία.

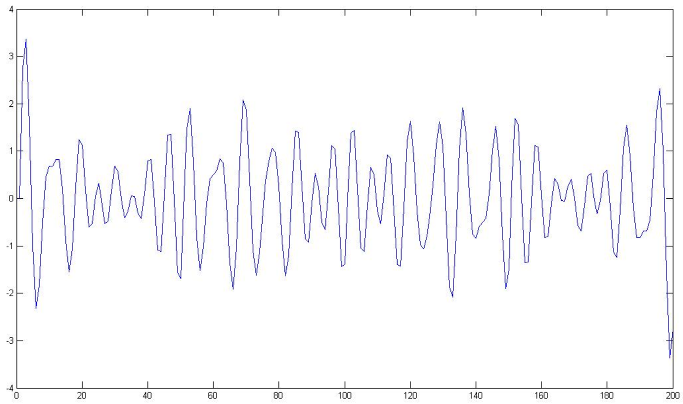
Η διαφορά των μεθόδων φιλτραρίσματος είναι τόσο μεγάλη που από ότι φαίνεται και στον πίνακα 4.9 για επίπεδο θορύβου 3 και Butterworth φιλτράρισμα το σφάλμα ξεπερνάει σε ενέργεια το πρότυπο σήμα. Ενδεικτικά στην εικόνα 4.9, φαίνεται η μορφή των φιλτραρισμένων σημάτων όταν το σήμα έχει θόρυβο επιπέδου 3 και η ζώνη φιλτραρίσματος είναι $5 - 15\,Hz$. Τα υπόλοιπα αποτελέσματα υπάρχουν στο παράρτημα στη σελίδα 83.



(α′) $5-15Hz$

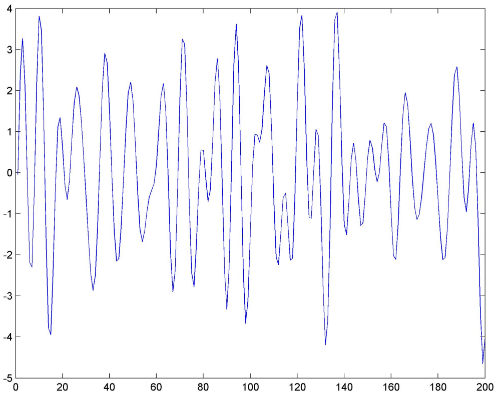


(β′) $10-15Hz$

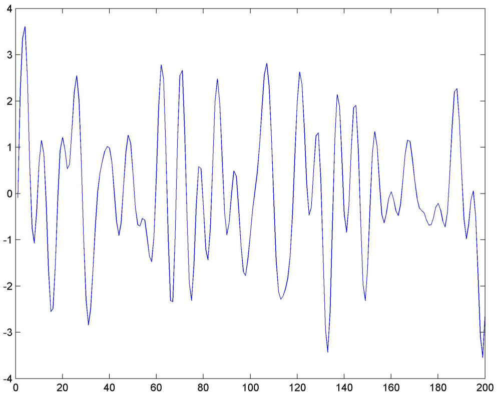


(γ′) $10-20Hz$

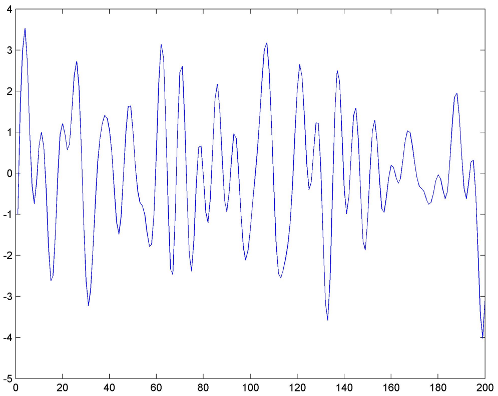
Εικόνα 4.8: *Στις εικόνες φαίνονται τα συνθετικά πρότυπα σήματα, που προκύπτουν από το άθροισμα των ημιτόνων που αντιστοιχούν στην κάθε ζώνη συχνοτήτων. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.*



(α′) *Butterworth*



(β′) *Method 1*



(γ′) *Method 2*

Εικόνα 4.9: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $5-15Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 3)*

Κεφάλαιο 5

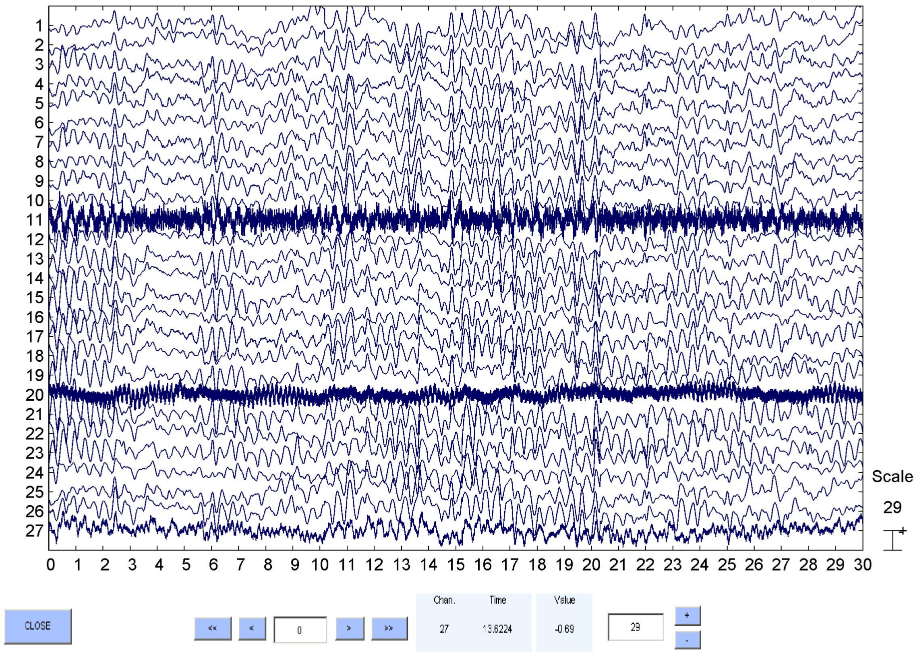
Αποτελέσματα μεθόδου σε πραγματικό δεδομένα ΗΕΓ

5.1 Πραγματικά δεδομένα ΗΕΓ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την επεξεργασία πραγματικών καταγραφών εγκεφαλογραφήματος ενός ατόμου. Πρόκειται για καταγραφή της εγκεφαλικής δραστηριότητας κατά τη διάρκεια της διεξαγωγής ενός ακουστικού πειράματος. Ο συμμετέχοντας βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, με κλειστά τα μάτια, και πρέπει να ανταποκριθεί στον ήχο αυτό, πατώντας ένα κουμπί όσο γρηγορότερα μπορεί. Κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας αυτού του ερεθίσματος από τον εγκέφαλο, παράγονται ηλεκτρικά σήματα, τα οποία και καταγράφονται από το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα.

Οι καταγραφές αυτές παρουσιάζουν μια θετική κορύφωση δυναμικού περίπου 250 με 500 msec μετά το ερέθισμα (τμήμα P300). Το σήμα αυτό καταγράφεται κυρίως σε δυο κανάλια, στο Cz και στο Pz. Όμως έχει παρατηρηθεί, ότι οι σημαντικότερες καταγραφές είναι αυτές του Cz. Έχει αποδειχθεί, ότι η απόκριση στο ερέθισμα P300 επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες συμπεριλαμβανομένης της ηλικίας, του φύλου κ.α.

Η καταγραφή του εγκεφαλογραφήματος έχει γίνει με 27 ηλεκτρόδια, καλύπτοντας την μέγιστη δυνατή επιφάνεια. Τα ηλεκτρόδια ήταν τοποθετημένα σύμφωνα με το σύστημα 10-20 (§1.4.1). Η καταγραφή για τον εξεταζόμενο έχει 41 δοκιμές. Η δειγματοληψία έγινε με συχνότητα 1024 Hz και με τη χρήση τριών φίλτρων. Ενός υψιπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής 0,016 Hz, ενός χαμηλοπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής 60 Hz και ενός φίλτρου με συχνότητα 50 Hz, το οποίο χρησιμοποιείται για να αφαιρέσει την τα παράσιτα από το δίκτυο ηλεκτροδότησης.



Εικόνα 5.1: *Τα πραγματικά δεδομένα του ΗΕΓ. Από αυτά θα επιλέξουμε το κανάλι Cz το οποίο θα φιλτραριστεί. Στην εικόνα το κανάλι Cz αντιστοιχεί στο σήμα 26*

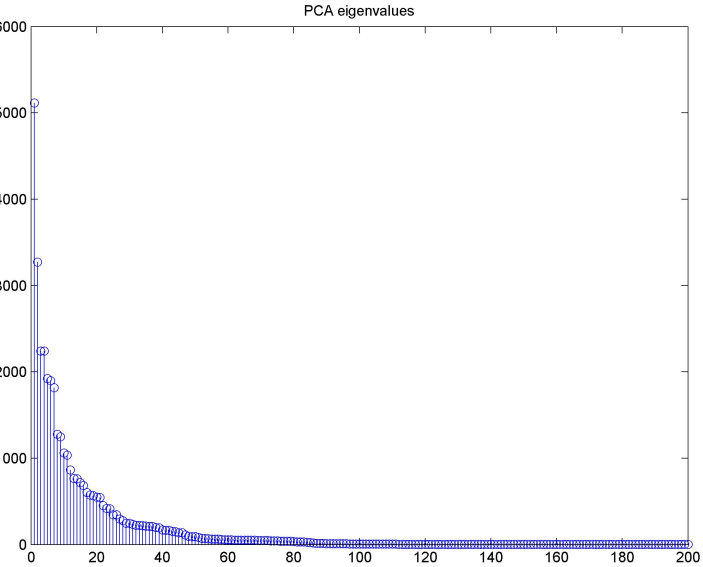
5.2 Ζωνοπερατό φιλτράρισμα στα πραγματικά δεδομένα

Στα πραγματικά δεδομένα θα ακολουθήσουμε δύο τρόπους για να εξάγουμε αποτελέσματα. Ο ένας θα είναι να εφαρμόσουμε ρητά τον αλγόριθμο της χρονικής ICA στα δεδομένα, παίρνοντας έτσι αποτελέσματα για το ζωνοπερατό φιλτράρισμα σε μία χωρική συνιστώσα του ΗΕΓ. Ο άλλος τρόπος είναι να εφαρμόσουμε τη χρονική ICA σε ένα κανάλι του αρχικού ΗΕΓ, που δεν έχει υποστεί περαιτέρω επεξεργασία. Έτσι επιλέγοντας το κανάλι Cz, εφαρμόζουμε το ζωνοπερατό φιλτράρισμα όπως ακριβώς και στα συνθετικά δεδομένα στο προηγούμενο κεφάλαιο.

