Πολυτεχνείο Κρήτης

Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Διπλωματική Εργασία

Επίλυση προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση με χρήση του Αλγορίθμου Βελτιστοποίησης Σμήνους Σωματιδίων (Particle Swarm Optimization-PSO)

Ιορδανίδου Γεωργία-Ρουμπίνη

Επιβλέπων καθηγητής: Μαρινάκης Ιωάννης

Χανιά,
Μάρτιος 2011

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μαρινάκη Ιωάννη για την άψογη συνεργασία που είχαμε καθώς και την οικογένεια μου για τη συμπαράσταση της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΟΧΗΜΑΤΩΝ (VEHICLE ROUTING PROBLEM - VRP) 6

1.1 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problem - VRP) 6

1.2 Χαρακτηριστικά του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων 7

1.3 Στόχοι και περιορισμοί ενός προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων 9

1.4 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση (Stochastic Vehicle Routing Problem - SVRP) 9

1.4.1 Μοντελοποίηση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση...10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΜΗΝΟΥΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ ΤΟΥ..12

2.1 Μεθευρετικοί αλγόριθμοι 12

2.2 Αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (Particle Swarm Optimization - PSO) 12

2.2.1 Εισαγωγή 12

2.2.2 Περιγραφή αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων 13

2.3 Παραλλαγές του αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων.........................16

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΓΙΝΕΙ ΜΕΧΡΙ ΣΗΜΕΡΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΟΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ (SVRP).........................19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.............................20

4.1 Ανάλυση της διαδικασίας ανάπτυξης του αλγορίθμου επίλυσης 20

4.1.1 Παράθεση δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν για τα τρεξίματα του αλγορίθμου 20

4.1.2 Διαδικασία επιλογής πλήθους σωματιδίων...20

4.1.3 Διαδικασία επιλογής παραλλαγής...23

4.1.4 Επεξήγηση αλγορίθμου επίλυσης 27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ..32

5.1 Παρουσίαση και ανάλυση αποτελεσμάτων 32

5.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων με αποτελέσματα άλλων μεθόδων επίλυσης.......................61

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ...63

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ **64**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ **73**

Εισαγωγή

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία στόχο έχουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση με τη χρησιμοποίηση του μεθευρετικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (Particle Swarm Optimization-PSO).
Αρχικά κάνουμε μια περιγραφή του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων και του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση. Στη συνέχεια αναλύουμε τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων και τις παραλλαγές του. Ακολούθως αναφέρουμε κάποιες από τις μελέτες που έχουν γίνει για την επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικές παραμέτρους. Μετά περιγράφουμε διεξοδικά τον αλγόριθμο που φτιάξαμε. Έπειτα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του αλγορίθμου μας και κάποια από αυτά τα συγκρίνουμε με δύο άλλες μεθόδους επίλυσης, τον γενετικό και τον εξελικτικό αλγόριθμο. Τέλος υπάρχουν τα συμπεράσματα που βγάλαμε μετά την ολοκλήρωση της εργασίας.

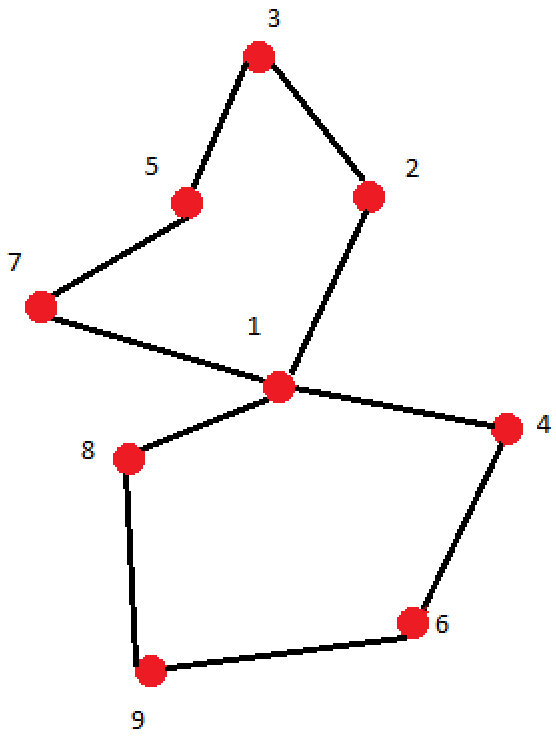
Κεφάλαιο 1: Περιγραφή προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problem - VRP)

1.1 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problem - VRP)

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (VRP) καθορίζει με βέλτιστο τρόπο τις διαδρομές που πρέπει να κάνει ένας στόλος οχημάτων για να εξυπηρετήσει ένα πλήθος πελατών.

Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με τέτοιου είδους προβλήματα ήταν ο Dantzig και ο Ramser, πριν από περισσότερα από σαράντα χρόνια. Το πρόβλημα που είχαν επιλύσει αφορούσε τη διανομή πετρελαίου σε διάφορους σταθμούς. Μετέπειτα πάρα πολλοί πρότειναν διάφορους αλγορίθμους για τέτοιου είδους προβλήματα και αυτό συνεχίζεται μέχρι σήμερα.

Σε αυτά τα προβλήματα ένα όχημα θα πρέπει να περάσει μόνο μια φορά από κάθε πελάτη. Επίσης το όχημα ξεκινάει και καταλήγει σε μία αποθήκη ή και σε περισσότερες ανάλογα το πρόβλημα. Ακόμα το όχημα οφείλει σε μια διαδρομή να περάσει τουλάχιστον από ένα πελάτη [1]. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια λύση του VRP, δηλαδή οι διαδρομές που θα κάνει ένα όχημα. Ο κόμβος 1 είναι η αποθήκη και οι κόμβοι 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 είναι οι πελάτες.



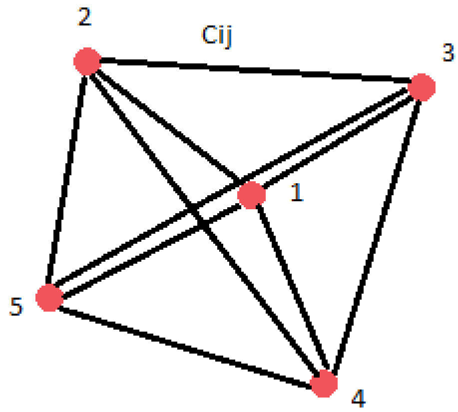
Σχήμα 1: Λύση ενός προβλήματος VRP

1.2 Χαρακτηριστικά του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων

Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός προβλήματος δρομολόγησης είναι το οδικό δίκτυο, οι πελάτες, οι αποθήκες, τα οχήματα και οι οδηγοί [1].

Οδικό δίκτυο

Το οδικό δίκτυο, που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά των προϊόντων, συνήθως περιγράφεται με ένα γράφημα. Τα τόξα αυτού του γραφήματος αναπαριστούν τμήματα δρόμου. Οι κορυφές του γραφήματος αντιστοιχούν σε διασταύρωση δρόμων και στις τοποθεσίες της αποθήκης και των πελατών. Όσον αφορά τα τόξα μπορεί να έχουν μια κατεύθυνση ή να μην έχουν. Το αν θα έχουν ή όχι κατεύθυνση εξαρτάται από το αν υπάρχει η δυνατότητα να μεταφερθούν τα προϊόντα προς τη μία κατεύθυνση του δρόμου ή και από τις δύο, αντίστοιχα. Σε κάθε τόξο αντιστοιχεί και ένα κόστος (c_{ij}, όπου i, j είναι η αρίθμηση των κόμβων). Το κόστος αυτό μπορεί να αντιπροσωπεύει το μήκος του τόξου, το χρονικό διάστημα που κάνει το όχημα να διασχίσει το δρόμο ή μπορεί να είναι και κάτι άλλο, ανάλογα με τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Ακολουθεί γράφημα που αναπαριστά όλες τις δυνατές διαδρομές σε ένα οδικό δίκτυο, με μια αποθήκη (κόμβος 1) και τέσσερις πελάτες (κόμβοι 2, 3, 4, 5).



Σχήμα 2: Όλες οι δυνατές διαδρομές σε ένα οδικό δίκτυο

Πελάτες

Τα βασικά χαρακτηριστικά των πελατών είναι τα εξής:

- η κορυφή του γραφήματος στην οποία βρίσκεται ο πελάτης
- το πλήθος των προϊόντων (ζήτηση) τα οποία πρέπει να διανεμηθούν ή να συλλεχθούν από τον πελάτη
- χρονικές περίοδοι (time windows) μέσα στις οποίες μπορεί να εξυπηρετηθεί ο πελάτης
- χρόνος που απαιτείται για να διανεμηθούν ή να συλλεχθούν τα προϊόντα του πελάτη
- το υποσύνολο των διαθέσιμων οχημάτων που μπορούν να εξυπηρετήσουν τον πελάτη

Αποθήκες

Οι διαδρομές που πραγματοποιούνται για να εξυπηρετήσουν τους πελάτες μπορούν να αρχίζουν και να τελειώνουν σε μία ή περισσότερες αποθήκες. Οι αποθήκες όπως είχαμε αναφέρει και παραπάνω αναπαρίστανται σαν κορυφές του γραφήματος. Η κάθε αποθήκη χαρακτηρίζεται από το πλήθος και το είδος των οχημάτων που σχετίζονται με αυτή και από το πλήθος των προϊόντων που μπορεί να αποθηκεύσει.

Οχήματα

Τα οχήματα χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά των προϊόντων. Το είδος του οχήματος που επιλέγεται κάθε φορά εξαρτάται από τις απαιτήσεις των πελατών. Τα βασικά χαρακτηριστικά τους είναι τα εξής:

- η αποθήκη στην οποία γυρνάει το όχημα όταν ολοκληρώσει τη διαδρομή του, και η πιθανότητα τελικά να μη γυρίσει σε αυτή την αποθήκη αλλά σε κάποια άλλη
- η χωρητικότητα του οχήματος, που είναι το μέγιστο βάρος ή ποσότητα ή πλήθος παλετών που μπορεί να φορτώσει

- η υποδιαίρεση του οχήματος σε τμήματα όπου το καθένα θα χαρακτηρίζεται από τη χωρητικότητα του και το είδος των προϊόντων που μπορεί να μεταφέρει
- τα μηχανήματα που είναι διαθέσιμα για τη φόρτωση και εκφόρτωση των προϊόντων
- το σύνολο των τόξων του γραφήματος που μπορεί να διασχίσει το όχημα
- τα κόστη που σχετίζονται με τη χρήση του οχήματος

<u>Οδηγοί</u>

Οι οδηγοί των οχημάτων θα πρέπει να ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς που έχουν να κάνουν με το ημερήσιο χρονικό διάστημα που δουλεύουν, το πλήθος και τη διάρκεια των διαλλειμάτων που κάνουν εν ώρα εργασίας, υπερωρίες.

1.3 Στόχοι και περιορισμοί ενός προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων

Ο στόχος ή οι στόχοι ενός προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων ποικίλλουν. Παρακάτω αναφέρουμε κάποιους από τους στόχους που μπορούν να τεθούν σε ένα τέτοιο πρόβλημα [2].

- ελαχιστοποίηση κόστους διαδρομής
- ελαχιστοποίηση οχημάτων
- ελαχιστοποίηση χρόνου παράδοσης των προϊόντων
- ελαχιστοποίηση παραπονεμένων πελατών

Όπως με τους στόχους έτσι και με τους περιορισμούς υπάρχουν πολλοί περιορισμοί τους οποίους μπορούμε να εντάξουμε στη μοντελοποίηση ενός προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων. Κάποιοι από τους περιορισμούς είναι οι ακόλουθοι [2]:

- για κάθε διαδρομή που κάνει ένα όχημα, η ποσότητα των προϊόντων που μεταφέρει δε θα πρέπει να ξεπερνά τη χωρητικότητα του οχήματος
- οι πελάτες μπορούν να εξυπηρετηθούν μέσα σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα
- οι οδηγοί των οχημάτων μπορούν να δουλέψουν κάποιες συγκεκριμένες ώρες
- κάποιοι πελάτες να θέλουν μόνο διανομή ή μόνο παραλαβή προϊόντων και άλλοι να θέλουν και τα δύο

1.4 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση (Stochastic Vehicle Routing Problem - SVRP)

Σε αυτήν τη διπλωματική επιλύουμε το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση. Τέτοιου είδους προβλήματα ανήκουν στα προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικές παραμέτρους (Vehicle Routing Problems with Stochastic Demand - SVRP). Σε αυτά τα προβλήματα μία παράμετρος του προβλήματος όπως η ζήτηση των πελατών ή το σύνολο των πελατών είναι στοχαστικές μεταβλητές. Στο πρόβλημα το δικό μας η ζήτηση των πελατών είναι η στοχαστική μεταβλητή [3].

Κάποιες από τις εφαρμογές ενός προβλήματος SVRP είναι οι εξής:

- διανομή πετρελαίου
- συλλογή σκουπιδιών
- συλλογή γαλακτοκομικών προϊόντων από διάφορους παραγωγούς
- διανομή προϊόντων σε παντοπωλεία
- τα σχολικά λεωφορεία και γενικά τα λεωφορεία

1.4.1 Μοντελοποίηση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση καθορίζεται από G{ V, A, D }, όπου V{ 0, 1, …, n } είναι το σύνολο των κόμβων (πελάτες), A{ (i, j) : i, j $\in$ V, i $\neq$ j } είναι τα τόξα που συνδέουν τους κόμβους (πελάτες) και D{ $d_{i,j}$: i, j $\in$ V, i $\neq$ j } είναι το κόστος από τον i κόμβο (πελάτη) στον j κόμβο (πελάτη). Υπάρχει ένα όχημα με χωρητικότητα Q που πρέπει να ικανοποιήσει τη ζήτηση των κόμβων (πελατών), ελαχιστοποιώντας το κόστος της διαδρομής. Η ζήτηση του κάθε κόμβου (πελάτη) θα είναι η στοχαστική μεταβλητή ξ_i, (i = 1, …, n). Όσον αφορά τη ζήτηση, δεν ξεπερνά τη χωρητικότητα του οχήματος, γίνεται γνωστή μόνο όταν το όχημα φτάσει στον εκάστοτε κόμβο (πελάτη) και ακολουθεί διακριτή κατανομή $p_{i,j}$ = Prob(ξ_i = k), k (= 0, 1, 2, …, K) $\leq$ Q.

Για να βρούμε τη διαδρομή που θα κάνει το όχημα, θεωρούμε μια αρχική διαδρομή η οποία ξεκινάει από την αποθήκη. Ανάλογα με τη ζήτηση του επόμενου κόμβου-πελάτη αποφασίζουμε αν το όχημα θα επιστρέψει στην αποθήκη ή θα συνεχίσει στον επόμενο πελάτη. Πολλές φορές παρόλο που η αναμενόμενη ζήτηση του κόμβου-πελάτη είναι μικρότερη από το απόθεμα του οχήματος, επιλέγουμε να γυρίσει το όχημα στην αποθήκη για ανεφοδιασμό, αυτό ονομάζεται 'προληπτικός ανεφοδιασμός'. Ο 'προληπτικός ανεφοδιασμός' έχει σκοπό να αποφευχθεί το ρίσκο να πάει το όχημα στον επόμενο πελάτη και να μη μπορεί να τον ικανοποιήσει.

Παρακάτω φαίνεται η αντικειμενική συνάρτηση με την οποία βρίσκουμε την αναμενόμενη απόσταση (κόστος) της διαδρομής που θα κάνει το όχημα.

$$f_j(q) = \text{Ελάχιστο (Minimum)} \begin{cases} f_j^{\,p} \\ f_j^{\,r} \end{cases}$$

$$f_j^{\,p} = c_{j,j+1} + \sum_{k:k\leq q} f_{j+1}(q-k) * p_{j+1,k} + \sum_{k:k\succ q} [2 * c_{j+1,0} + f_{j+1}(q+Q-k) * p_{j+1,k}]$$

$$f_j^{\,r} = c_{j,0} + c_{0,j+1} + \sum_{k=1}^{K} f_{j+1}(Q-k) * p_{j+1,k}$$

υπό τον περιορισμό,

$$f_n(q) = c_{n,0}$$

Όπου f_j^p είναι το αναμενόμενο κόστος της διαδρομής όταν το όχημα δε γυρίζει στην αποθήκη αλλά πάει στον επόμενο πελάτη και f_j^r το αναμενόμενο κόστος όταν το όχημα γυρίζει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό [3].

Στον αλγόριθμο που φτιάξαμε η ζήτηση των πελατών δεν παίρνει οποιαδήποτε τιμή. Υπάρχουν τρείς επιλογές για την τιμή της ζήτησης, είτε θα έχει απόκλιση από την πραγματική ζήτηση το πολύ συν πλην ένα, είτε θα έχει απόκλιση από την πραγματική ζήτηση το πολύ συν πλην δύο, είτε θα έχει μηδενική απόκλιση από την πραγματική ζήτηση.

Κεφάλαιο 2: Αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων και οι παραλλαγές του

2.1 Μεθευρετικοί αλγόριθμοι

Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι είναι αλγόριθμοι επίλυσης που συνδυάζουν διαδικασίες τοπικής αναζήτησης και υψηλότερου επιπέδου στρατηγικές για να δημιουργήσουν μια διαδικασία που είναι ικανή να ξεφύγει από κάποιο τοπικό ελάχιστο. Σε αυτή την κατηγορία αλγορίθμων εξερευνάται το πεδίο της λύσης με σκοπό να βρεθεί μια καλύτερη λύση.
Τα βασικά χαρακτηριστικά των μεθευρετικών αλγορίθμων είναι τα ακόλουθα [2]:

- μοντελοποιούν ένα φαινόμενο που υπάρχει στη φύση
- μπορούν να μεταφερθούν εύκολα σε παράλληλη μορφή
- είναι προσαρμοστικοί αλγόριθμοι

Κάποιοι από τους μεθευρετικούς αλγορίθμους είναι οι εξής [2]:

- Προσομοιωμένη ανόπτηση (Simulated Annealing)
- Περιορισμένη αναζήτηση (Tabu Search)
- Αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (Particle Swarm Optimization)
- Γενετικοί αλγόριθμοι (Genetic Algorithms)
- Εξελικτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms)
- Νευρωνικά δίκτυα (Neural Nets)
- Αλγόριθμοι βελτιστοποίησης αποικίας μυρμηγκιών (Ant Colony Optimization)
- Αλγόριθμος διασκορπισμένης αναζήτησης (Scatter Search)
- Διαδικασία άπληστης τυχαιοποιημένης προσαρμοστικής αναζήτησης (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure)
- Αλγόριθμος διαφορικής εξέλιξης (Differential Evolution)

2.2 Αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (Particle Swarm Optimization - PSO)

2.2.1 Εισαγωγή

Από τους μεθευρετικούς αλγορίθμους που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο σμήνους σωματιδίων για να επιλύσουμε το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση.

Ο αλγόριθμος σμήνους σωματιδίων προτάθηκε από τους Kennedy και Eberhart για να προσομοιώσει την κοινωνική συμπεριφορά κάποιων οργανισμών όπως το πέταγμα σε μορφή σμήνους των πουλιών και την ομαδική κίνηση των ψαριών.

Σε πολλά προβλήματα έχει εξακριβωθεί ότι είναι πολύ ωφέλιμη αυτή η μέθοδος. Ο λόγος είναι, ότι η υλοποίηση της είναι εύκολη και δίνει καλά αποτελέσματα, ειδικά σε προβλήματα με συνεχείς μεταβλητές.
Μερικά από τα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι [4]:

- έχει μνήμη, που είναι σημαντικό διότι οι πληροφορίες που έχει από προηγούμενες καλές λύσεις περνάνε στις επόμενες γενιές
- υπάρχει συνεργασία μεταξύ των σωματιδίων (λύσεων) του σμήνους γιατί συνεργάζονται μεταξύ τους για να δημιουργήσουν τις λύσεις

2.2.2 Περιγραφή αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων

Καταρχήν δημιουργείται ένα σύνολο από σωματίδια όπου το κάθε σωματίδιο αντιστοιχεί σε μία πιθανή λύση του προβλήματος. Το κάθε σωματίδιο κατέχει μια θέση στο χώρο λύσεων και κινείται με μία δεδομένη ταχύτητα.

