

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

ΘΕΡΜΟΠΟΡΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΠΕΤΡΩΜΑΤΩΝ

ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΛΙΟΛΙΟΣ
ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ
ΕΞΑΔΑΚΤΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Π.Κ. (Επιβλέπων)
ΑΓΙΟΥΤΑΝΤΗΣ ΖΑΧΑΡΙΑΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Π.Κ.
ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΧΑΝΙΑ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2005

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται καταρχήν οι εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες των τάσεων και της ροής ρευστού (ή θερμότητας) σε σταθερή κατάσταση σε επίπεδο και ισότροπο διαρρηγμένο πορώδες μέσο. Εν συνεχεία, παρουσιάζεται η επίλυση των εξισώσεων η οποία επικεντρώνεται στο πρόβλημα της ροής του ρευστού σε σταθερή κατάσταση στο ρηγματωμένο μέσο. Η επίλυση των εξισώσεων των τάσεων έχει παρουσιαστεί αναλυτικά από άλλους ερευνητές οπότε θα παρουσιαστούν μόνο οι τελικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα.

Η επίλυση του προβλήματος της ροής ρευστού σε σταθερή κατάσταση βασίζεται στη θεωρία των μιγαδικών δυναμικών, στη θεωρία των ολοκληρωμάτων Cauchy και των ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων. Κατόπιν, παρουσιάζεται αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον ακριβή προσδιορισμό της πίεσης των πόρων και του διανύσματος της ταχύτητας της ροής στο επίπεδο, που προκαλούνται εξαιτίας προκαθορισμένης υδραυλικής πίεσης ή ροής ρευστού που δρα πάνω σε μια ή περισσότερες μη αλληλοτενόμενες καμπυλόγραμμες ρωγμές. Στη συνέχεια, γίνεται έλεγχος της αριθμητικής ολοκλήρωσης των ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων και καταδεικνύεται η ταχύτητα της μεθόδου. Τέλος, μετά την επιτυχή τεκμηρίωση του αριθμητικού αλγορίθμου, παρουσιάζονται ορισμένα παραδείγματα ροής ρευστού σε πολλαπλώς ρωγματωμένα σώματα.

Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κατά τα έτη 2002 – 2004 στο Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων του Πολυτεχνείου Κρήτης υπό την επίβλεψη του Καθηγητή μου κ. Γεώργιου Εξαδάκτυλου, διευθυντή του Εργαστηρίου Μελέτης και Σχεδιασμού Εκμεταλλεύσεων, προς τον οποίον εκφράζω τις θερμότερες ευχαριστίες μου για την αμέριστη συμπαράσταση και συνδρομή που μου παρείχε χωρίς την οποία θα ήταν αδύνατη η εκπόνηση αυτής της μελέτης.

Το θέμα της παρούσας εργασίας εντάσσεται στα προβλήματα θερμο-πορο-μηχανικής των πετρωμάτων και αφορά την διάχυση της πίεσης των πόρων και της θερμοκρασίας σε διαρρηγμένα ισότροπα πορώδη μέσα. Η προσέγγιση που ακολουθείται για την επίλυση του προβλήματος είναι η μέθοδος των μιγαδικών δυναμικών σε συνδυασμό με ειδικές μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης των ιδιόμορφων ολοκληρωμάτων που προκύπτουν κατά την διατύπωση των εξισώσεων. Το αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης είναι μια ολοκληρωμένη μέθοδος επίλυσης η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ταχύτατη, λόγω του μικρού αριθμού υπολογισμών που απαιτεί, καθώς επίσης και υψηλής ακρίβειας.

Η διατριβή αυτή σίγουρα αποτελεί μια απλοποιημένη προσέγγιση του πραγματικού προβλήματος που απαντάται στη φύση. Παρόλαυτά, η χρησιμότητά της έγκειται στο ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί εύκολα για ανάδρομη ανάλυση επιτόπου μετρήσεων με σκοπό μια πρώτη εκτίμηση των πεδίων της πίεσης των πόρων και των ταχυτήτων ροής του ρευστού. Ακόμη, είναι δυνατή η χρήση της για τον έλεγχο της ακρίβειας πολυπλοκότερων αριθμητικών αλγορίθμων που προσεγγίζουν καλύτερα τη φύση καθώς επίσης ως τμήμα ενός ευρύτερου αλγορίθμου προβλημάτων θερμο-πορο-μηχανικής.

Με σκοπό ο όγκος της εργασίας να παραμείνει σε λογικά επίπεδα, η θεωρία η οποία χρησιμοποιήθηκε σε πολλά σημεία της παρούσας διατριβής δεν αναπτύσσεται εις βάθος. Εντούτοις, όπου χρειάζεται, γίνονται αναφορές στη σχετική βιβλιογραφία όπου μπορούν να βρεθούν περισσότερες πληροφορίες.

Σε αυτό το σημείο θεωρώ χρέος μου να αναγνωρίσω την συμβολή όλων αυτών των ανθρώπων με τους οποίους συνεργάστηκα για την εκπόνηση της παρούσας διατριβής. Καταρχήν, τις θερμότερες ευχαριστίες μου στον Καθηγητή μου κ. Γεώργιο Εξαδάκτυλο, ο οποίος αποτελούσε για μένα πηγή γνώσης και έμπνευσης και χωρίς την συμβολή του η διεκπεραίωση ετούτης της εργασίας θα ήταν αδύνατη. Επίσης, οφείλω ένα θερμό ευχαριστώ στον Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κ. Ιωάννη Βαρδουλάκη του οποίου η εμπειρία και η γνώση οδήγησαν στην καλύτερη κατανόηση της φυσικής του φαινομένου καθώς επίσης και στον υπερκερασμό προβλημάτων που ανέκυψαν. Τέλος, δεν θα μπορούσα να ξεχάσω τους ανθρώπους του εργαστηρίου Μελέτης και Σχεδιασμού Εκμεταλλεύσεων για την συμπαράσταση και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους. Τους ευχαριστώ πολύ.

Παντελής Α. Λιόλιος
Χανιά, Ιανουάριος 2005

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων	vii
1 Εισαγωγή	1
2 Γενικές Εξισώσεις	5
2.1 Πίεση των πόρων	7
2.1.1 Επίλυση για μία ρωγμή	10
2.1.2 Επίλυση για σύστημα ρωγμών	12
2.2 Τάσεις και παραμορφώσεις	13
2.2.1 Επίδραση της πίεσης των πόρων	15
2.2.2 Επίδραση της θερμοκρασίας	16
3 Αριθμητική επίλυση	19
3.1 Μια Ευθύγραμμη ρωγμή	20
3.1.1 Συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet	20
3.1.2 Συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann	22
3.2 Καμπυλόγραμμη ρωγμή	25
3.3 Σύστημα καμπυλόγραμμων ρωγμών	30
4 Αριθμητικά Παραδείγματα	33
5 Συμπεράσματα	43
Βιβλιογραφία	45
Ευρετήριο	49

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Το άπειρο επίπεδο S που περιέχει k_1 καμπυλόγραμμες ρωγμές, M λεπτά εγκλείσματα, N οπές, k_2 σημειακές πηγές ρευστού ή θερμότητας q_i , k_3 σημειακές φορτίσεις $P_i + iQ_i$, βρίσκεται υπό την επίδραση ομοιογενούς ροής ρευστού ή θερμότητας q_∞ και εφελκύεται στο άπειρο από ορθές τάσεις N_1 και N_2	6
2.2	Καμπυλόγραμμη ρωγμή σε άπειρο επίπεδο. Συνεισφορά του κάθε σημείου t επί του συνόρου L στην πίεση των πόρων τυχαίου σημείου z του επιπέδου.	12
3.1	Απλή ευθύγραμμη ρωγμή και σύστημα συντεταγμένων.	20
3.2	Καμπυλόγραμμη ρωγμή στο επίπεδο και τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο t_0	23
3.3	Καμπυλόγραμμη ρωγμή διακριτοποιημένη σε K ευθύγραμμα τμήματα	26
3.4	Υπολογισμός των σημείων ολοκλήρωσης κατά μήκος ρωγμής τυχαίου σχήματος. (α') Περίπτωση 1η: Το σημείο ολοκλήρωσης που υπολογίζεται πρέπει να τοποθετηθεί στο τρέχον ευθύγραμμο τμήμα. (β') Περίπτωση 2η: Το σημείο ολοκλήρωσης που υπολογίζεται πρέπει να τοποθετηθεί στο επόμενο ευθύγραμμο τμήμα.	28
4.1	Ευθύγραμμη ρωγμή που καταλαμβάνει το διάστημα $[-1, 1]$ πάνω στον άξονα Ox	35
4.2	Κατανομή της πίεσης των πόρων κατά μήκος του Ox άξονα.	36
4.3	Απόλυτο σχετικό σφάλμα του υπολογισμού της πίεσης των πόρων κατά μήκος του Ox άξονα.	36
4.4	Κατανομή της συνιστώσας q_x του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού κατά μήκος του Ox άξονα.	37

4.5	Απόλυτο σχετικό σφάλμα του υπολογισμού της συνιστώσας q_x του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού κατά μήκος του Ox άξονα.	37
4.6	Κατανομή της πίεσης των πόρων κατά μήκος του Oy άξονα.	38
4.7	Απόλυτο σχετικό σφάλμα του υπολογισμού της πίεσης των πόρων κατά μήκος του Oy άξονα.	38
4.8	Κατανομή της συνιστώσας q_y του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού κατά μήκος του Oy άξονα.	39
4.9	Απόλυτο σχετικό σφάλμα του υπολογισμού της συνιστώσας q_y του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού κατά μήκος του Oy άξονα.	39
4.10	Κατανομή της πίεσης των πόρων ($p(z)$) στο επίπεδο.	40
4.11	Κατανομή της συνιστώσας $q_x(z)$ του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού στο επίπεδο.	40
4.12	Κατανομή της συνιστώσας $q_y(z)$ του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού στο επίπεδο.	41
4.13	Κατανομή της πίεσης των πόρων ($p(z)$) στο επίπεδο.	41
4.14	Κατανομή της συνιστώσας $q_x(z)$ του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού στο επίπεδο.	42
4.15	Κατανομή της συνιστώσας $q_y(z)$ του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού στο επίπεδο.	42

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Υπάρχει μια κατηγορία πορώδων μέσων για τα οποία η θεώρηση ενός ενιαίου συνεχούς πορώδους δεν είναι ρεαλιστική. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση των πετρωμάτων που διασχίζονται από φυσικούς αρμούς (ασυνέχειες) όπως ρήγματα, διακλάσεις ή ρωγμές. Τα μέσα αυτά, τα οποία παρουσιάζουν τοπικές ανωμαλίες στις ροές ρευστού και θερμότητας, ονομάζονται μέσα διπλού πορώδους ή μέσα με δυο (ή περισσότερους) βαθμούς πορώδους (λ.χ. ο ένας βαθμός πορώδους είναι το ενεργό πορώδες και ο δεύτερος είναι το πορώδες που οφείλεται στις πάσης φύσεως ασυνέχειες που διασχίζουν το πέτρωμα) ([3], [22] μεταξύ άλλων).

Τα ρευστά των πόρων των πετρωμάτων εμπλέκονται σε πολλές δυναμικές διαδικασίες που σχετίζονται με την σεισμική δραστηριότητα της Γης. Αυτές περιλαμβάνουν την ρηγμάτωση αυτή καθαυτή καθώς επίσης και μετασεισμικά φαινόμενα που προκαλούνται από μεταβολές της κατανομής των τάσεων εξαιτίας της ολίσθησης των ρηγμάτων. Η μεταβολή (ανύψωση ή εκτόνωση) της πίεσης των πόρων μπορεί να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στον σεισμικό κύκλο και συγκεκριμένα στην ενεργοποίηση και στη διάδοση των ρηγμάτων. Οι Hickman και άλλοι [10] και Evans και άλλοι [8] αναφέρουν πολλές επιστημονικές εργασίες οι οποίες διερεύνησαν το ρόλο των ρευστών των πόρων στις διαδικασίες ρωγμάτωσης των πετρωμάτων. Από αυτές τις εργασίες προκύπτει ότι η θεώρηση του ρηγματωμένου φλοιού της Γης ως ποροελαστικού υλικού πληρωμένου με ρευστό είναι απαραίτητη ώστε να γίνει αντιληπτό το φυσικό φαινόμενο ολόκληρου του σεισμικού κύκλου.

Η μελέτη της ροής των ρευστών καθώς και η μελέτη της ροής θερμότητας σε ρηγματωμένα σώματα έχει πολλές ακόμα πρακτικές εφαρμογές όπως:

- Υδραυλική θραύση σε γεωτρήσεις ταμειυτήρων πετρελαίου ή γεωθερμικών

πεδίων με σκοπό την αύξηση της υδραυλικής διαπερατότητας του σχηματισμού.

- Μελέτη της επίδρασης της πίεσης των πόρων στην διάδοση των ρωγμών σε πετρώματα και επί τόπου μετρήσεις του τασικού πεδίου με την μέθοδο της υδραυλικής θραύσης.
- Εκτίμηση της διαπερατότητας των ταμειυτήρων ρευστών (π.χ. πετρελαίου, νερού).
- Υδρο-μηχανική διάβρωση του πετρώματος γύρω από γεωτρήσεις.
- Θραύση των πετρωμάτων με θερμική κόπωση.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι στις δύο πρώτες κατηγορίες προβλημάτων, η διάχυση της πίεσης των πόρων κατά μήκος των πλευρών των ρωγμών συνήθως αγνοείται.