5.2.1 Επεξεργασία καναλιού Cz του ΗΕΓ

Πρώτο βήμα του αλγορίθμου είναι να υποδειγματοληπτηθούν τα πραγματικά δεδομένα από 1024 Hz σε 100 Hz. Αμέσως μετά μετατρέπουμε το κανάλι Cz στον πίνακα καθυστερήσεων και βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του. Από την εικόνα 5.2 είναι φανερό ότι μία καλή επιλογή είναι να επιλέξουμε 40 ιδιοτιμές, ώστε να πάρουμε 40 χρονικές συνιστώσες. Επομένως εφαρμόζουμε πρώτα την PCA στον πίνακα και μετά την χωρική ICA για την εξαγωγή 40 σημάτων.

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier στις χρονικές βάσεις, για να βρούμε το συχνο-



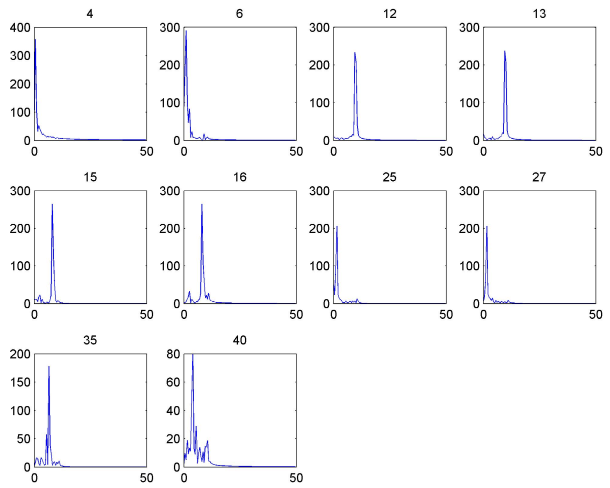
Εικόνα 5.2: *Οι ιδιοτιμές του πίνακα καθυστέρησης για το κανάλι Cz. Από την εικόνα φαίνεται ότι μία καλή επιλογή είναι αυτή των 40 ιδιοτιμών ώστε να εξαχθούν 40 χρονικές συνιστώσες*

τικό περιεχόμενό τους. Επιλέγουμε ένα σύνολο από βάσεις, που θα αποτελούν τις αποδεκτές βάσεις μας και που θα συμμετέχουν στην εφαρμογή της πρώτης μεθόδου φιλτραρίσματος. Αυτές οι βάσεις παρουσιάζονται στην εικόνα 5.3. Η κύρια συχνότητα κάθε βάσης, επιβεβαιώνει το ισχυρισμό ότι η περισσότερη πληροφορία βρίσκεται στις ζώνες Δέλτα, Θήτα και Άλφα, αφού οι μέγιστες τιμές σε συχνότητες στις αποδεκτές βάσεις κυμαίνονται από 0.5 Hz (η βάση 4) μέχρι και 9.5 Hz. Αν λάβουμε υπόψιν και τις απορριπτέες μπορούμε να πούμε ότι οι μέγιστες τιμές συχνοτήτων παρουσιάζονται στα 10 Hz στις βάσεις 1 και 2 (εικόνα 5.4).

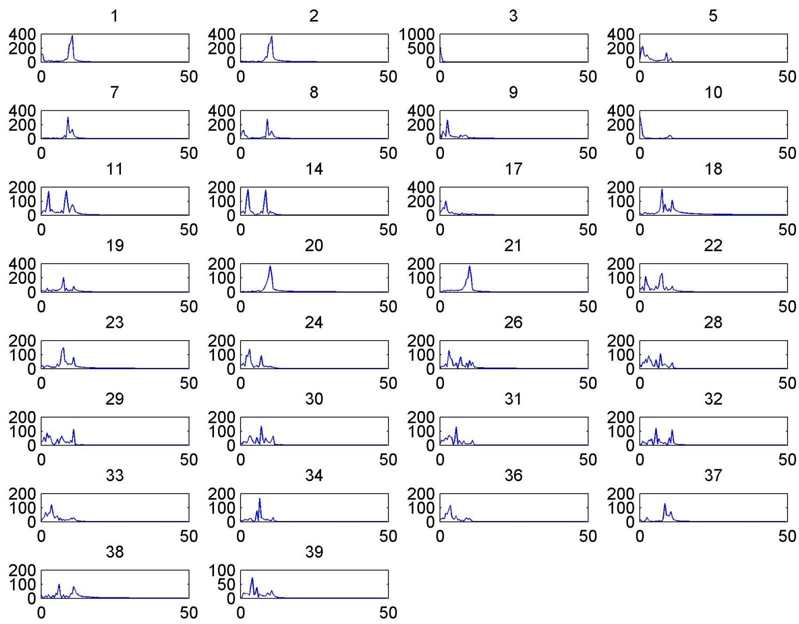
Για την εφαρμογή της δεύτερης μεθόδου επιλέγονται και ορισμένες από τις απορριπτέες βάσεις (εικόνα 5.4) κάθε φορά, συγχρόνως με τις αποδεκτές, για την αναδημιουργία του φιλτραρισμένου σήματος.

5.2.1.1 Εφαρμογή φιλτραρίσματος και αποτελέσματα (κανάλι Cz)

Τα περισσότερα εγκεφαλικά σήματα που παρατηρούνται στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα βρίσκονται στη ζώνη συχνοτήτων 1-20 Hz. Συνεπώς οι ζώνες συχνοτήτων που μας ενδιαφέρουν είναι οι Δέλτα, Θήτα και Άλφα. Με τον ίδιο τρόπο όπως και με τα συνθετικά δεδομένα κάνουμε πρώτα ζωνοπερατό φιλτράρισμα με Butterworth φίλτρο, μετά αθροίζοντας τις χρονικές συνιστώσες που αντιστοιχίζονται με τις αποδεκτές βάσεις παίρνουμε το φιλτραρισμένο σήμα της πρώτης μεθόδου και επιλέγοντας κάποιες άλλες συνιστώσες από τις απορριπτέες



Εικόνα 5.3: *Οι αποδεκτές βάσεις της χρονικής ανάλυσης του καναλιού Cz πραγματικών δεδομένων ΗΕΓ. Οι αντίστοιχες χρονικές συνιστώσες τους θα συμμετάσχουν στην αναδημιουργία του φιλτραρισμένου σήματος. Ο αριθμός πάνω από κάθε γράφημα αντιστοιχεί στη θέση της χρονικής βάσης στον πίνακα μίξης.*

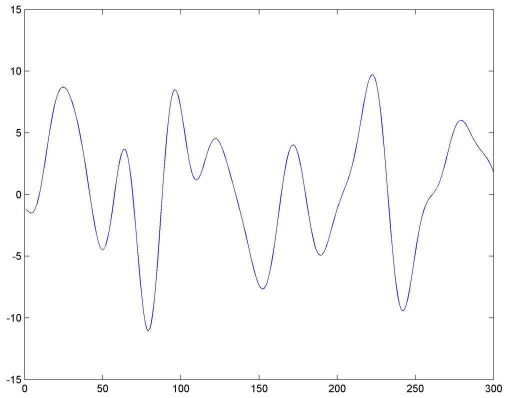


Εικόνα 5.4: *Οι απορριπτέες βάσεις του πραγματικού καναλιού. Για όσες βάσεις κριθούν κατάλληλες, οι αντίστοιχες χρονικές συνιστώσες θα συμμετέχουν στην αναδημιουργία του φιλτραρισμένου σήματος.*

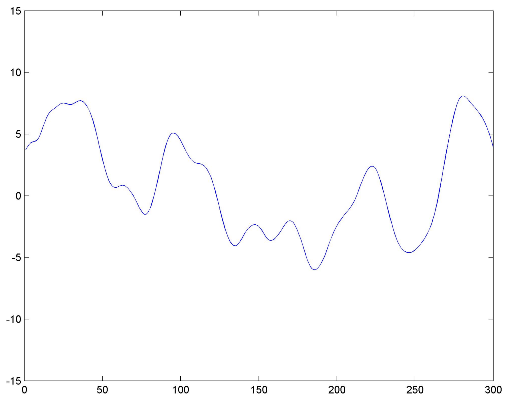
παίρνουμε το φιλτραρισμένο σήμα της δεύτερης μεθόδου.

Επιλέγουμε να δείξουμε τρία δευτερόλεπτα από το κάθε ανακατασκευασμένο σήμα, δηλαδή τα 300 πρώτα δείγματα, για να υπάρχει ένας τρόπος σύγκρισης των αποτελεσμάτων.

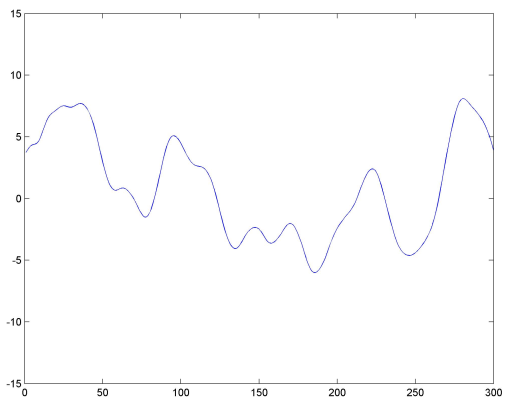
Τα σήματα αυτά φαίνονται στις εικόνες 5.5, 5.6 και 5.7.



