



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

**ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΦΡΑΚΤΑΛ: ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ
ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΔΗΜΟΣΘΕΝΗΣ ΕΛΛΗΝΑΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΧΑΝΙΑ ΚΡΗΤΗΣ

2010

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

«... Η μαγεία των μαθηματικών έγκειται στην δημιουργικότητα τους, στην σύλληψη νέων εννοιών, στην αλλαγή οπτικής γωνίας, όχι στην μηχανική αναπαραγωγή κανόνων και ιδεών. Όταν επεξεργάζομαι στον υπολογιστή μου μια καινούρια ιδέα, σταματώ τις συνηθισμένες δραστηριότητες, δεν πληρώνω τους λογαριασμούς μου, ακυρώνω τα ραντεβού μου με τους γιατρούς. Για μένα τα μαθηματικά είναι η πύλη για την φιλοσοφία, βυθίζομαι στα θεμέλια τους, νιώθω τις ιδέες τους να με αποπλανούν, παθιάζομαι με την σαφήνεια και την οξύτητα τους, με συνεπαίρνει ένας παράλογος αισθησιασμός, βιώνω την απόλυτη απόλαυση... Είμαι μαθηματικός και το χαίρομαι! Ωστόσο, υπάρχουν και κάποιοι που πιστεύουν ότι κάτι δεν πάει καλά μ' εμένα...»

Gregory Chaitin

«Μετά - μαθηματικά ,Τα μυστικά του αριθμού Ω»

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ τους γονείς μου για τα εφόδια και την στήριξη που μου προσέφεραν και συνεχίζουν απτόητοι να μου προσφέρουν τόσα χρόνια. Η παρουσία τους ήταν καταλυτική για να φτάσω σε αυτό το σημείο. Ίσως ένα ευχαριστώ για αυτούς να είναι αρκετά λίγο.

Ευχαριστώ τους καθηγητές και το διοικητικό προσωπικό του γενικού τμήματος για την ευκαιρία που μου έδωσε να υλοποιήσω ένα όνειρό μου.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον κύριο Έλληνα που μου προσέφερε απλόχερα τον λύχνο της γνώσης του για να φωτίζω τον δρόμο μου. Όποτε τον χρειάστηκα ήταν εκεί και χωρίς την δικιά του συμβολή η εκπόνηση αυτής της εργασίας θα αποτελούσε όνειρο θερινής νυκτός. Η μετάβαση μου από τον ερασιτεχνισμό στον επαγγελματισμό ήταν αρκετά δύσκολα να επιτευχθεί και χωρίς την παρουσία μιας ισχυρής προσωπικότητας όπως αυτή του κύριου Έλληνα μάλλον δεν θα μπορούσε να υλοποιηθεί. Αισθάνομαι ότι η συνεργασία μου μαζί του μου άφησε μόνο οφέλη.

ABSTRACT

In this Master Degree Thesis we study Fractal structures that produced by retrospective of relations and we examine the fractal geometry of them by calculating the asymptotic fractional dimension. Developed by an algebraic formalism based on displacement and scaling operators that generate a stepping manner recurrence relations that determine the density functions of one dimensional Cantor fractal type. The solution of recursive relations by the method of Fourier transformation, allows the classification of types of mathematical fractal aggregates back to them. In the asymptotic limit of recursive relations calculated fractal dimension of one-dimensional fractal aggregates obtained. The whole issue of recursive fractal placed and developed in a broader mathematical context (measure theory, fractal geometry) and the wider natural or technological context (light scattering from fractal structures, technological applications).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά ανέκαθεν υπήρχαν από την αρχή της δημιουργίας του κόσμου που ζούμε. Η ανθρωπότητα προσπαθούσε να κατανοήσει την φύση για την βελτίωση των συνθηκών διαβίωσής της. Μέσα από πάμπολλες προσπάθειες κατάφερε μέσω της δημιουργίας των φράκταλ να καταλάβει καλύτερα την φύση.

Από τα πρώιμα χρόνια του προπτυχιακού μου στο τμήμα μαθηματικών του Α.Π.Θ. είχα δείξει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για να μάθω τον κόσμο των φράκταλ. Οι τότε καθηγητές μου, μου έδειξαν τα κατάλληλα μονοπάτια γνώσης να βαδίσω. Στο μεταπτυχιακό βρήκα την ευκαιρία μου να εμβαθύνω και να ασχοληθώ πιο επαγγελματικά. Η έρευνα πάνω στον συγκεκριμένο τομέα των μαθηματικών έγινε για μένα μια έμμονη ιδέα. Έτσι λοιπόν κατέληξα στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή η οποία αποτελεί ένα δείγμα από τους καρπούς της γνώσης που απέκτησα.

Στο κεφάλαιο 1 ορίζουμε τις δυσπρόσιτες έννοιες όπως φράκταλ και φράκταλ διάσταση οι οποίες στην ελληνική ορολογία δεν έχουν ακόμα οριστεί επαρκώς σε θεωρητικό επίπεδο.

Στο κεφάλαιο 2 αναφερόμαστε στα μαθηματικά που μας χρειάζονται για να ορίσουμε την φράκταλ διάσταση που μας χρειάζεται έτσι ώστε να κατανοήσουμε το φράκταλ αντικείμενο μας.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε και δημιουργούμε όλα τα χρήσιμα εργαλεία του φράκταλ αντικειμένου μέσω παραδειγμάτων.

Στο κεφάλαιο 4 ασχολούμαστε με την φράκταλ διάσταση και την ένταση κάποιων φράκταλ συσσωματωμάτων.

Οι σχέσεις που έχουν αριθμό αναφέρονται μόνο για το κεφάλαιο στο οποίο βρίσκεται η σχέση. Ο αριθμός σε άλλο κεφάλαιο αναφέρεται σε άλλη σχέση.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	3
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	5
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΓΝΩΡΙΜΙΑ ΜΕ ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΦΡΑΚΤΑΛ ΜΕ ΤΑ ΜΑΤΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ.</u>	
1.1 Τι είναι φράκταλ και τι διάσταση φράκταλ;.....	12
1.2 Τι είναι όμως αυτό-ομοιότητα;.....	22
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 1 ^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....	29
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΦΡΑΚΤΑΛ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ.</u>	
Εισαγωγή.....	33
2.1 Μέτρο Lebesgue, Μέτρο Hausdorff.....	33
2.2 Διάσταση Hausdorff – Besicovitch	36
2.3 Διάσταση Ομοιότητας.....	37
2.4 Διάσταση Dimension Box.....	38
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 2 ^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....	44
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΦΡΑΚΤΑΛ ΣΥΣΣΩΜΑΤΩΜΑΤΩΝ.</u>	
Εισαγωγή.....	47
3.0 Κατασκευή του φράκταλ αντικειμένου μας.....	50
3.1.1 Η χωρική διάσταση.....	51
3.1.2 Το Πλήθος των σημείων.....	52
3.1.3 Η Συμμετρικότητα.....	55
3.1.4 Τρόπος Δημιουργίας.....	58
3.1.5 Τρόπος Κατασκευής.....	59

3.1.6 Ανακλιμάκωση, μετατόπιση ή και τα δυο.....	60
3.2 Αλγεβρικός φορμαλισμός των τελεστών.....	61
3.2.0 Τελεστές και εσωτερικό γινόμενο.....	61
3.2.1 Συζυγής τελεστής (Adjoint Operator).....	64
3.2.2 Είδη τελεστών.....	66
3.2.3 Ορισμός και δημιουργία τελεστών.....	68
3.2.4 Το πρόβλημα του τελεστή της ανακλιμάκωσης από την σκοπιά της Φυσικής	73
3.2.5 Η Δημιουργία του τελεστή για την κατασκευή του Φράκταλ Συσσωματώματος.....	75
3.2.6 Εσωτερικά γινόμενα και συζυγείς τελεστές.....	78
3.2.7 Δημιουργία ενιαίου τελεστή.....	82
3.2.8 Περιπτώσεις τελεστών.....	88
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 3 ^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....	103
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΦΡΑΚΤΑΛ ΣΥΣΣΩΜΑΤΩΜΑΤΑ.</u>	
Εισαγωγή.....	106
4.1 Η Περίπτωση της Ομοιόμορφης κατανομής κυψελίδας.....	106
4.1.1 Εισαγωγή στην κατασκευή της Ομοιόμορφης κατανομής κυψελίδας	106
4.1.2 Κλασματική διάσταση συσσωματώματος με ομοιόμορφη επιμήκυνση.....	108
4.1.3 Ανάλυση της Ομοιόμορφης κατανομής κυψελίδας (ομοιόμορφης σημειακής πυκνότητας) μέσω συνάρτησης έντασης.....	116
4.2 Η Φυσική υπόσταση του προβλήματος.....	137

4.3 Παραδείγματα από διάφορα Φράκταλ συσσωματώματα.....	143
4.3.1 Το Φράκταλ συσσωμάτωμα του συνόλου Καντόρ με ανακλιμάκωση και μετατόπιση	143
4.3.2 Το Φράκταλ συσσωμάτωμα του συνόλου Καντόρ με ανακλιμάκωση, μετατόπιση και γεννήτορα. Διερεύνηση της συνάρτησης έντασης.....	158
4.3.3 Επίλογος.....	166
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 4 ^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....	168
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	171
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ.....	184
ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	186

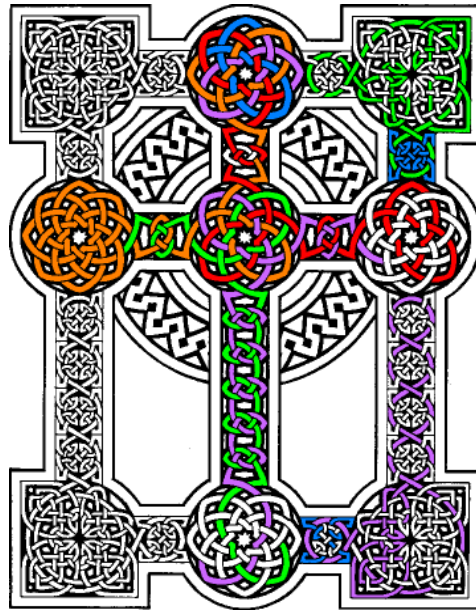
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΓΝΩΡΙΜΙΑ ΜΕ ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ
ΤΩΝ ΦΡΑΚΤΑΛ ΜΕ ΤΑ ΜΑΤΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

1.1 Τι είναι φράκταλ και τι φράκταλ διάσταση;

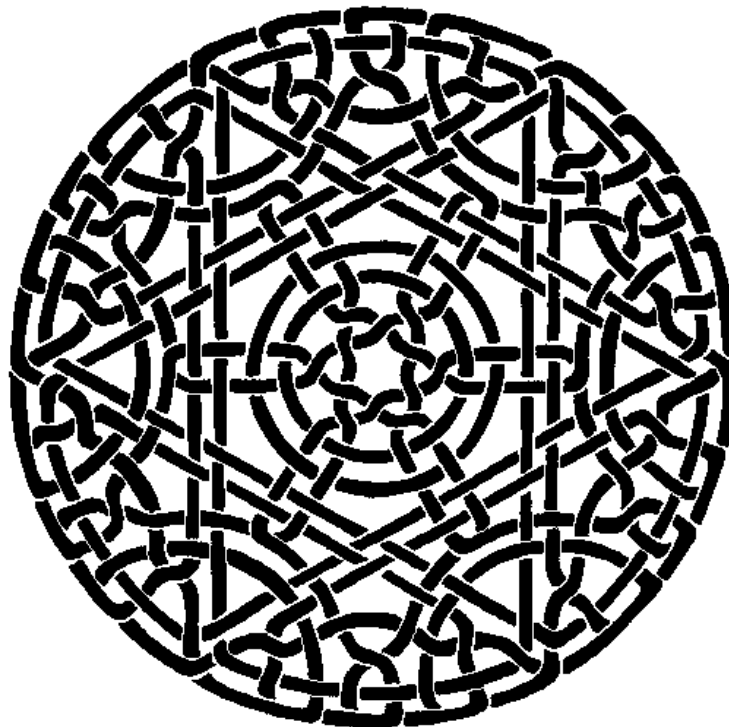
Η Μορφοκλασματική Γεωμετρία (fractal geometry) αποτελεί ένα κλάδο των μαθηματικών, η ανάπτυξη του οποίου έγινε δυνατή χάρη στην συνεχώς αναπτυσσόμενη επιστήμη των υπολογιστών. Στόχος της ήταν η ακριβέστερη περιγραφή των περισσότερων φυσικών αντικειμένων που μας περιβάλλουν με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια δεδομένου του ότι η κλασσική Ευκλείδεια Γεωμετρία αδυνατεί να προσφέρει. Η δυνατότητα που υπάρχει σήμερα χάρη στους Η/Υ, δηλαδή η εκτέλεση σε ελάχιστο χρόνο ενός τεράστιου αριθμού μαθηματικών υπολογισμών, κατέστησε εφικτό τον καθορισμό μιας νέας σταθεράς, της Μορφοκλασματικής - Φράκταλ Διάστασης (Fractal Dimension FD).

Τα φράκταλ σαν έννοια βρίσκονται λίγο εκτός πραγματικότητας. Από πρώτης απόψεως σαν λέξη, προκαλεί φόβο, μα συνάμα δημιουργεί και περιέργεια στους θαρραλέους εξερευνητές της γνώσης. Τα φράκταλ όπως θα πούμε και παρακάτω ορίζονται γύρω στο 1970. Παρόλα αυτά υπήρχαν ανέκαθεν μέσα στη φύση και χαρακτηριζόταν από την τυχειότητα και την αταξία όπως ορίζονται αυτά από την θεωρία του Χάους [1]. Τα φράκταλ πολλές φορές υποσκιάζονται από τις πολύ όμορφες ζωγραφιές που πηγάζουν μέσα από αυτά. Αυτό το χαρακτηριστικό των φράκταλ το συναντάμε στην ιστορία της ανθρωπότητας και πιο συγκεκριμένα στην αισθητική των βόρειων ευρωπαϊκών πολιτισμών λίγο πριν την περίοδο της αναγέννησης. Συνήθως με τις ζωγραφιές αυτές στόλιζαν τους θρησκευτικούς χώρους [2,3],



Εικόνα 1: Σε κέλτικη εκκλησία του 13ου αιώνα

καθώς επίσης και σε πλούσια σπίτια. Παρόλο που σαν επιστήμη δεν είχε ακόμα ανακαλυφθεί παρατηρούμε ότι η ανθρωπότητα χρησιμοποιούσε διάφορα έργα άθελά της μόνο και μόνο για τη διακόσμηση χώρων[4].



Εικόνα 2: Στο δάπεδο πλούσιου σπιτιού στο βόρειο Λονδίνο.

Βλέπουμε λοιπόν ότι τα φράκταλ υπήρχαν στη ζωή του ανθρώπου, δίχως ο ίδιος να το γνωρίζει. Παρόλη την άγνοια που είχε για την

ύπαρξη τους είχε αντιληφθεί από πολύ νωρίς την αισθητική ομορφιά τους.

Η Γεωμετρία των φράκταλ προέκυψε από μια προσεκτική μελέτη της φύσης. Πολλά σχήματα στη φύση είναι τόσο ακανόνιστα, η μορφή τους είναι τόσο ανώμαλη, που, αν τα συγκρίνουμε με εκείνα που μελετά η Ευκλείδειος Γεωμετρία, θα παρατηρήσουμε ότι η φύση παρουσιάζει μια εικόνα πολύ πιο πολύπλοκη και διαφορετικής υφής [5,6]. Για πληρέστερη κατανόηση αναφέρεται ότι ένα σύννεφο δεν είναι σφαίρα, ένα βουνό δεν είναι κώνος, οι θαλάσσιες ακτές μιας χώρας δεν είναι τόξα κύκλων, ούτε και η τροχιά μιας αστραπής είναι ευθεία γραμμή [7,8].



Εικόνα 3: Το καθημερινό φράκταλ μπρόκολο

Η ύπαρξη των πολύπλοκων αυτών σχημάτων στη φύση, τα οποία η Ευκλείδεια Γεωμετρία παραλείπει να εξετάσει ως στερούμενα συγκεκριμένης μορφής, υπήρξε η αιτία που οδήγησε στη διερεύνηση της μορφολογίας του «άμορφου» [9]. Έτσι η Γεωμετρία των φράκταλ και η χρήση πρώτα από τον Benoit Mandelbrot [5], ως μονάδας μέτρησης της FD (fractal dimension), ασχολείται με τη μελέτη μιας μεγάλης κατηγορίας ανωμάτων, ακανόνιστων αντικειμένων [10]. Η λέξη φράκταλ προέρχεται από το λατινικό επίθετο fractus που σημαίνει ακανόνιστο, σπασμένο κομμάτι, θρύμμα.

Σε κάθε σημείο του ευκλείδειου χώρου (του φυσικού χώρου που μας περιβάλλει) αντιστοιχεί ένας αριθμός ο οποίος καλείται “τοπολογική διάσταση” του συνόλου. Έτσι, για ένα σημείο η τοπολογική διάσταση είναι μηδέν, για μια ευθεία ένα, για ένα κανονικό πολύγωνο (επιφάνεια) δύο και για ένα κανονικό στερεό τρία. Εκτός από την τοπολογική διάσταση σε κάθε δομή αντιστοιχεί και η μορφοκλασματική διάσταση των οποίων οι τιμές για το σημείο, την ευθεία και ένα κανονικό στερεό (π.χ. σφαίρα) είναι ίδιες. Στις ανώμαλες και ακανόνιστες γραμμές ή επιφάνειες όμως η FD είναι διάφορη του ακεραίου αριθμού. Η διάσταση αυτή είναι ένας κλασματικός αριθμός ο οποίος βρίσκεται μεταξύ δύο ακεραίων [11]. Μια δομή ονομάζεται φράκταλ όταν έχει τιμή διαφορετική από την τοπολογική της διάσταση. Έτσι π.χ. μια γραμμή, η οποία διαφέρει τόσο από την ευθεία όσο και από τόξο κύκλου, έχει διάσταση περιλαμβανόμενη μεταξύ του ενός και του δύο και τόσο πλησιάζει το δύο, όσο πιο πολύ διαφέρει της ευθείας. Σε ένα δισδιάστατο σύστημα μέτρησης η FD θα είναι μεταξύ του ένα και του δύο ενώ σε ένα τρισδιάστατο μεταξύ του δύο και του τρία.

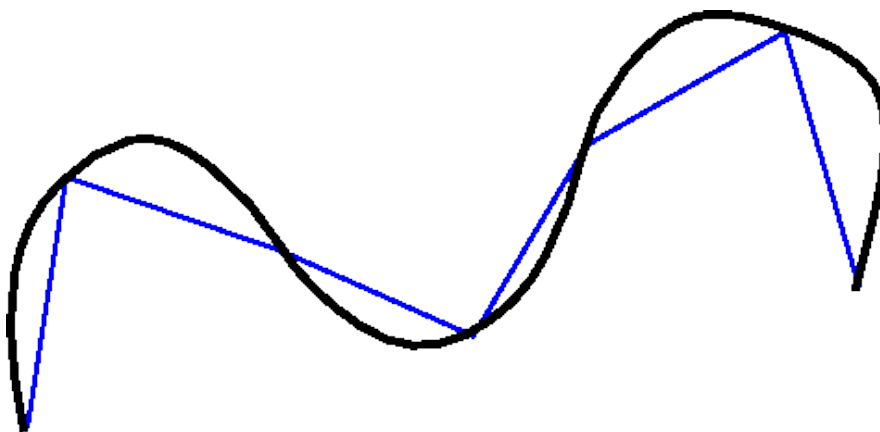
Η τοπολογική διάσταση για να την ορίσουμε λίγο πιο μαθηματικά είναι πάντα ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Για να λάβει μια λεπτότερη μέτρηση της πολυπλοκότητας ενός χώρου, είναι ουσιαστικό να υπάρξει ένας τρόπος “να μετράμε πράγματα”. Επομένως, θα υποθέσουμε ότι ο χώρος μας X είναι ένας μετρικός χώρος με μια μετρική d . Κατά συνέπεια, προσπαθούμε να ενώσουμε με έναν δρόμο την χώρα της τοπολογίας με αυτήν της γεωμετρίας. Οπότε γίνεται αντιληπτό πόσο ισχυρό εργαλείο είναι η FD [13].

Η μέτρηση πραγμάτων διαδραματίζει έναν μεγάλο ρόλο στον λογισμό και όχι μόνο. Μαθαίνουμε πώς να υπολογίζουμε τα μήκη των καμπυλών, τα εμβαδά των περιοχών και τους όγκους των στερεών. Αξίζει λοιπόν να δούμε πώς γίνεται, πριν αντιμετωπίσουμε το θέμα των φράκταλ. Αρχίζουμε με απλούς γεωμετρικούς αριθμούς που ξέρουμε πώς να μετρήσουμε. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος των σημείων $X_1 = (x_1, y_1)$ και $X_2 = (x_2, y_2)$ είναι:

$$d(X_1, X_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1)$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Πυθαγόρα, το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι το γινόμενο του μήκους επί το πλάτος του. Για ένα γενικότερο

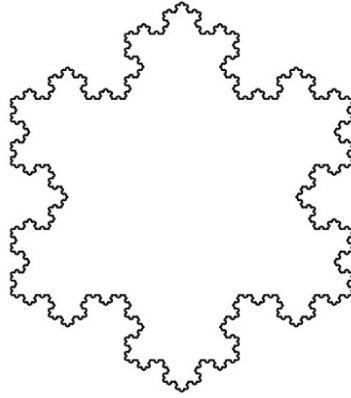
καθορισμένο σχήμα s , προσπαθούμε να προσεγγίσουμε το s από μια πεπερασμένη ένωση μικρών αντίγραφων απλών αντικειμένων όπως π.χ. το ορθογώνιο. Για να επιστρέψουμε στην περίπτωση μιας καμπύλης δουλεύουμε πάλι προσεγγιστικά. Ένα παράδειγμα μιας καμπύλης που προσεγγίζεται από μια ακολουθία γραμμικών τμημάτων, η οποία καλείται συνήθως πολυγωνική καμπύλη.



Εικόνα 4: Προσέγγιση μιας καμπύλης από μια πολυγωνική.

Κατόπιν το κατά προσέγγιση μήκος της καμπύλης είναι το άθροισμα των μηκών των γραμμικών τμημάτων. Το δυσνόητο μέρος είναι να επιλεχτούν οι λεπτότερες και ακόμη λεπτότερες προσεγγίσεις κατά τέτοιο τρόπο ώστε το μήκος του μεγαλύτερου τμήματος να τείνει στο 0. Εάν το L , το οποίο είναι πεπερασμένο, είναι το άθροισμα των μηκών των γραμμικών τμημάτων, τότε λέμε ότι η καμπύλη είναι συνεχώς καμπυλώσιμη (rectifiable) και ότι το μήκος της καμπύλης είναι L . Για τις περιοχές, χρησιμοποιούμε το ίδιο είδος του συλλογισμού προσεγγίζοντας το εμβαδόν από μια ένωση των μικρών ορθογωνίων.

Αυτά τα επιτεύγματα του λογισμού συναντούν την παντελή αποτυχία κατά την προσπάθεια να μετρήσουμε ένα σύνολο γραμμών όπως την snowflake Koch καμπύλη [13].



Εικόνα 5: Ένα δείγμα της snowflake Koch καμπύλης.

Οι παραγωγίσεις που προέρχονται κατά τον υπολογισμό του L , το οποίο συνδέεται με την καμπύλη Koch, στην πραγματικότητα είναι πολυγωνικές προσεγγίσεις στην καμπύλη [10]. Η n -η παράγωγος έχει 4^n γραμμικά τμήματα τα οποία τέμνει, κάθε μια της οποίας έχει μέτρο $1/3^n$, υποθέτοντας ότι αρχίσαμε με την μηδενική παράγωγο που είναι ένα τμήμα του μήκους 1. Έτσι το συνολικό μήκος της πολυγωνικής καμπύλης είναι $4^n/3^n = (4/3)^n$, το οποίο τείνει στο ∞ καθώς $n \rightarrow \infty$. (παραδείγματος χάριν, $\frac{4^{100}}{3^{100}} = 3.1 \times 10^{12}$)[10]

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ανεξάρτητα από το πόσο προσεγγίζουμε την καμπύλη Koch, τα μήκη των προσεγγίσεων τείνουν στο ∞ σε ένα συγκρίσιμο ποσοστό. Αυτό το χαρακτηριστικό γνώρισμα φράκταλ των καμπυλών ήταν ένα σημαντικό κίνητρο για τον Mandelbrot, για να συνδέσει την φράκταλ γεωμετρία με τη φύση. Στο Άρθρο “Mandelbrot: Πόσο μακρύς είναι η ακτή της Μεγάλης Βρετανίας;” (Mandelbrot: How long is the coast of Britain?) εξερευνάται ακριβώς πώς τα γεωγραφικά όρια εκθέτουν το ίδιο φαινόμενο. Οι αριθμοί 4 και 3 δίνουν μια καλύτερη έννοια στην πολυπλοκότητα της καμπύλης Koch από το άπειρο μήκος της, και εδώ είναι το σημείο όπου δημιουργείται η διάσταση φράκταλ [14].

Όπως στην τοπολογική διάσταση, η διάσταση φράκταλ αρχίζει με μια κάλυψη C στο δεδομένο αντικείμενο s από τις ανοικτές σφαίρες $B(x_0, r)$. Καλούμε την κάλυψη ε - κάλυψη εάν η ακτίνα r οποιασδήποτε σφαίρας στην κάλυψη ικανοποιεί την σχέση $r < \varepsilon$. Υποθέτουμε ότι το s είναι κλειστό σύνολο, και η κάλυψη C έχει το

μικρότερο αριθμό σφαιρών. Θέτουμε αυτόν τον αριθμό των σφαιρών να είναι $N(\varepsilon)$. Για την καμπύλη Koch, ο ελάχιστος αριθμός ε-σφαιρών με το $\varepsilon \cong 1/3^n$ είναι κατά προσέγγιση $N(\varepsilon) = 4^n$. Με την βοήθεια του λογαρίθμου, μπορούμε να συνάψουμε μια σχέση μεταξύ ε και $N(\varepsilon)$. Κατ' αρχάς, παίρνουμε τους λογάριθμους:

$$\log(\varepsilon) = \log(3^{-n}) = -n \log(3) \quad (A)$$

$$\text{και } \log(N(\varepsilon)) = n \log(4) \quad (B)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι και οι δυο σχέσεις είναι ανεξάρτητες από το ε . Παίρνοντας τις (A) και (B) καταλήγουμε σε μια αναλογία αυτών των δύο λογαρίθμων:

$$FD = -\frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

Άρα η φράκταλ διάσταση της καμπύλης του Koch είναι 1.26. Τι όμως σημαίνει το 1.26; Τι εννοούμε με την φράση που διατυπώσαμε παραπάνω;

Γενικεύοντας λοιπόν το παραπάνω παράδειγμα στην γενική φύση του προβλήματος έχουμε την εξίσωση Richardson-Mandelbrot να αποτελεί μαθηματική βάση για την κατανόηση των μορφοκλασματικών γεωμετρικών δομών, τη μέτρηση και την ερμηνεία τους η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$L(\varepsilon) = N(\varepsilon) \times \varepsilon \quad (1)$$

όπου $L(\varepsilon)$ είναι το μήκος (περίμετρος) του ακανόνιστου σχήματος που μετρούμε, ε η μονάδα μέτρησης μήκους που χρησιμοποιείται για να μετρήσουμε την περίμετρο, $N(\varepsilon)$ ο αριθμός των μονάδων μέτρησης που είναι απαραίτητες για να καλύψουν την περίμετρο $L(\varepsilon)$ όπου $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$. Η D λοιπόν έχει ονομαστεί ως η σταθερά του Hausdorff η οποία όταν είναι διάφορη και μεγαλύτερη από την τοπολογική διάσταση όπως περιγράφηκε ήδη ορίζεται ως μορφοκλασματική - φράκταλ διάσταση, Fractal Dimension, FD. Επομένως η εξίσωση (1) γίνεται:

$$L(\varepsilon) = \varepsilon^{1-D} \quad (2)$$

Μετατρέποντας την παραπάνω εξίσωση σε λογαριθμική ισχύει:

$$D = \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (3)$$

Η FD είναι πάντα θετικός αριθμός, ορίζεται από την τιμή της κλίσης της ευθείας της λογαριθμικής εξίσωσης και δεν είναι κατ'ανάγκη ακέραιος αριθμός.

Πρώτου συνεχίσουμε όμως οφείλουμε να δώσουμε έναν πιο μαθηματικό ορισμό στην έννοια της FD:

Έστω ότι το s είναι ένα συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου. Για κάθε $\varepsilon > 0$, το $N(\varepsilon)$ είναι ο μικρότερος αριθμός σφαιρών ακτίνας $r \leq \varepsilon$ απαραίτητος για να καλυφθεί το σύνολο s . Το D λοιπόν καλείται φράκταλ διάσταση του s και δίνεται από τον τύπο:

$$D = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)}$$

Στην ερώτηση που είχαμε κάνει πριν δηλαδή πως η έννοια της FD αντιστοιχεί στη συνηθισμένη έννοια της τοπολογικής διάστασης πρέπει κατ' αρχάς να εξετάσουμε μια συνεχή καμπύλη s . Σε αυτήν την περίπτωση, ένας δίσκος ακτίνας ε καλύπτει ένα κομμάτι περίπου 2ε πολύ. Έτσι ο αριθμός των δίσκων είναι κατά προσέγγιση:

$$N(\varepsilon) = L/2\varepsilon$$

,όπου το L είναι το μήκος της καμπύλης. Κατόπιν έχουμε ότι:

$$N(\varepsilon) = (L/2)\varepsilon^{-1}$$

Η διάσταση D εμφανίζεται ως αρνητικός αριθμός του εκθέτη ε στο νόμο αύξησης για $N(\varepsilon)$. Έτσι, βλέπουμε ότι η φράκταλ διάσταση μιας συνεχούς καμπύλης είναι 1. Ομοίως, για το εμβαδόν μιας περιοχής A , ένας δίσκος ακτίνας ε καλύπτει περιοχή $\pi\varepsilon^2$. Ως εκ τούτου λοιπόν,

$$N(\varepsilon) = A/(\pi\varepsilon^2) = (A/\pi)\varepsilon^{-2}$$

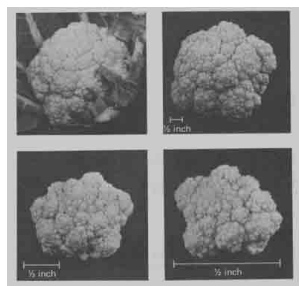
οι δίσκοι που απαιτούνται για να καλυφθεί. Οπότε η φράκταλ διάσταση του εμβαδού μιας περιοχής είναι 2. Μια από τις πολλές ιδιότητες της φράκταλ διάστασης FD είναι ότι είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση της

τοπολογικής διάστασης D_T . Επίσης, εάν το καθορισμένο s περιλαμβάνεται μέσα στο $\mathbb{R}^n$, η φράκταλ διάσταση FD του s είναι πάντα μικρότερη ή ίση του n . Επομένως, η φράκταλ διάσταση χρησιμεύει ως μια παρεμβολή της τοπολογικής διάστασης [14].

Υπάρχουν πολλές ατέλειες και οξύνειες στους διάφορους ορισμούς των κλασματικών διαστάσεων. Ένα σοβαρό πρόβλημα είναι για τα ορισμένα συμπαγή υποσύνολα των οποίων τα όρια $\log(N(\varepsilon)) / \log \varepsilon$ μπορεί να μην υπάρχουν. Αφετέρου, κάποιος μπορεί να σκεφτεί ότι χρειαζόμαστε μόνο τις σφαίρες ακτίνας ακριβώς ίσες με ε , αντί λιγότερο ή ίσο προς ε . Εντούτοις, υπάρχουν συμπαγή σύνολα για τα οποία οι δύο διαφορετικοί ορισμοί της διάστασης οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα. Οι παθολογικές πτυχές της διάστασης έχουν απαιτήσει βαθιές αναλυτικές μελέτες. Στις εφαρμογές στη φυσική επιστήμη, συνηθίζεται η άποψη ότι τα φράκταλ που εμφανίζονται στη φύση να συμπεριφέρονται καλά όσον αφορά τον υπολογισμό της διάστασής τους. Αυτό είναι κάπως ειρωνικό δεδομένου ότι η γένεση της “φράκταλ γεωμετρίας της φύσης” ήταν η απόρριψη ότι η φύση πρέπει να περιγράφεται από τα ομαλά αντικείμενα της κλασσικής γεωμετρίας.

Η FD, μετά την εισαγωγή της έννοιας από τον Mandelbrot, έχει διαπιστωθεί ότι μπορεί να χαρακτηρίσει κάθε αντικείμενο που υπάρχει στη φύση [15]. Έτσι φαίνεται ότι οι ευκλείδειες ακέραιες διαστάσεις, αποτελούν σήμερα μάλλον την εξαίρεση παρά τον κανόνα, σε όλες τις φυσικές κλίμακες. Έννοιες και φαινόμενα τα οποία δεν μπορούσαν να προβλεφθούν και διέπονταν από τη θεωρία του χάους μπορούν να ερμηνευτούν και να αποδοθούν με μαθηματική εξήγηση στηριζόμενη στον υπολογισμό των φράκταλ. Χαρακτηριστικός άλλωστε είναι ο τίτλος του συγγράμματος του B.B. Mandelbrot «Η μορφοκλασματική γεωμετρία της φύσεως» (The fractal geometry of nature), στο οποίο η διάσταση αυτή αναγνωρίζεται σε μια πλειάδα φυσικών καταστάσεων και μορφών, από τη μορφή των ακτών όπως προείπαμε μέχρι την καταγραφή της θερμοκρασίας μιας περιοχής. Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα φυσικών αντικειμένων που εκδηλώνεται η αυτό-ομοιότητα είναι το κουνουπίδι και η φτέρη [10]. Δηλαδή:

α. Αν από ένα κουνουπίδι αποσπάσουμε ένα κομμάτι θα διαπιστώσουμε ότι αυτό θα μοιάζει με το αρχικό, θα είναι ένα μικρότερο αντίγραφο.



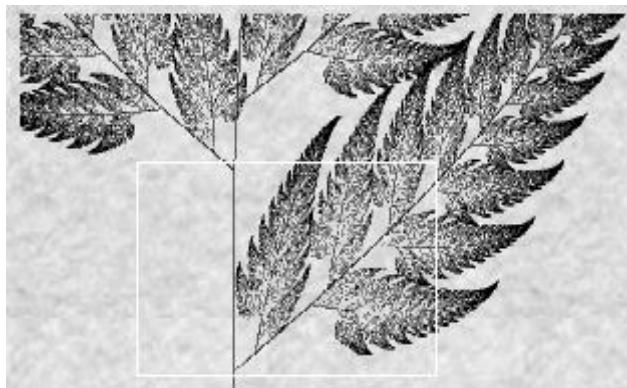
Εικόνα 6: Το κουνουπίδι ως μαθηματικό αντικείμενο μελέτης

Αν από το πρώτο αποσπάσουμε ένα κομμάτι θα διαπιστώσουμε ότι είναι ακόμα μικρότερο αλλά εξακολουθεί να μοιάζει με το αρχικό. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, κάποια στιγμή, δεν θα ισχύει η ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας, κάπου θα "ξεθωριάσει". Το κουνουπίδι είναι ένα φυσικό φράκταλ μιας και διαθέτει την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας.

β. Η φτέρη ανήκει στην κατηγορία των φυτών που εκδηλώνουν την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας με τον καλύτερο τρόπο. Μια φτέρη αποτελείται από φύλλα καθένα από τα οποία αποτελείται από πολλά μικρότερα. Και αυτά ακόμα τα μικρά φύλλα αποτελούνται από ακόμα μικρότερα που διατηρούν την ίδια δομή με τη φτέρη.



Όσο από πιο κοντά παρατηρούμε μια φτέρη τόσο περισσότερες λεπτομέρειες βλέπουμε.



Εικόνα 7,8,9 : Φύλλο φτέρης σε κλίμακα 1:1 , 1:2 και 1:4 αντίστοιχα

Η φτέρη είναι και αυτή με τη σειρά της ένα φυσικό φράκταλ μιας και διαθέτει την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας.

1.2 Τι είναι όμως αυτό-ομοιότητα;

Κατά τον Mandelbrot η Γεωμετρία των φράκταλ παρέχει λύσεις σε ένα σύνολο προβλημάτων. Μια χαρακτηριστική ιδιότητα των φράκταλ είναι η αυτό-ομοιότητα (self-similarity) είναι ότι η δομή που παρουσιάζουν όταν η παρατήρηση γίνεται υπό μικρή κλίμακα είναι η ίδια με εκείνη που παρουσιάζουν όταν η παρατήρηση γίνεται υπό μεγαλύτερη κλίμακα ή τα αντικείμενα παρουσιάζουν το φαινόμενο μικρά τμήματά τους να είναι αντίγραφα ή να μοιάζουν με το όλο [10,8]. Η έννοια της αυτό-ομοιότητας περιλαμβάνει επομένως δύο κυρίως είδη.

Το πρώτο είδος είναι η γεωμετρική αυτό-ομοιότητα όπου το κάθε αντικείμενο είναι ακριβές αντίγραφο του αρχικού και η μορφολογία αυτή αποκαλύπτεται σε διαδοχικές μεγεθύνσεις της αρχικής μορφής. Ένα παράδειγμα φυσικού φράκταλ που παρουσιάζει γεωμετρική αυτό-ομοιότητα είναι το φύλλο της φτέρης, το οποίο εξετάσαμε πιο πριν.



Εικόνα 10: Το φύλλο της φτέρης παραγόμενη από γραφικό σχεδιασμό.

Η " φράκταλ φτέρη" παράγεται εντελώς από φράκταλ. Η εικόνα (10) δεν είναι μια ψηφιακή φωτογραφία - είναι απολύτως παραγόμενη από υπολογιστή.

Το δεύτερο είδος είναι η καλούμενη στατιστική αυτό-ομοιότητα που παρουσιάζουν για παράδειγμα τα σύννεφα, η ακτογραμμή ή τα βιολογικά αντικείμενα και που σε διαδοχικές μεγεθύνσεις του αρχικού αντικειμένου δεν αποκαλύπτουν εικόνες οπτικά όμοιες με την αρχική αλλά σχήματα με διαρκώς μεγαλύτερες λεπτομέρειες που διαθέτουν τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες με το αρχικό σχήμα, σύμφωνα με τις εξισώσεις που αναφέρθηκαν. Σε περίπτωση που δε διαθέτουν τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες με το αρχικό σχήμα είναι απαραίτητη η μέγιστη μεγέθυνση πάνω από την οποία η ανάλυση δεν αναδεικνύει περαιτέρω λεπτομέρειες για τον καθορισμό της ακανόνιστης δομής.

Όταν βλέπουμε από το διάστημα, την ακτή ενός νησιού όπως τη Μεγάλη Βρετανία, όπου μπορεί να φανεί η ολότητά του σε μια ματιά, παρουσιάζει μια τυχαία, οδοντωτή εμφάνιση. Καθώς πλησιάζουμε το νησί, η μεγάλης κλίμακας αίσθηση της ακτής, εξαφανίζεται επιτρέποντας μας να δούμε τις μικρότερες λεπτομέρειες των θέσεων όπου ο βράχος συναντά τη θάλασσα [14]. Αλλά σε αυτήν την μικρή απόσταση, η εντύπωση είναι ακόμα η ίδια με αυτήν από το διάστημα, ότι δηλαδή η ακτή φαίνεται τυχαία και οδοντωτή. Εάν πάμε ακριβώς πάνω από το βράχο, και βάλουμε το κεφάλι μας πολύ κοντά στο νερό θα παρατηρήσουμε το ίδιο πράγμα: μια οδοντωτή συνεδρίαση βράχου

στο νερό. Στη φύση και τον αφηρημένο κόσμο της γεωμετρίας, η γενική εμφάνιση μερικών αντικειμένων δεν αλλάζει ποτέ, ανεξάρτητα από το πόσο κοντά ή μακριά είμαστε από το αντικείμενο όταν το βλέπουμε.

