



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μηχανικών Ορυκτών Πόρων

Ελαστική λύση της επενδυμένης κυκλικής σήραγγας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Καλογερόπουλος Αντώνιος

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γ. Εξαδάκτυλος, Καθηγητής (επιβλέπων)

Ζ. Αγιουτάντης, Καθηγητής

Ε. Στειακάκης, Επίκ. Καθηγητής

ΧΑΝΙΑ
Οκτώβριος, 2013

Πίνακας περιεχομένων

Ελαστική λύση της επενδυμένης κυκλικής σήραγγας	1
Περίληψη.....	3
Κεφάλαιο 1 ^ο Υποστύλωση Υπόγειων Έργων.....	4
1.1 Εισαγωγή – Το πρόβλημα επαφής.....	4
1.2 Ανάλυση αλληλεπίδρασης βραχομάζας και υποστύλωσης	8
Κεφάλαιο 2 ^ο Επίπεδη επαφή ενός κυκλικού κυλινδρικού ανοίγματος που υποστηρίζεται από ένα λεπτότοιχο κέλυφος	13
2.1 Εισαγωγή	13
2.2 Θεωρητική λύση και αποτελέσματα	15
2.3 Αριθμητική Επίλυση	23
Κεφάλαιο 3 ^ο Αριθμητικά αποτελέσματα και συζήτηση των αποτελεσμάτων	29
Κεφάλαιο 4 ^ο : Συμπεράσματα-Προτάσεις.....	36
Βιβλιογραφία	37

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι η κατάστρωση και αριθμητική επίλυση του επίπεδου εντατικού προβλήματος επαφής λεπτότοιχης υποστήριξης με κυκλική σήραγγα σε ελαστικό, ομοιογενές και ισότροπο μέσο (πέτρωμα ή έδαφος). Το υπόψιν πρόβλημα έχει πρακτικές εφαρμογές στο σχεδιασμό και κατασκευή κυκλικών σηράγγων είτε με τη μέθοδο NATM είτε με TBM που επενδύονται με προκατασκευασμένους δακτυλίους οπλισμένου σκυροδέματος. Στην παρούσα εργασία η επένδυση θεωρείται ότι συμπεριφέρεται ως «μεμβράνη» που μπορεί να μεταφέρει αξονικές τάσεις αλλά όχι καμπτικές ροπές. Επίσης δεχόμεθα ότι η επαφή σκυροδέματος και συνόρου της σήραγγας είναι τέλεια δηλαδή διέπεται από «άπειρο» συντελεστή διεπιφανειακής τριβής των δύο επιφανειών. Καταρχάς το πρόβλημα αυτό επαφής καταστρώνεται αναλυτικά με τη μέθοδο των δυναμικών μιγαδικών των Kolosov-Muskhelishvili και των ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων. Εν συνεχεία οι προκύπτουσες ολοκληρωτικές εξισώσεις λαμβάνουν τη μορφή συστήματος γραμμικών αριθμητικών εξισώσεων με τη βοήθεια κατάλληλης μεθόδου αριθμητικής επίλυσης των ολοκληρωμάτων (collocation method). Τέλος παρουσιάζονται οι λύσεις των τάσεων για συγκεκριμένα προβλήματα-παραδείγματα.

Κεφάλαιο 1^ο Υποστύλωση Υπόγειων Έργων

1.1 Εισαγωγή – Το πρόβλημα επαφής

Όταν μια σήραγγα διανοίγεται σε έδαφος ή πέτρωμα μεγάλης παραμορφωσιμότητας ή με ασυνέχειες ή που παρουσιάζει φαινόμενα ερπυσμού τότε είναι απαραίτητη η υποστύλωση της με κατάλληλα στοιχεία υποστύλωσης. Μία περίπτωση είναι η επένδυση της σήραγγας με προκατασκευασμένα τμήματα δακτυλίων από οπλισμένο σκυρόδεμα. Τα στοιχεία αυτά τοποθετούνται μετά από προχώρηση του μετώπου της σήραγγας της τάξης του 1 m και κατά τέτοιο τρόπο ώστε να περιβάλλουν όλη τη διατομή της σήραγγας σε συνθήκες καλής επαφής όπως φαίνεται στα Σχ. 1.1α και β. Η τεχνολογία διάνοιξης που χρησιμοποιεί αυτά τα στοιχεία υποστύλωσης είναι με μηχανές ολομέτωπης κοπής (Tunnel Boring Machines, TBM's) που είναι εξοπλισμένες με ασπίδα (shield) ή μη ανάλογα με την ευστάθεια του μετώπου.



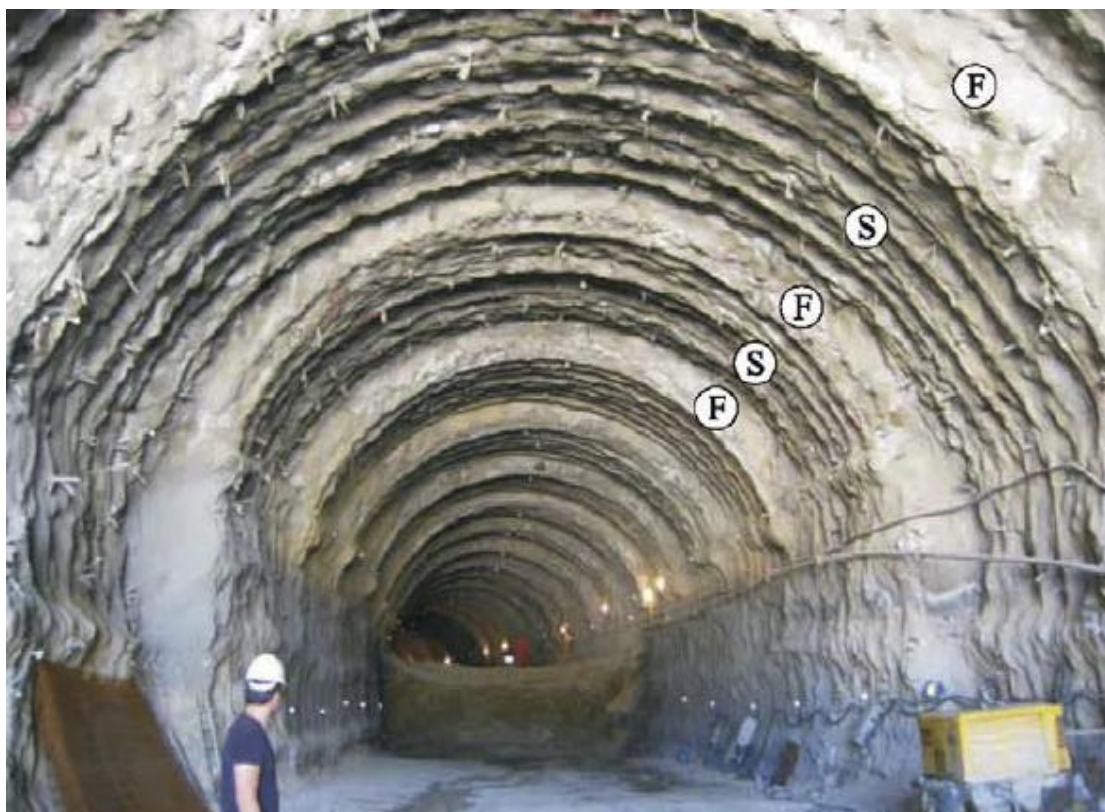
(α)



(β)

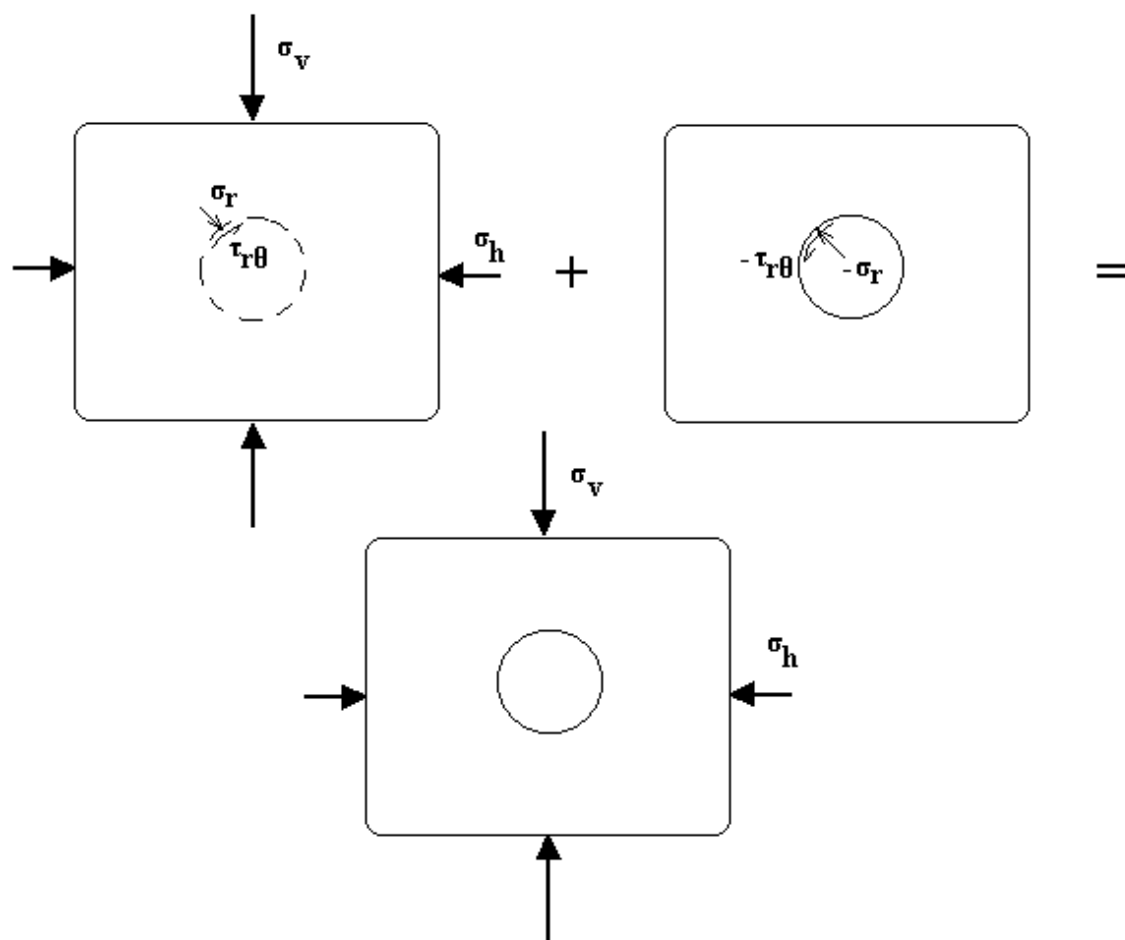
Σχ. 1.1. (α) Επενδυμένη κυκλική σήραγγα με προκατασκευασμένα τμήματα δακτυλίων οπλισμένου σκυροδέματος (<http://www.building.co.uk/civil-stars-ice%E2%80%99s-london-award-winners/3159191.article>), (β) προκατασκευασμένα τμήματα δακτυλίων από οπλισμένο σκυρόδεμα.

Μια άλλη μέθοδος προσωρινής αυτή τη φορά υποστήλωσης σηράγγων οποιασδήποτε γεωμετρίας διατομής, είναι με την εφαρμογή του εκτοξευόμενου σκυροδέματος (sprayed concrete ή shotcrete) σε μία ή περισσότερες στρώσεις. Χαλύβδινα τοξωτά πλαίσια (Steel arches) μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την σταθεροποίηση του ογκοτεμαχισμένου ή παραμορφώσιμου πετρώματος ή εδάφους καθώς επίσης και κοχλίες επί ή γύρω από το μέτωπο. Αν το μέγεθος των φορτίων που μεταδίδονται από το περιβάλλον πέτρωμα ή έδαφος στην υποστήλωση είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε να μη μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο εκτοξευόμενο σκυρόδεμα ή όταν το περιβάλλον έδαφος είναι θιξοτροπικό ή αποκολλάται εύκολα από τις παρειές της σήραγγας που προδιαγράφει την πλήρη κάλυψη των παρειών της σήραγγας, τότε εφαρμόζεται συνδυασμός του εκτοξευόμενου σκυροδέματος με τοξωτά χαλύβδινα πλαίσια όπως φαίνεται στο Σχ. 1.2.



Σχ. 1.2. Ημι-κυκλική σήραγγα επενδεδυμένη με εκτοξευόμενο σκυρόδεμα (sprayed concrete) και χαλύβδινα πλαίσια (steel sets).

Όπως γίνεται αντιληπτό εκ των παραπάνω, στις περιπτώσεις εφαρμογής των ανωτέρω μεθόδων υποστύλωσης το πρώτο πρόβλημα είναι να βρεθούν οι «διαταραγμένες» τάσεις στο περιβάλλον πέτρωμα ή έδαφος κατά την διάνοιξη της σήραγγας, καθώς απίσης και οι τάσεις που μεταφέρονται στην υποστύλωση. Όπως φαίνεται στο Σχ. 1.3 το πέτρωμα είναι προφορτισμένο από τις μακρινές οριζόντιες και κατακόρυφες κύριες τάσεις (σημειώνεται ότι οι άξονες των κυρίων τάσεων μπορεί να είναι και στραμμένοι). Η διάνοιξη μιας κυκλικής σήραγγας προκαλεί τον μηδενισμό των ορθής και διατμητικής τάσης πάνω στο σύνορο της μακριά από το μέτωπο της ανυποστήρικτης σήραγγας, ενώ προκαλεί την σημαντική μείωση των τάσεων κοντά στο μέτωπο και όσο απομακρυνόμαστε από αυτό. Αρα οι τελικές διαταραγμένες τάσεις βρίσκονται από την υπέρθεση αυτών των δύο προβλημάτων.