Το κάθε σωματίδιο έχει μια θέση η οποία αναπαρίσταται από ένα διάνυσμα n-διαστάσεων στο χώρο των λύσεων x_{ij}, i = 1, 2, …, N, j = 1, 2, …, n όπου N το μέγεθος του πληθυσμού και n ο αριθμός των διαστάσεων του διανύσματος. Η απόδοση της εκτιμάται από μια προκαθορισμένη συνάρτηση ποιότητας (fitness function– $f(x_{ij})$). Η ταχύτητα u_{ij} εκπροσωπεί τις μεταβολές που θα πραγματοποιηθούν για να κινηθεί το σωματίδιο από τη μία θέση στην άλλη. Προς τα πού θα κινηθεί τελικά το σωματίδιο εξαρτάται από τη δυναμική αλληλεπίδραση της δικής του εμπειρίας και την εμπειρία όλου του σμήνους. Τρείς είναι οι πιθανές κατευθύνσεις που μπορεί να ακολουθήσει ένα σωματίδιο, να ακολουθήσει μια δική του διαδρομή, να κινηθεί προς τη βέλτιστη θέση που είχε κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων ($pbest_{ij}$) ή να κινηθεί προς τη θέση που έχει το βέλτιστο σωματίδιο ($gbest_j$). Παρακάτω φαίνονται οι εξισώσεις για τις ταχύτητες και τις θέσεις των σωματιδίων, όταν έχουμε συνεχείς μεταβλητές:

$$u_{ij}(t+1) = u_{ij}(t) + c_1 * rand_1 * (pbest_{ij} - x_{ij}(t)) + c_2 * rand_2 * (gbest_j - x_{ij}(t)) \qquad (2.1)$$

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + u_{ij}(t+1) \qquad (2.2)$$

όπου t είναι ο μετρητής των επαναλήψεων, c_1 και c_2 είναι μεταβλητές επιτάχυνσης, $rand_1$ και $rand_2$ είναι δύο τυχαίες μεταβλητές στο διάστημα [0, 1]. Από τις μεταβλητές c_1 και c_2 εξαρτάται το πόσο μακριά μπορεί να κινηθεί ένα σωματίδιο κατά τη διάρκεια μιας επανάληψης. Όταν δίνουμε μικρές τιμές στα c_1, c_2 επιτρέπουν στα σωματίδια να πάνε αρκετά μακριά από τη στοχευμένη περιοχή πριν βρεθούν κοντά σε τοπικό ελάχιστο, αντίθετα με μεγάλες τιμές έχουμε μια απότομη κίνηση προς τις στοχευμένες περιοχές. Συνήθως παίρνουν την τιμή δύο.

Για προβλήματα ελαχιστοποίησης η βέλτιστη θέση pbest$_{ij}$ ενός σωματιδίου στο σμήνος υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$pbest_{ij} = \begin{cases} x_{ij}(t+1), \varepsilon\acute{\alpha}\nu\left(f(x_{ij}(t+1) < f(x_{ij}(t))\right) \\ pbest_{ij}, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \quad (2.3)$$

Για προβλήματα μεγιστοποίησης η βέλτιστη θέση pbest$_{ij}$ ενός σωματιδίου στο σμήνος υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$pbest_{ij} = \begin{cases} x_{ij}(t+1), \varepsilon\acute{\alpha}\nu\left(f(x_{ij}(t+1) > f(x_{ij}(t))\right) \\ pbest_{ij}, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \quad (2.4)$$

Η βέλτιστη θέση όλου του σμήνους τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$gbest_j \in \{pbest_{1j}, pbest_{2j}, ..., pbest_{Nj} | f(gbest_j)\} = \min\{f(pbest_{1j}), f(pbest_{2j}), ..., f(pbest_{Nj})\} \quad (2.5)$$

Για να δούμε τώρα τι αντιπροσωπεύει ο κάθε όρος της εξίσωσης της ταχύτητας σε μια χρονική στιγμή t+1:

- Ο πρώτος όρος είναι η προηγούμενη ταχύτητα ($u_{ij}(t)$) του σωματιδίου και χρησιμοποιείται ως μνήμη των προηγούμενων κατευθύνσεων που είχε πάρει το σωματίδιο την προηγούμενη στιγμή. Εξαιτίας της μνήμης το σωματίδιο δεν μπορεί να αλλάξει σε μεγάλο βαθμό την κατεύθυνση του.

- Ο δεύτερος όρος ($c_1 * rand_1 * (pbest_{ij} - x_{ij}(t))$) ο οποίος λέγεται και γνωστικός όρος χρησιμοποιείται για να ποσοτικοποιήσει την απόδοση κάθε σωματιδίου συγκριτικά με τις παρελθοντικές του αποδόσεις. Η συνεισφορά του έγκειται στο γεγονός ότι παίζει το ρόλο της επαναφοράς του σωματιδίου σε προηγούμενες καταστάσεις που ήταν αποδοτικές για το σωματίδιο.

- Ο τρίτος όρος ($c_2 * rand_2 * (gbest_j - x_{ij}(t))$) ο οποίος λέγεται και κοινωνικός όρος χρησιμοποιείται για να ποσοτικοποιήσει την απόδοση κάθε σωματιδίου συγκριτικά με τις αποδόσεις ολόκληρου του σμήνους. Η συνεισφορά του έγκειται στο γεγονός ότι παίζει το ρόλο της αναζήτησης από το σωματίδιο του καλύτερου μέλους του σμήνους.

Για να έχουμε σύγκλιση του αλγορίθμου στο βέλτιστο θα πρέπει να προσέξουμε πώς θα κάνουμε την αρχικοποίηση των σωματιδίων (λύσεων). Συνήθως γίνεται με τυχαίο τρόπο στο χώρο λύσεων. Είναι σημαντικό οι λύσεις που θα επιλέξουμε να καλύπτουν όσο γίνεται μεγαλύτερο μέρος του χώρου αναζήτησης. Στον αλγόριθμο μας αρχικοποιήσαμε τις λύσεις με τυχαίο τρόπο.

Την ταχύτητα την αρχικοποιούμε σχεδόν όλες τις φορές με μηδενικά. Οι αρχικές τιμές του pbest είναι ίσες με τις αρχικές θέσεις των σωματιδίων. Ο αλγόριθμος σταματά είτε όταν ολοκληρώσει το σύνολο των επαναλήψεων είτε όταν η βέλτιστη λύση βρίσκεται μέσα σε κάποιο προκαθορισμένο κατώφλι, είτε όταν μετά από κάποιες επαναλήψεις δεν έχει εμφανιστεί κάποια βελτίωση στη λύση. Εμείς χρησιμοποιήσαμε το πρώτο κριτήριο τερματισμού (3500 επαναλήψεις).

Οι παράμετροι c_1, c_2 και τα τυχαία διανύσματα $rand_1$, $rand_2$ ελέγχουν την επιρροή του γνωστικού και κοινωνικού παράγοντα στη συνολική ταχύτητα του σωματιδίου. Εάν $c_1 = c_2 = 0$ τα σωματίδια κατευθύνονται εκεί που τους λέει η ταχύτητα τους, εάν $c_1 > 0$ και $c_2 = 0$ τότε κάθε σωματίδιο επηρεάζεται μόνο από τις προηγούμενες κινήσεις του και όχι από τα υπόλοιπα σωματίδια του σμήνους, εάν $c_2 > 0$ και $c_1 = 0$ το σύνολο των σωματιδίων τρέχει πίσω από το βέλτιστο σωματίδιο. Τις περισσότερες φορές $c_1 = c_2$, σε αυτή τη περίπτωση το σωματίδιο επηρεάζεται εξίσου και από τους δύο παράγοντες. Επίσης κάποιες φορές οι τιμές c_1 και c_2 μεταβάλλονται έτσι ώστε να μεταβάλλεται η επιρροή των δύο παραγόντων κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων. Στον αλγόριθμο μας χρησιμοποιούμε αυτό τον ορισμό για τα c_1 και c_2. Θεωρούμε ότι $c_{1,min}$, $c_{1,max}$, $c_{2,min}$, $c_{2,max}$ είναι οι ελάχιστες και οι μέγιστες τιμές που θα μπορούσαν να πάρουν τα c_1, c_2 αντίστοιχα, τότε:

$$c_1 = c_{1,\min} + \frac{c_{1,\max} - c_{1,\min}}{iter_{\max}} \times t \qquad (2.6)$$

$$c_2 = c_{2,\min} + \frac{c_{2,\max} - c_{2,\min}}{iter_{\max}} \times t \qquad (2.7)$$

όπου t είναι ο αριθμός της τρέχουσας επανάληψης και $iter_{max}$ ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων. Στις πρώτες επαναλήψεις του αλγορίθμου οι τιμές των c_1 και c_2 είναι μικρές και στη συνέχεια μεγαλώνουν μέχρι να φτάσουν στη μέγιστη τιμή τους. Το πλεονέκτημα αυτού του ορισμού για τα c_1 και c_2 είναι ότι στις πρώτες επαναλήψεις υπάρχει μεγάλη δυνατότητα ελεύθερης κίνησης μέσα στο χώρο των σωματιδίων (λύσεων) για να βρεθεί πιο γρήγορα το ελάχιστο [4].

Ακολουθεί ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων [4].

Αρχικοποίηση
Επιλογή του αριθμού των σμηνών (πλήθος επαναλήψεων)
Επιλογή του αριθμού των σωματιδίων σε κάθε σμήνος (πλήθος λύσεων)
Αρχικοποίηση της θέσης και της ταχύτητας κάθε σωματιδίου
Υπολογισμός του αρχικού κόστους κάθε σωματιδίου
Εύρεση βέλτιστου σωματιδίου ολόκληρου του σμήνους
Εύρεση βέλτιστης λύσης κάθε σωματιδίου
Do until (δεν έχει φτάσει ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων)
    Υπολογισμός της ταχύτητας του κάθε σωματιδίου
    Υπολογισμός της νέας θέσης του κάθε σωματιδίου
    Υπολογισμός της νέας συνάρτησης ποιότητας του κάθε σωματιδίου
    Ενημέρωση της βέλτιστης λύσης του κάθε σωματιδίου

Εύρεση του βέλτιστου σωματιδίου ολόκληρου του σμήνους
Enddo
Επιστροφή βέλτιστου σωματιδίου (βέλτιστης λύσης)

2.3 Παραλλαγές του αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων

Προτάθηκαν αρκετές παραλλαγές του αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων τα επόμενα χρόνια μετά την πρώτη του εμφάνιση. Εμείς επιλέξαμε επτά παραλλαγές για να τρέξουμε τον αλγόριθμο μας και να δούμε σε ποιά συμπεριφέρεται καλύτερα, δηλαδή σε ποιά δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Ακολούθως αναφέρονται οι παραλλαγές που χρησιμοποιήσαμε.

1^{η} Παραλλαγή

Ο Shi και Eberhart πρότειναν μια παραλλαγή του αρχικού αλγορίθμου, η οποία χρησιμοποιεί ένα βάρος αδράνειας w. Αυτό που κάνει το βάρος αδράνειας είναι να ελέγχει την επιρροή των προηγούμενων ταχυτήτων ενός σωματιδίου στην τρέχουσα ταχύτητα. Η ταχύτητα κάθε σωματιδίου υπολογίζεται τώρα από τον τύπο:

$$u_{ij}(t+1) = w * u_{ij}(t) + c_1 * rand_1 * (pbest_{ij} - x_{ij}(t)) + c_2 * rand_2 * (gbest_j - x_{ij}(t)) \quad (2.8)$$

όπου

$$w = w_{\max} - \frac{w_{\max} - w_{\min}}{iter_{\max}} \times t \qquad (2.9)$$

και, $w_{\min}$, $w_{\max}$ είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του βάρους αδράνειας και $iter_{\max}$ ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων.

2^{η} Παραλλαγή

Για να μην έχουμε απομάκρυνση από το ολικό βέλτιστο, να εξασφαλιστεί η σύγκλιση του αλγορίθμου και να εξαλειφθούν οι παράμετροι που περιόριζαν την ταχύτητα των σωματιδίων, χρησιμοποιείται ένας παράγοντας περιορισμού στις ταχύτητες των σωματιδίων. Παρακάτω φαίνεται ο τύπος της ταχύτητας.

$$u_{ij}(t+1) = \chi * (u_{ij}(t) + c_1 * rand_1 * (pbest_{ij} - x_{ij}(t)) + c_2 * rand_2 * (gbest_j - x_{ij}(t))) \quad (2.10)$$

όπου

$$x = \frac{2}{\left|2 - c - \sqrt{c^2 - 4 * c}\right|} \quad \text{και } c = c_1 + c_2, c > 4 \qquad (2.11)$$

3η Παραλλαγή

Μια προέκταση της 2ης παραλλαγής είναι ο αριθμητής του κλάσματος υπολογισμού του παράγοντα περιορισμού να πολλαπλασιαστεί με έναν παράγοντα k $\in (0, 1]$ και ο τύπος του τώρα γίνεται:

$$x = \frac{2*k}{\left|2 - c - \sqrt{c^2 - 4*c}\right|} \quad \text{και } c = c_1 + c_2, c > 4 \qquad (2.12)$$

Όταν το k παίρνει τιμές κοντά στο μηδέν ο αλγόριθμος επικεντρώνεται στην αναζήτηση λύσης γύρω από κάποιο πιθανό πολύ καλό σημείο ενώ όταν παίρνει τιμές κοντά στο ένα επικεντρώνεται στην αναζήτηση λύσης γύρω στο χώρο λύσεων.
Με βάση τις τελευταίες έρευνες η χρήση του παράγοντα περιορισμού δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα από τις άλλες παραλλαγές του αλγορίθμου.

4η Παραλλαγή

Μια άλλη παραλλαγή του τύπου της ταχύτητας είναι ο εξής:

$$u_{ij}(t+1) = \chi * (u_{ij}(t) + c * (p_{mj} - x_{ij}(t))) \qquad (2.13)$$

όπου

$$x = \frac{2}{\left|2 - c - \sqrt{c^2 - 4*c}\right|} \quad \text{και} \quad c = c_1 + c_2, c > 4 \qquad (2.14)$$

και

$$p_{mj} = \frac{c_1 * p_{ij} + c_2 * p_{gj}}{c} \qquad (2.15)$$

όπου p_{ij} είναι η βέλτιστη θέση ενός σωματιδίου και p_{gj} η βέλτιστη θέση όλου του σμήνους.

5η Παραλλαγή

Ο Kennedy δημιούργησε δύο διαφορετικά μοντέλα για τον υπολογισμό της ταχύτητας. Στο πρώτο μοντέλο που το ονόμασε γνωστικό-μόνο μοντέλο, δεν χρησιμοποιεί καθόλου τον κοινωνικό παράγοντα της ταχύτητας. Ο τύπος της ταχύτητας είναι ο εξής:

$$u_{ij}(t+1) = u_{ij}(t) + c_1 * rand_1 * (pbest_{ij} - x_{ij}(t)) \qquad (2.16)$$

6η Παραλλαγή

Το δεύτερο μοντέλο που πρότεινε ο Kennedy για την ταχύτητα και το ονόμασε κοινωνικό-μόνο μοντέλο, δεν χρησιμοποιεί καθόλου το δεύτερο παράγοντα της ταχύτητας. Ο τύπος της ταχύτητας είναι ο εξής:

$$u_{ij}(t+1) = u_{ij}(t) + c_2 * rand_2 * (gbest_j - x_{ij}(t)) \qquad (2.17)$$

7η Παραλλαγή

Η παραλλαγή αυτή ονομάζεται τοπολογίες γειτονιάς. Σε αυτή την παραλλαγή ο τύπος της ταχύτητας παραμένει σχεδόν ο ίδιος με αυτόν του αρχικού αλγορίθμου. Αυτό που αλλάζει είναι ο όρος gbest_{ij} που τώρα αντικαθίσταται από τον όρο lbest_{ij}. Ο όρος lbest_{ij} είναι η βέλτιστη θέση της γειτονιάς αναζήτησης του σωματιδίου i. Η γειτονιά μπορεί να αποτελείται από τρία σωματίδια, από πέντε σωματίδια ή και παραπάνω. Ο τύπος της ταχύτητας είναι ο εξής:

$$u_{ij}(t+1) = u_{ij}(t) + c_1 * rand_1 * (pbest_{ij} - x_{ij}(t)) + c_2 * rand_2 * (lbest_{ij} - x_{ij}(t)) \qquad (2.18)$$

Ο τύπος για το lbest_{ij} είναι ο εξής:

$$\text{lbest}_{\text{ij}} \in \left\{ N_i \middle| f(lbest_{ij}) = \min\left\{ f(x_{ij}) \right\}, \forall x \in N_i \right\} \qquad (2.19)$$

όπου η γειτονιά αναζήτησης N_i καθορίζεται ως εξής:

$$N_i = \left\{ pbest_{i-n_{N_i}}(t), pbest_{i-n_{N_i}+1}(t), \ldots, pbest_{i-1}(t), pbest_i(t), pbest_{i+1}(t), \ldots, pbest_{i+n_{N_i}}(t) \right\}$$

Για γειτονιά αναζήτησης ίση με τρία και δείκτη σωματιδίου πέντε, το $lbest_{5j}$ θα αναζητείτο από τα:

$$pbest_{4j},\ pbest_{5j},\ pbest_{6j}$$

δηλαδή από το προηγούμενο σε σειρά σωματίδιο το τέσσερα, από το πέντε και από το επόμενο σε σειρά σωματίδιο το έξι [4].
Στον αλγόριθμο μας χρησιμοποιούμε γειτονιά αναζήτησης ίση με τρία.

Κεφάλαιο 3: Ερευνητικές μελέτες που έχουν γίνει μέχρι σήμερα στην επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικές παραμέτρους (SVRP)

Πολλές μελέτες έχουν γίνει πάνω στην επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικές παραμέτρους. Εμείς θα αναφέρουμε κάποιες από αυτές. Καταρχήν αξίζει να σημειωθεί ότι ο πρώτος που πρότεινε έναν αλγόριθμο για το SVRP ήταν ο Tillman το 1969 [5]. Ο Z.G. Guo και ο K.L. Mak επίλυσαν με γενετικό αλγόριθμο ένα SVRP με στοχαστικές παραμέτρους τη ζήτηση των πελατών και την παρουσία των πελατών στο σημείο παραλαβής [6]. Οι Lars M. Hvattum, Arne Lokketangen και Gilbert Laporte με στοχαστικές παραμέτρους τους πελάτες και τη ζήτηση προτείνουν έναν αλγόριθμο επίλυσης, η βασική ιδέα του οποίου είναι η επίλυση διάφορων σεναρίων και στο τέλος η χρησιμοποίηση παρόμοιων χαρακτηριστικών από τα σενάρια για να χτίσουν ένα καλό πλάνο. Στόχος τους είναι η ελαχιστοποίηση των οχημάτων και του κόστους των διαδρομών [7]. Ο Marc Reimann με τη ζήτηση των πελατών σα στοχαστική παράμετρο χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης αποικίας μυρμηγκιών για να λύσει το πρόβλημα [8]. Οι Dag Haugland, Sin C. Ho, Gilbert Laporte επιλύουν το SVRP με στοχαστική ζήτηση με τον αλγόριθμο περιορισμένης αναζήτησης (Tabu Search) και με πολυεναρκτήριο ευρετικό αλγόριθμο. Τελικά αποδεικνύουν ότι ο αλγόριθμος περιορισμένης αναζήτησης είναι καλύτερος από τον πολυεναρκτήριο ευρετικό αλγόριθμο [9]. Οι Shangyao Yan, Chin-Jen Chi, Ching-Hui Tang εφάρμοσαν μια τεχνική προσομοίωσης μαζί με στρατηγικές βασισμένες σε συνδέσεις και μονοπάτια για να αναπτύξουν δύο ευρετικούς αλγορίθμους για την επίλυση του SVRP. Δοκίμασαν το μοντέλο τους σε ένα λεωφορείο πόλεως στην Ταϊβάν και τα αποτελέσματα ήταν καλά [10]. Οι Matthew Protonotarios, George Mourkousis, Ioannis Vyridis και Theodora Varvarigou ασχολήθηκαν με το SVRP, όπου θέλησαν να ελαχιστοποιήσουν τα κόστη μεταφοράς και να μεγιστοποιήσουν την ικανοποίηση των πελατών, σε μεγάλης κλίμακας προβλήματα, έχοντας ως περιορισμούς τη χωρητικότητα των οχημάτων, τα χρονικά παράθυρα για την εξυπηρέτηση των πελατών και τις ώρες εργασίας ανά ημέρα των οδηγών. Η ζήτηση των πελατών είναι στοχαστική. Ο τρόπος επίλυσης που επέλεξαν είναι ο γενετικός αλγόριθμος [11]. Οι Xiangyong Li, PengTian, StephenC.H.Leung επιλύουν το SVRP με χρονικά παράθυρα και στοχαστικές παραμέτρους το χρόνο που κάνει το όχημα, τις διανομές και το χρόνο εξυπηρέτησης των πελατών, με τον αλγόριθμο Περιορισμένης Αναζήτησης [12]. Οι Chang-Shi Liu, Ming-Yong Lai είχαν σα στοχαστική παράμετρο τη ζήτηση των πελατών και προσεγγίστηκε το πρόβλημα με βελτιωμένο εξελικτικό αλγόριθμο [13]. Οι Leonora Bianchi, Mauro Birattari, Marco Chiarandini, Max Manfrin, Monaldo Mastrolilli, Luis Paquete, Olivia Rossi-Doria και Tommaso Schiavinoto προτείνουν υβριδικούς μεθευρετικούς αλγορίθμους για την επίλυση του SVRP πάνω στους αλγορίθμους προσομοιωμένης ανόπτησης, περιορισμένης αναζήτησης, επαναλαμβανόμενης τοπικής αναζήτησης, βελτιστοποίησης αποικίας μυρμηγκιών και εξελικτικούς αλγορίθμους [14].