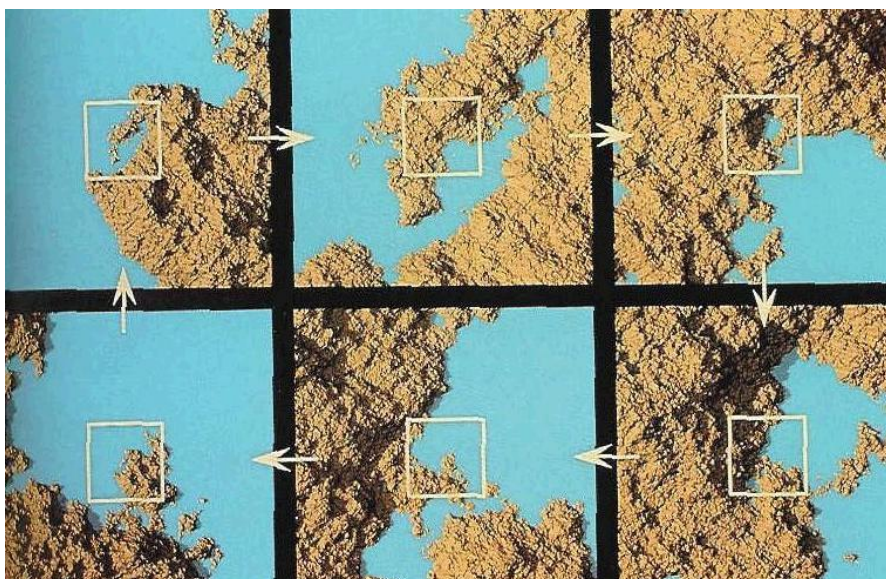
Αντί να βγούμε έξω στη φύση όμως και να ψάχνουμε να παρατηρήσουμε αντικείμενα με την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας μπορούμε να δημιουργήσουμε εμείς με την βοήθεια μόνο ενός στυλού και μίας κόλας χαρτιού [17]. Μπορούμε να κάνουμε μια φράκταλ μορφή με τη χρησιμοποίηση μιας απλής τεχνικής. Αρχίζουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Σβήνουμε το μέσο τρίτο του ευθυγράμμου τμήματος και βάζουμε στη θέση του ένα μεγάλο, ανάποδα "V" έτσι ώστε οι άκρες του "V" να συνδέονται με τα υπόλοιπα τμήματα γραμμών και κάθε πλευρά του "V" να έχει το ίδιο μήκος με το αφαιρούμενο τμήμα. Μόλις δημιουργήσαμε μια νέα μορφή που έχει τώρα τέσσερα τμήματα γραμμών αντί ακριβώς ενός.

Τώρα, σε κάθε ένα από τα τέσσερα νέα τμήματα γραμμών, επαναλαμβάνουμε αυτήν την διαδικασία. Σβήνουμε το μέσο τρίτο του τμήματος των γραμμών και βάζουμε στη θέση του ένα ανάποδο "V" όπως πριν. Κάνουμε αυτό για κάθε τμήμα γραμμών. Συνεχίζουμε τη διαδικασία κατά τρόπο αόριστο. Αυτή η επαναληπτική κατασκευή δημιουργεί μια φαινομενικά τυχαία, σύνθετη μορφή που καλείται καμπύλη του Koch της οποίας την FD την έχουμε υπολογίσει παραπάνω. Αλλά επειδή η μορφή έγινε σύμφωνα με έναν ακριβή τύπο στον οποίο ένα τμήμα γραμμών άλλαξε μετά από το σβήσιμο του ενός τρίτου αυτής θα διαπιστώσουμε λοιπόν ότι όπως εξετάζουμε τη μορφή (μετά από τρεις φορές), θα εμφανιστεί ακριβώς η ίδια όπως έγινε όταν αντιμετωπίζεται σε μια μεγαλύτερη κλίμακα. Κάθε μεγέθυνση πάνω από τρεις φορές θα παρουσιάσει την ίδια μορφή. Αυτή η ιδέα είναι κάπως αντίθετη προς τη διαίσθησή μας, η οποία επιμένει ότι μια σύνθετη μορφή πρέπει να γίνει απλούστερη δεδομένου ότι την εξετάζουμε περισσότερο. Ο παράγοντας της μεγέθυνσης και ο αριθμός των νέων μονάδων που εισάγονται με κάθε αλλαγή της μορφής είναι σημαντικές ιδιότητες που καθιερώνουν τη διάσταση φράκταλ.

Δύο τρόποι έχουν διατυπωθεί για να προσεγγιστεί και να εκτιμηθεί η φράκταλ διάσταση: η μέθοδος της καταμέτρησης τετραγώνων (box

counting method) που είναι και η ευρέως χρησιμοποιούμενη και η μέθοδος διαδοχικών βημάτων (structured walk technique).

Με τη μέθοδο της καταμέτρησης τετραγώνων για να μελετήσουμε μια φράκταλ δομή καλύπτουμε το αντικείμενο με ένα πλέγμα τετραγώνων σε επαφή μεταξύ τους, αριθμού N με πλευρά μεγέθους ε . Η FD ορίζεται από την κλίση της γραφικής παράστασης που προκύπτει από το $\log(N)$ του αριθμού των τετραγώνων προς το $\log(1/\varepsilon)$ για τετράγωνα μελέτης διαφόρου μήκους πλευράς ε . Η εισαγωγή του λογάριθμου επιβάλλεται έτσι ώστε να μικρύνουν οι τιμές του πειράματος και να γίνει πιο εύκολη η μελέτη του. Η πρώτη εφαρμογή της FD έγινε από τον Mandelbrot και αφορούσε τη μέτρηση και απόδοση μιας τιμής σε μια ακτή ανεξάρτητα από τη χρησιμοποιούμενη κλίμακα [14]. Ένα τμήμα της παραλιακής γραμμής κάποιας χώρας είναι ένα αντικείμενο με φράκταλ δομή. Πρόκειται για μια ανώμαλη καμπύλη, το μήκος της οποίας είναι προφανώς, μεγαλύτερο από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο άκρα της. Αν επιχειρηθεί να υπολογιστεί το “ακριβές” μήκος της θεωρούμενης ακτής θα διαπιστωθεί ότι αυτό είναι πάρα πολύ μεγάλο και τόσο ακαθόριστο ώστε είναι προτιμότερο να θεωρηθεί άπειρο. Πρόκειται δηλαδή για μια μη ευθύγραμμη καμπύλη. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κλασσική έννοια του μήκους είναι ακατάλληλη για ποσοτική σύγκριση τέτοιων μεγεθών και αυτό επιτυγχάνεται με την έννοια της FD που μπορεί να αποδώσει αυτές τις μετρήσεις.



Εικόνα 11: Μεγέθυνση και σμίκρυνση σε μια ακτογραμμή

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει καθιερωθεί η έννοια "ομοιότητα". Δύο ευθύγραμμα γεωμετρικά σχήματα είναι όμοια αν έχουν την ίδια μορφή ανεξάρτητα από το μέγεθός τους [16]. Οφείλουν να έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Στο παρακάτω σχήμα εύκολα διαπιστώνουμε ότι "καθένα από τα μικρά τραπέζια είναι αντίγραφο του μεγαλύτερου τραπεζίου".



Εικόνα 12: Ένα ισοσκελές τραπέζιο από ισοσκελή τραπέζια

Ας παρατηρήσουμε και την ακόλουθη σειρά γεωμετρικών σχημάτων:



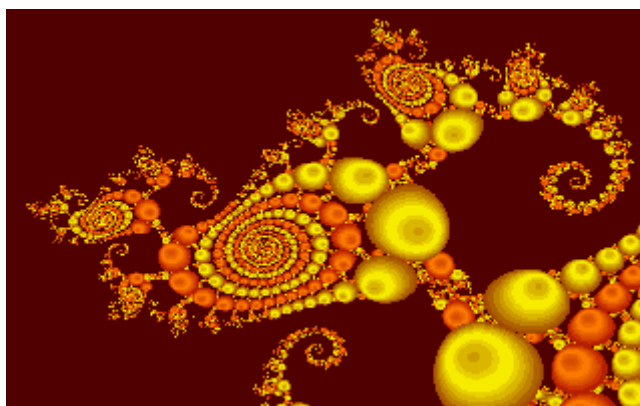
Εικόνα 13: Σχήματα που σχεδιάστηκαν από τον ίδιο τους το εαυτό.

Και σε αυτήν την περίπτωση συμπεραίνουμε ότι το καθένα από τα συνιστούντα μέρη είναι αντίγραφο του μεγαλύτερου. Μπορούμε να λέμε ότι τα παραπάνω σχήματα χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας. Δηλαδή η ιδιότητα της «αυτό-ομοιότητας» ως έννοιας, διευρύνει την γνωστή γεωμετρική έννοια της ομοιότητας. Όλα τα μέρη του είναι όμοια μεταξύ τους καθώς και με το αρχικό. Τα παραπάνω παραδείγματα δείχνουν ότι η έννοια που μας ενδιαφέρει εμφανίζεται σε γεωμετρικά σχήματα τα οποία δεν είναι φράκταλ.

Η στοιχειώδης μοντελοποίηση μιας φτέρης μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη χρήση ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος. Ένα μικρό πρόγραμμα που περιλαμβάνει πολλαπλές αναδρομικές κλήσεις, συνήθως, είναι αρκετό για να μοντελοποιήσουμε ορισμένα ενδιαφέροντα μαθηματικά φράκταλ όπως για παράδειγμα η φτέρη, το τρίγωνο του Sierpinski, τα φράκταλ δέντρα και η χιονονιφάδα του Koch.

Τα φράκταλ έχουν βρει μια θέση στον τομέα της στατιστικής φυσικής με τη βοήθεια των οποίων αναλύονται οι μιγαδικοί και τα τυχαία-γεγονότα όπως οι μεταβάσεις φάσης και η διάχυση των αερίων. Οι ισχυρές συνδέσεις μεταξύ της διάστασης φράκταλ και των χαοτικών κινήσεων έχουν βοηθήσει να δημιουργήσουν έναν νέο κλάδο αποκαλούμενο θεωρία του χάους. Οι μαθηματικοί και οι επιστήμονες υπολογιστών έχουν χρησιμοποιήσει φράκταλ για να συμπίεσουν τις εικόνες υπολογιστών, για την αποθήκευση στοιχείων και για τη γρήγορη μετάδοση πέρα από τα δίκτυα υπολογιστών. Αλλά ίσως ο πιο αξιόλογος και γνωστός τρόπος εφαρμογής των φράκταλ είναι στην εικαστική τέχνη, όπου οι υπολογιστές έχουν χρησιμοποιήσει φράκταλ που παράγουν προγράμματα, για να δημιουργηθούν εκπληκτικά όμορφα σχέδια και εικόνες που φαίνονται να περικλείουν έναν ολόκληρο κόσμο μέσα σε τους. Με τους υπολογιστές, μπορούμε να παράγουμε όμορφη τέχνη από τους μιγαδικούς αριθμούς [18,19,20,21].

Τα φράκταλ ξεκινούν με έναν μιγαδικό αριθμό. Κάθε μιγαδικός αριθμός παραχθείς δίνει μια τιμή σε κάθε pixel στην οθόνη. Όσο υψηλότερος ο αριθμός επαναλήψεων, τόσο καλύτερη η ποιότητα της εικόνας.



Εικόνα 14: Εικόνα από το Julia set

Κοινά φράκταλ είναι βασισμένα στο Julia Set και το σύνολο Mandelbrot. (Εικόνες (14) και (15))



Εικόνα 15: Εικόνα από το Mandelbrot set

Οι φράκταλ αλγόριθμοι έχουν χρησιμοποιηθεί επίσης από τους γραφίστες για να απεικονίσουν τεχνητά τα τοπία της φύσης, όπως τις σειρές των βουνών, τα δέντρα και τα δάση, οι οποίες είναι εντυπωσιακά ρεαλιστικές στην εμφάνιση [22, 23, 24,25,26].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 1^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- [1] http://www.miguel.com/fractals_math_patterns/visual-math-natural-fractals.html
- [2] <http://www.fractalspirit.com/EgyptianGallery1.htm>
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Architecture_of_Africa
- [4] <http://www.fractalenlightenment.com/2009/09/treasures-of-tibet-at-norbulingka.html>
- [5] http://en.wikipedia.org/wiki/Beno%C3%AEt_Mandelbrot
- [6] <http://www.physics4u.gr/chaos/chaos4.html>
- [7] <http://math.rice.edu/~lanius/fractals/>
- [8] Fractals for the classroom: Complex systems and Mandelbrot, H.O. Peitgen, Evan M, Maletsky, 1992
- [9] Fractal Geometry, Michael Frame, Benoit Mandelbrot and Nial Neger, Yale University.
- [10] The Fractal Geometry of Nature, Benoit Mandelbrot, W.H. Freeman and Company, New York, 1977
- [11] <http://library.thinkquest.org/3493/frames/fractal.html>
- [12] <http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/node6.html>
- [13] <http://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html>
- [14] Fractals for the classroom: Complex systems and Mandelbrot, H.O. Peitgen, Evan M, Maletsky, 1992
- [15] K.Falconer, Fractal Geometry and its applications ,Wiley, Chichester, 1990
- [16] <http://www.epyna.gr/modules.php?name=News&file=article&sid=903>

- [17] <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308/projects/fung/page.html>
- [18] http://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set
- [19] <http://mathworld.wolfram.com/JuliaSet.html>
- [20] <http://www.math.utah.edu/~pa/math/mandelbrot/mandelbrot.html>
- [21] <http://www.ddewey.net/mandelbrot/>
- [22] Architectural models, fractals and agroforestry design, Roelof A.A. Oldeman, Agricultural University, Postbus 342, Wageningen, Netherlands
- [23] <http://sites.google.com/site/dspaventa3/fractal-forest>
- [24] <http://software.informer.com/getfree-fractal-forest-tile/> (για να δημιουργήσετε το δικό σας δάσος)
- [25] <http://answers.oreilly.com/topic/1310-create-a-fractal-mountain-scape-with-processing/>
- [26] <http://www.gameprogrammer.com/fractal.html>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΦΡΑΚΤΑΛ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εάν έχουμε γεωμετρικά σύνολα (ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, τετράγωνα, τρίγωνα, κύκλους κ.ο.κ.) η μέτρησή τους γίνεται με την χρήση των μήκους, εμβαδού και όγκου, δηλαδή στην ουσία με την βοήθεια του μέτρου Lebesgue στους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Στην περίπτωση όμως των φράκταλ που θα κατασκευάσουμε παρακάτω, η μέτρηση με το εν λόγω μέτρο δεν μας δίνει πληροφορίες για το πόσο χώρο καταλαμβάνουν τα σύνολα αυτά.

Για παράδειγμα το εμβαδόν του τριγώνου Sierpinski είναι μηδέν [1], όσο και ενός ευθυγράμμου τμήματος, ο όγκος του κύβου του Menger είναι επίσης μηδέν [2], όσο και ενός τετραγώνου. Για αυτούς τους λόγους χρειαζόμαστε ένα ειδικότερο μέτρο, το μέτρο Hausdorff [3]. Θα πρέπει, επί πλέον, οι μετρήσεις των γεωμετρικών συνόλων ή κατασκευασμάτων που θα γίνονται με το νέο μέτρο να «συμπίπτουν» με τις μετρήσεις που έχουμε ήδη για αυτά [3].

2.1 Μέτρο Lebesgue, Μέτρο Hausdorff

Ορισμός:

Έστω X τυχαίο σύνολο και $\wp(X)$, το δυναμοσύνολο του X .

Εξωτερικό μέτρο μ είναι μια συνάρτηση $\mu: \wp(X) \rightarrow [0, +\infty]$ ώστε:

i.
$$\mu(\emptyset) = 0$$

ii.
$$\mu(A) \leq \mu(B), \text{ αν } A \subseteq B \subseteq X$$

iii.

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad \text{αν } A_i \subseteq X, \quad i = 1, 2, \dots$$

■

Ορισμός:

Μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X , καλείται **σ -άλγεβρα**. Εφόσον ισχύουν τα εξής:

- i. $\emptyset \in \mathcal{A}$
- ii. Αν $E \in \mathcal{A}$ τότε $X \setminus E = E^o \in \mathcal{A}$
- iii. Αν $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, τότε:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$$

■

Ορισμός

Εάν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα, μια απεικόνιση $\mu^*: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ώστε:

- i. $\mu^*(\emptyset) = 0$
- ii.

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i), \text{ αν } E_i \in \mathcal{A} \text{ και } E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

καλείται **μέτρο**.

■

Εάν μ είναι εξωτερικό μέτρο, λέμε ότι $E \subseteq X$ είναι μ -μετρήσιμο αν

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cup E^o) \text{ για κάθε } A \subseteq X$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathcal{M} = \{E \subseteq X : E \text{ είναι } \mu\text{-μετρήσιμο}\}$ είναι σ-άλγεβρα και ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου μ στο $\mathcal{M}$, είναι ένα μέτρο στο $\mathcal{M}$. [4,5]

Ορισμός

Στον χώρο $\mathbb{R}^l$ ορίζουμε το **εξωτερικό μέτρο Lebesgue**, λ_l ως εξής:

Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο:

$$B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_l, b_l] \subseteq \mathbb{R}^l$$

όπου $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, l$ και ορίζουμε

$$V_l(B) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_l - a_l)$$

τον d -όγκο του B .

Οπότε έχουμε για ένα τυχαίο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^i$ ορίζουμε:

$$\lambda_i(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V_i(\mathcal{B}_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i \text{ ορθογώνιο παραλλ}\delta\omicron, i \in \mathbb{N} \right\}$$

■

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το λ_i είναι εξωτερικό μέτρο και $\lambda_i(\mathcal{B}) = V_i(\mathcal{B})$, αν το $\mathcal{B}$ είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Εάν περιορίσουμε το λ_i στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των λ_i -μετρήσιμων συνόλων, τότε ο περιορισμός αυτός είναι το **μέτρο Lebesgue d-διάστασης** [5,10]. Το μέτρο λ_i καλείται και d- όγκος. Στην άλγεβρα $\mathcal{M}$ περιέχονται τα ανοιχτά και τα κλειστά σύνολα του $\mathbb{R}^i$.

Με την βοήθεια τώρα του μέτρου Lebesgue d-διάστασης θα ορίσουμε το μέτρο Hausdorff στον $\mathbb{R}^i$. [9]

Ορισμός:

Στον χώρο $\langle \mathbb{R}^i, d \rangle$ (όπου d η ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^i$), ορίζουμε το **εξωτερικό μέτρο Hausdorff H^s** για $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ ως εξής:

Θεωρούμε $\delta(A) = \sup \{ |x - y| : x, y \in A \}$ την διάμετρο του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^i$ και για $\varepsilon > 0$

$$H_\varepsilon^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \delta(U_i) \leq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N} \right\}$$

όπου $E \subseteq \mathbb{R}^i$. Για $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ έχουμε:

$$H_{\varepsilon_2}^s(E) \leq H_{\varepsilon_1}^s(E)$$

Ορίζουμε ως **εξωτερικό μέτρο Hausdorff H^s** του $E \subseteq \mathbb{R}^i$ το

$$H^s(E) = \sup \{ H_\varepsilon^s(E), \quad \varepsilon > 0 \} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon^s(E).$$

Τα $H_\varepsilon^s(E)$, ($\varepsilon > 0$) και H^s είναι εξωτερικά μέτρα. Στην ειδική περίπτωση που περιορίσουμε το H^s στην σ-άλγεβρα των H^s μετρήσιμων συνόλων, τότε ο περιορισμός αυτός είναι το **μέτρο**

Hausdorff s – διάστασης ($s \in \mathbb{R}, s \geq 0$) [9,10]. Στην άλγεβρα αυτή περιέχονται τα ανοιχτά και τα κλειστά σύνολα του $\mathbb{R}^i$.

Έχοντας λοιπόν ορίσει το μέτρο Lebesgue d – διαστάσεως ($d \in \mathbb{N}$) και του μέτρου Hausdorff διαστάσεως ($s \in \mathbb{R}, s \geq 0$) μπορούμε να ορίσουμε την φράκταλ διάσταση. Προτού συνεχίσουμε όμως θα πρέπει να κάνουμε μια διευκρίνιση περί της διάστασης φράκταλ. Υπάρχουν 3 παραλλαγές της φράκταλ διάστασης [6,7,8].

2.2 Διάσταση Hausdorff – Besicovitch

Ορισμός:

Ξέρουμε ότι η διάσταση ενός γεωμετρικού σχήματος είναι εκείνος ο αριθμός n που αν το μετρήσουμε με μέτρο $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ έχει μέτρο άπειρο ενώ αν το μετρήσουμε με μέτρο $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots$ έχει μέτρο μηδέν. Την έννοια “διάσταση” συνόλου την γενικεύουμε με την βοήθεια του μέτρου Hausdorff του συνόλου.

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^i$ και $H^s(E)$ το s – Hausdorff μέτρο του, για $s \geq 0$. Εάν $0 \leq s < t$ τότε:

$$H_\varepsilon^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \delta(U_i) \leq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\geq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \delta(U_i) \leq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N} \right\} = H_\varepsilon^t(E)$$

για $0 < \varepsilon < 1$.

Από τον ορισμό του Hausdorff έχουμε ότι:

$$H^t(E) \leq H^s(E) \text{ για } 0 < s < t.$$

Άρα εάν $H^s(E) = 0$ για κάποιο $s \geq 0$, θα έχουμε ότι:

$H^t(E) = 0 \quad \forall t \geq s$. Επιπλέον αφού:

$$H_\varepsilon^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(U_i) \delta^{s-t}(U_i), E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \delta(U_i) \leq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N} \right\}$$

καταλήγουμε:

$$H_\varepsilon^s(E) \geq \varepsilon^{s-t} H_\varepsilon^t(E)$$

Παίρνοντας λοιπόν το σύνολο $\mathbb{R}^d$ παρατηρούμε ότι $H^d(\mathbb{R}^d) = +\infty$ και $H^s(\mathbb{R}^d) = 0$ για $s > d$, και για κάθε υποσύνολο E του $\mathbb{R}^d$ έχουμε ότι $H^s(E) = 0$ για $s > d$.

Οπότε καταλήγουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός s_0 , $0 \leq s_0 \leq d$, ώστε:

$$H^t(E) = \begin{cases} 0, & \text{για } t > s_0 \\ +\infty, & \text{για } t < s_0 \end{cases}$$

Τότε:

$$s_0 = \sup\{t \geq 0: H^t(E) = +\infty\} = \inf\{t \geq 0: H^t(E) = 0\}$$

Ο αριθμός s_0 ονομάζεται **Hausdorff – Besicovitch dimension** του υποσυνόλου E και συμβολίζεται με $\dim_H E$.

■

2.3 Διάσταση Ομοιότητας

Ορισμός:

Για να υπολογίσουμε την φράκταλ διάσταση σε στοιχειώδεις Ευκλείδειες συναρτήσεις έχουμε δημιουργήσει έναν άλλο τρόπο υπολογισμού της (FD) από αυτόν που είδαμε παραπάνω. Η διάσταση αυτή ονομάζεται διάσταση ομοιότητας. Οι στοιχειώδεις ‘Ευκλείδειες’ συναρτήσεις είναι χρήσιμες όχι μόνο για τη γεωμετρία τους αλλά γιατί μπορούν να εκφραστούν με απλούς τρόπους. Μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να μεταδώσουμε πληροφορίες εύκολα από τον έναν στον άλλο. Επιπλέον, οι στοιχειώδεις συναρτήσεις χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό στον επιστημονικό υπολογισμό, στο σχέδιο μέσω υπολογιστή και στην ανάλυση δεδομένων γιατί μπορούν να αποθηκευτούν σε μικρά αρχεία και να υπολογιστούν από γρήγορους αλγορίθμους.

Έστω $w_1, w_2, \dots, w_N: \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^i$ είναι ομοιότητες με κοινό συντελεστή συστολής $0 < c < 1$, $|w_i(x) - w_i(y)| = c|x - y|$, $i = 1, 2, \dots, N$ και F το σταθερό σημείο:

$$F = w_1(F) \cup \dots \cup w_N(F)$$

Οπότε διάσταση ομοιότητας ορίζουμε:

$$\dim_s F = \frac{\log N}{-\log c}$$

■

2.4 Διάσταση Dimension Box

Ορισμός:

Η διάσταση Box είναι η απλούστερη διάσταση που χρησιμοποιούμε και φέρει επίσης τα ονόματα εντροπία Kolmogorov, διάσταση εντροπίας, διάσταση πληροφορίας, λογαριθμική πυκνότητα, διάσταση Minkowski και άλλα. Στην ανάλυση των φράκταλ συσσωματωμάτων παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε την διάσταση Box. Για να μπορέσουμε να την ορίσουμε θα πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε το θεώρημα Κάλυψης του Vitali.

Ορισμός Κάλυψης Vitali

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{V}$ αποτελεί μια **κάλυψη Vitali** του E αν:

$$\text{για κάθε } x \in E \text{ έχουμε } \inf\{\delta(U) : x \in U \text{ και } U \in \mathcal{V}\} = 0$$

■

Θεώρημα Κάλυψης Vitali

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Εάν το E είναι H^s -μετρήσιμο σύνολο και $\mathcal{V}$ είναι μια κάλυψη Vitali του E αποτελούμενη από κλειστά σύνολα τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\{U^i : i \in \mathbb{N}\}$ της $\mathcal{V}$ ώστε:

$$U_i \cap U_j = \emptyset, \text{ για } i \neq j \text{ και}$$

$$H^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) = 0 \mid \text{ ή } \sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) = +\infty$$

■

Παράδειγμα κάλυψης

Αν S είναι σφαίρα διαμέτρου $\delta(S) \leq \varepsilon$, τότε από τον ορισμό έχουμε:

$$H_\varepsilon^d(S) \leq \delta^d(S) = \frac{1}{c_d} \lambda_d(S).$$

Για να κάνουμε κατανοητό τον ορισμό της διάστασης Box θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα.

Βρισκόμαστε στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς a και $\delta > 0$, χρειαζόμαστε τουλάχιστον

$$N_\delta = \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 = a^2 \left(\frac{1}{\delta}\right)^2$$

κύβους πλευράς δ για να καλύψουμε το αρχικό τετράγωνο. Ανάλογα για τον κύβο πλευράς a χρειαζόμαστε τουλάχιστον:

$$N_\delta = a^3 \left(\frac{1}{\delta}\right)^3$$

κύβους πλευράς δ για να τον καλύψουμε.

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που εμφανίζεται στο $\frac{1}{\delta}$, είναι η διάσταση του αντικειμένου.

Για τυχαίο αντικείμενο θα χρειαζόμαστε $N_\delta \cong c \left(\frac{1}{\delta}\right)^s$ κύβους πλευράς δ για να το καλύψουμε, για κάποιο $s \geq 0$. (όπου c σταθερά, εξαρτώμενη από το αντικείμενο). Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\log N_\delta \cong \log c - s \log \delta$$

Οπότε:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Ορισμός της διάστασης box

Εάν $F \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι φραγμένο σύνολο, ορίζουμε ως **διάσταση box** του, τον αριθμό:

$$\dim_s F = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

(εφόσον υπάρχει το όριο), όπου $N_\delta(F)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός κύβων του $\mathbb{R}^d$, πλευράς δ που καλύπτουν το F .

Ισοδύναμα: $N_\delta(F)$ είναι ένα από τα ακόλουθα

- i. Ο ελάχιστος αριθμός κλειστών σφαιρών ακτίνας δ , που καλύπτει το F .
- ii. Ο ελάχιστος αριθμός συνόλων διαμέτρου το πολύ δ , που καλύπτει το F .
- iii. Ο μεγαλύτερος αριθμός σφαιρών $S(x, \delta)$, ξένων ανά δύο με κέντρο $x \in F$.
- iv. Ο αριθμός των κύβων της μορφής

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_d\delta, (m_d + 1)\delta]$$

Όπου $m_1, m_2, \dots, m_d$ ακέραιοι αριθμοί, οι οποίοι τέμνουν το F .

■

Είδαμε λοιπόν τρεις ορισμούς της φράκταλ διάστασης. Από αυτούς εμείς θα ασχοληθούμε με αυτούς της box – διάστασης και της Hausdorff – Besicovitch – διάστασης. Ο υπολογισμός και στις δύο περιπτώσεις της φράκταλ διάστασης είναι αρκετά περίπλοκος. Η εύρεση των διαστάσεων Hausdorff και box, συνόλων φράκταλ χρειάζεται μελέτη της μεθόδου κατασκευής καθενός από αυτά και εν συνεχεία να γίνει η προσπάθεια για υπολογισμό αυτών.

Παράδειγμα

Θα βρούμε την Hausdorff και box διάσταση του απλούστερου συνόλου φράκταλ, του τριαδικού συνόλου Cantor E .

Θα αποδείξουμε ότι:

$$s = \dim_H(E) = \dim_S(E) = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309 \dots \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} \leq H^s(E) \leq 1.$$

Το σύνολο:

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

όπου κάθε E_n αποτελείται από 2^n διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα.

Άρα:

$$H_{\frac{1}{3^n}}^t(E) \leq 2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^t = \left(\frac{2}{3^t}\right)^n$$

Για να είναι $H^t(E) \leq +\infty$ θα πρέπει $\frac{2}{3^t} \leq 1$, δηλαδή $t \leq \frac{\log 2}{\log 3}$.

Για $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ έχουμε $H^s(E) \leq 1$.

Θα αποδείξουμε ότι $H^s(E) \geq \frac{1}{2}$.

Έστω $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta^s(U_n) \geq \frac{1}{2} = \frac{1}{3^s}$$

Επειδή $\delta(\text{con } U_n) = \delta(U_n) = \delta(\overline{U_n})$, $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα U_n , $n \in \mathbb{N}$, είναι κλειστά διαστήματα,

$U_n = [a_n, \beta_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon_n > 0$ με

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n + 2\varepsilon_n)^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n)^s + \varepsilon$$

Τότε:

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n - \varepsilon_n, \beta_n + \varepsilon_n), \text{ με } E \text{ συμπαγές.}$$

Άρα:

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^k [a_{n_i} - \varepsilon_{n_i}, \beta_{n_i} + \varepsilon_{n_i}).$$

Εάν αποδείξουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^k (\beta_{n_i} - a_{n_i} + 2\varepsilon_{n_i})^s \geq \frac{1}{2}, \text{ τότε:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - a_n)^s + \varepsilon \geq \frac{1}{2}, \quad \text{για τυχαίο } \varepsilon > 0.$$

Δηλαδή:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta^s(U_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε το εξής:

Εάν:

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^v U_n, \quad \mu\epsilon \ U_n = [\gamma_n, \delta_n], \quad \text{τότε} \quad \sum_{n=1}^v \delta^s(U_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Έστω $\delta(U_1) \leq \delta(U_2) \leq \dots \leq \delta(U_v)$, και $k_n \in \mathbb{N}$, ώστε:

$$\frac{1}{3^{k_n+1}} \leq \delta(U_n) < \frac{1}{3^{k_n}}, \quad n = 1, 2, \dots, v.$$

Τότε $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_v$.

Το U_n τέμνει το πολύ ένα από τα διαστήματα που αποτελούν το E_{k_n} .

Εάν $j \geq k_n$, τότε το U_n τέμνει το πολύ 2^{j-k_n} από τα διαστήματα που αποτελούν το E_j . Άρα:

$$2^{j-k_n} = 2^j \frac{1}{2^{k_n}} = 2^j \frac{1}{3^{k_n s}} = 2^j 3^s \left(\frac{1}{3^{(k_n+1)}} \right)^s \leq 2^j 3^s \delta^s(U_n). \quad (A)$$

Το U_1 τέμνει το πολύ ένα από τα 2^{k_1} διαστήματα του E_{k_1} .

Το U_2 τέμνει το πολύ $2^{k_1-k_2}$ διαστήματα του E_{k_1} .

....

Το U_v τέμνει το πολύ $2^{k_1-k_v}$ από τα 2^{k_1} διαστήματα του E_{k_1} .

Επειδή τα $U_1, U_2, \dots, U_v$ τέμνουν όλα τα διαστήματα του E_{k_1} , θα πρέπει

$$1 + 2^{k_1-k_2} + \dots + 2^{k_1-k_v} \geq 2^{k_1}. \quad (\text{B})$$

Από τις (A) και (B) έχουμε:

$$\sum_{n=1}^v 2^{k_1} 3^s \delta^s(U_n) \geq 2^{k_1}, \quad \sum_{n=1}^v \delta^s(U_n) \geq \frac{1}{3^s} = \frac{1}{2}$$

Από την σχέση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta^s(U_n) \geq \frac{1}{2} = \frac{1}{3^s}$$

Έχουμε ότι $H^s(E) \geq \frac{1}{2}$.

Άρα για $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, $\frac{1}{2} \leq H^s(E) \leq 1$, επομένως $\dim_H E = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Θα υπολογίσουμε τώρα την $\dim_s E$.

Εάν $\frac{1}{3^k} < \delta \leq \frac{1}{3^{k-1}}$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε ο ελάχιστος αριθμός για να καλύψουμε το E με διαστήματα μήκους δ , είναι $N_\delta(E) \leq 2^k$. Άρα:

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \frac{k}{k-1} \quad (1)$$

Εάν $\frac{1}{3^{k+1}} \leq \delta \leq \frac{1}{3^k}$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε $N_\delta(E) \geq 2^k$. Άρα:

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \geq \frac{\log 2^k}{\log 3^{k+1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \frac{k}{k+1} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\dim_s E = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 2^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- [1] <http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html>
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Menger_sponge
- [3] Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως, Walter Rudin, Leader Books, Αθήνα, 2000
- [4] Barnsley M.F., (1988), Fractals Everywhere, Academic Press
- [5] Edgar G., (1990) Measure, Topology and Fractal Geometry Springer – Verlag
- [6] Falconer K.J., (1985), The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press
- [7] Falconer K.J., (1990), Fractal Geometry, John Wiley
- [8] Falconer K.J. (1990), Techniques in Fractal Geometry, John Wiley
- [9] Mattila P. (1995), Geometry of sets and Measures in Euclidean Spaces, Cambridge University Press
- [10] Rogers C.A., (1970), Hausdorff Measures, Cambridge University Press

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΦΡΑΚΤΑΛ
ΣΥΣΣΩΜΑΤΩΜΑΤΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα πρώτα 2 κεφάλαια είδαμε τα κύρια χαρακτηριστικά γνωρίσματα ενός φράκταλ αντικειμένου αλλά και τις ιδιότητες με τις οποίες διέπονται. Παρατηρήσαμε ότι εκτός από την δημιουργία εικαστικής τέχνης η φράκταλ γεωμετρία μπορεί να γίνει ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια της τεχνολογίας για την περαιτέρω ανάπτυξη της.

Στην περίπτωση μας λοιπόν βάση μιας κατασκευής φράκταλ αντικειμένου θα κάνουμε μια προσομοίωση για την διασκόρπιση των μορίων μέσα σε αερόσολες, στις αναρτήσεις των αυτοκινήτων, στις σόλες των παπουτσιών μας ακόμα και μέσα στον ζελέ. Δηλαδή μέσα από το σχηματισμό των παραπάνω αντικειμένων να παρατηρήσουμε κάτω από την άσκηση συγκεκριμένων δυνάμεων πώς αντιδρούνε και πως μπορούμε να τα βελτιώσουμε.

Σκοπός μας λοιπόν είναι να δημιουργήσουμε ένα αντικείμενο ώστε να μπορέσουμε να απεικονίσουμε το φως που εξέρχεται μέσω αυτού του αντικειμένου σε μια επίπεδη επιφάνεια και να παρατηρήσουμε την ένταση του φωτός η οποία δεν είναι ίδια παντού αλλά και αν η απεικόνιση αποτελεί φράκταλ αντικείμενο.

Σε αυτό το σημείο καλό θα ήταν να κάνουμε ένα διαχωρισμό. Το πείραμα μας μπορεί να επιτευχθεί με 2 τομείς της σύγχρονης επιστήμης. Ο ένας είναι ο κλάδος των μαθηματικών και ο άλλος είναι ο κλάδος της οπτικής. Οι δύο αυτοί κλάδοι ξεκινούν την προσέγγιση του πειράματος μας από τελείως διαφορετική σκοπιά αλλά παρόλα αυτά καταλήγουν και οι δύο στα ίδια ακριβώς συμπεράσματα. Όπως είναι αναμενόμενο εμείς θα εξετάσουμε το πείραμα μας από την σκοπιά των μαθηματικών [1].



Για μια σωστή κατασκευή χρειάζεσαι τα σωστά εργαλεία

3.0 Κατασκευή του φράκταλ αντικειμένου μας.

Για να ξεκινήσουμε την κατασκευή των αντικειμένων μας θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε το πρωτεύον υλικό που θα χρησιμοποιήσουμε. Θα πάρουμε λοιπόν πολύ μικρά σωματίδια μάζας m . Η μάζα m των σωματιδίων μπορεί να κυμαίνεται από βήμα σε βήμα ή να παραμένει σταθερή σε μία τιμή m_0 . Θεωρούμε λοιπόν ότι όσα σωματίδια χρησιμοποιούμε θα έχουν όλα την ίδια μάζα m_0 .

Στην περίπτωση μας όπου η μάζα παραμένει σταθερή m_0 για κάθε σωματίδιο θα πρέπει να ρίξουμε βάρος στον αριθμό διαστάσεων που θέλουμε να αποτελείται το σωματίδιο. Από τον αριθμό των διαστάσεων θα κυμαίνεται και το σχήμα του σωματιδίου. Στην περίπτωσή μας που ο χώρος μας αποτελείται από μια διάσταση το σωματίδιο, διότι έτσι έχουμε επιλέξει και όχι ότι υπάρχει κάποιος λόγος που περιοριζόμαστε στη μια διάσταση, θα έχει το σχήμα ενός τμήματος. Αν ο χώρος μας εκτείνεται σε μια ευθεία τότε τα σωματίδια μας όλα θα είναι ευθύγραμμα τμήματα ίσου μήκους. Εάν ο χώρος είναι καμπυλωμένος τότε τα σωματίδια μας θα είναι καμπυλωμένα άνισου μήκους το οποίο μήκος θα εξαρτάται από την καμπύλωση του χώρου. Αν πάμε στις δύο

διαστάσεις το σχήμα των σωματιδίων είναι εντελώς ακανόνιστο και τυχαίο.

Από την τοπολογία θα μπορούσαμε να ορίσουμε το σωματίδιο ως ένα κλειστό σύνολο ορισμένο από τον τύπο:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \alpha \text{ και } 0 \leq y \leq \beta \text{ όπου για τα } \alpha, \beta \text{ ισχύει } \alpha\beta = E \text{ όπου } E \text{ το εμβαδόν του σωματιδίου } m_0 \right\}$$

Μιας και αναφερθήκαμε πριν σε πολύ μικρά σωματίδια θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε ένα αντικείμενο βασισμένο στον μικρόκοσμο.

Για να μπορέσουμε να μπούμε στον κόσμο ενός φράκταλ συσσωματώματος θα πρέπει να καταλάβουμε όλες τις παραμέτρους οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στην πολύπλοκη δομή που παρουσιάζει. Πάρα πολλά ντετερμινιστικά φράκταλ μπορούμε να τα δούμε, ως μια ατελείωτη επανάληψη μιας κυψελίδας. Τα περισσότερα φράκταλ απαντιόνται στην φύση ενώ τις τελευταίες δεκαετίες προσπαθούμε να κατασκευάσουμε αντικείμενα φράκταλ που θα παρουσιάζουν τις συγκεκριμένες ιδιότητες που έχουμε πει στα κεφάλαια 1 και 2 όπως παραδείγματος χάριν αυτήν της αυτο-ομοιότητας.