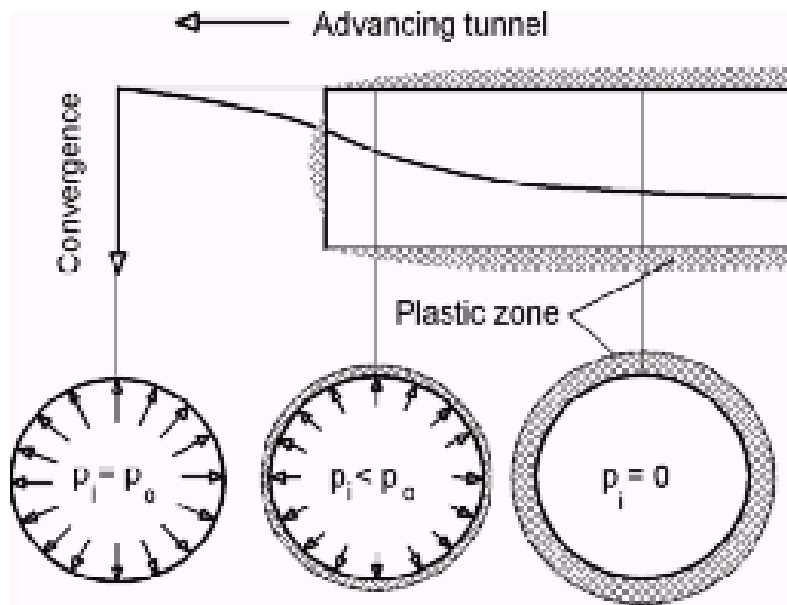
Σχ. 1.3. Εφαρμογή της αρχής της υπέρθεσης των τάσεων για το ελαστικό μέσο εντός του οποίου διανοίχθηκε κυκλικό άνοιγμα.

Οι κλειστές-αναλυτικές και ημι-αναλυτικές λύσεις προβλημάτων εκσκαφής σπηλαίων είναι σημαντικές για την κατανόηση της μηχανικής των παραγομένων τάσεων και παραμορφώσεων εξαιτίας της διάνοιξης της σήραγγας σε εδάφη και πετρώματα. Εκτός άλλων, οι αναλυτικές λύσεις επιτρέπουν την εξέταση των θεμελιακών σχέσεων μεταξύ των διαφόρων υπεισερχόμενων μεταβλητών και παραμέτρων, π.χ. σχέσεων μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων στο έδαφος, την φόρτιση της υποστύλωσης και των μηχανικών παραμέτρων του εδάφους και της υποστύλωσης. Προκειμένου για κυκλικά ανοίγματα σε ισότροπα και ελαστικά μέσα μπορούν να αναφερθούν οι ιστορικές αναλυτικές λύσεις του [Lame \(1852\)](#) για την ειδική περίπτωση της ανυποστήρικτης κυκλικής σήραγγας που υποβάλλεται σε ομοιόμορφο πεδίο τάσεων και του [Kirsch \(1898\)](#) για την γενικότερη περίπτωση των ανομοιόμορφων εξωτερικών τάσεων.

Επίσης πρέπει να βρεθούν και οι τάσεις που μεταδίδονται από το περιβάλλον έδαφος ή πέτρωμα στην υποστύλωση. Αυτό είναι ένα κλασσικό πρόβλημα επαφής δύο ή περισσότερων σωμάτων και ως τέτοιο εξετάζεται στην παρούσα εργασία.

1.2 Ανάλυση αλληλεπίδρασης βραχομάζας και υποστύλωσης

Ο βέλτιστος σχεδιασμός ενός συστήματος προσωρινής ή μόνιμης υποστύλωσης εξαρτάται όχι μόνο από τα προτεινόμενα μέτρα υποστύλωσης αλλά και από το χρόνο τοποθέτησής τους. Ένας σημαντικός παράγοντας στον σχεδιασμό της υποστήριξης είναι η μεταβολή του φορτίου της σήραγγας (χαλάρωση) που λαμβάνει χώρα πριν την υποστήριξη κατά την προχώρηση αυτής η οποία συνοδεύεται από ανάλογες παραμορφώσεις της βραχομάζας και η οποία εξαρτάται από την απόσταση πίσω από το μέτωπο στην οποία τοποθετείται η υποστήριξη (Σχ. 1.4).



Σχ. 1.4. Βαθμιαία εκτόνωση των γεωστατικών τάσεων ως συνάρτηση της απόστασης από το μέτωπο.

Επιτρέποντας έτσι κάποιο ελεγχόμενο ποσοστό παραμορφώσεων της σήραγγας, το σύστημα υποστύλωσης θα παραλάβει πιέσεις σημαντικά χαμηλότερες εκείνων που αναπτύσσονται αμέσως μετά την εκσκαφή. Από την άλλη πλευρά η ανοχή μεγάλων παραμορφώσεων επιφέρει μείωση των μηχανικών χαρακτηριστικών της βραχομάζας και είναι πιθανόν να δημιουργήσει μακροχρόνια δυσμενείς συνθήκες φορτίσεων.

Επομένως, ο κύριος στόχος του συστήματος υποστύλωσης θα πρέπει να είναι η ενεργοποίηση και διατήρηση της εγγενούς μηχανικής αντοχής της περιβάλλουσας βραχομάζας, ώστε να αξιοποιηθεί κατά το μέγιστο δυνατόν το δυναμικό αυτούποστηρίξεως της. Αυτό επιτυγχάνεται με χρονικά κατάλληλη τοποθέτηση ενός συστήματος υποστύλωσης κατάλληλης δυσκαμψίας και επαρκούς φέρουσας ικανότητας που όπως προαναφέρθηκε μπορεί να είναι το εκτοξευόμενο σκυρόδεμα ως αρχική υποστήριξη ή οι προκατασκευασμένοι δακτύλιοι σκυροδέματος.

Η αλληλεπίδραση βραχομάζας – υποστύλωσης μπορεί να μελετηθεί εύκολα όταν η γεωμετρία της σήραγγας είναι κυκλική και υποβάλλεται σε ισότροπη φόρτιση μακρινού πεδίου p_0 , δηλαδή έχουμε αξονοσυμμετρικές συνθήκες με συνέπεια το πρόβλημα να καθίσταται πρακτικά μονοδιάστατο (πρόβλημα του Lamé).

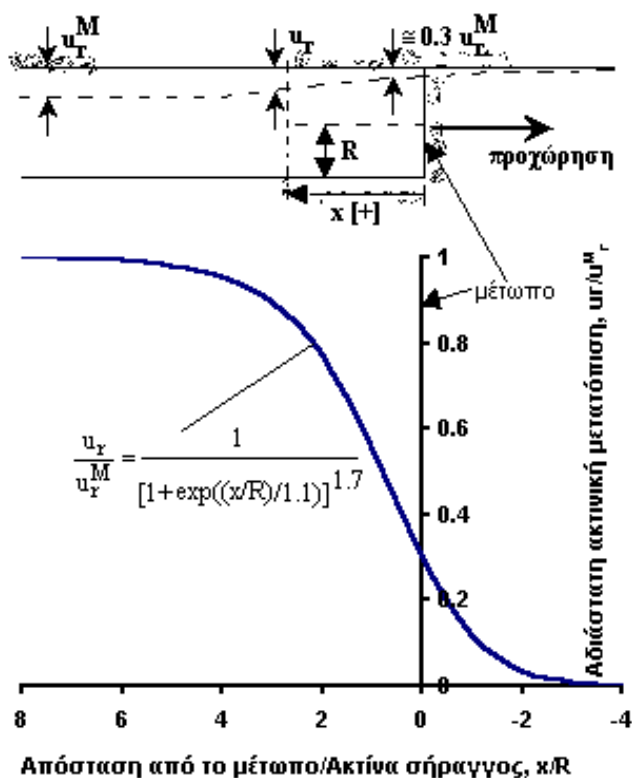
Η εκτόνωση των γεωστατικών φορτίων μπορεί να εκφραστεί με την βαθμιαία μείωση του αρχικού εντατικού πεδίου κατά μήκος της περιμέτρου της σήραγγας (επιφανειακές τάσεις) (Σχ. 1.4)

$$p_i = (1 - \lambda) p_0 \quad (1.1)$$

όπου p_0 είναι το αρχικό εντατικό πεδίο σε σημείο της περιφέρειας της σήραγγας και λ ο «συντελεστής εκτόνωσης των τάσεων» που κυμαίνεται από την τιμή 0 (καμμία εκτόνωση των τάσεων) έως την τιμή 1 (οι τάσεις που δρουν επί του συνόρου έχουν μηδενισθεί). Οι [Chern et al. \(1998\)](#) πρότειναν την ακόλουθη εμπειρική σχέση βάσει τρισδιάστατων αριθμητικών αναλύσεων και μετρήσεων των συγκλίσεων σε παράλληλη σήραγγα με το μέτωπο κατά την προχώρηση αυτού (Σχ. 1.5) από την οποία μπορεί να βρεθεί ο συντελεστής λ

$$\lambda = \frac{u_r}{u_r^M} = \frac{1}{\left[1 + e^{-((x/R)/1.1)}\right]^{1.7}} \quad (1.2)$$

όπου x είναι η απόσταση από το μέτωπο και R είναι η ακτίνα καμπυλότητας της σήραγγας στη θέση μέτρησης. Μπορεί να παρατηρηθεί από το παρακάτω σχήμα ότι για $x=0$ – δηλαδή ακριβώς επί του μετώπου της σήραγγας - έχουμε $\lambda=0.28$.



Σχ. 1.5. Σύγκλιση της σήραγγας ως συνάρτηση της απόστασης από το μέτωπο, με βάση τρισδιάστατη προσομοίωση της εκσκαφής της σήραγγας και επί τόπου μετρήσεις ([Chern et al, 1998](#)).

Αν δεν έχει τοποθετηθεί υποστήριξη τότε η ακτινική μετατόπιση πολύ μακριά από τη μέτωπο δίνεται από τη σχέση

$$u_R(\infty) = \frac{p_0 R}{2G} \quad (1.3)$$

όπου G είναι το μέτρο διάτμησης του γεωυλικού.

Σε πολικές συντεταγμένες η ακτινική τάση σ_r , η εφαπτομενική τάση σ_θ και η ακτινική μετατόπιση u_r συναρτήσει της ακτινικής θέσης r από το κέντρο της σήραγγας σε συνθήκες επιπέδου παραμόρφωσης δίδονται από τις σχέσεις του [Lame](#)

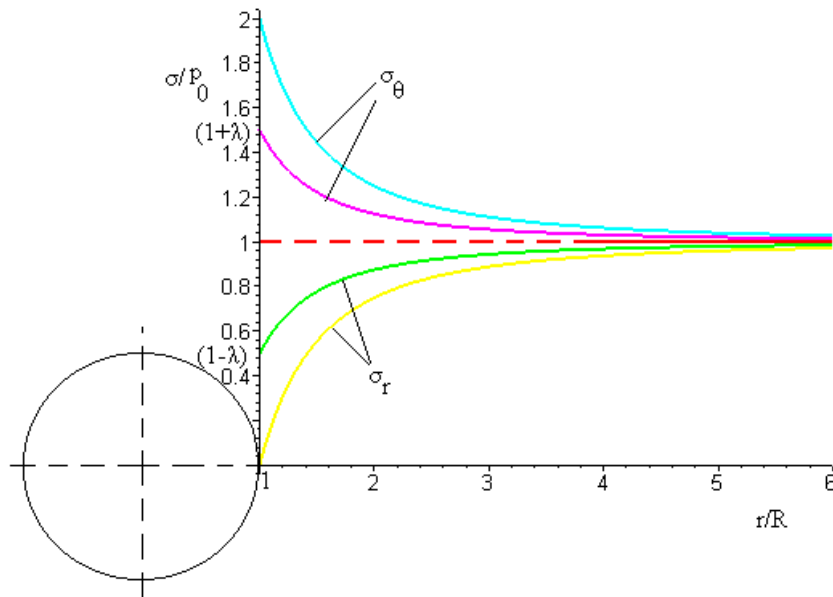
$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left(1 - \lambda \frac{R^2}{r^2} \right) p_0, \\ \sigma_\theta &= \left(1 + \lambda \frac{R^2}{r^2} \right) p_0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$u_r = \lambda \frac{p_0}{2G} \frac{R^2}{r}$$

Επί του συνόρου της σήραγγας $r = R$ οι παραπάνω σχέσεις δίνουν

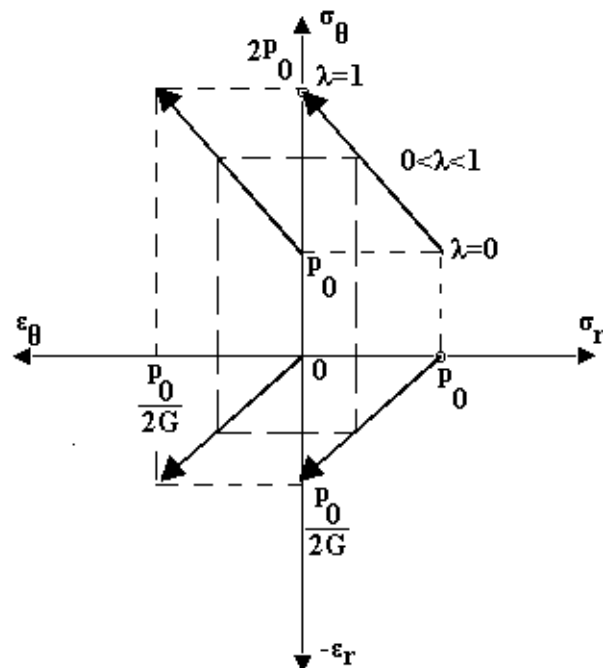
$$\begin{aligned} \sigma_r(R) &= (1 - \lambda) p_0, \\ \sigma_\theta(R) &= (1 + \lambda) p_0, \\ u_r(R) &= \lambda \frac{p_0 R}{2G} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Στο Σχ. 1.6 παρουσιάζονται οι γραφικές απεικονίσεις των ορθών τάσεων για διάφορες τιμές του συντελεστή εκτόνωσης λ .