(α′) *Butterworth*

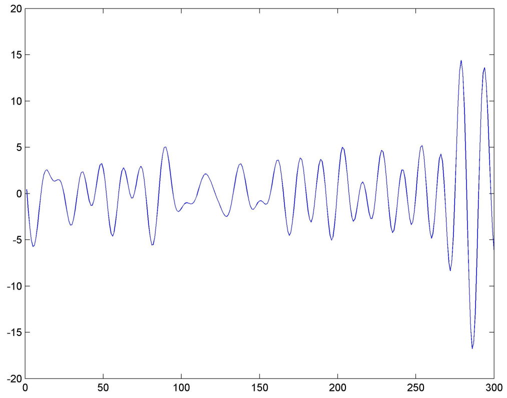


(β′) *Method 1*

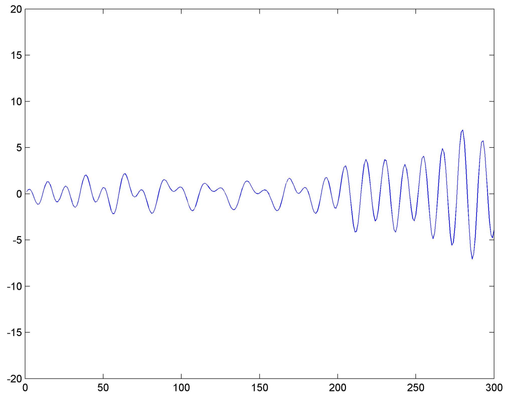


(γ′) *Method 2*

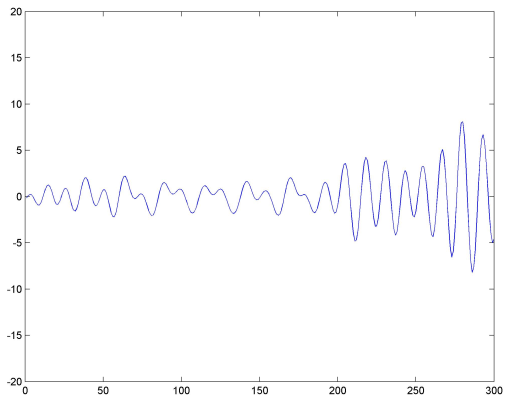
Εικόνα 5.5: *Στις εικόνες φαίνεται το φιλτραρισμένο πραγματικό σήμα καναλιού ΗΕΓ και από τις τρεις μεθόδους. Το εύρος συχνοτήτων είναι 0.5-4Hz*



(α′) *Butterworth*

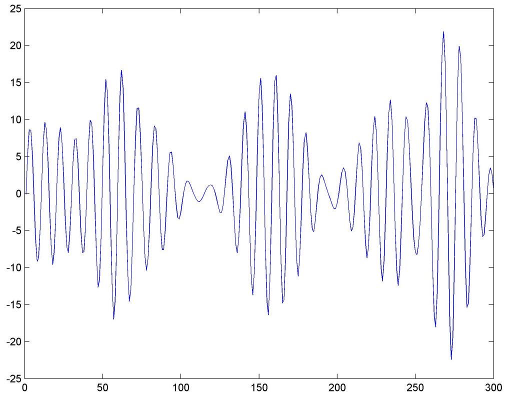


(β′) *Method 1*

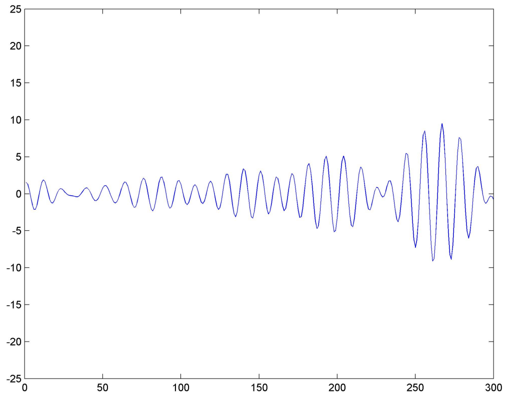


(γ′) *Method 2*

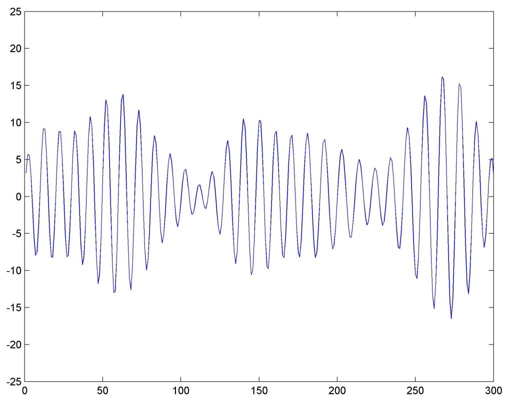
Εικόνα 5.6: *Στις εικόνες φαίνεται το φιλτραρισμένο πραγματικό σήμα καναλιού ΗΕΓ και από τις τρεις μεθόδους. Το εύρος συχνοτήτων είναι 4-8Hz*



(α′) *Butterworth*



(β′) *Method 1*

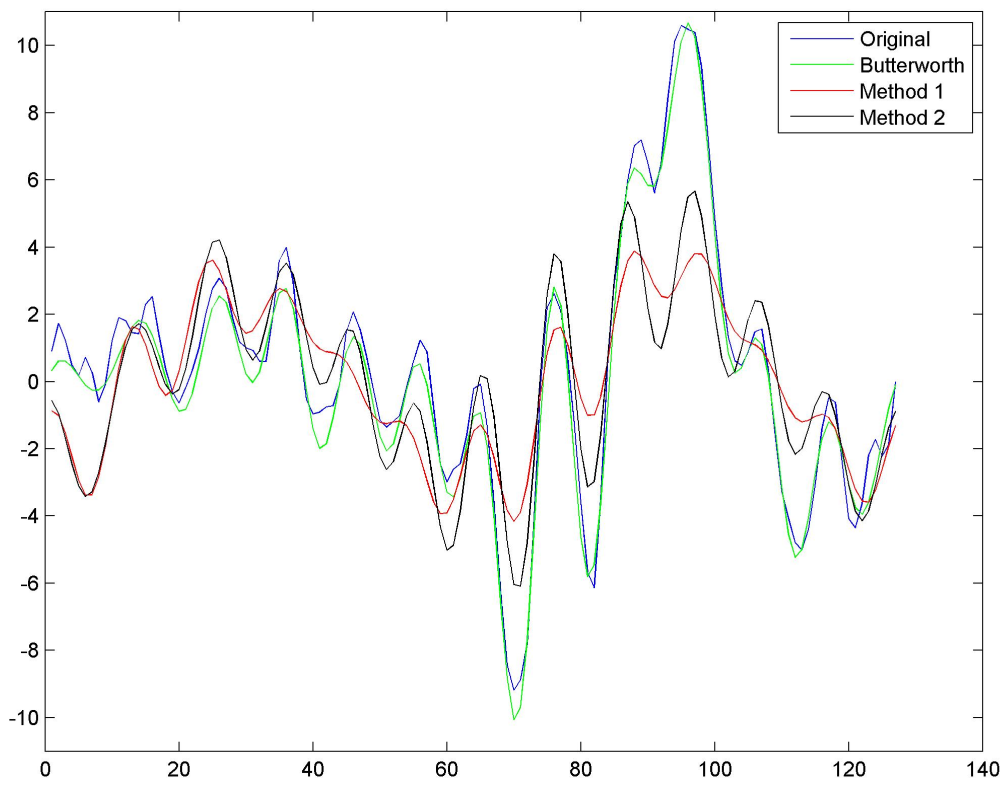


(γ′) *Method 2*

Εικόνα 5.7: *Στις εικόνες φαίνεται το φιλτραρισμένο πραγματικό σήμα καναλιού ΗΕΓ και από τις τρεις μεθόδους. Το εύρος συχνοτήτων είναι 8-13Hz*

5.2.1.2 Συμπεράσματα

Παρατηρούμε ότι γενικά το φιλτράρισμα με φίλτρο Butterworth δίνει σήματα που τις περισσότερες, αν όχι όλες τις φορές, έχουν μεγαλύτερο πλάτος από τις 2 άλλες μεθόδους. Λογικό, καθώς έχουμε αναφέρει ότι το ζωνοπερατό φίλτρο ναι μεν κόβει τις συχνότητες εκτός ζώνης, αλλά η πληροφορία και ο θόρυβος που υπάρχει παραμένει στη ζώνη φιλτραρίσματος και συνεπώς και στο φιλτραρισμένο σήμα. Έτσι, αθροιστικά αυξάνεται και το πλάτος του φιλτραρισμένου σήματος με Butterworth.



Εικόνα 5.8: *Σύγκριση των averaged δοκιμών στο πραγματικό σήμα ΗΕΓ (κανάλι Cz), μεταξύ του αρχικού μη φιλτραρισμένου σήματος με τα σήματα που προκύπτουν από όλες τις μεθόδους.*

Για να έχουμε μία πληρέστερη εκτίμηση παρουσιάζουμε στην εικόνα 5.8 τις averaged δοκιμές. Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, η καταγραφή για τον εξεταζόμενο έχει 41 δοκιμές. Φιλτράροντας το σήμα και στις τρεις ζώνες, παίρνουμε το φιλτραρισμένο σήμα, που εμπεριέχει τη δραστηριότητα του εγκεφάλου όλων των δοκιμών σε κάθε ζώνη. Προσθέτουμε τα εξαγόμενα σήματα κάθε τρόπου φιλτραρίσματος και δημιουργούμε το καινούργιο σήμα που αποτελεί την ζωνοπερατή έκδοση του καναλιού Cz, σε εύρος συχνοτήτων 0.5-13 Hz.

Σε αυτό αναπαρίσταται συνολικά η δραστηριότητα του εγκεφάλου στο εύρος συχνοτήτων 0.5-13 Hz.

Για να έχουμε καλύτερη αποτύπωση της εγκεφαλικής λειτουργίας και συνεπώς καλύτερη επεξεργασία θα πρέπει να καταγράφονται περισσότερες δοκιμές, πράγμα δύσκολο αφού μετά από μερικές μετρήσεις το άτομο κουράζεται και χάνει την αυτοσυγκέντρωση του, επηρεάζοντας τα προκλητά δυναμικά στην ένταση και στο χρόνο.

Για να δούμε τη δραστηριότητα του εγκεφάλου συνολικά, βρίσκουμε τη μέση δοκιμή για κάθε μέθοδο φιλτραρίσματος (εικόνα 5.8). Η μέση δοκιμή αποτελείται από 127 δείγματα. Φαίνεται το φιλτράρισμα με το φίλτρο Butterworth να πλησιάζει περισσότερο μορφολογικά τη μέση δοκιμή του αρχικού καναλιού. Αυτό είναι λογικό αφού με το φίλτρο, όπως είπαμε, ο θόρυβος παραμένει στο σήμα και στην ουσία δεν υπάρχει κάποια αλλαγή στη μέση δοκιμή.

Είναι σαφές ότι η δεύτερη μέθοδος μας (μαύρη γραμμή) έχει σημαντικά καλύτερο αποτέλεσμα από την πρώτη και αυτό διότι χρησιμοποιεί περισσότερες χρονικές βάσεις σε κάθε ζώνη συχνοτήτων από την πρώτη. Πράγμα που σημαίνει ότι, συγκεκριμένα για τα πραγματικά δεδομένα, η όποια προσθήκη βάσεων που δεν συμμετέχουν στην μέθοδο 1, έχει σαν αποτέλεσμα την σημαντικά περισσότερη χρήσιμης πληροφορίας από το κανάλι. Έτσι επιβεβαιώνεται ότι στις ζώνες συχνοτήτων Δέλτα, Θήτα, Άλφα όπως φαίνεται και από τη μέση δοκιμή έχουμε την εμφάνιση μιας θετικής κορύφωσης (τμήμα P300).