Για να κατασκευάσουμε ένα φράκταλ συσσωμάτωμα πρέπει να ορίσουμε τις παραμέτρους και κάτω από ποιες συνθήκες θα γίνει η κατασκευή. Το φράκταλ συσσωμάτωμα αποτελείται από αρκετές παραμέτρους οι οποίες είναι πάρα πολύ σημαντικές μια προς μια και η καθεμία ξεχωριστά αποτελεί μια ιδιάζουσα περίπτωση. Ο λόγος είναι ότι καθώς μεταβάλλουμε μια από αυτές τότε το αντικείμενο μας παύει να παρουσιάζει φράκταλ ιδιότητες. Τις παραμέτρους του, τις παρουσιάζουμε και τις εξετάζουμε ξεχωριστά παρακάτω προσπαθώντας να αναλύσουμε πως επηρεάζουν το φράκταλ συσσωμάτωμα μας.

3.1.1 Η χωρική διάσταση.

Πρώτη παράμετρος που θα εξετάσουμε είναι η χωρική μας διάσταση. Όπως είπαμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου ένας

τρόπος για να γίνει αντιληπτός το εγχείρημά μας είναι να τοποθετήσουμε τα χέρια μας απέναντι από μια πηγή φωτός και να δούμε τις σκιές πάνω σε ένα επίπεδο. Σε αυτήν την περίπτωση όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό τα χέρια μας είναι τριών διαστάσεων, με μήκος, πλάτος και ύψος. Άρα λοιπόν όσο αφορά την χωρική διάσταση μπορούμε να μιλήσουμε για την πιο απλή περίπτωση της μιας διάστασης αλλά και να γενικεύσουμε στις 3 διαστάσεις. Οι N διαστάσεις αποτελούν μια γενίκευση των 3, οπότε εμείς σε αυτή την εργασία θα εργαστούμε με τις 3 και με όμοιο τρόπο ο αναγνώστης μπορεί να γενικεύσει στις N .

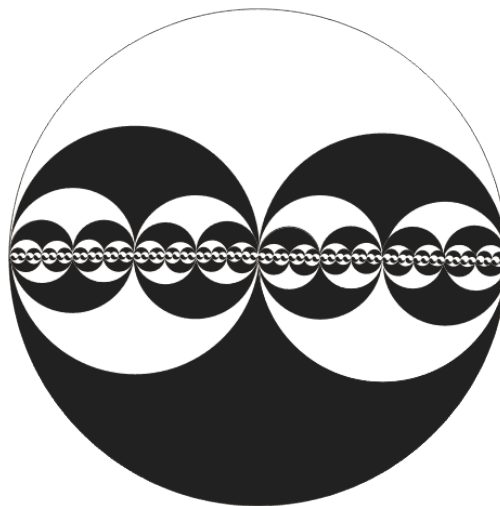
Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να γίνει μια διευκρίνιση. Όταν εννοούμε περιορισμό του αριθμού των διαστάσεων θα πρέπει να γίνει αντιληπτό ότι η διάσταση μπορεί να μην είναι με την πλατωνική έννοια μια ευθεία. Παρακάτω παρουσιάζουμε την κατασκευή ενός φράκταλ συσσωματώματος το οποίο έχει μια πολύ σημαντική ιδιαιτερότητα. Δεν το περιορίσαμε σε χωρικές διαστάσεις, με την έννοια ότι ναι μεν είμαστε σε μια διάσταση αλλά δεν θέσαμε τον περιορισμό της ευθείας ή μιας καμπύλης γραμμής. Δηλαδή μπορεί να μιλάμε για μια διάσταση αλλά παρ' όλα αυτά ο χώρος μας μπορεί να είναι άπειρος. Η μια διάσταση δηλαδή μπορεί να αποτελεί ένα σύστημα αναφοράς ενώ εμείς να μπορούμε να την παρατηρήσουμε σε ένα δισδιάστατο χώρο. Μέχρι στιγμής δηλαδή παρατηρούμε την δημιουργία ενός φράκταλ συσσωματώματος του οποίου δώσαμε άπειρο χώρο με την έννοια ότι δεν του δίνουμε άπειρο χώρο σε ευθεία αλλά σε έναν καμπυλωμένο χώρο.

Καταφέραμε λοιπόν να δούμε πως μπορεί να είναι ένα αντικείμενο σε μια διάσταση. Ας πάμε τώρα να γενικεύσουμε στις 3 διαστάσεις. Δηλαδή ενώ μέχρι πρότινος είχαμε μια διάσταση και τοποθετούσαμε πάνω της τα κομμάτια του φράκταλ συσσωματώματος τώρα μπορούμε να τα τοποθετούμε πιο ελεύθερα στον χώρο και ο περιορισμός της μιας διάστασης πλέον να μην υφίσταται. Όπως γίνεται αντιληπτό πλέον το αντικείμενο το οποίο θέλουμε να κατασκευάσουμε γίνεται πιο σύνθετο και η κατανομή της μάζας γίνεται πιο περίπλοκη. Και στην περίπτωση

της μιας διάστασης αλλά και στην περίπτωση των 3 θα θεωρούμε ως χώρο, το σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$.

3.1.2 Το πλήθος των σημείων.

Πάρα πολλά ντετερμινιστικά φράκταλ μπορούμε να τα δούμε από κατασκευαστικής άποψης ως μια ατελείωτη επανάληψη μιας κυψελίδας, τα οποία παρουσιάζουν συγκεκριμένες ιδιότητες όπως την αυτό-ομοιότητα και άλλες. Ένας γενικός τρόπος κατασκευής τέτοιων φράκταλ είναι με την μέθοδο της αναδρομικής πληθωρικότητας (recursive inflation) .



Εικόνα 1: Ένα παράδειγμα ενός recursive φράκταλ αντικειμένου.

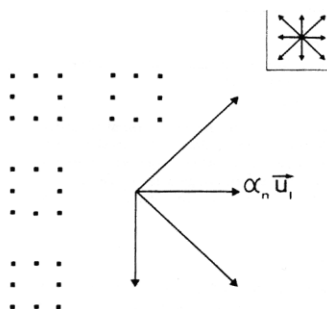
Η μέθοδος αυτή μας διασφαλίζει την δημιουργία ενός φράκταλ επηρεάζοντας εμείς τις παραμέτρους του αρχικά όπως θέλουμε έτσι ώστε να έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Στην προκειμένη περίπτωση αναφερόμαστε στον αριθμό των σημείων με τα οποία θα ξεκινήσουμε την δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος. Υπάρχουν 2 περιπτώσεις σε αυτήν την παράμετρο. Η πρώτη είναι να διαλέξουμε ένα σημείο και να τοποθετήσουμε την συστάδα ενώ η άλλη περίπτωση σαφώς πιο περίπλοκη αναφέρεται στην τοποθέτηση ενός πλέγματος N σημείων. Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε την ανάγκη ορισμού της πρώτης παραμέτρου, αυτής της

χωρικής διάστασης. Θεωρούμε λοιπόν ότι ξεκινάμε στον ευκλείδειο χώρο διάστασης E χωρίς να μας ενδιαφέρει άμεσα ο αριθμός των διαστάσεων όσο η μορφή αυτών.

Στο πρώτο βήμα τοποθετούμε το πρώτο σωματίδιο m_0 το οποίο ονομάζεται σωματίδιο έναρξης (initiator), ενώ στην περίπτωση όπου τοποθετούμε ένα σύνολο N σημείων τότε το σύνολο ονομάζεται γεννήτορας (generator). Όταν είμαστε στην πρώτη περίπτωση, αυτή του σωματιδίου m_0 (unit cell) τότε τα πράγματα είναι απλά. Παίρνοντας κάποια σημεία από έναν ακολουθιακό τύπο τον οποίο έχουμε ορίσει εμείς και τοποθετώντας στις αντίστοιχες θέσεις τις μοναδιαίες κυψελίδες, το πλήθος των οποίων εξαρτάται από το στάδιο, έχουμε την δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος.

Αναλόγως στην δεύτερη περίπτωση που θέλουμε να έχουμε N σημεία ξεκινάμε με την δημιουργία του γεννήτορα. Μπορούμε το κάθε άκρο του γεννήτορα να το ορίσουμε ως ένα διάνυσμα u_l όπου $l = 1, 2, \dots, N$.



Εικόνα 2: Ένα αναδρομικό φράκταλ με τον γεννήτορα πάνω δεξιά.

Οπότε το φράκταλ μας αποτελείται στο πρώτο στάδιο από N μοναδιαίες κυψελίδες τις οποίες έχουμε τοποθετήσει στα u_l διανύσματα. Στο δεύτερο βήμα, δηλαδή για $n=2$, ο γεννήτορας μεγαλώνει κατά έναν συντελεστή ξ_1 του οποίου την τιμή την καθορίζουμε εμείς. Άρα οι N πρώτης τάξης μοναδιαίες κυψελίδες καθορίζονται στα $\xi_1 u_l$ διανύσματα. Συνεχίζοντας όμοια αυτή την διαδικασία καταλήγουμε ότι ο γεννήτορας αυξάνεται επ' άπειρο κατά, $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_{n-1}$ στο νιοστό στάδιο και οπότε και οι N ($n-1$) τάξης μοναδιαίες κυψελίδες καθορίζονται στα $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_{n-1} u_l$ διανύσματα.

Για ευκολία θέτουμε $\alpha_j = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_j$ και $\alpha_0 = 1$. Όσο αφορά τώρα τους συντελεστές ξ μπορεί να είναι σταθεροί ή μπορεί να μεταβάλλονται αναλόγως το j .

Βασική προϋπόθεση ώστε να μπορούμε να δημιουργήσουμε το φράκταλ συσσωμάτωμα είναι να μην έχουμε overlapping. Δηλαδή για τα ξ_j θα πρέπει να ισχύει $\xi_j \geq 1$ για κάθε j . Το overlapping είναι η διαδικασία κατά την οποία το φράκταλ δεν μπορεί να αναπτυχθεί προς τις άλλες διαστάσεις αλλά αντιθέτως προσπαθεί να αναπτυχθεί προς το εσωτερικό του με αποτέλεσμα να εκτελεί μια διαδικασία ανακύκλωσης. Όταν $\xi_j = 1$ για $j = 0, \dots, n-1$ τότε η νιοστή συστάδα εκτελεί μια διασκόρπιση μέσα στο αρχικό μήκος που έχουμε θέσει. Δηλαδή το μήκος της κάθε συστάδας παραμένει ίδιο με το αρχικό. Εμείς θα αναφερθούμε στην περίπτωση όπου το ξ παραμένει σταθερό και δεν εξαρτάται καθόλου από το j . Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\alpha_j = \xi^j$ και όπως έχουμε ήδη δείξει από την εισαγωγή καταλήγουμε να έχουμε την φράκταλ διάσταση να ισούται με $D = \frac{\ln N}{\ln \xi}$.

Οπότε λοιπόν στο νιοστό βήμα οι N^n μοναδιαίες κυψελίδες καθορίζονται από ένα διάνυσμα της μορφής:

$$v = a_0 u_{l_1} + a_1 u_{l_2} + \dots + a_{n-1} u_{l_n} \text{ όπου } 1 < l_i < N.$$

Όπως γίνεται λοιπόν εύκολα αντιληπτό το μικρότερο μήκος που μπορεί να πάρει το φράκταλ συσσωμάτωμα είναι το μήκος της μοναδιαίας κυψελίδας ενώ το μεγαλύτερο, αναλόγως του σε ποιο στάδιο βρισκόμαστε, δίνεται από τον τύπο:

$$L(n) \cong (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}) \{ \sup |u_l - u_m| \}$$

Στην περίπτωσή μας αφού έχουμε θέσει το ξ να παραμένει σταθερό, δηλαδή $\alpha_j = \xi^j$, θα έχουμε ότι $L(n) \cong \xi^n \varepsilon$ όπου ε το μέγεθος της μοναδιαίας κυψελίδας. Σε αυτό το σημείο πρέπει να κάνουμε μια παρατήρηση. Μπορεί εύκολα κάποιος να παρατηρήσει ότι το μήκος του φράκταλ συσσωματώματος μπορεί να οριστεί και βάση του εξωτερικού μέτρου Lebesgue το οποίο έχουμε ορίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Οπότε λοιπόν στην περίπτωση μας ισχύει ότι:

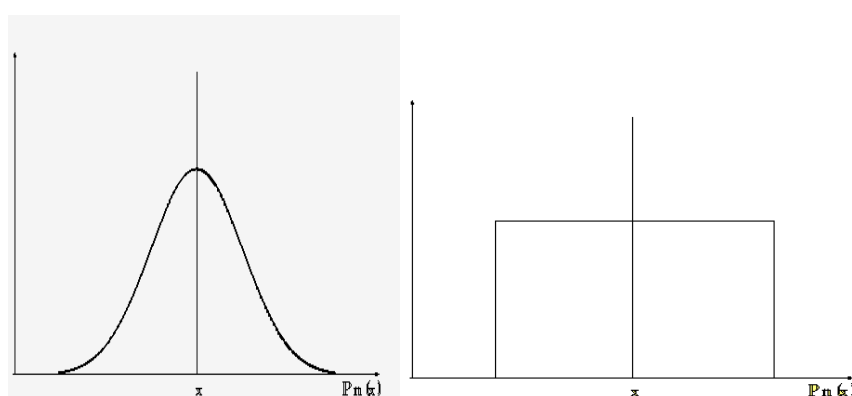
$$N^{-n}(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1})^E \rightarrow 0 \text{ όταν } n \rightarrow +\infty$$

Δηλαδή σύμφωνα με τον ορισμό του μέτρου Lebesgue το μήκος $L(n)$ αποτελεί ένα σύνολο με μηδενικό μέτρο Lebesgue.

3.1.3 Η συμμετρικότητα

Η συμμετρικότητα αποτελεί την 3^η παράμετρο στην διαδικασία μελέτης του τελεστή μας. Παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην κατασκευή του φράκταλ συσσωματώματος επειδή μπορεί να μας δημιουργήσει το μισό κομμάτι αυτού χωρίς κανέναν κόπο. Η συμμετρικότητα πολλές φορές μας οδηγεί σε πολύ χρήσιμα συμπεράσματα όπως π.χ. στην ιατρική. Το ανθρώπινο σώμα αποτελείται από 2 μισά κορμιά ενωμένα μεταξύ τους. Οι περισσότεροι μπορούν να πουν ότι αυτά τα κομμάτια είναι ίδια, αν όμως δουν την απεικόνιση των κοκάλων ενός σώματος μέσω μιας πλάκας ακτινών x θα παρατηρήσουν ότι αυτό δεν ισχύει. Δηλαδή μέσω της απεικόνισης των κοκάλων του ανθρώπινου σώματος καταλάβαμε την έλλειψη συμμετρικότητας του ανθρώπινου σώματος.

Η ιδιότητα της συμμετρικότητας εισάγεται πολλές φορές μέσα στο φράκταλ αντικείμενό μας ως και μια έμμεση ιδιότητα του πλήθους των σημείων που τοποθετούμε αρχικά. Αυτό αποκτάει ιδιαίτερη σημασία καθώς το φράκταλ αντικείμενο μας πλέον μπορεί να χαρακτηριστεί ως δίπλευρο ή μονόπλευρο. Δηλαδή εάν η κατανομή της μάζας έχει την γραφική παράσταση μιας εκ των δυο παρακάτω εικόνων (3-4).



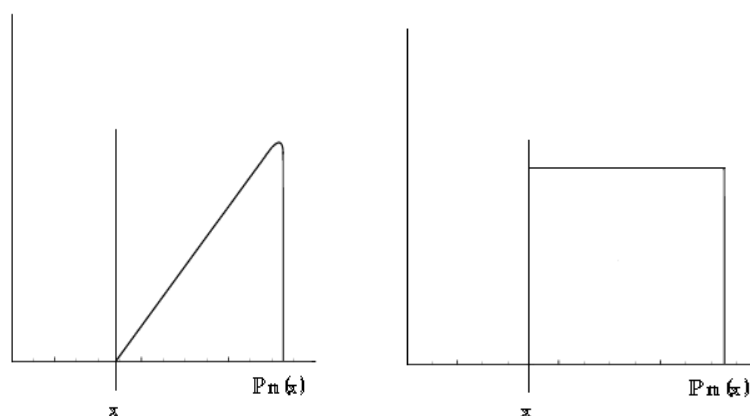
Εικόνα 3-4: Το Δίπλευρο συσσωμάτωμα - Η συνάρτηση πυκνότητας του φράκταλ συσσωματώματος.

Βλέπουμε λοιπόν στην εικόνα 3 την μάζα να συγκεντρώνεται κυρίως προς το πρώτο αρχικό μας σημείο. Σε αντίθεση βέβαια με την εικόνα 5

που παρατηρούμε ότι η τοποθέτηση της μάζας γίνεται μόνο προς τα δεξιά του αρχικού μας σημείου. Σε αυτό το σημείο καλό θα είναι να κάνουμε την διευκρίνιση ότι η συμμετρικότητα από το αν το φράκταλ συσσωμάτωμα μας είναι δίπλευρο ή μονόπλευρο έχει μεγάλη διαφορά. Υπάρχει δηλαδή η δυνατότητα το φράκταλ συσσωμάτωμα μας να είναι δίπλευρο αλλά να του ορίσουμε μια ακολουθία τοποθέτησης των μαζών τέτοια ώστε αλλιώς να γίνεται η τοποθέτηση από τα δεξιά και αλλιώς από τα αριστερά. Βλέπουμε δηλαδή ότι οι έννοιες του δίπλευρου και της συμμετρικότητας δεν συμβαδίζουν κατά ανάγκη. Παρόλα αυτά όμως εμείς στην παρούσα εργασία την έννοια της συμμετρικότητας θα την ταυτίσουμε με αυτήν της δίπλευρης κατανομής της μάζας μιας και δεν θα ασχοληθούμε με την προηγούμενη περίπτωση που είπαμε.

Στην εικόνα 3 η κατανομή της πιθανότητας της μάζας μας παρουσιάζεται ως μια κανονική κατανομή. Σίγουρα αυτή είναι μια πολύ γενική περίπτωση αλλά σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας δεν αποκλείεται μια τέτοια μορφή και εξάλλου στην παρούσα κατάσταση ασχολούμαστε με αυτήν την περίπτωση.

Στην περίπτωση λοιπόν του μονόπλευρου η κατανομή της μάζας δεν γίνεται συμμετρικά εκ των πραγμάτων. Σε μια τέτοια περίπτωση εξαιτίας της κατασκευής του φράκταλ συσσωματώματος η μάζα θα συγκεντρώνεται σε ένα πολύ μικρό διάστημα. Στην εικόνα 6 είναι η περίπτωση όπου η κατανομή της μάζας γίνεται προς το ένα άκρο του φράκταλ συσσωματώματος.



Εικόνες 5-6: Η συνάρτηση της πυκνότητας στο μονόπλευρο συσσωμάτωμα – Μονόπλευρο συσσωμάτωμα.

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση της πυκνότητας της μάζας ξεκινάει από το σημείο x και επεκτείνεται προς την πλευρά που έχουμε επιλέξει. Στην εικόνα 6 μπορούμε να δούμε το διάγραμμα της συνάρτησης της πυκνότητας.

Είναι πολύ σημαντικό να ξέρουμε αν το φράκταλ συσσωμάτωμα που κατασκευάζουμε είναι δίπλευρο ή μονόπλευρο επειδή έτσι θα ξέρουμε τους τελεστές μετατόπισης που χρειαζόμαστε πώς να τους ορίσουμε.

3.1.4 Τρόπος Δημιουργίας

Για την δημιουργία του φράκταλ αντικειμένου μας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 2 τρόπους. Πολύ σημαντικό ρόλο στην κατασκευή μας παίζει η συνάρτηση της πυκνότητας της μάζας. Όταν λέμε ότι παίζει σημαντικό ρόλο δεν εννοούμε στην παρούσα φάση τις ιδιότητες που προσδίδει στο φράκταλ συσσωμάτωμα αλλά πως θα την συνδυάσουμε με τον τελεστή που έχουμε. Ο πρώτος τρόπος είναι να πάρουμε την συνάρτηση πυκνότητας και σε κάθε στάδιο να μεταβάλλεται ο τελεστής ώστε στο τέλος να έχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα. Δηλαδή στο πρώτο στάδιο θα έχουμε $Af = f$, στο δεύτερο στάδιο θα έχουμε $A^2f = f$ και συνεχίζοντας με την ίδια διαδικασία καταλήγουμε $A^\infty f = f$ όπου A ο αρχικός μας τελεστής, ο A^2 ο τελεστής μας στο 2^ο στάδιο και ούτως καθεξής και με την f να είναι η συνάρτηση πυκνότητας της μάζας. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η f θα οριστεί από την αρχή και από εκεί και έπειτα δεν την «ξαναενοχλούμε». Αυτός ο τρόπος είναι ο πιο δύσκολος καθώς είναι πάρα πολύ δύσκολο να δημιουργήσεις μια τέτοια συνάρτηση εξαρχής με όλες τις απαραίτητες ιδιότητες. Σε κάθε στάδιο θα πρέπει να μεταβάλλεται ο τελεστής του οποίου οι πράξεις είναι πιο δύσκολες και επίπονες.

Από την στιγμή λοιπόν που παρουσιάστηκαν τόσα προβλήματα σκεφτήκαμε να μεταβάλουμε πλέον την συνάρτηση και να παραμένει στάσιμος ο τελεστής μας. Ο τρόπος αυτός δουλεύει κυρίως με την ασυμπτωτική προσέγγιση της κατάλληλης συνάρτησης ώστε να μπορέσουμε να έχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα. Δηλαδή, έχουμε την f_1 και προσπαθούμε μέσω βημάτων να έχουμε $f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow \dots \rightarrow$

f_∞ ώστε στο τέλος να μας δίνεται η σχέση: $Af_1 = f_\infty$ όπου A ο τελεστής που έχουμε διαλέξει εξαρχής και f_1 η συνάρτηση πυκνότητας της μάζας στο πρώτο βήμα, η f_2 η συνάρτηση πυκνότητας της μάζας στο 2^ο στάδιο και ούτως καθεξής.

Σε αυτήν την εργασία ασχολούμαστε μόνο με την 2^η περίπτωση την οποία και εφαρμόζουμε στο κεφάλαιο 3 για την κατασκευή όλων των φράκταλ συσσωματωμάτων που εξετάζουμε.

3.1.5 Τρόπος Κατασκευής

Το φράκταλ μπορεί να αναπαραχθεί με δυο διαφορετικούς μεταξύ τους τρόπους. Ο μεν πρώτος είναι ο bottom-up (**BU** - iterative inflation) και ο δεύτερος είναι ο top down (**TD** – iterative refinement). Στον **BU** έχουμε το μικρότερο κομμάτι να το παίρνουμε ως δεδομένο και η κατασκευή μας να εμφανίζεται σε μεγαλύτερες κλίμακες όλο και πιο έντονη. Με αυτόν τον τρόπο στην ουσία ξεκινάμε την δημιουργία με την λογική ότι παίρνουμε το πρώτο στάδιο και από αυτό κατασκευάζουμε τα άλλα. Με τον δεύτερο τρόπο, **TD**, μπορούμε να δημιουργήσουμε το φράκταλ εκτελώντας μια ανάποδη διαδικασία. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε έτοιμο το φράκταλ και εμείς το διαλύουμε σιγά, σιγά έτσι ώστε να μπορούμε να καταλαβαίνουμε με ποιον τρόπο έχουν τοποθετηθεί τα σωματίδια. Εάν προτιμήσουμε να εκτελέσουμε την μέθοδο **TD** τότε θα πρέπει να δημιουργήσουμε το φράκταλ με μια αντίστροφη συνάρτηση. Όπως γίνεται αντιληπτό η διαδικασία **TD** είναι πιο σύνθετη και πιο δυσνόητη και δεν είναι τόσο απλή όσο η **BU**.

Σε αυτήν τη εργασία δεν επεκτεινόμαστε στην μέθοδο **TD** αλλά δημιουργούμε όλα τα φράκταλ συσσωματώματα με την μέθοδο **BU** η οποία γίνεται πιο εύκολα αντιληπτή. Ο λόγος είναι ότι ναι μεν σαν μαθηματικά το μόνο που αλλάζουμε είναι τους τελεστές μας αλλά η όλη διαδικασία γίνεται πολύ δυσκίνητη για να γίνει αντιληπτή χωρίς μαθηματικά. Σε αντίθετη περίπτωση όμως η **BU** μπορεί να περιγραφεί αρχικά χωρίς αρκετά μαθηματικά και στην συνέχεια αναγκαστικώς συνεχίζουμε με μαθηματικά.

3.1.6 Ανακλιμάκωση, μετατόπιση ή και τα δυο.

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό η δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος βασίζεται στην επανάληψη. Δηλαδή στο πρώτο στάδιο εκτελούμε μια διαδικασία την οποία διαδικασία πρέπει να ξαναεκτελέσουμε στο επόμενο με την μόνη διαφορά ότι οι αρχικές μας τιμές διαφέρουν από στάδιο σε στάδιο. Άρα λοιπόν το γεγονός της μετατόπισης ή της ανακλιμάκωσης ή και των δυο μαζί, για το αντικείμενό μας είναι πολύ σημαντική. Η σημαντικότητα αυτής της διαδικασίας μεταφέρεται άμεσα μέσα στον γενικό τελεστή του φράκταλ μας. Η διαδικασία της μετατόπισης και της ανακλιμάκωσης επιτυγχάνετε με την παρουσία ενός τελεστή. Αυτός ο τελεστής όμως αποτελεί ένα κομμάτι του τελικού τελεστή μας. Αν παραδείγματος χάρη επιλέξουμε το φράκταλ μας να είναι συμμετρικό τότε χρειαζόμαστε 2 τελεστές μετατόπισης οι οποίοι θα είναι κομμάτια του τελικού μας τελεστή.

Ορισμός:

Ο τελεστής μετατόπισης αποτελείται από δυο επιμέρους τελεστές μετατόπισης. Ο ένας θα μετατοπίζει το φράκταλ συσσωμάτωμα προς τα δεξιά ενώ ο δεύτερος θα μετατοπίζει το φράκταλ συσσωμάτωμα προς τα αριστερά. Άρα θα έχουμε :

$$\mathcal{F} = T_{\alpha} + T_{\beta}$$

Αναλόγως την συμμετρικότητα ή μη του φράκταλ συσσωμάτωμα ο συντελεστής μετατόπισης β θα μεταβάλλεται και ο τύπος του τελεστή μας θα γίνεται:

$$\mathcal{F} = T_{\alpha} + T_{-\alpha}$$

■

Για να γίνουμε πλήρως αντιληπτοί για το τι ακριβώς εννοούμε ως πάρουμε και το παράδειγμα της μετατόπισης του φράκταλ συσσωματώματος με ανακλιμάκωση. Ο τελεστής της μετατόπισης είναι διαφορετικός προφανώς από αυτόν της ανακλιμάκωσης.

Ορισμός:

Ο τελεστής ανακλιμάκωσης είναι της μορφής:

$$\mathcal{F} = C_s(f)$$

,όπου s ο συντελεστής ανακλιμάκωσης. Επειδή όμως η δημιουργία του κατάλληλου τελεστή απαιτεί ολόκληρη διαδικασία παρακάτω παραθέτουμε όλους τους τελεστές με λεπτομέρειες.

■

Η επιλογή των τελεστών αποτελεί την τελευταία παράμετρο την οποία πρέπει να εξετάσουμε ώστε να δημιουργήσουμε το φράκταλ συσσωμάτωμα. Στο 4^ο κεφάλαιο που εξετάζουμε ορισμένα παραδείγματα από φράκταλ συσσωματώματα θα ορίζουμε πρώτα τις 6 παραμέτρους ώστε μέσω αυτών να παρατηρήσουμε τις διαφορές που δημιουργούνται.

3.2 ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

3.2.0 Τελεστές και εσωτερικό γινόμενο.

Ο ρόλος που παίζουν οι τελεστές στην θεωρητική Φυσική, είναι μεγάλος. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στην Κβαντομηχανική αντιστοιχούμε σε κάθε φυσικό μέγεθος έναν αυτοσυναφή (Hermitian) τελεστή, του οποίου οι ιδιοτιμές είναι οι δυνατές τιμές του φυσικού μεγέθους. Βρίσκοντας λοιπόν τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου Hermitian τελεστή από την εξίσωση ιδιοτιμών, ξέρουμε και τις τιμές του φυσικού μεγέθους. Βλέπουμε λοιπόν ότι η αναγκαιότητα των τελεστών στην σημερινή Φυσική είναι απαραίτητη. Αυτό το γεγονός οδήγησε την επιστήμη των μαθηματικών στην δημιουργία ενός νέου κλάδου, της θεωρίας τελεστών. Οι τελεστές θα μπορούσαν να θεωρηθούν κάλλιστα ως ένα πολύ δυνατό εργαλείο σε αυτόν που κατέχει την γνώση τους αλλά και σε αυτόν που θέλει να περιγράψει ένα καθημερινό πρόβλημα φυσικής με μαθηματικούς όρους.

Ένας τελεστής παριστάνεται συνήθως με ένα σύμβολο το οποίο τίθεται μπροστά από μια συνάρτηση (με τη γενική έννοια) και την αλλάζει σε κάποια άλλη συνάρτηση των ίδιων μεταβλητών [2]. Οι τελεστές συμβολίζονται συνήθως με ένα κεφαλαίο γράμμα με την προσθήκη του σύμβολου "Λ" πάνω του, π.χ. : $\hat{A}$.

Ένα παράδειγμα τελεστή είναι αυτός της παραγώγισης $\hat{D}$, ο οποίος για μια μονοδιάστατη συνάρτηση μεταβλητής x , έχει τη μορφή: $\hat{D} = \frac{d}{dx}$. Γενικά μπορεί κανείς να ορίσει μέσω τελεστή οποιονδήποτε μετασχηματισμό. Για παράδειγμα, η "πράξη" της μετατόπισης του γραφήματος μιας συνάρτησης κατά 5 μονάδες προς τα δεξιά θα συμβολίζεται ως: $\hat{T}f(x) = f(x - 5)$, όπου $\hat{T}$ ο τελεστής της συγκεκριμένης πράξης και $f(x)$ τυχούσα συνάρτηση, επί της οποίας δρα. Τον τελεστή της μετατόπισης θα τον συναντήσουμε και θα τον χρησιμοποιήσουμε παρακάτω αρκετές φορές.

Ορισμός:

Δοθέντων δύο γραμμικών διανυσματικών χώρων V_1 και V_2 , καλούμε τελεστή ή μετασχηματισμό την απεικόνιση A που δρα ως εξής:

$$V_1 \supseteq D_A \ni \psi \rightarrow \varphi \in R_A \subseteq V_2$$

δηλαδή, σε στοιχείο του υποσυνόλου D_A (πεδίο ορισμού) του χώρου V_1 , η A αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα στοιχείο του υποσυνόλου R_A (πεδίο τιμών) του χώρου V_2 .

■

Συμβολικά γράφουμε : $\hat{A}\vec{\psi} = \vec{\varphi}$, όπου τα βέλη μπορούν να παραλείπονται χάριν απλότητας [3]. Η ίδια σχέση με το συμβολισμό του Dirac που χρησιμοποιείται ευρέως σε προβλήματα κβαντομηχανικής γράφεται: $\hat{A}|\psi\rangle = |\varphi\rangle$.

Ορισμός:

Ένας τελεστής T λέγεται γραμμικός αν για οποιαδήποτε διανύσματα $|x\rangle, |y\rangle$ του διανυσματικού χώρου στον οποίο δρα ο τελεστής, και για κάθε αριθμούς l, m (πραγματικούς ή μιγαδικούς) ισχύει:

$$T (l|x> + m|y>) = l(T|x>) + m (T|y>)$$

Επίσης θα μπορούσαμε να πούμε και ότι εάν $V=W$ η γραμμική απεικόνιση $T: V \rightarrow V$ λέγεται γραμμικός τελεστής.

■

π.χ. Η παράγωγος είναι ένας γραμμικός τελεστής.

Ιδιότητες:

Αν T_1, T_2 γραμμικοί τελεστές, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$1.(T_1 + T_2)|x> = T_1 |x> + T_2 |x>$$

$$2.(T * I_1) |x> = I_1 * (T|x>)$$

$$3.(T_1 * T_2) |x> = T_1 * (T_2|x>)$$

■

Η αναγκαιότητα χρήσης των τελεστών μας οδήγησε έμμεσα στην χρησιμοποίηση του εσωτερικού γινομένου. Το εσωτερικό γινόμενο που θα χρησιμοποιούμε σε αυτήν την εργασία θα είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός:

Για χώρους πεπερασμένων διαστάσεων με $a=(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 $b=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως:

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^i y_i$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την αθροιστική σύμβαση.

■

Τους διανυσματικούς χώρους τους εφοδιάζουμε με κάποιο εσωτερικό γινόμενο όπου στην περίπτωση μας είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Ιδιότητες:

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\langle a, b \rangle$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$\alpha) \langle a+b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$$

$$\beta) \langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$$

$$\gamma) \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle^*$$

$$\delta) \langle a, a \rangle > 0 \text{ εάν } a \neq 0$$

οι οποίες μας χρειάζονται παρακάτω.

3.2.1 Συζυγής τελεστής (adjoint operator)

Όπως είπαμε και πριν υπάρχουν πάρα πολλά είδη τελεστών. Στην κατασκευή ενός φράκταλ αντικειμένου, την οποία και πραγματεύεται η παρούσα εργασία, μας είναι απαραίτητη η χρήση ενός ειδικού τελεστή πάνω στον οποίο θα βασιστεί η κατασκευή του φράκταλ, ο οποίος αποκαλείται συζυγής [2,4].

Ορισμός:

Δεδομένου του εσωτερικού γινομένου σε κάθε γραμμικό τελεστή (μετασχηματισμό) A μπορούμε να ορίσουμε με μοναδικό τρόπο το συζυγή του (ή συναφής ή συζυγοανάστροφος ή προσαρτημένος) από τη σχέση:

$$\langle x, A y \rangle = \langle A^+ x, y \rangle$$

■

Πρόταση:

Ο τελεστής A^+ που ορίζεται με αυτό τον τρόπο είναι ένας γραμμικός τελεστής και είναι μοναδικός.

■

Απόδειξη: Δουλεύοντας την παραπάνω σχέση για τυχαία x, y έχουμε:

$$\langle x + y, Az \rangle = \langle x, Az \rangle + \langle y, Az \rangle = \langle A^+x, z \rangle + \langle A^+y, z \rangle = \langle A^+x + A^+y, z \rangle$$

αποδεικνύουμε την μοναδικότητα του συζυγή τελεστή.



Ιδιότητες:

Βάση του ορισμού καταλήγουμε στις εξής βασικές ιδιότητες:

$$1. A^+x + A^+y = A^+(x + y) \quad (A)$$

$$2. \lambda A^+x = A^+(\lambda x) \quad (B)$$

Δουλεύοντας λοιπόν τις (A) και (B) καταλήγουμε στις εξής ιδιότητες:

$$1. (A + B)^+ = A^+ + B^+$$

$$2. (\lambda A)^+ = \lambda^* A^+$$

$$3. (A^+)^+ = A$$

$$4. I^+ = I \quad (I \text{ η μονάδα})$$

$$5. (AB)^+ = B^+ A^+$$

$$6. (A^{-1})^+ = (A^+)^{-1}$$



Για να καταλάβουμε περισσότερο το τι ακριβώς κάνει ο συζυγής τελεστής χρειαζόμαστε την παρακάτω πρόταση. Θα πάρουμε μια τυχαία βάση.

Πρόταση:

Ο πίνακας που αντιστοιχεί στο συζυγή τελεστή είναι ο ερμιτιανός ανάστροφος του πίνακα του αρχικού μας τελεστή.



Απόδειξη:

Παίρνουμε ως βάση του διανυσματικού χώρου την e_i με $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Τότε η δράση του τελεστή A προσδιορίζεται από τον πίνακα $A_{ij} = \langle e_j, Ae_i \rangle$ επειδή ξέρουμε ότι ισχύει: $Ae_j = A_{ij}e_i$. Θεωρούμε τώρα τη δράση του A ως: $A^+e_j = B_{ij}e_j$. Τότε:

$$B_{ij} = \langle e_i, A^+e_j \rangle = \langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_j, Ae_i \rangle^* = A_{ji}^*.$$



Ορισμός:

Εάν $T = T^+$ τότε ο τελεστής T ονομάζεται αυτοσυναφής τελεστής ή αυτοπροσαρτημένος (self adjoint). Σε έναν πραγματικό χώρο εσωτερικού γινομένου, ένας αυτοσυναφής τελεστής ονομάζεται συμμετρικός.



Παρατηρήσεις

α) Σε χώρους απείρων διαστάσεων δεν είναι αναγκαίο να υπάρχει συζυγής τελεστής. π.χ. ο γραμμικός τελεστής της διαφόρισης με μέτρο το l_2 δεν έχει συζυγή εκτός εάν ικανοποιούνται κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Όταν ο τελεστής είναι φραγμένος υπάρχει μοναδικός συζυγής.

β) Ο συζυγής τελεστής δεν εξαρτάται μόνο από τον τελεστή, εξαρτάται και από το εσωτερικό γινόμενο.

3.2.2 Είδη τελεστών

Παρακάτω παραθέτουμε κάποια ήδη τελεστών τα οποία θεωρούνται τετριμμένα και γι' αυτό τον λόγο δεν γίνεται ιδιαίτερη αναφορά σε αυτά. Παρόλα αυτά όμως απλώς παρουσιάζονται μιας και εμφανίζονται μέσα στην εργασία. Ο πίνακας που ακολουθεί μας δίνει στην δεξιά του

πλευρά τον τυχαίο τελεστή T ο οποίος είναι ορισμένος στον διανυσματικό χώρο V . Από την αριστερή πλευρά του πίνακα έχουμε τον αντίστοιχο πίνακα σε καθεμία από τις περιπτώσεις του τελεστή. Με αυτόν τον πίνακα παρατηρούμε ότι η σχέση μεταξύ πίνακα και τελεστή είναι αρμονικά συνδεδεμένες και ότι μετάβαση από την μία περίπτωση στην άλλη γίνεται πολύ εύκολα είτε ευθέως είτε αντιστρόφως.

Πίνακας $A = a_{ij}$	Τελεστής $T: V \rightarrow V$
1. <u>Ταυτοτικός (identical)</u> $(A)_{ij} = a_{ij} = \delta_{ij}$	<u>Ταυτοτικός</u> $\langle e_i T e_j \rangle = \delta_{ij}$
2. <u>Ανάστροφος (transpose)</u> $(A)_{ij} = a_{ij} \quad (A^t)_{ij} = a_{ji}$ $a_{ij} = a^{tji}$	<u>Ανάστροφος</u> $\langle e_i T e_j \rangle = \langle e_j T^t e_i \rangle = \langle T^t e_i e_j \rangle$ $\langle e_i T e_j \rangle = \langle e_j T^t e_i \rangle$
3. <u>Συζυγής (conjugate)</u> $(A)_{ij} = a_{ij} \quad (A^*)_{ij} = a_{ij}^*$ $(a^{ij})^* = a_{ij}$	<u>Συζυγής</u> $\langle e_i T e_j \rangle^* = \langle e_i I^\wedge e_j \rangle$
4. <u>Συναφής (adjoint)</u> $(A)_{ij} = a_{ij}$ $(A^+)_{ij} = a_{ji}^*$	<u>Συναφής ή συζυγοανάστροφος</u> $\langle e_i T^+ e_j \rangle = \langle e_j T e_i \rangle^* = \langle T e_j e_i \rangle$
5. <u>Αυτοσυναφής (self adjoint)</u> $(A)_{ij} = a_{ij} \quad (A^+)_{ij} = a_{ji}^*$ $A = A^+ \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}^*$	<u>Αυτοσυναφής</u> $\langle e_i T e_j \rangle = \langle e_j T e_i \rangle^* = \langle T e_i e_j \rangle$
6. <u>Συμμετρικός (symmetric)</u> $\text{Αν } a_{ij} \in \mathbb{R} \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow$ $A = \text{συμμετρικός πίνακας}$	<u>Συμμετρικός</u> $\langle e_i T e_i \rangle = \langle T e_j e_j \rangle$ $\text{Αν } V \text{ Ευκλείδειος χώρος}$ τότε αυτοσυζυγής.