Σχ. 1.6. Διανομή των ακτινικών και εφαπτομενικών τάσεων κατά την οριζόντια για δύο διαφορετικές τιμές του συντελεστή εκτόνωσης των τάσεων.

Οι διαδρομές των τάσεων και των τροπών στο τοίχωμα της σήραγγας για την αξονοσυμμετρική σήραγγα σε γραμμικό ελαστικό μέσο παρουσιάζεται στο Σχ. 1.7.



Σχ.1.7. Οι τασικές και τροπικές διαδρομές στο τοίχωμα της σήραγγας για αξονοσυμμετρική και ελαστική κατάσταση.

Η σχέση της σύγκλισης της σήραγγας με τις επιφανειακές τάσεις που δρούν στην περιφέρεια της καλείται “Καμπύλης Αντίδρασης Πετρώματος (Ground Reaction Curve)” ή καμπύλης σύγκλισης-εκτόνωσης της εδαφοβραχώμαζας. Όπως φαίνεται στο Σχ. 1.8 αυτή η καμπύλη λαμβάνεται αν σχεδιάσουμε την ακτινική τάση στο σύνορο της εκσκαφής σ_R συναρτήσει της u_R για κάθε τιμή του συντελεστού λ . Απ’

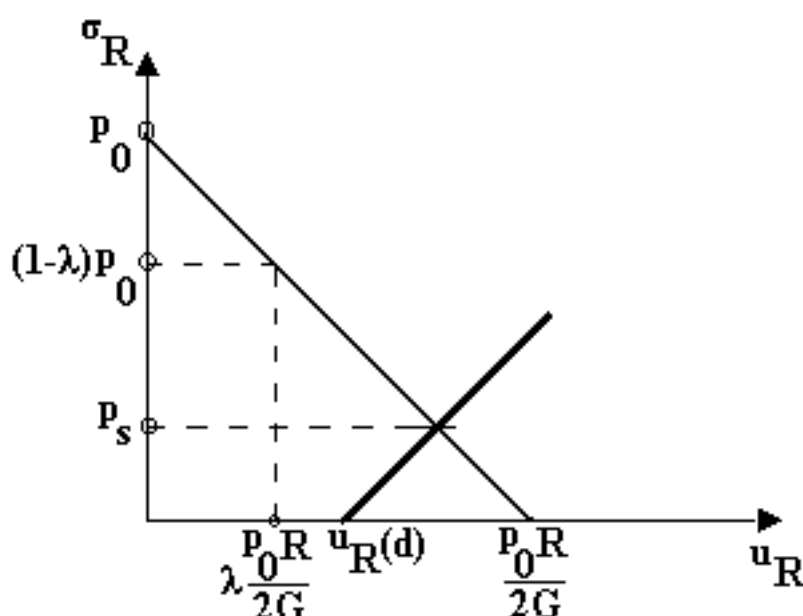
την άλλη πλευρά η χαρακτηριστική καμπύλη της υποστήριξης που φαίνεται στο ίδιο σχήμα μπορεί να κατασκευασθεί από την ελαστική σχέση μεταξύ της εφαρμοζόμενης πίεσης p_s και της μετατόπισης της υποστήριξης u_{sR}

$$p_s = K_s \frac{u_{sR}}{R} \quad (1.6)$$

όπου K_s είναι το μέτρο ακαμψίας της υποστύλωσης και u_{sR} δίδεται από την εξίσωση

$$u_{sR} = u_R(x) - u_R(d) \quad (1.7)$$

Η φυσική σημασία της εξίσωσης (1.7) είναι ότι η υποστύλωση τοποθετείται σε απόσταση $x=d$ από το μέτωπο (d είναι το ανυποστυλωτο μήκος της σήραγγας).



Σχ. 1.8. Καμπύλη αντίδρασης πετρώματος (λεπτή γραμμή) και χαρακτηριστική καμπύλη της υποστύλωσης (χοντρή γραμμή).

Ανακεφαλαιώνοντας, η αλληλεπίδραση μεταξύ εδαφο-βραχώμαζας και μέτρων υποστύλωσης, η οποία και περιγράφεται από τις αντίστοιχες “Χαρακτηριστικές Καμπύλες Υποστύλωσης”, εξαρτάται από τις παρακάτω παραμέτρους:

- την ακαμψία των μέτρων υποστύλωσης, η οποία καθορίζει και το μέγεθος των παραμορφώσεων που επιτρέπεται να αναπτυχθούν,
- την παραμορφωσιμότητα (ή ενδοτικότητα) της εδαφοβραχώμαζας,
- το αρχικό επί τόπου πεδίο τάσεων,
- το μέγιστο φορτίο που μπορεί να παραληφθεί από τα μέτρα υποστύλωσης, και τέλος
- τη μετατόπιση η οποία έχει λάβει χώρα πριν την εφαρμογή των μέτρων υποστύλωσης (χρόνος τοποθέτησης της υποστύλωσης).

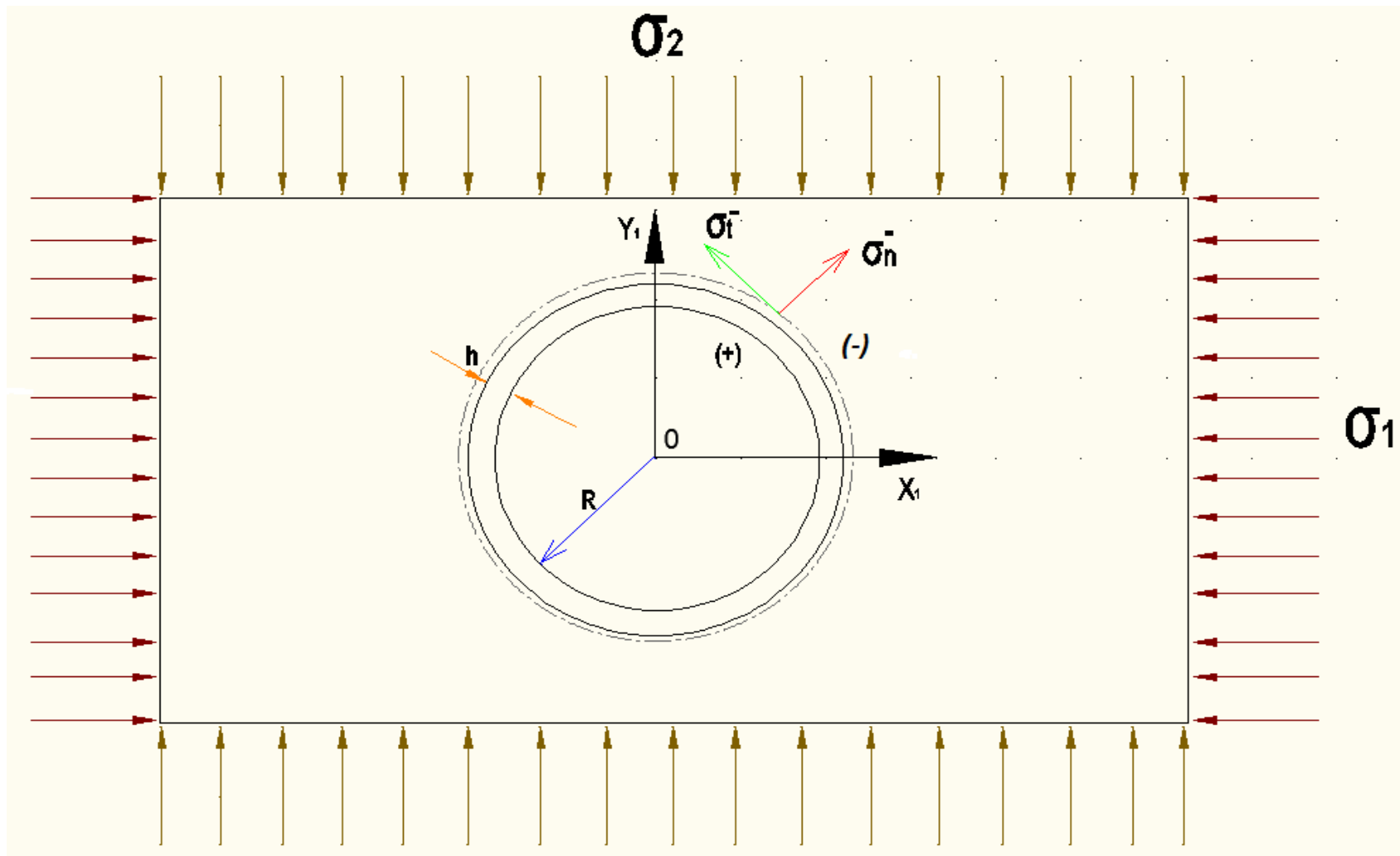
Κεφάλαιο 2^ο Επίπεδη επαφή ενός κυκλικού κυλινδρικού ανοίγματος που υποστηρίζεται από ένα λεπτότοιχο κέλυφος

2.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα της επίπεδης επαφής θεωρείται, αν θεωρήσουμε ένα κυκλικό κυλινδρικό άνοιγμα που υποστηρίζεται από έναν κυκλικό κυλινδρικό ελαστικό δακτύλιο και υποβάλλεται σε μια διαξονική κατάσταση των τάσεων στο άπειρο όπως φαίνεται στο Σχ. 2.1. Για την διαμόρφωση των συνθηκών επαφής, θεωρούμε ότι ο ελαστικός δακτύλιος συμπεριφέρεται ως ένα λεπτό κέλυφος και βρίσκεται σε τέλεια επαφή με το σύνορο της σήραγγας.

Η επίλυση αυτού του προβλήματος σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης μπορεί να βρεθεί με την εφαρμογή των μιγαδικών δυναμικών $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$ των Kolosov-Muskhelishvili ([Muskhelishvili, 1963](#)) και της θεωρίας των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Προβλήματα ενίσχυσης των σωμάτων από λεπτότοιχα στοιχεία, όπως ευθύγραμμοι δοκοί ή στύλοι, καμπυλόγραμμοι δακτύλιοι και κυλινδρικά κελύφη, ανήκουν στην κατηγορία προβλημάτων επαφής των παραμορφώσιμων σωμάτων. Επίλυση των προβλημάτων τάσεων-παραμορφώσεων στην επαφή ενός σώματος με ένα άλλο, μας εξηγεί τη φύση της επαφής και της εσωτερικής ομοιογένειας και εν τέλει την αποτελεσματικότητα να φέρουν τα φορτία. Προβλήματα τέτοιου τύπου, αποτελούν από τις πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην Μηχανική των Πετρωμάτων, την Ελαστικότητα και την Τριβολογία. Η γνώση της συμπεριφοράς της βραχύμαζας γύρω από ένα υπόγειο άνοιγμα (σήραγγα, γεώτρηση), και της υποστύλωσης (τάσεις – παραμορφώσεις) είναι σημαντική για το βέλτιστο σχεδιασμό και τη λειτουργία του ανοίγματος.



Σχήμα 2.1 Επίδραση τάσεων σε επενδεδυμένη σήραγγα με λεπτότοιχο κυκλικό δακτύλιο που υποβάλλεται σε επί τόπου μακρυνές κύριες τάσεις σ_1 και σ_2 .

2.2 Θεωρητική λύση και αποτελέσματα

Θεωρείται ότι η συμπεριφορά λεπτών κελυφών διέπεται από τις υποθέσεις των *Kirchhoff-Love* για λεπτά κελύφη, που είναι οι κάτωθι:

1. Οι κάθετες ευθείες γραμμές πάνω στην απαραμόρφωτη ενδιάμεση επιφάνεια του κελύφους σε αφόρτιστη κατάσταση, παραμένουν ευθείες και κάθετες στην παραμορφούμενη ενδιάμεση επιφάνεια (που περιέχει τον ουδέτερο άξονα) και δεν επιμηκύνονται. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι παραμορφώσεις (ορθές και διατμητικές) κατά την έννοια την κάθετη στην ενδιάμεση επιφάνεια μηδενίζονται.
2. Η εγκάρσια ορθή τάση (δηλ. αυτή που είναι κάθετη στην αξονική) είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες τάσεις και επομένως αγνοείται.