Κεφάλαιο 4: Περιγραφή αλγορίθμου επίλυσης

4.1 Ανάλυση της διαδικασίας ανάπτυξης του αλγορίθμου επίλυσης

4.1.1 Παράθεση δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν για τα τρεξίματα του αλγορίθμου

Χρησιμοποιήσαμε επτά παραδείγματα για να τρέξουμε τον αλγόριθμο μας, για τα οποία μας είναι γνωστές οι βέλτιστες τιμές κόστους που έχουν βρεθεί μέχρι σήμερα σε παγκόσμια κλίμακα, για το απλό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων. Παρόλο που αυτές οι τιμές κόστους δεν είναι για το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση, τις χρησιμοποιούμε σα μέτρο σύγκρισης για τις τιμές που βρήκαμε εμείς, γιατί δεν υπάρχουν μέχρι τώρα για το συγκεκριμένο πρόβλημα και για αυτά τα δεδομένα βέλτιστες τιμές κόστους, παρά μόνο για τα τρία πρώτα παραδείγματα. Για τα τρία αυτά παραδείγματα γίνεται η σύγκριση με τα δικά μας αποτελέσματα στο κεφάλαιο πέντε.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα δεδομένα του κάθε παραδείγματος όσον αφορά το πλήθος των κόμβων, τη χωρητικότητα του οχήματος και το βέλτιστο κόστος. Στο παράρτημα βρίσκονται οι συντεταγμένες και η ζήτηση του κάθε κόμβου.

Παράδειγμα	Πλήθος κόμβων	Χωρητικότητα οχήματος	Βέλτιστο κόστος
1	51	160	524,61
2	76	114	835,26
3	101	120	826,14
4	151	120	1028,42
5	200	120	1291,29
6	121	120	1042,11
7	101	120	819,56

Πίνακας 1: Δεδομένα παραδειγμάτων

4.1.2 Διαδικασία επιλογής πλήθους σωματιδίων

Για να καταλήξουμε στο πλήθος των σωματιδίων, για τα οποία θα τρέχαμε όλα τα παραδείγματα κάναμε κάποιες δοκιμές. Συγκεκριμένα τρέξαμε το πρώτο παράδειγμα, με μηδενική απόκλιση από τη ζήτηση (dem=0), δέκα φορές, για είκοσι, σαράντα, εξήντα, ογδόντα και εκατό σωματίδια, αντίστοιχα. Διαλέξαμε αυτά τα πλήθη σωματιδίων γιατί μέσα σε αυτά τα όρια κυμαίνονται συνήθως. Την απόφαση για το πόσα τελικά σωματίδια θα έχουμε την πήραμε με βάση τον καλύτερο μέσο όρο της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος. Στη συνέχεια φαίνονται οι πίνακες με τα κόστη, την επανάληψη στην οποία βρέθηκε το βέλτιστο κόστος, την απόκλιση από το βέλτιστο κόστος και τους μέσους όρους όλων των παραπάνω, για κάθε πλήθος σωματιδίων.

par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=20			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,61	544,0347	504	3,57
	549,1872	907	4,48
	527,6748	766	0,58
	526,6489	629	0,39
	542,5711	861	3,31
	532,2615	826	1,44
	541,4214	983	3,11
	538,2647	661	2,54
	529,5191	989	0,93
	544,0347	504	3,57
Μέσος όρος	**537,56**	**763**	**2,39**

Πίνακας 2:Αποτελέσματα PSO με 20 σωματίδια

Για είκοσι σωματίδια ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 2,39%. Η ελάχιστη απόκλιση από όλα τα τρεξίματα είναι 0,39%.

par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=40			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,61	526,6936	645	0,40
	531,7553	826	1,34
	541,1355	979	3,05
	538,6001	617	2,60
	524,6285	585	0,00
	539,6085	664	2,78
	529,1147	724	0,85
	534,2944	592	1,81
	530,4993	870	1,11
	528,1419	781	0,67
Μέσος όρος	**532,45**	**728,3**	**1,46**

Πίνακας 3:Αποτελέσματα PSO με 40 σωματίδια

Για σαράντα σωματίδια ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 1,46%. Σε ένα από τα τρεξίματα βρέθηκε το βέλτιστο.

par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=60			
Καλύτερο Κόστος	Καλύτερο Κόστος PSO	Επανάληψη	Απόκλιση %
524,61	537,6127	539	2,42
	528,8605	961	0,80
	524,8098	965	0,04
	536,4079	996	2,20
	524,9442	896	0,06
	524,9442	745	0,06
	526,6936	772	0,40
	536,5233	620	2,22
	532,2615	669	1,44
	524,9442	795	0,06
Μέσος όρος	**529,80**	**795,8**	**0,97**

Πίνακας 4:Αποτελέσματα PSO με 60 σωματίδια

Για εξήντα σωματίδια ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 0,97%. Η ελάχιστη απόκλιση από όλα τα τρεξίματα είναι 0,04%.

par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=80			
Καλύτερο Κόστος	Καλύτερο Κόστος PSO	Επανάληψη	Απόκλιση %
524,61	530,9928	546	1,20
	524,6285	937	0,00
	526,711	564	0,40
	524,6285	621	0,00
	524,6285	937	0,00
	526,711	564	0,40
	527,6748	589	0,58
	529,1739	659	0,86
	524,8098	661	0,04
	535,7765	967	2,08
Μέσος όρος	**527,57**	**704,5**	**0,56**

Πίνακας 5:Αποτελέσματα PSO με 80 σωματίδια

Για ογδόντα σωματίδια, ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 0,56%. Μπορούμε να πούμε, ότι τρείς φορές βρήκε το βέλτιστο γιατί η απόκλιση από το βέλτιστο ήταν σχεδόν μηδενική (0,0035).

par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=100			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,61	533,257	872	1,62
	533,257	872	1,62
	527,0322	888	0,46
	528,1245	738	0,67
	530,9007	960	1,18
	526,8302	783	0,42
	532,9958	404	1,57
	525,1255	760	0,10
	530,5227	784	1,11
	524,6111	865	0,00
Μέσος όρος	529,27	792,6	0,88

Πίνακας 6:Αποτελέσματα PSO με 100 σωματίδια

Για εκατό σωματίδια, ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 0,88%. Μια φορά στα δέκα τρεξίματα βρήκε το βέλτιστο.

Ακολουθεί ένας συγκεντρωτικός πίνακας με την απόκλιση από το βέλτιστο κόστος για κάθε πλήθος σωματιδίων.

Πλήθος Σωματιδίων	Απόκλιση από το βέλτιστο κόστος
20	2,39
40	1,46
60	0,97
80	0,56
100	0,88

Πίνακας 7: Απόκλιση από βέλτιστο κόστος για πλήθος σωματιδίων 20, 40, 60, 80 και 100 αντίστοιχα

Επιλέξαμε τα ογδόντα σωματίδια καθώς έχουν τη μικρότερη απόκλιση από το βέλτιστο κόστος (0,56%).

4.1.3 Διαδικασία επιλογής παραλλαγής

Διαλέξαμε επτά από τις παραλλαγές του αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων, τις οποίες έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο. Για να αποφασίσουμε ποιά παραλλαγή είναι η καλύτερη, τρέξαμε το πρώτο παράδειγμα, με μηδενική απόκλιση από τη ζήτηση (dem=0), πέντε φορές, για κάθε παραλλαγή αντίστοιχα. Η παραλλαγή με τη μικρότερη απόκλιση από το βέλτιστο ήταν αυτή με την οποία τρέξαμε τον αλγόριθμο μας. Ακολούθως φαίνονται οι πίνακες με τα κόστη, την επανάληψη στην οποία βρέθηκε το βέλτιστο κόστος, την απόκλιση από το βέλτιστο κόστος και τους μέσους όρους όλων των παραπάνω, για κάθε παραλλαγή.

Μηδενική Παραλλαγή, par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=80			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	524,6285	937	0,00
	527,1559	528	0,48
	531,7553	784	1,34
	543,5613	955	3,49
	525,1255	916	0,10
Μέσος όρος	**530,4453**	**824**	**1,10**

Πίνακας 8: Αποτελέσματα PSO για τη 0η παραλλαγή

Στη μηδενική παραλλαγή (αρχικός αλγόριθμος) ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 1,10% και η ελάχιστη απόκλιση από το βέλτιστο κόστος είναι μηδενική.

1η Παραλλαγή, par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=80			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	534,9818	714	1,94
	532,9958	582	1,57
	527,9099	844	0,62
	530,2934	762	1,07
	530,2629	464	1,07
Μέσος όρος	**531,28876**	**673,2**	**1,26**

Πίνακας 9: Αποτελέσματα PSO για την 1η παραλλαγή

Στην πρώτη παραλλαγή ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 1,26% και η ελάχιστη απόκλιση από το βέλτιστο κόστος είναι 0,62%.

2η Παραλλαγή, par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=80			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	527,0094	817	0,46
	530,7509	987	1,16
	526,8302	457	0,42
	524,6111	840	0,00
	524,6111	721	0,00
Μέσος όρος	526,76254	764,4	0,41

Πίνακας 10: Αποτελέσματα PSO για τη 2η παραλλαγή

Στη δεύτερη παραλλαγή ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 0,41%, η ελάχιστη απόκλιση από το βέλτιστο κόστος είναι μηδενική σε δύο από τα πέντε τρεξίματα.

3η Παραλλαγή, par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=80			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	530,2934	790	1,07
	524,8098	912	0,04
	533,0137	511	1,58
	524,6285	612	0,00
	524,6285	985	0,00
Μέσος όρος	527,47478	762	0,54

Πίνακας 10: Αποτελέσματα PSO για την 3η παραλλαγή

Στην τρίτη παραλλαγή ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 0,54%, η ελάχιστη απόκλιση από το βέλτιστο κόστος είναι μηδενική σε δύο από τα πέντε τρεξίματα.

4η Παραλλαγή, par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=80			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	527,242	659	0,50
	528,1419	566	0,67
	526,6489	797	0,39
	532,2448	967	1,43
	530,1358	614	1,04
Μέσος όρος	**528,8827**	**720,6**	**0,81**

Πίνακας 11: Αποτελέσματα PSO για την 4η παραλλαγή

Στην τέταρτη παραλλαγή ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 0,81% και η ελάχιστη απόκλιση από το βέλτιστο κόστος είναι 0,39%.

5η Παραλλαγή, par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=80			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	525,1255	617	0,10
	527,0094	738	0,46
	538,7111	593	2,62
	526,711	956	0,40
	533,0907	541	1,59
Μέσος όρος	**530,12954**	**689**	**1,04**

Πίνακας 12: Αποτελέσματα PSO για την 5η παραλλαγή

Στην πέμπτη παραλλαγή ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 1,04% και η ελάχιστη απόκλιση από το βέλτιστο κόστος είναι 0,1%.

6η Παραλλαγή, par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=80			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	526,9263	781	0,44
	530,2934	813	1,07
	524,6111	791	0,00
	526,9263	959	0,44
	524,8098	860	0,04
Μέσος όρος	**526,71338**	**840,8**	**0,40**

Πίνακας 13: Αποτελέσματα PSO για την 6η παραλλαγή

Στην έκτη παραλλαγή ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 0,4% και η ελάχιστη απόκλιση από το βέλτιστο κόστος είναι μηδενική.

7η Παραλλαγή, par1, dem=0, Πλήθος σωματιδίων=80			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	538,3328	695	2,55
	527,9777	584	0,64
	527,9777	629	0,64
	532,2743	938	1,44
	526,8401	770	0,42
Μέσος όρος	**530,68052**	**723,2**	**1,14**

Πίνακας 15: Αποτελέσματα PSO για την 7η παραλλαγή

Στην έβδομη παραλλαγή ο μέσος όρος της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος είναι 1,14% και η ελάχιστη απόκλιση από το βέλτιστο κόστος είναι 0,42%.

Παρακάτω φαίνεται ένας πίνακας με το μέσο όρο της απόκλισης από το βέλτιστο κόστος για κάθε παραλλαγή.

Παραλλαγή	Απόκλιση από βέλτιστο κόστος
0	1,10
1	1,26
2	0,41
3	0,54
4	0,81
5	1,04
6	0,40
7	1,14

Πίνακας 14: Μέσος όρος απόκλισης από βέλτιστο κόστος για κάθε παραλλαγή

Η απόκλιση από το βέλτιστο, για τη δεύτερη (0,41%) και έκτη παραλλαγή (0,40%) είναι η μικρότερη, η διαφορά τους είναι πολύ μικρή, μόλις 0,01%. Επιλέγουμε τη δεύτερη παραλλαγή και όχι την όγδοη γιατί η δεύτερη παραλλαγή είχε βρεί δύο φορές το βέλτιστο ενώ η έκτη μία φορά.

4.1.4 Επεξήγηση αλγορίθμου επίλυσης

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται αναλυτικά ο αλγόριθμος σμήνους σωματιδίων.

Αρχικά ορίζουμε στη μεταβλητή dem, την τιμή της απόκλισης από τη ζήτηση και στη μεταβλητή problima, ποιό παράδειγμα θα τρέξουμε.

Στη συνέχεια παίρνουμε τα δεδομένα του παραδείγματος από ένα αρχείο txt. που είναι, το πλήθος των κόμβων (n), η χωρητικότητα του οχήματος (Q), το μέγιστο μήκος διαδρομής (max tour length), που είναι ένας μεγάλος αριθμός, και σημαίνει ότι ο περιορισμός μέγιστου μήκους διαδρομής δεν επηρεάζει την επίλυση του προβλήματος, το χρόνο επισκευής του οχήματος που είναι μηδέν (service_time), τις συντεταγμένες χ και y των κόμβων (X_Y) και τη ζήτηση του κάθε κόμβου (d).

Στη μεταβλητή POP_SIZE βάζουμε το πλήθος των σωματιδίων (80).

Υπολογίζουμε και αποθηκεύουμε σε έναν πίνακα με πλήθος γραμμών και στηλών το πλήθος των σωματιδίων, τις αποστάσεις των κόμβων από τον τύπο:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

όπου (x_1, y_1) και (x_2, y_2), η θέση δύο κόμβων στο επίπεδο. Στην διαγώνιο αυτού του πίνακα βάζουμε ένα μεγάλο αριθμό έτσι ώστε να μην επιλεγεί ποτέ αυτή η μετάβαση, διότι δεν υφίστανται στο πρόβλημα μας οι μετακινήσεις από έναν κόμβο στον εαυτό του.

Δημιουργούμε τις αρχικές διαδρομές του κάθε σωματιδίου, δηλαδή ογδόντα, με τυχαία σειρά κόμβων από το ένα έως το σύνολο των κόμβων. Επειδή όλες οι διαδρομές πρέπει να ξεκινάνε από τον κόμβο ένα, που είναι η αποθήκη, εάν δε βρίσκεται ήδη το ένα στην αρχή των διαδρομών και βρίσκεται σε μια άλλη θέση, το παίρνουμε από τη θέση του και το τοποθετούμε στην αρχή της διαδρομής. Αυτές τις διαδρομές τις αποθηκεύουμε στον πίνακα Abest στον οποίο από εδώ και πέρα θα κρατάμε τις καλύτερες διαδρομές των σωματιδίων, δηλαδή εκείνες με το μικρότερο κόστος. Ακολουθεί ένα παράδειγμα μίας διαδρομής με πέντε κόμβους.

1 5 4 2 3

Αφού φτιάξαμε τις διαδρομές, τις μετατρέπουμε από διακριτή μορφή σε συνεχή επειδή ο αλγόριθμος σμήνους σωματιδίων δουλεύει μόνο με συνεχείς τιμές. Για να το κάνουμε αυτό, για κάθε μία διαδρομή βρίσκουμε το μεγαλύτερο αριθμό κόμβου και με αυτόν τον αριθμό διαιρούμε όλα τα νούμερα της διαδρομής. Τη θέση του κάθε σωματιδίου την αποθηκεύουμε στον πίνακα thesi_s1.

Αρχικοποιούμε την ταχύτητα των σωματιδίων, στον πίνακα tahitita, με μηδενικά.

Παράδειγμα μετατροπής μιας λύσης από διακριτή σε συνεχή μορφή

Λύση σε διακριτή μορφή:

1 8 5 3 7 2 4 6

Λύση σε συνεχή μορφή:

$$\frac{1}{8} \quad \frac{8}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{6}{8}$$

ή

0,125 1 0,625 0,375 0,875 0,25 0,5 0,75

Υπολογισμός κόστους

Για κάθε σωματίδιο υπολογίζουμε το κόστος της διαδρομής του. Στον πίνακα Veltisto_kostos_swmatidiwn βρίσκεται το κόστος κάθε σωματιδίου και από εδώ και πέρα σε αυτόν τον πίνακα θα αποθηκεύουμε το βέλτιστο κόστος κάθε σωματιδίου. Ο υπολογισμός του κόστους της διαδρομής κάθε σωματιδίου γίνεται από το τέλος της διαδρομής προς την αρχή. Αρχικά αποθηκεύουμε στη μεταβλητή p την πιθανότητα να πάρει η ζήτηση του κάθε πελάτη μια τιμή. Η πιθανότητα αυτή εξαρτάται από την τιμή της απόκλισης από τη ζήτηση. Για παράδειγμα εάν η απόκλιση από τη ζήτηση είναι συν πλην ένα και η πραγματική ζήτηση είναι 10, η πιθανότητα p είναι 1/3 διότι η ζήτηση μπορεί να πάρει τρείς τιμές, 10 – 1 = 9, 10 + 1 = 11 και 10 + 0 = 10, και επειδή η πιθανότητα να πάρει η ζήτηση μια από αυτές τις τιμές είναι η ίδια. Το κόστος από τον τελευταίο κόμβο στην αποθήκη μπορούμε να το υπολογίσουμε αμέσως αφού δεν εξαρτάται από την ζήτηση κάποιου πελάτη. Μετά παίρνουμε ανά δύο τους κόμβους από το τέλος της διαδρομής προς την αρχή και υπολογίζουμε το κόστος της διαδρομής από τον ένα κόμβο στον άλλο για την περίπτωση που γυρίσει στην αποθήκη το όχημα για ανεφοδιασμό και για την περίπτωση που δε γυρίσει στην αποθήκη και πάει κατευθείαν στον πελάτη, από την αντικειμενική συνάρτηση που έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο. Αφού υπολογίσουμε τα δύο αυτά κόστη, το όχημα επιλέγει να γυρίσει ή όχι στην αποθήκη ανάλογα με το ποιό κόστος από τα δύο είναι το μικρότερο.

Έπειτα βρίσκουμε το μικρότερο κόστος από όλα τα σωματίδια και το βάζουμε στη μεταβλητή veltisto_kostos και τη διαδρομή του στη μεταβλητή veltisto_swmatidio.

Ορίζουμε τις τιμές των rand1, rand2, με έναν τυχαίο αριθμό μεταξύ του μηδέν και ένα, αρχικοποιούμε με μονάδα το μετρητή των σμηνών και το πλήθος των σμηνών ίσο με 3500.

Επαναλήψεις αλγορίθμου

Σε αυτό το σημείο ξεκινάνε οι επαναλήψεις του αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων. Μέσα σε αυτές τις επαναλήψεις γίνονται τα εξής.

Ορίζουμε τα c_1 και c_2 από τους τύπους (2.6) και (2.7) για $c_{1,\min} = c_{2,\min} = 2$ και $c_{1,\max} = c_{2,\max} = 5$. Σε κάθε επανάληψη θα αλλάζουν οι τιμές τους. Ελέγχουμε εάν έχει βελτιωθεί η βέλτιστη μέχρι τώρα λύση, από την προηγούμενη επανάληψη και αν αυτό ισχύει τη μετατρέπουμε σε συνεχή μορφή. Υπολογίζουμε τη νέα ταχύτητα και θέση του κάθε σωματιδίου από τους τύπους της δεύτερης παραλλαγής που έχουμε επιλέξει παραπάνω ως καλύτερη παραλλαγή. Μετατρέπουμε τη θέση των σωματιδίων σε διακριτή μορφή, με το να αντιστοιχίσουμε τις συνεχείς τιμές της λύσης από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη με τις τιμές από ένα έως το πλήθος των κόμβων.

<u>Παράδειγμα μετατροπής μιας λύσης από συνεχή σε διακριτή μορφή</u>

Λύση σε συνεχή μορφή:

0,56 0,93 0,28 0,789 0,18 0,64 0,316 0,533

Λύση σε διακριτή μορφή:

5 8 2 7 1 6 3 4

1 6 3 4 5 8 2 7

Βελτιώνουμε ακόμα περισσότερο τις βέλτιστες μέχρι στιγμής λύσεις των σωματιδίων με τους αλγορίθμους τοπικής αναζήτησης 2-opt και 3-opt με εκατό επαναλήψεις για τον καθένα εκτός και εάν για δέκα συνεχόμενες φορές δεν έχουμε κάποια βελτίωση. Με τον 2-opt επιλέγουμε δύο τυχαίους κόμβους και αλλάζουμε τη φορά των κόμβων που βρίσκονται ανάμεσα τους, με τον 3-opt κάνουμε το ίδιο μόνο που επιλέγουμε τρείς τυχαίους κόμβους.