3.2.3 Ορισμός και δημιουργία τελεστών.

Η κατασκευή του φράκταλ συσσωματώματος όπως έχουμε ήδη πει εξαρτάται πάρα πολύ από την επιλογή των τελεστών. Για να το κατασκευάσουμε λοιπόν θα πρέπει να τοποθετήσουμε την μάζα του φράκταλ συσσωματώματος αναλόγως με το μήκος που έχουμε διαλέξει. Από την στιγμή που τοποθετούμε μάζες είναι αναμενόμενο το φράκταλ συσσωμάτωμα μας να μεγαλώνει και να αυξάνεται το μήκος του επ' άπειρον. Αυτό το γεγονός συμβαίνει εξαιτίας της μετατόπισης του φράκταλ συσσωματώματος. Άρα ο τελεστής της μετατόπισης αναλόγως το στάδιο μετατοπίζει την συνάρτηση της πυκνότητας κατά μία σταθερά δεξιά, αριστερά και αν έχουμε συμμετρικότητα, δηλαδή διπλευρικότητα, θα το μετατοπίζει και προς τις 2 κατευθύνσεις. Για να μπορέσουμε τώρα να «συμμαζέψουμε» το φράκταλ συσσωμάτωμα εισαγάγουμε τον τελεστή της ανακλιμάκωσης και πιο συγκεκριμένα τον τελεστή της σμίκρυνσης. Βάση αυτών των 2 τελεστών μπορούμε να υλοποιήσουμε την δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος.

Ορισμός:

Ο τελεστής της μετατόπισης δίνεται από τον τύπο:

$$T_{\alpha}f(x) = f(x + \alpha), \quad (1)$$

όπου $f(x)$ είναι τυχαία συνάρτηση και α είναι ο συντελεστής μετατόπισης με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Για τον συντελεστή μετατόπισης ισχύει ότι:

- αν $\alpha > 0$ τότε έχουμε μετατόπιση προς τα αριστερά ενώ,
- αν $\alpha < 0$ έχουμε μετατόπιση προς τα δεξιά.

■

Απόδειξη:

Παίρνοντας το δεύτερο μέλος της (1) έχουμε ότι:

$$f(x + \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

,από τον ορισμό των σειρών Taylor. Από τις ιδιότητες αυτών καταλήγουμε:

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} f^{(n)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \right) f(x) = T_a f(x)$$



Από τον παραπάνω ορισμό και με την χρήση απλών ιδιοτήτων να καταλήξουμε σε μια διαφορετική μορφή του τύπου του τελεστή μετατόπισης από τον παραπάνω.

Δηλαδή:
$$T_a f(x) = e^{a \frac{d}{dx}} f(x)$$

Επειδή παρακάτω χρησιμοποιούμε αρκετά τον συγκεκριμένο τελεστή θα τον συμβολίζουμε ως:

$$T_a = e^{a \frac{d}{dx}} \quad (A)$$

Θέλοντας λοιπόν να δημιουργήσουμε το φράκταλ συσσωμάτωμα παρατηρούμε ότι ναι μεν έχουμε μετατόπιση αλλά από το προηγούμενο στάδιο δεν θέλουμε να χάσουμε τη μάζα που έχουμε από πριν. Στην ουσία λοιπόν μπορούμε να αποκαλούμε την διαδικασία που κάνουμε μετατόπιση αλλά δεν είναι και ακριβώς μετατόπιση. Η μετατόπιση είναι η μετακίνηση ενός αντικειμένου, δηλαδή η αλλαγή της αρχικής του θέσης.

Στην περίπτωση μας εμείς μετατοπίζουμε το αντικείμενό μας σε μια νέα θέση και στην αρχική του θέση τοποθετούμε ένα ίδιο αντικείμενο ακριβώς όπως το αρχικό μας. Άρα λοιπόν αναμενόμενο είναι να προσαρμόσουμε αυτή την ιδιότητα του φράκταλ συσσωμάτωμα μέσα στον τελεστή μετατόπισης. Στα μαθηματικά όλη αυτή η διαδικασία επιτυγχάνεται με την βοήθεια του ταυτοτικού τελεστή. Οπότε:

Πόρισμα:

Με την χρήση του ταυτοτικού τελεστή μπορούμε για μια τυχαία συνάρτηση να μετατοπίσουμε το γράφημα της συνάρτησης αλλά και συγχρόνως να παραμείνει στην αρχική της θέση.

Απόδειξη: Για τυχαία συνάρτηση $f(x)$ έχουμε:

$$(\mathbb{I} + T_a)f(x) = \mathbb{I}f(x) + T_af(x) = f(x) + f(x+a)$$

όπου $\mathbb{I}$ έχουμε τον ταυτοτικό τελεστή και T_a τον τελεστή μετατόπισης.



Η διαδικασία της ανακλιμάκωσης και πιο συγκεκριμένα της σμίκρυνσης γίνεται και αυτή με την βοήθεια των τελεστών. Στην αρχή μιλήσαμε για ανακλιμάκωση αλλά εμάς μας ενδιαφέρει κυρίως η διαδικασία της σμίκρυνσης και όχι της μεγέθυνσης. Ακολουθώντας θα μιλάμε για ανακλιμάκωση επειδή η διαδικασία που ακολουθούμε είναι ίδια και για τις 2 περιπτώσεις.

Ορισμός:

Ο τύπο της ανακλιμάκωσης δίνεται από την σχέση:

$$C_s = e^{\ln s x \frac{d}{dx}}$$



Θέτουμε ότι $\frac{d}{dx} = D$. Οπότε από τον παραπάνω ορισμό θα έχουμε:

$x \frac{d}{dx} f(x) = x f'$. Άρα σύμφωνα με τον συμβολισμό που δώσαμε θα έχουμε: $x D(f(x))$.

Γενικά στις άλγεβρες των Τελεστών ισχύει ότι $x D \neq D x$. Στην δική μας περίπτωση θέλουμε να ισχύει: $D x - x D = 1$. Ο χώρος πλέον που έχουμε θα τον ονομάσουμε Άλγεβρα τελεστών «Act» και όπως είναι αναμενόμενο διέπεται από ξεχωριστές και ιδιαίτερες ιδιότητες με κύριο εκφραστή όλων αυτών τον ορισμό του χώρου.

Λήμμα:

Στην Άλγεβρα τελεστών «Act» ισχύει ότι :

$$Dx - xD = 1 \quad (B)$$

■

Απόδειξη: Έστω ότι ισχύει η (B) για μία τυχαία συνάρτηση $f(x)$. Οπότε:

$$\begin{aligned} Dx[f(x)] - xD[f(x)] &= f(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (xf(x))' - xf'(x) &= f(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) - xf'(x) &= f(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) &= f(x). \end{aligned}$$

▲

Ορισμός

Ο τελεστής της ανακλιμάκωσης μέσω των ιδιοτήτων του χώρου δίνεται από την σχέση:

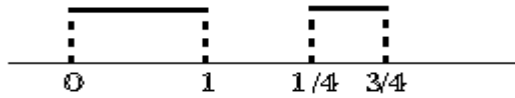
$$C_s f(x) = f(sx)$$

όπου από την στιγμή που θέλουμε να έχουμε σμίκρυνση θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$0 < s < 1.$$

■

Για παράδειγμα εάν πάρουμε $s = 1/2$ τότε το διάστημα με μήκος 1 το μικραίνει κατά το ήμισυ και το διάστημα πλέον αφού έχει δράσει πάνω του ο τελεστής ανακλιμάκωσης θα έχει μήκος $1/2$.



Εικόνα 7: Η σμίκρυνση ενός ευθυγράμμου τμήματος αρχικού μήκους 1.

Λήμμα:

Από τον ορισμό του τελεστή της ανακλιμάκωσης και με την βοήθεια των σειρών Taylor ο τελεστής μας μπορεί να γραφεί ως:

$$C_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln s)^n}{n!} (xD)^n$$

■

Απόδειξη:

Αν θέλουμε λοιπόν μπορούμε να εμφανίσουμε τον τελεστή ως σειρά από τον τύπο:

$$C_s = e^{(\ln s)x \frac{d}{dx}} = e^{(\ln s)xD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln s)^n}{n!} (xD)^n$$

▲

Θα πρέπει να προσέξουμε το γεγονός ότι βρισκόμαστε στην άλγεβρα τελεστών «Act» και η σχέση: $(xD)^n$ δίνεται από τις ιδιότητες που θέσαμε πριν. Δηλαδή:

$$(xD)^1 = xD$$

$$(xD)^2 = xDxD = x(1 + xD)D = xD + x^2D^2$$

$$\begin{aligned} (xD)^3 &= xDxDxD = x(1 + xD)(1 + xD)D = (x + x^2D)(1 + xD)D = \\ &= (x + x^2D + x^2D + x^3D^2)D = xD + x^2D^2 + x^3D^3. \end{aligned}$$

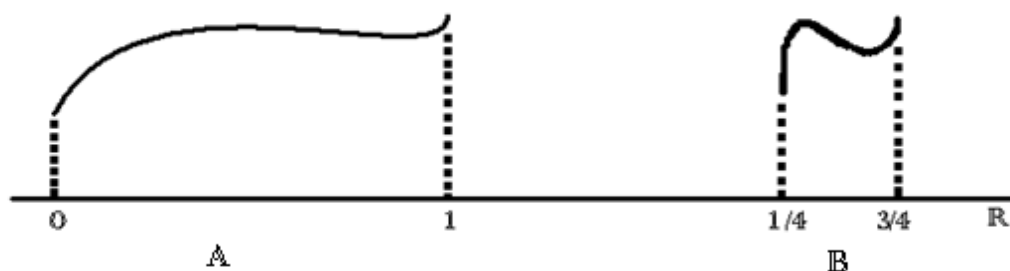
Και ούτω καθ' εξής.

3.2.4 Το πρόβλημα του τελεστή της ανακλιμάκωσης από την σκοπιά της Φυσικής.

Η διαδικασία της ανακλιμάκωσης κάνει το γράφημα της συνάρτησης της πυκνότητας του φράκταλ συσσωματώματος πολύ πιο περίπλοκο. Δηλαδή ναι μεν καταφέρνει να το συρρικνώνει αλλά διάφορες καμπυλώσεις της συνάρτησης μας δυσκολεύουν πάρα πολύ. Αν η συνάρτησή μας είναι η σταθερή ευθεία τότε η σμίκρυνση δεν θα είχε κανένα πρόβλημα καθώς θα έπαιρνε ένα διάστημα της συνάρτησης και θα το έκανε μικρότερο. Δηλαδή θα έπαιρνε ένα κομμάτι και απλώς θα του έκοβε τις άκρες, θα μπορούμε να φανταστούμε χοντρικά. Στην περίπτωση όμως που έχουμε και πραγματευόμαστε εμείς η συνάρτηση της πυκνότητας είναι καμπύλη γραμμή με τοπικά ελάχιστα και μέγιστα. Η σμίκρυνση της συνάρτησης μπορούμε να φανταστούμε ότι γίνεται με την τοποθέτηση δυο τούβλων αριστερά και δεξιά από το κομμάτι της συνάρτησης και ξεκινάμε να σπρώχνουμε προς το εσωτερικό της συνάρτησης. Αυτή η διαδικασία όμως έχει σαν επακόλουθο οι καμπυλωμένες περιοχές της συνάρτησης να αποκτούν απότομες καμπυλώσεις με κίνδυνο να αλλάξει πλήρως η εμφάνιση της συνάρτησης.

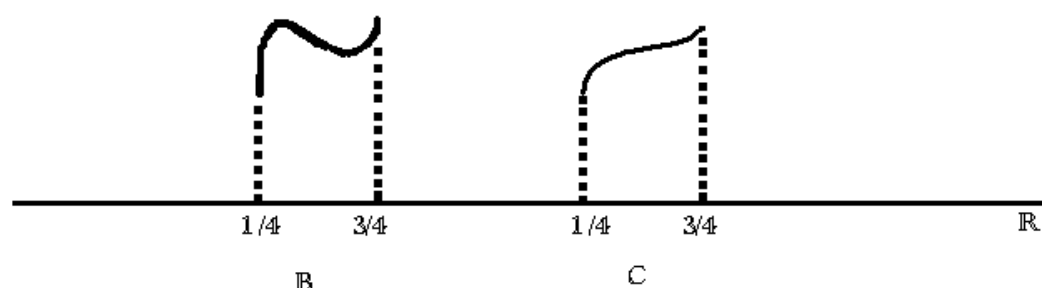
Στην εικόνα 8 παρακάτω παρατηρούμε ότι έχουμε την συνάρτηση $f(x)$ στην περίπτωση Α. Στην περίπτωση Β, όπου $f(sx)$, παρατηρούμε τις ομαλές καμπυλώσεις της Α περίπτωσης να γίνονται πιο απότομες και γενικά η διαδικασία της σμίκρυνσης είναι σαν διαδικασία συμπίεσης. Από την στιγμή που συμπιέζουμε ένα αντικείμενο κύριο χαρακτηριστικό της ύλης είναι να κινηθεί προς την κατεύθυνση όπου δεν της ασκείται πίεση. Έτσι λοιπόν και η κίνηση που εκτελεί η συνάρτησή μας είναι να κινηθεί προς τα κάτω και προς τα πάνω. Στην εικόνα μας αυτό γίνεται αντιληπτό από τα τοπικά ελάχιστα και τα τοπικά μέγιστα όπου η κίνηση

γίνεται πιο εύκολα αντιληπτή.



Εικόνα 8: Για μια τυχαία καμπύλη παρατηρούμε την μεταβολή στα ακρότατα.

Για να μπορέσουμε να αποφύγουμε τον σκόπελο της συμπίεσης και η διαδικασία να γίνει τελικά σμίκρυνσης κάνουμε μια απλή κίνηση η οποία μπορεί να είναι απλή αλλά αποτελεί σωτηρία για εμάς. Από την στιγμή όπου για την μετάβαση από την περίπτωση (A) στην (B) κάνουμε την $f(x) \rightarrow f(sx)$ κάνοντας έναν απλό πολλαπλασιασμό οδηγούμαστε από την (B) στην (C) (εικόνα 9), δηλαδή $f(sx) \rightarrow sf(sx)$. Κάνοντας αυτή την απλή κίνηση επιτυγχάνουμε όπως παρατηρούμε και από την παρακάτω εικόνα την ομαλοποίηση της συνάρτησης μας. Δηλαδή τα τοπικά ελάχιστα και μέγιστα επιστρέφουν στα φυσιολογικά αρχικά τους επίπεδα ανάλογα πάντα βέβαια με την αρχική μας συνάρτηση. Όπως άλλωστε μπορούμε να παρατηρήσουμε τις περιπτώσεις (A) και (C) μοιάζουν δηλαδή είναι όμοιες και διαφέρουν κατά έναν λόγο ομοιότητας s .



Εικόνα 9: Παρατηρούμε την επίτευξη της ομαλοποίησης.

Καταφέροντας λοιπόν να δημιουργήσουμε τα κατάλληλα αποτελέσματα ορίζουμε πλέον τον τελεστή ανακλιμάκωσης ως εξής:

$$sC_s f(x) = sf(sx) = se^{lnsx^D} f(x).$$

3.2.5. Η δημιουργία του τελεστή για τη κατασκευή του φράκταλ συσσωματώματος.

Έχοντας λοιπόν ορίσει τους τελεστές μετατόπισης και ανακλιμάκωσης με τις κατάλληλες ιδιότητες που μας χρειάζονται για την δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος μπορούμε να ορίσουμε τον τελικό μας τελεστή. Έχουμε ότι:

- $T_a = e^{aD}$, τελεστής μετατόπισης
- $C_s = e^{lnsx^D}$, τελεστής ανακλιμάκωσης

Ορισμός:

Ο τελεστής του φράκταλ συσσωματώματος με την βοήθεια των παραπάνω δυο τελεστών ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{F} = sC_s(\mathbb{I} + T_a)$$

■

π.χ. για μια τυχαία συνάρτηση $f(x)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= sC_s(\mathbb{I} + T_a)f(x) = \\ &= sC_s[f(x) + f(x + a)] = \\ &= s[f(sa) + f(s(x + a))]\end{aligned}$$

■

Σε αυτό το σημείο πρέπει να γίνει μια διευκρίνιση. Όπως είπαμε στη υποπαράγραφο 3.1.5 η κατασκευή μας μπορεί να δημιουργηθεί βάση 2 τρόπων. Ο πρώτος είναι ο TD ενώ ο δεύτερος ο BU. Η διαδικασία του πρώτου από του δεύτερου είναι διαφορετικός όπως ήδη έχουμε εξηγήσει. Άρα λοιπόν γίνεται αντιληπτό ότι αναλόγως τον τρόπο με τον οποίο διαλέγουμε να κατασκευάσουμε το φράκταλ συσσωμάτωμα θα μεταβάλουμε και τον τελικό μας τελεστή.

Με την δημιουργία λοιπόν του κατάλληλου τελικού μας τελεστή επιτυγχάνουμε την κατασκευή του φράκταλ συσσωματώματος. Μέσω όμως αυτής της κατασκευής επιτυγχάνουμε έμμεσα και την δημιουργία της χαρακτηριστικής συνάρτησης του φράκταλ.

Πρόταση:

Για τον τελεστή του φράκταλ συσσωματώματος ισχύει πάντα ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathcal{F}^n f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{+n}(e^{ikx}) f(x) dx$$

■

Απόδειξη:

Ξέρουμε ότι μέσω του μετασχηματισμού Fourier καταλήγουμε στην σχέση:

$$\mathcal{F}^n f(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathcal{F}^n f(x) dx$$

Παίρνοντας λοιπόν το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathcal{F}^n f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} M_x N_x dx \quad (A)$$

Όπου $M_x = e^{ikx}$ και $N_x = \mathcal{F}^n f(x)$. Από διαφορικό λογισμό την σχέση (A) μπορώ να γράψω ως εξής:

$$(A) = \sum_x M_x N_x \quad (B)$$

Και στην σχέση (B) μπορώ να γράψω τα M_x και N_x ως διανύσματα. Άρα $\{M_x\} = \vec{M}$ και $\{N_x\} = \vec{N}$. Οπότε την (B) μπορώ να την γράψω ως εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή:

$$(B) = \langle \vec{M}, \vec{N} \rangle$$

Άρα έχουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathcal{F}^n f(x) dx = \langle e^{ikx}, \mathcal{F}^n f(x) \rangle = \quad (1)$$

Από ιδιότητες εσωτερικού γινομένου έχουμε ότι:

$$(1) = [\dots e^{ikx} \dots] \begin{bmatrix} \dots \\ \mathcal{F}^n f(x) \\ \dots \end{bmatrix} = \quad (2)$$

Δηλαδή την (1) την γράφουμε ως γινόμενο πινάκων.

Από ιδιότητες της θεωρίας τελεστών έχουμε:

$$\begin{aligned} (2) &= [\dots e^{ikx} \dots] \begin{bmatrix} \mathcal{F}^n & \dots & \mathcal{F}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}^n & \dots & \mathcal{F}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ f(x) \\ \dots \end{bmatrix} = \\ &= \left(\begin{bmatrix} \mathcal{F}^n & \dots & \mathcal{F}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}^n & \dots & \mathcal{F}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ e^{ikx} \\ \dots \end{bmatrix} \right)^+ \begin{bmatrix} \dots \\ f(x) \\ \dots \end{bmatrix} = \\ &= \langle \mathcal{F}^{+n} e^{ikx}, f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{+n}(e^{ikx}) f(x) dx. \end{aligned}$$



Στην ουσία λοιπόν χρειάστηκε να εισαγάγουμε τον ανάστροφο τελεστή του τελικού μας τελεστή. Ο ανάστροφος τελεστής όμως διέπεται από συγκεκριμένες ιδιότητες οι οποίες μεταφέρονται νοερά μέσα στον τύπο του και πιο συγκεκριμένα έχουμε για τους τελικούς μας τελεστές ότι:

- Για τον τελικό μας τελεστή έχουμε:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}\left(x, \frac{d}{dx}\right)$$

- Ενώ για τον ανάστροφο τελικό τελεστή μας έχουμε:

$$\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}\left(x^+, \left(\frac{d}{dx}\right)^+\right) = \mathcal{F}(x^+, D^+) \quad (R)$$

3.2.6. Εσωτερικά γινόμενα και συζυγείς τελεστές.

Το πρόβλημά μας λοιπόν μετατοπίζεται στο να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον συζυγή τελικό μας τελεστή. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου για να βρούμε τις τιμές των μεταβλητών x^+ και D^+ .

Στους χώρους συναρτήσεων έχουμε την βασική ιδιότητα η:

$$\langle h(x), Ag(x) \rangle = \langle A^+ h(x), g(x) \rangle \quad (\alpha)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι πάρα πολύ σημαντική διότι μέσα σε αυτήν βλέπουμε να περιέχεται ο συζυγοανάστροφος του τελεστή A

Πόρισμα:

Βάση της σχέσης (α) εάν στη θέση του A έχουμε τον τελεστή της παραγώγισης D τότε ισχύει ότι:

$$\langle h(x), Dg(x) \rangle = \langle -Dh(x), g(x) \rangle$$

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$D^+ = -D.$$

■

Απόδειξη:

Από την σχέση (α) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) Dg(x) dx &= \langle h(x), Dg(x) \rangle = \langle h(x), g'(x) \rangle = \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) g'(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (h(x)g(x))' dx - \int_{-\infty}^{\infty} h'(x)g(x) dx = (z) \end{aligned}$$

Και αφού ισχύει ότι κατά πρώτον:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

και κατά δεύτερον:

$$h(\pm\infty) = 0 \text{ και } g(\pm\infty) = 0$$

Θα έχουμε τελικά ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)g'(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} h'(x)g(x)dx$$

Άρα από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε ότι:

$$\langle h(x), Dg(x) \rangle = -\langle Dh(x), g(x) \rangle = \langle -Dh(x), g(x) \rangle$$

Από την σχέση (z) και την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$D^+ = -D. \quad (C)$$



Πόρισμα:

Βάση της σχέσης (α) εάν στη θέση του A έχουμε το x τότε ισχύει ότι:

$$\langle h(x), xg(x) \rangle = \langle xh(x), g(x) \rangle$$

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$x^+ = x.$$



Απόδειξη:

Ομοίως δουλεύοντας όπως στην απόδειξη του προηγούμενου πορίσματος αν στην θέση του τελεστή A τοποθετήσουμε το x τότε θα έχουμε ότι:

$$\int h(x)xg(x)dx = \langle h(x), xg(x) \rangle = \langle x^+h(x), g(x) \rangle = \langle xh(x), g(x) \rangle$$

Καταλήγουμε δηλαδή στην σχέση ότι:

$$x^+ = x. \quad (B)$$



Πρόταση:

Ο τύπος του ανάστροφου τελεστή μας δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}(x^+, D^+) = \mathcal{F}(x, -D)$$

■

Απόδειξη:

Από τις ιδιότητες που έχουμε ήδη αναφέρει στις υποπαραγράφους 3.2.0 και 3.2.1 παίρνουμε την σχέση:

$$(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$$

Οπότε από τις σχέσεις

$$D^+ = -D \text{ και } x^+ = x$$

έχουμε ότι:

$$(xD)^+ = D^+ x^+ = D^+ x = -Dx$$

Οπότε επιστρέφοντας στην σχέση (R) καταλήγουμε ότι:

$$\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}(x^+, D^+) = \mathcal{F}(x, -D)$$

▲

Άρα στην γενική σχέση του τελικού μας τελεστή έχουμε ότι:

$$\langle e^{ikx}, \mathcal{F}^n f(x) \rangle = \langle (\mathcal{F}^+)^n e^{ikx}, f(x) \rangle \quad (1)$$

Πρόταση:

Ο ανάστροφος τελεστής του τελεστή $\mathcal{F} = sC_s(\mathbb{I} + T_a)$ δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{F}^+ = (\mathbb{I} + T_{-a})C_{\frac{1}{s}}$$

■

Απόδειξη:

Αφού ξέρουμε ότι: $\mathcal{F} = sC_s(\mathbb{I} + T_a)$ τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+ &= [sC_s(\mathbb{I} + T_a)]^+ \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{F}^+ &= s(\mathbb{I} + T_a)^+ C_s^+ = s(\mathbb{I}^+ + T_a^+) C_s^+ \quad (2)\end{aligned}$$

Για τον συζυγή τελεστή $(T_a)^+$ έχουμε ορίσει παραπάνω ότι:

$$(T_a)^+ = (e^{aD})^+ = e^{aD^+} = e^{-aD} = T_{-a}$$

Προτού συνεχίσουμε την απόδειξη μας χρειάζεται το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα:

Για έναν τελεστή T και τυχαίο a έχουμε ότι ισχύει:

$$T_a T_a^+ = \mathbb{I}$$

Απόδειξη:

Παίρνοντας το πρώτο μέλος της σχέσης έχουμε:

$$T_a T_a^+ = T_a T_{-a} = e^{aD} e^{-aD} = e^{0D} = \mathbb{I}$$



Έχοντας βρει λοιπόν τον ανάστροφο του τελεστή μετατόπισης προσπαθούμε να βρούμε την τιμή του συζυγή τελεστή C_s^+ .

Ξέρουμε ότι:

$$C_s = e^{(lns)xD}$$

Οπότε θα έχουμε ότι:

$$C_s^+ = (e^{(lns)xD})^+ = e^{lns(xD)^+} = e^{lnsD^+x} = e^{-lnsDx} = e^{-(lns)(\mathbb{I}+xD)}$$

Άρα:

$$C_s^+ = e^{-(lns)} e^{-lnsx D} = \frac{1}{s} e^{\ln(\frac{1}{s})xD} = \frac{1}{s} C_{\frac{1}{s}}$$

Οπότε λοιπόν επιστρέφοντας στην σχέση (2) πιο πάνω έχουμε ότι:

$$\mathcal{F}^+ = s(\mathbb{I}^+ + T_a^+)C_s^+ = s(\mathbb{I} + T_{-\alpha})\frac{1}{s}C_{\frac{1}{s}}$$



Οπότε καταλήγουμε στις δυο πιο βασικές σχέσεις της δημιουργίας του φράκταλ συσσωματώματος οι οποίες είναι οι:

$$\mathcal{F}^+ = (\mathbb{I} + T_{-\alpha})C_{\frac{1}{s}} \text{ και } \mathcal{F} = sC_s(\mathbb{I} + T_a)$$

Έχοντας λοιπόν αποδείξει τις απαραίτητες σχέσεις καταλήγουμε στην αρχική μας σχέση:

$$\langle e^{ikx}, \mathcal{F}^n f(x) \rangle = \langle (\mathcal{F}^n)^+ e^{ikx}, f(x) \rangle$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει το δικαίωμα να κινιόμαστε πολύ άνετα μεταξύ συζυγή και κανονικού τελεστή μέσα στον μετασχηματισμό Fourier. Μέχρι στιγμής όμως μιλούσαμε για μια ειδική περίπτωση η οποία δεν είναι άλλη από την μονόπλευρη μετατόπιση και της ανακλιμάκωσης μαζί. Όπως όμως έχουμε ήδη πει το πώς θα δημιουργηθεί το φράκταλ συσσωμάτωμα εμπίπτει καθαρά στις απαιτήσεις του κατασκευαστή. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου το φράκταλ συσσωμάτωμα μπορεί να είναι δίπλευρο και να μην έχει ανακλιμάκωση ή άλλες περιπτώσεις.

3.2.7 Δημιουργία ενιαίου τελεστή.

Για να μπορέσουμε λοιπόν να εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις μας δημιουργήθηκε η ανάγκη για την δημιουργία ενός ενιαίου τελεστή. Ο τελεστής αυτός αποτελείται από κάποιες παραμέτρους τις οποίες μπορεί να καθορίσει ο χρήστης και να πάρει το προσδοκώμενο αποτέλεσμα.

Οι παράμετροι που θα εισαγάγουμε στον ενιαίο τελεστή, έχουν να κάνουν με τις παραμέτρους που έχουμε ορίσει στις υποπαραγράφους 3.1.1 έως 3.1.6. Η πρώτη παράμετρος που μας ενδιαφέρει έχει να κάνει με την συμμετρικότητα. Δηλαδή μας ενδιαφέρει αν το φράκταλ συσσωμάτωμα μας εκτείνεται προς τις δυο πλευρές ή προς μια

κατεύθυνση. Αν έχουμε επέκταση και προς τις δύο πλευρές (συμμετρικά ή όχι) τότε θέλουμε την χρήση 2 τελεστών μετατόπισης ενώ αν θέλουμε προς τη μια κατεύθυνση τότε χρειαζόμαστε έναν. Η δεύτερη παράμετρος έχει να κάνει με την ανακλιμάκωση και ειδικότερα την σμίκρυνση. Στην περίπτωση όπου θέλουμε ανακλιμάκωση πρέπει να εισαγάγουμε τον τελεστή της ανακλιμάκωσης. Οι δύο τελευταίοι παράμετροι είναι ο τρόπος κατασκευής (TD-BU) και αν ο χώρος μας είναι πεπερασμένος ή άπειρος. Στην περίπτωση όπου έχουμε TD τότε ισχύει ότι:

$$\langle g(x), (\mathcal{F}^+)^n f(x) \rangle = \langle \mathcal{F}^n g(x), f(x) \rangle$$

ενώ στην περίπτωση BU έχουμε:

$$\langle g(x), \mathcal{F}^n f(x) \rangle = \langle (\mathcal{F}^+)^n g(x), f(x) \rangle$$

Οι δυο πρώτοι παράμετροι μπαίνουν μέσα στον τύπο του ενιαίου τελεστή ενώ τους άλλοι δυο τους διαλέγουμε στην αρχή και εμφανίζονται έμμεσα.

Ορισμός:

Ο ενιαίος τελεστής δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{F}^n = C_{\frac{1}{s}}(T_{a_n} + T_{\beta_n})$$

,όπου a_n και β_n ακολουθίες. Στον τελεστή της σμίκρυνσης βάζουμε ως συντελεστή ανακλιμάκωσης τον $1/s$. Αυτή μας την κίνηση την κάνουμε για να αποφύγουμε τον περιορισμό το $s \in [0,1]$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι $\frac{1}{s} \in [0,1]$ και άρα το $s \in \{\mathbb{R} - (0,1)\}$. Όπως γίνεται αντιληπτό όταν το $s \in [0,1]$ τότε θα είμαστε στην περίπτωση της μεγέθυνσης.

■

Παρατήρηση:

Η κατασκευή του φράκταλ συσσωματώματος επιτυγχάνεται όπως ήδη έχουμε προαναφέρει με την χρήση του ενιαίου τελεστή. Προτού όμως τον χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να κάνουμε μια διευκρίνιση. Το

φράκταλ συσσωμάτωμα μας κατασκευάζεται από τον αναδρομικό τύπο της πυκνότητας του φράκταλ. Δηλαδή η κατασκευή μας γίνεται από το παρακάτω σύνολο:

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots\}$$

Όπου με την χρήση του συζυγοανάστροφου τελεστή $\mathcal{F}^+$ ισχύει ότι:

$$\{p_0(x), p_1(x) = \mathcal{F}^+ p_0(x), p_2(x) = \mathcal{F}^+ p_1(x), \dots\}$$

Καταλήγουμε δηλαδή στην αναδρομική σχέση:

$$p_n(x) = \mathcal{F}^+ p_{n-1}(x) \text{ όπου: } p_0(x) = \text{αρχικές συνθήκες}$$

Έχοντας λοιπόν επιλέξει τον τελεστή:

$$\mathcal{F}^n = C_{\frac{1}{s}}(T_{a_n} + T_{\beta_n})$$

Από την παραπάνω αναδρομική σχέση και τον τύπο του τελεστή μας οδηγούμαστε στην σχέση:

$$p_n(x) = C_{\frac{1}{s}}(T_{a_n} + T_{\beta_n})p_{n-1}(x)$$

Από όπου καταλήγουμε στην σχέση:

$$p_n(x) = s p_{n-1}\left(x - \frac{a_n}{s}\right) + s p_{n-1}\left(x - \frac{\beta_n}{s}\right)$$

Όπως γίνεται αντιληπτό το αρχικό μας πρόβλημα κατασκευής του φράκταλ συσσωματώματος μετατρέπεται στην επίλυση της παραπάνω σχέσης της οποίας η επίλυση γίνεται με την βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier. Η παραπάνω σχέση μετατρέπεται στον παρακάτω τύπο:

Πρόταση:

Ο τύπος του μετασχηματισμού Fourier δίνεται από την σχέση:

$$F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{k a_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{k a_n}{s}\right) + \cos\left(\frac{k \beta_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{k \beta_n}{s}\right) \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right)$$

■

Απόδειξη:

Από την σχέση της συνάρτησης της πυκνότητας μάζας έχουμε την σχέση:

$$p_n(x) = C_{\frac{1}{s}}(T_{a_n} + T_{\beta_n})p_{n-1}(x)$$

Ολοκληρώνοντας και πολλαπλασιάζοντας με e^{ikx} την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$F_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)e^{ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\frac{1}{s}}(T_{a_n} + T_{\beta_n})e^{ikx}p_{n-1}(x)dx$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)e^{ikx}dx &= \langle C_{\frac{1}{s}}(T_{a_n} + T_{\beta_n})p_{n-1}(x), e^{ikx} \rangle = \\ &= \langle ((C_{\frac{1}{s}}T_{a_n}) + (C_{\frac{1}{s}}T_{\beta_n}))p_{n-1}(x), e^{ikx} \rangle = \end{aligned} \quad (1)$$

Επιλέγουμε την περίπτωση BU. Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} (1) &= \langle p_{n-1}(x), \left(C_{\frac{1}{s}}T_{a_n} + C_{\frac{1}{s}}T_{\beta_n}\right)^+ e^{ikx} \rangle = \\ &= \langle p_{n-1}(x), \left(\left(C_{\frac{1}{s}}T_{a_n}\right)^+ + \left(C_{\frac{1}{s}}T_{\beta_n}\right)^+\right) e^{ikx} \rangle = \\ &= \langle p_{n-1}(x), T_{a_n}^+ C_{\frac{1}{s}}^+ e^{ikx} + T_{\beta_n}^+ C_{\frac{1}{s}}^+ e^{ikx} \rangle = \\ &= \langle p_{n-1}(x), \frac{T_{-a_n}}{s} C_{\frac{1}{s}} e^{ikx} + \frac{T_{-\beta_n}}{s} C_{\frac{1}{s}} e^{ikx} \rangle = \\ &= \langle p_{n-1}(x), T_{-a_n} \left(\frac{1}{s} e^{\frac{ikx}{s}}\right) + T_{-\beta_n} \left(\frac{1}{s} e^{\frac{ikx}{s}}\right) \rangle = \\ &= \langle p_{n-1}(x), \left(\frac{1}{s} e^{\frac{ik(x+a_n)}{s}}\right) + \left(\frac{1}{s} e^{\frac{ik(x+\beta_n)}{s}}\right) \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle p_{n-1}(x), \left(\frac{1}{s} \left(e^{\frac{ikx}{s}} e^{\frac{ika_n}{s}} \right) + \left(\frac{1}{s} \left(e^{\frac{ikx}{s}} e^{\frac{ik\beta_n}{s}} \right) \right) \right) \rangle = \\
&= \langle p_{n-1}(x), e^{\frac{ikx}{s}} \left(\frac{1}{s} e^{\frac{ika_n}{s}} + \frac{1}{s} e^{\frac{ik\beta_n}{s}} \right) \rangle = \\
&= \langle p_{n-1}(x), e^{\frac{ikx}{s}} \left(\frac{1}{s} e^{\frac{ika_n}{s}} + \frac{1}{s} e^{\frac{ik\beta_n}{s}} \right) \rangle = \\
&= \left(\frac{1}{s} e^{\frac{ika_n}{s}} + \frac{1}{s} e^{\frac{ik\beta_n}{s}} \right) \langle p_{n-1}(x), e^{\frac{ikx}{s}} \rangle.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Fourier καταλήγουμε στην σχέση:

$$F_n(k) = \left(\frac{1}{s} e^{\frac{ika_n}{s}} + \frac{1}{s} e^{\frac{ik\beta_n}{s}} \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right)$$

Ξέρουμε όμως ότι:

$$e^{\frac{ika_n}{s}} = \cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right)$$

και ομοίως:

$$e^{\frac{ik\beta_n}{s}} = \cos\left(\frac{k\beta_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{k\beta_n}{s}\right)$$

Οπότε:

$$e^{\frac{ika_n}{s}} + e^{\frac{ik\beta_n}{s}} = \cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right) + \cos\left(\frac{k\beta_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{k\beta_n}{s}\right)$$

Άρα αντικαθιστώντας στον τύπο του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right) + \cos\left(\frac{k\beta_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{k\beta_n}{s}\right) \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \quad (z)$$



Έχοντας λοιπόν καταλήξει στον τελευταίο τύπο μπορούμε να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε φράκταλ συσσωμάτωμα με τον τρόπο BU. Προτού συνεχίσουμε θα κάνουμε μια μικρή διευκρίνιση. Για λόγους ελευθερίας από αυτό το σημείο και έπειτα την ακολουθία μαζών και μήκους δεν θα την ακολουθεί η ακολουθία L_n .

Παράδειγμα

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα φράκταλ συσσωμάτωμα δίπλευρο συμμετρικό χωρίς ανακλιμάκωση. Ο τελεστής κατασκευής του φράκταλ συσσωματώματος θα δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{F} = T_{\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} + T_{-\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)}$$

Οπότε η συνάρτηση πυκνότητας θα δίνεται από την σχέση:

$$p_n(x) = \left(T_{\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} + T_{-\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} \right) p_{n-1}(x)$$

Για λόγους ευκολίας θέτω: $\left(T_{\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} + T_{-\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} \right) = W$

Άρα έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x) e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} W e^{ikx} p_{n-1}(x) dx$$

Οπότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x) e^{ikx} dx = \langle W p_{n-1}(x), e^{ikx} \rangle =$$

Επιλέγουμε την περίπτωση BU. Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$(1) = \langle p_{n-1}(x), W^+ e^{ikx} \rangle = (2)$$

Για τον W ξέρουμε ότι ισχύει:

$$W^+ = W$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} (2) &= \langle p_{n-1}(x), W e^{ikx} \rangle = \\ &= \langle p_{n-1}(x), e^{ik\left(x+\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} + e^{ik\left(x-\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} \rangle = \end{aligned}$$

$$= e^{ik\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} \langle p_{n-1}(x), e^{ikx} \rangle + e^{-ik\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} \langle p_{n-1}(x), e^{ikx} \rangle$$

Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Fourier καταλήγουμε στην σχέση:

$$F_n(k) = \left(e^{ik\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} + e^{-ik\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)} \right) F_{n-1}(k)$$

Από όπου καταλήγουμε ότι:

$$F_n(k) = 2 \cos\left(\frac{k\alpha_{n-1}}{2}\right) F_{n-1}(k) \quad (3)$$



Αντί λοιπόν να κάνουμε όλη την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να πάμε στον τύπο (z) να θέσουμε:

$$s = 1, a_n = \frac{\alpha_{n-1}}{2}, \beta_n = -\frac{\alpha_{n-1}}{2}$$

Οπότε και καταλήγουμε στον τύπο (3) παραπάνω.

3.2.8 Περιπτώσεις τελεστών.