Για την μελέτη προβλημάτων διάχυσης της πίεσης των πόρων ή της θερμοκρασίας (προβλήματα δυναμικού, potential problems) εντός διαρρηγμένων μέσων καθώς και την μελέτη της κατανομής των τάσεων εντός αυτών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις, όπως:

1. Τεχνικές ολοκληρωτικών μετασχηματισμών, όπως είναι οι μετασχηματισμοί Fourier, Mellin και Laplace [18], μεταξύ άλλων, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μικρό αριθμό ειδικών περιπτώσεων αν και η εφαρμογή τους μπορεί να επεκταθεί σημαντικά αν συνδυαστούν με την τεχνική Wiener-Hopf (π.χ. ευθύγραμμες ή ημι-άπειρες ρωγμές στο επίπεδο ή στον επίπεδο ημίχωρο).
2. Μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) ή μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών (ΜΠΔ) ([17] μεταξύ πολλών άλλων), οι οποίες έχουν μικρή ακρίβεια κατά μήκος των συνόρων των ρωγμών.
3. Μέθοδοι συνοριακών στοιχείων (ΜΣΣ) οι οποίες παρουσιάζουν ακρίβεια στα σύνορα των ρωγμών με την προϋπόθεση ότι γίνεται χρήση ειδικών στοιχείων στα άκρα των ρωγμών ([1], [4], [5], [9] μεταξύ πολλών άλλων).
4. Μέθοδοι μιγαδικών δυναμικών σε συνδυασμό με την θεωρία των ολοκληρωμάτων Cauchy και των ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων οι οποίες απαιτούν εκτεταμένες (και συχνά δύσκολες) πράξεις για την διατύπωση των εξισώσεων αλλά οδηγούν σε λύσεις κλειστής μορφής ή ημι-αναλυτικές λύσεις ([2], [13], [16]). Η συγκεκριμένη μέθοδος οδηγεί σε λύσεις υψηλότερης

ακρίβειας και ταχύτητας σε σύγκριση με όλες τις προαναφερθείσες μεθόδους (δηλ. ΜΠΣ, ΜΠΔ, ΜΣΣ κλπ.).

Η προσέγγιση η οποία ακολουθείται στην παρούσα εργασία βασίζεται στην τελευταία κατηγορία μεθόδων καθώς επίσης και στην μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss - Chebyshev για ιδιόμορφα ολοκληρώματα. Η πρωτοτυπία της παρούσας λύσης έγκειται στο γεγονός ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην γενική περίπτωση πολλαπλών μη αλληλοτεμνόμενων καμπυλόγραμμων ρωγμών όπου η γεωμετρία κάθε ρωγμής δεν είναι απαραίτητο να αναχθεί σε γνωστή εξίσωση. Επιπλέον, παρουσιάζεται η τάχιστη σύγκλιση της προτεινόμενης λύσης σε μια σταθερή (υπό την έννοια της αριθμητικής ολοκλήρωσης) εκτίμηση. Ως εκ τούτου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να τον έλεγχο της ακρίβειας ενός αριθμητικού κώδικα (όπως ΜΠΣ, ΜΠΔ, ή ΜΣΣ), ως εργαλείο για την γρήγορη ανάδρομη ανάλυση επί τόπου μετρήσεων πίεσης πόρων και θερμοκρασίας ή ροών ρευστού και θερμότητας και ως συμπλήρωμα για άλλο αριθμητικό κώδικα υπολογιστικής ανάλυσης θερμο-υδρο-μηχανικών προβλημάτων.

Κεφάλαιο 2

Γενικές εξισώσεις του ισότροπου διαρρηγμένου πορώδους μέσου

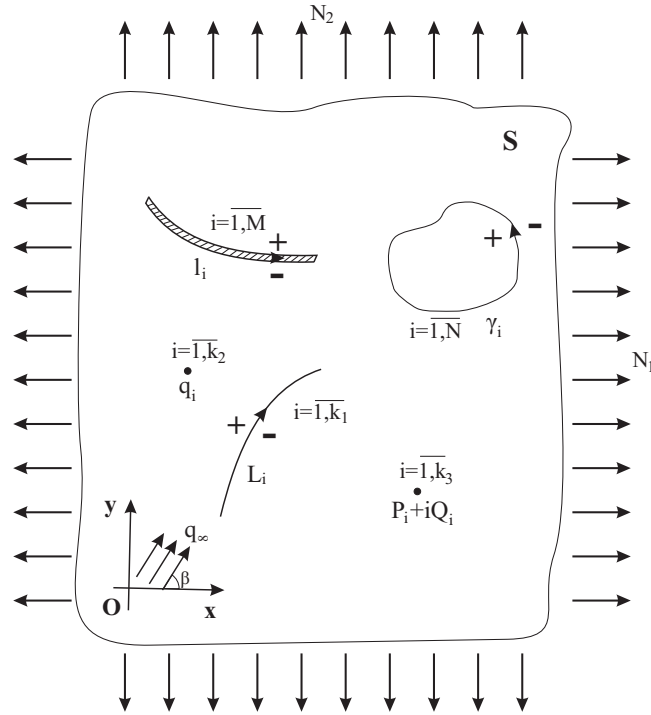
Για την κατάστρωση της μαθηματικής θεωρίας για τον υπολογισμό των τάσεων και της πίεσης των πόρων ή της θερμοκρασίας σε υλικά με ατέλειες της μορφής ρωγμών, οπών, εγκλεισμάτων κλπ., θα χρησιμοποιηθεί το πρότυπο του γραμμικού ισότροπου θερμοποροελαστικού σώματος. Η θεώρηση του μοντέλου αυτού προϋποθέτει ότι:

1. Οι συνιστώσες των παραμορφώσεων θεωρούνται μικρές.
2. Μεταξύ των συνιστωσών τάσεων και παραμορφώσεων ισχύει ο γραμμικός γενικευμένος νόμος του Hooke και
3. οι ελαστικές, θερμικές και υδραυλικές ιδιότητες του σώματος είναι ίδιες προς όλες τις κατευθύνσεις και ανεξάρτητες από την θερμοκρασία, την πίεση των πόρων και τις τάσεις (γραμμικό και ισότροπο υλικό).

Όπως φαίνεται στο γενικό Σχήμα 2.1, θεωρείται ότι το άπειρο, γραμμικό, ισότροπο, θερμοποροελαστικό επίπεδο S περιέχει:

- k_1 εσωτερικές καμπυλόγραμμες ρωγμές L_i ($i = \overline{1, k_1}$)
- M λεπτά εγκλείσματα l_i ($i = \overline{1, M}$)

- N οπές γ_i ($i = \overline{1, N}$)
- k_2 σημειακές πηγές ρευστού ή θερμότητας ισχύος q_i συγκεντρωμένες στα σημεία b_i ($i = \overline{1, k_2}$)
- k_3 σημειακές φορτίσεις $P_i + iQ_i$ συγκεντρωμένες στα σημεία b_i^* ($i = \overline{1, k_3}$)
- ευρίσκεται υπό την επίδραση ομοιογενούς ροής ρευστού ή θερμότητας q_∞
- εφελκύεται στο άπειρο από ορθές τάσεις N_1 και N_2



Σχήμα 2.1: Το άπειρο επίπεδο S που περιέχει k_1 καμπυλόγραμμες ρωγμές, M λεπτά εγκλείσματα, N οπές, k_2 σημειακές πηγές ρευστού ή θερμότητας q_i , k_3 σημειακές φορτίσεις $P_i + iQ_i$, βρίσκεται υπό την επίδραση ομοιογενούς ροής ρευστού ή θερμότητας q_∞ και εφελκύεται στο άπειρο από ορθές τάσεις N_1 και N_2 .

Στις ενότητες που ακολουθούν δίδονται οι γενικές εξισώσεις που διέπουν την διάχυση της πίεσης των πόρων ή της θερμοκρασίας και της ισορροπίας των τάσεων σε επίπεδο ισότροπο πορώδες μέσο το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση σταθερής ροής ως προς το ρευστό ή την θερμότητα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην ανάλυση που ακολουθεί θεωρείται ότι το μέσο βρίσκεται υπό την επίδραση μόνο ενός εκ των δύο προαναφερθέντων δυναμικών ροής (ρευστό ή θερμότητα). Για το λόγο αυτό και εφόσον οι εξισώσεις για την διάχυση της πίεσης των πόρων και την διάχυση της θερμοκρασίας είναι οι ίδιες, η ανάλυση θα επικεντρωθεί μόνο στην πίεση των πόρων και θα θεωρηθεί ότι για την θερμοκρασία ισχύουν οι ανάλογες σχέσεις.

2.1 Διάχυση της πίεσης των πόρων

Με βάση την θεώρηση ότι η ροή του ρευστού διέπεται από το νόμο του Darcy, η διαπερατότητα του μέσου δεν εξαρτάται από την πίεση των πόρων και η ροή του ρευστού ευρίσκεται σε σταθερή κατάσταση, τότε η εξίσωση του ισοζυγίου μάζας οδηγεί στην γνωστή εξίσωση Laplace για την πίεση των πόρων $p(x, y)$ στο επίπεδο Oxy ενός ισότροπου πορώδους μέσου

$$\nabla^2 p(x, y) = \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

Στην παρούσα εργασία, θεωρείται ότι όλα τα σημεία του οριζόντιου επιπέδου Oxy βρίσκονται στο ίδιο γεωδαιτικό ύψος το οποίο βρίσκεται κάτω από την φρεατική επιφάνεια (πλήρως κορεσμένο μέσο). Η ανωτέρω εξίσωση πεδίου (2.1) μπορεί να γραφεί επίσης στην ακόλουθη μιγαδική μορφή

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} p(z) \right) = 0 \quad (2.2)$$

Η γενική λύση της (2.2) είναι η ακόλουθη

$$p(z) = F(z) + \overline{F(z)} = 2\text{Re}(F(z)) \quad (2.3)$$

όπου $F(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z με $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα, $\text{Re}(\cdot)$ υποδηλώνει το πραγματικό κομμάτι της συνάρτησης που περιλαμβάνει και η άνω οριζόντια γραμμή υποδηλώνει συζυγή μιγαδική ποσότητα. Επιπλέον, η ροή του ρευστού ή το διάνυσμα ταχύτητας ροής

(flux) q $[L/T]$ δίδεται από τον νόμο του Darcy¹

$$q(z) = -\lambda \text{grad} p(z) = -\lambda \left(\frac{\partial p(z)}{\partial x} + i \frac{\partial p(z)}{\partial y} \right) \quad (2.4)$$

όπου λ δηλώνει τον συντελεστή διαπερατότητας $[L^4/(T \cdot F)]$ του πορώδους μέσου.

Οι συνοριακές συνθήκες της ροής ρευστού που παρουσιάζονται στην πράξη είναι:

1. Συνοριακές συνθήκες πρώτου είδους ή συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, όταν οι τιμές της πίεσης των πόρων δίδονται στο σύνορο

$$p = f_1(x, y) \quad (2.5)$$

2. Συνοριακές συνθήκες δεύτερου είδους ή συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann όταν οι τιμές της κάθετης ή της εφαπτομενικής συνιστώσας του διανύσματος ταχύτητας ροής δίδονται στο σύνορο

$$\lambda \text{Re}(\text{grad} p) = f_2(x, y) \quad (2.6)$$

ή

$$\lambda \text{Im}(\text{grad} p) = f'_2(x, y) \quad (2.7)$$

Η μέθοδος που εφαρμόζεται για την επίλυση του προβλήματος έγκειται στην διατύπωση σύστήματος ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων κατά αναλογία με την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία των Bardzokas και Exadaktylos [2] αλλά σε πιο απλοποιημένη μορφή.

Ανάλογα με την φύση των συνθηκών ροής κατά μήκος των συνόρων l_i , L_i και γ_i , (Σχ. 2.1) διατυπώνονται οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$p_*^\pm(t_0) = f_i^\pm(t_0) - p_0, \quad i = \overline{1, n_1} \quad (2.8)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial p_*}{\partial t_0} \right)^\pm = Q_i^\pm(t_0) - \lambda \frac{\partial p_0}{\partial t_0}, \quad i = \overline{n_1 + 1, k_1 + M + N} \quad (2.9)$$

όπου t_0 είναι η μιγαδική συντεταγμένη ενός σημείου πάνω στις καμπύλες γ_i , l_i ή L_i , n_1 είναι ο αριθμός των καμπυλών πάνω στις οποίες εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, Q_i είναι το διάνυσμα ταχύτητας της ροής σε μιγαδική

¹ Στην παρούσα εργασία οι εξισώσεις του ρευστού και οι συνοριακές συνθήκες εκφράζονται συναρτήσει της πίεσης παρά ως προς το ύψος υδραυλικής στήλης (όπως συμβαίνει συχνά στην εδαφομηχανική).

μορφή και p_0 είναι η πίεση που προκαλείται από τις σημειακές πηγές και την ομοιογενή ροή ρευστού q_∞ . Επίσης, το θετικό και αρνητικό πρόσημο που εμφανίζονται ως εκθέτες υποδηλώνουν τις οριακές τιμές της αντίστοιχης συνάρτησης όταν το σύνορο προσεγγίζεται από την $+$ ή $-$ πλευρά, αντίστοιχα (Σχ. 2.1).