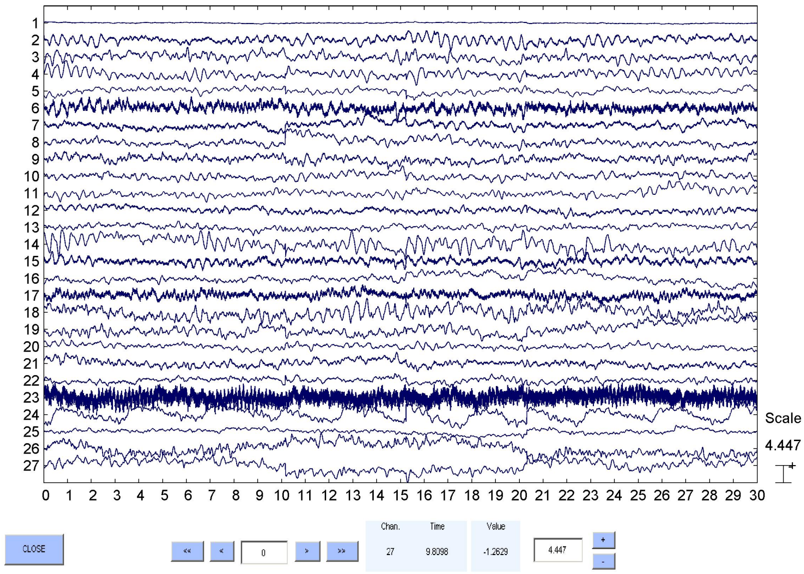
5.2.2 Επεξεργασία συνιστώσας του ΗΕΓ

Σε αυτό το σημείο θα εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία με πριν, μόνο που το αρχικό μας σήμα θα είναι χωρική συνιστώσα. Στα αρχικά πραγματικά υποδειγματοληπτημένα δεδομένα του ΗΕΓ (κανάλια), εφαρμόζουμε την χωρική ICA και παίρνουμε τις ανεξάρτητες συνιστώσες.

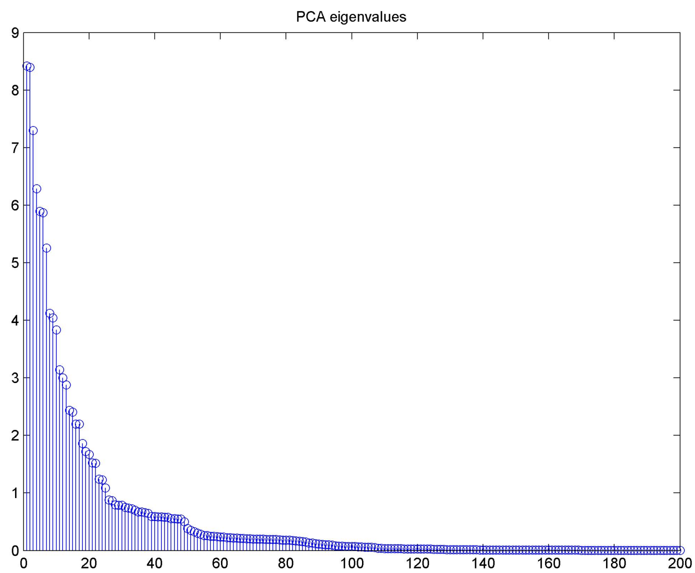
Για την επιλογή της συνιστώσας προβάλλουμε τις χωρικές βάσεις, ώστε να εντοπίσουμε μία η οποία να δείχνει την πηγή δραστηριότητας όσο πιο κοντά στη θέση του Cz γίνεται (πάνω και στη μέση του κρανίου). Έτσι θα είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων μας.

Επομένως, εφόσον η χωρική βάση αποτελεί προβολή της αντίστοιχης χωρικής συνιστώσας, συμπεραίνουμε ότι θα φιλτράρουμε την 2. Στην εικόνα 5.9 φαίνεται και η μορφολογία της.

Δημιουργήσουμε για ακόμα μία φορά τον πίνακα καθυστέρησης χρησιμοποιώντας τη δεύτερη συνιστώσα. Για να επιλέξουμε πόσες χρονικές συνιστώσες θα εξάγουμε προβάλλουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα καθυστέρησης (εικόνα 5.10). Βλέποντας το διάγραμμα αποφασίζουμε να επιλέξουμε την εξαγωγή 50 χρονικών βάσεων και επομένως 50 χρονικών συνιστωσών.

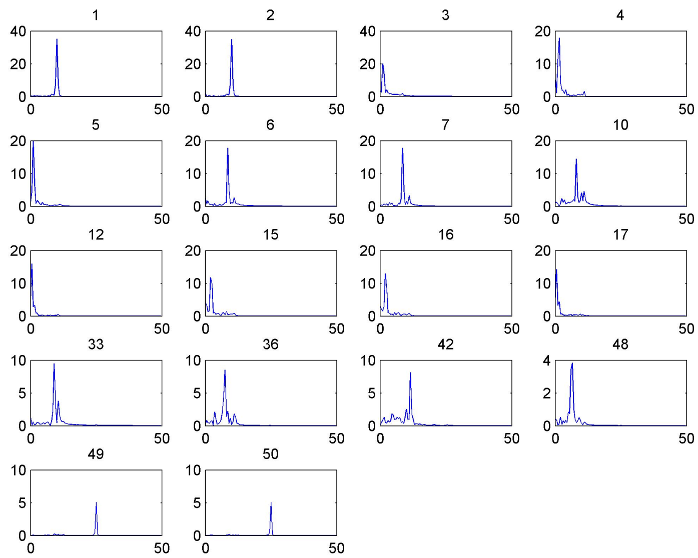


Εικόνα 5.9: *Οι χωρικές (ανεξάρτητες) συνιστώσες του ΗΕΓ. Από αυτές επιλέγουμε την 2 την οποία θα φιλτράρουμε.*



Εικόνα 5.10: *Οι ιδιοτιμές του πίνακα καθυστέρησης για την χωρική συνιστώσα 2. Από την εικόνα φαίνεται ότι μία καλή επιλογή είναι αυτή των 50 ιδιοτιμών ώστε να εξαχθούν 50 χρονικές συνιστώσες.*

Εφαρμόζουμε και πάλι το μετασχηματισμό Fourier στις χρονικές βάσεις, για να βρούμε το συχνοτικό περιεχόμενό τους. Επιλέγουμε ένα σύνολο από βάσεις, που θα αποτελούν τις αποδεκτές βάσεις μας και που θα συμμετέχουν στην εφαρμογή της πρώτης μεθόδου φιλτραρίσματος. Αυτές οι βάσεις παρουσιάζονται στην εικόνα 5.11. Είναι φανερό ότι αυτές οι χρονικές βάσεις βρίσκονται επίσης στη ζώνη ενδιαφέροντος όπου καταγράφεται και η περισσότερη πληροφορία. Έτσι, υπολογίζοντας το συχνοτικό τους περιεχόμενο διαπιστώνουμε ότι η πληροφορία των βάσεων κυμαίνεται στις ζώνες Δέλτα, Θήτα, και Άλφα.

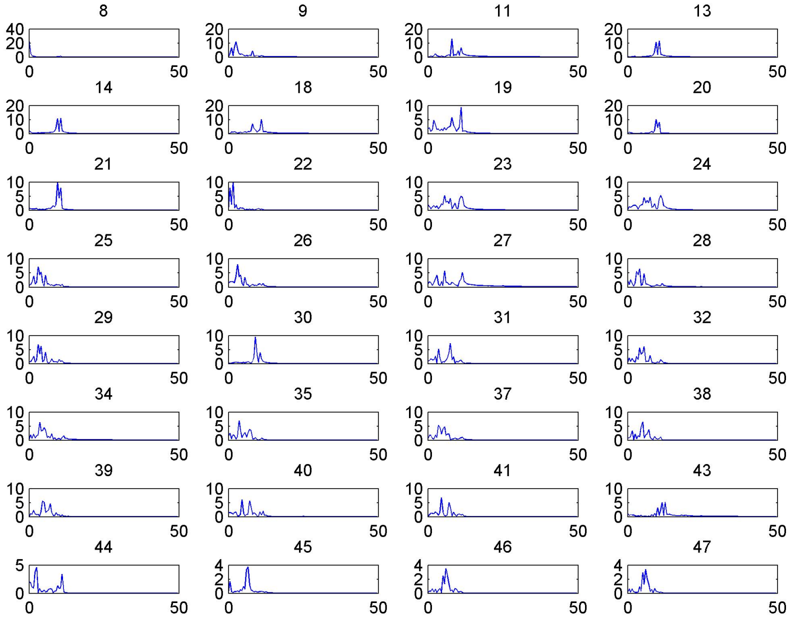


Εικόνα 5.11: *Οι αποδεκτές βάσεις της χωρικής συνιστώσας που πήραμε από πραγματικά δεδομένα ΗΕΓ. Οι χρονικές συνιστώσες που τους αντιστοιχούν συμμετέχουν στην αναδημιουργία του φιλτραρισμένου σήματος. Ο αριθμός πάνω από κάθε γράφημα δηλώνει στη θέση της χρονικής βάσης στον πίνακα μίξης.*

Για την εφαρμογή της δεύτερης μεθόδου επιλέγονται και ορισμένες από τις απορριπτέες βάσεις (εικόνα 5.12) κάθε φορά, συγχρόνως με τις αποδεκτές, για την αναδημιουργία του φιλτραρισμένου σήματος.

5.2.2.1 Εφαρμογή φιλτραρίσματος και αποτελέσματα (συνιστώσα)

Επιλέγουμε να δείξουμε τρία δευτερόλεπτα από το κάθε ανακατασκευασμένο σήμα, δηλαδή τα 300 πρώτα δείγματα, για να υπάρχει ένας τρόπος σύγκρισης από την κυματομορφής των αποτελεσμάτων. Οι εικόνες των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται στις επόμενες σελίδες και είναι οι 5.14, 5.15 και 5.16.