1^η περίπτωση:

Το φράκταλ συσσωμάτωμα να είναι μονόπλευρο και χωρίς ανακλιμάκωση. Ο τύπος κατασκευής του φράκταλ συσσωματώματος θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_n(k) = (e^{ika_n} + 1)F_{n-1}(k). \quad (a)$$



Απόδειξη:

Στην περίπτωση μας θέτουμε:

$$s = 1, \beta_n = 0, \alpha_n = \text{ορίζεται από τον κατασκευαστή}$$

Αντικαθιστώντας στον (z) έχουμε:

$$\begin{aligned} F_n(k) &= (\cos(ka_n) + i\sin(ka_n) + \cos(k\beta_n) + i\sin(k\beta_n))F_{n-1}(k) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_n(k) = (\cos(ka_n) + i\sin(ka_n) + \cos(0) + i\sin(0))F_{n-1}(k) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow F_n(k) &= (\cos(ka_n) + i\sin(ka_n) + 1 + 0)F_{n-1}(k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_n(k) &= (\cos(ka_n) + i\sin(ka_n) + 1)F_{n-1}(k) \Leftrightarrow \\ F_n(k) &= (e^{ika_n} + 1)F_{n-1}(k)\end{aligned}$$



Πρόταση:

Ο τύπος του μετασχηματισμού Fourier του φράκταλ συσσωματώματος σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier στο αρχικό μας στάδιο δίνεται από την σχέση:

$$F_n(k) = \prod_{j=1}^n (\cos(ka_j) + i\sin(ka_j) + 1)F_0(k)$$



Απόδειξη:

Από την σχέση:

$$e^{ika_n} = \cos(ka_n) + i\sin(ka_n)$$

ο αρχικός μας τύπος θα γίνει:

$$F_n(k) = (\cos(ka_n) + i\sin(ka_n) + 1)F_{n-1}(k)$$

Δουλεύοντας τον παραπάνω τύπο σε κάθε στάδιο θα έχουμε:

Στο πρώτο στάδιο:

$$F_1(k) = (\cos(ka_1) + i\sin(ka_1) + 1)F_0(k)$$

Στο δεύτερο στάδιο:

$$\begin{aligned}F_2(k) &= (\cos(ka_2) + i\sin(ka_2) + 1)F_1(k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_2(k) &= (\cos(ka_2) + i\sin(ka_2) + 1)(\cos(ka_1) + i\sin(ka_1) + 1)F_0(k).\end{aligned}$$

Οπότε καταλήγουμε:

$$F_2(k) = \prod_{j=1}^2 (\cos(ka_j) + i \sin(ka_j) + 1) F_0(k)$$

Στο τρίτο στάδιο έχουμε:

$$\begin{aligned} F_3(k) &= (\cos(ka_3) + i \sin(ka_3) + 1) F_2(k) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_3(k) = (\cos(ka_3) + i \sin(ka_3) + 1) \\ &(\cos(ka_2) + i \sin(ka_2) + 1)(\cos(ka_1) + i \sin(ka_1) + 1) F_0(k) \end{aligned}$$

Άρα:

$$F_3(k) = \prod_{j=1}^3 (\cos(ka_j) + i \sin(ka_j) + 1) F_0(k)$$

Οπότε γίνεται φανερό πως συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία επ' άπειρο καταλήγουμε στην σχέση:

$$F_n(k) = \prod_{j=1}^n (\cos(ka_j) + i \sin(ka_j) + 1) F_0(k)$$



2^η Περίπτωση:

Το φράκταλ συσσωμάτωμα να είναι δίπλευρο και χωρίς ανακλιμάκωση. Ο τύπος κατασκευής του φράκταλ συσσωματώματος θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_n(k) = 2 \cos(ka_n) F_{n-1}(k). \quad (\beta)$$



Απόδειξη:

Στην περίπτωση μας θέτουμε:

$$s = 1, a_n = \text{ορίζεται από τον κατασκευαστή}, \beta_n = -a_n$$

Αντικαθιστώντας στον (z) έχουμε:

$$\begin{aligned}
F_n(k) &= (\cos(ka_n) + i\sin(ka_n) + \cos(k\beta_n) + i\sin(k\beta_n))F_{n-1}(k) \Leftrightarrow \\
F_n(k) &= (\cos(ka_n) + i\sin(ka_n) + \cos(-k\alpha_n) + i\sin(-k\alpha_n))F_{n-1}(k) \\
F_n(k) &= (\cos(ka_n) + i\sin(ka_n) + \cos(k\alpha_n) - i\sin(k\alpha_n))F_{n-1}(k) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow F_n(k) = (\cos(ka_n) + \cos(k\alpha_n))F_{n-1}(k) \Leftrightarrow \\
&F_n(k) = 2 \cos(ka_n) F_{n-1}(k)
\end{aligned}$$



Πρόταση:

Ο τύπος του μετασχηματισμού Fourier του φράκταλ συσσωματώματος σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier στο αρχικό μας στάδιο δίνεται από την σχέση:

$$F_n(k) = 2^n \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{ka_j}{2}\right) F_0(k)$$



Απόδειξη:

Δουλεύοντας τον τύπο (β) σε κάθε στάδιο έχουμε:

Στο πρώτο στάδιο:

$$F_1(k) = 2 \cos\left(\frac{ka_0}{2}\right) F_0(k)$$

Στο δεύτερο στάδιο:

$$F_2(k) = 2 \cos\left(\frac{ka_1}{2}\right) F_1(k) = 2 \cos\left(\frac{ka_1}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{ka_0}{2}\right) F_0(k).$$

Άρα :

$$F_2(k) = 4 \cos\left(\frac{ka_0}{2}\right) \cos\left(\frac{ka_1}{2}\right) F_0(k)$$

Οπότε καταλήγουμε:

$$F_2(k) = 2^2 \prod_{j=1}^2 \cos\left(\frac{ka_j}{2}\right) F_0(k)$$

Στο τρίτο στάδιο έχουμε:

$$\begin{aligned} F_3(k) &= \\ &= 2 \cos\left(\frac{ka_2}{2}\right) F_2(k) = 2 \cos\left(\frac{ka_2}{2}\right) 2^2 \cos\left(\frac{ka_0}{2}\right) \cos\left(\frac{ka_1}{2}\right) F_0(k) \end{aligned}$$

Άρα:

$$F_3(k) = 2^3 \cos\left(\frac{ka_0}{2}\right) \cos\left(\frac{ka_1}{2}\right) \cos\left(\frac{ka_2}{2}\right) F_0(k)$$

Οπότε:

$$F_3(k) = 2^3 \prod_{j=1}^3 \cos\left(\frac{ka_j}{2}\right) F_0(k)$$

Οπότε γίνεται φανερό πως συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία επ' άπειρο καταλήγουμε στην σχέση:

$$F_n(k) = 2^n \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{ka_j}{2}\right) F_0(k)$$



3^η Περίπτωση:

Το φράκταλ συσσωμάτωμα να είναι μονόπλευρο φράκταλ με ανακλιμάκωση. Ο τύπος κατασκευής του φράκταλ συσσωματώματος θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_n(k) = \frac{1}{s} \left(e^{\frac{ika_n}{s}} + 1 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \quad (\gamma)$$



Απόδειξη:

Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε:

$$s \neq 1, \beta_n = 0, \alpha_n = \text{ορίζεται από τον κατασκευαστή}$$

Αντικαθιστώντας στον (z) έχουμε:

$$F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right) + \cos\left(\frac{k0}{s}\right) + i \sin\left(\frac{k0}{s}\right) \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right)$$

$$\Leftrightarrow F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right) + 1 + 0 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right) + 1 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \Leftrightarrow$$

$$F_n(k) = \frac{1}{s} \left(e^{\frac{ika_n}{s}} + 1 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right)$$



Πρόταση:

Ο τύπος του μετασχηματισμού Fourier του φράκταλ συσσωματώματος σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier στο αρχικό μας στάδιο δίνεται από την σχέση:

$$F_n(k) = \frac{1}{s^n} \prod_{j=1}^n \left[\frac{\cos(ka_j)}{s^{n-j+1}} + \frac{i \sin(ka_j)}{s^{n-j+1}} + 1 \right] F_0\left(\frac{k}{s^n}\right)$$



Απόδειξη:

Από τον τύπο Euler έχουμε:

$$e^{\frac{ika_n}{s}} = \cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right)$$

Οπότε ο τύπος (γ) θα γίνει:

$$F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right) + 1 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right)$$

Δουλεύοντας τον παραπάνω τύπο σε κάθε στάδιο έχουμε:

Στο πρώτο στάδιο:

$$F_1(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_1}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_1}{s}\right) + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s}\right)$$

Στο δεύτερο στάδιο:

$$F_2(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_2}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_2}{s}\right) + 1 \right) F_1\left(\frac{k}{s}\right)$$

Άρα:

$$F_2(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_2}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_2}{s}\right) + 1 \right) \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_1}{s^2}\right) + i \sin\left(\frac{ka_1}{s^2}\right) + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^2}\right)$$

Καταλήγοντας θα έχουμε:

$$F_2(k) = \frac{1}{s^2} \left(\cos\left(\frac{ka_2}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_2}{s}\right) + 1 \right) \left(\cos\left(\frac{ka_1}{s^2}\right) + i \sin\left(\frac{ka_1}{s^2}\right) + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^2}\right)$$

Στο τρίτο βήμα:

$$F_3(k) = \frac{1}{s^3} \left(\cos\left(\frac{ka_3}{s^3}\right) + i \sin\left(\frac{ka_3}{s^3}\right) + 1 \right) F_2\left(\frac{k}{s}\right)$$

Άρα:

$$\begin{aligned} F_3(k) &= \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_1}{s^3}\right) + i \sin\left(\frac{ka_1}{s^3}\right) + 1 \right) \frac{1}{s^2} \left(\cos\left(\frac{ka_2}{s^2}\right) + i \sin\left(\frac{ka_2}{s^2}\right) + 1 \right) \\ &\quad \left(\cos\left(\frac{ka_3}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_3}{s}\right) + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^3}\right) \\ &= \frac{1}{s^3} \left(\cos\left(\frac{ka_1}{s^3}\right) + i \sin\left(\frac{ka_1}{s^3}\right) + 1 \right) \left(\cos\left(\frac{ka_2}{s^2}\right) + i \sin\left(\frac{ka_2}{s^2}\right) + 1 \right) \\ &\quad \left(\cos\left(\frac{ka_3}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_3}{s}\right) + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^3}\right) \end{aligned}$$

Οπότε γίνεται φανερό πως συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία επ' άπειρο καταλήγουμε στην σχέση:

$$F_n(k) = \frac{1}{s^n} \prod_{j=1}^n \left[\frac{\cos(ka_j)}{s^{n-j+1}} + \frac{i \sin(ka_j)}{s^{n-j+1}} + 1 \right] F_0\left(\frac{k}{s^n}\right)$$

▲

4^η Περίπτωση:

Το φράκταλ συσσωμάτωμα να είναι δίπλευρο φράκταλ με ανακλιμάκωση. Ο τύπος κατασκευής του φράκταλ συσσωματώματος θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_n(k) = \frac{1}{s} 2\cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right). \quad (\delta)$$

■

Απόδειξη:

Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε:

$$s \neq 1, \beta_n = -\alpha_n, \alpha_n = \text{ορίζεται από τον κατασκευαστή}$$

Αντικαθιστώντας στον (z) έχουμε:

$$F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right) + \cos\left(-\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(-\frac{ka_n}{s}\right) \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right) + \cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) - i \sin\left(\frac{ka_n}{s}\right) \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) + \cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \Leftrightarrow$$

$$F_n(k) = \frac{1}{s} 2\cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right).$$

▲

Πρόταση:

Ο τύπος του μετασχηματισμού Fourier του φράκταλ συσσωματώματος σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier στο αρχικό μας στάδιο δίνεται από την σχέση:

$$F_n(k) = \frac{1}{s^n} 2^n \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{ka_j}{s^{n-j+1}}\right) F_0\left(\frac{k}{s^n}\right)$$

■

Απόδειξη:

Δουλεύοντας τον τύπο (δ) σε κάθε στάδιο έχουμε:

Στο πρώτο στάδιο:

$$F_1(k) = \frac{1}{s} 2 \cos\left(\frac{ka_1}{s}\right) F_0\left(\frac{k}{s}\right)$$

Στο δεύτερο στάδιο:

$$F_2(k) = \frac{1}{s} 2 \cos\left(\frac{ka_2}{s}\right) F_1\left(\frac{k}{s}\right)$$

$$F_2(k) = \frac{1}{s} 2 \cos\left(\frac{ka_2}{s}\right) \frac{1}{s} 2 \cos\left(\frac{ka_1}{s^2}\right) F_0\left(\frac{k}{s^2}\right)$$

Οπότε:

$$F_2(k) = \frac{1}{s^2} 2^2 \cos\left(\frac{ka_1}{s^2}\right) \cos\left(\frac{ka_2}{s}\right) F_0\left(\frac{k}{s^2}\right)$$

Στο τρίτο στάδιο:

$$F_3(k) = \frac{1}{s} 2 \cos\left(\frac{ka_3}{s}\right) F_2\left(\frac{k}{s}\right)$$

Άρα:

$$F_3(k) = \frac{1}{s} 2 \cos\left(\frac{ka_3}{s}\right) \frac{1}{s^2} 2^2 \cos\left(\frac{ka_1}{s^3}\right) \cos\left(\frac{ka_2}{s^2}\right) F_0\left(\frac{k}{s^3}\right)$$

$$F_3(k) = \frac{1}{s^3} 2^3 \cos\left(\frac{ka_3}{s}\right) \cos\left(\frac{ka_2}{s^2}\right) \cos\left(\frac{ka_1}{s^3}\right) F_0\left(\frac{k}{s^3}\right)$$

Οπότε γίνεται φανερό πως συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία επ' άπειρο καταλήγουμε στην σχέση:

$$F_n(k) = \frac{1}{s^n} 2^n \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{ka_j}{s^{n-j+1}}\right) F_0\left(\frac{k}{s^n}\right)$$



5^η Περίπτωση:

Το φράκταλ συσσωμάτωμα να είναι δίπλευρο φράκταλ με ανακλιμάκωση αλλά θα έχει μια πάρα πολύ σημαντική ιδιαιτερότητα πλέον ότι δεν είναι συμμετρικό. Ο τύπος κατασκευής του φράκταλ συσσωματώματος θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_n(k) = \frac{1}{s} \left(e^{\frac{ikn}{s}} + 1 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \quad (\varepsilon)$$

Απόδειξη:

Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε:

$$s \neq 1, \beta_n = n \in \mathbb{Z}, \alpha_n = 0$$

Αντικαθιστώντας στον (z) έχουμε:

$$\begin{aligned} F_n(k) &= \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{kn}{s}\right) + i \sin\left(\frac{kn}{s}\right) + \cos\left(\frac{k0}{s}\right) + i \sin\left(\frac{k0}{s}\right) \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{kn}{s}\right) + i \sin\left(\frac{kn}{s}\right) + 1 + 0 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_n(k) = \frac{1}{s} \left(\cos\left(\frac{kn}{s}\right) + i \sin\left(\frac{kn}{s}\right) + 1 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \Leftrightarrow \\ &F_n(k) = \frac{1}{s} \left(e^{\frac{ikn}{s}} + 1 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right) \end{aligned}$$



Πρόταση:

Ο τύπος του μετασχηματισμού Fourier του φράκταλ συσσωματώματος σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier στο αρχικό μας στάδιο δίνεται από την σχέση:

$$F_n(k) = \frac{1}{s^n} \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{jik}{s^{n-j+1}}} + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^n}\right)$$

■

Απόδειξη:

Δουλεύοντας τον τύπο (ε) σε κάθε στάδιο έχουμε:

Στο πρώτο στάδιο:

$$F_1(k) = \frac{1}{s} \left(e^{\frac{ik}{s}} + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s}\right)$$

Στο δεύτερο στάδιο:

$$\begin{aligned} F_2(k) &= \frac{1}{s} \left(e^{\frac{2ik}{s}} + 1 \right) F_1\left(\frac{k}{s}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_2(k) &= \frac{1}{s} \left(e^{\frac{2ik}{s}} + 1 \right) \frac{1}{s} \left(e^{\frac{ik}{s^2}} + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^2}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_2(k) &= \frac{1}{s^2} \left(e^{\frac{2ik}{s}} + 1 \right) \left(e^{\frac{ik}{s^2}} + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Στο τρίτο στάδιο:

$$\begin{aligned} F_3(k) &= \frac{1}{s} \left(e^{\frac{3ik}{s}} + 1 \right) F_2\left(\frac{k}{s}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_3(k) &= \frac{1}{s} \left(e^{\frac{3ik}{s}} + 1 \right) \frac{1}{s^2} \left(e^{\frac{2ik}{s^2}} + 1 \right) \left(e^{\frac{ik}{s^3}} + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^3}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_3(k) &= \frac{1}{s^3} \left(e^{\frac{3ik}{s}} + 1 \right) \left(e^{\frac{2ik}{s^2}} + 1 \right) \left(e^{\frac{ik}{s^3}} + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^3}\right) \end{aligned}$$

Οπότε γίνεται φανερό πως συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία επ' άπειρο καταλήγουμε στην σχέση:

$$F_n(k) = \frac{1}{s^n} \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{jik}{s^{n-j+1}}} + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^n}\right)$$



Έχοντας λοιπόν αποδείξει κάποιες σημαντικές περιπτώσεις των φράκταλ συσσωματωμάτων τις τοποθετούμε όλες μαζί στους παρακάτω πίνακες:

Δίπλευρο φράκταλ με ανακλιμάκωση δίχως συμμετρία.

Συνάρτηση πυκνότητας, αναδρομική σχέση του $p_n(x)$	$p_n(x) = p_{n-1}\left(\frac{x}{s}\right) + p_{n-1}\left(\frac{x - a_n}{s}\right)$
Ανάστροφος Τελεστής $\mathcal{F}^+$	$\mathcal{F}^+ = \left(C_{\frac{1}{s}} + T_{-a_n}\right) C_{1/s}$
Μετασχηματισμός Fourier, Αναδρομική σχέση του $F_n(k)$	$F_n(k) = \frac{1}{s} \left(e^{\frac{ikn}{s}} + 1 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right)$
Λύση	$F_n(k) = \frac{1}{s^n} \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{jik}{s^{n-j+1}}} + 1 \right) F_0\left(\frac{k}{s^n}\right)$

Δίπλευρο φράκταλ με ανακλιμάκωση.

Συνάρτηση πυκνότητας, αναδρομική σχέση του $p_n(x)$	$p_n(x) = p_{n-1}\left(\frac{x + \frac{a_n}{2}}{s}\right) + p_{n-1}\left(\frac{x - \frac{a_n}{2}}{s}\right)$
Ανάστροφος Τελεστής $\mathcal{F}^+$	$\mathcal{F}^+ = C_{1/s}(T_{a_n} + T_{-a_n})$
Μετασχηματισμός Fourier, Αναδρομική σχέση του $F_n(k)$	$F_n(k) = \frac{1}{s} 2 \cos\left(\frac{ka_n}{s}\right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right)$
Λύση	$F_n(k) = \frac{1}{s^n} 2^n \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{ka_j}{s^{n-j+1}}\right) F_0\left(\frac{k}{s^n}\right)$

Δίπλευρο φράκταλ χωρίς ανακλιμάκωση.

Συνάρτηση πυκνότητας, αναδρομική σχέση του $p_n(x)$	$p_n(x) = p_{n-1}\left(x + \frac{a_n}{2}\right) + p_{n-1}\left(x - \frac{a_n}{2}\right)$
Ανάστροφος Τελεστής $\mathcal{F}^+$	$\mathcal{F}^+ = T_{a_n} + T_{-a_n}$
Μετασχηματισμός Fourier, Αναδρομική σχέση του $F_n(k)$	$F_n(k) = 2 \cos(ka_n) F_{n-1}(k)$
Λύση	$F_n(k) = 2^n \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{ka_j}{2}\right) F_0(k)$

Μονόπλευρο φράκταλ χωρίς ανακλιμάκωση.

Συνάρτηση πυκνότητας, αναδρομική σχέση του $p_n(x)$	$p_n(x) = p_{n-1}\left(x - \frac{a_n}{2}\right)$
Ανάστροφος Τελεστής $\mathcal{F}^+$	$\mathcal{F}^+ = T_{-a_n}$
Μετασχηματισμός Fourier, Αναδρομική σχέση του $F_n(k)$	$F_n(k) = (e^{ika_n} + 1)F_{n-1}(k)$
Λύση	$F_n(k) = \prod_{j=1}^n (\cos(ka_j) + i \sin(ka_j) + 1) F_0(k)$

Μονόπλευρο φράκταλ με ανακλιμάκωση.

Συνάρτηση πυκνότητας, αναδρομική σχέση του $p_n(x)$	$p_n(x) = p_{n-1}\left(\frac{x - a_n}{s}\right)$
Ανάστροφος Τελεστής $\mathcal{F}^+$	$\mathcal{F}^+ = C_{1/s} T_{a_n}$
Μετασχηματισμός Fourier, Αναδρομική σχέση του $F_n(k)$	$F_n(k) = \frac{1}{s} \left(e^{\frac{ika_n}{s}} + 1 \right) F_{n-1}\left(\frac{k}{s}\right)$
Λύση	$F_n(k) = \frac{1}{s^n} \prod_{j=1}^n \left[\frac{\cos(ka_j)}{s^{n-j+1}} + \frac{i \sin(ka_j)}{s^{n-j+1}} + 1 \right] F_0\left(\frac{k}{s^n}\right)$

Ακολουθώντας αυτή την διαδικασία καταφέρνουμε να δημιουργήσουμε το φράκταλ αναλόγως τις προτιμήσεις μας. Καταφέραμε και δείξαμε 5 περιπτώσεις με τον ίδιο τρόπο κατασκευής, τον BU. Την ίδια ακριβώς διαδικασία ακολουθάμε και στην περίπτωση του TD μόνο που θα καταλήξουμε σε διαφορετικά αποτελέσματα. Η δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος μας δίνει πλέον την δυνατότητα να υλοποιήσουμε το πείραμά μας. Βλέπουμε λοιπόν ότι με την βοήθεια των τύπων που φτιάξαμε για τον ενιαίο τελεστή μπορέσαμε πολύ εύκολα να καταλήξουμε στους τύπους (α),(β),(γ),(δ) και (ε).

Αμέσως λοιπόν μετά την απόδειξη όλων των αναγκαίων τύπων μπορούμε πλέον να αρχίσουμε την τοποθέτηση των μαζών. Βλέπουμε πως σε αυτό το σημείο περνάμε από τον αλγεβρικό φορμαλισμό στην ασυμπτωτική κλασματική διάσταση. Από το απόλυτο μαθηματικό κεφάλαιο προσπαθούμε να κάνουμε την μετάβαση στον πειραματικό κόσμο. Τα αποτελέσματα αυτά προσπαθούμε να τα ελέγξουμε μέσω της έντασης που διαπερνάει το φράκταλ. Η ένταση έχει την ιδιότητα να εξαρτάται άμεσα από τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης πυκνότητας της μάζας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 3^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- [1]Optical diffraction on fractals, (1986), C. Allain, M Cloitre, Paris Cedexus France, vol. 33
- [2]A Course in Operator Theory, (1999), John B. Conway, Vol.21 , American Mathematical Society
- [3]Operator Theory. Nonclassical Problems, (2002) S.G. Pyatkov, VSP, Tokyo
- [4]Operator Theory Operator Algebras and Applications, (1980), I. Arveson, William, II. Douglas, Ronald G., Vol. 51 – Part 1, American Mathematical Society

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΦΡΑΚΤΑΛ ΣΥΣΣΩΜΑΤΩΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο πραγματευόμαστε την κατασκευή κάποιων φράκταλ συσσωματωμάτων των οποίων ορίζουμε εμείς τις παραμέτρους. Την κατασκευή τους την έχουμε συζητήσει ήδη από το προηγούμενο κεφάλαιο εκτενέστατα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε μέσω της έντασης που διαπερνάει τη μάζα του φράκταλ συσσωματώματος να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα και διαπιστώσεις. Λόγω του ότι την ένταση την συναντάμε κυρίως ως μαθηματική έννοια μέσα από πράξεις και αποδείξεις προσπαθούμε στο τέλος του κάθε παραδείγματος να δώσουμε την φυσική της υπόσταση. Δηλαδή στην αρχή έχουμε το φορμαλιστικό κομμάτι με τις απαραίτητες αποδείξεις και μετέπειτα παρουσιάζεται το θεωρητικό.

4.1. Η Περίπτωση της Ομοιόμορφης κατανομής κυψελίδας.

4.1.1 Εισαγωγή στην κατασκευή της Ομοιόμορφης κατανομής κυψελίδας.

Το πρώτο μας παράδειγμα είναι ένα φράκταλ συσσωμάτωμα το οποίο αναλύουμε εκτενώς την κατασκευή του και μπαίνουμε στα χωρία της έντασης την οποία εξετάζουμε κάτω από ποιες συνθήκες έχουμε συγκεκριμένα αποτελέσματα [3].

Θα θέσουμε λοιπόν ως διάσταση $D=1$ δηλαδή την ευθεία των πραγματικών αριθμών χωρίς περιορισμό. Το πλήθος των σημείων που θα πάρουμε είναι ανάλογο του σταδίου κατασκευής στο οποίο βρισκόμαστε. Όπως γίνεται αντιληπτό χρειάζεται να ορίσουμε μια ακολουθία κατά την οποία σε κάθε στάδιο θα καθορίζουμε πόσα σύνολα σωματιδίων έχουμε, καθώς επίσης και μια ακολουθία μηκών έτσι ώστε να μπορούμε να καθορίζουμε την απόσταση μεταξύ των συνόλων των σωματιδίων. Η απόσταση φυσικά μπορεί να είναι σταθερή ή να υπολογίζεται αναλόγως το στάδιο ή ακόμη και σε κάθε στάδιο να είναι τυχαία, δηλαδή να μην ακολουθεί καμία λογική συνέχεια. Όσο αφορά την 3^η μας παράμετρο, την συμμετρία, το φράκταλ επιλέγουμε να είναι συμμετρικό. Οπότε λοιπόν καταλήγοντας

στην τελευταία παράμετρο διαλέγουμε να μην υπάρχει ανακλιμάκωση παρά μόνο μετατόπιση. Οι τελεστές μας θα εκτελούν μόνο την διαδικασία της μετατόπισης [1].

Το μοντέλο μας κατασκευάζεται από διαδοχικές επαναλήψεις τοποθέτησης από σύνολα σωματιδίων σε καθορισμένο μήκος. Ορίζουμε λοιπόν αρχικό μήκος L_0 το μήκος και m_0 τη μάζα του σωματιδίου. Το σωματίδιο στην περίπτωση μας θα είναι μία κυψελίδα, δηλαδή ένα μόριο. Εμείς εδώ θα το θεωρούμε ως μια πολύ μικρή ποσότητα ύλης η οποία επειδή βρισκόμαστε στον μονοδιάστατο χώρο θα έχει την μορφή ενός διαστήματος. Ένα σύνολο από κυψελίδες αποτελεί μία συστάδα και ένα σύνολο από συστάδες αποτελεί ένα συσσωμάτωμα.

Ξέρουμε ότι ο τύπος της πυκνότητας δίνεται από τον τύπο:

$$\rho(x) = \frac{M}{V}, \text{ όπου } M \text{ η μάζα και } V \text{ ο όγκος του συσσωματώματος.}$$

Από την στιγμή όμως που βρισκόμαστε στον μονοδιάστατο χώρο ο όγκος δεν έχει νόημα. Άρα στην θέση του τοποθετούμε το μήκος της συστάδας στο εκάστοτε βήμα. Δηλαδή ο νέος τύπος μας είναι:

$$\rho(x) = \frac{M}{L}, \text{ όπου } M \text{ η μάζα και } L \text{ το μήκος του συσσωματώματος.}$$

Η πρώτη συστάδα αποτελείται από 2 κυψελίδες οι οποίες απέχουν απόσταση $a_0 L_0$ από τα κέντρα τους. Η α_n είναι η ακολουθία με την οποία αυξάνεται το μήκος. Δηλαδή το μήκος του συσσωματώματος σε κάθε βήμα αυξάνεται αναλογικά με το προηγούμενο στάδιο. Για την α_n έχουμε έναν σημαντικό περιορισμό. Το συσσωμάτωμα μας θα πρέπει στον χώρο να μεγαλώνει και όχι να μικραίνει γιατί έτσι θα υπάρχει κίνδυνος οι μάζες μας να πέφτουν η μια πάνω στην άλλη. Άρα για να αποφύγουμε το λεγόμενο overlapping θα πρέπει $a_j \geq 1$ για όλα τα j . Στην περίπτωση όπου $a_j = 1$ για $j = 0, \dots, n - 1$ τότε το συσσωμάτωμά μας παραμένει στάσιμο [3].

4.1.2 Κλασματική διάσταση συσσωματώματος με ομοιόμορφη επιμήκυνση.

Η μάζα διασκορπίζεται ομοιόμορφα σε μήκος L_n στο n -στο βήμα. Συνεχίζοντας ομοίως την ίδια διαδικασία θα έχουμε στο n -στο βήμα να έχουμε το συσσωμάτωμα να έχει αποκτήσει μήκος L_n και να παράγεται από 2 συστάδες $(n-1)$ σταδίου η καθεμία με μήκος L_{n-1} οι οποίες διαχωρίζονται από $a_{n-1}L_{n-1}$ απόσταση από τα κέντρα των μαζών τους. Οπότε καταλήγουμε στις εξισώσεις μήκους και μάζας αντίστοιχα:

Ορισμός:

Ο τύπος που μας δίνει το μήκος του φράκταλ συσσωματώματος σε κάθε βήμα είναι:

$$L_n = \prod_{j=0}^{n-1} (a_j + 1) L_0 \quad (1)$$

■

Ορισμός:

Ο τύπος που μας δίνει την μάζα του φράκταλ συσσωματώματος σε κάθε βήμα από την στιγμή που σε κάθε βήμα εκτός του πρώτου τοποθετούμε από 2 κυψελίδες είναι:

$$M_n = m_0 2^n \quad (2)$$

■

Για να εξειδικεύσουμε λίγο την κατάσταση θα θεωρήσουμε ότι:

$a_j = \alpha$ για όλα τα j . Άρα:

Ορισμός:

Ο τύπος που μας δίνει το μήκος του φράκταλ συσσωματώματος σε κάθε βήμα θα είναι:

$$L_n = \left[\prod_{j=0}^{n-1} (\alpha + 1) \right] L_0 = \left[\prod_{j=0}^{n-1} \beta \right] L_0 = \beta^n L_0$$

■

Σύμφωνα λοιπόν με αυτούς τους 2 στοιχειώδεις κανόνες και τις προϋποθέσεις που έχουμε αναφέρει θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα αντικείμενο το οποίο διέπεται από τις φράκταλ ιδιότητες και άρα θα χαρακτηρίζεται από μία φράκταλ διάσταση D την οποία μπορούμε να βρούμε χρησιμοποιώντας την μάζα του φράκταλ συσσωματώματος $m(x)$ σε καθορισμένο βήμα σε συνάρτηση με το σημείο x . Η φράκταλ διάσταση μπορεί να υπολογιστεί από το διάγραμμα:

$$\log[m(x)] \text{ vs } \log(x).$$

Ο λόγος για τον οποίο λογαριθμίζουμε τις συναρτήσεις μάζας και θέσης είναι επειδή είναι πολύ μεγάλοι αριθμοί και μας δυσκολεύουν στην αντιμετώπισή τους. Με αυτόν τον τρόπο λοιπόν καταφέρνουμε να τους μειώσουμε και να τους φέρουμε σε τέτοια επίπεδα ώστε να μπορούμε να τους μελετήσουμε [3,12].

Πρόταση 1:

Για την ειδική περίπτωση όπου ισχύει ότι:

$$a_j = \alpha \text{ για όλα τα } j$$

, τότε θα έχουμε:

Η ακολουθία των μαζών M_n σε σχέση με αυτήν των μηκών L_n συνδέεται βάσει της φράκταλ διάσταση D από την σχέση:

$$M_n = m_0 (L_n/L_0)^D, \text{ όπου } D = \log(2) / \log(3)$$

■

Απόδειξη:

Θα κάνουμε την απόδειξη γενικεύοντας για κάθε σταθερή τιμή της a_j και δεν θα ειδικεύσουμε για την τιμή του παραδείγματός μας.

Ά τ ρ ό π ο ς

Έχουμε ότι:

$$\frac{L_n}{L_0} = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \alpha_j) = (1 + a)^n$$

και ξέρουμε από ιδιότητες λογαρίθμων ότι:

$$\log_{\beta} \theta = \log \theta / \log \beta$$

Οπότε:

$$\log_{1+a} 2 = D.$$

Άρα έχουμε ότι:

$$(1 + a)^D = 2.$$

Κατά συνέπεια λοιπόν έχουμε ότι:

$$(1 + a)^{Dn} = 2^n.$$

Από τον τύπο (1) έχουμε:

$$M_n = m_0 (1 + a)^{Dn} = m_0 ((1 + a)^D)^n = m_0 (L_n/L_0)^D.$$

Β τ ρ ό π ο ς

Από πριν έχουμε ορίσει τις ακολουθίες μας ως εξής:

$$L_n = L_0 \alpha^n \text{ και } M_n = m_0 2^n.$$

Θέτουμε ότι:

$$\tilde{L} = L_n/L_0 \text{ και } \tilde{M} = M_n/m_0.$$

Οπότε έχουμε:

$$\alpha^n = \tilde{L} \text{ και } \beta^n = \tilde{M}.$$

Λογαριθμίζοντας και τις 2 προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$\log \tilde{M} = n \log \alpha \text{ και } \log \tilde{L} = n \log \beta.$$

Από την 2^η σχέση λύνοντας ως προς n έχουμε: $n = \log \tilde{L} / \log \beta$ και αντικαθιστώντας στην 1^η σχέση καταλήγουμε ότι:

$$\log \tilde{M} = \left(\frac{\log \tilde{L}}{\log \beta} \right) \log \alpha = \log \tilde{L} \left(\frac{\log \alpha}{\log \beta} \right).$$

Θέτοντας λοιπόν ότι:

$$D = \frac{\log \alpha}{\log \beta}$$

έχουμε $\log \tilde{M} = D \log \tilde{L}$ από την παραπάνω σχέση.

Από ιδιότητες λογαρίθμων έχουμε:

$$\log \tilde{M} = \log \tilde{L}^D.$$

Οπότε καταλήγουμε:

$$\tilde{M} = \tilde{L}^D.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν από τα αρχικά έχουμε:

$$\frac{M_n}{m_0} = \left(\frac{L_n}{L_0} \right)^D$$

Άρα:

$$M_n = m_0 \left(\frac{L_n}{L_0} \right)^D \quad \text{όπου} \quad D = \frac{\log a}{\log \beta} = \frac{\log 2}{\log 3}$$



Έτσι λοιπόν καταφέραμε να δείξουμε ότι το φράκταλ συσσωμάτωμα μας έχει φρακταλικές ιδιότητες το οποίο πλέον ξεκινάμε να υποβάλλουμε σε διάφορους πειραματισμούς [3,2,12]. Παίρνουμε μια σταθερή πηγή φωτός και την τοποθετούμε απέναντι από το φράκταλ συσσωμάτωμα. Οπότε ξεκινάει μια διαδικασία διάχυσης του φωτός μέσω του φράκταλ συσσωματώματος. Στην εργασία μας δεν θα ασχοληθούμε για το πώς παράγεται ο τύπος της διασκορπισμένης έντασης αλλά θα τον χρησιμοποιήσουμε εντελώς φορμαλιστικά.

Ορισμός:

Η ένταση του φωτός δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$I_n(z) = |F_n(k)|^2$$

όπου $F_n(k)$ είναι ο Fourier μετασχηματισμός της πυκνότητας της μάζας του συσσωματώματος και k το είναι ένα διάνυσμα το οποίο προσδιορίζεται από την κυματική μορφή του φωτός.



Ορισμός:

Ο $F_n(k)$ είναι ο Fourier μετασχηματισμός της πυκνότητας της μάζας του συσσωματώματος και δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$F_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p_n(x) dx \quad (3)$$



Πρόταση 2:

Η πυκνότητα της μάζας του φράκταλ συσσωματώματος σε κάθε βήμα δίνεται από τον τύπο:

$$p_n(x) = p_{n-1}\left(x - \frac{a_{n-1}}{2}\right) + p_{n-1}\left(x + \frac{a_{n-1}}{2}\right) \quad (4)$$

Τον οποίο παίρνουμε έτοιμο από την σελ. 99 από τους πίνακες των διαφόρων περιπτώσεων [3,5]. Από την συνάρτηση της πυκνότητας καταλήγουμε στον τύπο του μετασχηματισμού Fourier:

$$F_n(k) = 2 \cos\left(\frac{a_{n-1}k}{2}\right) F_{n-1}(k).$$

■

Απόδειξη:

Αντικαθιστώντας στον τύπο $F_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p_n(x) dx$ από την (4) έχουμε:

$$\begin{aligned} F_n(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left[p_{n-1}\left(x - \frac{a_{n-1}}{2}\right) + p_{n-1}\left(x + \frac{a_{n-1}}{2}\right) \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p_{n-1}\left(x - \frac{a_{n-1}}{2}\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p_{n-1}\left(x + \frac{a_{n-1}}{2}\right) dx = A \end{aligned}$$

Κάνω αλλαγή μεταβλητής για το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$y = x - a_{n-1}/2$$

Και για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$y = x + a_{n-1}/2$$

Οπότε από την Α προκύπτει:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\left(y + \frac{a_{n-1}}{2}\right)} p_{n-1}(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\left(y - \frac{a_{n-1}}{2}\right)} p_{n-1}(y) dy = \\ &= e^{\frac{ika_{n-1}}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} p_{n-1}(y) dy + e^{-\frac{ika_{n-1}}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} p_{n-1}(y) dy = \\ &= e^{\frac{ika_{n-1}}{2}} F_{n-1}(k) + e^{-\frac{ika_{n-1}}{2}} F_{n-1}(k) = \\ &= F_{n-1}(k) \left(e^{\frac{ika_{n-1}}{2}} + e^{-\frac{ika_{n-1}}{2}} \right) \end{aligned}$$

Και καθώς ξέρουμε ότι:

$$e^{\frac{ika_{n-1}}{2}} = \cos\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right)$$

$$e^{-\frac{ika_{n-1}}{2}} = \cos\left(-\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right).$$

Άρα θα έχουμε ότι:

$$e^{\frac{ika_{n-1}}{2}} + e^{-\frac{ika_{n-1}}{2}} = \cos\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right) -$$

$$i \sin\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\kappa\alpha_{n-1}}{2}\right).$$

Οπότε καταλήγουμε στην σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε, ότι δηλαδή:

$$F_n(k) = 2 \cos\left(\frac{a_{n-1}k}{2}\right) F_{n-1}(k).$$



Επειδή παρακάτω θα μας χρειαστεί μια άλλη μορφή αυτού του τύπου αποδεικνύουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 1:

Από τον τύπο $F_n(k) = 2 \cos\left(\frac{a_{n-1}k}{2}\right) F_{n-1}(k)$ έχουμε τον

$$F_n(k) = 2^n \left[\prod_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{a_j k}{2}\right) \right] F_0(k).$$



Απόδειξη:

Με την μέθοδο της επαγωγής έχουμε:

$$F_1(k) = 2 \cos\left(\frac{a_0 k}{2}\right) F_0(k)$$

$$F_2(k) = 2 \cos\left(\frac{a_1 k}{2}\right) F_1(k) = 2 \cos\left(\frac{a_1 k}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{a_0 k}{2}\right) F_0(k)$$

$$F_2(k) = 4 \cos\left(\frac{a_0 k}{2}\right) \cos\left(\frac{a_1 k}{2}\right) F_0(k).$$

$$F_3(k) = 2 \cos\left(\frac{a_2 k}{2}\right) F_2(k) =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{a_2 k}{2}\right) 4 \cos\left(\frac{a_0 k}{2}\right) \cos\left(\frac{a_1 k}{2}\right) F_0(k) =$$

$$= 2^3 \cos\left(\frac{a_0 k}{2}\right) \cos\left(\frac{a_1 k}{2}\right) \cos\left(\frac{a_2 k}{2}\right) F_0(k).$$

Οπότε επαγωγικά καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση:

$$F_n(k) = 2^n \left[\prod_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{a_j k}{2}\right) \right] F_0(k). \quad (5)$$

όπου $F_0(k)$ είναι η scattering amplitude της κυψελίδας.