Σημειώνεται εδώ ότι υπάρχουν δύο κατηγορίες για κελύφη: (α) τα «λεπτότοιχα κελύφη», και (β) τα «χονδρότοιχα κελύφη». Ένα κελύφος καλείται «λεπτότοιχο» αν ο λόγος h/R (βλ. Σχ. 2.1) είναι πολύ μικρότερος της μονάδας. Σύμφωνα με τον [Novozhilov \(1964\)](#) για τις συνήθεις τεχνικές εφαρμογές είναι επιτρεπτό το σφάλμα του 5% που αντιστοιχεί στον περιορισμό $h/R \leq 1/20$.

Με βάση τα ανωτέρω οι καταστατικές εξισώσεις μεταξύ δυνάμεων, ροπών και παραμορφώσεων φερόντων στοιχείων που συμπεριφέρονται ως κελύφη δίνονται παρακάτω ([Novozhilov, 1964](#)):

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1^2} (\varepsilon_1 + \nu_1 \varepsilon_2), \\
 T_2 &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1^2} (\varepsilon_2 + \nu_1 \varepsilon_1), \\
 M_1 &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)} (\kappa_1 + \nu_1 \kappa_2) \\
 M_2 &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1^2)} (\kappa_2 + \nu_1 \kappa_1) \\
 T_{12} &= \frac{E_1 h}{2(1 + \nu_1)} \left(\omega + \frac{h^2}{6R_2} r \right) \\
 T_{21} &= \frac{E_1 h}{2(1 + \nu_1)} \left(\omega + \frac{h^2}{6R_1} r \right) \\
 M_{12} = M_{21} = H &= \frac{Eh^3}{12(1 + \nu_1)} r
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Επίσης ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_1 \kappa_1}{\partial \alpha_2} - \kappa_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 r}{\partial \alpha_1} - r \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\omega}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial A_1 \varepsilon_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 \omega}{\partial \alpha_1} - \varepsilon_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] &= 0 \\
 \frac{\partial A_2 \kappa_2}{\partial \alpha_1} - \kappa_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 r}{\partial \alpha_2} - r \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\omega}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial A_2 \varepsilon_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 \omega}{\partial \alpha_2} - \varepsilon_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] &= 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{\kappa_1}{R_2} + \frac{\kappa_2}{R_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\vartheta}{\vartheta \alpha_1 A_1} \left(A_2 \frac{\vartheta \varepsilon_2}{\vartheta \alpha_1} + \frac{\vartheta A_2}{\vartheta \alpha_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{1}{2} A_1 \frac{\vartheta \omega}{\vartheta \alpha_2} - \frac{\vartheta A_1}{\vartheta \alpha_2} \omega \right) + \frac{\vartheta}{\vartheta \alpha_2 A_2} \left(A_1 \frac{\vartheta \varepsilon_1}{\vartheta \alpha_2} + \frac{\vartheta A_1}{\vartheta \alpha_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{1}{2} A_2 \frac{\vartheta \omega}{\vartheta \alpha_1} - \frac{\vartheta A_2}{\vartheta \alpha_1} \omega \right) \right) = 0 \quad (2.2)$$

όπου,

- α_1, α_2 είναι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες κατά μήκος της μέσης επιφάνειας του κελύφους που συμπίπτουν με τις κύριες ακτίνες καμπυλότητας .
- R_1, R_2 είναι κύριες ακτίνες καμπυλότητας ,
- κ_1, κ_2, τ είναι οι παράμετροι καμπυλότητας και συστροφής της μέσης επιφάνειας
- T, N είναι οι δυνάμεις που δρουν ανά μονάδα μήκους . Η αξονική δύναμη T δρα στο κάθετο επίπεδο επί της μέσης επιφάνειας του κελύφους , και η εγκάρσια δύναμη N δρα στο επίπεδο της μέσης επιφάνειας του κελύφους .
- M , είναι η ροπή ανά μονάδα μήκους,
- Τα u_1, u_2, ω μας καθορίζουν τις αποστάσεις που αναφέρονται στα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- E_1, ν_1 είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young, και ο λόγος του Poisson του κελύφους .
- h είναι το πάχος του κελύφους, και
- $r^\pm, p^\pm, q^\pm$ μας καθορίζουν τα εξωτερικά φορτία που δρούν επί της εσωτερικής (+) και της εξωτερικής (-) επιφάνειας του κελύφους σύμφωνα με τις λεπτομέρειες του Σχ. 2.1.

Για την περίπτωση κυλινδρικού λεπτού κελύφους κυκλικής διατομής ισχύουν οι εξής απλοποιητικές σχέσεις για τις γεωμετρικές παραμέτρους του προβλήματος

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s, \alpha_2 = z, \alpha_3 = r = n, \\ A_1 &= A_2 = A_3 = 1, R_1 = R \\ s &= R\theta, R_2 = \infty \\ u_2 &= \varepsilon_2 = \kappa_2 = \omega = r = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} T_1 &= E_s \varepsilon_1, T_2 = E_s \nu \varepsilon_2 \\ M_1 &= D_s \kappa_1, M_2 = D_s \nu \kappa_1 \\ T_{12} &= T_{21} = M_{12} = M_{21} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

όπου έχουμε θέσει τους εξής ορισμούς για την ελαστική δυστροπία (elastic stiffness) και την ακαμψία (flexural rigidity), αντίστοιχα

$$E_s = \frac{E_1 h}{(1-\nu_1^2)}, D_s = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1^2)}$$

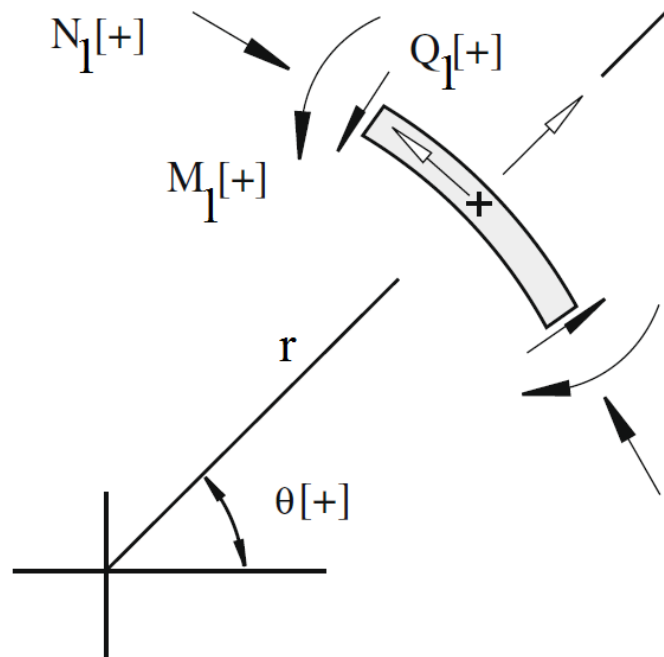
Οι απλοποιημένες εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων αποδίδονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} \left[\frac{\partial T_1(\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{N_1}{R} + (\tau^+ - \tau^-) &= 0 \\
\frac{1}{R} \left[\frac{\partial N_1}{\partial \theta} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} \right] - \frac{T_1(\theta)}{R} + (q^+ - q^-) &= 0 \\
\frac{1}{R} \left[\frac{\partial M_1(\theta)}{\partial \theta} \right] &= 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Οι όροι $\frac{N_1}{R}$ και $\left[\frac{\partial N_1}{\partial \theta} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} \right]$ είναι μηδέν. Θεωρώντας ότι η ακαμψία του κελύφους είναι αμελητέα ($D_s \cong 0$), οι εξισώσεις ισορροπίας αποδίδονται με τις κάτωθι απλούστερες εξισώσεις

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} \frac{\partial T_1(\theta)}{\partial \theta} &= \tau(\theta), -\frac{T_1(\theta)}{R} = q(\theta) \\
\tau(\theta) &= \tau^-(\theta) - \tau^+(\theta), q(\theta) = q^-(\theta) - q^+(\theta)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Η περιοχή (-) αναφέρεται στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους, στην περιοχή δηλαδή όπου εφάπτεται με το πέτρωμα ενώ οι συμβάσεις προσήμου για τις δυνάμεις και τις ροπές φαίνονται στο Σχ. 2.2.



Σχ. 2.2. Σύμβαση προσήμου για τις αξονικές (N) και τέμνουσες (Q) δυνάμεις και τις καμπτικές ροπές (M).

Λαμβάνοντας υπόψιν τις εξισώσεις (2.6), οι συνοριακές συνθήκες για το υπόψιν πρόβλημα σε περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης εκφράζεται από τα παρακάτω,

1. Η εσωτερική επιφάνεια του δαχτυλιδιού είναι ελεύθερη από εξωτερικές δυνάμεις

$$\sigma_n^+ - i\sigma_n^- = 0 \quad (2.7)$$

όπου το $i = \sqrt{-1}$ συμβολίζει τη φανταστική μονάδα . Στην διεπιφάνεια μεταξύ των σωμάτων και του κελύφους δίνεται το ακόλουθο σύστημα οριακών συνθηκών :

2. Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία λεπτού κελύφους και για συγκεκριμένη περίπτωση κυλινδρικού λεπτού κελύφους, οι συνιστώσες της ορθής και διατμητικής τάσης κατά μήκος της ζώνης επαφής γ των δύο σωμάτων πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} \frac{-T(\theta)}{R} + (\sigma_n^+ - \sigma_n^-) &= 0 \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} + (\sigma_t^+ - \sigma_t^-) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

όπου $T(\theta)$ είναι αξονική δύναμη ανά μονάδα μήκους, που δρα κατά μήκος της γραμμής που βρίσκεται στη μέση επιφάνεια του κυλινδρικού κελύφους και δίδεται από την κάτωθι καταστατική σχέση :

$$T(\theta) = \frac{E_1 h}{(1-\nu_1^2)} \varepsilon_\theta^{str} \quad (2.9)$$

όπου ε_θ^{str} είναι η εφαπτομενική συνιστώσα παραμόρφωσης στην περίμετρο κατά μήκος της γραμμής στη μέση επιφάνεια του κελύφους, η οποία μπορεί να ληφθεί εφαρμόζοντας το νόμο του Hooke για την περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης .

$$\varepsilon_\theta^{str} = \frac{1}{E_1} [(1-\nu_1^2)\sigma_\theta - \nu_1(1+\nu_1)\sigma_r] \quad (2.10)$$

3. Τελικά κατά μήκος της ζώνης επαφής πετρώματος-κελύφους(γ), για «τέλεια επαφή» κελύφους και περιβάλλοντος πετρώματος οι εφαπτομενικές παραμορφώσεις των δύο σωμάτων ισούνται με ε_θ^{str} .

$$\varepsilon_\theta^+ = \varepsilon_\theta^- = \varepsilon_\theta^{str}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις οριακές συνθήκες (2) και (3) μαζί με τις σχέσεις (2.9) και (2.10), οδηγούμαστε στην παρακάτω σχέση όπου πρέπει να πληρείται κατά μήκος της ζώνης επαφής κελύφους-πετρώματος γ :

$$E_1 R (1-\nu_1^2) (\sigma_n^- - i\sigma_t^-) + E_1 h (1+\nu_1) \left(1 - \frac{td}{dt}\right) \times [(1-\nu_1)(\sigma_n^- + \sigma_s^-)] = 0 \quad (2.11)$$

όπου έχουμε θέσει τη μιγαδική μεταβλητή $t = R * e^{i\theta}$. Από την σχέση (2.8) έχουμε ότι: $\sigma_n^+ = \sigma_t^+ = 0$. Άρα $\sigma_n^- = \sigma_n$ και $\sigma_t^- = \sigma_t$.

Σύμφωνα με τη θεωρία των λεπτών κελυφών η εφαπτομενική τάση μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος του πάχους του κελύφους. Η τάση αυτή με βάση αυτή την παραδοχή μπορεί να βρεθεί προσεγγιστικά ως εξής

$$\sigma_{\theta}^{+}(\hat{z}) \approx \frac{T}{h} + \frac{12M}{h^3} \hat{z} \quad (2.11\alpha)$$

Η τάση στην επαφή βρίσκεται αν θέσουμε $\hat{z} = h/2$ στην παραπάνω προσεγγιστική έκφραση

$$\sigma_{\theta}^{+}(h/2) \approx \frac{T}{h} + \frac{6M}{h^2} \quad (2.11\beta)$$

Επίσης η εφαπτομενική τάση στην ουδέτερη (μέση) επιφάνεια του κελύφους βρίσκεται αν θέσουμε $\hat{z} = 0$,

$$\sigma_{\theta}^{+}(0) \approx \frac{T}{h} \quad (2.11\gamma)$$

Τέλος, η εφαπτομενική τάση που δρά στο κέλυφος μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει των τάσεων που δρούν στην επαφή ως εξής

$$\sigma_{\theta}^{+}(0) \approx \frac{T}{h} = \frac{1}{1-\nu_1^2} \frac{E_1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_{\theta}^{-} - \nu (1+\nu) \sigma_r^{-} \right] \quad (2.11\delta)$$

Οι τάσεις του πεδίου καθορίζονται από τις τασικές μιγαδικές συναρτήσεις ή δυναμικά $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$ των Kolosov-Muskhelishvili ([Muskhelishvili, 1963](#)):

$$\begin{aligned} \Phi_o(z) &= \Phi(z) + \Gamma \\ \Psi_o(z) &= \Psi(z) + \Gamma \end{aligned} \quad (2.12)$$

όπου σύμφωνα με τον [Muskhelishvili \(1963\)](#)

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \\ \Gamma &= \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \Gamma' &= -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την $\Phi(z)$, έχουμε:

$$\Phi_o(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau + \Gamma \quad (2.13)$$

Αν η πυκνότητα $\phi(\tau)$ είναι η συνοριακή τιμή μιας αναλυτικής συνάρτησης στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους (s^-), τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy για άπειρο μέσο ,

$$\begin{cases} \Phi^-(z) = -\varphi(z) + \varphi(\infty) \\ \varphi(\infty) = \Gamma \end{cases} \quad (2.14)$$

Επίσης από τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες στο γ έχουμε :

$$2\mu \frac{d}{dt}(-u^\pm + i\nu^\pm) = \Phi_0^\pm(t) - \kappa \overline{\Phi(t)} + \frac{d}{dt}[\bar{t}\Phi_0'(t) + \Psi_0(t)] \quad (2.15)$$

$$\sigma_n^\pm - i\sigma_t^\pm = \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_0'(t) + \Psi_0(t)] \quad (2.16)$$

όπου $\frac{dt}{d\bar{t}} = -e^{2i\theta}$ η μπάρα καθορίζει το συζυγή, $\kappa = 3 - 4\nu$ η σταθερά του Muskhelishvili, και μ είναι το μέτρο διάτμησης του πετρώματος.