Εικόνα 5.12: *Οι απορριπτέες χρονικές βάσεις της συνιστώσας πραγματικών δεδομένων ΗΕΓ. Για όσες βάσεις κριθούν κατάλληλες, οι αντίστοιχες χρονικές συνιστώσες θα συμμετέχουν στην αναδημιουργία του φιλτραρισμένου σήματος.*

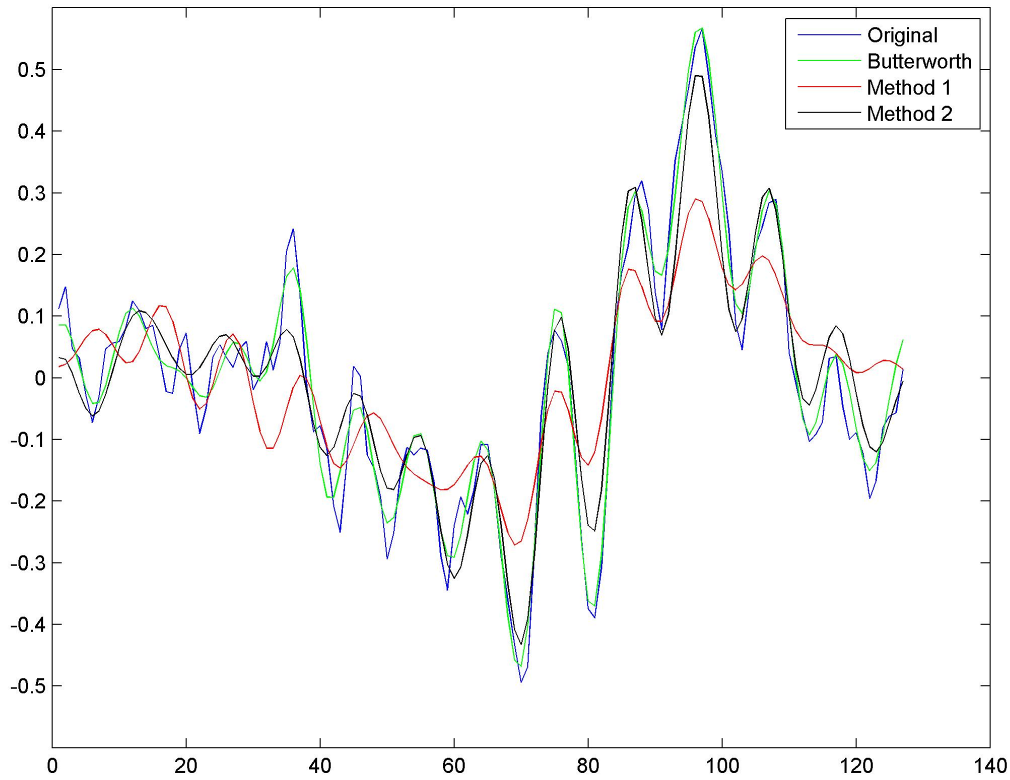
5.2.2.2 Συμπεράσματα

Παρατηρούμε και εδώ ότι το φιλτράρισμα με φίλτρο Butterworth δίνει σήματα που τις περισσότερες φορές έχουν μεγαλύτερο πλάτος από τις μεθόδους 1 και 2.

Για να έχουμε μία πληρέστερη εκτίμηση παρουσιάζουμε στην εικόνα 5.13 τις averaged δοκιμές. Για να δούμε τη δραστηριότητα του εγκεφάλου συνολικά, βρίσκουμε τη μέση δοκιμή για κάθε μέθοδο φιλτραρίσματος (εικόνα 5.13).

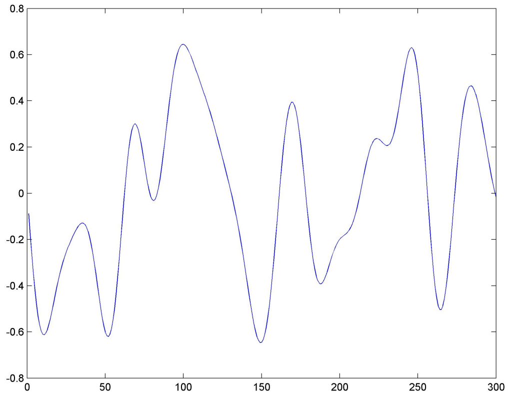
Είναι σαφές ότι η δεύτερη μέθοδος μας (μαύρη γραμμή) έχει και σε αυτή την περίπτωση σημαντικά καλύτερο αποτέλεσμα από την πρώτη. Διακρίνεται η μεγαλύτερη θετική ακμή P300 (στο 100στό δείγμα της μέσης δοκιμής), πράγμα που σημαίνει ότι, η όποια προσθήκη βάσεων που δεν συμμετέχουν στην μέθοδο 1, έχει σαν αποτέλεσμα τη σημαντικά περισσότερη παρουσίαση χρήσιμης πληροφορίας από τη χωρική συνιστώσα.

Βλέπουμε ότι πάλι η κυματομορφή που αντιπροσωπεύει το Butterworth φίλτρο είναι σχεδόν ίδια με του αρχικού σήματος, δηλαδή της συνιστώσας. Αυτό συμβαίνει και πάλι γιατί στο εύρος συχνοτήτων που υπάρχει η χρήσιμη πληροφορία, το Butterworth φίλτρο δεν αφαιρεί το θόρυβο. Η συνιστώσα είναι πολύ πιο "καθαρή" από θόρυβο σε σχέση με το κανάλι, αλλά

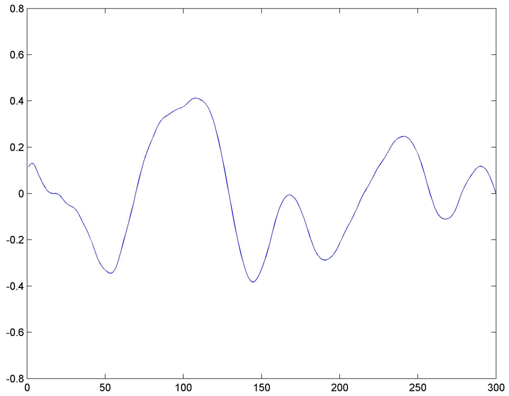


Εικόνα 5.13: *Σύγκριση των averaged δοκιμών στο πραγματικό σήμα ΗΕΓ (συνιστώσα), μεταξύ του αρχικού μη φιλτραρισμένου σήματος με τα σήματα που προκύπτουν από όλες τις μεθόδους.*

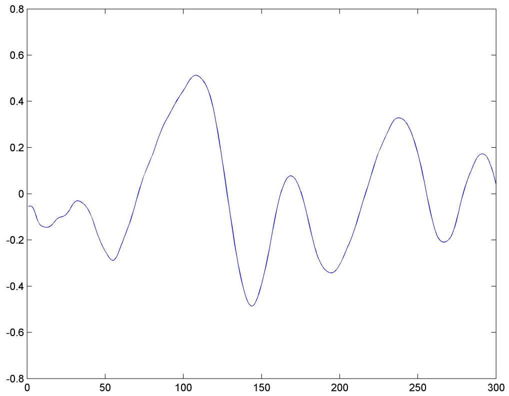
ακόμα και έτσι περιέχεται θόρυβος από την ίδια τη δραστηριότητα του εγκεφάλου.



(α′) *Butterworth*

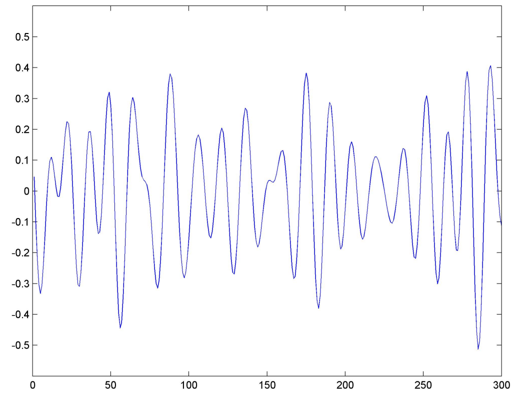


(β′) *Method 1*

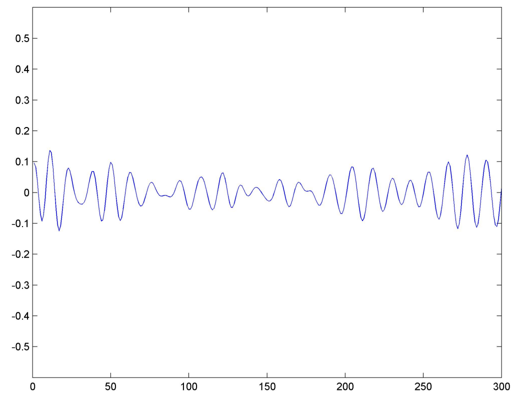


(γ′) *Method 2*

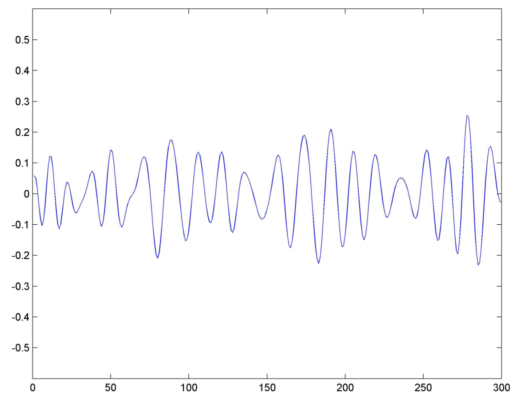
Εικόνα 5.14: *Στις εικόνες φαίνεται η φιλτραρισμένη ανεξάρτητη συνιστώσα με τη χρήση και των τριών μεθόδων. Το εύρος συχνοτήτων είναι 0.5-4Hz*



(α′) *Butterworth*

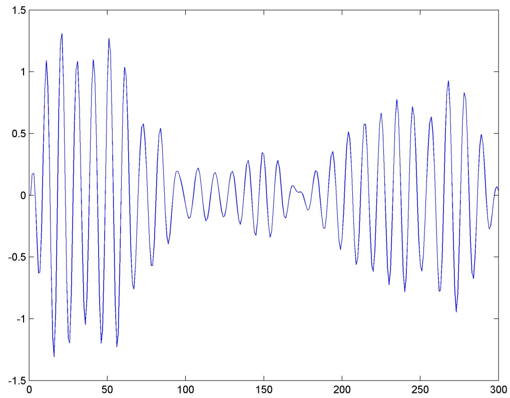


(β′) *Method 1*

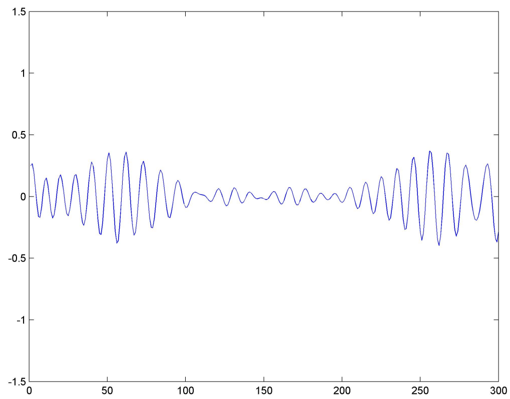


(γ′) *Method 2*

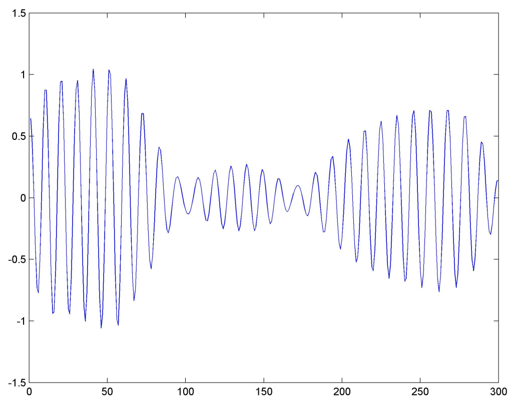
Εικόνα 5.15: *Στις εικόνες φαίνεται η φιλτραρισμένη ανεξάρτητη συνιστώσα με τη χρήση και των τριών μεθόδων. Το εύρος συχνοτήτων είναι 4-8Hz*



(α′) *Butterworth*



(β′) *Method 1*



(γ′) *Method 2*

Εικόνα 5.16: *Στις εικόνες φαίνεται η φιλτραρισμένη ανεξάρτητη συνιστώσα με τη χρήση και των τριών μεθόδων. Το εύρος συχνοτήτων είναι 8-13Hz*

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία εφαρμόζουμε μια μέθοδο για την εξαγωγή της χρήσιμης πληροφορίας από ένα ηλεκτροεγκεφαλογράφημα. Με την μέθοδο αυτή μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα χαρακτηριστικά του εγκεφαλογραφήματος.