Δηλαδή αν έχουμε παραδείγματος χάριν μία κυψελίδα στο φράκταλ συσσωμάτωμα μας τότε $F_0 = m_0$.

Οπότε ο τύπος (5) θα γίνει:

$$F_n(k) = 2^n \left[\prod_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{a_j k}{2}\right) \right] m_0$$

4.1.3 Ανάλυση της Ομοιόμορφης κατανομής κυψελίδας (ομοιόμορφης σημειακής πυκνότητας) μέσω συνάρτησης έντασης.

Η περίπτωση που εξετάζουμε, δηλαδή να έχουμε ορίσει το $\alpha=2$, είναι πολύ συχνά φαινόμενη κατασκευή για φράκταλ. Έτσι λοιπόν την περίπτωση αυτή την έχουμε ονομάσει **Ομοιόμορφης κατανομής κυψελίδας (Uniform density particle)**.

Υπάρχει όμως και άλλη μια περίπτωση, αυτής του αρχικού μετασχηματισμού Fourier να δίνεται από την σχέση:

$$F_0(k) = m_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{kL_0}{2}\right)}{\frac{(kL_0)}{2}} \right]$$

Η διαφοροποίηση μεταξύ των δύο περιπτώσεων γίνεται με την διάκριση με βάση το στήριγμα. Στην μεν πρώτη περίπτωση έχουμε να κάνουμε με το σημειακό στήριγμα όπου η συνάρτηση της πυκνότητας δίνεται από την σχέση:

$$p_0(x) = m_0 \delta(x - x_0)$$

όπου x_0 είναι το αρχικό μας σημείο.

Πρόταση 3:

Στην περίπτωση του σημειακού στηρίγματος ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται από τον τύπο:

$$F_0 = m_0$$

■

Απόδειξη:

Από την στιγμή που έχουμε ότι:

$$p_0(x) = m_0 \delta(x - x_0)$$

Θα ισχύει:

$$F_0(k) = \langle e^{ikx}, p_0(x) \rangle = \langle e^{ikx}, m_0 \delta(x - x_0) \rangle$$

$$F_0(k) = \langle e^{ikx}, m_0 \delta(x-0) \rangle = \langle e^{ikx}, m_0 \delta(x) \rangle = m_0$$



Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε την περίπτωση του στηρίγματος πάνω σε διάστημα.

Ορισμός:

Η συνάρτηση της πυκνότητας δίνεται από τον τύπο

$$p_0(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

όπου $\chi_A(x)$ η χαρακτηριστική εξίσωση.



Με τον ίδιο τρόπο όπως δουλέψαμε και πριν μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται από την σχέση:

$$F_0(k) = m_0 [\sin(z)/z] \text{ όπου } z = kL_0/2$$

Πρόταση 4:

Στην περίπτωση της Ομοιόμορφης κατανομής κυψελίδας στο αρχικό μας στάδιο ισχύει ότι:

$$F_0(k) = m_0 [\sin(z)/z] \text{ όπου } z = kL_0/2.$$



Απόδειξη:

Από τον μετασχηματισμό Fourier έχουμε:

$$F_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p_n(x) dx$$

Όποτε για $n = 0$ και δουλεύοντας στο διάστημα $[-L_0/2, L_0/2]$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
F_0(k) &= \int_{-L_0/2}^{L_0/2} e^{ikx} p_0(x) dx = \int_{-L_0/2}^{L_0/2} (\cos(kx) + i \sin(kx)) p_0(x) dx = \\
&= \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \cos(kx) p_0(x) + i \sin(kx) p_0(x) dx = \\
&= \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \cos(kx) p_0(x) dx + \int_{-L_0/2}^{L_0/2} i \sin(kx) p_0(x) dx = \\
&= m_0/L_0 \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \cos(kx) dx + i \left(\frac{m_0}{L_0} \right) \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \sin(kx) dx = \\
&= m_0/L_0 \int_{-L_0/2}^{L_0/2} [\sin(kx)/k]' dx + i \left(\frac{m_0}{L_0} \right) \int_{-L_0/2}^{L_0/2} [-\cos(kx)/k]' dx = \\
&= (m_0/L_0) \left[\sin\left(\frac{kL_0}{2}\right) - \sin\left(-\frac{kL_0}{2}\right) \right] / k \\
&\quad - i(m_0/L_0) \left[\cos\left(\frac{kL_0}{2}\right) - \cos\left(-\frac{kL_0}{2}\right) \right] = \\
&= (m_0/L_0) \left[2\sin\left(\frac{kL_0}{2}\right) / k \right] = 2(m_0/L_0 k) \sin\left(\frac{kL_0}{2}\right) = \\
&= (m_0/(L_0 k/2)) \sin\left(\frac{kL_0}{2}\right) = m_0 \sin(z)/z, \text{ όπου } z = kL_0/2
\end{aligned}$$



Πρόταση 5:

Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης της πυκνότητας ενός φράκταλ συσσωματώματος στην περίπτωση της Ομοιόμορφης κατανομής κυψελίδας δίνεται από τον τύπο:

$$F_n(z) = 2^n \left[\prod_{j=0}^{n-1} \cos(23^j z) \right] F_0(z)$$

■

Απόδειξη:

Από τα προηγούμενα έχουμε ήδη αποδείξει ότι:

$$F_n(k) = 2^n \left[\prod_{j=0}^{n-1} \cos(a_j L_j k/2) \right] F_0(k) \quad (B)$$

Καθώς όμως από τον αναδρομικό τύπο του φράκταλ συσσωματώματος μας όσον αφορά το μήκος του έχουμε ότι:

$$L_n = \left[\prod_{j=0}^{n-1} \beta_j \right] L_0 \quad (A)$$

Από την στιγμή όμως που έχουμε θέσει:

$$\beta_{n-1} = 1 + a_{n-1}$$

καταλήγουμε ότι:

$$L_n = \left[\prod_{j=0}^{n-1} \beta_j \right] L_0 = \beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_j L_0 = (1 + a_0)(1 + a_1) \dots (1 + a_j) L_0$$

$$= (1 + a)(1 + a) \dots (1 + a) L_0 = (1 + a)^j L_0 = \beta^j L_0 = 3^j L_0$$

Οπότε έχουμε την σχέση:

$$\alpha_j L_j = a \left[\prod_{i=0}^j \beta_i \right] L_0 = a \beta^j L_0 = 2(3)^j L_0.$$

Άρα λοιπόν με απλή αντικατάσταση στον τύπο (B) έχουμε ότι:

$$F_n(z) = 2^n \left[\prod_{j=0}^{n-1} \cos(a\beta^j z) \right] F_0(z) = 2^n \left[\prod_{j=0}^{n-1} \cos(23^j z) \right] F_0(z).$$



Για να μπορέσουμε λοιπόν να φτάσουμε μετά από όλους αυτούς τους τύπους στον τύπο της έντασης θα πρέπει να κάνουμε ένα τελευταίο βήμα. Θα πρέπει να φέρουμε τα νούμερα στα μέτρα μας. Αυτό επιτυγχάνεται με την κανονικοποίηση της έντασης του φωτός στο σημείο $z = 0$. Το μόνο κακό είναι ότι θα χάσουμε κάποιες πληροφορίες εκτελώντας την κανονικοποίηση της έντασης καθώς υψώνουμε στο τετράγωνο για να γίνει η διαδικασία, αλλά η απώλεια δεν είναι τόσο μεγάλη σε σύγκριση με τα αποτελέσματα που κερδίζουμε. Έτσι λοιπόν:

Πρόταση 6:

Ο τύπος της έντασης για ένα τυχαίο φράκταλ συσσωμάτωμα δίνεται από την σχέση:

$$I_n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2(\beta^j \alpha z).$$



Απόδειξη:

Από τον ορισμό της έντασης ξέρουμε ότι:

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \left[\frac{F_n(z)}{F_0(z)} \right]^2 = \\ &= (2^n \prod_{j=0}^{n-1} \cos(a\beta^j z) F_0(z) / 2^n \prod_{j=0}^{n-1} \cos(a\beta^j 0) F_0(0))^2 = \\ &= \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{\cos(a\beta^j z) F_0(z)}{F_0(0)} \right)^2 = \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2(\beta^j \alpha z). \end{aligned}$$



Από τον παραπάνω τύπο μπορούμε να καταλήξουμε σε έναν αναδρομικό τύπο της έντασης έτσι ώστε να μπορούμε να παρατηρήσουμε κάποιες διαφορές από βήμα σε βήμα. Δηλαδή έχουμε:

Πρόταση 7:

Ο αναδρομικός τύπος της έντασης του φωτός σε ένα φράκταλ συσσωμάτωμα δίνεται από την σχέση:

$$I_{n+1}(z) = I_n(z) \cos^2(\beta^n az)$$

■

Απόδειξη:

Από την παραπάνω πρόταση είδαμε ότι:

$$I_n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2(\beta^j az).$$

Υπολογίζοντας λοιπόν την ένταση σε κάθε βήμα θα έχουμε:

$$I_1(z) = \prod_{j=0}^0 \cos^2(\beta^j az) = \cos^2(az)$$

$$I_2(z) = \prod_{j=0}^1 \cos^2(\beta^j az) = \cos^2(\beta^0 az) \cos^2(\beta^1 az) = I_1(z) \cos^2(\beta az)$$

$$\begin{aligned} I_3(z) &= \prod_{j=0}^2 \cos^2(\beta^j az) = \cos^2(\beta^0 az) \cos^2(\beta^1 az) \cos^2(\beta^2 az) = \\ &= I_2(z) \cos^2(\beta^2 az) \end{aligned}$$

Και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} I_{n+1}(z) &= \prod_{j=0}^n \cos^2(\beta^j az) = \cos^2(\beta^0 az) \cos^2(\beta^1 az) \dots \cos^2(\beta^n az) = \\ &= I_n(z) \cos^2(\beta^n az). \end{aligned}$$

Οπότε:

$$I_{n+1}(z) = I_n(z) \cos^2(\beta^n \alpha z).$$



Οι προτάσεις που αποδεικνύουμε από εδώ και πέρα έχουν να κάνουν κυρίως με ιδιότητες της έντασης του φωτός

Πρόταση 8:

Για $\alpha z \neq \frac{\pi}{2}$ θα ισχύει ότι:

$$I_n(\beta z) = I_{n+1}(z) / \cos^2(\alpha z)$$



Απόδειξη:

Από τον τύπο της έντασης έχουμε:

$$I_n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2(\beta^j \alpha z)$$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας με β το z καταλήγουμε:

$$I_n(\beta z) = \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2(\beta^{j+1} \alpha z) = \prod_{j=1}^{n-1} \cos^2(\beta^j \alpha z)$$

$$I_n(\beta z) = \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2(\beta^j \alpha z) / (\cos^2(\beta^0 \alpha z))$$

καθώς ξέρουμε ότι: $\cos^2(\alpha z) \neq 0$.

Άρα καταλήγουμε στον τύπο:

$$I_n(\beta z) = \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2(\beta^j \alpha z) / (\cos^2(\alpha z)).$$

Οπότε:

$$I_n(\beta z) = \frac{I_{n+1}(z)}{\cos^2(\alpha z)}$$



Πρόταση 9:

Για $\alpha z \ll \frac{\pi}{2}$ έχουμε ότι $\cos(\alpha z) \approx 1$ οπότε θα ισχύει ότι:

$$I_n(\beta z) \approx I_{n+1}(z)$$



Απόδειξη:

Από την προηγούμενη πρόταση με αντικατάσταση στον παρανομαστή έχουμε:

$$I_n(\beta z) = \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2(\beta^j \alpha z) / (\cos^2(\alpha z)) = I_{n+1}(z) / 1 = I_{n+1}(z)$$

$$I_n(\beta z) = I_{n+1}(z)$$



Από την πρόταση αυτή μπορούμε να καταλάβουμε ότι η ένταση του φωτός στο επόμενο βήμα εξαρτάται από την μεταβλητή β .

Ορισμός:

Ο τύπος της μέσης τιμής της έντασης δίνεται από την σχέση:

$$\langle I_n(z) \rangle = z^{-1} \int_0^z I_n(z') dz'$$



Με βάση λοιπόν την μέση τιμή της έντασης μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την φύση και την συμπεριφορά του φράκταλ συσσωματώματος.

Ιδιότητα 1:

Η μέση τιμή της έντασης μεταβάλλεται από βήμα σε βήμα. Η μεταβολή αυτή δίνεται μέσω της σχέσης:

$$\langle I_{n+1}(z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2az}{\pi}\right) \text{ για } \frac{2az}{\pi} > \beta^{-n}.$$

■

Απόδειξη:

Από τον τύπο

$$\langle I_n(z) \rangle = z^{-1} \int_0^z I_n(z') dz'$$

και από την σχέση:

$$I_{n+1}(z) = I_n(z) \cos^2(\beta^n az).$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle I_{n+1}(z) \rangle &= z^{-1} \int_0^z \cos^2(\beta^n az') I_n(z') dz' = \\ &= z^{-1} \int_0^z \frac{1}{2} (1 + \cos(2\beta^n az')) I_n(z') dz' = A \end{aligned}$$

Καθώς από την τριγωνομετρία έχουμε:

$$\cos^2(a) = (1 + \cos(2a))/2$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} A &= z^{-1} \int_0^z \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\beta^n az')}{2} \right) I_n(z') dz' = \\ &= z^{-1} \frac{1}{2} \int_0^z I_n(z') dz' + z^{-1} \frac{1}{2} \int_0^z \cos(2\beta^n az') I_n(z') dz' = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \langle I_n(z) \rangle + \frac{1}{2} \langle \cos(2\beta^n az) I_n(z) \rangle.$$

Για δοσμένο n , υπάρχουν πάρα πολλές ταλαντώσεις του $\cos(2\beta^n az)$ μεταξύ του 0 και z . Σε μια τέτοια περίπτωση από την στιγμή όπου η $I_n(z)$ είναι ένας θετικός αριθμός θα έχουμε την ποσότητα $\frac{1}{2} \langle \cos(2\beta^n az) I_n(z) \rangle$ να είναι πάρα πολύ μικρή σε σύγκριση με το $\frac{1}{2} \langle I_n(z) \rangle$.

Οπότε:

$$\langle I_{n+1}(z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2}$$

Αν $2az/\pi \gg 1$ τότε για κάποιο n η πρότασή μας ικανοποιείται για όλα τα j . Επίσης έχουμε από τον περιορισμό ότι:

$$2az/\pi > \beta^{-n} \Leftrightarrow 2\beta^n az > \pi$$

Έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το $\cos(2\beta^n az)$.



Ιδιότητα 2:

Για την μέση ένταση όταν ισχύει ότι: $2az/\pi \gg 1$ τότε:

$$\langle I_n(z) \rangle = (1/2)^n + \mathcal{O}\left(\frac{2az}{\pi}\right).$$



Απόδειξη:

Από την πρώτη παρατήρηση έχουμε ότι:

$$\langle I_{n+1}(z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2az}{\pi}\right) \text{ για } \frac{2az}{\pi} > \beta^{-n}$$

Οπότε παίρνοντας τον αναδρομικό τύπο έχουμε:

$$\langle I_1(z) \rangle = \frac{\langle I_0(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2az}{\pi}\right) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2az}{\pi}\right) \text{ για } \frac{2az}{\pi} > \beta^0 \Leftrightarrow 2az/\pi > 1$$

καθώς ισχύει από τον αρχικό μας τύπο ότι:

$$I_0(z) = (F_0(z)/F_0(0))^2 = 1$$

Δουλεύοντας ομοίως έχουμε ότι:

$$\langle I_2(z) \rangle = \frac{\langle I_1(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right)}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) = \frac{1}{2^2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right)$$

$$\begin{aligned} \langle I_3(z) \rangle &= \frac{\langle I_2(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) = \frac{\frac{1}{2^2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right)}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) \\ &= \frac{1}{2^3} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} \langle I_n(z) \rangle &= \frac{\langle I_{n-1}(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) = \frac{\frac{1}{2^{n-1}} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right)}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\langle I_n(z) \rangle = \frac{1}{2^n} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) \text{ για } \frac{2\alpha z}{\pi} \gg 1.$$



Ιδιότητα 3:

Για την μέση ένταση όταν ισχύει ότι: $2\alpha z/\pi \ll 1$ τότε:

$$\langle I_n(\beta z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right).$$



Απόδειξη:

Από προηγούμενη πρόταση έχουμε αποδείξει ότι:

Για $\alpha z \ll \frac{\pi}{2}$ έχουμε ότι $\cos(\alpha z) \approx 1$ οπότε θα ισχύει ότι:

$$I_n(\beta z) \approx I_{n+1}(z)$$

Οπότε:

$$\langle I_n(\beta z) \rangle = \langle I_{n+1}(z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) \text{ μόνο και μόνο όταν:}$$

$$\alpha z \ll \pi/2 \Leftrightarrow 2\alpha z \ll \pi \Leftrightarrow 2\alpha z/\pi \ll 1.$$



Ιδιότητα 4:

Η κλίση σε ένα διάστημα $\beta^{-n} < 2\alpha z/\pi < 1$ είναι $-D$ όπου $D = \frac{\log 2}{\log \beta}$.



Απόδειξη:

Η τέταρτη ιδιότητα είναι μια άμεση συνέπεια της τρίτης παρατήρησης από αποδείξαμε. Στην τρίτη ιδιότητα είδαμε ότι καθώς το z αυξάνεται γεωμετρικά κατά β τότε η $\langle I_n(z) \rangle$ υποδιπλασιάζεται. Για να αποδείξουμε λοιπόν την (4) θα δουλέψουμε με γνώμονα τα στοιχεία που έχουμε πάρει από την (3).

Ξεκινάμε επιλέγοντας την ακολουθία των πολλαπλασιαστών της $\langle I_n(z) \rangle$. Από την τρίτη μας παρατήρηση ξέρουμε ότι:

$$\langle I_n(\beta z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right)$$

Οπότε δημιουργούμε την ακολουθία:

$$\widetilde{A}_n = \frac{\langle I_n(\beta z) \rangle}{\langle I_n(z) \rangle} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Παίρνοντας τις ακολουθίες:

$$\widetilde{A}_n = (\widetilde{B}_n)^D \text{ όπου } D = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log \beta} = -\frac{\log 2}{\log \beta}. \quad (1)$$

$$\widetilde{B}_n = \beta^n \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην (1) την ακολουθία B_n από την (2) έχουμε:

$$\frac{\langle I_n(\beta z) \rangle}{\langle I_n(z) \rangle} = (\beta^n)^{-D} \Leftrightarrow \log \frac{\langle I_n(\beta z) \rangle}{\langle I_n(z) \rangle} = -D \log \beta^n.$$

Άρα η κλίση της γραφικής παράστασης της μέσης τιμής της έντασης είναι $-D$ στο διάστημα $\beta^{-n} < 2az/\pi < 1$.



Ιδιότητα 5:

Υπάρχουν πολλά διαστήματα όπου η κλίση της έντασης είναι -1 ακόμα και αν ισχύει ότι $2az/\pi < 1$.



Απόδειξη:

Παίρνουμε την σχέση:

$$\log \langle I_n(z) \rangle / \log z$$

και την παραγωγίζουμε.

Οπότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{d \log \langle I_n(z) \rangle}{d \log(z)} &= \frac{z}{\langle I_n(z) \rangle} \frac{d \langle I_n(z) \rangle}{dz} = \\ &= \frac{z}{\langle I_n(z) \rangle} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \int_0^z I_n(z') dz' \right) = A \end{aligned}$$

Από Διαφορικό λογισμό ξέρουμε ότι:

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt = f(\varphi_2(x)) \varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x)) \varphi_1'(x)$$

Οπότε για την A έχουμε:

$$A = \frac{z}{\langle I_n(z) \rangle} \left(-\frac{1}{z^2} \int_0^z I_n(z') dz' + \frac{1}{z} \int_0^z I_n(z') dz' \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z}{\langle I_n(z) \rangle} \left(-\frac{1}{z} \langle I_n(z) \rangle + \frac{1}{z} (I_n(z)(z)' - I_n(0)0) \right) = \\
&= \frac{z}{\langle I_n(z) \rangle} \left(-\frac{\langle I_n(z) \rangle}{z} + \frac{I_n(z)}{z} \right) = -\frac{z \langle I_n(z) \rangle}{\langle I_n(z) \rangle z} + \frac{z I_n(z)}{\langle I_n(z) \rangle z} = \\
&= -1 + \frac{I_n(z)}{\langle I_n(z) \rangle}.
\end{aligned}$$

Άρα η κλίση για κάθε διάστημα είναι -1 ανεξαρτήτως των περιορισμών που έχουμε.



Στην γενική περίπτωση τοποθετούμε αρχικά την m_0 μάζα της κυψελίδας αναλόγως την δυική θέση κ του x και το αρχικό μήκος L_0 . Στην ειδική περίπτωση που παρουσιάσαμε δεν μας ενδιαφέρει άμεσα η θέση της κυψελίδας. Μπορεί αρχικά να μας ακούγεται λίγο διαφορετική η μια κατάσταση με την άλλη αλλά παρόλα αυτά οδηγούμαστε στα ίδια συμπεράσματα [3,7]. Για του λόγου το αληθές αποδεικνύουμε ξανά τις 5 παραπάνω ιδιότητες με την διαφορά ότι τώρα θα έχουμε την αρχική τιμή του μετασχηματισμού Fourier να δίνεται από την σχέση:

$$F_0(\kappa) = \frac{m_0 \sin(z)}{z}.$$

Ιδιότητα 1':

Η μέση τιμή της έντασης μεταβάλλεται από βήμα σε βήμα. Η μεταβολή αυτή δίνεται μέσω της σχέσης:

$$\langle I_{n+1}(z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) \text{ για } \frac{2\alpha z}{\pi} > \beta^{-n}.$$



Απόδειξη:

Από τον τύπο

$$\langle I_n(z) \rangle = z^{-1} \int_0^z I_n(z') dz'$$

Και από την σχέση:

$$I_{n+1}(z) = I_n(z) \cos^2(\beta^n a z).$$

Πλέον η ένταση του φωτός όμως δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \left[\frac{F_n(z)}{F_n(0)} \right]^2 = \\ &= (2^n \prod_{j=0}^{n-1} \cos(a\beta^j z) F_0(z) / 2^n \prod_{j=0}^{n-1} \cos(a\beta^j 0) F_0(0))^2 = \\ &= \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{\cos(a\beta^j z) F_0(z)}{F_0(0)} \right)^2 = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{\cos(a\beta^j z) m_0 \left[\frac{\sin(z)}{z} \right]}{m_0 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z}} \right)^2 = \end{aligned}$$

Καθώς όμως ξέρουμε ότι:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos(z) = 1$$

ή αλλιώς:

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{z + z^3 + z^5 + \dots}{z} = 1 + z^2 + z^4 + \dots \rightarrow 1 \text{ καθώς } z \rightarrow 0$$

Θα έχουμε στον παραπάνω τύπο ότι:

$$= \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{\cos(a\beta^j z) m_0 \left[\frac{\sin(z)}{z} \right]}{m_0 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z}} \right)^2 = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \cos(a\beta^j z) \left[\frac{\sin(z)}{z} \right] \right)^2 =$$

.....

$$= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\cos^2(a\beta^j z) \sin^2(z)}{z^2} = \frac{\sin^2(z)}{z^2} \prod_{j=0}^{n-1} \cos(a\beta^j z)$$

Από τον παραπάνω τύπο μπορούμε να καταλήξουμε σε έναν αναδρομικό τύπο της έντασης έτσι ώστε να μπορούμε να παρατηρήσουμε κάποιες διαφορές από βήμα σε βήμα. Δηλαδή έχουμε:

.....

$$I_1(z) = \frac{\sin^2(z)}{z^2} \prod_{j=0}^0 \cos^2(\beta^j az) = \frac{\sin^2(z)}{z^2} \cos^2(az)$$

$$I_2(z) = \frac{\sin^2(z)}{z^2} \prod_{j=0}^1 \cos^2(\beta^j az) = \frac{\sin^2(z)}{z^2} \cos^2(\beta^0 az) \cos^2(\beta^1 az) =$$

$$= I_1(z) \cos^2(\beta az).$$

$$I_3(z) = \frac{\sin^2(z)}{z^2} \prod_{j=0}^2 \cos^2(\beta^j az)$$

$$= \frac{\sin^2(z)}{z^2} \cos^2(\beta^0 az) \cos^2(\beta^1 az) \cos^2(\beta^2 az)$$

$$= I_2(z) \cos^2(\beta^2 az)$$

Και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε:

$$I_{n+1}(z) = \frac{\sin^2(z)}{z^2} \prod_{j=0}^n \cos^2(\beta^j az)$$

$$= \frac{\sin^2(z)}{z^2} \cos^2(\beta^0 az) \cos^2(\beta^1 az) \dots \cos^2(\beta^n az) =$$

$$= I_n(z) \cos^2(\beta^n az).$$

Οπότε:

$$I_{n+1}(z) = I_n(z) \cos^2(\beta^n az).$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle I_{n+1}(z) \rangle &= z^{-1} \int_0^z \cos^2(\beta^n az') I_n(z') dz' = \\ &= z^{-1} \int_0^z \frac{1}{2} (1 + \cos(2\beta^n az')) I_n(z') dz' = A\end{aligned}$$

Καθώς από τριγωνομετρία έχουμε:

$$\cos^2(a) = (1 + \cos(2a))/2$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}A &= z^{-1} \int_0^z \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\beta^n az')}{2} \right) I_n(z') dz' = \\ &= z^{-1} \frac{1}{2} \int_0^z I_n(z') dz' + z^{-1} \frac{1}{2} \int_0^z \cos(2\beta^n az') I_n(z') dz' = \\ &= \frac{1}{2} \langle I_n(z) \rangle + \frac{1}{2} \langle \cos(2\beta^n az) I_n(z) \rangle.\end{aligned}$$

Για δοσμένο n , υπάρχουν πάρα πολλές ταλαντώσεις του $\cos(2\beta^n az)$ μεταξύ του 0 και z . Σε μια τέτοια περίπτωση από την στιγμή όπου η $I_n(z)$ είναι ένας θετικός αριθμός θα έχουμε το $\frac{1}{2} \langle \cos(2\beta^n az) I_n(z) \rangle$ να είναι πάρα πολύ μικρό σε σύγκριση με το $\frac{1}{2} \langle I_n(z) \rangle$.

Οπότε:

$$\langle I_{n+1}(z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2}$$

Αν $2az/\pi \gg 1$ τότε για κάποιο n η πρότασή μας ικανοποιείται για όλα τα j . Επίσης έχουμε από τον περιορισμό ότι:

$$2az/\pi > \beta^{-n} \Leftrightarrow 2\beta^n az > \pi$$

Έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το $\cos(2\beta^n az)$.



Ιδιότητα 2':

Για την μέση ένταση όταν ισχύει ότι: $2\alpha z/\pi \gg 1$ τότε:

$$\langle I_n(z) \rangle = (1/2)^n + \text{μικρές ταλαντώσεις.}$$



Απόδειξη:

Από την πρώτη παρατήρηση έχουμε ότι:

$$\langle I_{n+1}(z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) \text{ για } \frac{2\alpha z}{\pi} > \beta^{-n}$$

Όμως η ένταση δίνεται από τον τύπο:

$$I_n(z) = \frac{\sin^2(z)}{z^2} \prod_{j=0}^{n-1} \cos(\alpha\beta^j z) = \text{sinc}^2(z) \prod_{j=0}^{n-1} \cos(\alpha\beta^j z).$$

Οπότε παίρνοντας τον αναδρομικό τύπο έχουμε:

$$\langle I_1(z) \rangle = \frac{\langle I_0(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) \text{ για } \frac{2\alpha z}{\pi} > \beta^0 \Leftrightarrow 2\alpha z/\pi > 1$$

καθώς ισχύει από τον αρχικό μας τύπο ότι:

$$I_0(z) = \left(\frac{F_0(z)}{F_0(0)}\right)^2 = (F_0(z)/m_0)^2$$

Οπότε καταλήγουμε στην σχέση:

$$\langle I_1(z) \rangle = \frac{\left\langle \left(\frac{F_0(z)}{m_0}\right)^2 \right\rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right)$$

Δουλεύοντας ομοίως έχουμε ότι:

$$\langle I_2(z) \rangle = \frac{\langle I_1(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right) = \frac{\frac{\left\langle \left(\frac{F_0(z)}{m_0}\right)^2 \right\rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right)}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right)$$

$$\langle I_2(z) \rangle = \frac{\langle \left(\frac{F_0(z)}{m_0} \right)^2 \rangle}{2^2} + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right)$$

$$\langle I_3(z) \rangle = \frac{\langle I_2(z) \rangle}{2} + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right) = \frac{\frac{\langle \left(\frac{F_0(z)}{m_0} \right)^2 \rangle}{2^2} + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right)}{2} + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right)$$

$$\langle I_3(z) \rangle = \frac{\langle \left(\frac{F_0(z)}{m_0} \right)^2 \rangle}{2^3} + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right)$$

...

$$\langle I_n(z) \rangle = \frac{\langle I_{n-1}(z) \rangle}{2} + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right) = \frac{\frac{\langle \left(\frac{F_0(z)}{m_0} \right)^2 \rangle}{2^{n-1}} + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right)}{2} + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right)$$

$$\langle I_n(z) \rangle = \frac{\langle \left(\frac{F_0(z)}{m_0} \right)^2 \rangle}{2^n} + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right)$$

Οπότε:

$$\langle I_n(z) \rangle = \frac{\langle \left(\frac{F_0(z)}{m_0} \right)^2 \rangle}{2^n} + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right)$$

Και άρα:

$$\langle I_n(z) \rangle = \left(\frac{1}{2} \right)^n \langle \left(\frac{F_0(z)}{m_0} \right)^2 \rangle + \mathcal{O} \left(\frac{2\alpha z}{\pi} \right) \text{ για } \frac{2\alpha z}{\pi} \gg 1.$$

Δηλαδή η παραπάνω σχέση ισχύει σύμφωνα με τους περιορισμούς για πολύ μεγάλα z .



Ιδιότητα 3':

Για την μέση ένταση όταν ισχύει ότι: $2az/\pi \ll 1$ τότε:

$$\langle I_n(\beta z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2az}{\pi}\right).$$

■

Απόδειξη:

Από προηγούμενη πρόταση έχουμε αποδείξει ότι:

Για $az \ll \frac{\pi}{2}$ έχουμε ότι $\cos(az) \approx 1$ οπότε θα ισχύει ότι:

$$I_n(\beta z) \approx I_{n+1}(z)$$

Οπότε:

$$\langle I_n(\beta z) \rangle = \langle I_{n+1}(z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2az}{\pi}\right)$$

μόνο και μόνο όταν:

$$az \ll \pi/2 \Leftrightarrow 2az \ll \pi \Leftrightarrow 2az/\pi \ll 1.$$

▲

Ιδιότητα 4':

Η κλίση σε ένα διάστημα $\beta^{-n} < 2az/\pi < 1$ είναι $-D$ όπου $D = \frac{\log 2}{\log \beta}$.

■

Απόδειξη:

Η παρατήρηση 4 είναι μια άμεση συνέπεια της τρίτης παρατήρησης από αποδείξαμε. Στην Τρίτη παρατήρηση είδαμε ότι καθώς το z αυξάνεται γεωμετρικά κατά β τότε η $\langle I_n(z) \rangle$ υποδιπλασιάζεται. Για να αποδείξουμε λοιπόν την (4) με γνώμονα τα στοιχεία που έχουμε πάρει από την (3).

Ξεκινάμε επιλέγοντας την ακολουθία των πολλαπλασιαστών της $\langle I_n(z) \rangle$. Από την τρίτη μας παρατήρηση ξέρουμε ότι:

$$\langle I_n(\beta z) \rangle = \frac{\langle I_n(z) \rangle}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{2\alpha z}{\pi}\right)$$

Οπότε δημιουργούμε την ακολουθία $\widetilde{A}_n = \frac{\langle I_n(\beta z) \rangle}{\langle I_n(z) \rangle} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Παίρνοντας τις ακολουθίες:

$$\widetilde{A}_n = (\widetilde{B}_n)^D \text{ όπου } D = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log \beta} = -\frac{\log 2}{\log \beta}. \quad (1)$$

$$\widetilde{B}_n = \beta^n \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην (1) την ακολουθία B_n από την (2) έχουμε:

$$\frac{\langle I_n(\beta z) \rangle}{\langle I_n(z) \rangle} = (\beta^n)^{-D} \Leftrightarrow \log \frac{\langle I_n(\beta z) \rangle}{\langle I_n(z) \rangle} = -D \log \beta^n.$$

Άρα η κλίση της γραφικής παράστασης της μέσης τιμής της έντασης είναι $-D$ στο διάστημα $\beta^{-n} < 2\alpha z/\pi < 1$.



Ιδιότητα 5:

Υπάρχουν πολλά διαστήματα όπου η κλίση της έντασης είναι -1 ακόμα και αν ισχύει ότι $2\alpha z/\pi < 1$.



Απόδειξη:

Παίρνουμε την σχέση $\log \langle I_n(z) \rangle / \log z$ και την παραγωγίζουμε. Οπότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{d \log \langle I_n(z) \rangle}{d \log(z)} &= \frac{z}{\langle I_n(z) \rangle} \frac{d \langle I_n(z) \rangle}{dz} = \\ &= \frac{z}{\langle I_n(z) \rangle} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \int_0^z I_n(z') dz' \right) = A \end{aligned}$$

Από Διαφορικό λογισμό ξέρουμε ότι:

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt = f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$

Οπότε για την Α έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= \frac{z}{\langle I_n(z) \rangle} \left(-\frac{1}{z^2} \int_0^z I_n(z') dz' + \frac{1}{z} \int_0^z I_n(z') dz' \right) = \\ &= \frac{z}{\langle I_n(z) \rangle} \left(-\frac{1}{z} \langle I_n(z) \rangle + \frac{1}{z} (I_n(z)(z)' - I_n(0)0) \right) = \\ &= \frac{z}{\langle I_n(z) \rangle} \left(-\frac{\langle I_n(z) \rangle}{z} + \frac{I_n(z)}{z} \right) = -\frac{z \langle I_n(z) \rangle}{\langle I_n(z) \rangle z} + \frac{z I_n(z)}{\langle I_n(z) \rangle z} = \\ &= -1 + \frac{I_n(z)}{\langle I_n(z) \rangle}. \end{aligned}$$

Άρα η κλίση για κάθε διάστημα είναι -1 ανεξαρτήτως των περιορισμών που έχουμε.



4.2. Η φυσική υπόσταση του προβλήματος.

Ο λόγος προσπαθούμε να αποδεικνύουμε τύπους που έχουν σχέση με την ένταση του φωτός είναι ότι η ένταση είναι ένα μεγάλο εργαλείο στα χέρια μας για να μπορέσουμε να καταλάβουμε την κατασκευαστική δομή του φράκταλ συσσωματώματος μας [2,3,12].

Η μόνη παράμετρος με την οποία δεν έχουμε ασχοληθεί μέχρι στιγμής είναι το k . Ο λόγος είναι ότι ναι μεν παίζει σημαντικό ρόλο στην διαδικασία που εκτελούμε αλλά ξεφεύγει από τα όρια αυτής της εργασίας. Δηλαδή εμάς δεν μας απασχολεί οι ιδιότητες της πηγής του φωτός την οποία τοποθετούμε απέναντι από το φράκταλ συσσωμάτωμα. Παρόλα αυτά μπορούμε να πούμε πολύ περιληπτικά ότι για μεγάλες τιμές του k το φως που παράγεται θα έχει μικρό μήκος κύματος. Σε μια τέτοια περίπτωση κυριαρχεί η διάχυση του φωτός ανάμεσα από τις κυψελίδες του φράκταλ συσσωματώματος μας και η

διασκόρπιση της μάζας μπορεί να ελεγχθεί ότι γίνεται σε μεγάλο εύρος. Σε αντίθετη περίπτωση, όπου δηλαδή έχουμε μικρές τιμές του k , τότε θα έχουμε μεγάλο μήκος κύματος οπότε από το φαινόμενο της διάχυσης μπορούμε να καταλάβουμε ότι η διασκόρπιση της μάζας γίνεται ελεγχόμενα εξαιτίας του γεγονότος ότι το αντικείμενό μας λειτουργεί μακροσκοπικά. Τέλος εάν $k=0$ μπορούμε να υπολογίσουμε πόσο έχουμε διασκορπίσει την μάζα με την βοήθεια μιας δυναμοσειράς. Η δυναμοσειρά αυτή έχει φυσικά άμεση συσχέτιση με την ένταση του φωτός.

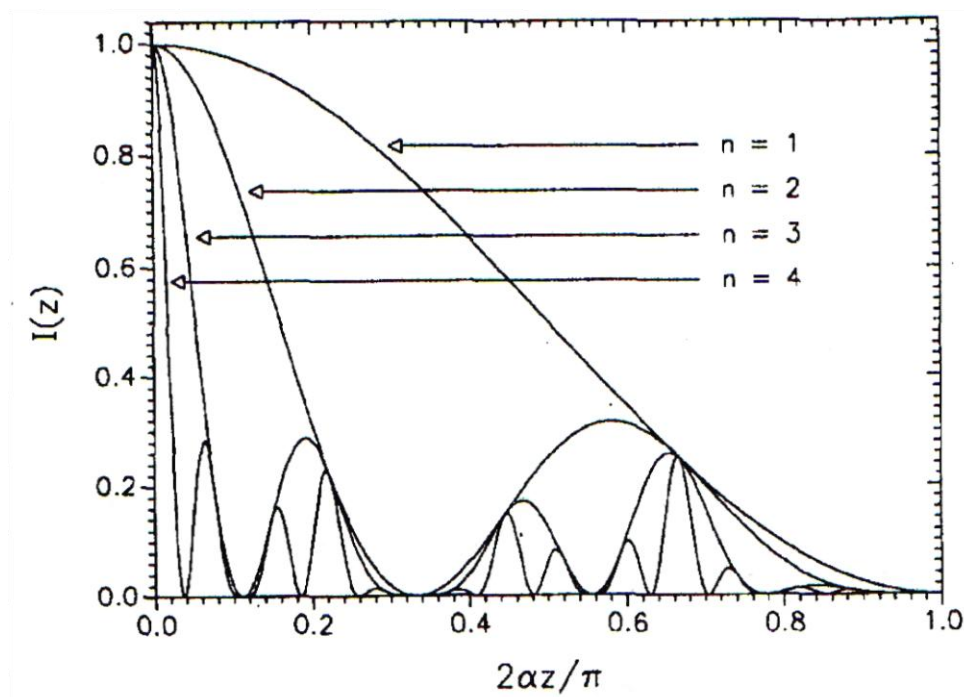
Όπως έχουμε ήδη γράψει ένας από τους πολλούς τύπους της έντασης που έχουμε αποδείξει δίνεται από την σχέση:

$$I_n(\beta z) = I_{n+1}(z)$$

Από τον τύπο αυτόν μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι η ένταση σε ένα τυχαίο στάδιο ακολουθεί μια συγκεκριμένη γραφική παράσταση. Η γραφική παράσταση μέχρι ενός σημείου είναι ίδια με αυτήν της έντασης του προηγούμενου σταδίου. Η μόνη τους διαφορά είναι ένας όρος συνημίτονου παραπάνω ο οποίος προκαλεί την διαφορά αυτή. Από τον τελευταίο τύπο μπορούμε να καταλάβουμε ότι η ένταση του φωτός επηρεάζεται άμεσα από τις ιδιότητες του συνημίτονου.