Το δυναμικό της πίεσης $F(z)$ [$p(x, y) = 2\text{Re}F(z)$] του ροϊκού πεδίου σταθερής κατάστασης $p(x, y)$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$F(z) = \frac{q_\infty}{2} z e^{-i\beta} - \sum_{i=1}^{k_2} \frac{q_i}{2\pi\lambda} \ln(z - b_i) + F_*(z) \quad (2.10)$$

όπου β είναι η γωνία της ομοιογενούς ροής ρευστού q_∞ με τον άξονα Ox και η $F_*(z)$ δίδεται με την μορφή ολοκληρωμάτων Cauchy ως εξής:

$$F_*(z) = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{k_1} \int_{L_i} \frac{\phi_{1i} dt}{t - z} + \sum_{i=1}^M \int_{l_i} \frac{\phi_{2i} dt}{t - z} + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \frac{\phi_{3i} dt}{t - z} \right) \quad (2.11)$$

με $\phi_{1i}, \phi_{2i}, \phi_{3i}$ να αποτελούν τις πυκνότητες κατά μήκος των ρωγμών, των λεπτών εγκλεισμάτων και των οπών, αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας στις (2.8) και (2.9) τις οριακές τιμές του δυναμικού της ροής που δίδεται από την (2.10), προκύπτει το ακόλουθο σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \text{Re} \left\{ \int_{L_{m^*c}} \frac{\phi_{mc}(t) dt}{t - t_0} + \sum_{\substack{i \neq c \\ i \neq m=1}}^{k_1} \int_{L_i} \frac{\phi_{1i}(t) dt}{t - t_0} \right. \\ & + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c \text{ if } m=2}}^M \int_{l_i} \frac{\phi_{2i}(t) dt}{t - t_0} + \left. \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c \text{ if } m=3}}^N \int_{\gamma_i} \frac{\phi_{3i}(t) dt}{t - t_0} \right\} \\ & = f_{2c}(t_0) - \text{Re} \left(q_\infty t_0 e^{i\beta} + \sum_{i=1}^{k_2} \frac{q_i}{\pi\lambda} \ln(t_0 - b_i) \right) \\ & t_0 \in L_c, l_c, \gamma_c \quad c = \overline{1, n_1} \quad m = 1, 2, \text{ or } 3 \end{aligned} \quad (2.12)$$

όπου

$$f_{2c}(t_0) = f_c^+(t_0) + f_c^-(t_0) \quad (2.13)$$

και $L_{1c}^* = L_c, L_{2c}^* = l_c, L_{3c}^* = \gamma_c$.

$$\begin{aligned}
& \frac{2\lambda}{\pi} \text{Re} \left\{ \int_{L_{mc}^*} \frac{\phi_{mc}(t)dt}{(t-t_0)^2} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c}}^{k_1} \sum_{\substack{f=1 \\ if}} \int_{L_i} \frac{\phi_{1i}(t)dt}{(t-t_0)^2} \right. \\
& + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c}}^M \sum_{\substack{f=2 \\ if}} \int_{l_i} \frac{\phi_{2i}(t)dt}{(t-t_0)^2} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c}}^N \sum_{\substack{f=3 \\ if}} \int_{\gamma_i} \frac{\phi_{3i}(t)dt}{(t-t_0)^2} \left. \right\} \quad (2.14) \\
& = Q_{2c}(t_0) + \lambda \text{Re} \left(q_{\infty} e^{i\beta} + \sum_{i=1}^{k_2} \frac{q_i}{\pi \lambda} \frac{1}{t_0 - b_i} \right) \\
& t_0 \in L_c, l_c, \gamma_c \quad c = \overline{n_1 + 1, k_1 + M + N} \quad m = 1, 2, \text{ or } 3
\end{aligned}$$

όπου

$$Q_{2c}(t_0) = Q_c^+(t_0) + Q_c^-(t_0) \quad (2.15)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στα παραπάνω ολοκληρώματα Cauchy που αναφέρονται στα λεπτά εγκλείσματα δεν υπάρχουν πόλοι στα άκρα τους εν αντιθέσει με αυτά που αναφέρονται στις ρωγμές.

Στην περίπτωση της μελέτης θερμικού πεδίου, τότε οι προαναφερθείσες εξισώσεις παραμένουν ως έχουν με την πίεση των πόρων $p(x, y)$ να αντικαθίσταται από την θερμοκρασία $T(x, y)$, το διάνυσμα ταχύτητας ροής $q(x, y)$ αναφέρεται στην ταχύτητα ροής της θερμότητας και ο συντελεστής διαπερατότητας λ αντικαθίσταται από τον συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας.

Σε αυτή την πρώτη προσπάθεια να επιλυθεί το παραπάνω σύστημα, στα κεφάλαια που ακολουθούν θα επιλυθεί μόνο το πρόβλημα των ρωγμών και η παρουσία λεπτών εγκλεισμάτων και οπών θα αγνοηθεί. Ακόμη, για να καταδειχθεί η επίδραση των ρωγμών θα αγνοηθούν επίσης η ομοιογενής ροή στο πεδίο και η επίδραση των σημειακών πηγών.

2.1.1 Επίλυση για μία ρωγμή

Καταρχήν γίνεται θεώρηση μίας ρωγμής στο οριζόντιο επίπεδο Oxy . Επίσης, θεωρείται ότι επί της ρωγμής δρά είτε γνωστή κατανομή πίεσης είτε γνωστή κατανομή ταχύτητας ροής ρευστού.

Η άγνωστη μιγαδική συνάρτηση δυναμικού $F(z)$ του σταθερής κατάστασης πεδίου της πίεσης των πόρων μπορεί να εκφραστεί από ένα ολοκλήρωμα Cauchy κατά μήκος του συνόρου της ρωγμής L ως εξής:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\phi(t)dt}{t-z} \quad (2.16)$$

όπου $t \in L$ και $\phi(t)$ είναι η άγνωστη πυκνότητα η οποία θεωρείται πραγματική συνάρτηση. Όπως φαίνεται από την (2.16) η συνάρτηση $F(z)$ είναι ολομορφική σε όλο το πεδίο εκτός από το L και για μεγάλα $|z|$ έχει την ακόλουθη συμπεριφορά:

$$F(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad (2.17)$$

(εφόσον η ρωγμή είναι πεπερασμένου μήκους). Αν υποθεθεί ότι η z δεν βρίσκεται στο L η εξίσωση (2.16) μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\phi(t)dt}{t-z} \quad (2.18)$$

Επιπλέον, αν ληφθεί υπόψιν ότι

$$t-z = re^{i\theta} \quad (2.19)$$

όπου $r = |t-z|$ και $\theta = \theta(z, t) = \arg(t-z)$, τότε με λογαρίθμηση και παραγωγήση της (2.19) προκύπτει

$$\frac{dt}{t-z} = d \log r + i d\theta \quad (2.20)$$

Με αντικατάσταση της (2.20) στην (2.18) και κατόπιν διαχωρισμό του αποτελέσματος σε πραγματικό και φανταστικό μέρος λαμβάνεται η κάτωθι εξίσωση

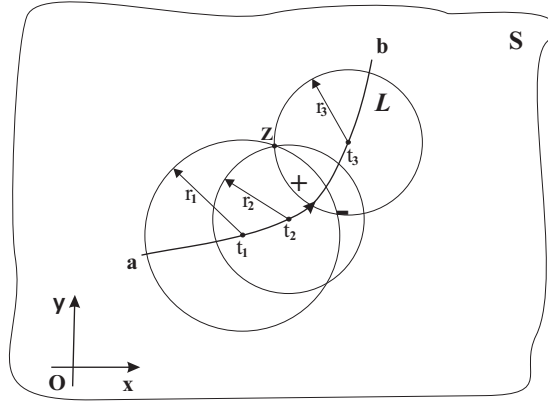
$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \phi(t) d \log r + i \frac{1}{2\pi} \int_L \phi(t) d\theta \quad (2.21)$$

Το πραγματικό μέρος $U(x, y)$ της $F(z)$ αποτελεί ένα τροποποιημένο δυναμικό απλού στρώματος (simple layer) ενώ το φανταστικό κομμάτι $V(x, y)$ αποτελεί ένα δυναμικό διπλού στρώματος (double layer).

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (2.21) και (2.3) οδηγεί στην εξίσωση για τον υπολογισμό της πίεσης των πόρων

$$p(z) = 2\text{Re}(F(z)) = \frac{1}{\pi} \int_L \phi(t) d \log r = \frac{1}{\pi} \int_L \phi(t) \frac{dr}{r} \quad (2.22)$$

Η φυσική ερμηνεία της εξίσωσης (2.22) είναι ότι η πίεση των πόρων σε τυχαίο σημείο z του επιπέδου είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασής του από κάθε



Σχήμα 2.2: Καμπυλόγραμμη ρωγμή σε άπειρο επίπεδο. Συνεισφορά του κάθε σημείου t επί του συνόρου L στην πίεση των πόρων τυχαίου σημείου z του επιπέδου.

σημείο t του L πολλαπλασιαζόμενης με κατάλληλο βάρος το οποίο εκφράζεται από την συνάρτηση πυκνότητας $\phi(t)$ (Σχ. 2.2).

Εν συνεχεία, ο συνδυασμός των εξισώσεων (2.4) και (2.22) οδηγεί στην εξίσωση για τον υπολογισμό του διανύσματος της ταχύτητας ροής του ρευστού προς την x και y κατεύθυνση σε τυχαίο σημείο z του επιπέδου

$$q(z) = \frac{\lambda}{\pi} \int_L \phi(t) \frac{\cos \alpha}{r^2} dr + i \frac{\lambda}{\pi} \int_L \phi(t) \frac{\sin \alpha}{r^2} dr \quad (2.23)$$

όπου α είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος $\vec{tz}$ και της θετικής κατεύθυνσης του άξονα Ox μετρούμενη αριστερόστροφα.

2.1.2 Επίλυση για σύστημα ρωγμών

Το επόμενο βήμα μετά την διατύπωση των εξισώσεων για τον υπολογισμό της πίεσης των πόρων και του διανύσματος της ταχύτητας ροής του ρευστού για μία ρωγμή είναι η επέκταση των εξισώσεων αυτών σε σύστημα μη αλληλοτενόμενων ρωγμών²

² Η λύση μπορεί να εφαρμοστεί και σε σύστημα αλληλοτενόμενων ρωγμών με την προϋπόθεση ότι στα σημεία τομής οι συνοριακές συνθήκες επί των ρωγμών θα πρέπει να είναι συμβατές μεταξύ τους

Θεωρείται, λοιπόν, επίπεδο το οποίο περιέχει k_1 μη αλληλοτεμνόμενες ρωγμές. Τότε, σε ένα σημείο z του επιπέδου Oxy το οποίο δεν ανήκει στο L_i (όπου $i = 1, 2, \dots, k_1$) η πίεση των πόρων θα είναι η συνισταμένη της επίδρασης όλων των ρωγμών ως εξής

$$p(z) = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{\pi} \int_{L_i} \phi_i(t) \frac{dr}{r_i} \quad (2.24)$$

όπου $\phi_i(t)$, r_i είναι η πυκνότητα και το μέτρο $|t-z|$ της i -οστής ρωγμής αντίστοιχα.

Κατά αναλογία με τα παραπάνω, προκύπτει η λύση για την ροή του ρευστού

$$q(z) = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\lambda}{\pi} \int_{L_i} \phi_i(t) \frac{\cos \alpha_i}{r_i^2} dr + i \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\lambda}{\pi} \int_{L_i} \phi_i(t) \frac{\sin \alpha_i}{r_i^2} dr \quad (2.25)$$

όπου α_i είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος $\vec{tz}$ της i -οστής ρωγμής και της θετικής κατεύθυνσης του Ox άξονα.

2.2 Τάσεις και παραμορφώσεις

Για την περίπτωση του ισότροπου, γραμμικά ελαστικού υλικού μπορεί να αποδειχθεί ότι οι τάσεις (που ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας και συμβιβαστού των τροπών) μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει δύο μιγαδικών αναλυτικών συναρτήσεων $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$ της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$ ως εξής ([14], [15])

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] = 4\text{Re}(\Phi(z)) \\ (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \end{aligned} \quad (2.26)$$

όπου σ_{xx} , σ_{yy} οι ορθές τάσεις κατά τους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα και τ_{xy} οι διατμητικές τάσεις.

Επίσης, ο καταστατικός νόμος του Hooke για την περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης δίδεται από τις σχέσεις [21]

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}((1 - \nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1 + \nu)\sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}((1 - \nu^2)\sigma_{yy} - \nu(1 + \nu)\sigma_{xx}) \\ \epsilon_{zz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.27)$$

όπου ϵ_{xx} και ϵ_{yy} και ϵ_{zz} είναι οι ορθές τροπές κατά την x , y και z κατεύθυνση, αντίστοιχα, γ_{xy} είναι η μηχανοτεχνική διατμητική τροπή (engineering shear strain) και τα E , ν συμβολίζουν το μέτρο ελαστικότητας και το λόγο του Poisson, αντίστοιχα. Επίσης, η εκτός του επιπέδου ορθή τάση σ_{zz} αποδίδεται από την σχέση

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.28)$$

Ανάλογα με την φύση των συνθηκών φόρτισης κατά μήκος των συνόρων l_i , L_i και γ_i , (Σχ. 2.1) διατυπώνονται οι ακόλουθες μηχανικές συνοριακές συνθήκες [23]

- Συνοριακές συνθήκες πρώτου είδους ή συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet στα σύνορα όπου δίδονται οι κάθετες και εφαπτομενικές μετατοπίσεις

$$\begin{aligned} \frac{E}{1+\nu} \left(-\frac{du_i^\pm(t_0)}{dt_0} + i \frac{dv_i^\pm(t_0)}{dt_0} \right) &= \Phi^\pm(t_0) - (3-4\nu)\overline{\Phi^\pm(t_0)} \\ &+ \frac{dt_0}{dt_0} \left(\frac{d\Phi^\pm(t_0)}{dt_0} + \Psi^\pm(t_0) \right) \quad (2.29) \\ i &= \overline{1, n_1} \end{aligned}$$

όπου t_0 είναι η μιγαδική συντεταγμένη ενός σημείου πάνω στις καμπύλες γ_i , l_i ή L_i , n_1 είναι ο αριθμός των καμπυλών πάνω στις οποίες εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet και u_i , v_i είναι η ορθή και εφαπτομενική μετατόπιση, αντίστοιχα. Επίσης, το θετικό και αρνητικό πρόσημο που εμφανίζονται ως εκθέτες υποδηλώνουν τις οριακές τιμές της αντίστοιχης συνάρτησης όταν το σύνορο προσεγγίζεται από την ‘+’ ή ‘-’ πλευρά, αντίστοιχα (Σχ. 2.1).