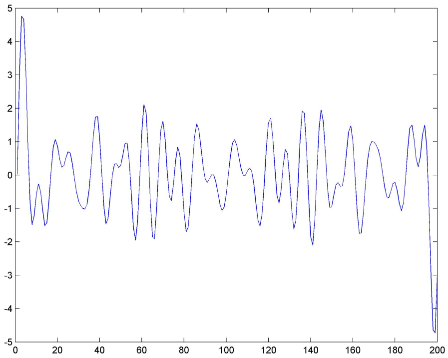
Από την μία η μέθοδος μπορεί να χρησιμεύσει σαν στάδιο φιλτραρίσματος ώστε να απομονώσεις τη χρήσιμη πληροφορία από το θόρυβο και να κρατηθεί μόνο η χρήσιμη πληροφορία, και από την άλλη, η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αναλυτικό εργαλείο του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος. Παρατηρώντας τη χωρική κατανομή των σημάτων και το συχνοτικό περιεχόμενο, μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με την κατάσταση του ασθενούς.

Η μέθοδος έδωσε καλά αποτελέσματα, με τις παραμέτρους που την υλοποιήσαμε, και στα συνθετικά δεδομένα. Αναλύσαμε σε ανεξάρτητες συχνότητες ένα περιοδικό σήμα, με διάφορα επίπεδα θορύβου, με καλά αποτελέσματα, γεγονός που δείχνει τη σταθερότητα της λειτουργίας της.

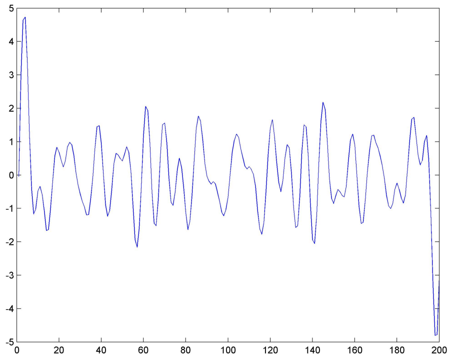
Στο πραγματικό εγκεφαλογράφημα, εφαρμόσαμε τη μέθοδο στις ζώνες συχνοτήτων εκείνες όπου υπάρχει χρήσιμη πληροφορία, στην Δέλτα, Θήτα και Άλφα, στο κανάλι Cz, αλλά και από στην ανεξάρτητη συνιστώσα που χωρικά τοποθετείται στην κεντρική περιοχή του εγκεφάλου. Τα αποτελέσματα που πήραμε δείχνουν ότι η μέθοδος μπορεί να διαχωρίσει τη δραστηριότητα στις χρήσιμες ζώνες συχνοτήτων και να φιλτράρει αποτελεσματικά το θόρυβο.

Με την μέθοδο να είναι αποκλειστικά εφαρμοσμένη σε ένα άτομο κάθε φορά, τα χαρακτηριστικά που εξάγουμε χαρακτηρίζουν την λειτουργικότητα του εγκεφάλου του. Σε συνδυασμό με περισσότερη πληροφορία, δηλαδή περισσότερες δοκιμές σε κάθε εγκεφαλογράφημα για ένα άτομο, η μέθοδος θα μπορεί να εξάγει περισσότερα και ακριβέστερα χαρακτηριστικά.

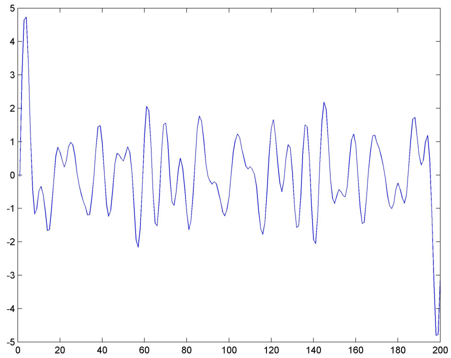
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



(α′) *Butterworth*

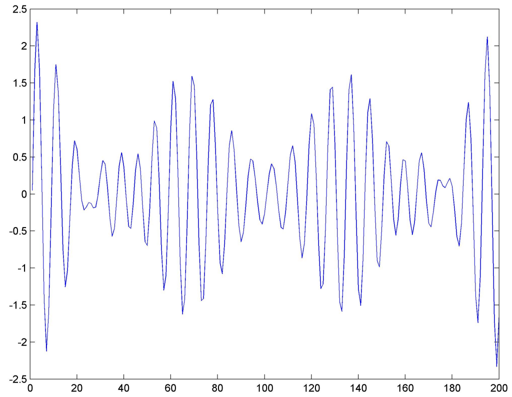


(β′) *Method 1*

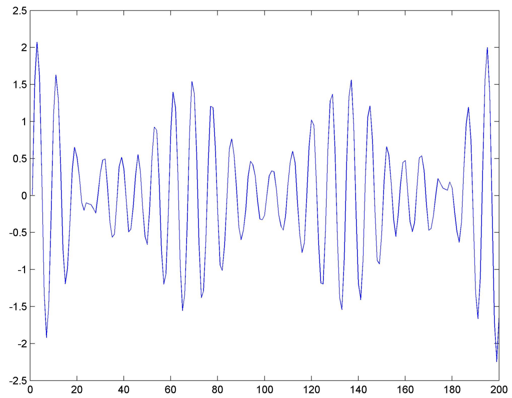


(γ′) *Method 2*

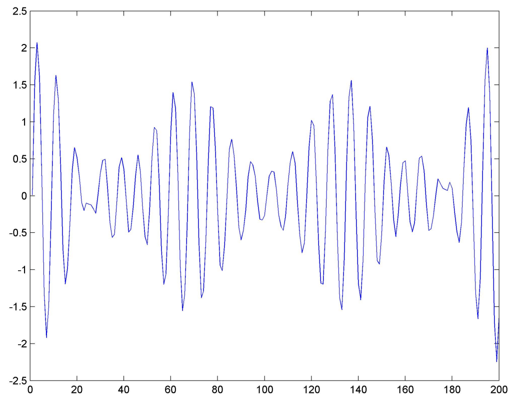
Εικόνα 1: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $5 - 15Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 0)*



(α′) *Butterworth*

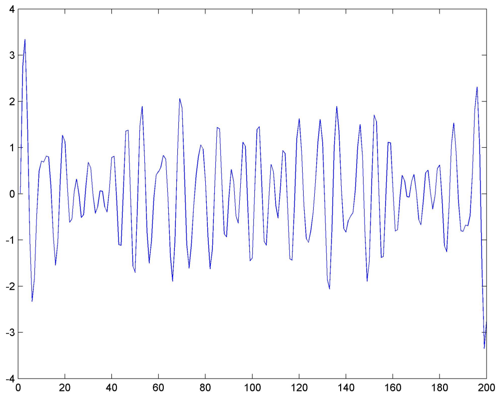


(β′) *Method 1*

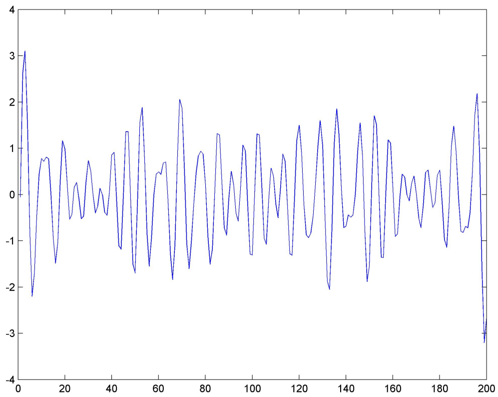


(γ′) *Method 2*

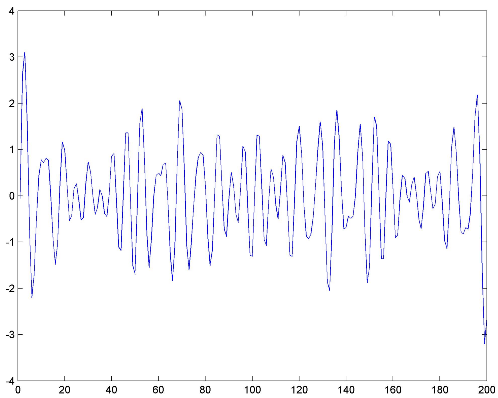
Εικόνα 2: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $10 - 15Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 0)*



(α′) *Butterworth*

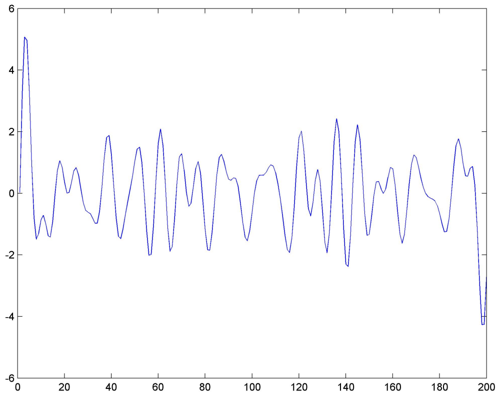


(β′) *Method 1*

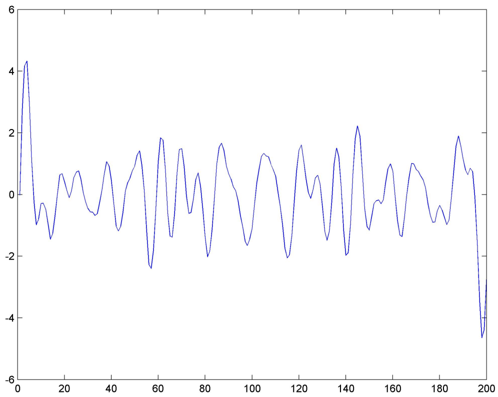


(γ′) *Method 2*

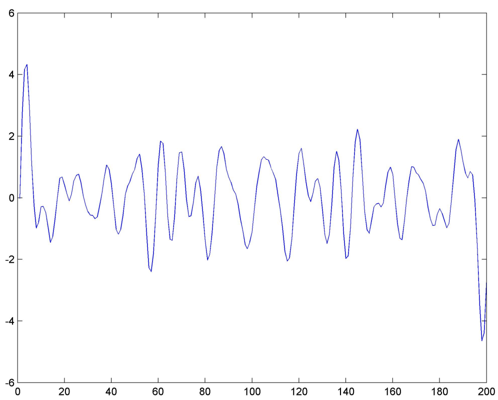
Εικόνα 3: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $10 - 20Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 0)*