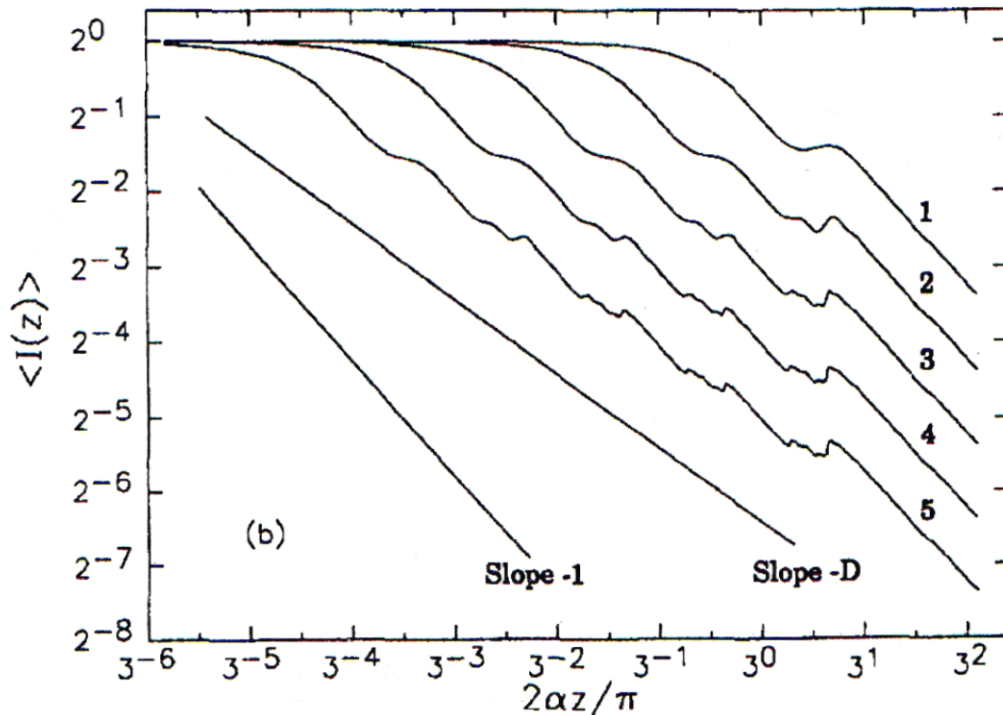
Ας περάσουμε τώρα στην μελέτη του γραφήματος της συνάρτησης της έντασης. Η εισαγωγή της μέσης έντασης μας βοηθάει αρκετά στην κατανόηση του γραφήματος. Εάν κάναμε το διάγραμμα σε μια τυχαία περίπτωση της έντασης $I(z)$ με την μεταβλητή z θα παρατηρούσαμε ότι έχουμε μια συνεχής καμπύλη με κλίση $-D$ όπου D η φράκταλ διάσταση του φράκταλ συσσωματώματος μας. Η συνέχεια όμως που έχουμε δεν είναι πολύ βολική, δηλαδή η γραφική μας παράσταση παρουσιάζει πάρα πολλά σημεία στα οποία έχουμε απότομη μεταβολή της γραφικής παράστασης είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω. Αυτού του είδους η συμπεριφορά δεν μας βοηθάει στην μελέτη της καμπύλης. Γι' αυτό τον λόγο εισαγάγαμε την έννοια του μέσου όρου της έντασης σε ένα διάστημα έτσι ώστε να εξομαλυνθούν οι απότομες αλλαγές της

καμπύλης μας.



Εικόνα 18: Διάγραμμα έντασης ως προς $2az/\pi$

Σε αυτό το σημείο παραθέτουμε τα δυο διαγράμματα και νομίζω ότι οι διαφορές είναι εμφανείς. Στο μεν πρώτο έχουμε την ένταση ως προς την μεταβλητή $2az/\pi$ αντί για z για λόγους δικής μας ευκολίας ενώ στο δεύτερο έχουμε την μέση τιμή της έντασης την οποία και θα συμβολίζουμε $\langle I(z) \rangle$ ως προς την μεταβλητή $2az/\pi$.



Εικόνα 2: Διάγραμμα έντασης $\langle I(z) \rangle$ ως προς $2\alpha z/\pi$

Στο πρώτο διάγραμμα μπορούμε να διακρίνουμε 4 διαφορετικές καμπύλες με κοινή αρχή και κοινό τέλος αλλά μεταξύ τους αρκετά διαφορετικές. Παρατηρούμε λοιπόν ότι και στις τέσσερις καμπύλες έχουμε μια κλιμακωτή μείωση της τιμής της συνάρτησης. Δηλαδή ότι οι καμπύλες στην ουσία είναι φθίνουσες. Παρόλα αυτά αν εξαιρέσουμε την πρώτη όλες οι άλλες εμφανίζουν σε κάποια διαστήματα μια τάση να αυξηθούν για λίγο προτού ξαναπάρουν την κατιούσα. Το φαινόμενο αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι όσο περισσότερα σημεία τοποθετούμε στο φράκταλ συσσωμάτωμα μας τόσο πιο δύσκολα περνάει το φως με αποτέλεσμα η ένταση του να ελαττώνεται μέχρις ότου να μηδενιστεί. Επίσης παρατηρούμε ότι έχουν ένα είδος περιοδικότητας με την έννοια ότι σε 2 σημεία που εμφανίζονται τοπικά μέγιστα έχουν μεταξύ τους την ίδια απόσταση αλλά δεν βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Αυτό οφείλεται από τις ιδιότητες του συνημίτονου του οποίου ορισμένες ιδιότητες μεταφέρονται μέσα στην καμπύλη της έντασης. Μπορεί λοιπόν η περιοδικότητα να εμφανίζεται αλλά ταυτοχρόνως έχουμε μια σταδιακή και περιοδική μείωση της έντασης του φωτός αναλόγως του βήματος στο οποίο βρισκόμαστε.

Στο δεύτερο διάγραμμα διακρίνουμε πάλι κάποιες καμπύλες οι οποίες έχουν περίπου την ίδια τροχιά αλλά είναι μετατοπισμένες κατά μια σταθερή τιμή προς τα πάνω ή κάτω. Αυτές οι καμπύλες είναι στην ουσία οι καμπύλες του πρώτου διαγράμματος μετά την, αν μας επιτραπεί η έκφραση, κανονικοποίηση. Η διαδικασία στην οποία υποβάλλαμε τις καμπύλες ήταν πολύ μεγάλης σημασίας γιατί τώρα μπορούμε να μιλήσουμε για την κλίση της καμπύλης για την οποία έχουμε ήδη γράψει ότι ισούται με $-D$. Η κλίση των καμπυλών του δεύτερου διαγράμματος μπορεί να βρεθεί μόνο κατά προσέγγιση γιατί όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε κατά ένα μεγάλο διάστημα έχουμε μικρές ταλαντώσεις και εξάλλου μιλάμε για μια καμπύλη γραμμή και όχι μια ευθεία. Οι πολύ μικρές ταλαντώσεις οι οποίες εμφανίζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό είναι τόσο μικρές οι οποίες δεν είναι καν παρατηρήσιμες αλλά αντί αυτού μας δίνουν την αίσθηση ότι η καμπύλη μας παρουσιάζει ένας είδος καμπύλης τέτοιο ώστε σε κάποια κομμάτια του να μοιάζει με ευθεία.

Όπως έχουμε ήδη γράψει πιο πάνω η συλλογή πληροφορίας μειώνεται με μια τέτοια διαδικασία αλλά και από την χρήση των λογαρίθμων, ώστε να μην έχουμε μεγάλους αριθμούς, γιατί κάποια σημεία της καμπύλης και κάποιες ιδιότητες δεν μπορούμε να τις δούμε μέσω της μέσης τιμής. Παρόλα αυτά όμως μέσω αυτής αντιλαμβανόμαστε ιδιότητες όπως αυτή της φρακταλικής συμπεριφοράς του συσσωματώματος μας και μας δίνεται η δυνατότητα να παρατηρήσουμε και να υπολογίσουμε την φράκταλ διάσταση του αντικειμένου μας. Μέσω του δεύτερου διαγράμματος μπορούμε να βγούμε σε χρήσιμα συμπεράσματα κυρίως μέσω της παρατήρησης τους από τις καμπύλες.

Εν κατακλείδι λοιπόν καταφέραμε να ορίσουμε όλα μας τα εργαλεία και να παρατηρήσουμε ότι το φράκταλ συσσωμάτωμα μας έχει ιδιότητες φράκταλ καθώς επίσης και φράκταλ διάσταση. Το περίεργο όμως σε αυτού του είδους τις κατασκευές είναι ότι δεν παρουσιάζεται μόνο μια φράκταλ διάσταση. Στο παρούσα εργασία αποδείξαμε ότι υπάρχει φράκταλ διάσταση μεταξύ της ακολουθίας των μαζών και αυτής των μηκών του φράκταλ συσσωματώματος. Και ενώ λοιπόν

θεωρούσαμε ότι τελειώσαμε, μέσω της ιδιότητας (4) βλέπουμε ότι μέσα στο φράκταλ συσσωμάτωμα υπάρχει και μια δεύτερη φράκταλ διάσταση μεταξύ της μέσης έντασης $\langle I_n(z) \rangle$ και της παραμέτρου k η οποία είναι στην ουσία η δυική θέση του x .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ένταση του φωτός που διαπερνάει το φράκταλ παρουσιάζει και αυτή με την σειρά της φρακταλικές ιδιότητες. Μέσα δηλαδή σε ένα φράκταλ αντικείμενο μπορούμε να παρατηρήσουμε πάνω από μια φράκταλ διάσταση, γεγονός το οποίο μας βοηθάει στην καλύτερη αντίληψη της κατασκευής μας.

Την ενότητα αυτήν την κλείνουμε με την παρατήρηση των δυο φράκταλ διαστάσεων στο ίδιο φράκταλ συσσωμάτωμα ανάμεσα φυσικά σε διαφορετικές παραμέτρους. Τέτοιες σχέσεις μπορούμε να παρατηρήσουμε σε πολύ πιο σύνθετες κατασκευές οι οποίες ονομάζονται πολύ - φράκταλ (multifractals).

4.3 Παραδείγματα από διάφορα Φράκταλ συσσωματώματα.

4.3.1 Το Φράκταλ συσσωμάτωμα του συνόλου Καντόρ με ανακλιμάκωση και μετατόπιση.

Στο προηγούμενο παράδειγμα δημιουργήσαμε ένα φράκταλ συσσωμάτωμα με την χρήση μόνο τελεστών μετατόπισης. Σε αυτό το παράδειγμα μελετάμε ένα φράκταλ συσσωμάτωμα βασισμένο πάνω στο σύνολο Καντόρ και το δημιουργούμε και με την βοήθεια και του τελεστή ανακλιμάκωσης. Δηλαδή οι ακολουθίες μήκους και μάζας ακολουθούν τις ιδιότητες που απορρέουν από την κατασκευή του συνόλου [8,10,12].

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα θα ορίσουμε πρώτα τις παραμέτρους του φράκταλ συσσωματώματος που θέλουμε να κατασκευάσουμε. Την χωρική μας διάσταση την ορίζουμε να είναι μια ευθεία γραμμή και το πλήθος των σημείων με τα οποία αρχίζουμε είναι 1. Δηλαδή δεν έχουμε γεννήτορα αλλά μυητή. Το φράκταλ μας το θέλουμε να είναι δίπλευρο και συμμετρικό και είναι περιορισμένο στον χώρο. Οπότε χρειαζόμαστε και τα δυο είδη τελεστών που έχουμε ορίσει, μετατόπισης και ανακλιμάκωσης. Σε αυτήν την περίπτωση θα μας βοηθήσει πάρα πολύ ο ορισμός του συνόλου Καντόρ και θα πάρουμε πολλές παραμέτρους ως δεδομένες από τον ορισμό.

Ορισμός:

Το σύνολο Καντόρ ορίζεται με την βοήθεια 2 συνόλων. Έχουμε δυο μη κενά κλειστά σύνολα στο $\mathbb{R}$ τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$S_n^{(1)}(x) = \frac{2x - (n - 1)}{2n} \text{ και } S_n^{(2)}(x) = \frac{2x + (n - 1)}{2n}$$

όπου n είναι το βήμα στο οποίο βρισκόμαστε και πρέπει να ισχύει ότι:

$$n \geq 2.$$

■

Η χρήση των τελεστών εμφανίζεται μέσα στους ορισμούς των συνόλων τόσο αυτού της μετατόπισης όσο και αυτού της ανακλιμάκωσης.

Ορισμός:

Η ένωση λοιπόν αυτών των δυο συνόλων μας δίνει το σύνολο Καντόρ, δηλαδή:

$$C_n = S_n^{(1)}(C_n) \cup S_n^{(2)}(C_n)$$

■

Έτσι έχουμε το C_2 να είναι διάστημα $[1/2, -1/2]$ και το C_3 να είναι το μεσαίο κομμάτι του συνόλου Καντόρ το οποίο προκύπτει παίρνοντας το C_2 και αφαιρώντας του το μεσαίο τρίτο κομμάτι από κάθε διάστημα. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στο C_∞ το οποίο είναι τα σημεία $-1/2$ και $1/2$. Ακολουθώντας τις ακολουθίες του συνόλου Καντόρ και με την βοήθεια των τελεστών καταλήγουμε στην δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος. Το φράκταλ συσσωμάτωμα μας και σε αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι έχει φράκταλ ιδιότητες. Άρα συνεπάγεται ότι το φράκταλ μας χαρακτηρίζεται από μια φράκταλ διάσταση.

Ορισμός:

Από τον ορισμό της φράκταλ διάστασης, την οποία έχουμε ορίσει στο κεφάλαιο 2, καταλήγουμε ότι:

$$D_H(C_n) = \frac{\ln 2}{\ln n}$$

όπου $D_H(C_n)$ είναι η διάσταση Hausdorff του συνόλου Καντόρ στο νιοστό βήμα η οποία κατ' επέκταση είναι η FD του φράκταλ συσσωματώματος.

■

Η κατανομή της μάζας του φράκταλ συσσωματώματος C_n ορίζεται ως $p_n(x)$ και είναι το μέτρο της Hausdorff διάστασης περιορισμένο στο σύνολο Καντόρ στο νιοστό βήμα.

Λήμμα:

Από τις ιδιότητες του μέτρου και λόγω της κανονικοποίησης της $p_n(x)$ ξέρουμε ότι ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x) dx = 1 \quad (1)$$

■

Ορισμός:

Παίρνοντας λοιπόν μια τυχαία συνάρτηση $f(x)$ και τοποθετώντας μέσα σε αυτήν το σύνολο Καντόρ βάση του ορισμού θα έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2} f(S_n^{(1)}(x)) + \frac{1}{2} f(S_n^{(2)}(x))$$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $p_n(x)$ και έπειτα ολοκληρώνοντας καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \int f(x) p_n(x) dx &= \frac{1}{2} \int \left[f(S_n^{(1)}(x)) + f(S_n^{(2)}(x)) \right] p_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int f(S_n^{(1)}(x)) p_n(x) dx + \int f(S_n^{(2)}(x)) p_n(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

■

Έχοντας λοιπόν ορίσει τις σχέσεις (1) και (2) μπορούμε να ορίσουμε όλες τις ιδιότητες της $p_n(x)$ με την βοήθεια του Fourier μετασχηματισμού.

Ορισμός:

Ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται από την σχέση:

$$F_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p_n(x) dx$$

■

Η ένταση του φωτός όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα δίνεται από τον τύπο:

$$I_n(z) = \left[\frac{F_n(\kappa)}{F_n(0)} \right]^2.$$

Οπότε έχουμε ότι:

Πρόταση 1:

Για τον μετασχηματισμό Fourier ισχύει ότι:

$$F_n(0) = 1$$

■

Απόδειξη:

Με την βοήθεια της σχέσης (1) και του ορισμού του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$F_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i0x} p_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x) dx = 1$$

▲

Πρόταση 2:

Για τον μετασχηματισμό Fourier ισχύει ότι:

$$F_n(k) = \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) F_n\left(\frac{\kappa}{n}\right)$$

■

Απόδειξη:

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$F_n(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x} p_n(x) dx = \Pi$$

Και αντικαθιστώντας από την σχέση (2) και από τον ορισμό του συνόλου Καντόρ έχουμε:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{2x+(n-1)}{2n}} p_n(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{2x-(n-1)}{2n}} p_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{ik(n-1)}{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ikx}{n}} p_n(x) dx + \frac{1}{2} e^{\frac{-ik(n-1)}{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ikx}{n}} p_n(x) dx \end{aligned}$$

Καθώς όμως:

$$e^{ik\frac{(n-1)}{2n}} = \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} F_n(\kappa) &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ikx}{n}} p_n(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \left[\cos\left(-\frac{k(n-1)}{2n}\right) + i \sin\left(-\frac{k(n-1)}{2n}\right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ikx}{n}} p_n(x) dx \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} F_n(\kappa) &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) \right] F_n\left(\frac{\kappa}{n}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) - i \sin\left(-\frac{k(n-1)}{2n}\right) \right] F_n\left(\frac{\kappa}{n}\right) \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} F_n(\kappa) &= \frac{1}{2} 2 \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) F_n\left(\frac{\kappa}{n}\right) \\ F_n(\kappa) &= \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) F_n\left(\frac{\kappa}{n}\right). \end{aligned}$$



Έχουμε λοιπόν καταλήξει στον τύπο του μετασχηματισμού Fourier $F_n(\kappa)$. Πέραν όμως αυτού μας χρειάζεται και ένας δεύτερος τύπος ο οποίος δημιουργείται βάση της αναδρομικότητας. Ο λόγος που μας χρειάζεται είναι επειδή παρακάτω μας βοηθάει στον ακριβή υπολογισμό της έντασης.

Πρόταση 3:

Ο αναδρομικός τύπος του μετασχηματισμού Fourier δίνεται από την σχέση:

$$F_n(\kappa) = \prod_{j=1}^{\infty} \cos[k(n-1)/2a^j] \quad (A)$$

■

Απόδειξη:

Από την πρόταση (2) που έχουμε αποδείξει έχουμε ότι:

$$F_n(\kappa) = \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) F_n\left(\frac{\kappa}{n}\right)$$

Ξεκινώντας αντικαθιστούμε το $F_n\left(\frac{\kappa}{n}\right)$ από τον παραπάνω τύπο οπότε και θα έχουμε:

$$F_n(\kappa) = \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) F_n\left(\frac{\kappa}{n}\right) \quad (\Gamma)$$

όπου:

$$F_n\left(\frac{\kappa}{n}\right) = \cos\left(\frac{\frac{k}{n}(n-1)}{2n}\right) F_n\left(\frac{\kappa}{n^2}\right) = \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n^2}\right) F_n\left(\frac{\kappa}{n^2}\right)$$

Άρα η (Γ) γίνεται:

$$F_n(\kappa) = \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n}\right) \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n^2}\right) F_n\left(\frac{\kappa}{n^2}\right)$$

Ακολουθώντας πάλι την ίδια διαδικασία στην θέση του $\mathbb{Z}_n \left(\frac{\kappa}{n^2} \right)$ από την (Γ) αντικαθιστούμε:

$$F_n \left(\frac{\kappa}{n^2} \right) = \cos \left(\frac{\frac{k}{n^2} (n-1)}{2n} \right) F_n \left(\frac{\kappa}{n^3} \right) = \cos \left(\frac{k(n-1)}{2n^3} \right) F_n \left(\frac{\kappa}{n^3} \right)$$

Άρα:

$$F_n(\kappa) = \cos \left(\frac{k(n-1)}{2n} \right) \cos \left(\frac{k(n-1)}{2n^2} \right) \cos \left(\frac{k(n-1)}{2n^3} \right) F_n \left(\frac{\kappa}{n^3} \right)$$

Συνεχίζοντας ομοίως την ίδια διαδικασία, η οποία είναι μια αναδρομική διαδικασία καταλήγουμε ότι:

$$F_n(\kappa) = \cos \left(\frac{k(n-1)}{2n} \right) \dots \cos \left(\frac{k(n-1)}{2n^o} \right) F_n \left(\frac{\kappa}{n^o} \right)$$

Οπότε:

$$F_n(\kappa) = \prod_{j=1}^{\infty} \cos \left(\frac{k(n-1)}{2n^j} \right) F_n \left(\frac{\kappa}{n^j} \right)$$

Καθώς όμως:

$$F_n \left(\frac{\kappa}{n^j} \right) \rightarrow F_n(0) = 1 \text{ για } j \rightarrow \infty \text{ και } n \geq 2$$

έχουμε:

$$F_n(\kappa) = \prod_{j=1}^{\infty} \cos \left(\frac{k(n-1)}{2n^j} \right) \quad (1)$$



Πρόταση 4:

Ο τύπος του μετασχηματισμού Fourier βάση του προηγούμενου βήματος δίνεται από τον τύπο:

$$F_n(\kappa) = 2 \cos\left(\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) F_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n}\right)$$

■

Απόδειξη:

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$\begin{aligned} F_n(\kappa) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p_n(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p_{n-1}\left(\frac{2x + (n-1)}{2n}\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p_{n-1}\left(\frac{2x - (n-1)}{2n}\right) dx \end{aligned}$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής ως:

$$y = \frac{2x + (n-1)}{2n}$$

για το πρώτο ολοκλήρωμα και ως:

$$y = \frac{2x - (n-1)}{2n}$$

για το δεύτερο έχουμε:

$$\begin{aligned} F_n(\kappa) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik(2ny-(n-1))}{2}} p_{n-1}(y) dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik(2ny+(n-1))}{2}} p_{n-1}(y) dx \\ F_n(\kappa) &= e^{-\frac{ik(n-1)}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikny} p_{n-1}(y) dx + e^{\frac{ik(n-1)}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikny} p_{n-1}(y) dx \\ F_n(\kappa) &= e^{-\frac{ik(n-1)}{2}} F_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n}\right) + e^{\frac{ik(n-1)}{2}} F_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n}\right) \end{aligned}$$

Και καθώς ισχύει όμως ότι:

$$e^{\frac{ik(n-1)}{2}} = \cos\left(\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\kappa(n-1)}{2}\right)$$

και

$$e^{-\frac{ik(n-1)}{2}} = \cos\left(-\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\kappa(n-1)}{2}\right)$$

έχουμε ότι:

$$F_n(\kappa) = \left[\cos\left(-\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) \right] F_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n}\right) + \left[\cos\left(\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) \right] F_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n}\right)$$

Οπότε:

$$F_n(\kappa) = \left[\cos\left(\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) \right] F_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n}\right) + \left[\cos\left(\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) \right] F_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n}\right) = F_n(\kappa) = 2 \cos\left(\frac{\kappa(n-1)}{2}\right) F_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n}\right)$$

όπου:

$$F_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ikx}{n}} p_{n-1}(x) dx$$



Έχοντας λοιπόν υπολογίσει τις απαιτούμενες παραμέτρους και αντικαθιστώντας στον τύπο της έντασης έχουμε:

Πρόταση 5:

Η ένταση του φωτός που διαπερνάει το φράκταλ συσσωμάτωμα δίνεται από τον τύπο:

$$I_n(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{m=0}^{\infty} \left[1 - \frac{k^2(n-1)^2}{(2m+1)^2 \pi^2 n^{2j}} \right].$$

■

Απόδειξη:

Από το τύπο της έντασης έχουμε:

$$I_n(z) = \left[\frac{F_n(\kappa)}{F_n(0)} \right]^2 = \left[\frac{\prod_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n^j}\right)}{1} \right]^2 = \left[\prod_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n^j}\right) \right]^2$$

Το αρχικό μας πρόβλημα λοιπόν μεταμορφώνεται σε ένα δευτερεύον πρόβλημα το οποίο είναι ο υπολογισμός του γινομένου. Βάση ενός αποδεδειγμένου τύπου από [4] έχουμε το αποτέλεσμα:

$$\cos x = \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2m+1)^2 \pi^2} \right)$$

καθώς όμως:

$$I_n(z) = \left[\prod_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k(n-1)}{2n^j}\right) \right]^2$$

Έχουμε ότι:

$$I_n(z) = \left[\prod_{j=1}^{\infty} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4\left(\frac{k(n-1)}{2n^j}\right)^2}{(2m+1)^2 \pi^2} \right) \right]^2 =$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\frac{k^2(a-1)^2}{2^{2j}}}{(2m+1)^2 \pi^2} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2(a-1)^2}{(2m+1)^2 a^{2j} \pi^2} \right)$$

$$\prod_{j=1}^{\infty} \prod_{m=0}^{\infty} \left[1 - \frac{k^2(n-1)^2}{(2m+1)^2 \pi^2 n^{2j}} \right].$$



Αναλόγως του n έχουμε διαφορετικά αποτελέσματα στον μετασχηματισμό Fourier και ακολούθως στην ένταση του φωτός.

Ορισμός:

Στην περίπτωση που έχουμε το n να είναι ακέραιος και το k ένας αρκετά μεγάλος αριθμός ο μετασχηματισμός Fourier σύμφωνα με το (Α) και από το [4,6] δίνεται από την σχέση:

$$F_n \left(k + \frac{n^l m \pi}{n-1} \right) = (-1)^{\frac{m(n^l-1)}{n-1}} F_n(k) \times \frac{F_n \left(\frac{2m\pi}{n-1} + n^{-l} k \right)}{F_n(n^{-l} k)} \quad (B)$$

όπου m οποιοσδήποτε ακέραιος και l οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος.



Πρόταση 6:

Στο δεύτερο βήμα ο μετασχηματισμός Fourier για $k = 0$ και $m = 1$ δίνεται από την σχέση:

$$F_2(x) = \frac{\sin\left(\frac{\kappa}{2}\right)}{\left(\frac{\kappa}{2}\right)}$$



Απόδειξη:

Στην περίπτωση όπου $n = 2, k = 0$, και $m = 1$ τότε από την σχέση (B) αντικαθιστώντας έχουμε:

$$F_2(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k}{2^{j+1}}\right)$$

Καθώς όμως ισχύει ότι [4]:

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Έχουμε:

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Θέτοντας: $x = \frac{k}{2}$ έχουμε:

$$\frac{\sin \frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa}{2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\frac{\kappa}{2}}{2^k}\right)$$

Άρα:

$$F_2(x) = \frac{\sin\left(\frac{\kappa}{2}\right)}{\left(\frac{\kappa}{2}\right)}$$



Πρόταση 7:

Στο δεύτερο βήμα ο μετασχηματισμός Fourier για:

$$n \rightarrow \infty, k = 0 \text{ και } m = 1$$

δίνεται από την σχέση:

$$F_{\infty}(x) = \cos\left(\frac{\kappa}{2}\right)$$

■

Απόδειξη: Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για:

$$F_{\infty}\left(k + \frac{\infty^l 1\pi}{\infty - 1}\right) = (-1)^{\frac{1(\infty^l - 1)}{\infty - 1}} F_n(k) \times \frac{F_{\infty}\left(\frac{21\pi}{\infty - 1} + \infty^{-l}k\right)}{F_{\infty}(\infty^{-l}k)}$$

Δουλεύοντας την παραπάνω σχέση όπως δουλέψαμε την πρόταση 6 καταλήγουμε στην σχέση:

$$F_{\infty}(x) = \cos\left(\frac{\kappa}{2}\right)$$

▲

Έχοντας λοιπόν υπολογίσει τον τύπο της έντασης μπορούμε να μελετήσουμε το φράκταλ συσσωμάτωμα όπως ακριβώς κάναμε και στο προηγούμενο μας παράδειγμα. Για να μελετήσουμε όμως τώρα την ένταση τα πράγματα δεν είναι απλά όπως στην προηγούμενη κατασκευή μας. Βλέπουμε ότι έχουμε έναν πιο σύνθετο τύπο και τα αποτελέσματα που θέλουμε να βγάλουμε χρειαζόμαστε τον μετασχηματισμό Mellin [6].

Στα μαθηματικά ο μετασχηματισμός Mellin είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός ο οποίος μπορεί να ορισθεί ως μια πολλαπλασιαστική έκδοση του διπλού μετασχηματισμού Laplace.

Ορισμός:

Ο μετασχηματισμός Laplace για μια συνάρτηση $f(t) \forall t \geq 0$ όπου $t \in \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $F(s)$ όπου δίνεται από τον τύπο:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

■

Ο μετασχηματισμός Mellin συνδέεται άμεσα με τις σειρές Dirichlet, με την θεωρία αριθμών και με την θεωρία των ασυμπτωτικών σειρών. Επίσης χρησιμοποιείται συχνά για τον υπολογισμό των μετασχηματισμών Fourier και Laplace καθώς και επίσης και με τις ειδικές συναρτήσεις.

Ορισμός:

Ο μετασχηματισμός Mellin για μια τυχαία συνάρτηση f δίνεται από τον τύπο:

$$\{Mf\}(s) = \varphi(s) = \int_0^{\infty} x^s f(x) dx / x$$

και ο αντίστροφος Mellin από:

$$\{M^{-1}\varphi\}(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \varphi(s) ds$$

■

Η απεικόνιση μιας συνάρτησης μέσω του μετασχηματισμού Mellin είναι ένα ολοκλήρωμα στον μιγαδικό χώρο το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από το θεώρημα του Cauchy. Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Mellin είναι πολύ χρήσιμες σε πολλά πεδία της φυσικής όπου τα στοιχεία μας είναι μόνο ένα άθροισμα ή ένα γινόμενο, όπως δηλαδή στην περίπτωσή μας.

Παίρνουμε λοιπόν την συνάρτηση $f(x) = \ln \cos^2(x)$. Μέσω του μετασχηματισμού Mellin και λογαριθμίζοντας τον τύπο της έντασης από την σελίδα 151 καταλήγουμε:

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} \ln \cos^2(x) dx = -\frac{2^{1-s}}{s} (2^{-s} - 1) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \times \Gamma(s+1) \zeta(s+1)$$

όπου Γ και ζ οι συναρτήσεις Riemann.



Παρατηρούμε λοιπόν ότι βάση του μετασχηματισμού Mellin λογαριθμίζοντας την συνάρτηση της έντασης καταλήγουμε:

Ορισμός:

Ο τύπος της έντασης δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \ln I_n(z) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{z^{-s} (n-1)^{-s} 2}{s} \frac{2^{-s} - 1}{n^{-s} - 1} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \times \Gamma(s+1) \zeta(s+1) ds \end{aligned}$$

,όπου $-2 < c < 0$.



Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση της έντασης δίνεται από έναν αρκετά περίπλοκο τύπο σε σχέση με το προηγούμενο φράκταλ συσσωμάτωμα. Από τον παραπάνω τύπο απλοποιώντας αρχικά τον τύπο και υπολογίζοντας στην συνέχεια το ολοκλήρωμα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το φράκταλ συσσωμάτωμα μας έχει όντως φρακταλικές ιδιότητες.

Έχοντας φτάσει λοιπόν σε αυτό το σημείο μπορούμε να αντιληφθούμε ότι η ένταση του φωτός συσχετίζεται άμεσα με το z . Με την χρήση μαθηματικών εργαλείων και έχοντας ως γνώμονα την παραπάνω σχέση καταλήγουμε ότι:

$$I_n(z) \approx k^{-\frac{2 \ln 2}{\ln n}}$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να αντιληφθούμε την φράκταλ διάσταση του φράκταλ συσσωματώματος στο παραπάνω παράδειγμα την οποία έχουμε αποδείξει στην αρχή της ενότητας.

4.3.2 Το Φράκταλ συσσωμάτωμα του συνόλου Καντόρ με ανακλιμάκωση, μετατόπιση και γεννήτορα. Διερεύνηση της συνάρτησης έντασης.

Μέχρι στιγμής έχουμε παρουσιάσει 2 παραδείγματα φράκταλ συσσωματωμάτων με το κάθε ένα να έχει τις δικές του ιδιαιτερότητες. Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε ένα φράκταλ συσσωμάτωμα το οποίο κατασκευάζεται σύμφωνα με τις ακολουθίες του συνόλου Καντόρ, αλλά σε σχέση με το προηγούμενο, του αλλάζουμε μια συγκεκριμένη ιδιότητα [9,11]. Η παράμετρος αυτή αναφέρεται στο πλήθος των σημείων. Στα προηγούμενα παραδείγματα θεωρήσαμε ότι ξεκινάμε με ένα σημείο και δουλέψαμε βάση αυτού.

Στην περίπτωση αυτής της κατασκευής του φράκταλ συσσωμάτωμα θα θεωρήσουμε την χωρική μας διάσταση να είναι ίση με 3. Δηλαδή βγαίνουμε από τα στενά όρια της μιας διάστασης και μπαίνουμε στον τρισδιάστατο χώρο. Είπαμε πριν ότι το πλήθος των σημείων δεν είναι 1 αλλά πολύ περισσότερα, έστω N . Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι δεν μπορούμε να μιλάμε για ένα σημείο μνητή αλλά για ένα σύνολο σημείων που ονομάζεται γεννήτορας. Από την στιγμή όμως που θέλουμε να έχουμε N σημεία, μπορούμε το κάθε άκρο του γεννήτορα να το ορίσουμε ως ένα διάνυσμα u_l όπου $l = 1, 2, \dots, N$. Οπότε το φράκταλ μας αποτελείται στο πρώτο στάδιο από N unit cells τα οποία έχουμε καθορίσει στα u_l διανύσματα. Στο δεύτερο βήμα ($n=2$) ο γεννήτορας μεγαλώνει κατά έναν συντελεστή ξ_1 . Άρα τα N πρώτης τάξης φράκταλ καθορίζονται στα $\xi_1 u_l$ διανύσματα. Συνεχίζοντας όμοια αυτή την διαδικασία καταλήγουμε ότι ο γεννήτορας αυξάνεται επ' άπειρο κατά, $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_{n-1}$ στο νιοστό στάδιο και οπότε και τα N ($n-1$) τάξης φράκταλ καθορίζονται στα $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_{n-1} u_l$ διανύσματα. Για ευκολία θέτουμε $\alpha_j = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_j$ και $\alpha_0 = 1$. Οπότε λοιπόν στο νιοστό βήμα τις N^n μοναδιαίες κυψελίδες καθορίζονται από ένα διάνυσμα της μορφής:

$$v = \alpha_0 u_{l_1} + \alpha_1 u_{l_2} + \dots + \alpha_{n-1} u_{l_n} \text{ όπου } 1 < l_i < N.$$

Όσο αφορά την παράμετρο της συμμετρικότητας το φράκταλ μας είναι συμμετρικό και δίπλευρο ενώ όσο αφορά τον τρόπο κατασκευής είναι ο

ΒΥ. Κλείνοντας με τις παραμέτρους κατασκευής του φράκταλ συσσωματώματος πρέπει να τονίσουμε ότι για την κατασκευή του φράκταλ συσσωματώματος χρειαζόμαστε τους τελεστές μετατόπισης και ανακλιμάκωσης όπως ακριβώς έχουν οριστεί [8].

Ορισμός:

Η ένταση του φωτός σε αυτό το παράδειγμα δίνεται από τον τύπο:

$$I_n(k) = N^n S_n(k) F(k)$$

όπου $F(k)$ είναι ένας συντελεστής κατασκευής ο οποίος εξαρτάται από την ένταση του φωτός που διασκορπίζεται από μια μοναδιαία κυψελίδα.

■

Το γινόμενο $N^n F(k)$ είναι η διασκορπισμένη ένταση από N^n ανεξάρτητες μοναδιαίες κυψελίδες και όσο αφορά τον $S_n(k)$ είναι ο συντελεστής δόμησης του φράκταλ συσσωματώματος και μετράει τις σχέσεις μεταξύ των άκρων των μοναδιαίων κυψελίδων.

Ορισμός:

Ο συντελεστής δόμησης δίνεται από την σχέση:

$$S_n(k) = \frac{1}{N^n} [F_n(k) F_n^*(k)]$$

όπου $F_n(k)$ ο μετασχηματισμός Fourier της πυκνότητας της μάζας στο νιοστό στάδιο και ο $F_n^*(k)$ ο συζυγο-ανάστροφος πίνακας του μετασχηματισμού Fourier.

■

Πρόταση 1:

Ο τύπος του συντελεστή δόμησης μπορεί να γραφεί και ως:

$$S_n(k) = \frac{1}{N^n} \prod_{j=0}^{n-1} \left[N + 2 \sum_{l=1}^N \sum_{m=l+1}^N \cos[2\pi a_j k(u_l - u_m)] \right]$$

■

Απόδειξη:

Για την συνάρτηση της πυκνότητας της μάζας του φράκταλ συσσωματώματος έχουμε ότι:

$$p_j(r) = p_{j-1}(r) \star \sum_{l=1}^N \delta(r - a_{j-1}u_l)$$

όπου $\star$ είναι η πράξη της συνέλιξης και δ είναι η συνάρτηση Dirac. Για λόγους ευκολίας θέτουμε:

$$\sum_{l=1}^N \delta(r - a_{j-1}u_l) = \Delta_{j-1}(r)$$

Άρα καταλήγουμε στην σχέση:

$$p_n(r) = \Delta_0(r) \star \Delta_1(r) \star \dots \star \Delta_{n-1}(r)$$

Αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Fourier της πυκνότητας έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_j(k) &= F_{j-1}(k) \sum_{l=1}^N \hat{\delta}(r - a_{j-1}u_l) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_j(k) = F_{j-1}(k) \sum_{l=1}^N e^{2i\pi a_j k \vec{u}}. \end{aligned}$$

Θέτοντας:

$$\hat{\Delta}_j(k) = \sum_{l=1}^N e^{2i\pi\alpha_j \vec{k} \vec{u}_l}$$

Από την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} F_j(k) &= F_{j-1}(k) \hat{\Delta}_j(k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_j(k) &= \hat{\Delta}_{j-1}(k) \hat{\Delta}_{j-2}(k) \dots \hat{\Delta}_1(k) \hat{\Delta}_0(k) \end{aligned}$$

λειτουργώντας κάπως αντίστροφα την διαδικασία του Fourier μετασχηματισμού. Έχοντας λοιπόν αποδείξει την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$F_n(k) = \prod_{j=0}^{n-1} \hat{\Delta}_j(k) \quad (A)$$

Οπότε λοιπόν σύμφωνα με την παραπάνω σχέση ο σύζυγο-ανάστροφος μετασχηματισμός Fourier της πυκνότητας της μάζας δίνεται από την σχέση:

$$F_n^*(k) = \prod_{j=0}^{n-1} \hat{\Delta}_j^*(k) \quad (B)$$

Οπότε αντικαθιστώντας στον τύπο του συντελεστή δόμησης τις παραπάνω σχέσεις (A) και (B) θα έχουμε:

$$S_n(k) = \frac{1}{N^n} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \hat{\Delta}_j(k) \prod_{j=0}^{n-1} \hat{\Delta}_j^*(k) \right]$$

Και καθώς ισχύει:

$$\hat{\Delta}_j(k) \hat{\Delta}_j^*(k) = N + 2 \sum_{l=1}^N \sum_{m=l+1}^N \cos[2\pi\alpha_j k(u_l - u_m)]$$

Οπότε καταλήγουμε ότι:

$$S_n(k) = \frac{1}{N^n} \prod_{j=0}^{n-1} \left[N + 2 \sum_{l=1}^N \sum_{m=l+1}^N \cos[2\pi a_j k(u_l - u_m)] \right]$$

Στην οποία σχέση καταλήγουμε με το γενικευμένο γινόμενο του Riesz.



Η σχέση στην οποία καταλήξαμε είναι αρκετά γενική με αρκετές παραμέτρους. Εμείς θα ελέγξουμε την περίπτωση όπου η κατασκευή γίνεται με σταθερούς όρους, δηλαδή:

$$a_j = \xi^j$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες θα ελέγξουμε την συμπεριφορά του συντελεστή δόμησης καθώς $n \rightarrow \infty$ και ξ ένας σταθερός αριθμός εφόσον εμμέσως επηρεάζει την ένταση του φωτός.

Όπως γίνεται αντιληπτό η ποσότητα $\hat{\Delta}_j(k)\hat{\Delta}_j^*(k)$ παίζει πολύ σημαντικό ρόλο.