Για u, v σε Καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$2\mu \left[\frac{du}{d\theta} + i \frac{dv}{d\theta} \right] = it \left[\kappa \Phi_0(t) - \overline{\Phi_0(t)} + \bar{t} \overline{\Phi_0'(t)} + \frac{\bar{t}}{t} \overline{\Psi_0(t)} \right] \Leftrightarrow 2\mu \frac{d}{dt}(u + i\theta) = \kappa \overline{\Phi_0(t)} - \overline{\Phi_0(t)} + \bar{t} \overline{\Phi_0'(t)} + \left[\frac{\bar{t}}{t} \overline{\Psi_0(t)} \right] \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon \\ \frac{d}{d\theta} &= it \frac{d}{dt} \\ \frac{dt}{d\bar{t}} &= \frac{ie^{i\theta}}{-ie^{-i\theta}} = -e^{2i\theta} \Leftrightarrow -\frac{dt}{d\bar{t}} = e^{2i\theta} = \frac{t}{\bar{t}} \\ \Leftrightarrow \frac{t}{\bar{t}} &= \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-2i\theta} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Επίσης από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} -2\mu \frac{d}{dt}(-u + i\nu) &= \kappa \overline{\Phi_0(t)} - \Phi_0(t) + t\Phi_0'(t) + \frac{t}{\bar{t}} \Psi_0(t) \Rightarrow \\ -2\mu \frac{d}{dt}(-u + i\nu) &= \Phi_0(t) - \kappa \overline{\Phi_0(t)} - t\Phi_0'(t) - \frac{t}{\bar{t}} \Psi_0(t) \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.19)$$

Λόγω της εξίσωσης (2.18) οι εξ. (2.17) παίρνουν την μορφή:

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{d}{dt}(-u + i\nu) &= \Phi_0(t) - \kappa \overline{\Phi_0(t)} - \frac{t}{\bar{t}} \left(\bar{t} \Phi_0'(t) + \Psi_0(t) \right) \rightarrow *(-1) \rightarrow \\ 2\mu \frac{d}{dt}(-u + i\nu) &= -\overline{\Phi_0(t)} + \kappa \Phi_0(t) - \frac{d\bar{t}}{dt} \left(t \overline{\Phi_0'(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2.16) και (2.20) έπεται:

$$(\kappa+1) = \Phi_0(t) = (\sigma_n + i\sigma_t) + 2\mu \frac{d}{dt}(u + iv) \quad (2.21)$$

Από τη σχέση για μετασχηματισμό συντεταγμένων έχουμε :

$$u + iv = e^{i\theta}(u_r + iv_\theta), \text{ με } t = Re^{i\theta}$$

$$\frac{d}{dt} = -i \frac{1}{t} \frac{d}{d\theta}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u + iv) &= -i \frac{1}{t} \frac{d}{d\theta} [e^{i\theta}(u_r + iv_\theta)] = -i \frac{1}{t} i e^{i\theta}(u_r + iv_\theta) - i \frac{1}{t} \left[\frac{du_r}{d\theta} + i \frac{dv_\theta}{d\theta} \right] = \\ &= \frac{1}{R}(u_r + iv_\theta) - i \frac{1}{R} \left[\frac{du_r}{d\theta} + i \frac{dv_\theta}{d\theta} \right] \end{aligned}$$

Από [Timoshenko and Goodier \(1951\)](#)

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right],$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_\theta - \nu(1+\nu) \sigma_r \right],$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_r - \nu(1+\nu) \sigma_\theta \right],$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{2G}$$

Για $r = R$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right],$$

$$\frac{d}{dt}(u + iv) = \frac{u_r}{R} + i \frac{v_\theta}{R} - i \frac{1}{R} \frac{du_r}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{dv_\theta}{d\theta} =$$

$$\frac{d}{dt}(u + iv) = \varepsilon_\theta - i \left[-\frac{v_\theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{du_r}{d\theta} \right] = \varepsilon_\theta - i \left[2\varepsilon_r - \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] =$$

(2.22)

$$\varepsilon_\theta - i \frac{\tau_{r\theta}}{G} + i \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(u + iv) = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_\theta - \nu(1+\nu) \sigma_r \right] - i \frac{\tau_{r\theta}}{dr}$$

Από την εξίσωση (2.21)

$$(\kappa+1) = \Phi_0(t) = (\sigma_n + i\sigma_t) + 2\mu \frac{d}{dt}(u + iv)$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{1}{\kappa+1}(\sigma_r + i\tau_{r\theta}) + \frac{2\mu}{\kappa+1} \frac{d}{dt}(u + iv) = \\ &= \frac{1}{\kappa+1}(\sigma_r + i\tau_{r\theta}) + \left(\frac{2\mu}{\kappa+1}\right) \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2)\sigma_\theta - \nu(1+\nu)\sigma_r \right] - i \frac{2\mu}{\kappa+1} \frac{\tau_{r\theta}}{\mu} \\ &+ i \frac{2\mu}{\kappa+1} \frac{dv_\theta}{dr} = \frac{1}{\kappa+1}(\sigma_r + i\tau_{r\theta}) + \left(\frac{1}{\kappa+1}\right) \left(\frac{E}{1+\nu}\right) \frac{1}{E} \left[(1-\nu)(1+\nu)\sigma_\theta - \nu(1+\nu)\sigma_r \right] \\ &- i \frac{2}{\kappa+1} \tau_{r\theta} + 2i \left(\frac{\mu}{\kappa+1}\right) \frac{dv_\theta}{dr} \Rightarrow \\ \Phi(t) &= \left(\frac{1-\nu}{1+\kappa}\right)(\sigma_r + i\tau_{r\theta}) - i \left(\frac{1}{\kappa+1}\right) \tau_{r\theta} + i \left(\frac{2\mu}{1+\kappa}\right) \frac{dv_\theta}{dr} \end{aligned} \quad (2.23\alpha)$$

Ή αλλιώς ,

$$\Phi(t) = f_1(t) + f_2(t) - if_3(t) + if_4(t) \quad (2.23\beta)$$

όπου έχουμε θέσει:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left(\frac{1-\nu}{1+\kappa}\right) \sigma_r = \frac{1}{4} \sigma_r, \\ f_2(t) &= \left(\frac{1-\nu}{1+\kappa}\right) \sigma_\theta = \frac{1}{4} \sigma_\theta, \\ f_3(t) &= \left(\frac{1}{1+\kappa}\right) \tau_{r\theta}, \\ f_4(t) &= \left(\frac{2\mu}{1+\kappa}\right) \left(\frac{dv_\theta}{dr}\right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Δηλαδή σ' αυτό το σημείο καταφέραμε να εκφράσουμε το μιγαδικό δυναμικό Φ συναρτήσει των τάσεων και της παραμόρφωσης. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.21) από τις συνοριακές συνθήκες και λύνοντας ως προς $\Psi(z)$ έχουμε ,

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\sigma_n - i\sigma_t}{\tau - z} d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{\Phi}(\bar{\tau})}{\tau - z} d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{\tau}\bar{\Phi}(\bar{\tau})}{(\tau - z)^2} d\tau + \Gamma' \quad (2.25)$$

Αντικαθιστώντας την οριακή τιμή της παραπάνω συνάρτησης στην εξίσωση (2.16), εξάγουμε την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται επί του συνόρου:

$$2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\oint\frac{\Phi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\frac{dt}{d\bar{t}}\left[\frac{1}{\pi i}\oint\frac{\sigma_n(\tau)-i\sigma_t(\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\tau-\frac{1}{\pi i}\oint\frac{\bar{\Phi}(\bar{\tau})d\bar{\tau}}{\tau-t}-\frac{1}{\pi i}\oint\frac{(\bar{\tau}-\bar{t})\Phi(\tau)}{(\bar{\tau}-\bar{t})^2}d\bar{t}\right]-$$

$$(\sigma_n-i\sigma_t)=2\left[\Gamma+\bar{\Gamma}+\frac{dt}{d\bar{t}}\Gamma'\right]$$
(2.26)

όπου το(Re) μας καθορίζει το πραγματικό μέρος από ότι περικλείει. Η μόνη άγνωστη συνάρτηση μας δίνεται με όρους τάσεων και παραμορφώσεων και είναι η (2.23).

Αντικαθιστώντας στις εξ (2.11) και (2.26) τις τιμές των τάσεων και των παραγώγων της περιφερειακής συνιστώσας της μετατόπισης που δίνονται από την εξ (2.24), καταλήγουμε σε ένα σύστημα από εξισώσεις που πρέπει να πληρούνται στη ζώνη επαφής κέλυφος-πέτρωμα, και είναι:

$$\begin{cases} 4\left[ER(1-v_1^2)+v\frac{E_1}{E}h(1+v)\right]f_1(t)-4\frac{E_1}{E}h(1-v^2)f_2(t)=\left[\frac{E_1}{E}(1-v_1^2)+v\frac{E_1}{E}h(1+v)\right]p(t) \\ \frac{E_1}{E}h(1+v)\frac{d}{d\theta}\left[-4\frac{v}{1-v}f_1(t)+4f_2(t)\right]-\frac{(1-v_1^2)}{(1-v)(1+k)}f_3(t)=0 \end{cases}$$
(2.27)

2.3 Αριθμητική Επίλυση

Στην παρούσα παράγραφο μετασχηματίζονται οι εξισώσεις (2.26) και (2.27) σε σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο παρεμβολής για την άγνωστη συνάρτηση πυκνότητας (Ivanov, 1976)

$$\varphi(t)\approx\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^n\varphi(t_j)\frac{\left(\left(\frac{t}{\tau_j}\right)^{-n}-1\right)}{1-\frac{t}{\tau_j}},\tau_j=\exp\left(\frac{2\pi i j}{2n+1}\right)$$
(2.28)

το σύστημα των εξ. (2.26) και (2.27) εύκολα μετατρέπεται σε ένα σύστημα με $4(2n+1)$ εξισώσεων με $4(2n+1)$ αγνώστους $f_i(t), i=1,..4$ κατά μήκος του ορίου της διεπαφής. Η επίλυση αυτού του συστήματος μας δίνει σύμφωνα με την εξ(2.24) τις τάσεις κατά μήκος του ορίου επαφής, και σύμφωνα με τις εξ(2.27),(2.25) (2.14) τις τάσεις σε ολόκληρο το ελαστικό μέσο.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις ακόλουθες κατά προσέγγιση εκφράσεις της λειτουργίας των συναρτήσεων (2.25), (2.26), εξάγουμε την εξ(2.28),

$$\phi(t)=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\frac{\sin\frac{(2n+1)(\theta_0-\theta_j)}{2}}{\sin\frac{(\theta_0-\theta_j)}{2}}\left[\phi_1(t_j)+i\phi_2(t_j)\right]$$

$$\frac{1}{\pi i}\oint\frac{\phi(t)}{\tau-t}dt=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\left[1+2i\frac{\sin\frac{n(\theta_0-\theta_j)}{2}*\sin\frac{(n+1)(\theta_0-\theta_j)}{2}}{\sin\frac{(\theta_0-\theta_j)}{2}}\right]\times$$

$$\times\left[\phi_1(t_j)+i\phi_2(t_j)\right]$$
(2.29)

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.23β) στην εξ. (2.26) βρίσκουμε ότι πάνω στο σύνορο ισχύει η κάτωθι ολοκληρω-διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi i} \oint \frac{(f_1(\tau) + f_2(\tau) - if_3(\tau) + if_4(\tau))}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \oint \frac{(f_1(\bar{\tau}) + f_2(\bar{\tau}) + if_3(\bar{\tau}) - if_4(\bar{\tau}))}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\bar{\tau} \\
& + \frac{dt}{d\bar{t}} \left\{ \frac{1}{\pi i} \oint \frac{(\sigma_n^- - i\sigma_t^-)}{\tau - t} d\bar{\tau} - \frac{1}{\pi i} \oint \frac{(f_1(\bar{\tau}) + f_2(\bar{\tau}) + if_3(\bar{\tau}) - if_4(\bar{\tau}))}{\tau - t} d\bar{\tau} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\pi i} \oint \frac{(\bar{\tau} - \bar{t})(f_1(\tau) + f_2(\tau) - if_3(\tau) + if_4(\tau))}{(\tau - t)^2} d\tau \right\} + (\sigma_n^- - i\sigma_t^-) \\
& = 2[(\Gamma + \bar{\Gamma}) + \frac{dt}{d\bar{t}} \Gamma']
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Ξεχωρίζοντας το πραγματικό μέρος $t_j = \exp(i\theta_j)$, και το φανταστικό $t = \exp(i\theta_0)$, και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (2.29), καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} [4ER(1-v_1)^2 + 4vE_1h(1+v)] \frac{\sin(2n+1) \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}}{\sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} f_1(t_j) \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} [-4E_1h(1-v^2)] \frac{\sin(2n+1) \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}}{\sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} f_2(t_j) \\
& = -[ER(1-v_1^2) + vE_1h(1+v)]p(t)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