<u>Παράδειγμα 2-opt</u>

Λύση πριν την εφαρμογή 2-opt:

1 4 7 2 3 8 6 5

Επιλέγουμε τον τρίτο κόμβο (7) και τον έβδομο κόμβο (6) της παραπάνω διαδρομής.

Λύση μετά την εφαρμογή 2-opt:

1 4 7 8 3 2 6 5

Παράδειγμα 3-opt

Λύση πριν την εφαρμογή 3-opt:

1 4 7 2 3 8 6 5

Επιλέγουμε το δεύτερο κόμβο (4), τον πέμπτο κόμβο (3) και τον όγδοο κόμβο (5) της παραπάνω διαδρομής.

Λύση μετά την εφαρμογή 3-opt:

1 4 2 7 3 6 8 5

Βελτιστοποιούμε ακόμα περισσότερο το κόστος με τον αλγόριθμο επανασύνδεσης διαδρομών (path relinking). Σε αυτόν τον αλγόριθμο παίρνουμε τη βέλτιστη λύση όλων των σωματιδίων και άλλη μία λύση, είτε τη δεύτερη καλύτερη αν είμαστε στις πρώτες 560 επαναλήψεις, είτε μια τυχαία λύση από τα υπόλοιπα σωματίδια για τις επόμενες επαναλήψεις. Ο λόγος που το κάνουμε είναι γιατί από δοκιμές του αλγορίθμου παρατηρήσαμε ότι έχουμε καλύτερα αποτελέσματα. Τώρα δημιουργούμε νέες λύσεις, συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω λύσεις, υπολογίζοντας κάθε φορά και το κόστος της. Παίρνουμε τη δεύτερη λύση και της αλλάζουμε κάθε φορά τη θέση δύο στοιχείων της μέχρι να γίνει ίδια με την πρώτη λύση. Συγκεκριμένα για κάθε στοιχείο της πρώτης λύσης, από το δεύτερο και μετά, το τοποθετούμε στην δεύτερη λύση στην ίδια θέση που βρισκόταν στην πρώτη λύση. Μετά από αυτή τη διαδικασία θα έχουμε τόσες λύσεις όσες και το πλήθος των κόμβων της διαδρομής μείον δύο. Στο τέλος συγκρίνουμε το βέλτιστο κόστος της δεύτερης λύσης που έχουμε βρεί μέχρι τώρα με τα κόστη των νέων λύσεων και αν κάποια είναι καλύτερη, αντικαθιστούμε το παλιό βέλτιστο κόστος με το νέο.

Παράδειγμα Επανασύνδεσης Διαδρομών (Path Relinking)

Λύσεις πριν την εφαρμογή Επανασύνδεσης Διαδρομών:

1η λύση:

1 4 7 2 3 8 6 5

2η λύση:

1 2 8 5 4 3 7 6

Οι λύσεις που θα δημιουργήσει η μέθοδος Επανασύνδεσης Διαδρομών είναι οι εξής:

1	4	8	5	2	3	7	6
1	4	7	5	2	3	8	6
1	4	7	2	5	3	8	6
1	4	7	2	3	5	8	6
1	4	7	2	3	8	5	6
1	4	7	2	3	8	6	5

Έπειτα ενημερώνουμε το βέλτιστο κόστος και τη διαδρομή του βέλτιστου σωματιδίου, έτσι ώστε αν έχει βρεθεί κάτι καλύτερο να αποθηκευτεί στη θέση του παλιού βέλτιστου κόστους, και κρατάμε στη μεταβλητή (iter) την επανάληψη στην οποία πραγματοποιήθηκε η αντικατάσταση, για να ξέρουμε πότε έγινε η τελευταία βελτίωση κόστους. Στη συνέχεια μετατρέπουμε τη θέση του κάθε σωματιδίου σε συνεχή μορφή και αυξάνουμε το μετρητή των επαναλήψεων (swarmcount). Εδώ τελειώνουν οι επαναλήψεις του αλγορίθμου.

Μας είναι γνωστό πλέον το βέλτιστο κόστος, η βέλτιστη διαδρομή και η επανάληψη του αλγορίθμου στην οποία βρέθηκε το βέλτιστο κόστος. Ξέροντας τη βέλτιστη διαδρομή κάνουμε το διάγραμμα της στο επίπεδο, στο οποίο δε φαίνεται πότε το όχημα γυρίζει στην αποθήκη για να είναι το διάγραμμα πιο ευδιάκριτο.

Παρακάτω φαίνεται ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων για το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση.

<u>Ψευδοκώδικας</u>

Επιλογή της απόκλισης από τη ζήτηση (dem) και παραδείγματος που θα επιλυθεί
Αποθήκευση δεδομένων από αρχείο txt.
Υπολογισμός του κόστους μεταβάσεων από κόμβο σε κόμβο
Αρχικοποίηση διαδρομών με τυχαίο τρόπο
Μετατροπή θέσεων σωματιδίων σε συνεχή μορφή
Αρχικοποίηση ταχύτητας σωματιδίων
Υπολογισμός κόστους κάθε σωματιδίου
Εύρεση ελάχιστου κόστους
Do until (δεν έχει φτάσει ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων)
    Υπολογισμός c_1 και c_2
    Υπολογισμός νέας ταχύτητας και θέσης σωματιδίων
    Μετατροπή θέσεων σωματιδίων σε διακριτή μορφή
    Βελτίωση κόστους με 2-opt, 3-opt, Path Relinking
    Ενημέρωση βέλτιστου κόστους και θέσης και αποθήκευση επανάληψης
    Μετατροπή θέσεων σωματιδίων σε συνεχή μορφή
Enddo
Επιστροφή βέλτιστου σωματιδίου, βέλτιστου κόστους, επανάληψης που βρέθηκε το βέλτιστο και διαγράμματος βέλτιστου σωματιδίου

Κεφάλαιο 5: Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιούνται κάποιες συντομογραφίες, η έννοια των οποίων είναι η εξης: par = παράδειγμα, n = πλήθος κόμβων, Q = χωρητικότητα οχήματος, dem = απόκλιση από τη ζήτηση.

5.1 Παρουσίαση και ανάλυση αποτελεσμάτων

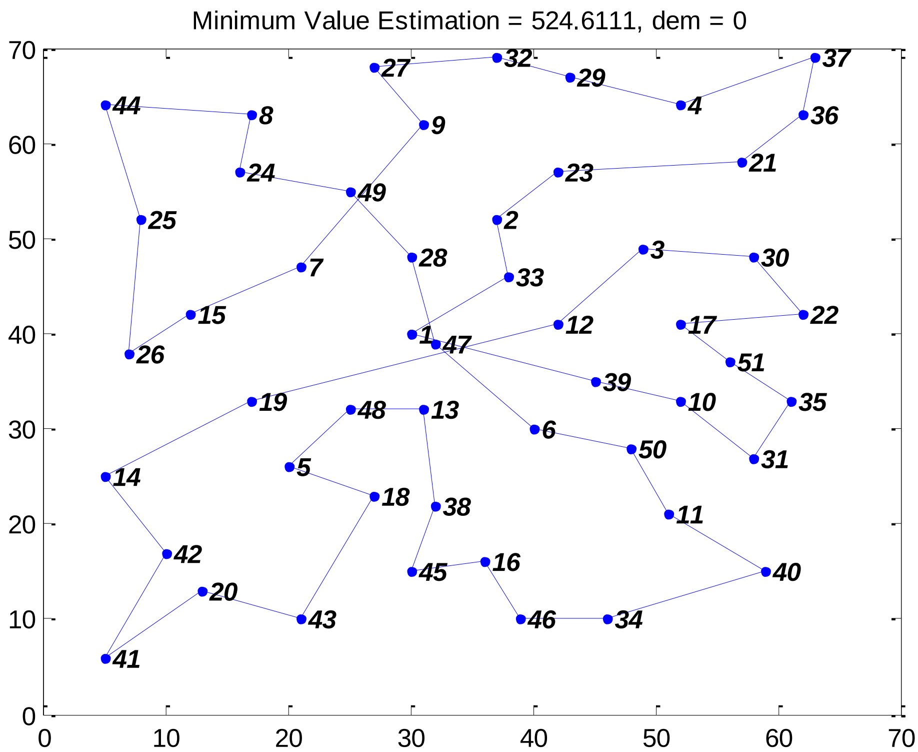
Σε αυτό το κεφάλαιο παρατίθενται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα τρεξίματα του αλγορίθμου, για κάθε παράδειγμα. Συγκεκριμένα για κάθε παράδειγμα παρουσιάζουμε τρείς πίνακες (για dem=0, dem=1, dem=2) στους οποίους βλέπουμε το καλύτερο κόστος που έχει βρεθεί μέχρι σήμερα ($1^η$ στήλη), το βέλτιστο κόστος κάθε τρεξίματος ($2^η$ στήλη) όπου έχουμε κάνει πέντε τρεξίματα, σε ποιά επανάληψη βρέθηκε το βέλτιστο ($3^η$ στήλη) και η απόκλιση του κόστους που βρήκαμε εμείς από το μέχρι τώρα βέλτιστο ($4^η$ στήλη). Επίσης μετά από την παρουσίαση του κάθε πίνακα ακολουθεί το διάγραμμα με την αναπαράσταση της βέλτιστης διαδρομής, αυτής δηλαδή με το μικρότερο κόστος.

Σε κάποια διαγράμματα στα οποία δε φαίνονται ξεκάθαρα οι αριθμοί των κόμβων υπάρχει κάτω από το διάγραμμα ένας πίνακας με την ακολουθία των κόμβων.

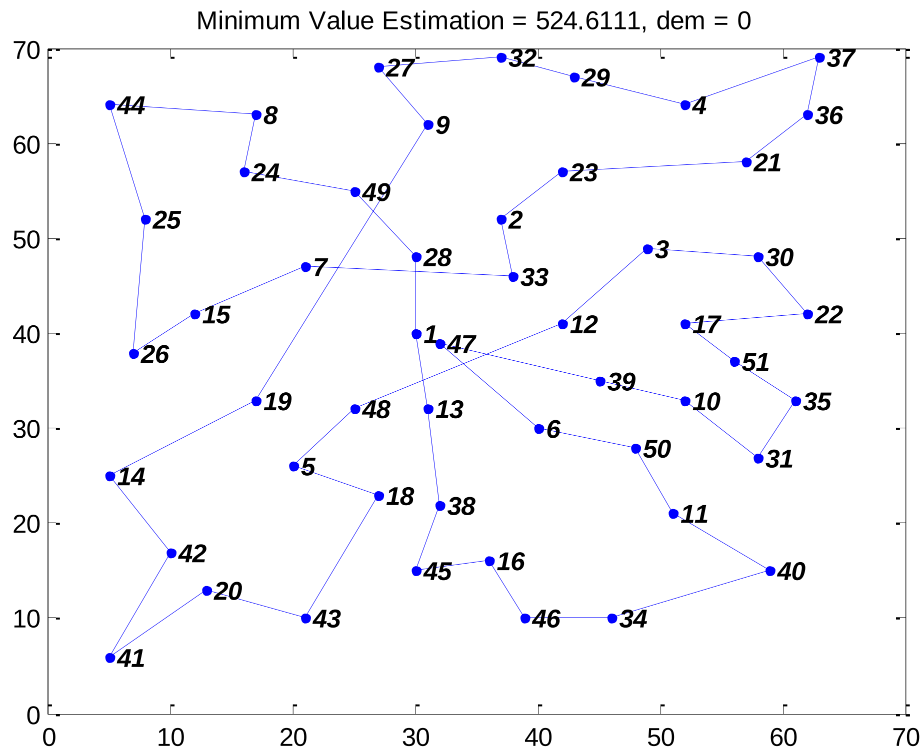
<u>Παράδειγμα 1</u>

par1, n=51, Q=160, dem=0			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	524,6111	1990	0,00
	524,6111	2765	0,00
	524,6111	1314	0,00
	531,0249	2610	1,21
	524,8098	2311	0,04
Μέσος όρος	525,9336	2198	0,25

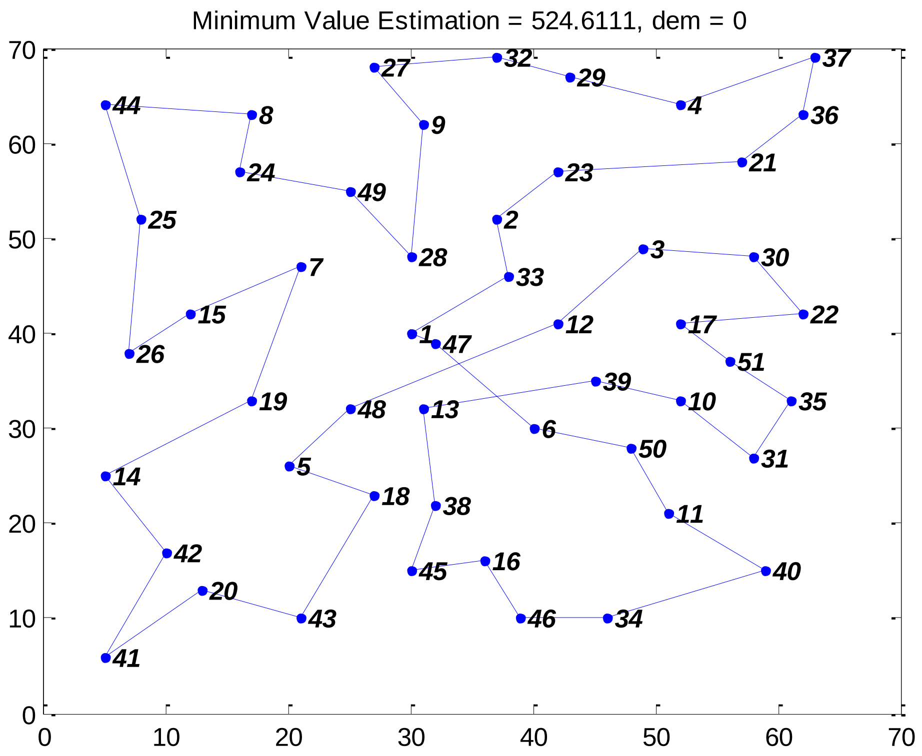
Πίνακας 15: Αποτελέσματα PSO για το par1, n=51, Q=160, dem=0



Διάγραμμα 1: par1, n=51, Q=160, dem=0



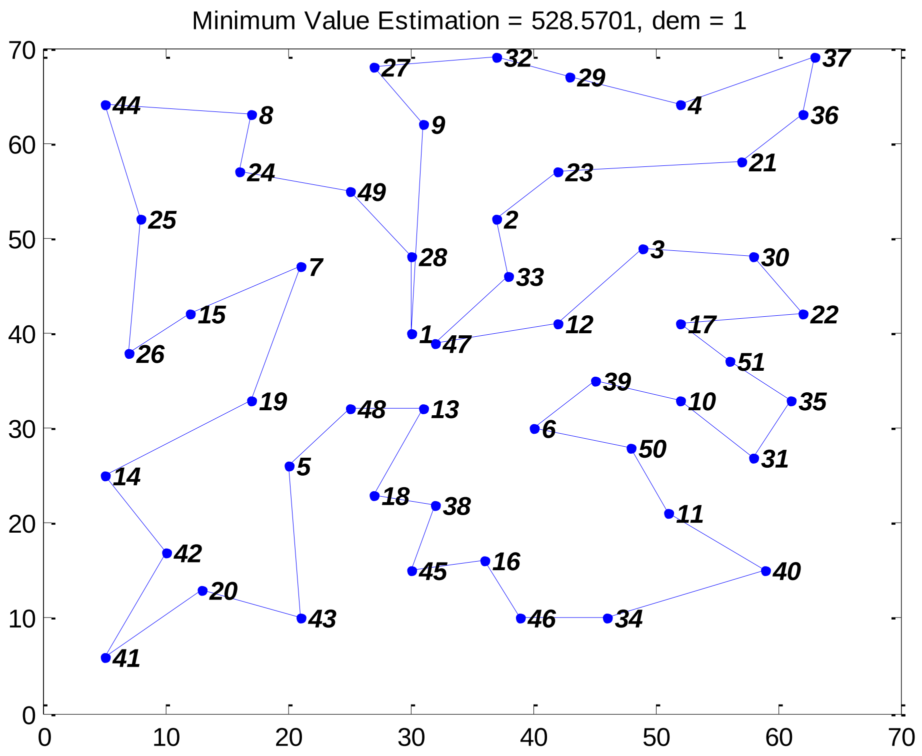
Διάγραμμα 2: par1, n=51, Q=160, dem=0



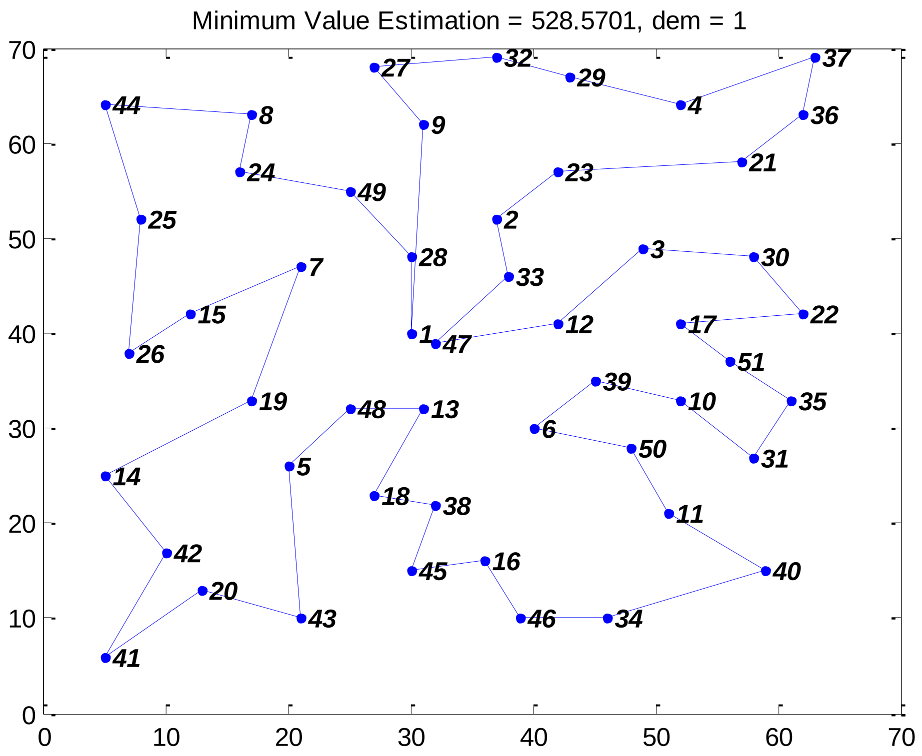
Διάγραμμα 3: par1, n=51, dem=0

par1, n=51, Q=160, dem=1			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	530,3991	3167	1,09
	528,5701	3395	0,75
	528,5701	2874	0,75
	530,3991	3456	1,09
	531,5647	2887	1,31
Μέσος όρος	529,9006	3155,8	1,00

Πίνακας 16: Αποτελέσματα PSO για το par1, n=51, Q=160, dem=1



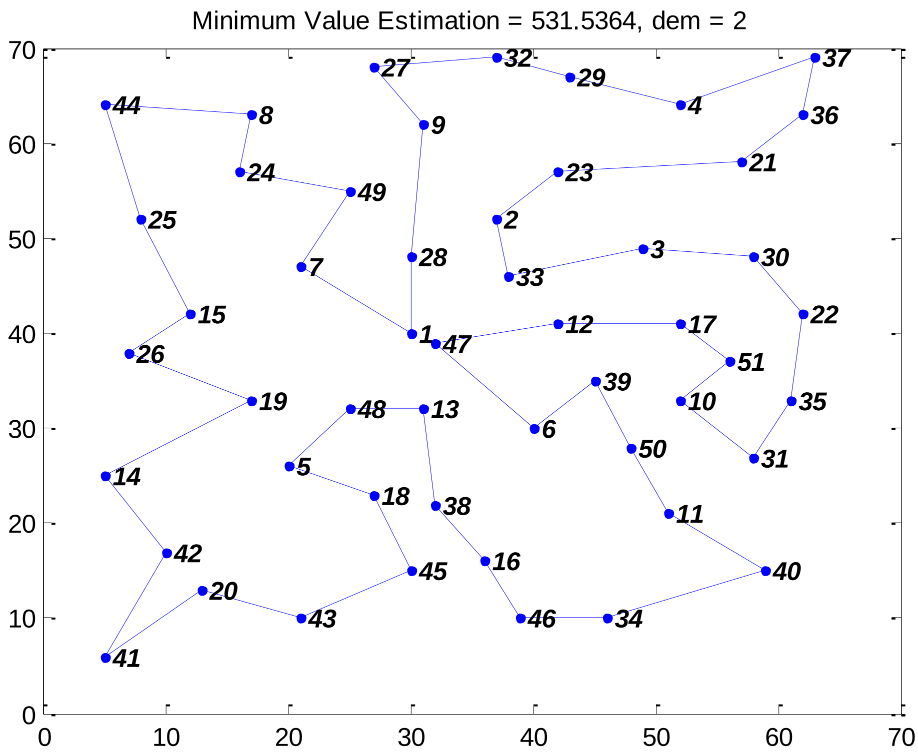
Διάγραμμα 4: par1, n=51, Q=160, dem=0



Διάγραμμα 5: par1, n=51, Q=160, dem=1

par1, n=51, Q=160, dem=2			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
524,6111	534,0020	2800	1,76
	533,5742	3085	1,68
	531,9366	3293	1,38
	534,7166	3463	1,89
	531,5364	788	1,30
Μέσος όρος	533,1532	2685,8	1,60