- Συνοριακές συνθήκες δεύτερου είδους ή συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann στα σύνορα όπου δίδονται οι ορθές και εφαπτομενικές τάσεις

$$\begin{aligned} \sigma_n^\pm(t_0) - i\sigma_t^\pm(t_0) &= \Phi^\pm(t_0) - \overline{\Phi^\pm(t_0)} \\ &+ \frac{dt_0}{dt_0} \left(\frac{d\Phi^\pm(t_0)}{dt_0} + \Psi^\pm(t_0) \right) \quad (2.30) \\ i &= \overline{n_1 + 1, k_1 + M + N} \end{aligned}$$

όπου σ_n και σ_t είναι η ορθή και εφαπτομενική τάση επί του συνόρου, αντίστοιχα.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στις παραπάνω συνοριακές συνθήκες (2.29) και (2.30) η φόρτιση στο άπειρο καθώς και οι σημειακές φορτίσεις εμπεριέχονται μέσα στα μιγαδικά δυναμικά $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$.

Οι σχέσεις (2.26) και (2.27) σε συνδυασμό με τις μηχανικές συνοριακές συνθήκες (2.29) και (2.30) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των άγνωστων αναλυτικών συναρτήσεων $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$. Για την επίλυση του ανωτέρω προβλήματος έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές ([23] μεταξύ πολλών άλλων) και για αυτό το λόγο η επίλυση του προβλήματος δεν θα αναπτυχθεί στην παρούσα εργασία. Θα πρέπει μόνο να αναφερθεί ότι η συνήθης μέθοδος που ακολουθείται για την επίλυση προβλημάτων τέτοιας μορφής είναι η διατύπωση των μιγαδικών δυναμικών με την μορφή ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων όπου στα σύνορα του εκάστοτε προβλήματος αντιστοιχούνται ιδιόμορφα ολοκληρώματα τύπου Cauchy.

2.2.1 Επίδραση της πίεσης των πόρων στον υπολογισμό των τάσεων και παραμορφώσεων

Οι σχέσεις (2.26) ισχύουν στην περίπτωση που το ρηγματωμένο μέσο βρίσκεται υπό την επίδραση μόνο μηχανικών φορτίων. Αν το σώμα, εκτός από μηχανικές φορτίσεις, βρίσκεται και υπό την επίδραση ροής ρευστού τότε για τον υπολογισμό των τάσεων ισχύουν οι σχέσεις του Terzaghi ([19], [20])

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma'_{xx} + p \\ \sigma_{yy} &= \sigma'_{yy} + p\end{aligned}\quad (2.31)$$

όπου έχει γίνει παραδοχή ότι: α) οι συρτικές δυνάμεις του ρευστού είναι πολύ μικρές και β) οι κόκκοι του υλικού είναι πρακτικά ασυμπίεστοι. Επίσης, σ_{xx} και σ_{yy} συμβολίζουν τις ολικές ορθές τάσεις που ασκούνται στο σώμα οι οποίες αποτελούν η κάθε μία το άθροισμα δύο επιμέρους τάσεων. Η μία εκ των δύο αυτών τάσεων είναι η πίεση των πόρων p η οποία ασκείται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις ενώ η δεύτερη (σ'_{xx} και σ'_{yy}) καλείται *ενεργή τάση* και αναφέρεται στις τάσεις που ασκούνται στον σκελετό του πορώδους υλικού.

Με συνδυασμό των σχέσεων (2.31) και (2.26) προκύπτουν οι εξισώσεις για τον υπολογισμό των ολικών τάσεων ως συνάρτηση των μιγαδικών δυναμικών

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + 2p(z) \\ &= 4\text{Re}(\Phi(z)) + 2p(z) \\ (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + 2i\tau_{xy} &= 2[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]\end{aligned}\quad (2.32)$$

Επίσης, από το νόμο του Hooke για την περίπτωση της επίπεδης παραμορφώσεως και τις σχέσεις (2.31) προκύπτουν οι σχέσεις για τον υπολογισμό των τροπών

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}((1-\nu^2)\sigma'_{xx} - \nu(1+\nu)\sigma'_{yy}) + \frac{(1-2\nu)(\nu+1)}{E}p \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}((1-\nu^2)\sigma'_{yy} - \nu(1+\nu)\sigma'_{xx}) + \frac{(1-2\nu)(\nu+1)}{E}p \\
 \epsilon_{zz} &= 0 \\
 \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}
 \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.2.2 Επίδραση της θερμοκρασίας στον υπολογισμό των τάσεων και παραμορφώσεων

Στην περίπτωση που το υλικό, εκτός από μηχανικές φορτίσεις, βρίσκεται και υπό την επίδραση ροής θερμότητας, τότε για τον υπολογισμό των τάσεων λαμβάνεται υπόψιν και η τάση που προκαλείται λόγω θερμοκρασίας με βάση τον νόμο Duhamel-Neumann ως εξής

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + 2a\frac{E}{1-2\nu}T \\
 &= 4\text{Re}(\Phi(z)) + 2a\frac{E}{1-2\nu}T \\
 (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]
 \end{aligned} \quad (2.34)$$

όπου το a εκφράζει τον θερμικό συντελεστή γραμμικής διαστολής και T είναι η θερμοκρασία. Επίσης, από τον νόμο του Hooke προκύπτουν οι εκφράσεις των τροπών για την περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}((1-\nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1+\nu)\sigma_{yy}) + aT \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}((1-\nu^2)\sigma_{yy} - \nu(1+\nu)\sigma_{xx}) + aT \\
 \epsilon_{zz} &= 0 \\
 \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}
 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (2.12)–(2.14) σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (2.26)–(2.35) δίνει την δυνατότητα περιγραφής του εντατικού πεδίου και του πεδίου της

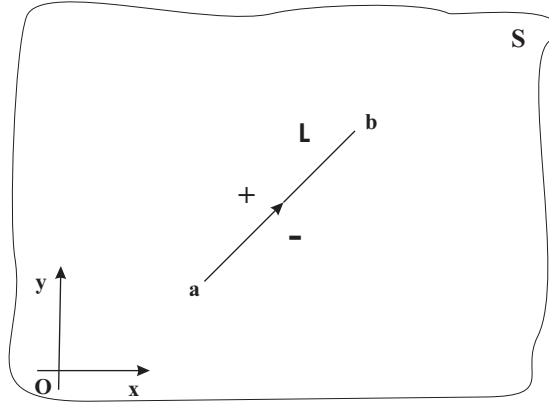
πίεσης των πόρων (ή του θερμικού πεδίου) του εξεταζόμενου άπειρου ισότροπου σώματος.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων της πίεσης των πόρων

Όπως προαναφέρθηκε, η παρούσα εργασία θα επικεντρωθεί στον υπολογισμό της πίεσης των πόρων καθώς οι εξισώσεις που διέπουν την ροή θερμότητας είναι της ίδιας ακριβώς μορφής με αυτές της πίεσης. Η μόνη διαφορά έγκειται στον συντελεστή διάχυσης όπου για την μεν πίεση είναι ο συντελεστής διαπερατότητας ενώ για την δε θερμοκρασία ο συντελεστής θερμοαγωγιμότητας. Επίσης, ο υπολογισμός των τάσεων και μετατοπίσεων έχει γίνει από άλλους ερευνητές (π.χ. [23]) και για τον λόγο αυτό δεν θα παρουσιαστεί αναλυτικά εδώ.

Για τον υπολογισμό του πεδίου της πίεσης των πόρων και του πεδίου της ταχύτητας ροής του ρευστού θα πρέπει να υπολογισθεί η άγνωστη πυκνότητα $\phi_i(t)$ (εξισώσεις 2.24 και 2.25) έτσι ώστε η λύση να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες επί των ρωγμών. Το πρόβλημα είναι γνωστό ως πρόβλημα αντιστροφής των ολοκληρωμάτων Cauchy σε τόξα [14]. Αν και για απλές περιπτώσεις είναι δυνατόν να αντιστραφεί το ολοκλήρωμα Cauchy σε κλειστή μορφή, εν γένει για πιο πολύπλοκα προβλήματα η διαδικασία αντιστροφής είναι δύσκολο ή άλυτο πρόβλημα. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μία αριθμητική μέθοδος η οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των άγνωστων πυκνοτήτων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμη και για τις πιο πολύπλοκες περιπτώσεις σύστηματος μή αλληλοτενόμενων ρωγμών τυχαίου σχήματος. Η προτεινόμενη μεθοδολογία παρουσιάζεται ιεραρχικά ξεκινώντας με τις απλούστερες περιπτώσεις και καταλήγει στις πιο πολύπλοκες.



Σχήμα 3.1: Απλή ευθύγραμμη ρωγμή και σύστημα συντεταγμένων.

3.1 Μια Ευθύγραμμη ρωγμή

3.1.1 Συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet

Καταρχήν θεωρείται ευθύγραμμη ρωγμή (Σχ. 3.1). Θεωρείται, επίσης, ότι με κάποιο μηχανισμό η πίεση μέσα στη ρωγμή αποκτά δεδομένη κατανομή η οποία παραμένει σταθερή στο χρόνο. Σε ικανώς μεγάλο χρονικό διάστημα ώστε να επιτευχθεί ροή σταθερής κατάστασης, σύμφωνα με την (2.22) ένα σημείο t_0 που ανήκει στη ρωγμή L ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$p(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_L \phi(t) \frac{dr}{|t - t_0|} \quad (3.1)$$

στην οποία $p(t_0)$ δηλώνει την συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet στο σημείο t_0 του L . Η ολοκληρωτική εξίσωση (3.1) είναι ιδιόμορφη καθώς για $t = t_0$ η ποσότητα $1/|t - t_0|$ απειρίζεται. Για τον υπολογισμό της άγνωστης πυκνότητας $\phi(t)$ θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss–Chebyshev για ιδιόμορφα ολοκληρώματα [7]. Η συγκεκριμένη μέθοδος παρουσιάζει υψηλή ακρίβεια κατά μήκος του συνόρου της ρωγμής αλλά δεν δίνει εκτιμήσεις στα όρια του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Τα άκρα a, b της ρωγμής αποτελούν σημεία γεωμετρικής ιδιομορφίας. Η φυσική του προβλήματος δίνει αρκετές πληροφορίες σχετικά με την συμπεριφορά της

άγνωστης πυκνότητας $\phi(t)$ στα άκρα της ρωγμής. Από φυσικής σκοπιάς, λοιπόν, αν η άγνωστη πυκνότητα είναι περιέχεται σε συνάρτηση δυναμικού (π.χ. θερμοκρασία, πίεση πόρων, μετατοπίσεις) τότε θα πρέπει να είναι φραγμένη στα ιδιόμορφα σημεία a, b . Μπορεί να αποδειχθεί ότι η θεμελιώδης συνάρτηση της (3.1) η οποία χαρακτηρίζει την συμπεριφορά της $\phi(t)$ στα ιδιόμορφα σημεία a και b δίδεται από την σχέση ([6] και [14])

$$w(t) = \sqrt{(t-a)(b-t)} \quad (3.2)$$

εφόσον η $\phi(t)$ είναι φραγμένη σε αυτά τα σημεία. Εφαρμόζοντας αριθμητική ολοκλήρωση στην (3.1) και λαμβάνοντας υπόψιν την (3.2) προκύπτει το κάτωθι σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{(t-a)(b-t)} \frac{\hat{\phi}(t)}{|t-t_0|} dt &= p(t_0) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}(t_j)}{|t_j-t_{0r}|} &= p(t_{0r}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

όπου έχει τεθεί $\phi(t) = w(t)\hat{\phi}(t)$, $\hat{\phi}(t)$ είναι η νέα άγνωστη συνάρτηση, n είναι ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης (integration points) και r είναι ο αριθμός των ταξιθετικών σημείων (collocation points)¹.