(α′) *Butterworth*

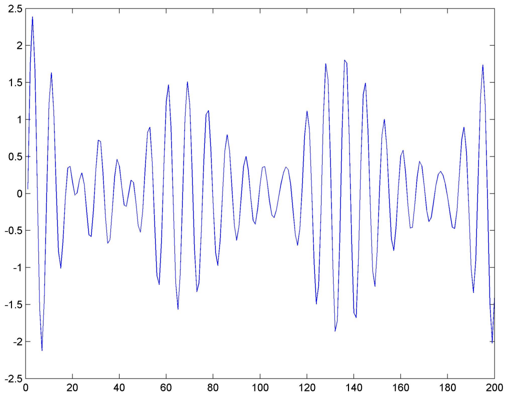


(β′) *Method 1*

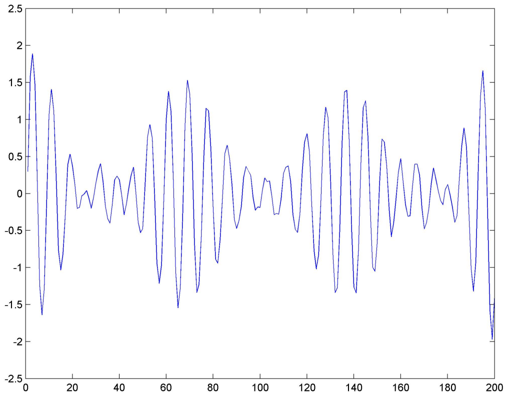


(γ′) *Method 2*

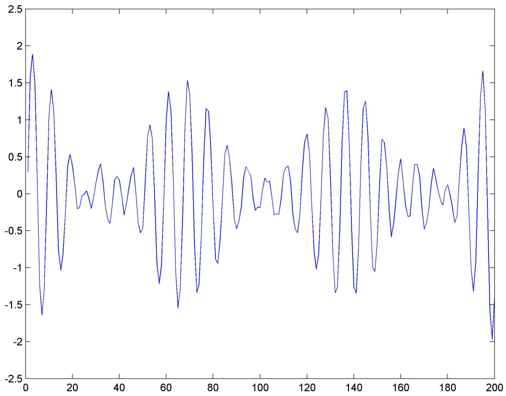
Εικόνα 4: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $5 - 15Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 1)*



(α΄) *Butterworth*

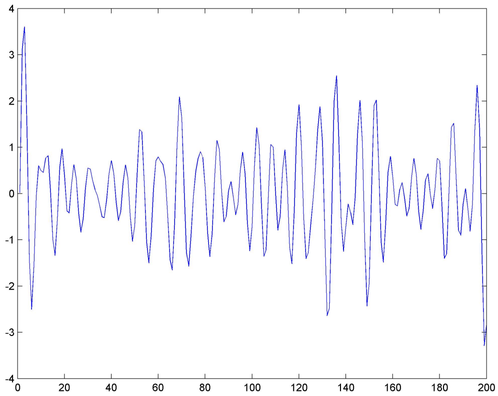


(β΄) *Method 1*

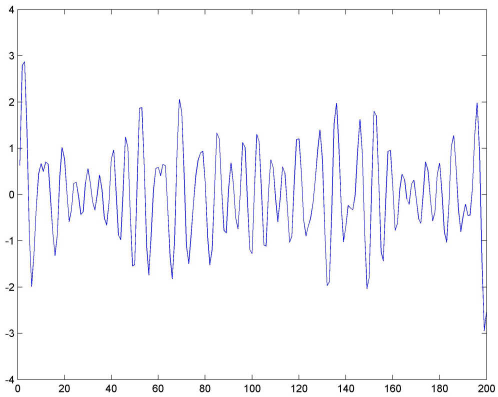


(γ΄) *Method 2*

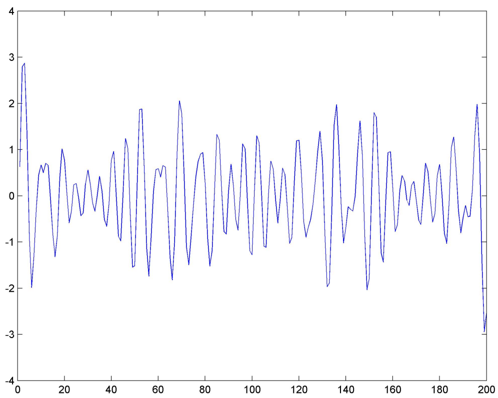
Εικόνα 5: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $10 - 15Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 1)*



(α′) *Butterworth*

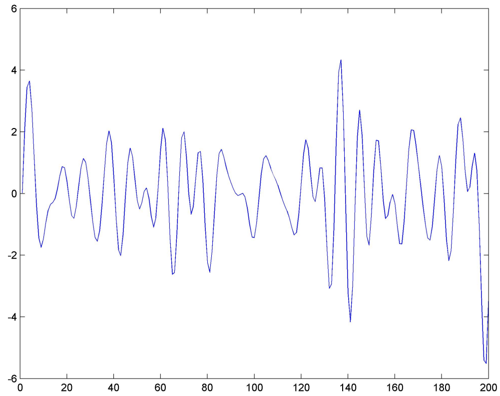


(β′) *Method 1*

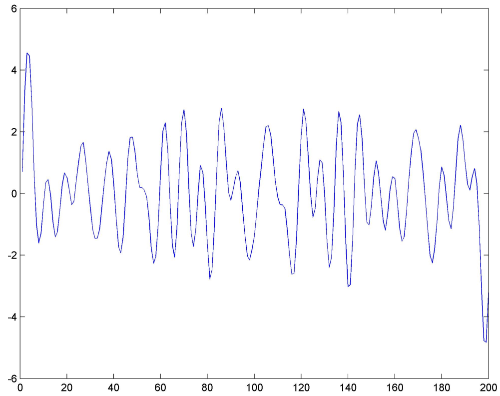


(γ′) *Method 2*

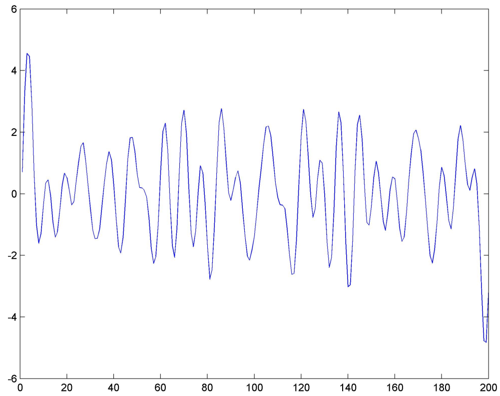
Εικόνα 6: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $10 - 20Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 1)*



(α′) *Butterworth*

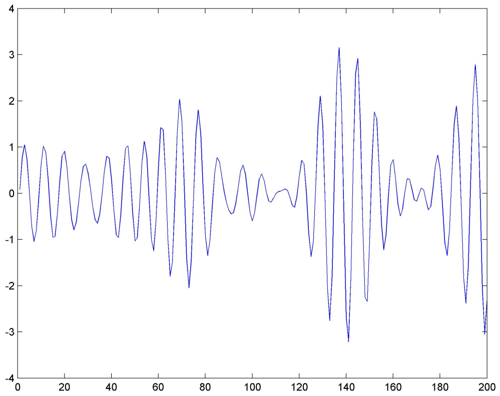


(β′) *Method 1*

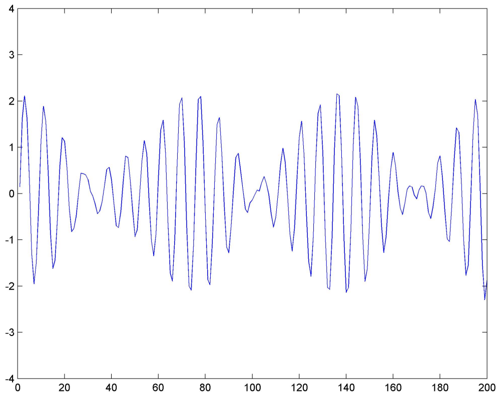


(γ′) *Method 2*

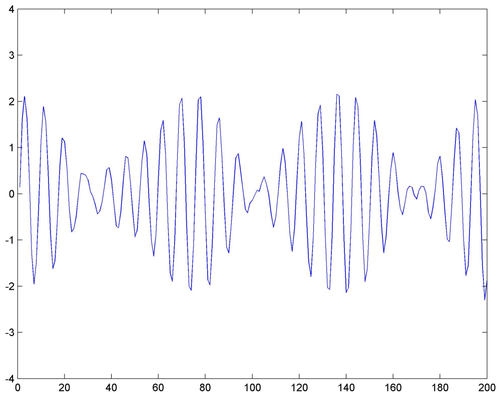
Εικόνα 7: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $5 - 15Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 2)*



(α′) *Butterworth*

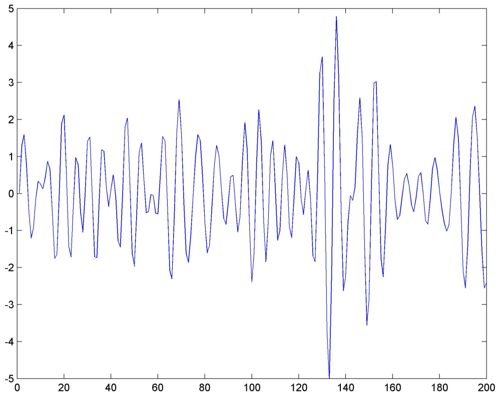


(β′) *Method 1*

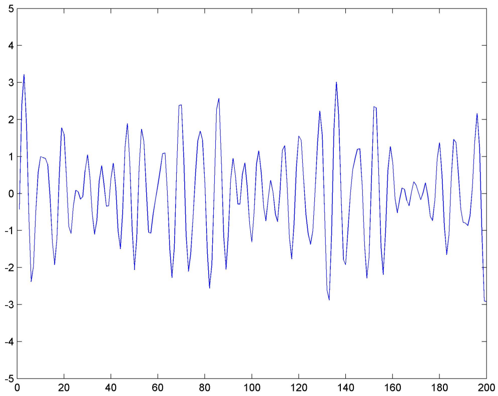


(γ′) *Method 2*

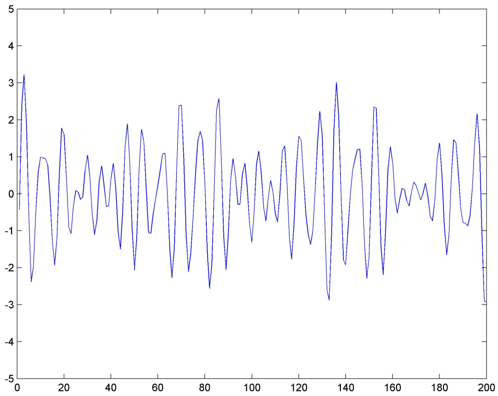
Εικόνα 8: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $10 - 15Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 2)*