και,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left[-4 \frac{E_1 h v (1+v)}{1-n} \right. \\
& \times \frac{n \cos \frac{(2n+1)(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2} \sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2} - \sin n(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{\sin^2 \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} \left. \right] f_1(t_j) \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left[4E_1 h v (1+v) \right. \\
& \times \frac{n \cos \frac{(2n+1)(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2} \sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2} - \sin n(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{\sin^2 \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} \left. \right] f_2(t_j) \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left[(1+k)ER \frac{(1-v_1)^2 \sin(2n+1) \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}}{(1-v) \sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} \right] f_3(t_j) = 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Εν συνεχεία για το πραγματικό μέρος της εξ (2.30), εξάγεται η παρακάτω εξ (2.33):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left[-6 \cos(\theta_0^{(k)} - \theta_j) - 4 \frac{\sin(2n+1) \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}}{\sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} \right] f_1(t_j) \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left[4 + 2 \cos(\theta_0^{(k)} - \theta_j) \right] f_2(t_j) \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left[2(3+k) \frac{\sin \frac{n(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2} \sin \frac{(n+1)(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}}{\sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} \right. \\
& \quad \left. - 2(2+k) \sin(\theta_0^{(k)} - \theta_j) \right] f_3(t_j) \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left[-4 \frac{\sin \frac{n(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2} \sin \frac{(n+1)(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}}{\sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} \right. \\
& \quad \left. + 2 \sin(\theta_0^{(k)} - \theta_j) \right] f_4(t_j) = (\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta_0^{(k)} + p(t)
\end{aligned}
\tag{2.33}$$

Από το φανταστικό μέρος της εξ (2.30), εξάγεται η παρακάτω εξ (2.34):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left[4 \frac{\sin \frac{n(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2} \sin \frac{(n+1)(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}}{\sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} - 6 \sin(\theta_0^{(k)} - \theta_j) \right] f_1(t_j) \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left[-4 \frac{\sin \frac{n(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2} \sin \frac{(n+1)(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}}{\sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} \right. \\
& \left. + 2 \sin(\theta_0^{(k)} - \theta_j) \right] f_2(t_j) \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left[2(2+k) \cos(\theta_0^{(k)} - \theta_j) + (1+k) \right. \\
& \left. + (1+k) \frac{\sin \frac{(2n+1)(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}}{\sin \frac{(\theta_0^{(k)} - \theta_j)}{2}} \right] f_3(t_j) \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} [-2 \cos(\theta_0^{(k)} - \theta_j)] f_4(t_j) = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta_0^{(k)}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

όπου,

$\theta_j = \frac{2\pi j}{2n+1}$, $j = 1, \dots, 2n+1$, είναι τα σημεία ολοκλήρωσης

και

$\theta_0^{(k)} = \frac{(2k-1)\pi}{2n+1}$, $k = 1, \dots, 2n+1$, είναι τα συντοπικά (collocation) σημεία.

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων για $f_i(t_j)$, $i = 1, \dots, 4$, βρίσκουμε την κατανομή των τάσεων και των μετατοπίσεων κατά μήκος του συνόρου επαφής γ. Αν ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης αυξηθεί, η διακύμανση των τάσεων και των μετατοπίσεων θα περιγράφεται με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Οι εξισώσεις (2.31) έως και την (2.34) προγραμματίστηκαν στο [Mathworks Matlab](#)® έτσι ώστε να υπολογίζονται οι τάσεις στο πέτρωμα και στο κέλυφος.

```

function ring4membrane(N,E0)
%      This is a program for complex variable analysis of plane
%      stress or plane strain contact elasticity problems of
%      moments)
%      "membrane theory of shells" (discarding bending
%      no-slip contact conditions
%.....K = 1 for no-slip and K = 2 for full-slip

%ROCK MASS
    N=30;
    E1=1;
    TN1=0.3;
%SUPPORT
    E0=2;
    TN0=0.3;
% TUNNEL RADIUS
    R=1;
%SUPPORT THICKNESS'
    % AH=(2*(1./6.)/(1+2*(1./6.)))*R %comparison with Savin's table p.246
    AH=0.8;
    % P0=0.0*R;
%NORMAL HORIZONTAL STRESS N1
    AN=.5;
%NORMAL VERTICAL STRESS N2      BN=0 for comparison with Savin!
    BN=10.0;
%
    SK1=3.0-4.0*TN1;
    G1=E1/(2.0*(1.0+TN1));
    SK0=3.0-4.0*TN0;
    G0=E0/(2.0*(1.0+TN0));

```

Σχ. 2.3. Αποψη του κώδικα Matlab® ring4membrane.m.

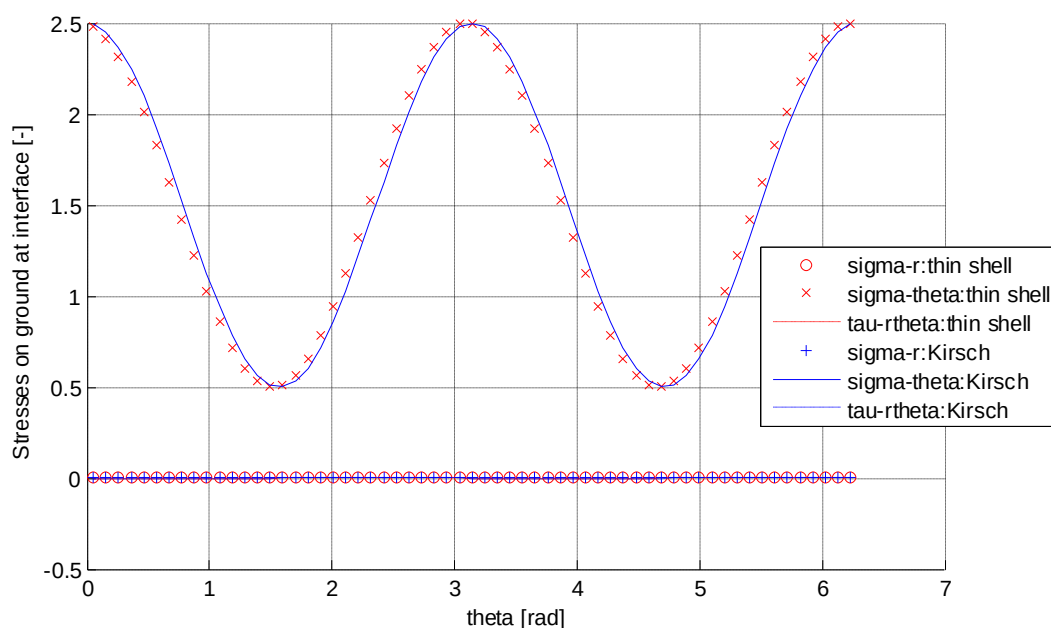
Κεφάλαιο 3^ο Αριθμητικά αποτελέσματα και συζήτηση των αποτελεσμάτων

Από τις εξισώσεις ισορροπίας του κελύφους και του πετρώματος μπορούμε να δούμε ότι οι τάσεις στη διεπιφάνεια μεταξύ κελύφους και πετρώματος καθώς επίσης και η αξονική τάση που δρά στην ενδιάμεση επιφάνεια του κελύφους είναι μία συνάρτηση της μορφής

$$f = \left(\frac{h}{R}, \frac{E_1(1-\nu_1)^2}{E(1-\nu)^2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \dots \right)$$

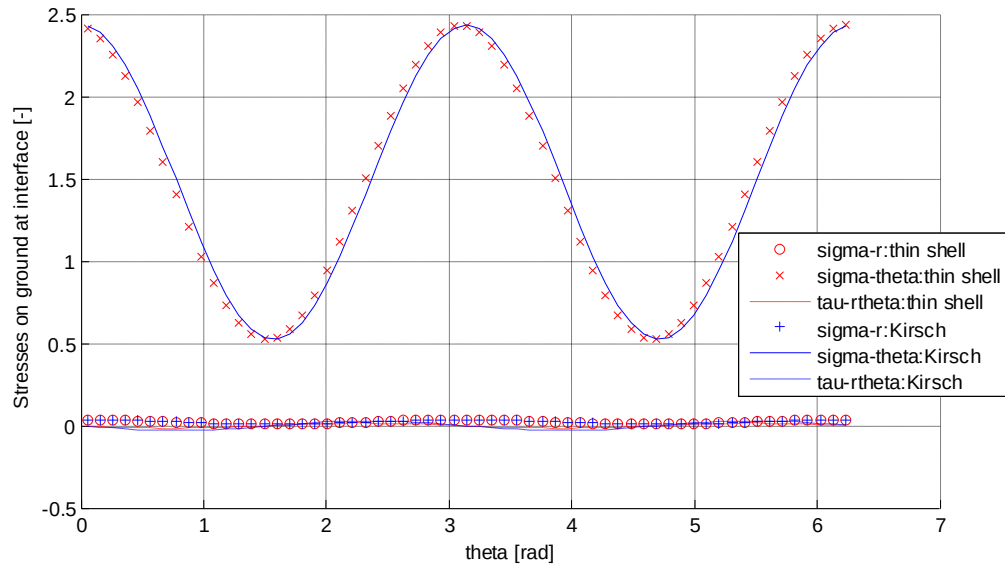
Ο πρώτος όρος εκφράζει την επίδραση του πάχους της υποστύλωσης, ο δεύτερος τον λόγο ακαμψιών του κελύφους προς το πέτρωμα και ο τρίτος το λόγο των επί τόπου κυρίων τάσεων που δρουν μακριά από τη σήραγγα. Κρατώντας σταθερό το λόγο $\frac{\nu_1}{\nu} = 1$, σταθερές τις τιμές $h=0.03$ ($<1/20$ που απαιτεί η θεωρία), και $N=30$ τα σημεία ολοκλήρωσης και συντοπισμού, καθώς και τον λόγο των οριζόντιων προς τις κατακόρυφες γεωστατικές τάσεις $\sigma_1/\sigma_2 = 1/2$, και μεταβάλλοντας το $\frac{E_1}{E}$, θα βρούμε πως μεταβάλλονται οι τάσεις $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ του τανυστή τάσης πάνω στα συντοπικά σημεία κατά μήκος της επαφής του κυκλικού ανοίγματος με το κέλυφος. Σε όλες τις περιπτώσεις οι τάσεις αδιαστατοποιούνται με την διάιρεση τους με την κατακόρυφη τάση που λαμβάνεται ίση με 1 MPa ενώ η σύμβαση προσήμου είναι ότι οι θλιπτικές τάσεις είναι θετικές ποσότητες.

Καταρχάς κατωτέρω στο Σχ. 3.1 συγκρίνεται η αριθμητική λύση των τάσεων με τη λύση του Kirsch για την περίπτωση που $E_1/E \rightarrow 0$ (το ίδιο θα μπορούσε να βρεθεί και για $h/R \rightarrow 0$ και πεπερασμένο λόγο πάχους της επένδυσης σε σχέση με τη διάμετρο της σήραγγας).



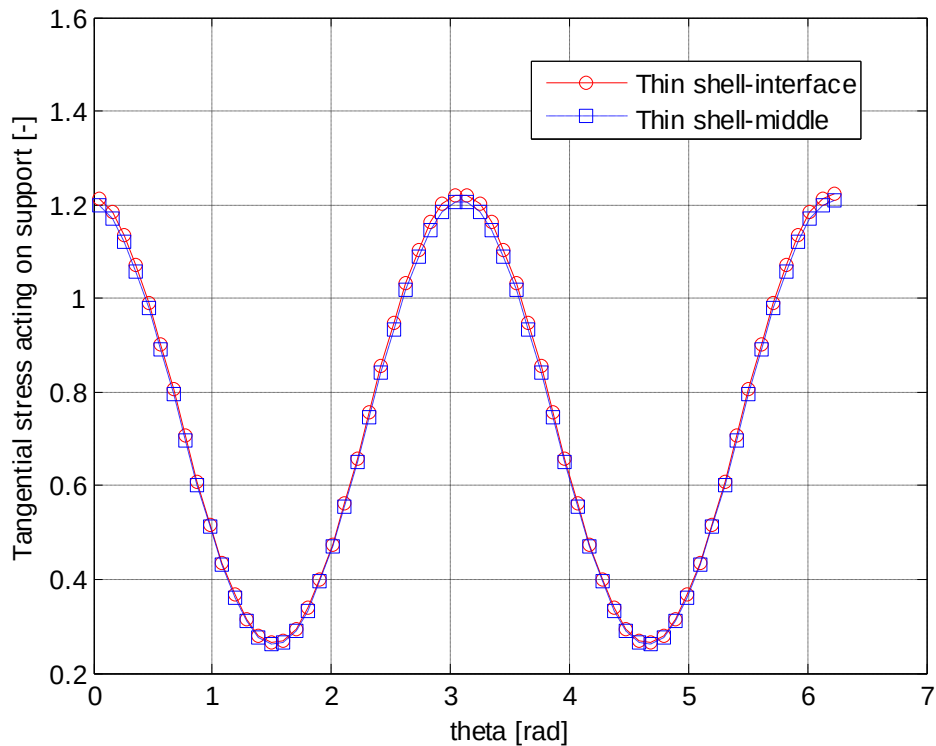
Σχ. 3.1. Σύγκριση της αριθμητικής με την αναλυτική λύση για $N=30$ συντοπικά σημεία.