Τα βάρη της αριθμητικής ολοκλήρωσης δίδονται από την σχέση

$$w_j = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) \quad (3.4)$$

Τα σημεία ολοκλήρωσης t_j και τα ταξιθετικά σημεία t_{0r} τα οποία αναφέρονται στο διάστημα $[a, b]$ μπορούν να βρεθούν με γραμμικό μετασχηματισμό των αντίστοιχων σημείων που αναφέρονται στο διάστημα $[-1, 1]$ όπως ακολουθεί

$$t_j = \frac{b-a}{2} \xi_j + \frac{b+a}{2} \quad (3.5)$$

$$t_{0r} = \frac{b-a}{2} \eta_r + \frac{b+a}{2} \quad (3.6)$$

Σύμφωνα με τους Erdogan και Gupta [7] τα σημεία ολοκλήρωσης ξ_j είναι οι ρίζες των πολωνύμων Chebyshev δεύτερου είδους και τάξης n

¹ Τα σημεία ταξιθεσίας βρίσκονται πολύ κοντά στα σημεία ολοκλήρωσης χωρίς όμως να ταυτίζονται με αυτά.

$$\xi_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

ενώ τα σημεία ταξιθεσίας η_r είναι οι ρίζες των πολωνύμων Chebyshev πρώτου είδους και τάξης $(n+1)$

$$\eta_r = \cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{2(n+1)}\right), \quad r = 1, 2, \dots, n+1 \quad (3.8)$$

Η εξίσωση (3.3) αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα $(n+1)$ εξισώσεων με n άγνωστους, δηλαδή τις πυκνότητες $\hat{\phi}(t_j)$, $(j = 1, 2, \dots, n)$. Το σύστημα, λοιπόν, είναι υπερ-καθορισμένο αλλά στην πράξη επιλέγεται το n άρτιος αριθμός και το σημείο που αντιστοιχεί στο $r = \frac{n}{2} + 1$ δεν λαμβάνεται υπόψιν [7]. Μετά την επίλυση του (3.3), η πίεση των πόρων σε ολόκληρο το πεδίο μπορεί να υπολογιστεί ως εξής

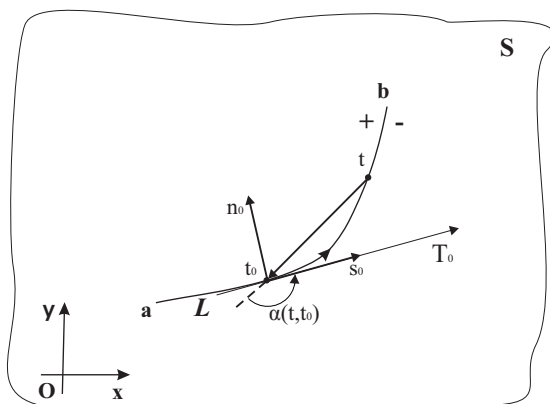
$$p(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}(t_j)}{|t_j - z|} \quad (3.9)$$

όπου z τυχαίο σημείο του επιπέδου. Η εξίσωση για τον υπολογισμό της ροής του ρευστού σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου αναπτύσσεται στην περίπτωση της συνοριακής συνθήκης τύπου Neumann που ακολουθεί.

3.1.2 Συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann

Όμοια με την προηγούμενη παράγραφο, θεωρείται τώρα ότι με κάποιο μηχανισμό η ροή του ρευστού μέσα στην ρωγμή αποκτά δεδομένη κατανομή και παραμένει σταθερή στο χρόνο. Με σκοπό την διαμόρφωση του γραμμικού συστήματος εξισώσεων για τον υπολογισμό της άγνωστης πυκνότητας, η εξίσωση (2.23) μετασχηματίζεται σε μια πιο εξηγητική μορφή. Η εξίσωση (2.23), θα διατυπωθεί ξανά για τοπικό σύστημα συντεταγμένων (s_0, n_0) το οποίο αντιστοιχεί σε σημείο t_0 που ανήκει στην ρωγμή, όπου s_0, n_0 είναι το εφαπτόμενο και το κάθετο διάνυσμα στο σημείο t_0 αντίστοιχα (Σχ. 3.2). Με επανα-υπολογισμό της βαθμίδας της πίεσης (δες (2.4)) ως προς το τοπικό σύστημα στο t_0 προκύπτει η μετασχηματισμένη μορφή της (2.23)

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_s(t_0) + i q_n(t_0) \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \int_L \phi(t) \frac{\cos \alpha(t, t_0)}{r^2} dr + i \frac{\lambda}{\pi} \int_L \phi(t) \frac{\sin \alpha(t, t_0)}{r^2} dr \end{aligned} \quad (3.10)$$



Σχήμα 3.2: Καμπυλόγραμμη ρωγμή στο επίπεδο και τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο t_0

όπου $q_s(t_0)$, $q_n(t_0)$ είναι η εφαπτόμενη και η κάθετη ροή αντίστοιχα και $\alpha(t, t_0)$ είναι η γωνία που περικλύεται από το διάνυσμα $\vec{t}t_0$ και την θετική κατεύθυνση της εφαπτόμενης² T_0 στο σημείο t_0 (Σχ. 3.2). Το πραγματικό κομμάτι της εξίσωσης (3.10) μπορεί να προσδιοριστεί και υπολογισθεί και δεν εξαρτάται από το αν το συνοριακό σημείο t_0 προσεγγίζεται από την πάνω (+) ή την κάτω (-) πλευρά. Αντιθέτως, ο υπολογισμός του φανταστικού κομματιού εξαρτάται από το αν το σημείο t_0 προσεγγίζεται από την πάνω (+) ή την κάτω (-) πλευρά (καθώς η κάθετη συνιστώσα της ροής έχει αντίθετο πρόσημο ανάλογα με το αν η ρωγμή προσεγγίζεται από την πάνω ή κάτω πλευρά). Οι Hui και Mukherjee [11] απέδειξαν ότι η τιμή του φανταστικού κομματιού της (3.10) δεν είναι μηδέν πάνω στην ρωγμή και η συνάρτηση της πυκνότητας μπορεί να υπολογιστεί με χρήση ενός εκτεταμένου θεωρήματος του Plemelj για υπερ-ιδιόμορφα ολοκληρώματα που προτείνουν. Παρόλα αυτά, η μέθοδος αυτή υπολογίζει την άγνωστη πυκνότητα στο t_0 (στο οποίο θα αντιστοιχηθούν τα σημεία ταξινθεσίας), οπότε απαιτείται παρεμβολή για τον προσδιορισμό της πυκνότητας στο t . Αυτό σημαίνει επιπρόσθετο σφάλμα στους υπολογισμούς καθώς επίσης και διαμόρφωση πιο πολύπλοκου συστήματος εξισώσεων.

Όπως είναι ξεκάθαρο από την (3.10), αρκεί να καθοριστεί μόνο μία από τις δύο

²Ως θετική κατεύθυνση της εφαπτομένης ορίζεται το τμήμα με την ίδια φορά με την σύμβαση φοράς της ρωγμής (βελάκι πάνω στην ρωγμή (Σχ. 3.2)).

συνιστώσες της ταχύτητας της ροής πάνω στο σύνορο για τον υπολογισμό της άγνωστης πυκνότητας $\phi(t)$. Εξαιτίας αυτού καθώς επίσης και λόγω της προηγούμενης ανάλυσης για το φανταστικό κομμάτι της (3.10), θα χρησιμοποιηθεί μόνο η εφαπτομενική συνιστώσα ταχύτητας της ροής του ρευστού για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας.

Η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας ροής του ρευστού $q_s(t_0)$ για ένα σημείο t_0 του L δίδεται από την σχέση

$$q_s(t_0) = \frac{\lambda}{\pi} \int_L \phi(t) \frac{\cos \alpha(t, t_0)}{r^2} dr \quad (3.11)$$

Από την εφαρμογή του αριθμητικού σχήματος ολοκλήρωσης (3.3) στην (3.11) προκύπτει

$$\frac{\lambda}{\pi} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}(t_j) \cos \alpha(t_j, t_{0r})}{|t_j - t_{0r}|^2} = q_s(t_{0r}) \quad (3.12)$$

όπου τα βάρη w_j καθώς επίσης και τα σημεία t_j , t_{0r} υπολογίζονται όμοια με την περίπτωση Dirichlet.

Για να είναι το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (3.12) επιλύσιμο, δηλαδή η λύση να παράγει ροές που έχουν φυσική έννοια, μία επιπλέον συνθήκη θα πρέπει να ικανοποιείται. Η συνθήκη αυτή ονομάζεται *Συνθήκη Επιλυσιμότητας* (Condition of Solubility) [14] και καθορίζει ότι το ολοκλήρωμα της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας ροής του ρευστού ως προς το s_0 πρέπει να είναι πάντα μηδέν

$$\int_L q_s(t_0) ds_0 = 0 \Rightarrow \sum_{r=1}^{n+1} q_s(t_{0r}) = 0 \quad (3.13)$$

Η συνθήκη αυτή αναφέρετε μόνο στην κατανομή που θα πρέπει να έχει εφαπτομενική ροή που εφαρμόζεται πάνω στην ρωγμή (συνοριακή συνθήκη) και δεν είναι τμήμα του γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Παρόλα αυτά η εξίσωση (3.13) αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για την επίλυσιμότητα του προβλήματος.

Μετά την επίλυση του (3.12), οι συνιστώσες της ταχύτητας της ροής του ρευστού στην x και y κατεύθυνση σε τυχαίο σημείο z του επιπέδου μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή ανάλογης αριθμητικής ολοκλήρωσης στην (2.23)

$$\begin{aligned} q(z) &= q_x(z) + i q_y(z) \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}(t_j) \cos \alpha(t_j, z)}{|t_j - z|^2} + i \frac{\lambda}{\pi} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}(t_j) \sin \alpha(t_j, z)}{|t_j - z|^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Σημειώνεται ότι τώρα το α είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος $\vec{t_z}$ και της θετικής κατεύθυνσης του άξονα Ox .

3.2 Καμπυλόγραμμη ρωγμή

Οι μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss–Chebyshev που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε καμπυλόγραμμες ρωγμές τυχαίου σχήματος. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι σε ειδικές περιπτώσεις όπου η ρωγμή L μπορεί να περιγραφεί από γνωστή εξίσωση $z = z(s)$, όπου s πραγματική μεταβλητή κατά μήκος του L (π.χ. ρωγμή που αποτελεί τμήμα κύκλου ή έλλειψης κ.λ.π.), τότε με κατάλληλο μετασχηματισμό των (3.5) και (3.6) είναι δυνατόν να παραχθεί γραμμικό σύστημα εξισώσεων για τον υπολογισμό της άγνωστης πυκνότητας. Παρόλαυτά, με σκοπό την θεώρηση της γενικής περίπτωσης ρωγμής τυχαίου σχήματος, αναπτύχθηκε κατάλληλη μεθοδολογία για τον υπολογισμό των σημείων ολοκλήρωσης και ταξιθεσίας. Η μεθοδολογία βασίζεται στην προσέγγιση του σχήματος της ρωγμής από ικανό αριθμό ευθύγραμμων τμημάτων. Ο αλγόριθμος υπολογισμού των συντεταγμένων των σημείων ολοκλήρωσης και ταξιθεσίας είναι ο ίδιος και για τις δύο περιπτώσεις οπότε θα αναπτυχθεί η μεθοδολογία μόνο για τα σημεία ολοκλήρωσης t_j . Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για υψηλότερης τάξης προσεγγίσεις του σχήματος της ρωγμής (π.χ. splines), αλλά με σκοπό να διατηρηθεί η απλότητα της παρουσίασης θα αναπτυχθεί η μέθοδος μόνο για την γραμμική προσέγγιση.

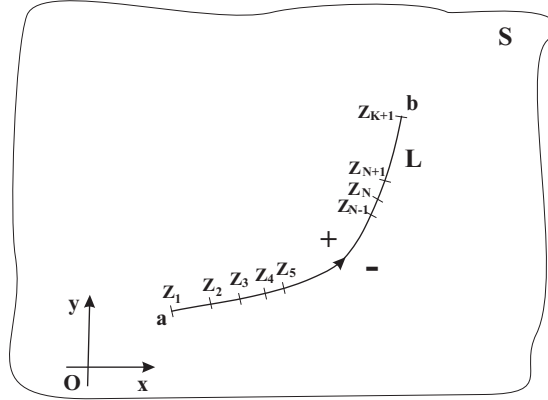
Θεωρούνται K ευθύγραμμα τμήματα τα οποία προσεγγίζουν μια καμπυλόγραμμη ρωγμή (Σχ. 3.3). Όλα αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν συνολικά $(K + 1)$ άκρα³ ενώ το συνολικό μήκος της ρωγμής είναι το άθροισμα των επιμέρους μηκών τους

$$D = \sum_{N=1}^K \sqrt{(y_{N+1} - y_N)^2 + (x_{N+1} - x_N)^2} \quad (3.15)$$

όπου D είναι το συνολικό μήκος και x_N , y_N είναι οι συντεταγμένες του N -οστού άκρου.

Στην συνέχεια, η αρχή ενός νέου συστήματος συντεταγμένων τοποθετείται στο ένα όριο του διαστήματος $[-1, 1]$, για παράδειγμα το δεξιό όριο $(+1)$. Το ποσοστό του ολικού μήκους του διαστήματος $[-1, 1]$ (μετρούμενο από το δεξιό όριο) στο οποίο βρίσκεται κάθε σημείο ολοκλήρωσης $\xi_{j(perc)}$, μπορεί να υπολογιστεί με βάση την παρακάτω σχέση

³ Δεδομένου ότι ανά δύο τα εσωτερικά άκρα συμπίπτουν



Σχήμα 3.3: Καμπυλόγραμμη ρωγμή διακριτοποιημένη σε K ευθύγραμμα τμήματα

$$\xi_{j(perc)} = \frac{1 - \xi_j}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

όπου τα ξ_j υπολογίζονται από την σχέση (3.7). Αν τοποθετηθεί η αρχή ενός άλλου τοπικού συστήματος συντεταγμένων στο ένα άκρο της καμπυλόγραμμης ρωγμής (για παράδειγμα το άκρο a), είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι αποστάσεις (μετρούμενες από το άκρο a , Σχ. 3.3) πάνω στην ρωγμή L στις οποίες πρέπει να τοποθετηθούν τα σημεία t_j . Αυτό επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας το συνολικό μήκος D της ρωγμής με τα ποσοστά $\xi_{j(perc)}$

$$t_{j(dist)} = \xi_{j(perc)} D, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

Εν συνεχεία, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων ολοκλήρωσης μπορεί να υπολογιστεί με βάση την παρακάτω σχέση

$$\Delta t_j = \begin{cases} t_{1(dist)} & \text{αν } j = 1 \\ t_{j(dist)} - t_{j-1(dist)} & \text{αν } j > 1 \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.18)$$

Επιπρόσθετα, το αθροιστικό διάνυσμα των μηκών των γραμμικών τμημάτων, τα οποία προσεγγίζουν την ρωγμή, έχει την ακόλουθη μορφή

$$D_{(cum)} = \left[D_1, D_1 + D_2, \dots, \sum_{N=1}^K D_N \right] \quad (3.19)$$

όπου D_N είναι το μήκος του N -οστού ευθύγραμμου τμήματος.