Πίνακας 17: Αποτελέσματα PSO για το par1, n=51, Q=160, dem=2



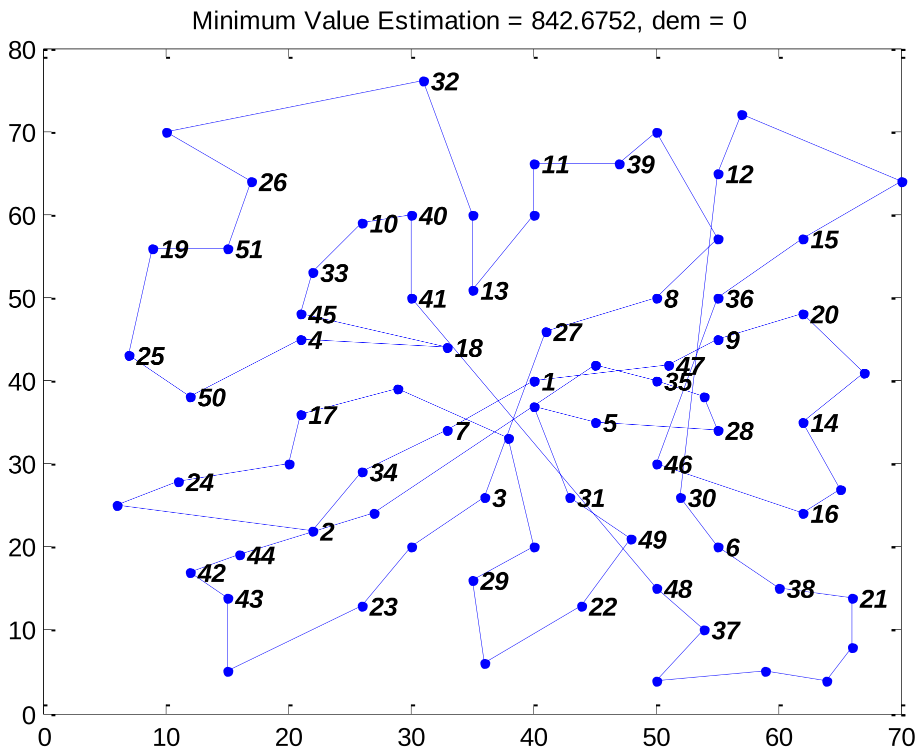
Διάγραμμα 6: par1, n=51, Q=160, dem=2

Στο παράδειγμα 1, για dem=0 βρήκαμε στα τρία από τα πέντε τρεξίματα το απόλυτο βέλτιστο. Ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 0,25% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 2198. Για dem=1 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 1% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3156. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 0,75%. Για dem=2 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 1,6% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 2686. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 1,3%.

Παράδειγμα 2

par2, n=76, Q=114, dem=0			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
835,26	845,8942	3468	1,26
	842,6752	3493	0,88
	842,7864	3467	0,89
	852,4583	2931	2,02
	849,8481	3402	1,72
Μέσος όρος	846,7324	3352,2	1,35

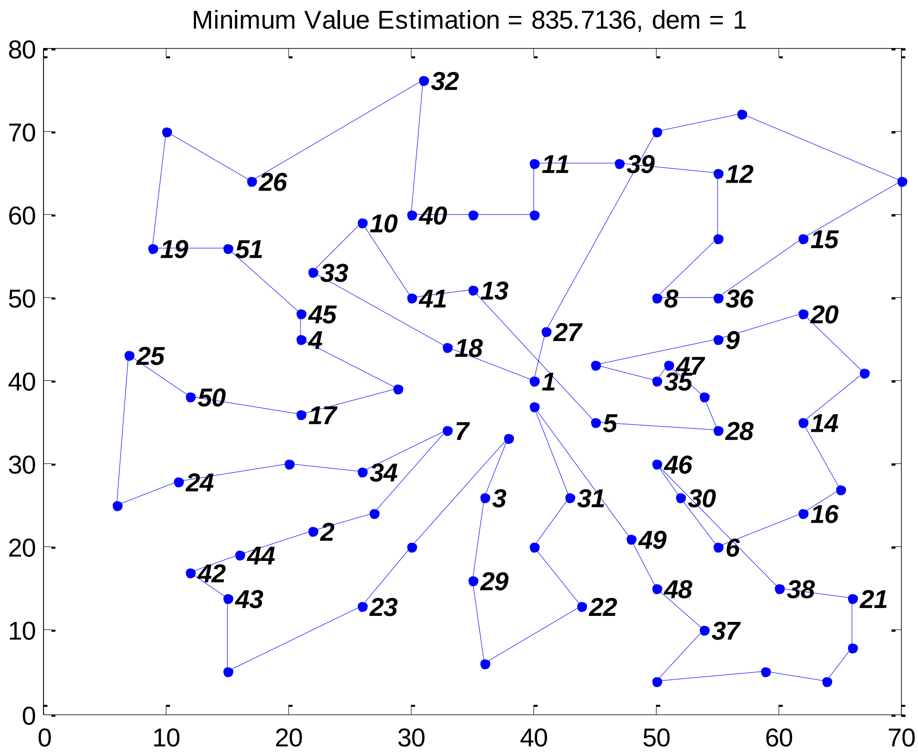
Πίνακας 18: Αποτελέσματα PSO για το par2, n=76, Q=114, dem=0



Διάγραμμα 7: par2, n=76, Q=114, dem=0

par2, n=76, Q=114, dem=1			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
835,26	835,7136	3482	0,05
	845,1919	3298	1,18
	847,7099	3404	1,47
	849,0913	3087	1,63
	867,5574	3344	3,72
Μέσος όρος	849,0528	3323	1,62

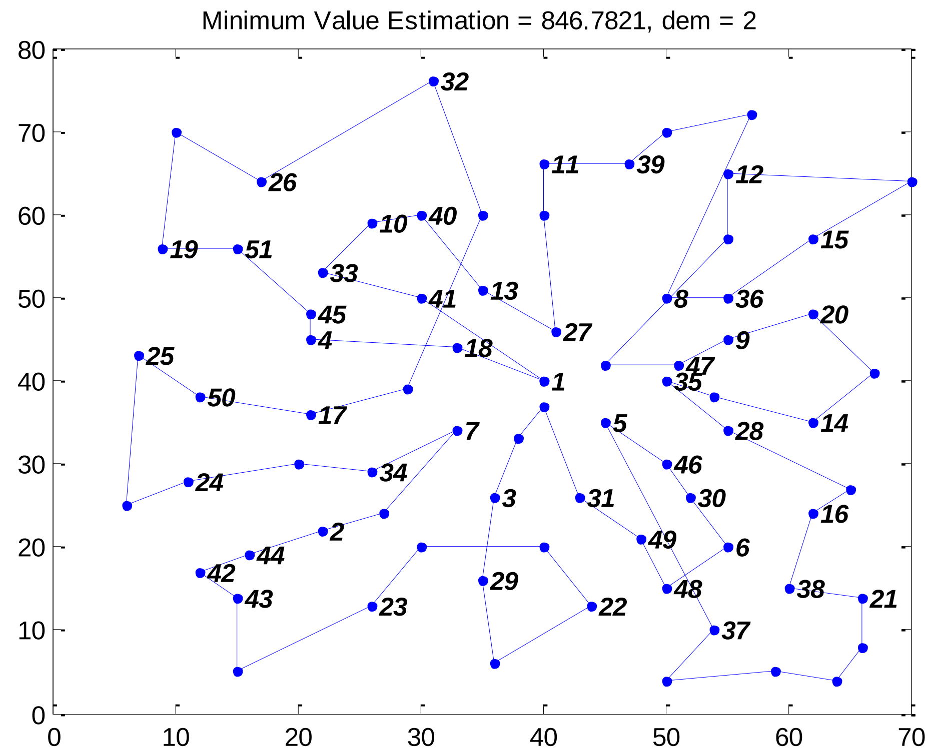
Πίνακας 19: Αποτελέσματα PSO για το par2, n=76, Q=114, dem=1



Διάγραμμα 8: par2, n=76, Q=114, dem=1

par2, n=76, Q=114,dem=2			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
835,26	858,0453	3360	2,66
	846,7821	3484	1,36
	850,3920	3467	1,78
	856,6053	2940	2,49
	860,1798	3401	2,90
Μέσος όρος	854,4009	3330,4	2,24

Πίνακας 20: Αποτελέσματα PSO για το par2, n=76, Q=114, dem=2



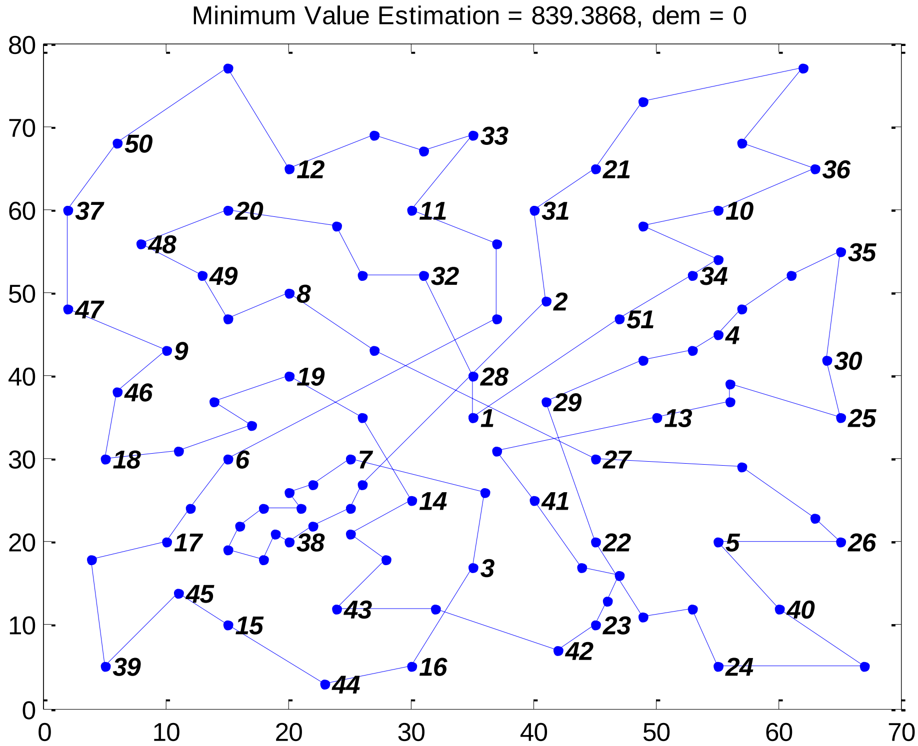
Διάγραμμα 9: par2, n=76, Q=114, dem=2

Στο παράδειγμα 2, για dem=0 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 1,35% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3352. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 0,88%. Για dem=1 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 1,62% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3323. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 0,05% σχεδόν 0%. Για dem=2 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 2,24% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3330. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 1,36%.

Παράδειγμα 3

par3, n=101,Q=120, dem=0			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
826,14	850,4230	3492	2,86
	845,9131	3469	2,34
	839,3868	3479	1,58
	853,0661	2935	3,16
	843,5976	2818	2,07
Μέσος όρος	846,4773	3238,6	2,40

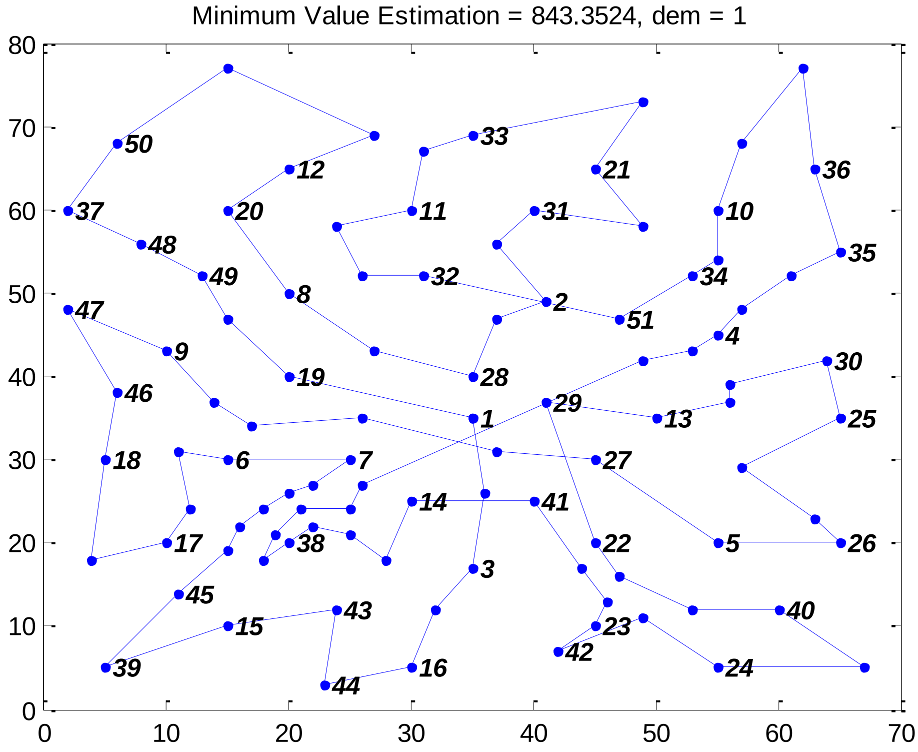
Πίνακας 21: Αποτελέσματα PSO για το par3, n=101, Q=120, dem=0.



Διάγραμμα 10: par3, n=101, Q=120, dem=0

par3, n=101, Q=120, dem=1			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
826,14	848,9420	3376	2,69
	849,8910	2653	2,79
	848,7508	3471	2,66
	843,3524	3184	2,04
	861,5057	3499	4,11
Μέσος όρος	850,4884	3236,6	2,86

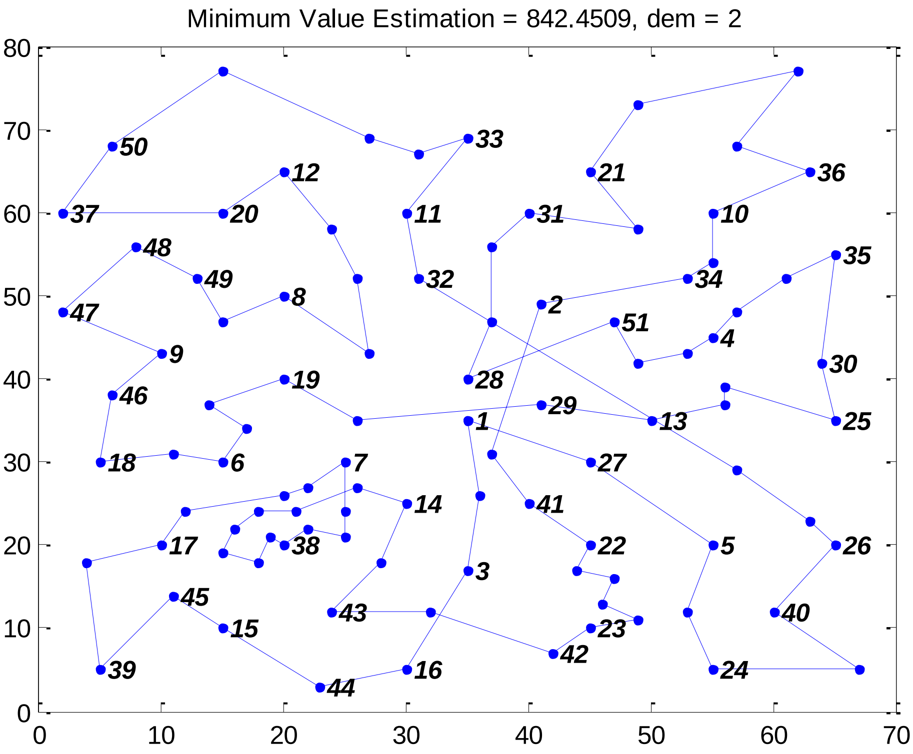
Πίνακας 22: Αποτελέσματα PSO για το par3, n=101, Q=120, dem=1



Διάγραμμα 11: par3, n=101, Q=120, dem=1

par3, n=101,Q=120, dem=2			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
826,14	852,0632	3446	3,04
	858,9644	3487	3,82
	842,4509	3317	1,94
	865,9588	3048	4,60
	850,8046	3413	2,90
Μέσος όρος	854,0484	3342,2	3,27

Πίνακας 23: Αποτελέσματα PSO για το par3, n=101, Q=120, dem=2



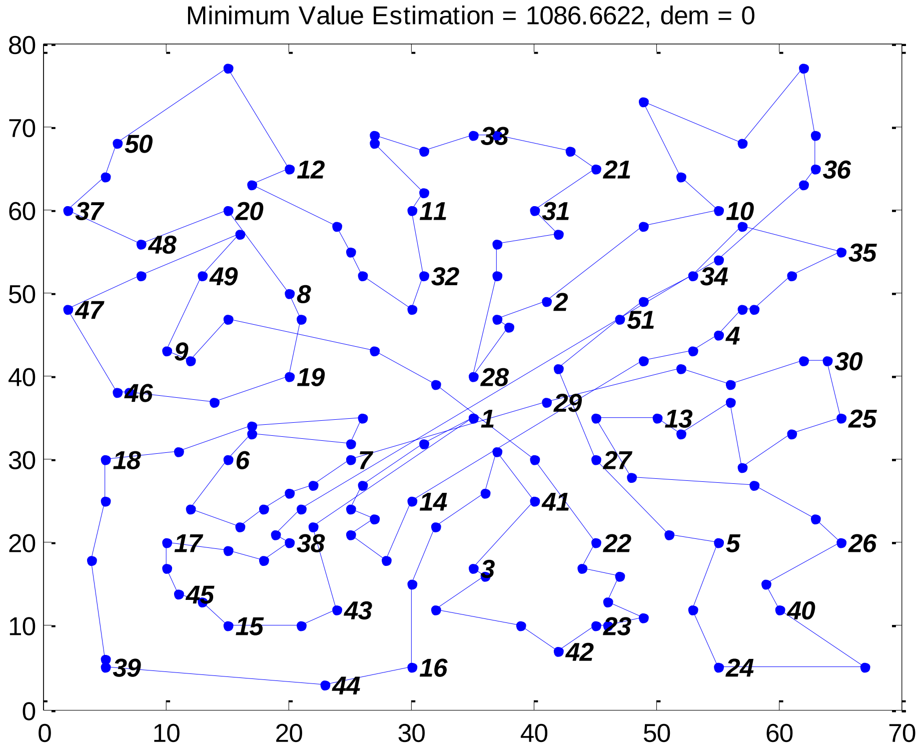
Διάγραμμα 12: par3, n=101, Q=120, dem=2

Στο παράδειγμα 3, για dem=0 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 2,4% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3239. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 1,58%. Για dem=1 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 2,86% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3237. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 2,04%. Για dem=2 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 3,27% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3342. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 1,94%.