(α′) *Butterworth*

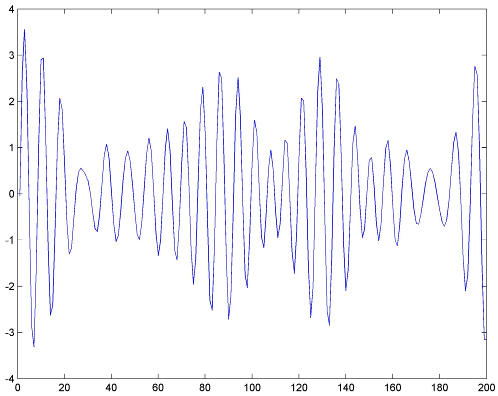


(β′) *Method 1*

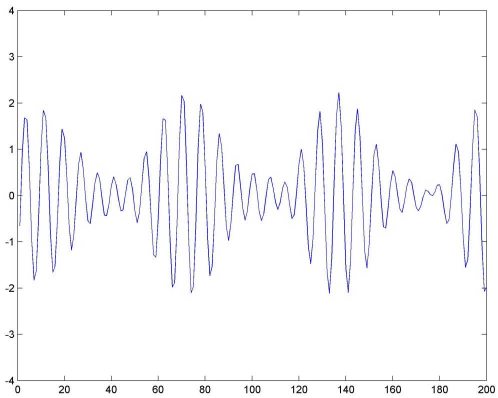


(γ′) *Method 2*

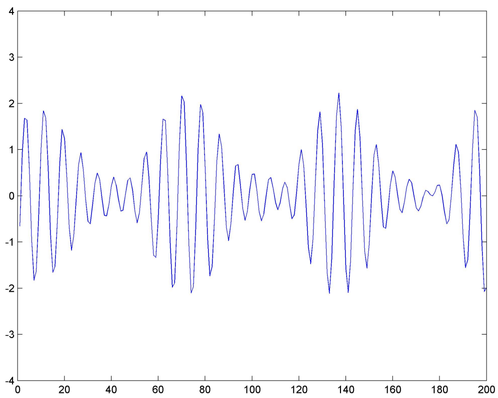
Εικόνα 9: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $10 - 20Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 2)*



(α′) *Butterworth*

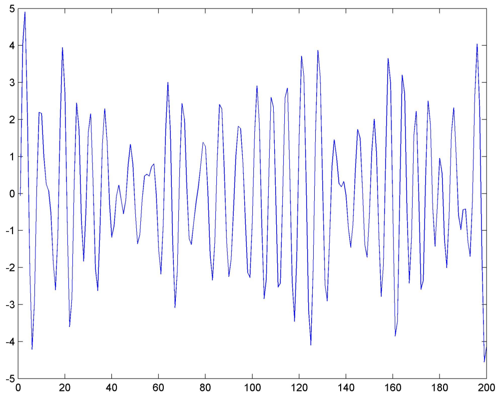


(β′) *Method 1*

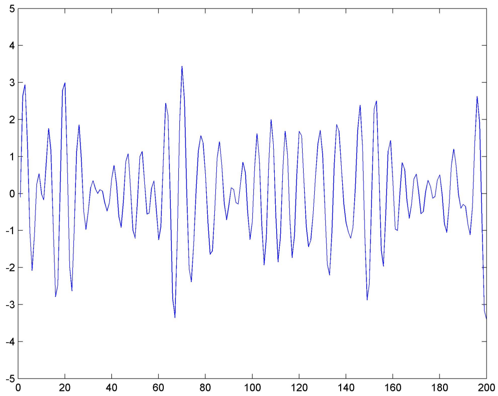


(γ′) *Method 2*

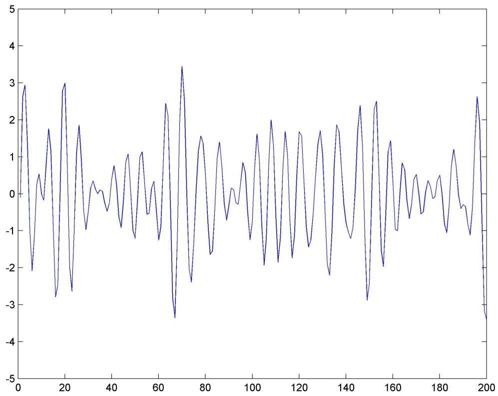
Εικόνα 10: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $10 - 15Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 3)*



(α′) *Butterworth*



(β′) *Method 1*



(γ′) *Method 2*

Εικόνα 11: *Στις εικόνες φαίνεται το σήμα z μετά το ζωνοπερατό(bandpass) φιλτράρισμα $10-20Hz$. Για να φανεί καλύτερα το σήμα δείχνουμε τα 200/5000 δείγματά του.(Noise 3)*

Βιβλιογραφία

[1] ΗΕΓ, H.Berger. http://en.wikipedia.org/wiki/Electroencephalography

[2] Hans Berger. http://www.whonamedit.com/doctor.cfm/845.html

[3] Neural oscillation. http://en.wikipedia.org/wiki/Neural_oscillation

[4] The 10-20 System. http://en.wikipedia.org/wiki/10-20_system_(EEG)

[5] F.Sharbrough, G.E.Chatrian, R.P.Lesser, H.Luders, M.Nuwer, T.W.Picton. *"American Electroencephalographic Society Guidelines for Standard Electrode Position Nomenclature"*. Clinical Neurophysiology (1991), 8:200-202

[6] Principal Component Analysis. http://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis

[7] Erik G. Learned-Miller, John W. Fisher, III. *"ICA using spacings estimates of entropy"*, (2004)

[8] Arao Funase, Motoaki Mouri, Andrzej Cichocki and Ichi Takumi. *"Suitable ICA Algorithm for Extracting Saccade-Related EEG Signals"*, Lecture Notes in Computer Science, (2009), Volume 5863/2009, 409-416

[9] Stone, J. V. (2004), *"Independent Component Analysis: A tutorial introduction"*, Cambridge MA: MIT Press.

[10] Cardoso, *"High-Order contrasts for independent component analysis"* Neural Comp.(1999)

[11] Kernel ICA, http://www.di.ens.fr/~fbach/kernel-ica/index.htm

[12] Ziehe and Muller, *"An efficient algorith for blind separation using time structure"*, (1998), Artifficial Neural Networks 675-80

[13] James, Christopher J. Davies, Mike E, *"Contrasting spatial, temporal and Spatio-Temporal ICA applied to ictal EEG recordings"*, (2008)

[14] Zhiling Lan, Ziming Zheng, Yawei Li, *"Toward Automated Anomaly Identification in Large-Scale Systems"*, (2010), Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions

[15] Aapo Hyvärinen and Erkki Oja, *"Independent Component Analysis: Algorithms and Applications"*, Neural Networks, 13(4-5):411-430, (2000)

[16] A.Delorme, S.Makeig, EEGLab: `www.sccn.uscd.edu/eeglab/`, (2006), Ref Type: Electronic Citation

[17] A.Delorme, S.Makeig. *"EEGLab: an open source toolbox for analysis of single-trial EEG dynamics including ICA"*, Journal of Neuroscience Methods 2004; 134:9-21

[18] Bell AJ, Sejnowski TJ. *"An information-maximization approach to blind separation and blind deconvolution"*, Neural Comput., (1995), 7: 1129-59

[19] J.N.Knight, *"Signal fraction analysis and artifact removal in EEG"*, Colorado State University, (2003)

[20] T-P.Jung, C.Humphries, T.W.Lee, M.J.McKeown, V.Iragui, S.Makeig, T.J.Sejnowski, *"Removing electroengephalographic artifacts by blind source separation"*, Psychophysiology (2000), 37:163-178

[21] A.Jimenez-Gonzalez, C.J.James, *"Extracting sources from noisy abdominal phonograms: a single-channel blind source separation method"*, (2009)

[22] Broomhead DS, King GP, *"Extracting qualitative dynamics from experimental data"*, (1986), Physica D 20:217–236

[23] M.E. Davies and C.J James, *"Source-separation using single-channel ICA"*, Signal Processing, vol. 87, issue 8, pp. 1819-1832, Aug 2007

[24] Lee, J.H., Lee, T.W., Jung, H.Y., Lee, S.Y.: *"On the efficient speech feature extraction based on independent component analysis"*, Neural Processing Letters 15, 235–245 (2002)

[25] Broomhead DS, King GP, (1986), *"Extracting qualitative dynamics from experimental data"*, Physica D 20:217–236

[26] Golyandina N, Nekrutkin V, Zhigljavsky A, (2001), *"Analysis of time series structure: SSA and related techniques"*, Chapman & Hall, London

[27] James CJ, Lowe D, (2001), *“Single channel analysis of electromagnetic brain signals through ICA in a dynamical systems framework”*, In: Proceedings of the 23rd annual international conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, vol 23, pp 1974–1977

[28] Teixeira AR, Tome´ AM, Lang EW et al, (2006), *“Automatic removal of high-amplitude artefacts from single-channel electroencephalograms”*, Comput Methods Programs Biomed 83:125–138. doi:10.1016/j.cmpb.2006.06.003

[29] Takens F, (1981), *“Dynamical systems and turbulence”*, In: Rand DA, Young LS (eds) Lecture notes in mathematics, vol 898, Springer, Berlin, pp 366–381

[30] Sangkyun Lee and Soo-Young Lee, *“ICA-Based Spatio-temporal Features for EEG Signals”*, Brain Science Research Center and Department of Bio & Brain Engineering, Neural Information Processing, Lecture Notes in Computer Science, (2008), Volume 4985/2008, 915-920

[31] N. A. Thacker, F. J. Aherne and P. I. Rockett, *“The Bhattacharyya Metric as an Absolute Similarity Measure for Frequency Coded Data”*, (1997), TIPR’97

[32] Butterworth Filter, `http://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter`

[33] Ενέργεια και Ισχύς, “Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων Ι”, §3.2, Στουραΐτης

[34] Fourier Transform, `http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform`

[35] Hankel Matrix, `http://en.wikipedia.org/wiki/Hankel_matrix`