Εφόσον υπάρχουν n σημεία t_j ο αλγόριθμος θα πρέπει να επαναληφθεί n φορές. Επίσης, μία μεταβλητή, η οποία θα ονομαστεί *Μετρητής Μήκους* (DM), πρέπει να υπολογίζεται σε κάθε κύκλο και η αρχική του τιμή ορίζεται ίση με μηδέν. Επιπλέον, ορίζεται ένα αρχικό σημείο βάσης το οποίο σε αυτή την περίπτωση θα είναι το άκρο a της ρωγμής L (θα πρέπει να είναι το ίδιο με την αρχή του τοπικού συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιήθηκε στην εξίσωση (3.17)) με συντεταγμένες x_a , y_a . Τέλος, ορίζεται ως $D_{N(cum)}$ το N -οστό στοιχείο στο αθροιστικό διάνυσμα των ευθύγραμμων τμημάτων $D_{(cum)}$ και η αρχική τιμή του N ορίζεται ίση με 1. Οι αρχικές συνθήκες, λοιπόν, έχουν ως εξής

$$\begin{aligned} DM &= 0 \\ x_{base} &= x_a \\ y_{base} &= y_a \\ N &= 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Αν το άθροισμα του DM με το τρέχον Δt_j είναι μικρότερο της τρέχουσας τιμής $D_{N(cum)}$, τότε εκτελούνται τα επόμενα βήματα:

1. Το τρέχον t_j υπολογίζεται από την εξίσωση

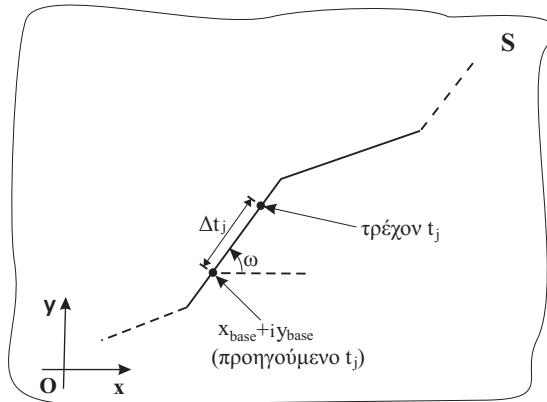
$$t_j = \Delta t_j e^{i\omega} + (x_{base} + iy_{base}) \quad (3.21)$$

στην οποία ω είναι η γωνία μεταξύ του Ox άξονα και του τρέχοντος N -οστού γραμμικού τμήματος της ρωγμής μετρούμενο κατά την θετική κατεύθυνση (αριστερόστροφα) (Σχ. 3.4(α')).

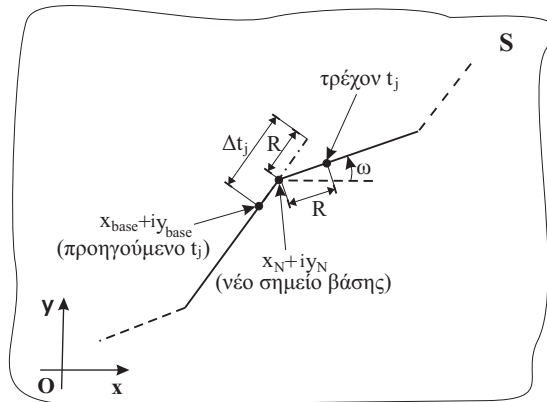
2. Το νέο DM είναι το άθροισμα της προηγούμενης τιμής του DM και της τρέχουσας τιμής του Δt_j .
3. Το νέο σημείο βάσης είναι η τρέχουσα τιμή του t_j .

Ακολουθεί η επιστροφή στην αρχή του αλγορίθμου για την εκτέλεση του επόμενου κύκλου. Το Σχήμα (3.4(α')) αναπαριστά γραφικά την διαδικασία που περιγράφηκε σε αυτήν την περίπτωση.

Από την άλλη, αν το άθροισμα του DM με το τρέχον Δt_j είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το τρέχον $D_{N(cum)}$ τότε ακολουθούνται τα κάτωθι βήματα:



(α')



(β')

Σχήμα 3.4: Υπολογισμός των σημείων ολοκλήρωσης κατά μήκος ρωγμής τυχαίου σχήματος. (α') Περίπτωση 1η: Το σημείο ολοκλήρωσης που υπολογίζεται πρέπει να τοποθετηθεί στο τρέχον ευθύγραμμο τμήμα. (β') Περίπτωση 2η: Το σημείο ολοκλήρωσης που υπολογίζεται πρέπει να τοποθετηθεί στο επόμενο ευθύγραμμο τμήμα.

1. Μια νέα μεταβλητή η οποία θα ονομαστεί Υπόλοιπο (R) υπολογίζεται ως εξής

$$R = DM + \Delta t_j - D_{N(cum)} \quad (3.22)$$

2. Η τιμή του N αυξάνεται κατά 1

$$N = N + 1 \quad (3.23)$$

3. Το νέο σημείο βάσης θα είναι

$$\begin{aligned} x_{base} &= x_N \\ y_{base} &= y_N \end{aligned} \quad (3.24)$$

όπου x_N , y_N υποδηλώνουν τις συντεταγμένες του N -οστού άκρου των ευθύγραμμων τμημάτων της ρωγμής L

4. Αν το R είναι μικρότερο από το μήκος του τρέχοντος μήκους του N -οστού ευθύγραμμου τμήματος της καμπύλης τότε το τρέχον t_j υπολογίζεται από την ακόλουθη έκφραση

$$t_j = Re^{i\omega} + (x_{base} + iy_{base}) \quad (3.25)$$

όπου ω είναι η γωνία μεταξύ του άξονα Ox και του τρέχοντος ευθύγραμμου τμήματος της ρωγμής (Σχ. 3.4(β'))).

Αντίθετα, αν το R είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το τρέχον μήκος του N -οστού ευθύγραμμου τμήματος της καμπύλης τότε το R υπολογίζεται εκ νέου ως εξής

$$R = R - \sqrt{(y_{N+1} - y_N)^2 + (x_{N+1} - x_N)^2} \quad (3.26)$$

και ο αλγόριθμός γυρίζει πάλι πίσω στο βήμα (2) της 2ης περίπτωσης. Το βήμα αυτό εξασφαλίζει ότι ο αλγόριθμος ακολουθεί την καμπύλη σε οποιαδήποτε πιθανή περίπτωση.

5. Το νέο DM θα είναι το άθροισμα του παλαιού DM με το τρέχον Δt_j .

6. Το νέο σημείο βάσης θα είναι η τρέχουσα υπολογισμένη τιμή του t_j .

Ακολουθεί η επιστροφή στην αρχή του αλγορίθμου για την εκτέλεση του επόμενου κύκλου. Το Σχήμα (3.4(β')) αναπαριστά γραφικά την διαδικασία που περιγράφηκε σε αυτήν την περίπτωση.

Ο παραπάνω αλγόριθμος εκτελεί n κύκλους έως ότου υπολογιστούν όλα τα σημεία t_j . Μετά τον υπολογισμό των σημείων ολοκλήρωσης και των σημείων ταξιδεσίας, η πίεση των πόρων και το διάνυσμα της ταχύτητας ροής του ρευστού μπορεί να υπολογιστεί όπως αναπτύχθηκε στις προηγούμενες παραγράφους.

3.3 Σύστημα καμπυλόγραμμων ρωγμών

Θεωρείται πολλαπλά διαρρηγμένο επίπεδο το οποίο φέρει k_1 μη αλληλοτεμνόμενες ρωγμές. Επίσης, θεωρείται ότι στις πρώτες n_1 ρωγμές εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet ενώ στις υπόλοιπες $(k_1 - n_1)$ ρωγμές εφαρμόζονται συνθήκες τύπου Neumann.

Ο συνδυασμός των ολοκληρωτικών εξισώσεων (2.24) και (3.1) οδηγεί στην ολοκληρωτική εξίσωση για ένα σημείο t_0 που ανήκει σε ρωγμή επί της οποίας εφαρμόζονται συνθήκες τύπου Dirichlet

$$p(t_{0c}) = \frac{1}{\pi} \int_{L_c} \frac{\phi_c(t)}{|t - t_{0c}|} dr + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c}}^{k_1} \int_{L_i} \frac{\phi_i(t)}{|t - t_{0c}|} dr, \quad c = 1, 2, \dots, n_1 \quad (3.27)$$

όπου $p(t_{0c})$ είναι η συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet στο σημείο t_0 της c -οστης ρωγμής. Η εξίσωση (3.27) σε συνδυασμο με την (3.3) οδηγεί στο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που αναφέρεται στις συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}_c(t_{jc})}{|t_{jc} - t_{0rc}|} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c}}^{k_1} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}_i(t_{ji})}{|t_{ji} - t_{0rc}|} = p(t_{0rc}), \quad (3.28)$$

$$c = 1, 2, \dots, n_1$$

στο οποίο για λόγους ευκολίας έχει χρησιμοποιηθεί ίδιος αριθμός σημείων ολοκλήρωσης και ταξινόμησης ανά ρωγμή. Το σύστημα (3.28) αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα $(n_1 \times n)$ εξισώσεων με $(k_1 \times n)$ αγνώστους. Οι υπόλοιπες $((k_1 - n_1) \times n)$ εξισώσεις οι οποίες απαιτούνται για την επίλυση του συστήματος θα προκύψουν από τις συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann.

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (2.25) και (3.11) οδηγεί στην ολοκληρωτική εξίσωση για ένα σημείο t_0 που ανήκει σε ρωγμή επί της οποίας εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann

$$\begin{aligned} q_s(t_{0c}) &= \frac{\lambda}{\pi} \int_{L_c} \frac{\phi_c(t) \cos \alpha(t, t_{0c})}{|t - t_{0c}|^2} dr \\ &+ \frac{\lambda}{\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c}}^{k_1} \int_{L_i} \frac{\phi_i(t) \cos \alpha(t, t_{0c})}{|t - t_{0c}|^2} dr, \quad (3.29) \\ c &= n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, k_1 \end{aligned}$$

όπου $q_s(t_{0c})$ είναι η εφαπτομενική ροή στο σημείο t_0 της c -οστής ρωγμής. Η σχέση (3.29) σε συνδυασμό με την (3.12) οδηγεί στο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που αναφέρεται στις συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\pi} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}_c(t_{jc}) \cos \alpha(t_{jc}, t_{0rc})}{|t_{jc} - t_{0rc}|^2} + \\ & \frac{\lambda}{\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c}}^{k_1} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}_i(t_{ji}) \cos \alpha(t_{ji}, t_{0rc})}{|t_{ji} - t_{0rc}|^2} = q_s(t_{0rc}), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$c = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, k_1$$

Οι σχέσεις (3.28) και (3.30) αποτελούν γραμμικό σύστημα ($k_1 \times n$) αλγεβρικών εξισώσεων με ($k_1 \times n$) αγνώστους (δηλαδή τις άγνωστες πυκνότητες $\hat{\phi}_i(t)$).

Μετά τον υπολογισμό των άγνωστων πυκνοτήτων των ρωγμών τα πεδία της πίεσης των πόρων και της ροής του ρευστού σε τυχαίο σημείο z του επιπέδου μπορούν να υπολογιστούν αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$p(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}_i(t_{ji})}{|t_{ji} - z|} \quad (3.31)$$

και

$$\begin{aligned} q(z) &= q_x(z) + i q_y \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}_i(t_{ji}) \cos \alpha(t_{ji}, z)}{|t_{ji} - z|^2} \\ &+ i \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\hat{\phi}_i(t_{ji}) \sin \alpha(t_{ji}, z)}{|t_{ji} - z|^2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικά Παραδείγματα

Πριν την παρουσίαση αριθμητικών παραδειγμάτων, είναι απαραίτητος ο έλεγχος της σύγκλισης της προτεινόμενης αριθμητικής επίλυσης. Επίσης, από ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας δεν βρέθηκε καμμία λύση κλειστής μορφής για το εν λόγω πρόβλημα οπότε ο άμεσος έλεγχος της ακρίβειας της λύσης δεν είναι εφικτός.