Στη συνέχεια το Σχ. 3.2 δείχνει την κατανομή των τάσεων που δρουν στο πέτρωμα γύρω από τη σήραγγα ενώ το Σχ. 3.3 την διανομή των εφαπτομενικών τάσεων που δρουν στην ουδέτερη (ενδιάμεση) και την εξωτερική επιφάνεια του κελύφους για $\frac{E_1}{E} = \frac{1}{2}$ και $\frac{h}{R} = \frac{0.03}{1}$.



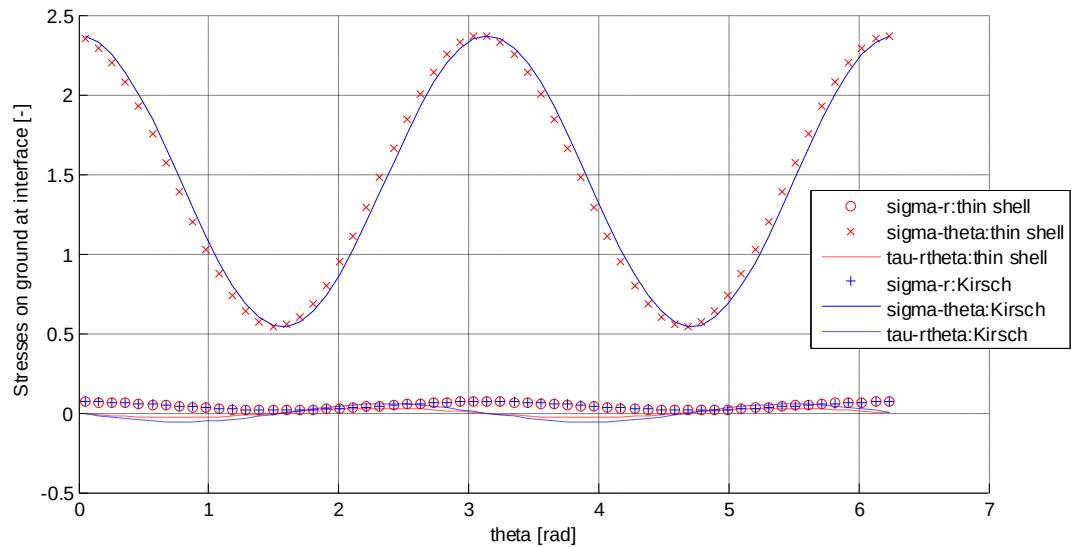
Σχ 3.2 Διανομή των τάσεων που δρουν στο πέτρωμα στο σύνορο της κυκλικής

σήραγγας με $\frac{E_1}{E} = \frac{1}{2}$ και $\frac{h}{R} = \frac{0.03}{1}$



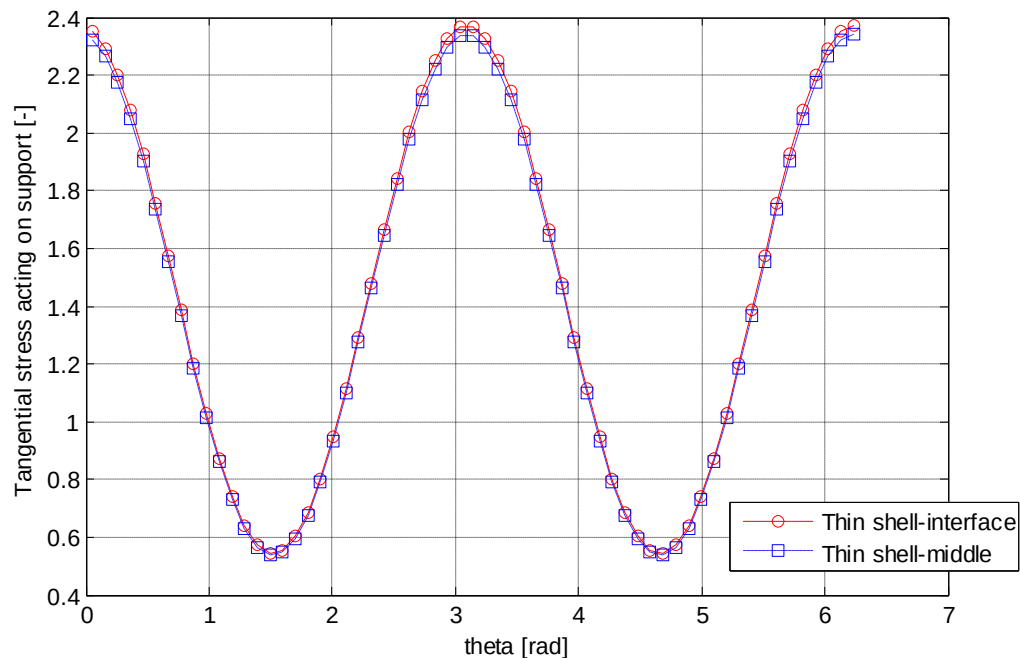
Σχ 3.3 Διανομή της εφαπτομενικής τάσης που δρά στο κέλυφος αφενός στο σύνορο του και αφετέρου στην γραμμή συμμετρίας του (ουδέτερο άξονα) με $\frac{E_1}{E} = \frac{1}{2}$ και $\frac{h}{R} = \frac{0.03}{1}$.

Για την περίπτωση όπου $\frac{E_1}{E} = \frac{1}{2}$ (υλικό υποστύλωσης έχει το ίδιο μέτρο ελαστικότητας με το περιβάλλον πέτρωμα) , λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα των Σχ. 3.4 και 3.5.



Σχ 3.4 Διανομή των τάσεων που δρουν στο πέτρωμα στο σύνορο της κυκλικής

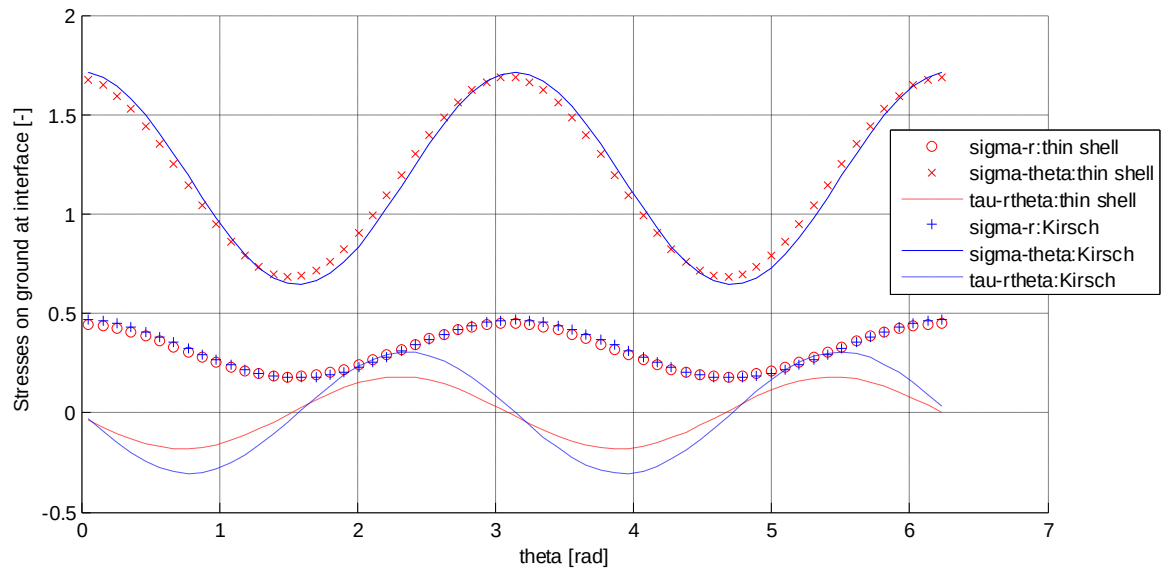
σήραγγας με $\frac{E_1}{E} = 1$ και $\frac{h}{R} = \frac{0.03}{1}$



Σχ 3.5 Διανομή εφαπτομενικής τάσης που δρά αφενός στο συνορό του και αφετέρου

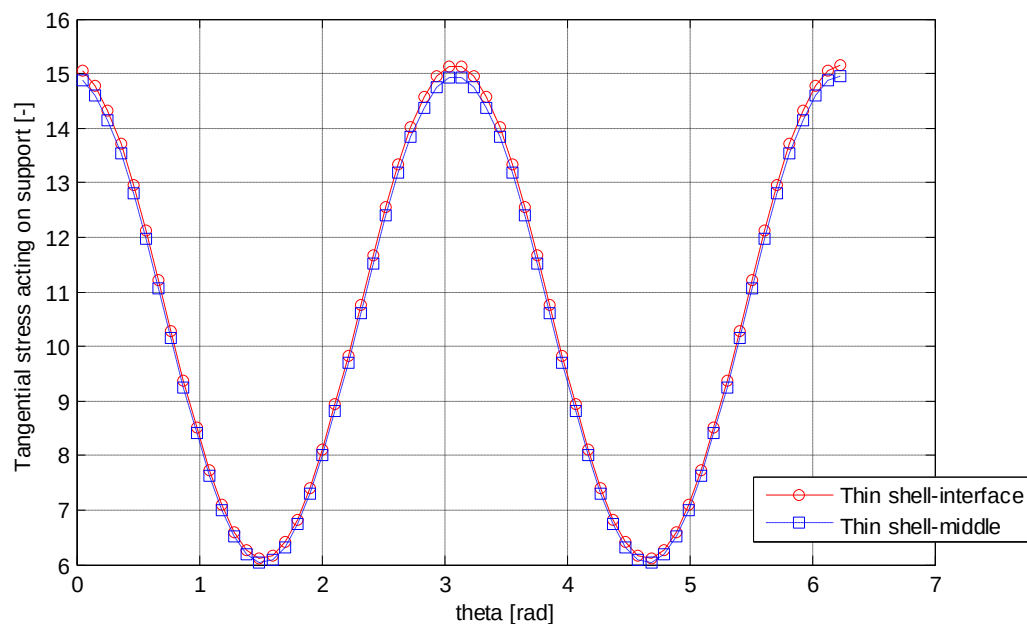
στη γραμμή συμμετρίας του με $\frac{E_1}{E} = 1$ και $\frac{h}{R} = \frac{0.03}{1}$

Για την περίπτωση όπου $\frac{E_1}{E} = 10$ δηλαδή της επένδυσης σχετικά μεγάλης δυστροπίας οι κατανομές των τάσεων γύρω από την σήραγγα φαίνονται στα Σχ. 3.6 και 3.7 για το πέτρωμα και το κέλυφος, αντίστοιχα.



Σχ 3.6 Διανομή των τάσεων που δρούν στο πέτρωμα στο σύνορο της κυκλικής

$$\text{σήραγγας με } \frac{E_1}{E} = 10 \text{ και } \frac{h}{R} = \frac{0.03}{1}$$

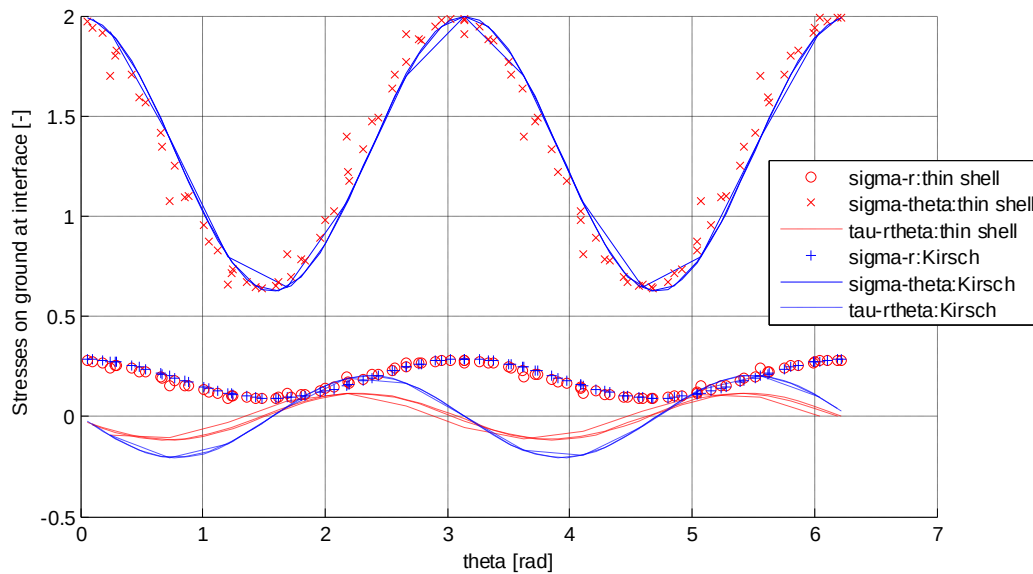


Σχ 3.7 Διανομή εφαπτομενικής τάσης που δρά αφενός στο συνορό του και αφετέρου

$$\text{στη γραμμή συμμετρίας του με } \frac{E_1}{E} = 10 \text{ και } \frac{h}{R} = \frac{0.03}{1}.$$

Τα παραπάνω γραφήματα εξήχθησαν κρατώντας σταθερά τα σημεία ολοκλήρωσης $N=30$. Αν αυξήσουμε τα σημεία ολοκλήρωσης από $N=6$, 16 , και 26 σε

$N=30$ με, $\frac{E_1}{E}=5$ λαμβάνουμε το Σχ. 3.8 που αφορά την κατανομή των τάσεων στο πέτρωμα ακριβώς πάνω στο σύνορο της σήραγγας.