<u>Παράδειγμα 4</u>

par4, n=151, Q=120, dem=0			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
1028,42	1.086,7000	3439	5,36
	1.108,9000	3349	7,26
	1.137,9000	3437	9,62
	1.123,7000	3441	8,48
	1.114,4000	3478	7,72
Μέσος όρος	1114,32	3428,8	7,71

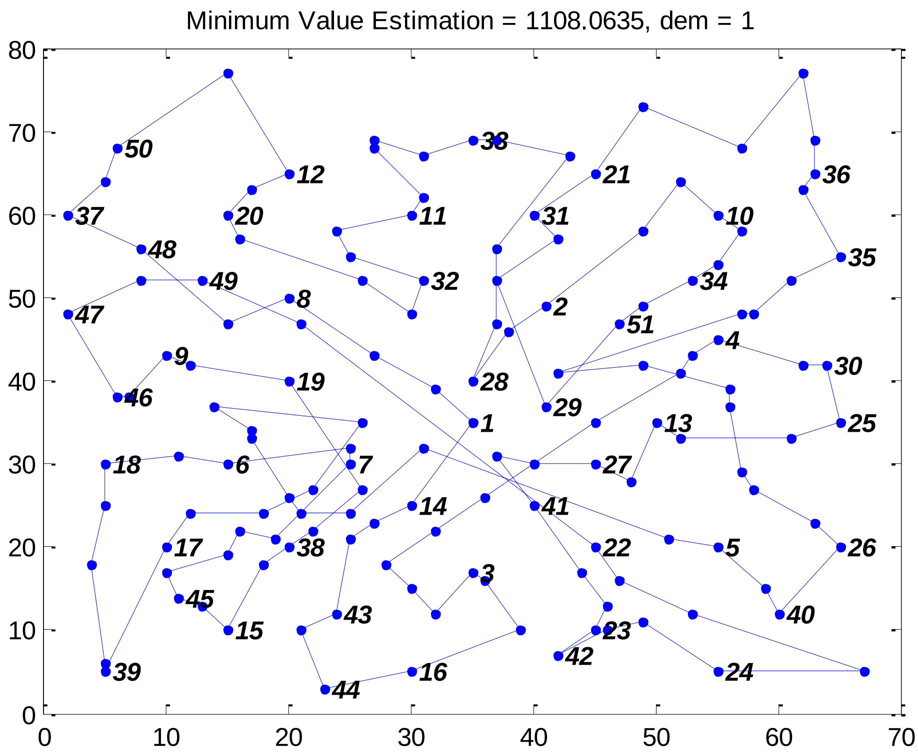
Πίνακας 24: Αποτελέσματα PSO για το par4, n=151, Q=120, dem=0



Διάγραμμα 13: par4, n=151, Q=120, dem=0

par4, n=151, Q=120, dem=1			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
1028,42	1.132,2000	3480	9,17
	1.108,1000	3499	7,19
	1.109,6000	3477	7,32
	1.121,3000	3399	8,28
	1.125,8000	3500	8,65
Μέσος όρος	1119,4	3471	8,13

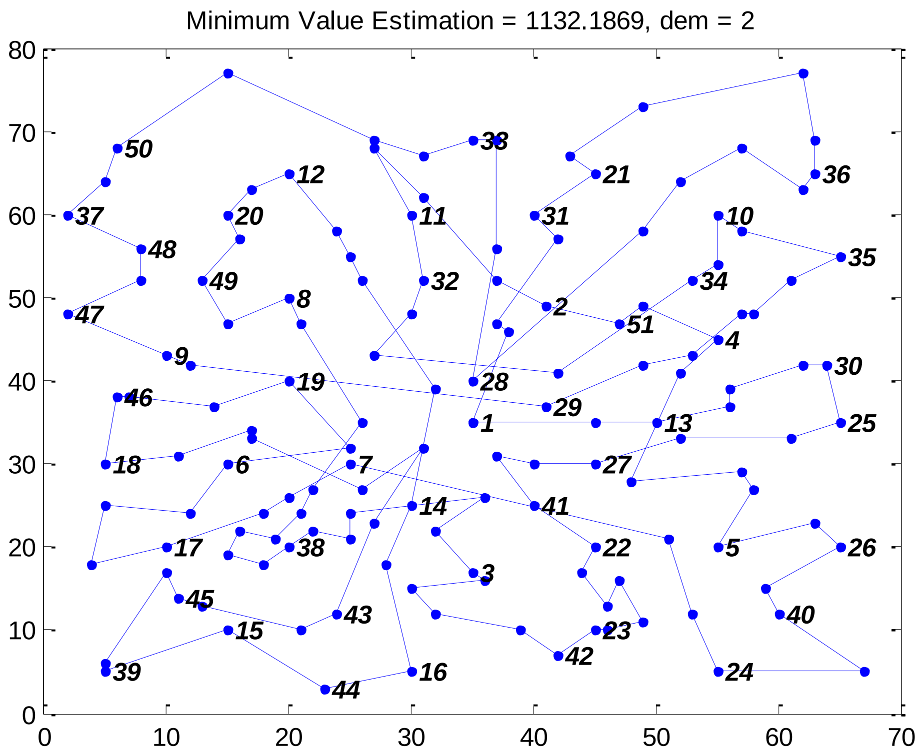
Πίνακας 25: Αποτελέσματα PSO για το par4, n=151, Q=120, dem=1



Διάγραμμα 14: par4, n=151, Q=120, dem=1

par4, n=151, Q=120, dem=2			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
1028,42	1.129,2000	3487	8,92
	1.151,9000	3433	10,72
	1.139,0000	3457	9,71
	1.132,2000	3468	9,17
	1.117,0000	3290	7,93
Μέσος όρος	1.133,8600	3427	9,29

Πίνακας 26: Αποτελέσματα PSO για το par4, n=151, Q=120, dem=2



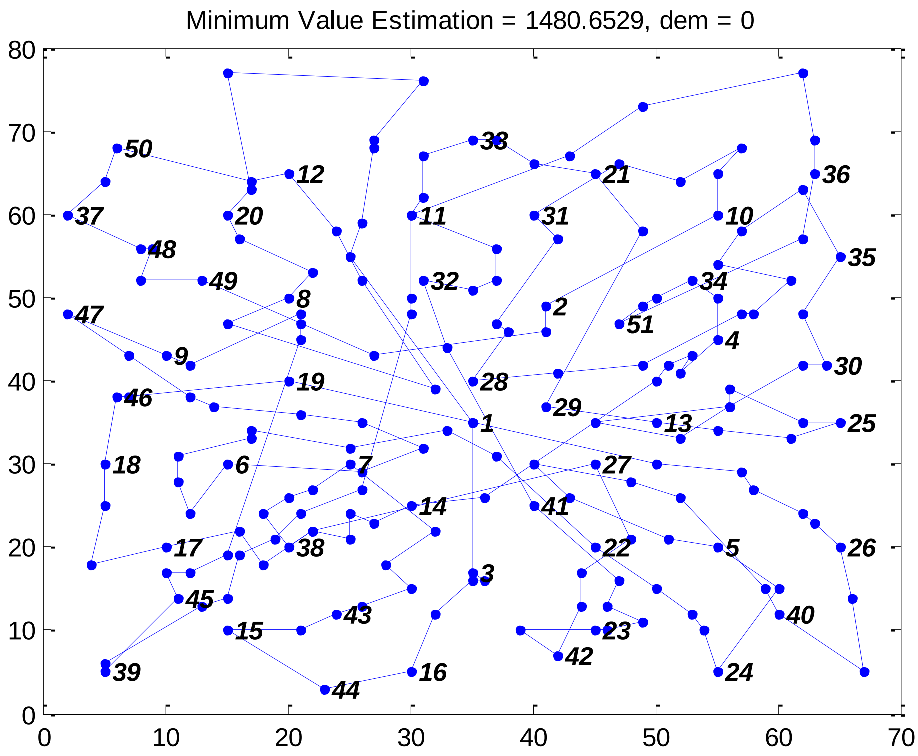
Διάγραμμα 15: par4, n=151, Q=120, dem=2

Στο παράδειγμα 4, για dem=0 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 7,71% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3429. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 5,36%. Για dem=1 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 8,13% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3471. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 7,19%. Για dem=2 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 9,29% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3427. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 7,93%.

Παράδειγμα 5

par5, n=200, Q=120, dem=0			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
1291,29	1498,2000	3475	13,81
	1483,7000	3473	12,97
	1493,2000	3500	13,52
	1500,2000	3475	13,93
	1480,7000	3460	12,79
Μέσος όρος	1491,2000	3476,6	13,40

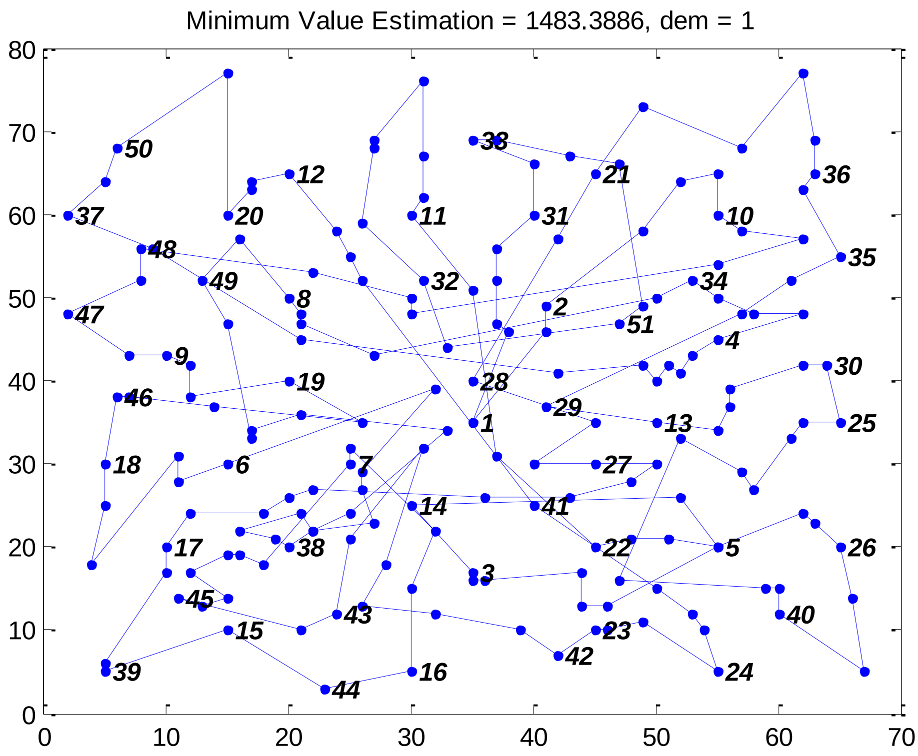
Πίνακας 27: Αποτελέσματα PSO για το par5, n=200, Q=120, dem=0



Διάγραμμα 16: par5, n=200, Q=120, dem=0

par5, n=200, Q=120, dem=1			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
1291,29	1518,9000	3498	14,99
	1515,4000	3499	14,79
	1484,6000	3496	13,02
	1483,4000	3499	12,95
	1499,8000	3483	13,90
Μέσος όρος	1500,4200	3495	13,93

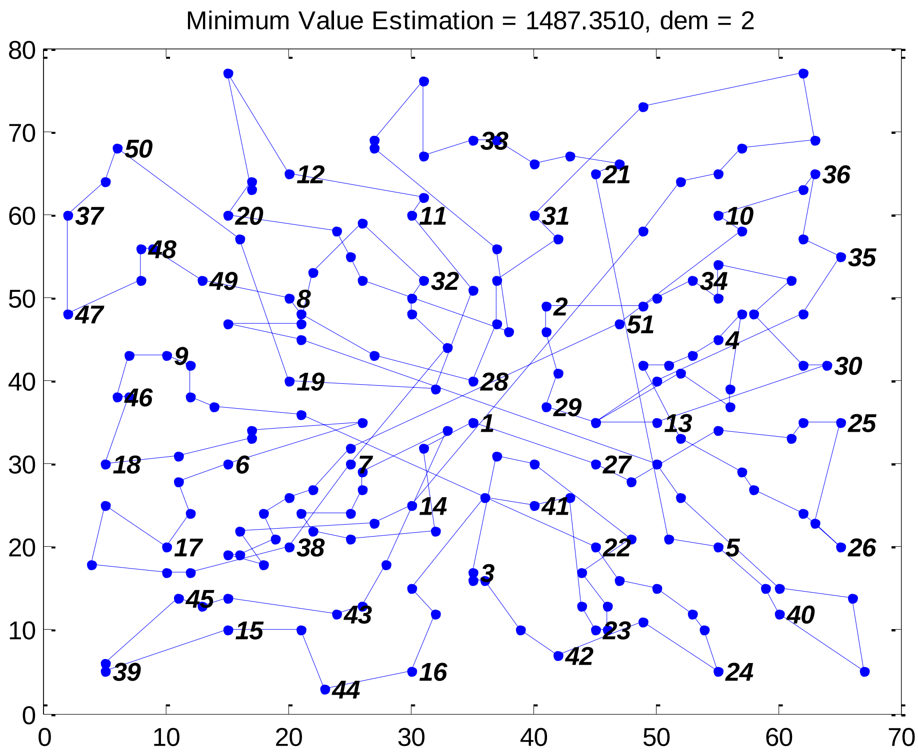
Πίνακας 28: Αποτελέσματα PSO για το par5, n=200, Q=120, dem=1



Διάγραμμα 17: par5, n=200, Q=120, dem=1

par5, n=200, Q=120, dem=2			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
1291,29	1529,1000	3467	15,55
	1502,0000	3448	14,03
	1487,4000	3481	13,18
	1522,1000	3486	15,16
	1504,0000	3485	14,14
Μέσος όρος	1508,9200	3473,4	14,41

Πίνακας 29: Αποτελέσματα PSO για το par5, n=200, Q=120, dem=2



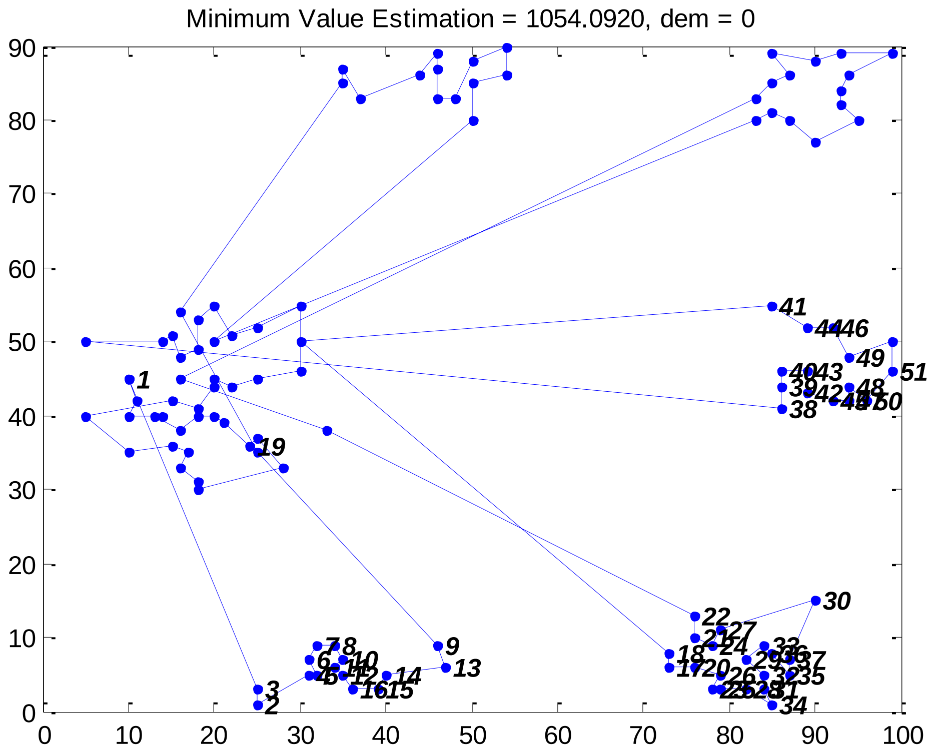
Διάγραμμα 18: par5, n=200, Q=120, dem=2

Στο παράδειγμα 5, για dem=0 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 13,4% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3477. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 12,79%. Για dem=1 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 13,93% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3495. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 12,95%. Για dem=2 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 14,41% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3473. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 13,18%.

Παράδειγμα 6

par6, n=121, Q=120, dem=0			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
1042,11	1058,2000	3483	1,52
	1054,1000	3476	1,14
	1062,2000	3292	1,89
	1169,6000	3494	10,90
	1057,4000	3458	1,45
Μέσος όρος	1080,3000	3440,6	3,38

Πίνακας 30: Αποτελέσματα PSO για το par6, n=121, Q=120, dem=0



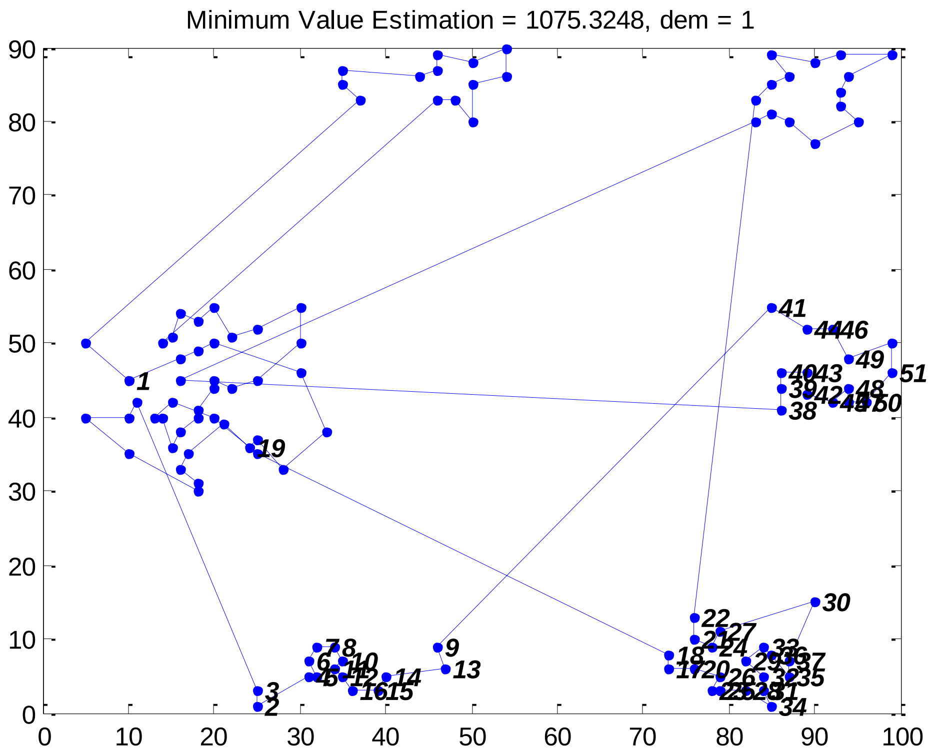
Διάγραμμα 19: par6, n=121, Q=120, dem=0

1	89	83	87	112	86	90	92	91	19	115	109
84	114	118	85	113	82	120	88	93	94	97	95
98	116	99	117	101	104	105	102	103	107	106	121
38	39	40	43	42	45	47	48	50	51	52	49
46	44	41	111	18	17	20	26	23	25	28	34
31	32	29	33	36	35	37	30	27	24	21	22
110	96	54	56	59	57	61	64	67	65	63	62
66	60	58	55	53	100	69	78	80	81	79	77
74	75	73	76	72	68	71	70	108	119	9	13
14	15	16	12	11	10	8	7	6	5	4	2
3	1										

Πίνακας 31: Ακολουθία κόμβων για par6, n=121, Q=120, dem=0

par6, n=121, Q=120, dem=1			
Καλύτερο Κόστος	Καλύτερο Κόστος PSO	Επανάληψη	Απόκλιση %
1042,11	1075,3000	3306	3,09
	1109,7000	3478	6,09
	1075,3000	3306	3,09
	1109,7000	3478	6,09
	1188,9000	3372	12,35
Μέσος όρος	1111,7800	3388	6,14

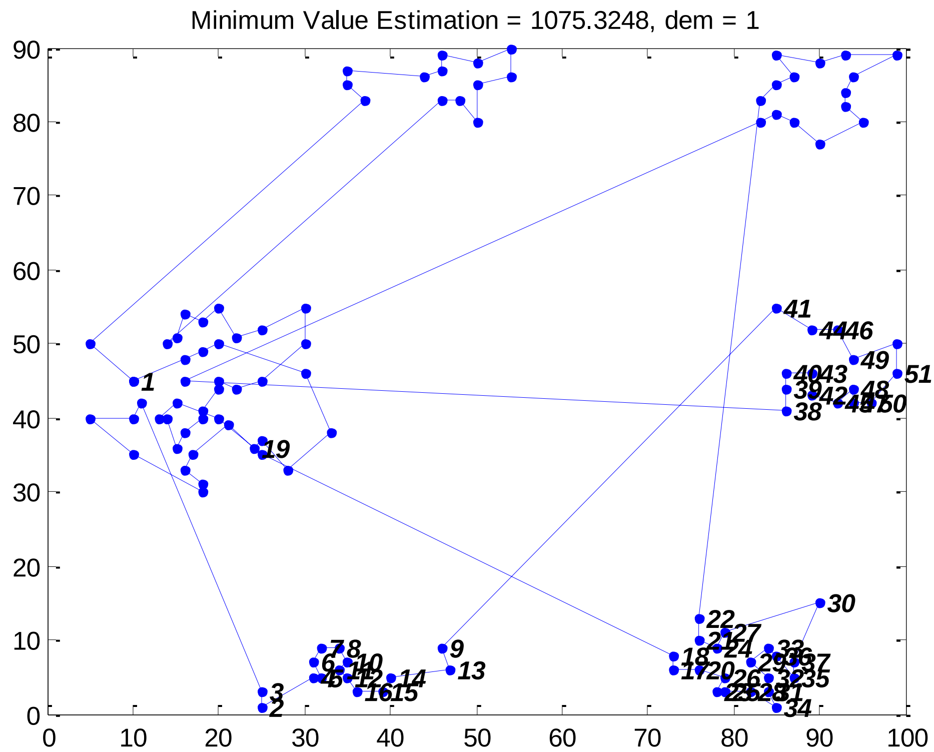
Πίνακας 32: Αποτελέσματα PSO για το par6, n=121, Q=120, dem=1