Για την μελέτη της σύγκλισης της λύσης θεωρείται ευθύγραμμη ρωγμή που κείται πάνω στον άξονα Ox με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων τοποθετημένη στο κέντρο της (Σχ. 4.1). Η ρωγμή καταλαμβάνει το διάστημα $[-1, 1]$ και υποβάλλεται σε ομοιόμορφη μοναδιαία πίεση. Θεωρείται επίσης ότι ο συντελεστής διαπερατότητας του μέσου είναι ίσος με 1. Το Σχήμα 4.2 παρουσιάζει την κατανομή της πίεσης των πόρων p κατά μήκος του άξονα Ox για 4, 8, 12, 16, 20 και 24 σημεία ολοκλήρωσης, αντίστοιχα. Επίσης, το Σχήμα 4.3 παρουσιάζει το απόλυτο σχετικό σφάλμα (το ποσοστό της απόλυτης διαφοράς) μεταξύ ενός υπολογισμού και του προηγούμενου με λιγότερα σημεία ολοκλήρωσης. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι η διαφορά στην υπολογισμένη λύση μεταξύ 20 και 24 σημείων ολοκλήρωσης είναι λιγότερο από 5%, οπότε θεωρείται ότι η λύση συγκλίνει πάνω από 20 σημεία ολοκλήρωσης. Επίσης, προτείνεται να μην επιλέγονται πάρα πολλά σημεία ολοκλήρωσης διότι η λύση είναι ευαίσθητη στο σφάλμα στρογγυλοποίησης. Τα Σχήματα 4.4 και 4.5 παρουσιάζουν την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας ροής του ρευστού q_x κατά μήκος του άξονα Ox και το απόλυτο σχετικό σφάλμα αντίστοιχα. Ακόμη, τα Σχήματα 4.6, 4.7 και 4.8, 4.9 παρουσιάζουν την πίεση των πόρων p , την κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας ροής του ρευστού q_y και τα απόλυτα σχετικά τους σφάλματα κατά μήκος του άξονα Oy , αντίστοιχα. Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ροής του ρευστού q_y κατά μήκος του Ox άξονα καθώς επίσης και η q_x κατά μήκος του Oy άξονα δεν παρουσιάζονται καθώς

το αποτέλεσμα είναι πρακτικά μηδέν (τιμές της τάξης $O(10^{-14})$) όπως αναμενόταν λόγω συμμετρίας. Επίσης, όπως μπορεί να παρατηρηθεί από την (3.10), είναι αδύνατον να υπολογιστεί η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ροής του ρευστού q_y ($q_y = q_n$ σε αυτήν την περίπτωση) πάνω στην ρωγμή. Αυτός είναι ο λόγος για την μεγάλη αστάθεια που παρουσιάζεται στον υπολογισμό της q_y κατά μήκος του άξονα Oy όταν το σημείο υπολογισμού πλησιάζει την ρωγμή (την αρχή του συστήματος συντεταγμένων).

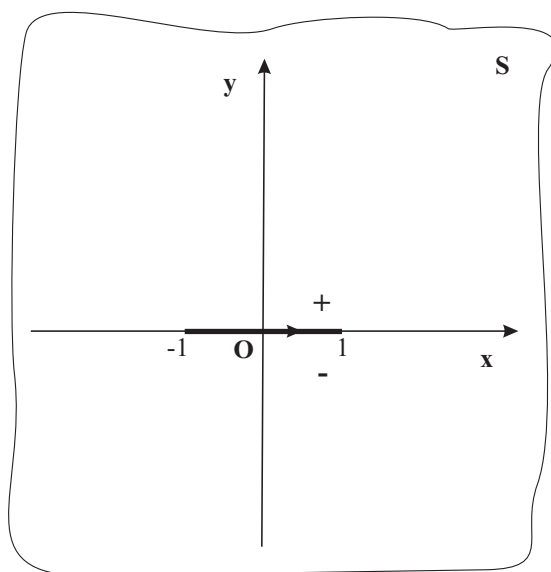
Για να αναδειχθούν οι δυνατότητες της μεθόδου, επιλέχθηκαν δύο τυχαία παραδείγματα πολλαπλά ρωγματομένων μέσων. Στο πρώτο παράδειγμα θεωρούνται τρεις καμπυλόγραμμες ρωγμές επί των οποίων εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet. Τα Σχήματα 4.10, 4.11 και 4.12 παρουσιάζουν τα πεδία της πίεσης των πόρων $p(z)$ και των συνιστωσών των ταχυτήτων ροής του ρευστού στην x ($q_x(z)$) και y ($q_y(z)$) κατεύθυνση, αντίστοιχα. Σε αυτήν την περίπτωση έχουν χρησιμοποιηθεί 30 σημεία ολοκλήρωσης ανά ρωγμή, συντελεστής διαπερατότητας $\lambda = 1$ και οι κάτωθι συνοριακές συνθήκες:

1. Στη ρωγμή που βρίσκεται στο κέντρο των σχημάτων επιδρά σταθερή πίεση η οποία δίδεται από $p(s) = 2 - \frac{4}{l^2}(s - l/2)^2$ (όπου s πραγματική μεταβλητή κατά μήκος της ρωγμής και η αρχή του συστήματος συντεταγμένων της είναι το ένα άκρο, και l είναι το μήκος της ρωγμής).
2. Η ρωγμή στην πάνω αριστερή γωνία των σχημάτων βρίσκεται κάτω από σταθερή ομοιόμορφη πίεση $p(s) = 1$.
3. Στην άλλη ρωγμή στην κάτω δεξιά γωνία επιδρά σταθερή ομοιόμορφη πίεση $p(s) = 0$ (φαινόμενο σπηλαίωσης).

Στο δεύτερο παράδειγμα, (Σχήματα 4.13-4.15) θεωρούνται δύο ρωγμές εκ των οποίων στην μία δρα σταθερή εφαπτομενική ταχύτητα ροής ρευστού ενώ η δεύτερη παρουσιάζει φαινόμενο σπηλαίωσης. Πάλι, χρησιμοποιήθηκαν $n = 30$, $\lambda = 1$ και οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

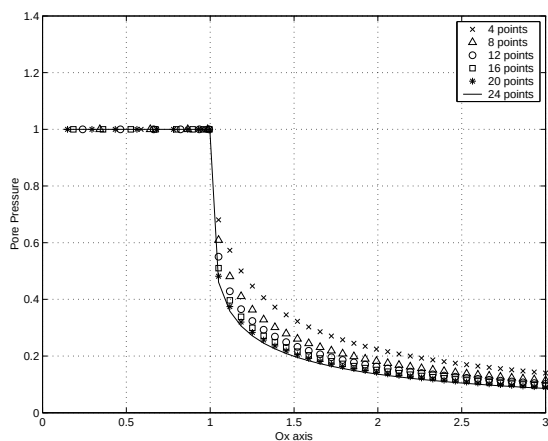
1. Σταθερή εφαπτομενική ταχύτητα ροής ρευστού $q_s(s) = \frac{8}{l^3}(s - l/2)^3$ εφαρμόζεται στην πάνω αριστερά ρωγμή. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη συνοριακή συνθήκη ικανοποιεί την *Συνθήκη Επιλυσιμότητας* (εξίσωση 3.13).
2. Η άλλη ρωγμή στην κάτω δεξιά γωνία των σχημάτων βρίσκεται κάτω από σταθερή ομοιόμορφη πίεση $p(s) = 0$ (φαινόμενο σπηλαίωσης).

Σημειώνεται, επίσης, ότι κάποιες αστάθειες που παρατηρούνται κοντά ή πάνω στις ρωγμές οφείλονται στα σημεία του κανάβου που χρησιμοποιήθηκε. Όταν

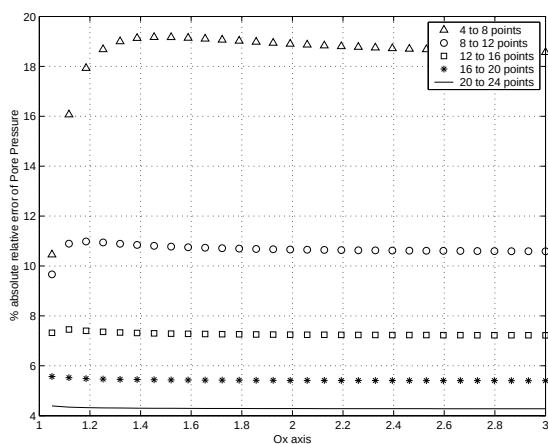


Σχήμα 4.1: Ευθύγραμμη ρωγή που καταλαμβάνει το διάστημα $[-1, 1]$ πάνω στον άξονα Ox .

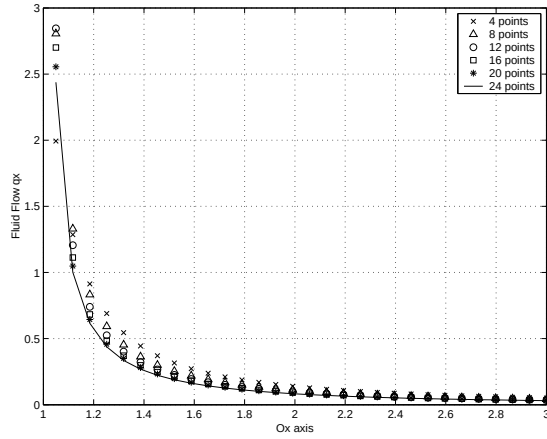
ένα σημείο υπολογισμού είναι κοντά σε ένα σημείο ολοκλήρωσης, τότε η τιμή του τείνει να γίνει ιδιόμορφη (τείνει να παρουσιάσει απειρισμό). Τα μόνα σημεία πολύ κοντά στα σημεία ολοκλήρωσης στα οποία η λύση είναι ακριβής είναι τα ταξιθετικά. Παρόλαυτά, το φαινόμενο αυτό δεν επηρεάζει την συμπεριφορά της λύσης μακριά από τα σημεία ολοκλήρωσης.



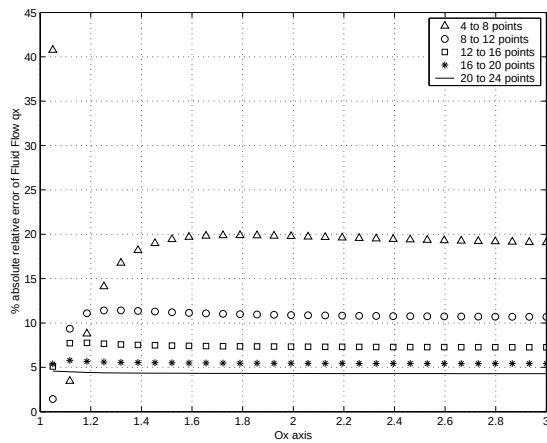
Σχήμα 4.2: Κατανομή της πίεσης των πόρων κατά μήκος του Ox άξονα.



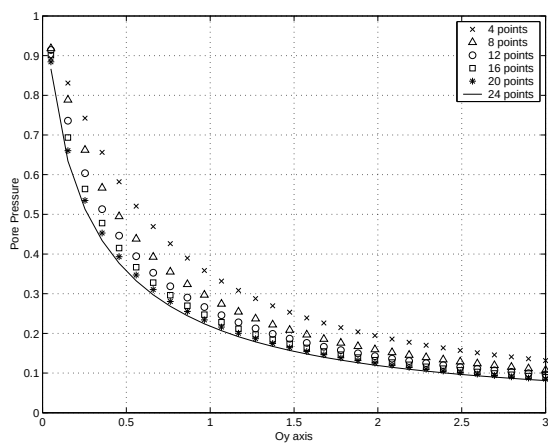
Σχήμα 4.3: Απόλυτο σχετικό σφάλμα του υπολογισμού της πίεσης των πόρων κατά μήκος του Ox άξονα.



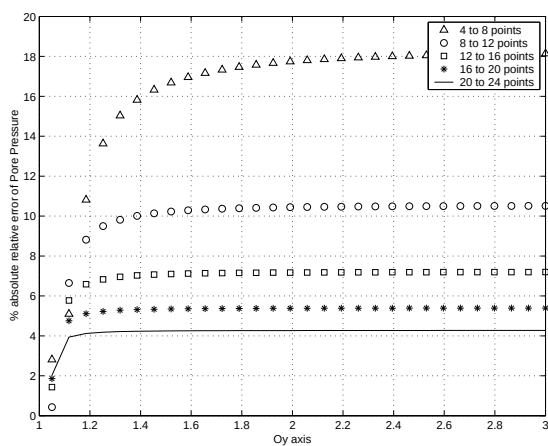
Σχήμα 4.4: Κατανομή της συνιστώσας q_x του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού κατά μήκος του Ox άξονα.



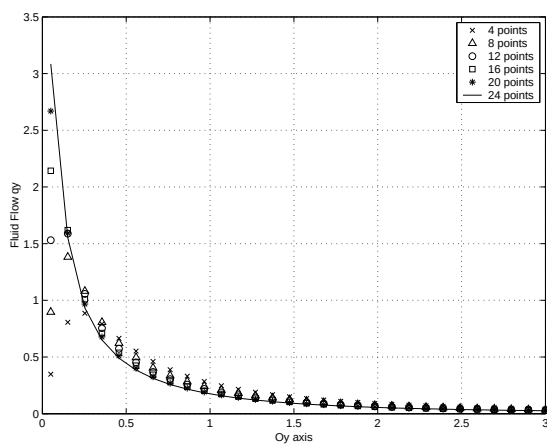
Σχήμα 4.5: Απόλυτο σχετικό σφάλμα του υπολογισμού της συνιστώσας q_x του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού κατά μήκος του Ox άξονα.



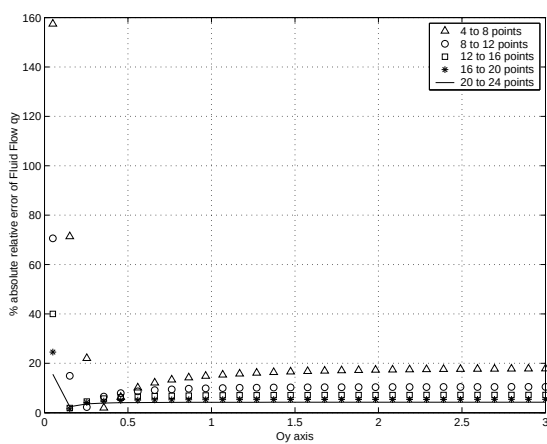
Σχήμα 4.6: Κατανομή της πίεσης των πόρων κατά μήκος του Oy άξονα.