Παρατήρηση:

Κανονικοποιώντας τον τύπο της έντασης έχουμε ότι:

$$\hat{\Delta}_j(0)\hat{\Delta}_j^*(0) = N + 2 \sum_{l=1}^N \sum_{m=l+1}^N \cos[2\pi a_j 0(u_l - u_m)]$$

$$\hat{\Delta}_j(0)\hat{\Delta}_j^*(0) = N^2$$

Μπορεί λοιπόν να παρατηρήσει κάποιος ότι:

$$0 \leq \frac{\hat{\Delta}_j(k)\hat{\Delta}_j^*(k)}{\hat{\Delta}_j(0)\hat{\Delta}_j^*(0)} \leq 1$$

καθώς όταν έχουμε ότι:

- $\cos[2\pi\alpha_j 0(u_l - u_m)] = 1 \forall (l, m)$ τότε $\frac{\hat{\Delta}_j(k)\hat{\Delta}_j^*(k)}{\hat{\Delta}_j(0)\hat{\Delta}_j^*(0)} = 1$

ενώ όταν:

- $\cos[2\pi\alpha_j k(u_l - u_m)] = 0 \exists (l, m)$ τότε $\frac{\hat{\Delta}_j(k)\hat{\Delta}_j^*(k)}{\hat{\Delta}_j(0)\hat{\Delta}_j^*(0)} = 0$.

■

Παρατηρώντας τον τύπο του συντελεστή δόμησης βλέπουμε ότι η πλειονότητα των παραμέτρων βρίσκονται μέσα στο συνημίτονο. Οπότε η συμπεριφορά του συνημίτονου επηρεάζει άμεσα την συμπεριφορά του συντελεστή δόμησης. Για ευκολία λοιπόν θα θέσουμε:

$$a_j k(\mathbb{Z}_l - u_m) = \xi^j k(u_l - u_m) = s_{lm}$$

Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε καλύτερα την κατάσταση αυτή θα πάρουμε μια ειδική περίπτωση του συντελεστή δόμησης. Θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε ένα συμμετρικό μονοδιάστατο φράκταλ συσσωμάτωμα.

Πρόταση:

Ο τύπος του συντελεστή δόμησης στην περίπτωση όπου:

$$N = 1, a_j = \xi^j \text{ και } u_l = \pm \varepsilon(\xi - 1)/2$$

δίνεται από την σχέση:

$$S_n(k) = 2^n \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2[\pi \xi^j (\xi - 1) k \varepsilon]$$

▲

Απόδειξη:

Ο γενικευμένος τύπος του συντελεστή δόμησης είναι:

$$S_n(k) = \frac{1}{N^n} \prod_{j=0}^{n-1} \left[N + 2 \sum_{l=1}^N \sum_{m=l+1}^N \cos[2\pi a_j k(u_l - u_m)] \right]$$

Στην περίπτωση μας έχουμε:

$$N = 1, a_j = \xi^j \text{ και } u_l = \pm \varepsilon(\xi - 1)/2.$$

αφού βρισκόμαστε στην περίπτωση του συμμετρικού φράκταλ συσσωματώματος.

Οπότε:

$$u_l - u_m = \frac{\varepsilon(\xi-1)}{2} - \frac{-\varepsilon(\xi-1)}{2} = \frac{2\varepsilon(\xi-1)}{2} = \varepsilon(\xi - 1).$$

Επίσης θα ισχύει $\xi \geq 2$ για να μην έχουμε το φαινόμενο του overlapping.

Άρα στον τύπο του συντελεστή δόμησης θα έχουμε:

$$S_n(k) = 2^n \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2[\pi \xi^j (\xi - 1) k \varepsilon]$$



Ο λόγος που διαλέξαμε αυτήν την περίπτωση είναι επειδή θέλουμε να εξετάσουμε τον συντελεστή δόμησης ως προς μια παράμετρος ξ και να μην μπλέξουμε και με τις άλλες παραμέτρους. Οπότε ξεκινάμε να βλέπουμε ειδικές περιπτώσεις της μεταβλητής ξ . Για χάρη ευκολίας θέτουμε:

$$\exists s \in \mathbb{N}, \xi^j (\xi - 1) k \varepsilon = s \quad \forall j$$



1^η περίπτωση:

Θέτουμε $\xi=2$, οπότε:

$$s = \xi^j(\xi - 1)k\varepsilon = 2^j k\varepsilon$$

Ουσιαστικά αυτή η περίπτωση είναι η κατασκευή ενός φράκταλ συσσωματώματος που κάναμε σε προηγούμενη ενότητα.

Άρα έχουμε ότι:

$$S_n(k) = 2^n \prod_{j=0}^{n-1} \cos^2[\pi 2^j k\varepsilon]$$

και αφού μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του συντελεστή δόμησης για $n \rightarrow \infty$ παρατηρούμε ότι οι μοναδιαίες κυψελίδες θα διασκορπιστούν με μια περιοδικότητα με μια μικρά απόκλιση ε .

Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι λόγω του $S_{\mathbb{Z}}(k)$ θα έχουμε την τοποθέτηση των μοναδιαίων κυψελίδων να γίνεται με μια άπειρη επανάληψη στα σημεία $k\varepsilon = s$, όπου $s \in \mathbb{N}$.

Μέσω της κατασκευής αυτής απεικονίζεται η μονοδιάστατη ευθεία ή η καμπύλη γραμμή πάνω στην οποία τοποθετούμε οι μοναδιαίες κυψελίδες. Γενικότερα αν αλλάξουμε την τιμή του ξ θα έχουμε διαφορετικές περιπτώσεις αναλόγως τις ιδιότητες του ξ .

2^η περίπτωση:

Έστω ότι ξ ένας ακέραιος αριθμός. Έστω ότι διαλέγουμε τυχαία 2 αριθμούς j_0 και s_0 οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $s = \xi^j(\xi - 1)k\varepsilon$. Οπότε θα έχουμε:

$$s_0 = \xi^{j_0}(\xi - 1)k\varepsilon$$

Από την στιγμή όπου ξ είναι ένας ακέραιος η παραπάνω εξίσωση θα ισχύει $\forall j > j_0$. Βάση του συντελεστή δόμησης $S_n(k)$ θα τοποθετούμε unit cells στα σημεία $k\varepsilon = s/(\xi - 1)\xi^{n-1}$ όπου $s \in \mathbb{N}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η κάθε περίπτωση θα μας οδηγεί σε διαφορετικά συμπεράσματα. Η τοποθέτηση των μοναδιαίων κυψελίδων είναι πάρα πολύ σημαντική όσον αφορά την τιμή της έντασης.

4.3.3 Επίλογος

Στο 4^ο κεφάλαιο παρατηρήσαμε τις διάφορες κατασκευές φράκταλ συσσωματωμάτων που κατασκευάσαμε από διάφορες οπτικές γωνίες. Προσπαθήσαμε να αναλύσουμε τις περισσότερες ιδιότητες τους μέσω του μετασχηματισμού Fourier της έντασης.

Μέσα από την μελέτη που κάναμε προσπαθήσαμε και εμείς με την σειρά μας να δημιουργήσουμε ένα φράκταλ συσσωμάτωμα το οποίο να διέπεται από τις ιδιότητες των φράκταλ. Ήταν ένα αρκετά φιλόδοξο και δύσκολο εγχείρημα το οποίο παρόλη την προσπάθειά μας κατέληξε σε αδιέξοδο.

Η προσπάθειά μας αυτή περιγράφεται στο Παράρτημα αυτής της εργασίας. Σκοπός μας δεν ήταν να ασχοληθούμε με τους τελεστές κατασκευής τόσο πολύ όσο με τις ακολουθίες της μάζας και του μήκους. Έτσι λοιπόν προσπαθήσαμε να βρούμε σε ένα δίπλευρο συμμετρικό χωρίς ανακλιμάκωση μοντέλο την φράκταλ διάσταση. Ίσως εάν αλλάζαμε την κατασκευή του φράκταλ συσσωματώματος να είχαμε πιο θεμιτά αποτελέσματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 4^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- [1]"Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals."
Barnsley, M. F. and Demko, S. G *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **399**, 243-275, 1985.
- [2]Fractals for the classroom: Complex systems and Mandelbrot, H.O.
Peitgen, Evan M, Maletsky, 1992
- [3] A one dimensional realization of a general model for cluster-cluster aggregation, William J. Titus, *Am. J. Phys.* 57 (12), December 1989,
American Association of Physics Teachers
- [4] Table Of Integrals, Series And Products 7Ed 2007 Gradshteyn I ,
Ryzhik I (σελ.47)
- [5] K.Falconer, *Fractal Geometry and its applications* (Wiley, Chichester, 1990
- [6] F.Oberhettinger, *Tables of Mellin Transforms* (Springer-Verlag, Berlin, 1974.)
- [7] B.B. Mandelbrot, *The fractal Geometry of Nature* (Freeman, New York, 1983)
- [8] Structure factor of Cantor sets, *Physical review*, C. P. Dettmann, N. E. Frankel and T. Taucher, *The American Physical Society*, Volume 49, number 4, 1994
- [9] Spatial spectrum of a general family of self-similar arrays, *Physical review*, C. Allain and M. Cloitre, *The American Physical Society*, volume 36, number 12, 1987
- [10] Elastic scattering by deterministic and random fractals: Self-affinity of the diffraction spectrum, Daniel A. Hamburger- Lidar, *The American Physical Society*, Volume 54, number 1, 1996
- [11] Quantum Fractal superlattices, Juan A. Monsoriu, Francisco R. Villatoro, Maria J. Marin, Jezabel Perez, Lluvia Monreal, *American Association of Physics Teachers*, 2006, *Am. J. Phys.* 74 (9)

[12] Fractals Everywhere, 2nd ed. ,Barnsley, M. Boston, MA: Academic Press, 1993.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Προσπάθεια για δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος με την ακολουθία Fibonacci δίπλευρη μετατόπιση.

Μέχρι στιγμής λοιπόν έχουμε παρουσιάσει παραδείγματα κατασκευής φράκταλ αντικειμένων εκ των οποίων βγάλαμε πολύ χρήσιμα συμπεράσματα. Με γνώμονα τον τρόπο δημιουργίας των παραπάνω φράκταλ συσσωματώματα σε αυτήν την παράγραφο προσπαθούμε να φτιάξουμε το δικό μας φράκταλ συσσωμάτωμα.

Θα πρέπει εξαρχής να ορίσουμε δυο ακολουθίες οι οποίες θα προσδιορίζουν το μήκος και την μάζα του συσσωματώματος σε κάθε βήμα.

Η ακολουθία των μηκών θα είναι η ακολουθία Fibonacci [1], δηλαδή:

$$a_n = \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n > 2 \end{cases}$$

και η ακολουθία των μαζών να είναι η σταθερή ακολουθία:

$$\beta_n = 2^n.$$

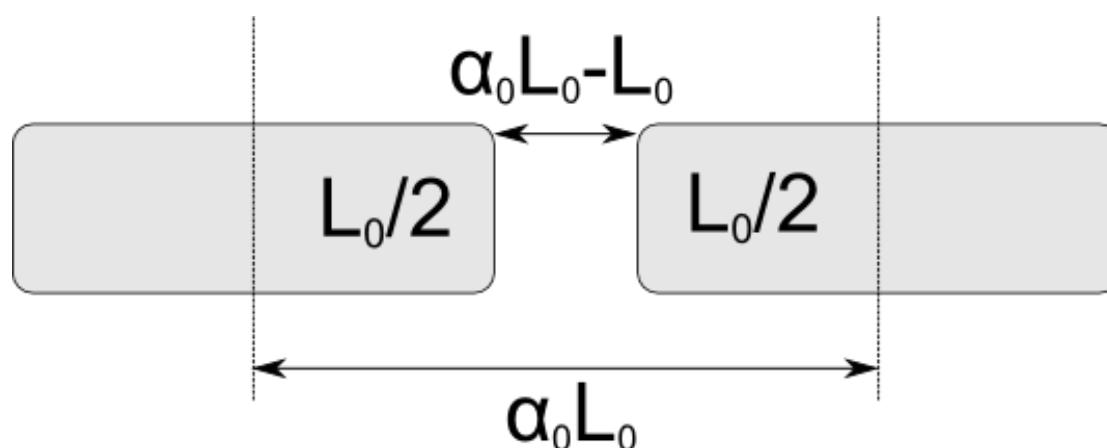
Από την στιγμή λοιπόν που έχουμε ορίσει τις ακολουθίες της μάζας και του μήκους θα πρέπει να ορίσουμε τις παραμέτρους που έχουμε θέσει στο κεφάλαιο 3.

Η πρώτη παράμετρος η οποία είναι η χωρική διάσταση θα οριστεί ως μονοδιάστατη. Δεν θα είχαμε κανένα πρόβλημα να δουλεύαμε σε περισσότερες διαστάσεις απλώς μιας και είναι η πρώτη μας απόπειρα για την δημιουργία ενός φράκταλ συσσωματώματος προτιμήσαμε να πάρουμε την απλή περίπτωση του μονοδιάστατου συσσωματώματος. Στην δεύτερη παράμετρο όπου θέτουμε το πλήθος των σημείων θα επιλέξουμε την περίπτωση του μυητή. Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε μόνο ένα σημείο, δηλαδή μια κυψελίδα, και ακολουθώντας μια συγκεκριμένη διαδικασία δημιουργούμε το φράκταλ. Στην τρίτη παράμετρο έχουμε θέσει την συμμετρικότητα του φράκταλ, δηλαδή εάν θέλουμε το φράκταλ μας να είναι συμμετρικό, να απλώνεται ομοίως και προς τις δυο κατευθύνσεις, η μη συμμετρικό, να απλώνεται προς μια

κατεύθυνση. Στην περίπτωση μας επιλέγουμε το φράκταλ μας να είναι συμμετρικό.

Όπως γίνεται φανερό λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε έναν τελεστή μετατόπισης ο οποίος θα μετατοπίζει τις συστάδες ομοίως δεξιά και αριστερά. Όσο αφορά τώρα τις παραμέτρους 4 και 5 δεν χρειάζεται να επιλέξουμε μιας και εξ αρχής έχουμε ορίσει ότι δημιουργούμε βάση ασυμπτωτικής προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας του συσσωματώματος και κατασκευάζουμε με την μέθοδο BU. Στην 6^η παράμετρο, η οποία αναφέρεται στην ανακλιμάκωση και μετατόπιση του φράκταλ θα επιλέξουμε να μην έχουμε ανακλιμάκωση παρά μόνο μετατόπιση. Σύμφωνα λοιπόν με όλες αυτές τις παραμέτρους προσπαθούμε να κατασκευάσουμε το φράκταλ συσσωμάτωμα το οποίο ονομάζουμε fibo - φράκταλ.

Ξεκινάμε την κατασκευή μας με την τοποθέτηση των συστάδων. Στο πρώτο στάδιο λοιπόν τοποθετούμε βάση της ακολουθίας των μαζών 2 κυψελίδων τα οποία αποτελούν την πρώτη μας συστάδα. Μετρώντας την απόσταση μεταξύ των κυψελίδων έχουμε:



Εικόνα 9: Η δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος στο πρώτο βήμα

Οπότε το μήκος του φράκταλ συσσωματώματος στο πρώτο βήμα είναι:

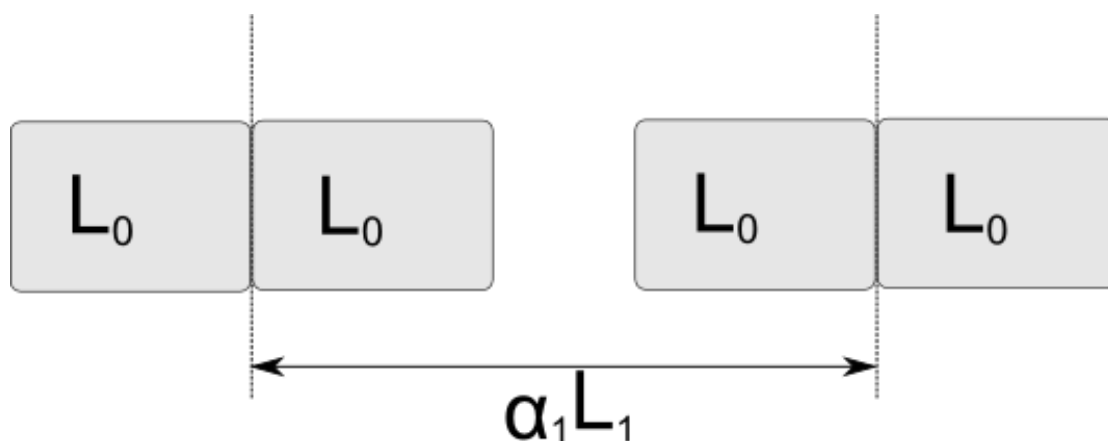
$$L_1 = \alpha_0 L_0 + L_0 = L_0 + L_0 = 2L_0$$

Και όσο αφορά την μάζα του:

$$M_1 = m_0 + m_0 = 2m_0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στην ουσία βάση της ακολουθίας που έχουμε διαλέξει για το μήκος του συσσωματώματος στο πρώτο βήμα το μήκος του διπλασιάζεται. Στην εικόνα 34 παρουσιάζουμε το φράκταλ συσσωματώμα ως δυο κυψελίδες οι οποίες έχουν μια απόσταση μεταξύ τους. Αυτή η κίνηση μας είναι σκόπιμα λάθος γιατί με τα όσα έχουμε υπολογίσει μέχρι τώρα για τις δυο κυψελίδες θα έπρεπε να τις σχεδιάζαμε ενωμένα. Η απόσταση που τους έχουμε βάλει μεταξύ τους είναι επίτηδες έτσι ώστε να τονίσουμε το πώς υπολογίζουμε το μήκος του φράκταλ συσσωματώματος. Άλλωστε στο δεύτερο βήμα το παρουσιάζουμε έτσι όπως είναι σωστά.

Το δεύτερο βήμα της κατασκευής μας θα έχει την μορφή της εικόνας 35 η οποία παράγεται βάση των ακολουθιών του φράκταλ συσσωματώματος:



Εικόνα 10: Η δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος στο δεύτερο βήμα.

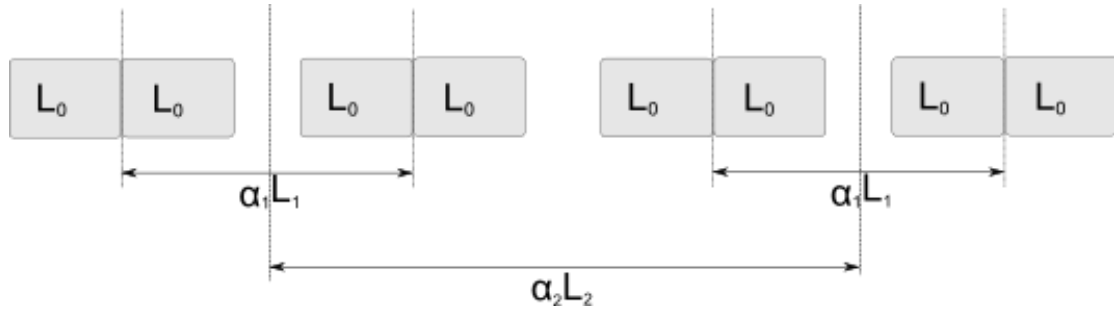
Το μήκος λοιπόν του φράκταλ συσσωματώματος θα είναι:

$$L_2 = 2L_0 + a_1 L_1 = 2L_0 + 2L_1 = 2L_0 + 4L_0 = 6L_0$$

και η συνολική του μάζα στο δεύτερο στάδιο θα είναι:

$$M_2 = M_1 + M_1 = 2m_0 + 2m_0 = 4m_0$$

Στο τρίτο στάδιο λειτουργούμε με ακριβώς ίδιο τρόπο. Οπότε θα έχουμε:



Εικόνα 11: Η δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος στο τρίτο βήμα

Το μήκος λοιπόν του φράκταλ συσσωματώματος θα είναι:

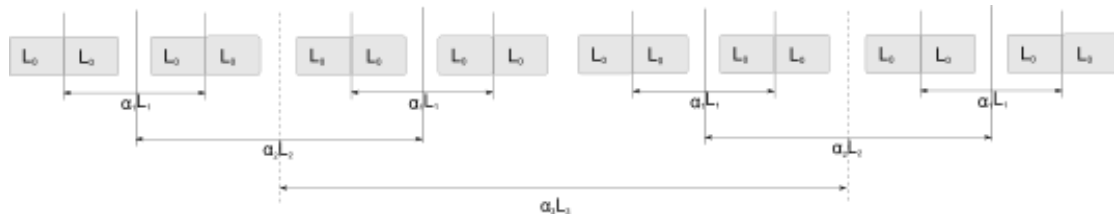
$$L_3 = 2 \left(L_0 + \frac{a_1 L_1}{2} \right) + a_2 L_2 = 2 \left(L_0 + \frac{22L_0}{2} \right) + 3.6 \cdot L_0 =$$

$$L_3 = 2L_0 + 4L_0 + 18L_0 = 24L_0$$

και η συνολική του μάζα στο δεύτερο στάδιο θα είναι:

$$M_3 = M_2 + M_2 = 2M_1 + 2M_1 = 4M_1 = 8m_0$$

Στο τέταρτο στάδιο ακολουθούμε την διαδικασία που μέχρι τώρα κατασκευάζουμε το φράκταλ συσσωμάτωμα. Οπότε θα έχουμε:



Εικόνα 12: Η δημιουργία του φράκταλ συσσωμάτωμα στο τέταρτο βήμα

Το μήκος λοιπόν του φράκταλ συσσωματώματος θα είναι:

$$L_4 = 2 \left(L_0 + \frac{a_1 L_1}{2} + \frac{a_2 L_2}{2} \right) + a_3 L_3 =$$

$$L_4 = 2 \left(L_0 + \frac{22L_0}{2} + 3.6 \cdot \frac{L_0}{2} \right) + 5.24 \cdot L_0 =$$

$$L_4 = 2L_0 + 4L_0 + 18L_0 + 120L_0 = 144L_0$$

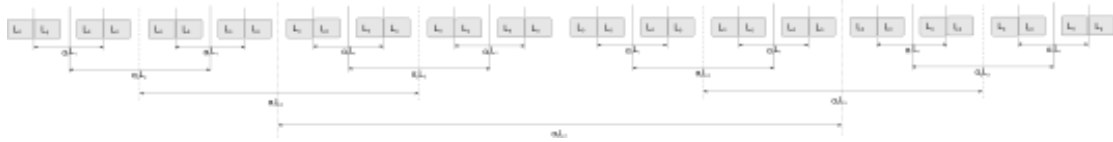
και η συνολική του μάζα στο δεύτερο στάδιο θα είναι:

$$M_4 = M_3 + M_3 = 2M_2 + 2M_2 = 4M_2 = 8M_1 = 16m_0$$

ή αλλιώς αν εφαρμόσουμε τον ακολουθιακό τύπο της μάζας έχουμε:

$$M_4 = 2^4 m_0 = 16m_0$$

Στο πέμπτο και τελευταίο στάδιο που εξετάζουμε ακολουθούμε την διαδικασία που μέχρι τώρα κατασκευάζουμε το φράκταλ συσσωμάτωμα. Οπότε θα έχουμε:



Εικόνα 13: Η δημιουργία του φράκταλ συσσωματώματος στο πέμπτο βήμα

Το μήκος λοιπόν του φράκταλ συσσωματώματος θα είναι:

$$\begin{aligned} L_5 &= 2 \left(L_0 + \frac{a_1 L_1}{2} + \frac{a_2 L_2}{2} + \frac{a_3 L_3}{2} \right) + a_4 L_4 = \\ L_5 &= 2 \left(L_0 + \frac{22L_0}{2} + 3.6 \cdot \frac{L_0}{2} + 5.24 \cdot \frac{L_0}{2} \right) + 8.144L_0 = \\ L_5 &= 2L_0 + 4L_0 + 18L_0 + 120L_0 + 1152L_0 = 1296L_0 \end{aligned}$$

και η συνολική του μάζα στο πέμπτο στάδιο θα είναι:

$$M_5 = M_4 + M_4 = 2M_3 + 2M_3 = 4M_3 = 16M_2 = 32m_0$$

ή αλλιώς αν εφαρμόσουμε τον ακολουθιακό τύπο της μάζας έχουμε:

$$M_5 = 2^5 m_0 = 32m_0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για το μήκος πέραν από τον τύπο της ακολουθίας μπορούμε να έχουμε και τον εξής τύπο:

$$L_n = 2L_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i L_i)$$

Από τον αρχικό μας τύπο για το μήκος αλλά και τον παραπάνω μπορούμε να βγάλουμε έναν καινούριο τύπο για το μήκος ο οποίος όμως θα μας δίνει το μήκος του φράκταλ συσσωματώματος σε κάθε βήμα σε σχέση με το αρχικό μήκος L_0 . Από την κατασκευή του fibo - φράκταλ βγάλαμε τα εξής αποτελέσματα:

- $L_1 = 2L_0$

- $L_2 = 6L_0$
- $L_3 = 24L_0$
- $L_4 = 144L_0$

...

Παρατηρούμε επίσης πως σε όλες τις σχέσεις που συνδέουν το ένα βήμα με το επόμενο υπάρχει η εξής ομοιότητα:

$$\frac{L_2}{L_1} = 3, \frac{L_3}{L_2} = 4 = 3 + 1, \frac{L_4}{L_3} = 6 = 3 + 3, \dots, \frac{L_n}{L_{n-1}} = 3 + a_{n-2}$$

όπου a_n είναι η ακολουθία του Fibonacci.

Από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε ότι:

$$L_n = (3 + a_{n-2})L_{n-1}, \quad n \geq 2$$

Οπότε:

$$L_{n+1} = (3 + a_{n-1})L_n, \quad n \geq 1$$

Και από τη στιγμή που θέλουμε να βγάλουμε μια σχέση μεταξύ του μήκους του φράκταλ συσσωματώματος σε κάθε βήμα με του αρχικού από τις προηγούμενες σχέσεις καταλήγουμε:

$$L_{n+1} = \prod_{i=1}^{n-1} (3 + a_{i-1}) L_1$$

Άρα:

$$L_{n+1} = 2 \prod_{j=1}^{n-1} (3 + a_{j-1}) L_0$$

και θέτοντας τέλος ότι:

$$\beta_j = 3 + a_{j-1}$$

έχουμε:

$$L_{n+1} = 2 \prod_{j=0}^{n-1} (\beta_{j+1}) L_0 \quad (\alpha)$$

Για να μπορέσουμε πλέον να συγκρίνουμε τις ακολουθίες μαζών και μήκους του fibo - φράκταλ μετατρέπουμε την (α) σε ακολουθία του n βήματος. Δηλαδή:

$$L_n = 2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1}) L_0 \quad (A)$$

Οπότε έχουμε καταλήξει στις εξής δυο ακολουθίες:

$$L_n = 2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1}) L_0 = \left(\sqrt[n]{2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})} \right)^n L_0 \quad (A)$$

$$M_n = m_0 2^n \quad (B)$$

Θέτουμε:

$$\widetilde{M}_n = \frac{M_n}{m_0} = 2^n$$

$$\widetilde{L}_n = \frac{L_n}{L_0} = \left(\sqrt[n]{2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})} \right)^n$$

Άρα διαιρώντας τις δυο σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} = \left(\frac{2}{\sqrt[n]{2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})}} \right)^n$$

Οπότε λογαριθμίζοντας και τις δυο σχέσεις έχουμε:

$$\log \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} = \log \left(\frac{2}{\sqrt[n]{2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})}} \right)^n \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \log \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} = n \log \left(\frac{2}{\sqrt[n]{2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})}} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \log \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} = n \frac{\log 2}{\log \sqrt[n]{2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})}} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \log \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} = \frac{\log 2^n}{\log \sqrt[n]{2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})}} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Θέτοντας $D = \frac{\log 2^n}{\log \sqrt[n]{2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})}}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \log \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} = D \Leftrightarrow \frac{\log \widetilde{M}_n}{\log \widetilde{L}_n} = D \Leftrightarrow \log \widetilde{M}_n = D \log \widetilde{L}_n \\
&\Leftrightarrow \log \widetilde{M}_n = \log \widetilde{L}_n^D \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \widetilde{M}_n = \widetilde{L}_n^D
\end{aligned}$$

■

Το τελευταίο βήμα που μας απομένει να κάνουμε είναι να απαλείψουμε από το D την παράμετρο του βήματος που βρισκόμαστε n. Οπότε:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\log 2^n}{\log \sqrt[n]{2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})}} = n \frac{\log 2}{\frac{1}{n} \log 2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow D = n^2 \frac{\log 2}{\log 2 + \log \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1})} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow D = n^2 \frac{\log 2}{\log 2 + \log \beta_1 + \dots + \log \beta_{n-2}} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow D = n^2 \frac{\log 2}{\log 2 + \sum_{j=0}^{n-2} (\log \beta_{j+1})} = \dots$$

■

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αντιμετωπίζουμε πρόβλημα καθώς δεν μπορούμε να απαλείψουμε τον συντελεστή του βήματος n . Ο λόγος είναι ότι δεν μπορούμε να ξέρουμε το ακριβές αποτέλεσμα της σειράς. Ξέροντας όμως ότι η ακολουθία β_{j+1} που υπάρχει μέσα στο D είναι κατ' ουσία η ακολουθία Fibonacci θα προσπαθήσουμε να κάνουμε μια τελευταία ανέλπιδη προσπάθεια για να απαλειφτεί το n .

Επίλυση της ακολουθίας Fibonacci με την χρήση των εξισώσεων διαφορών.

Από την ακολουθία Fibonacci επιλύουμε την εξίσωση διαφορών[2]:

$$a_n = a_{n-n_1} - a_{n-n_2}, \quad n > \max \{n_1, n_2\}$$

Έστω $n_1 = 1$ και $n_2 = 2$

Τότε:

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots \quad (1)$$

Έχουμε θέσει τις αρχικές συνθήκες $a_1 = 1$ και $a_2 = 2$

Σε αυτό το σημείο να κάνουμε μια παρατήρηση που έχει να κάνει με τις αρχικές συνθήκες. Αν $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$ δεν οδηγούμαστε σε λύση του προβλήματος επειδή έχουμε $a_2 = 2$.

Την (1) μπορούμε να την γράψουμε ως εξής:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2) είναι:

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

η οποία έχει ρίζες:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ και } \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Άρα η γενική λύση της (2) δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Από τις αρχικές τιμές όμως του προβλήματος έχουμε:

$$\alpha_1 = 1 \Rightarrow 1 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \Rightarrow \frac{1}{2} [c_1(1 + \sqrt{5}) + c_2(1 - \sqrt{5})] = 1$$

$$\alpha_2 = 2 \Rightarrow 2 = c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2 \Rightarrow \frac{1}{4} [c_1(1 + \sqrt{5})^2 + c_2(1 - \sqrt{5})^2] = 1$$

Από όπου επιλύοντας το σύστημα 2x2 έχουμε:

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \text{ και } c_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Επομένως η ζητούμενη λύση είναι:

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 > 1$ και $-1 < \lambda_2 < 0$. Οπότε η λ_1 είναι η κυρίαρχη λύση και το μέγεθός της είναι $|\lambda_1| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$. Άρα η ακολουθία Fibonacci είναι αύξουσα. Άρα για πολύ μεγάλα n η λ_2 είναι αμελητέα και έτσι έχουμε προσεγγιστικά ότι:

$$\alpha_n \cong \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1)^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

■

Οπότε στις σχέσεις (A) και (B) μπορούμε να έχουμε:

$$L_n = 2 \prod_{j=0}^{n-2} (\beta_{j+1}) L_0 = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{j+1} L_0 \quad (A)$$

$$M_n = m_0 2^n \quad (B)$$

Από την (A) όμως έχουμε χρησιμοποιώντας γνωστούς τύπους [4]:

$$L_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{j+1} L_0 = 5^{-\frac{n}{2}} (-4 + 2\sqrt{5})^{-\frac{n}{2}(n+1)} L_0$$

$$L_n = [5(-4 + 2\sqrt{5})^{n+1}]^{-\frac{n}{2}} L_0$$

Οπότε θα έχουμε από τον συνδυασμό των (A) και (B):

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} &= \frac{2^n}{[5(-4 + 2\sqrt{5})^{n+1}]^{-\frac{n}{2}}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} &= \left(\frac{2}{[5(-4 + 2\sqrt{5})^{n+1}]^{-\frac{1}{2}}} \right)^n \end{aligned}$$

Άρα λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \log \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} &= \log \left(\frac{2}{[5(-4 + 2\sqrt{5})^{n+1}]^{-\frac{1}{2}}} \right)^n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} &= n \log \left(\frac{2}{[5(-4 + 2\sqrt{5})^{n+1}]^{-\frac{1}{2}}} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} &= n \frac{\log 2}{\log [5(-4 + 2\sqrt{5})^{n+1}]^{-\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Θέτοντας $D = n \frac{\log 2}{\log[5(-4+2\sqrt{5})^{n+1}]^{-\frac{1}{2}}}$ έχουμε:

$$\Leftrightarrow \log \frac{\widetilde{M}_n}{\widetilde{L}_n} = D \Leftrightarrow \frac{\log \widetilde{M}_n}{\log \widetilde{L}_n} = D \Leftrightarrow \log \widetilde{M}_n = D \log \widetilde{L}_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log \widetilde{M}_n = \log \widetilde{L}_n^D$$

Και από - λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\widetilde{M}_n = \widetilde{L}_n^D$$

Όπου

$$D = n \frac{\log 2}{\log[5(-4+2\sqrt{5})^{n+1}]^{-\frac{1}{2}}} = \frac{n \log 2}{-\frac{1}{2} \log[5(-4+2\sqrt{5})^{n+1}]} = - \frac{2n \log 2}{\log[5(-4+2\sqrt{5})^{n+1}]}$$

$$D = - \frac{2n \log 2}{\log 5 - \log(-4 + 2\sqrt{5})^{n+1}} = - \frac{2n \log 2}{\log 5 - (n + 1) \log(-4 + 2\sqrt{5})}$$

$$D = - \frac{2n \log 2}{\log 5 - n \log(-4 + 2\sqrt{5}) - \log(-4 + 2\sqrt{5})}$$

■

Δυστυχώς κατάφερα να φτάσω την D μέχρι αυτό το σημείο. Αν καταφέρναμε να σπάσουμε το κλάσμα σε τρία διαφορετικά τότε θα μπορούσαμε να δουλέψουμε ασυμπτωτικά και να βρούμε μια τιμή της φράκταλ διάστασης η οποία να μην εξαρτάται από το βήμα n. Βέβαια στην προκειμένη περίπτωση παρατηρούμε ότι η D θα έπαιρνε την τιμή ∞ για $n \rightarrow \infty$. Ο λόγος είναι ότι στον μεσαίο όρο του παρανομαστή ναι μεν θα απαλείψαμε το n αλλά στους άλλους δυο θα ήταν αρκετά δύσκολο.

Ο λόγος που το fibo - φράκταλ μας οδήγησε σε αποτυχία είναι επειδή χρειάζεται μνήμη. Δηλαδή έχει ανάγκη στον ακολουθιακό τύπο του μήκους να έχει την προηγούμενη τιμή και την προ - προηγούμενη τιμή της ακολουθίας Fibonacci. Η ιδιότητα αυτή της ακολουθίας Fibonacci οδήγησε το fibo - φράκταλ σε αποτυχία. Η προσπάθεια που κάναμε να δημιουργήσουμε ένα φράκταλ συσσωμάτωμα με τις απαραίτητες ιδιότητες απέτυχε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ

[1] <http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci>

[2] Εξισώσεις Διαφορών και Διακριτά συστήματα, Κυβεντίδης Θωμάς,
2001, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ειδικό θέμα: Ανάλυση έργων ζωγραφικής με fractals, Αλέξανδρος Δημητριάδης, 2007, Θεσσαλονίκη.

Fractals for the classroom: Complex systems and Mandelbrot, H.O. Peitgen, Evan M, Maletsky, 1992

A one dimensional realization of a general model for cluster-cluster aggregation, William J. Titus, Am. J. Phys. 57 (12), December 1989, American Association of Physics Teachers

Table Of Integrals, Series And Products 7Ed 2007 Gradshteyn I , Ryzhik I (σελ.47)

K.Falconer, Fractal Geometry and its applications (Wiley, Chichester, 1990

F.Oberhettinger, Tables of Mellin Transforms (Springer-Verlag, Berlin, 1974.)

B.B. Mandelbrot, The fractal Geometry of Nature (Freeman, New York, 1983)

Structure factor of Cantor sets, Physical review, C. P. Dettmann, N. E. Frankel and T. Taucher, The American Physical Society, Volume 49, number 4, 1994

Spatial spectrum of a general family of self-similar arrays, Physical review, C. Allain and M. Cloitre, The American Physical Society, volume 36, number 12, 1987

Elastic scattering by deterministic and random fractals: Self-affinity of the diffraction spectrum, Daniel A. Hamburger- Lidar, The American Physical Society, Volume 54, number 1, 1996

http://www.miguel.com/fractals_math_patterns/visual-math-natural-fractals.html

<http://www.fractalspirit.com/EgyptianGallery1.htm>

http://en.wikipedia.org/wiki/Architecture_of_Africa

<http://www.fractalenlightenment.com/2009/09/treasures-of-tibet-at-norbulingka.html>

http://en.wikipedia.org/wiki/Beno%C3%AEt_Mandelbrot

<http://www.physics4u.gr/chaos/chaos4.html>

<http://math.rice.edu/~lanius/fractals/>

Fractals for the classroom: Complex systems and Mandelbrot, H.O. Peitgen, Evan M, Maletsky, 1992

Fractal Geometry, Michael Frame, Benoit Mandelbrot and Nial Neger, Yale University.

The Fractal Geometry of Nature, Benoit Mandelbrot, W.H. Freeman and Company, New York, 1977

<http://library.thinkquest.org/3493/frames/fractal.html>

<http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/node6.html>

<http://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html>

Fractals for the classroom: Complex systems and Mandelbrot, H.O. Peitgen, Evan M, Maletsky, 1992

K.Falconer, Fractal Geometry and its applications ,Wiley, Chichester, 1990

<http://www.epyna.gr/modules.php?name=News&file=article&sid=903>

<http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308/projects/fung/page.html>

http://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set

<http://mathworld.wolfram.com/JuliaSet.html>

<http://www.math.utah.edu/~pa/math/mandelbrot/mandelbrot.html>

<http://www.ddewey.net/mandelbrot/>

Architectural models, fractals and agroforestry design, Roelof A.A. Oldeman, Agricultural University, Postbus 342, Wageningen, Netherlands

<http://sites.google.com/site/dspaventa3/fractal-forest>

<http://software.informer.com/getfree-fractal-forest-tile/> (για να δημιουργήσετε το δικό σας δάσος)

<http://answers.oreilly.com/topic/1310-create-a-fractal-mountain-scape-with-processing/>

<http://www.gameprogrammer.com/fractal.html>

<http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html>

http://en.wikipedia.org/wiki/Menger_sponge

Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως, Walter Rudin, Leader Books, Αθήνα, 2000

Barnsley M.F., (1988), Fractals Everywhere, Academic Press

Edgar G., (1990) Measure, Topology and Fractal Geometry Springer – Verlag

Falconer K.J., (1985), The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press

Falconer K.J., (1990), Fractal Geometry, John Wiley

Falconer K.J. (1990), Techniques in Fractal Geometry, John Wiley

Mattila P. (1995), Geometry of sets and Measures in Euclidean Spaces, Cambridge University Press

Rogers C.A., (1970), Hausdorff Measures, Cambridge University Press

Optical diffraction on fractals, (1986), C. Allain, M Cloitre, Paris Cedex

France, vol. 33

A Course in Operator Theory, (1999), John B. Conway, Vol.21 , American Mathematical Society

Operator Theory. Nonclassical Problems, (2002) S.G. Pyatkov, VSP, Tokyo

Operator Theory Operator Algebras and Applications, (1980), I. Arveson, William, II. Douglas, Ronald G., Vol. 51 – Part 1, American Mathematical Society