Διάγραμμα 20: par6, n=121, Q=120, dem=1

1	103	102	100	116	110	109	115	19	91	85	118
114	84	82	120	83	89	3	2	4	5	6	7
8	10	11	12	16	15	14	13	9	41	44	46
49	52	51	50	47	48	45	42	43	40	39	38
96	53	55	58	60	66	62	63	65	67	64	61
57	59	56	54	22	21	24	27	30	37	35	36
33	29	32	31	34	28	25	23	26	20	17	18
119	92	88	112	87	113	86	90	93	94	97	95
98	111	99	117	101	104	105	108	107	106	74	77
69	78	80	81	79	73	76	75	72	71	70	68
121	1										

Πίνακας 33: Ακολουθία κόμβων για par6, n=121, Q=120, dem=1



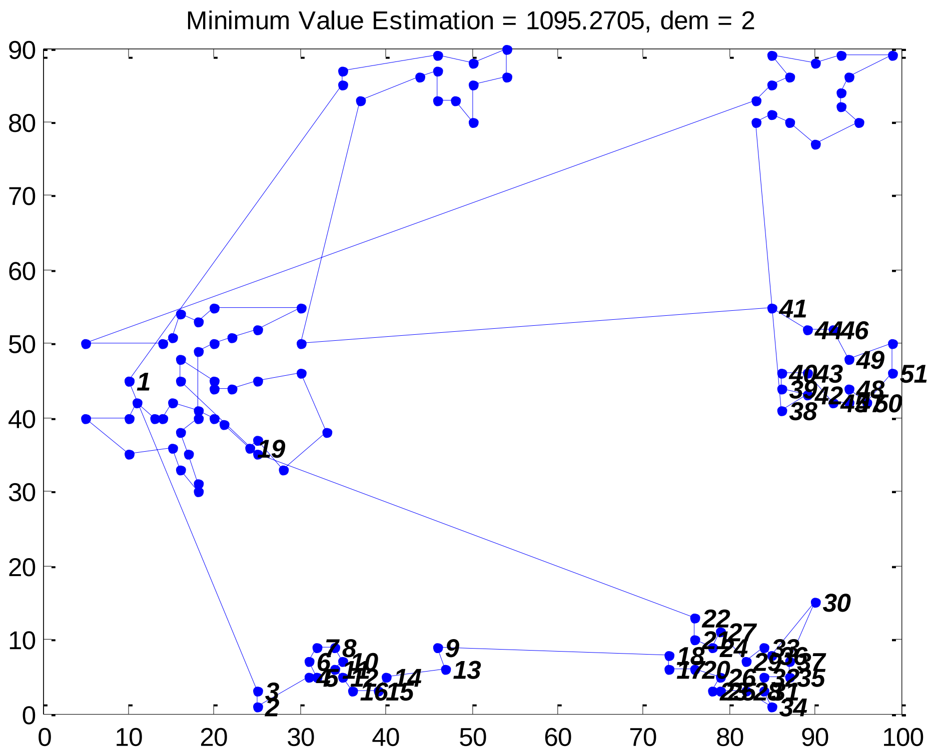
Διάγραμμα 21: par6, n=121, Q=120, dem=1

1	103	102	100	116	110	109	115	19	91	85	118
114	84	82	120	83	89	3	2	4	5	6	7
8	10	11	12	16	15	14	13	9	41	44	46
49	52	51	50	47	48	45	42	43	40	39	38
96	53	55	58	60	66	62	63	65	67	64	61
57	59	56	54	22	21	24	27	30	37	35	36
33	29	32	31	34	28	25	23	26	20	17	18
119	92	88	112	87	113	86	90	93	94	97	95
98	111	99	117	101	104	105	108	107	106	74	77
69	78	80	81	79	73	76	75	72	71	70	68
121	1										

Πίνακας 34: Ακολουθία κόμβων για par6, n=121, Q=120, dem=1

par6, n=121, Q=120, dem=2			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
1042,11	1184,5000	3450	12,02
	1187,4000	3238	12,24
	1125,3000	3480	7,39
	1182,0000	3392	11,84
	1095,3000	3500	4,86
Μέσος όρος	1154,9000	3412	9,67

Πίνακας 35: Αποτελέσματα PSO για το par6, n=121, Q=120, dem=2



Διάγραμμα 22: par6, n=121, Q=120, dem=2

1	3	2	4	5	6	7	8	10	11	12	16
15	14	13	9	18	17	20	26	23	25	28	34
31	32	35	37	30	36	33	29	27	24	21	22
119	96	103	97	94	95	98	116	110	109	115	19
91	92	93	88	87	112	89	83	120	82	113	118
84	114	85	86	90	102	100	101	117	99	104	105
108	107	106	121	54	56	59	57	61	64	67	65
63	62	66	60	58	55	53	38	42	39	40	43
45	47	48	50	51	52	49	46	44	41	111	68
72	75	74	77	69	78	80	81	79	73	76	71
70	1										

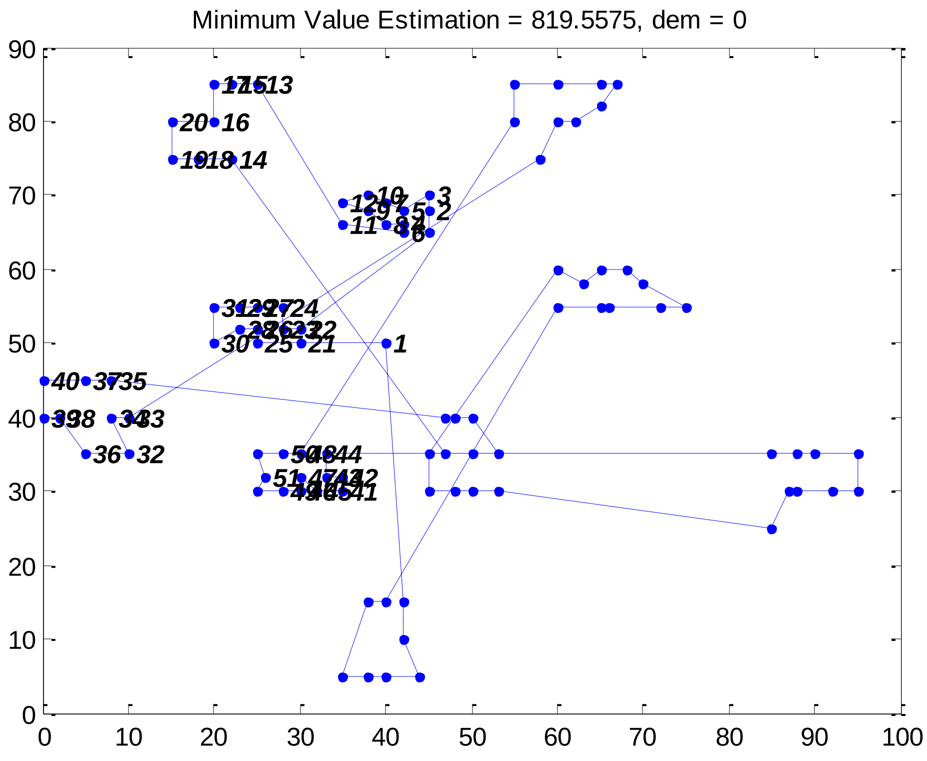
Πίνακας 36: Ακολουθία κόμβων για par6, n=121, Q=120, dem=2

Στο παράδειγμα 6, για dem=0 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 3,38% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3441. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 1,14%. Για dem=1 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 6,14% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3388. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 3,09%, η οποία βρέθηκε δύο φορές. Για dem=2 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 9,67% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3412. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 4,86%.

Παράδειγμα 7

par7, n=101, Q=120, dem=0			
Καλύτερο Κόστος	Καλύτερο Κόστος PSO	Επανάληψη	Απόκλιση %
819,5575	823,5157	2691	0,48
	819,5575	3007	0,00
	822,5912	3254	0,37
	819,5971	2983	0,00
	822,1875	3428	0,32
Μέσος όρος	821,4898	3072,6	0,24

Πίνακας 37: Αποτελέσματα PSO για το par7, n=101, Q=120, dem=0



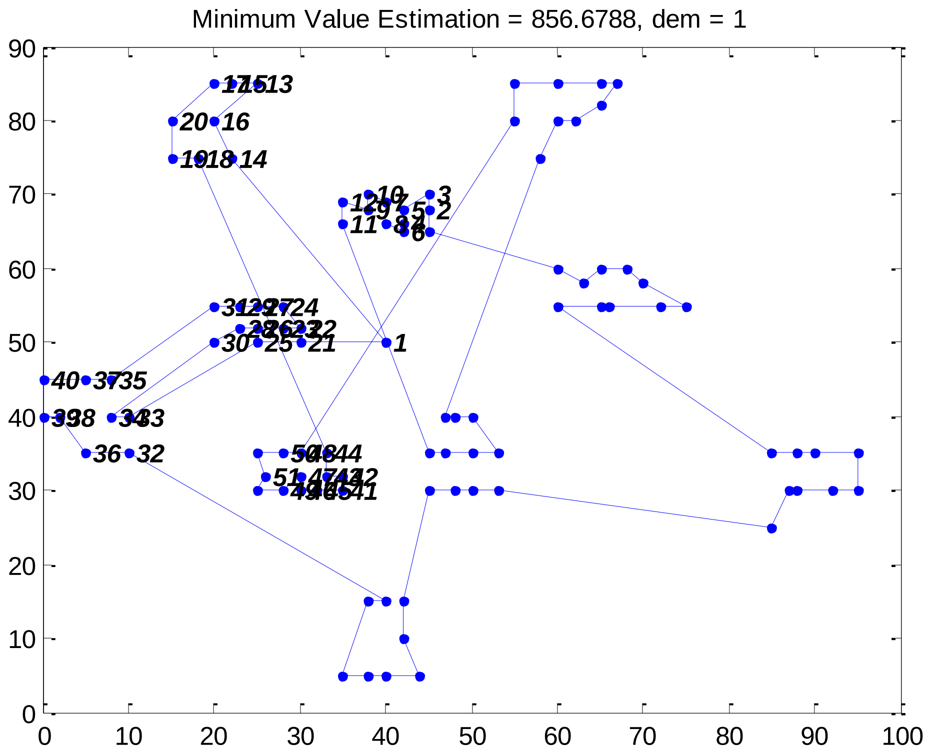
Διάγραμμα 23: par7, n=101, Q=120, dem=0

1	21	25	26	28	30	31	29	27	24	23	22
76	2	3	5	7	10	12	9	8	4	6	11
13	15	17	16	20	19	18	14	67	63	75	64
66	68	35	37	40	39	38	36	32	34	33	99
97	96	95	93	94	98	101	100	48	50	53	51
52	49	46	47	45	41	42	43	44	82	79	77
72	71	74	78	80	81	73	62	65	69	70	92
90	89	86	85	83	84	87	88	91	58	60	61
59	57	54	55	56							

Πίνακας 38: Ακολουθία κόμβων για par7, n=101, Q=120, dem=0

par7, n=101, Q=120, dem=1			
Καλύτερο Κόστος	**Καλύτερο Κόστος PSO**	**Επανάληψη**	**Απόκλιση %**
819,5575	858,9516	3444	4,59
	868,7375	3290	5,66
	864,4467	3086	5,19
	856,6788	3235	4,33
	860,7875	3349	4,79
Μέσος όρος	861,92042	3280,8	4,91

Πίνακας 39: Αποτελέσματα PSO για το par7, n=101, Q=120, dem=1



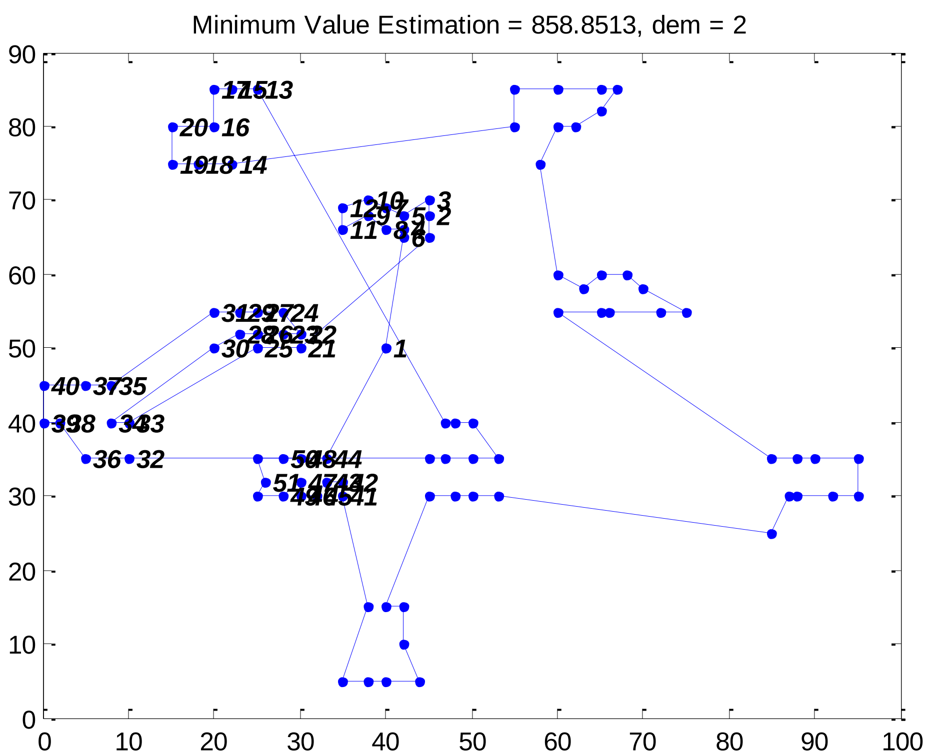
Διάγραμμα 24: par7, n=101, Q=120, dem=1

1	21	25	33	34	30	28	26	23	22	24	27
29	31	35	37	40	39	38	36	32	58	60	61
59	57	54	55	56	69	65	62	73	81	80	78
74	71	72	77	79	82	91	88	87	84	83	85
86	89	90	92	76	2	3	5	4	6	8	7
10	9	12	11	70	67	63	75	64	66	68	99
97	96	95	93	94	98	101	100	48	50	53	51
52	49	47	46	45	41	42	43	44	18	19	20
17	15	13	16	14							

Πίνακας 40: Ακολουθία κόμβων για par7, n=101, Q=120, dem=1

par7, n=101, Q=120, dem=2			
Καλύτερο Κόστος	Καλύτερο Κόστος PSO	Επανάληψη	Απόκλιση %
819,5575	874,3819	3499	6,27
	866,8121	3029	5,45
	858,8513	3375	4,58
	869,3357	3473	5,73
	874,9645	3498	6,33
Μέσος όρος	868,8691	3374,8	5,68

Πίνακας 41: Αποτελέσματα PSO για το par7, n=101, Q=120, dem=2



Διάγραμμα 25: par7, n=101, Q=120, dem=2

1	6	4	8	9	11	12	10	7	5	3	2
76	21	25	33	34	30	28	26	23	22	24	27
29	31	35	37	40	39	38	36	32	70	67	63
75	64	66	68	13	15	17	16	20	19	18	14
100	101	98	94	93	95	96	97	99	92	90	89
86	85	83	84	87	88	91	82	79	77	72	71
74	78	80	81	73	62	65	69	58	56	55	54
57	59	61	60	41	42	43	45	46	47	49	52
51	53	50	48	44							

Πίνακας 42: Ακολουθία κόμβων για par7, n=101, Q=120, dem=2

Στο παράδειγμα 7, για dem=0 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 0,24% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3073. Μια φορά βρέθηκε το απόλυτο βέλτιστο. Για dem=1 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 4,91% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3281. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 4,33%. Για dem=2 ο μέσος όρος της απόκλισης είναι 5,68% και ο μέσος όρος των επαναλήψεων 3375. Η ελάχιστη απόκλιση είναι 4,58%.

Παρακάτω βρίσκεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας με τους μέσους όρους των αποκλίσεων και των επαναλήψεων για όλα τα παραδείγματα.

par	n	dem	var %	iter
1	51	0	**0,25**	2198
		1	**1,00**	3156
		2	**1,60**	2686
2	76	0	**1,35**	3352
		1	**1,62**	3323
		2	**2,24**	3330
3	101	0	**2,40**	3239
		1	**2,86**	3237
		2	**3,27**	3342
4	151	0	**7,71**	3429
		1	**8,13**	3471
		2	**9,29**	3427
5	200	0	**13,40**	3477
		1	**13,93**	3495
		2	**14,41**	3473
6	121	0	**3,38**	3441
		1	**6,14**	3388
		2	**9,67**	3412
7	101	0	**0,24**	3073
		1	**4,91**	3281
		2	**6,68**	3375

Πίνακας 43: Αποκλίσεις από το βέλτιστο για τα επτά παραδείγματα

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να κάνουμε κάποιες διαπιστώσεις. Φαίνεται ότι σε όλα τα παραδείγματα, για τις τιμές της απόκλισης από τη ζήτηση (dem) μηδέν, ένα και δύο, η απόκλιση αυξάνεται αντίστοιχα. Αυτή η συμπεριφορά της απόκλισης είναι αναμενόμενη καθώς περιμένουμε όσο αυξάνεται η στοχαστικότητα, να αυξάνεται και η απόκλιση από το βέλτιστο. Επίσης στα περισσότερα παραδείγματα βλέπουμε ότι όσο μεγαλώνει το πλήθος των κόμβων (n) μεγαλώνει και η απόκλιση, όπου και αυτό το περιμέναμε. Ο λόγος είναι ότι όταν μεγαλώνει ο αριθμός των κόμβων μεγαλώνει και ο αριθμός των υποψήφιων διαδρομών και τότε είναι πιο δύσκολο και χρονοβόρο να βρεθεί το βέλτιστο. Εκτός από το πρώτο παράδειγμα, σε όλα τα υπόλοιπα ο αριθμός των επαναλήψεων (iter) είναι πάνω από 3000 και στα δεκατέσσερα από τα είκοσιένα πάνω από 3300. Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος δεν παγιδεύεται σε τοπικά ελάχιστα, αλλά βελτιώνεται συνέχεια. Ακόμα πρέπει να πούμε ότι στα έξι από τα επτά παραδείγματα η απόκλιση από το βέλτιστο (var) είναι μικρότερη από 10% και για όλα συνολικά είναι μικρότερη από 14,5%.

5.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων με αποτελέσματα άλλων μεθόδων επίλυσης

Σε αυτό το σημείο θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας, με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος, με το γενετικό αλγόριθμο (GA) και με τον αλγόριθμο διαφορικής εξέλιξης (DE). Τα αποτελέσματα αυτά τα πήραμε από τη μεταπτυχιακή εργασία της κυρίας Σπανού Παρασκευής. Ακολουθεί συγκριτικός πίνακας των τριών μεθόδων επίλυσης. Στην τρίτη στήλη του παρακάτω πίνακα είναι το βέλτιστο κόστος που έχει βρεθεί από το γενετικό αλγόριθμο και τον αλγόριθμο διαφορικής εξέλιξης.

			PSO			GA			DE		
par	**dem**	**Best Cost**	**Best Cost**	**iter**	**var %**	**Best Cost**	**iter**	**var %**	**Best Cost**	**iter**	**var %**
1	0	**537,42**	524,61	2765	**-2,44**	542,62	489	**0,96**	537,42	967	**0,00**
	1	**538,35**	528,57	3395	**-1,85**	543,80	643	**1,00**	538,35	944	**0,00**
	2	**536,69**	533,15	788	**-0,66**	540,59	486	**0,72**	536,69	649	**0,00**
2	0	**862,39**	846,73	3493	**-2,34**	867,86	1158	**0,63**	862,39	978	**0,00**
	1	**862,72**	849,05	3482	**-3,23**	878,45	2364	**1,79**	862,72	1007	**0,00**
	2	**865,86**	854,40	3484	**-2,25**	886,87	1194	**2,37**	865,86	719	**0,00**
3	0	**839,40**	839,39	3479	**-0,002**	850,66	2269	**1,32**	839,40	2657	**0,00**
	1	**854,51**	843,35	3184	**-1,32**	854,51	2401	**0,00**	866,15	1542	**1,34**
	2	**851,52**	842,45	3317	**-1,08**	854,18	1658	**0,31**	851,52	2083	**0,00**

Πίνακας 44: Σύγκριση αποτελεσμάτων PSO με αποτελέσματα GA και DE

Να διευκρινίσουμε ότι ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (PSO) έκανε 3500 επαναλήψεις και ο GA και DE σταματούσαν τις επαναλήψεις τους όταν δεν είχαν βελτίωση κόστους πάνω από 0.01 μετά από 300 συνεχόμενες επαναλήψεις.

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων βρίσκει καλύτερες τιμές κόστους από τις μέχρι στιγμής βέλτιστες του γενετικού και εξελικτικού αλγορίθμου και για τα τρία παραδείγματα. Επίσης ο αριθμός της επανάληψης που βρίσκει το βέλτιστο ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων, είναι για όλα τα παραδείγματα μεγαλύτερος από αυτόν του γενετικού και εξελικτικού αλγορίθμου. Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων δεν εγκλωβίζεται σε τοπικά ελάχιστα και έτσι βελτιώνει συνέχεια την τιμή του κόστους, μέχρι και λίγο πριν τη λήξη των επαναλήψεων του αλγορίθμου.