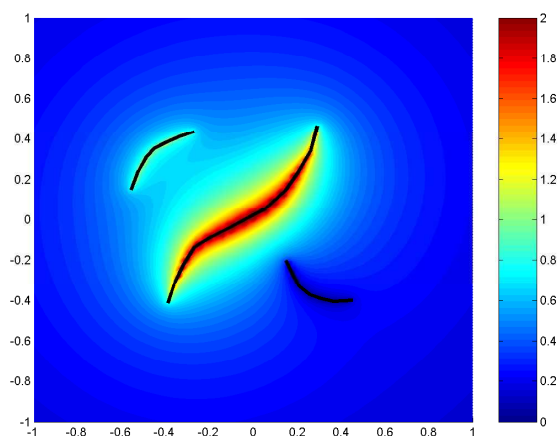
Σχήμα 4.7: Απόλυτο σχετικό σφάλμα του υπολογισμού της πίεσης των πόρων κατά μήκος του Oy άξονα.



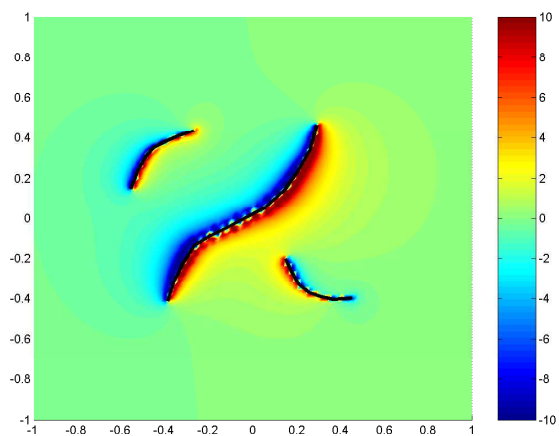
Σχήμα 4.8: Κατανομή της συνιστώσας q_y του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού κατά μήκος του Oy άξονα.



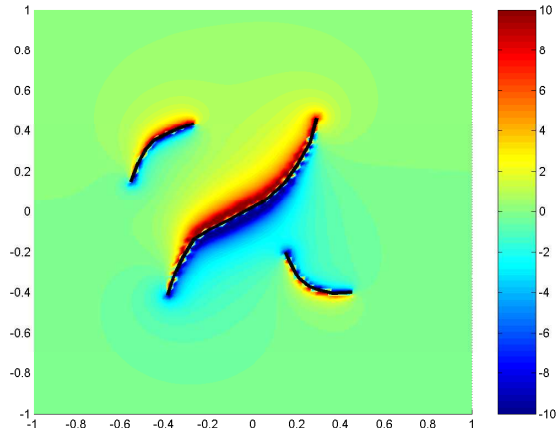
Σχήμα 4.9: Απόλυτο σχετικό σφάλμα του υπολογισμού της συνιστώσας q_y του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού κατά μήκος του Oy άξονα.



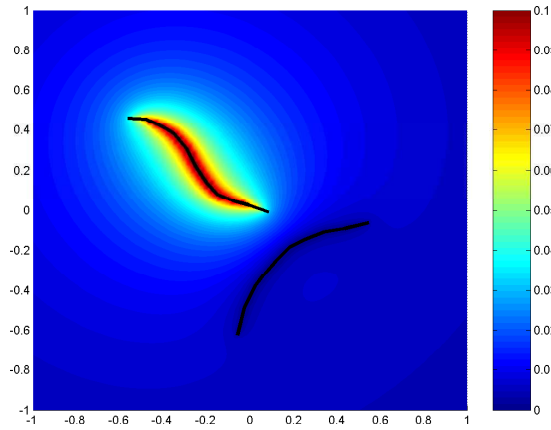
Σχήμα 4.10: Κατανομή της πίεσης των πόρων ($p(z)$) στο επίπεδο.



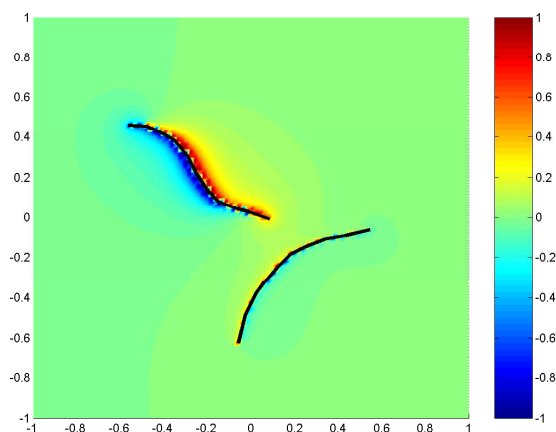
Σχήμα 4.11: Κατανομή της συνιστώσας $q_x(z)$ του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού στο επίπεδο.



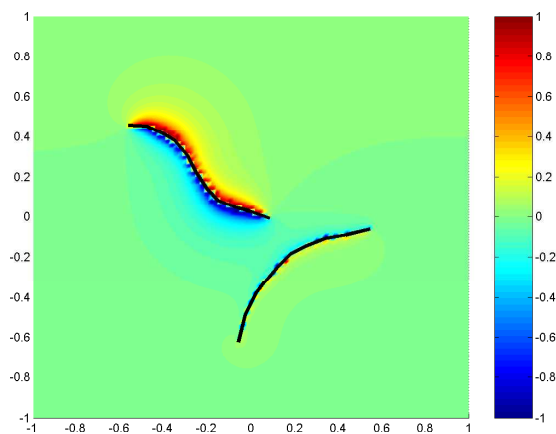
Σχήμα 4.12: Κατανομή της συνιστώσας $q_y(z)$ του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού στο επίπεδο.



Σχήμα 4.13: Κατανομή της πίεσης των πόρων ($p(z)$) στο επίπεδο.



Σχήμα 4.14: Κατανομή της συνιστώσας $q_x(z)$ του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού στο επίπεδο.



Σχήμα 4.15: Κατανομή της συνιστώσας $q_y(z)$ του διανύσματος ταχύτητας της ροής του ρευστού στο επίπεδο.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Αρχικά παρουσιάστηκε το πλήρες σύστημα εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα της σταθερής ροής ρευστού σε επίπεδο, ισότροπο, πορωδες μέσο που φέρει σύστημα ρωγμών, λεπτών εγκλεισμάτων, οπών και σημειακών πηγών. Οι ίδιες εξισώσεις μπορούν να εφαρμοστούν και στην περίπτωση της διάχυσης της θερμοκρασίας. Επίσης, παρουσιάστηκαν συνοπτικά οι εξισώσεις με τις οποίες μπορούν να υπολογισθούν οι τάσεις και οι παραμορφώσεις. Εν συνεχεία, παρουσιάστηκε η ημι-αναλυτική λύση σταθερής ροής ρευστού σε πολλαπλά ρωγματομένο μέσο. Τα πεδία της πίεσης των πόρων και της ταχύτητας ροής του ρευστού μπορούν να υπολογιστούν είτε από συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, είτε από συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann, είτε από συνδυασμό τους. Η αριθμητική ολοκλήρωση που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση είναι απλή, συγκλίνει γρήγορα και μπορεί να εισαχθεί εύκολα σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Αν και το μοντέλο που θεωρήθηκε χαρακτηρίζεται από πολλές απλοποιήσεις (π.χ. σταθερή ροή στο χρόνο, γραμμικότητα, ισοτροπία), μπορεί να βρει πολλές χρήσιμες εφαρμογές στην πράξη. Παραδείγματος χάρη, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της ακρίβειας ενός αριθμητικού κώδικα (όπως ΜΠΣ, ΜΠΔ, ή ΜΣΣ), ως εργαλείο για γρήγορη ανάδρομη ανάλυση επί τόπου μετρήσεων ταχύτητας ροής ρευστού ή πίεσης των πόρων, ως συμπλήρωμα άλλου αριθμητικού κώδικα για την επίλυση θερμο-πορο-μηχανικών προβλημάτων κλπ.

Η επέκταση του αριθμητικού αλγορίθμου με σκοπό την επίλυση του προβλήματος της αλληλεπίδρασης μεταξύ οπών, ρωγμών και λεπτών εγκλεισμάτων αποτελεί μελλοντικό στόχο. Επίσης, η γενίκευση της προτεινόμενης θεωρίας σε ανισότροπα πορώδη μέσα αποτελεί έναν ακόμη μελλοντικό στόχο ο οποίος αν και παρουσιάζει υψηλή δυσκολία κρίνεται ως απαραίτητος και ταυτόχρονα υψηλή χρησιμότητας.

Βιβλιογραφία

Διεθνής Βιβλιογραφία

- [1] P.K. Banerjee and R. Butterfield. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill, London, 1981.
- [2] D. Bardzokas and G. Exadaktylos. Integral equations of thermoelasticity and thermoconductivity for cracked isotropic or anisotropic multiply connected bodies with reinforcement. *Arch. Mech.*, 47(2):173–202, 1995.
- [3] G.I. Barenblatt, I.P. Zheltov, and I.N. Kochina. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. *Prikl. Mat. Mekh.*, 24:852–864, 1960.
- [4] C.A. Brebbia and J. Dominguez. *Boundary Elements, An Introductory Course*. Computational Mechanics and McGraw-Hill, Southampton, 1989.
- [5] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, and L.C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer, Berlin, 1984.
- [6] F. Erdogan. Approximate solutions of systems of singular integral equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 17(6):1041–1059, 1969.
- [7] F. Erdogan and G.D. Gupta. On the numerical solution of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 30:525–534, 1972.
- [8] B. Evans, T.F. Wong, et al. *Fault Mechanics and Transport Properties of Rocks*. Academic Press Inc., San Diego, 1992.
- [9] F. Hartmann. *Introduction to Boundary Elements*. Springer, Berlin, 1989.

- [10] S. Hickman, R. Sibson, R. Bruhn, et al. *The Mechanical Involvement of Fluids in Faulting*. U.S. Geological Survey, Menlopark, CA, 1994.
- [11] C.Y. Hui and S. Mukherjee. Evaluation of hypersingular integrals in the boundary element method by complex variable techniques. *Int. J. Solids Struct.*, 34:203–221, 1997.
- [12] P.A. Liolios and G.E. Exadaktylos. A solution of steady state fluid flow in multiply fractured isotropic porous media. *Submitted for Publication*, 2004.
- [13] S.G. Mikhlin. *Integral Equations*. Pergamon Press, London, 1957.
- [14] N.I. Muskhelishvili. *Singular Integral Equations*. P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holland, 1953.
- [15] N.I. Muskhelishvili. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. P. Noordhoff, Groningen, 1963.
- [16] V.Z. Parton and E.M. Morozov. *Elastic-Plastic Fracture Mechanics*. Mir Publishers, Moscow, 1978.
- [17] J.N. Reddy. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York, second edition, 1993.
- [18] Ian N. Sneddon. *Fourier Transforms*. McGraw-Hill, New York, 1951.
- [19] K. Terzaghi. *Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage*. Deuticke, Vienna, 1925.
- [20] K. Terzaghi. Relation between soil mechanics and foundation engineering: Presidential address. *Proc. 1st Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Cambridge, Mass.*, 3:13–18, 1963.
- [21] S.P. Timoshenko and J.N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGraw – Hill, New York, third edition, 1970.
- [22] J.E. Warren and P.J. Root. The behavior of naturally fractured reservoirs. *Soc. Pet. Eng. J.*, 3:245–255, 1963.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [23] Ν.Ι. Ιωακειμίδης. *Γενικαί Μέθοδοι Επιλύσεως Προβλημάτων Ρωγμών εις την Θεωρίαν της Επιπέδου Ελαστικότητας*. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 1976.

Ευρετήριο

ανωμαλίες

τοπικές, 1

αριθμητική

ολοκλήρωση, 18

σύγκλιση, 31

βάρη, 19

δυναμικό

απλού στρώματος, 11

διπλού στρώματος, 11

δυναμικού

προβλήματα, 2

εξίσωση

Laplace, 7

πεδίου, 7

θεώρημα

Plemelj, 21

μήχους

μετρητής, 25

μετασχηματισμός

γραμμικός, 19

μετατόπιση

εφαπτομενική, 14

ορθή, 14

νόμος

Darcy, 8

Hooke, 5, 13, 16

πίεση

πόρων, 7

πολυώνυμα

Chebyshev, 19

πορώδες

διπλό, 1

σύστημα

ολοκληρωτικών εξισώσεων, 9

συντεταγμένων, τοπικό, 20

σώμα

θερμοποροελαστικό, 5

σημεία

ολοκλήρωσης, 19

ταξιθεσίας, 19

σχέσεις

Terzaghi, 15

συνάρτηση

δυναμικού, 9, 10, 19

πυκνότητας, 9, 11

συνθήκες

συνοριακές, 8, 14

συνθήκη

επιλυσιμότητας, 22, 32

συντελεστής

διαπερατότητας, 8

γραμμικής διαστολής, 16

θερμικής αγωγιμότητας, 10

τάσεις, 13

τάση

εφαπτομενική, 14

ενεργή, 15

ολική ορθή, 15

ορθή, 14

τροπές

διατμητικές, 14

ορθές, 14

υπόλοιπο, 27