Σχ. 3.8. Κατανομή των τάσεων που δρουν στο πέτρωμα στο σύνορο της σήραγγας για $N=6, 16$ και 26 .

Από τα ανωτέρω διαγράμματα μπορούν να προκύψουν τα ακόλουθα συμπεράσματα :

- 1) Για πολύ μικρή δυστροπία του κελύφους η αριθμητική λύση τείνει στην κλειστή λύση του Kirsch (Σχ. 3.1).
- 2) Για μικρό μέτρο ελαστικότητας (δυστροπίας) της επένδυσης οι τάσεις γύρω από τη σήραγγα μεταβάλλονται λίγο (Σχ. 3.2) και στο κέλυφος δρά τάση συγκρίσιμη με την κατακόρυφη μακρυνή τάση (Σχ. 3.3).
- 3) Όσο αυξάνει η δυστροπία της επένδυσης τόσο μειώνεται η εφαπτομενική τάση που δρά στο πέτρωμα και αντίστοιχα αυξάνει η εφαπτομενική τάση που παραλαμβάνει η επένδυση.
- 4) Η εφαπτομενική τάση που δρά στην ουδέτερη (μέση) επιφάνεια του κελύφους είναι ίση με την τάση που δρα στο σύνορο της επαφής εφόσον αγνοήσαμε την συμμετοχή των καμπτικών ροπών (λ.χ. βλ. Σχ. 3.3, 3.5 και 3.7).
- 5) Η αριθμητική λύση συγκλίνει γρήγορα στην αναλυτική λύση όπως φαίνεται στο Σχ. 3.8.

Τέλος, στον κώδικα Matlab® *ring4membrane.m* έχει προστεθεί εντολή όπως φαίνεται στο Σχ. 3.9 εξαγωγής των αποτελεσμάτων του κώδικα σε μορφή αρχείου .txt για περαιτέρω επεξεργασία στο πρόγραμμα Excel®.

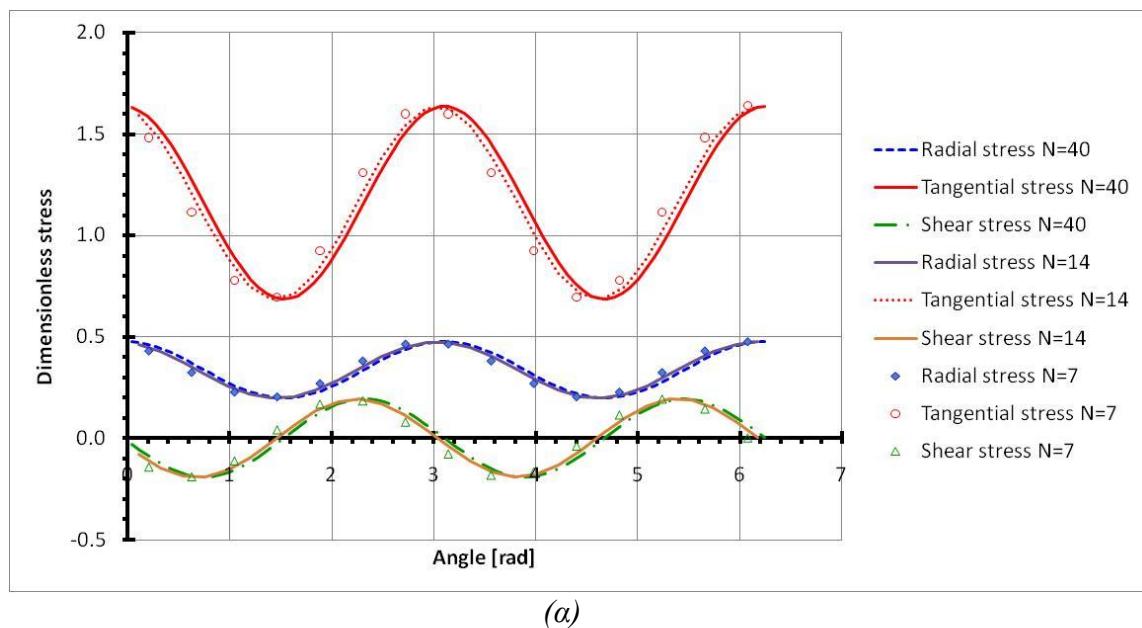
```

421
422 - figure(6);
423 - axis equal
424 - %surf(opxo,opyo,qtheta);
425 - title('Distribution of shear stress')
426 - colormap('default')
427 - colorbar
428 - view(2)
429 - shading interp
430 - grid on;
431
432 - if nargin==0
433 - D=[thetac(:),x1(:),x2(:),x3(:),sigr(:),sigtheta(:),taurtheta(:),Tcap3(:),sthetaring(:)];
434 - save stresses_shell.txt D -ascii
435 - clear thetac x1 x2 x3 sigr sigtheta taurtheta Tcap3 sthetaring; %save at excel file
436 - end

```

Σχ. 3.9. Αποψη των τελευταίων γραμμών του κώδικα που φαίνονται οι εντολές αποθήκευσης των αποτελεσμάτων σε αρχείο .txt.

Λόγου χάριν στο παρακάτω Σχ. 3.10 φαίνεται η σύγκλιση της αριθμητικής λύσης των τάσεων που δρουν στο πέτρωμα στην επαφή με το κέλυφος για αριθμό σημείων ολοκλήρωσης $N=7, 14$ και 40 . Το διάγραμμα αυτό έγινε στο Excel® με βάση την εξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων σε μορφή .txt όπως περιγράφηκε παραπάνω.



	ring4(40,10)							
	h/R	0.01666667						
	v0	0.3						
	v	0.3						
	K	0.5						
	theta [rad]	sigma-r_shell	sigma-theta_shell	tau_shell	sigma-r_Savin	sigma-theta_Savin	tau_Savin	hoop stress_shell
1	3.88E-02	4.76E-01	1.63E+00	-2.97E-02	4.98E-01	1.66E+00	-2.50E-02	1.45E+01
2	1.16E-01	4.71E-01	1.61E+00	-5.87E-02	4.95E-01	1.65E+00	-7.44E-02	1.43E+01
3	1.94E-01	4.63E-01	1.59E+00	-8.63E-02	4.87E-01	1.62E+00	-1.22E-01	1.41E+01
4	2.71E-01	4.52E-01	1.55E+00	-1.12E-01	4.77E-01	1.59E+00	-1.67E-01	1.37E+01
5	3.49E-01	4.38E-01	1.50E+00	-1.35E-01	4.63E-01	1.54E+00	-2.07E-01	1.33E+01
6	4.27E-01	4.22E-01	1.45E+00	-1.54E-01	4.46E-01	1.49E+00	-2.43E-01	1.28E+01
7	5.04E-01	4.03E-01	1.38E+00	-1.70E-01	4.27E-01	1.42E+00	-2.73E-01	1.23E+01
8	5.82E-01	3.84E-01	1.32E+00	-1.82E-01	4.06E-01	1.36E+00	-2.96E-01	1.17E+01
9	6.59E-01	3.63E-01	1.24E+00	-1.89E-01	3.84E-01	1.28E+00	-3.12E-01	1.10E+01

(β)

Σχ. 3.10. Κατανομή των τάσεων που δρουν στο πέτρωμα στο σύνορο της σήραγγας για $N=7, 14$ και 40 , με $h/R=0.01666667$ και $E_1/E = 5$ (α) διάγραμμα και (β) πίνακας Excel®.

.

Όλες οι παραπάνω λύσεις εμπεριέχουν την παραδοχή ότι η ολόσωμη υποσύλωση τοποθετείται ταυτόχρονα με την διάνοιξη του μετώπου, δηλαδή δεν μεσολαβεί κάποιο χρονικό διάστημα από την διάνοιξη του μετώπου έως την τοποθέτηση της υποσύλωσης που σημαίνει ότι ο συντελεστής χαλάρωσης είναι $\lambda=0$. Από ότι όμως είδαμε στο Κεφ. 1 ο συντελεστής αυτός έχει ήδη την τιμή $\lambda=0.28$ επί του μετώπου. Σύμφωνα με την «Αρχή της Υπέρθωσης» για γραμμικά ελαστικά προβλήματα μπορεί να δειχθεί ότι για την περίπτωση που $\lambda \neq 0$ τότε οι τάσεις που βρήκαμε για το πέτρωμα και το κέλυφος πρέπει να πολλαπλασιασθούν με τον όρο $1-\lambda$.

Κεφαλαιο 4^ο : Συμπεράσματα-Προτάσεις

Οι αναλυτικές λύσεις είναι πολύ χρήσιμες στην επίλυση προβλημάτων της Γεωμηχανικής. Παρόλη την δυσκολία που παρουσιάζει η κατασκευή τους, λόγω κυρίως του όγκου και της φύσης των εξισώσεων, είναι κατόπιν πολύ γρήγορες στην εφαρμογή τους και παρέχουν μεγάλη ακρίβεια. Ειδικότερα σήμερα με την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών είναι κατά πολύ ευκολότερο να επιλυθούν και να προγραμματιστούν οι αναλυτικές εξισώσεις. Δυστυχώς, όμως, οι αναλυτικές λύσεις που έχουν κατασκευστεί μέχρι σήμερα βασίζονται σε πολλές παραδοχές και εξιδανικεύουν το πρόβλημα με αποτέλεσμα το τελευταίο να απέχει αρκετά από την πραγματικότητα. Παρόλαυτά, το γεγονός αυτό δεν μειώνει την αξία των λύσεων αυτών, καθώς είναι ένα πολύ καλό εργαλείο για την γρήγορη και εύκολη εύρεση της τάξης μεγέθους των τάσεων και μετατοπίσεων, που αναπτύσσονται γύρω από μια υπόγεια εκσκαφή αλλά και για την εκτίμηση της σχετικής σημασίας των διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος. Επιπλέον οι αναλυτικές λύσεις είναι πολύ χρήσιμες για την βαθμονόμηση και έλεγχο των ήδη υπάρχοντων αλλά και των υπό κατασκευή αριθμητικών αλγορίθμων πεπερασμένων στοιχείων, πεπερασμένων διαφορών και συνοριακών στοιχείων.

Επειδή οι μέθοδοι των πεπερασμένων στοιχείων αλλά και των συνοριακών στοιχείων που έχουν αναπτυχθεί παρουσιάζουν λίγο έως πολύ κάποια σφάλματα, ειδικά σε «ιδιόμορφες» περιοχές όπως π.χ. γωνίες, την λύση των προβλημάτων αυτών θα μπορούσαν να δώσουν οι αναλυτικές λύσεις. Επίσης μπορούν να βοηθήσουν τον φοιτητή, ερευνητή ή τον μελετητή να κατανοήσει καλύτερα τα αποτελέσματα που παίρνει από τα διάφορα εμπορικά υπολογιστικά προγράμματα.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση είδαμε ότι η μέθοδος συγκλίνει, θεωρήσαμε ότι τα δύο σώματα (βραχύμαζα και λεπτό κέλυφος) είναι εντελώς ‘κολλημένα’ σαν ένα σώμα (δηλαδή έχουμε άπειρη τριβή). Επόμενο στάδιο, είναι η μελέτη όταν η τριβή είναι μηδέν, και μπορεί το κέλυφος να ολισθήσει σε σχέση με το πέτρωμα, οπότε υπάρχει διαφοροποίηση του προβλήματος και της συμπεριφοράς της βραχύμαζας και του λεπτού κελύφους.

Βιβλιογραφία

- Bardzokas, D. and Exadaktylos, G. (1995). Plane contact of a cylindrical opening stiffened by a thin shell. *Engineering Transactions*, 43 (1-2), pp. 27-44.
- Chern JC, Shiao FY, Yu CW. An empirical safety criterion for tunnel construction. In: Proc. Regional Symposium on Sedimentary Rock Engineering. Nov 20±22 1998, Taipei, Taiwan. Balkema, 1998. p. 222-227.
- Ivanov, V.V. 1976. *The Theory of Approximate Methods and their Application to the Numerical Solution of Singular Integral Equations*, Noordhoff International Publishing, Leyden (The Netherlands).
- Kirsch G. Die Theorie der Elastizitat und die Beduerfnisse der Festigkeitslehre. *Z Ver Dtsch Ing* 1898; 42:797–807.
- Lame G. Lecons sur la theorie de l' elasticite . Paris: Gauthier-Villars;1852.
- Muskhelishvili N.I. 1963. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, P. Noordhoff Ltd, Groningen (The Netherlands).
- Novozhilov, V. V. 1964. *Thin Shell Theory*, P. Noordhoff Ltd, Groningen (The Netherlands), 2nd augmented and revised edition.
- Timoshenko S. and Goodier G.N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company Inc., 1951, p.66.
- Εξαδάκτυλος Γ. και Σταυροπούλου Μ. «Σχεδιασμός και Μηχανική των Σηράγγων», Διδακτικές Σημειώσεις, Π.Κ. (2006).