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση (SVRP) και το επιλύσαμε με τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (PSO). Επιλέξαμε επτά παραδείγματα για να τρέξουμε τον αλγόριθμο μας στην matlab, για τα οποία γνωρίζουμε το βέλτιστο τους για δεδομένη ζήτηση. Τα αποτελέσματα του αλγορίθμου ήταν πολύ ικανοποιητικά για προβλήματα με στοχαστικές παραμέτρους. Συγκεκριμένα στα έξι από τα επτά παραδείγματα η απόκλιση από το βέλτιστο ήταν λιγότερη από 10% και για όλα συνολικά τα παραδείγματα λιγότερη από 14,5%. Επίσης ο αλγόριθμος μας βρίσκει καλύτερες τιμές κόστους από τις μέχρι στιγμής βέλτιστες του γενετικού και εξελικτικού αλγορίθμου.

Ακολούθως υπάρχουν κάποιες παρατηρήσεις που κάναμε κατά τη διάρκεια εκτέλεσης της εργασίας. Καταρχήν διαπιστώσαμε ότι όσο αυξάνεται η διάσταση του προβλήματος παρατηρείται και αύξηση της απόκλισης από το βέλτιστο. Επίσης όταν μεγαλώνει η απόκλιση από τη ζήτηση το βέλτιστο χειροτερεύει. Ακόμα είδαμε ότι ο αλγόριθμος μας βελτιώνεται μέχρι και λίγο πριν την ολοκλήρωση των επαναλήψεων.

Παράρτημα

Ακολουθεί η ζήτηση και οι συντεταγμένες των κόμβων για τα επτά παραδείγματα (τα στοιχεία παρουσιάζονται σε δίστηλες σελίδες για εξοικονόμηση χώρου):

<u>Παράδειγμα 1</u>

Κόμβος	**Συν. χ**	**Συν. y**	**Ζήτηση**
1	30	40	0
2	37	52	7
3	49	49	30
4	52	64	16
5	20	26	9
6	40	30	21
7	21	47	15
8	17	63	19
9	31	62	23
10	52	33	11
11	51	21	5
12	42	41	19
13	31	32	29
14	5	25	23
15	12	42	21
16	36	16	10
17	52	41	15
18	27	23	3
19	17	33	41
20	13	13	9
21	57	58	28
22	62	42	8
23	42	57	8
24	16	57	16
25	8	52	10
26	7	38	28
27	27	68	7
28	30	48	15
29	43	67	14
30	58	48	6
31	58	27	19
32	37	69	11
33	38	46	12
34	46	10	23
35	61	33	26
36	62	63	17
37	63	69	6
38	32	22	9
39	45	35	15
40	59	15	14
41	5	6	7
42	10	17	27
43	21	10	13
44	5	64	11
45	30	15	16
46	39	10	10
47	32	39	5
48	25	32	25
49	25	55	17
50	48	28	18
51	56	37	10

<u>Παράδειγμα 2</u>

Κόμβος	**Συν. χ**	**Συν. y**	**Ζήτηση**
1	40	40	0
2	22	22	18
3	36	26	26
4	21	45	11
5	45	35	30
6	55	20	21
7	33	34	19
8	50	50	15
9	55	45	16
10	26	59	29
11	40	66	26
12	55	65	37
13	35	51	16
14	62	35	12
15	62	57	31
16	62	24	8
17	21	36	19
18	33	44	20
19	9	56	13
20	62	48	15
21	66	14	22
22	44	13	28
23	26	13	12
24	11	28	6
25	7	43	27
26	17	64	14
27	41	46	18
28	55	34	17

29	35	16	29
30	52	26	13
31	43	26	22
32	31	76	25
33	22	53	28
34	26	29	27
35	50	40	19
36	55	50	10
37	54	10	12
38	60	15	14
39	47	66	24
40	30	60	16
41	30	50	33
42	12	17	15
43	15	14	11
44	16	19	18
45	21	48	17
46	50	30	21
47	51	42	27
48	50	15	19
49	48	21	20
50	12	38	5
51	15	56	22
52	29	39	12
53	54	38	19
54	55	57	22
55	67	41	16
56	10	70	7
57	6	25	26
58	65	27	14
59	40	60	21
60	70	64	24
61	64	4	13
62	36	6	15
63	30	20	18
64	20	30	11
65	15	5	28
66	50	70	9
67	57	72	37
68	45	42	30
69	38	33	10
70	50	4	8
71	66	8	11
72	59	5	3
73	35	60	1
74	27	24	6
75	40	20	10
76	40	37	20

<u>Παράδειγμα 3</u>

Κόμβος	**Συν. χ**	**Συν. y**	**Ζήτηση**
1	35	35	0
2	41	49	10
3	35	17	7
4	55	45	13
5	55	20	19
6	15	30	26
7	25	30	3
8	20	50	5
9	10	43	9
10	55	60	16
11	30	60	16
12	20	65	12
13	50	35	19
14	30	25	23
15	15	10	20
16	30	5	8
17	10	20	19
18	5	30	2
19	20	40	12
20	15	60	17
21	45	65	9
22	45	20	11
23	45	10	18
24	55	5	29
25	65	35	3
26	65	20	6
27	45	30	17
28	35	40	16
29	41	37	16
30	64	42	9
31	40	60	21
32	31	52	27
33	35	69	23
34	53	52	11
35	65	55	14
36	63	65	8
37	2	60	5
38	20	20	8
39	5	5	16
40	60	12	31
41	40	25	9
42	42	7	5
43	24	12	5
44	23	3	7
45	11	14	18
46	6	38	16
47	2	48	1
48	8	56	27

49	13	52	36
50	6	68	30
51	47	47	13
52	49	58	10
53	27	43	9
54	37	31	14
55	57	29	18
56	63	23	2
57	53	12	6
58	32	12	7
59	36	26	18
60	21	24	28
61	17	34	3
62	12	24	13
63	24	58	19
64	27	69	10
65	15	77	9
66	62	77	20
67	49	73	25
68	67	5	25
69	56	39	36
70	37	47	6
71	37	56	5
72	57	68	15
73	47	16	25
74	44	17	9
75	46	13	8
76	49	11	18
77	49	42	13
78	53	43	14
79	61	52	3
80	57	48	23
81	56	37	6
82	55	54	26
83	15	47	16
84	14	37	11
85	11	31	7
86	16	22	41
87	4	18	35
88	28	18	26
89	26	52	9
90	26	35	15
91	31	67	3
92	15	19	1
93	22	22	2
94	18	24	22
95	26	27	27
96	25	24	20
97	22	27	11
98	25	21	12
99	19	21	10
100	20	26	9
101	18	18	17

<u>Παράδειγμα 4</u>

Κόμβος	**Συν. χ**	**Συν. y**	**Ζήτηση**
1	35	35	0
2	41	49	10
3	35	17	7
4	55	45	13
5	55	20	19
6	15	30	26
7	25	30	3
8	20	50	5
9	10	43	9
10	55	60	16
11	30	60	16
12	20	65	12
13	50	35	19
14	30	25	23
15	15	10	20
16	30	5	8
17	10	20	19
18	5	30	2
19	20	40	12
20	15	60	17
21	45	65	9
22	45	20	11
23	45	10	18
24	55	5	29
25	65	35	3
26	65	20	6
27	45	30	17
28	35	40	16
29	41	37	16
30	64	42	9
31	40	60	21
32	31	52	27
33	35	69	23
34	53	52	11
35	65	55	14
36	63	65	8
37	2	60	5
38	20	20	8
39	5	5	16
40	60	12	31
41	40	25	9
42	42	7	5

43	24	12	5	93	22	22	2
44	23	3	7	94	18	24	22
45	11	14	18	95	26	27	27
46	6	38	16	96	25	24	20
47	2	48	1	97	22	27	11
48	8	56	27	98	25	21	12
49	13	52	36	99	19	21	10
50	6	68	30	100	20	26	9
51	47	47	13	101	18	18	17
52	49	58	10	102	37	52	7
53	27	43	9	103	49	49	30
54	37	31	14	104	52	64	16
55	57	29	18	105	20	26	9
56	63	23	2	106	40	30	21
57	53	12	6	107	21	47	15
58	32	12	7	108	17	63	19
59	36	26	18	109	31	62	23
60	21	24	28	110	52	33	11
61	17	34	3	111	51	21	5
62	12	24	13	112	42	41	19
63	24	58	19	113	31	32	29
64	27	69	10	114	5	25	23
65	15	77	9	115	12	42	21
66	62	77	20	116	36	16	10
67	49	73	25	117	52	41	15
68	67	5	25	118	27	23	3
69	56	39	36	119	17	33	41
70	37	47	6	120	13	13	9
71	37	56	5	121	57	58	28
72	57	68	15	122	62	42	8
73	47	16	25	123	42	57	8
74	44	17	9	124	16	57	16
75	46	13	8	125	8	52	10
76	49	11	18	126	7	38	28
77	49	42	13	127	27	68	7
78	53	43	14	128	30	48	15
79	61	52	3	129	43	67	14
80	57	48	23	130	58	48	6
81	56	37	6	131	58	27	19
82	55	54	26	132	37	69	11
83	15	47	16	133	38	46	12
84	14	37	11	134	46	10	23
85	11	31	7	135	61	33	26
86	16	22	41	136	62	63	17
87	4	18	35	137	63	69	6
88	28	18	26	138	32	22	9
89	26	52	9	139	45	35	15
90	26	35	15	140	59	15	14
91	31	67	3	141	5	6	7
92	15	19	1	142	10	17	27

143	21	10	13
144	5	64	11
145	30	15	16
146	39	10	10
147	32	39	5
148	25	32	25
149	25	55	17
150	48	28	18
151	56	37	10

Παράδειγμα 5

Κόμβος	**Συν. χ**	**Συν. y**	**Ζήτηση**
1	35	35	0
2	41	49	10
3	35	17	7
4	55	45	13
5	55	20	19
6	15	30	26
7	25	30	3
8	20	50	5
9	10	43	9
10	55	60	16
11	30	60	16
12	20	65	12
13	50	35	19
14	30	25	23
15	15	10	20
16	30	5	8
17	10	20	19
18	5	30	2
19	20	40	12
20	15	60	17
21	45	65	9
22	45	20	11
23	45	10	18
24	55	5	29
25	65	35	3
26	65	20	6
27	45	30	17
28	35	40	16
29	41	37	16
30	64	42	9
31	40	60	21
32	31	52	27
33	35	69	23
34	53	52	11
35	65	55	14
36	63	65	8
37	2	60	5
38	20	20	8
39	5	5	16
40	60	12	31
41	40	25	9
42	42	7	5
43	24	12	5
44	23	3	7
45	11	14	18
46	6	38	16
47	2	48	1
48	8	56	27
49	13	52	36
50	6	68	30
51	47	47	13
52	49	58	10
53	27	43	9
54	37	31	14
55	57	29	18
56	63	23	2
57	53	12	6
58	32	12	7
59	36	26	18
60	21	24	28
61	17	34	3
62	12	24	13
63	24	58	19
64	27	69	10
65	15	77	9
66	62	77	20
67	49	73	25
68	67	5	25
69	56	39	36
70	37	47	6
71	37	56	5
72	57	68	15
73	47	16	25
74	44	17	9
75	46	13	8
76	49	11	18
77	49	42	13
78	53	43	14
79	61	52	3
80	57	48	23
81	56	37	6
82	55	54	26
83	15	47	16
84	14	37	11
85	11	31	7
86	16	22	41

87	4	18	35	137	63	69	6
88	28	18	26	138	32	22	9
89	26	52	9	139	45	35	15
90	26	35	15	140	59	15	14
91	31	67	3	141	5	6	7
92	15	19	1	142	10	17	27
93	22	22	2	143	21	10	13
94	18	24	22	144	5	64	11
95	26	27	27	145	30	15	16
96	25	24	20	146	39	10	10
97	22	27	11	147	32	39	5
98	25	21	12	148	25	32	25
99	19	21	10	149	25	55	17
100	20	26	9	150	48	28	18
101	18	18	17	151	56	37	10
102	37	52	7	152	22	22	18
103	49	49	30	153	36	26	26
104	52	64	16	154	21	45	11
105	20	26	9	155	45	35	30
106	40	30	21	156	55	20	21
107	21	47	15	157	33	34	19
108	17	63	19	158	50	50	15
109	31	62	23	159	55	45	16
110	52	33	11	160	26	59	29
111	51	21	5	161	40	66	26
112	42	41	19	162	55	65	37
113	31	32	29	163	35	51	16
114	5	25	23	164	62	35	12
115	12	42	21	165	62	57	31
116	36	16	10	166	62	24	8
117	52	41	15	167	21	36	19
118	27	23	3	168	33	44	20
119	17	33	41	169	9	56	13
120	13	13	9	170	62	48	15
121	57	58	28	171	66	14	22
122	62	42	8	172	44	13	28
123	42	57	8	173	26	13	12
124	16	57	16	174	11	28	6
125	8	52	10	175	7	43	27
126	7	38	28	176	17	64	14
127	27	68	7	177	41	46	18
128	30	48	15	178	55	34	17
129	43	67	14	179	35	16	29
130	58	48	6	180	52	26	13
131	58	27	19	181	43	26	22
132	37	69	11	182	31	76	25
133	38	46	12	183	22	53	28
134	46	10	23	184	26	29	27
135	61	33	26	185	50	40	19
136	62	63	17	186	55	50	10

187	54	10	12
188	60	15	14
189	47	66	24
190	30	60	16
191	30	50	33
192	12	17	15
193	15	14	11
194	16	19	18
195	21	48	17
196	50	30	21
197	51	42	27
198	50	15	19
199	48	21	20
200	12	38	5

<u>Παράδειγμα 6</u>

Κόμβος	**Συν. χ**	**Συν. y**	**Ζήτηση**
1	10	45	0
2	25	1	25
3	25	3	7
4	31	5	13
5	32	5	6
6	31	7	14
7	32	9	5
8	34	9	11
9	46	9	19
10	35	7	5
11	34	6	15
12	35	5	15
13	47	6	17
14	40	5	13
15	39	3	12
16	36	3	18
17	73	6	13
18	73	8	18
19	24	36	12
20	76	6	17
21	76	10	4
22	76	13	7
23	78	3	12
24	78	9	13
25	79	3	8
26	79	5	16
27	79	11	15
28	82	3	6
29	82	7	5
30	90	15	9
31	84	3	11
32	84	5	10
33	84	9	3
34	85	1	7
35	87	5	2
36	85	8	4
37	87	7	4
38	86	41	18
39	86	44	14
40	86	46	12
41	85	55	17
42	89	43	20
43	89	46	14
44	89	52	16
45	92	42	10
46	92	52	9
47	94	42	11
48	94	44	7
49	94	48	13
50	96	42	5
51	99	46	4
52	99	50	21
53	83	80	13
54	83	83	11
55	85	81	12
56	85	85	14
57	85	89	10
58	87	80	8
59	87	86	16
60	90	77	19
61	90	88	5
62	93	82	17
63	93	84	7
64	93	89	16
65	94	86	14
66	95	80	17
67	99	89	13
68	37	83	17
69	50	80	13
70	35	85	14
71	35	87	16
72	44	86	7
73	46	89	13
74	46	83	9
75	46	87	11
76	46	89	35
77	48	83	5
78	50	85	28
79	50	88	7
80	54	86	3
81	54	90	10

82	10	35	7
83	10	40	12
84	18	30	11
85	17	35	10
86	16	38	8
87	14	40	11
88	15	42	21
89	11	42	4
90	18	40	15
91	21	39	16
92	20	40	4
93	18	41	16
94	20	44	7
95	22	44	10
96	16	45	9
97	20	45	11
98	25	45	17
99	30	55	12
100	20	50	11
101	22	51	7
102	18	49	9
103	16	48	11
104	20	55	12
105	18	53	7
106	14	50	8
107	15	51	6
108	16	54	5
109	28	33	12
110	33	38	13
111	30	50	7
112	13	40	7
113	15	36	8
114	18	31	11
115	25	37	13
116	30	46	11
117	25	52	10
118	16	33	7
119	25	35	4
120	5	40	20
121	5	50	13

Παράδειγμα 7

Κόμβος	**Συν. χ**	**Συν. y**	**Ζήτηση**
1	40	50	0
2	45	68	10
3	45	70	30
4	42	66	10
5	42	68	10
6	42	65	10
7	40	69	20
8	40	66	20
9	38	68	20
10	38	70	10
11	35	66	10
12	35	69	10
13	25	85	20
14	22	75	30
15	22	85	10
16	20	80	40
17	20	85	40
18	18	75	20
19	15	75	20
20	15	80	10
21	30	50	10
22	30	52	20
23	28	52	20
24	28	55	10
25	25	50	10
26	25	52	40
27	25	55	10
28	23	52	10
29	23	55	20
30	20	50	10
31	20	55	10
32	10	35	20
33	10	40	30
34	8	40	40
35	8	45	20
36	5	35	10
37	5	45	10
38	2	40	20
39	0	40	30
40	0	45	20
41	35	30	10
42	35	32	10
43	33	32	20
44	33	35	10
45	32	30	10
46	30	30	10
47	30	32	30
48	30	35	10
49	28	30	10
50	28	35	10
51	26	32	10
52	25	30	10
53	25	35	10
54	44	5	20
55	42	10	40
56	42	15	10

57	40	5	30
58	40	15	40
59	38	5	30
60	38	15	10
61	35	5	20
62	50	30	10
63	50	35	20
64	50	40	50
65	48	30	10
66	48	40	10
67	47	35	10
68	47	40	10
69	45	30	10
70	45	35	10
71	95	30	30
72	95	35	20
73	53	30	10
74	92	30	10
75	53	35	50
76	45	65	20
77	90	35	10
78	88	30	10
79	88	35	20
80	87	30	10
81	85	25	10
82	85	35	30
83	75	55	20
84	72	55	10
85	70	58	20
86	68	60	30
87	66	55	10
88	65	55	20
89	65	60	30
90	63	58	10
91	60	55	10
92	60	60	10
93	67	85	20
94	65	85	40
95	65	82	10
96	62	80	30
97	60	80	10
98	60	85	30
99	58	75	20
100	55	80	10
101	55	85	20

Βιβλιογραφία

[1] Paolo Toth, Daniele Vigo. The Vehicle Routing Problem. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 2002

[2] Ιωάννης Μαρινάκης, Αθανάσιος Μυγδαλάς. Σχεδιασμός και Βελτιστοποίηση της Εφοδιαστικής Αλυσίδας. Εκδόσεις σοφία, 2008

[3] Σπανού Παρασκευή. Ανάπτυξη εξελικτικού αλγορίθμου για το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστική ζήτηση. Μεταπτυχιακή εργασία στο Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, 2010

[4] Ιωάννης Μαρινάκης, Μαγδαληνή Μαρινάκη, Νικόλαος Φ. Ματσατσίνης, Κωνσταντίνος Ζοπουνίδης. Μεθευρετικοί και Εξελικτικοί Αλγόριθμοι σε Προβλήματα Διοικητικής Επιστήμης. Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2011

[5] Michel Gendreau, Gilbert Laport, Rene Seguin. Stochastic vehicle routing. European Journal of Operational Research 88, pp. 3-12, 1996

[6] Z.G. Guo, K.L. Mac. A Heuristic Algorithm for The Stochastic Vehicle Routing Problems with Soft Time Windows. Evolutionary Computation, pp. 1456-1449, vol.2, 2004

[7] Lars M. Hvattum, Arne Lokketangen, Gilbert Laporte. A Heuristic Solution Method to a Stochastic Vehicle Routing Problem. In Proceedings of TRISTAN V—The Fifth Triennial Symposium on Transportation Analysis, 2004.

[8] Marc Reimann. Analyzing a vehicle routing problem with stochastic demands using ant colony optimization. Int. J. Data Analysis Techniques and Strategies, pp. 764-769, vol.2, No. 1, 2010

[9] Dag Haugland, Sin C. Ho, Gilbert Laporte. Designing delivery districts for the vehicle routing problem with stochastic demands. European Journal of Operational Research 180, pp. 997–1010, 2007

[10] Shangyao Yan, Chin-Jen Chi, Ching-Hui Tang. Inter-city bus routing and timetable setting under stochastic demands. Transportation Research Part A 40, pp. 572–586, 2006

[11] Matthew Protonotarios, George Mourkousis, Ioannis Vyridis, Theodora Varvarigou. Very Large Scale Vehicle Routing with Time Windows and Stochastic Demand Using Genetic Algorithms with Parallel Fitness Evaluation. HPCN 2000, LNCS 1823, pp. 467-476, 2000

[12] Xiangyong Li, PengTian, StephenC.H.Leung. Vehicle routing problems with time windows and stochastic travel and service times: Models and algorithm. Int. J. Production Economics, 2009

[13] Chang-Shi Liu, Ming-Yong Lai. The vehicle routing problem with uncertain demand at nodes. Transportation Research Part E 45, pp. 517–524, 2009

[14] Leonora Bianchi, Mauro Birattari, Marco Chiarandini, Max Manfrin, Monaldo Mastrolilli, Luis Paquete, Olivia Rossi-Doria and Tommaso Schiavinotto. Hybrid Metaheuristics for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands. Journal of Mathematical Modelling and Algorithms 5, pp. 91–110, 2006