

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

Ουρές αναμονής: Θεωρία και εφαρμογές

ΣΤΡΙΛΑΚΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Επιβλέπων: Λέκτορας **Δάρας Τρύφων**

ΧΑΝΙΑ , 2009

Στους γονείς μου
Σταμάτη και Φωφώ

Εισαγωγή

Πολλές φορές για να μελετήσουμε θεωρητικά ένα πραγματικό σύστημα, χρησιμοποιούμε ένα κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο. Το μοντέλο αυτό είναι μια *προσομοίωση* του πραγματικού συστήματος, όπου οι σημαντικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του έχουν αντικατασταθεί από αντίστοιχες μαθηματικές, ενώ τυχόν μη-σημαντικές έχουν αγνοηθεί. Τα περισσότερα από τα πραγματικά συστήματα είναι **στοχαστικά**, δηλαδή η λειτουργία τους επηρεάζεται σημαντικά από τον λεγόμενο παράγοντα «τύχη» ή με άλλα λόγια, η μελλοντική συμπεριφορά τους δεν μπορεί να προβλεφθεί επακριβώς, αλλά μόνο πιθανοθεωρητικά. Οι στοχαστικές ανελίξεις (ακολουθίες ή οικογένειες τυχαίων μεταβλητών) είναι τα κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα (**στοχαστικά μοντέλα**) για να περιγράψουμε και να μελετήσουμε στοχαστικά συστήματα. Οι ανελίξεις αυτές είναι το δυναμικό μέρος της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Μια σημαντική κατηγορία στοχαστικών συστημάτων είναι αυτή των λεγόμενων **ουρών αναμονής**. **Ουρά** ή **συνωστισμός** δημιουργείται σε ένα σύστημα (είτε αυτό αφορά την στάση ενός λεωφορείου, τα ταμεία μιας υπεραγοράς, τον διάδρομο προσγείωσης ενός μεγάλου αεροδρομίου, τα γκισέ ενός ταχυδρομείου ή μιας τράπεζας) όταν έχουμε συρροή «πελατών» σε αυτό, η δε συρροή αυτή είναι μεγαλύτερη από την δυνατότητα εξυπηρέτησης του συστήματος. Το απλούστερο και το πιο συχνά εμφανιζόμενο, σύστημα ουράς είναι η λεγόμενη **M/M/1 ουρά** (οι αφίξεις των πελατών γίνονται μεμονωμένα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί, υπάρχει ένα σημείο εξυπηρέτησης, δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στον σχηματισμό της ουράς και οι πελάτες εξυπηρετούνται με την σειρά την οποία καταφθάνουν). Λόγω του ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί, το *μήκος της ουράς* μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια των αλυσίδων Markov, στοχαστική διαδικασία η οποία είναι αρκετή στο να περιγράψει το εν λόγω σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση **στατιστικής ισορροπίας** (μετά την παρέλευση δηλαδή ενός μεγάλου χρονικού διαστήματος). Είναι το σύστημα που συναντάται και μελετάται συνήθως στα περισσότερα συγγράμματα που ασχολούνται με την Θεωρία Ουρών. Στη παρούσα εργασία (σπουδαιότερο μέρος της οποίας είναι τα κεφάλαια 8 και 9) παρουσιάζονται αναλυτικά δύο γενικεύσεις του εν λόγω συστήματος ουράς: (Α) η **ουρά M/G/1**, ουρά στην οποία οι αφίξεις των πελατών γίνονται μεμονωμένα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν μια γενική κατανομή (όχι απαραίτητα την εκθετική) και υπάρχει ένα σημείο εξυπηρέτησης και (Β) η **ουρά G/M/1** ουρά στην οποία οι αφίξεις πελατών γίνονται σύμφωνα με μια γενική διαδικασία (όχι απαραίτητα Poisson), οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί, υπάρχει δε ένα σημείο εξυπηρέτησης. Τα συστήματα αυτά (το μήκος της ουράς σε καθένα από αυτά) δεν είναι δυνατόν να περιγραφούν με την βοήθεια αλυσίδων Markov, παρά μόνον όταν τα μελετάμε κατά την διάρκεια ορισμένων χρονικών στιγμών. Έτσι η μελέτη τους διαφέρει από εκείνη του συστήματος M/M/1. Στην εργασία αυτή λοιπόν, περιγράφονται τα επιπλέον μαθηματικά «εργαλεία» που χρειάζεται κανείς από την Θεωρία Πιθανοτήτων, για την μελέτη των συστημάτων αυτών. Ακόμα, όπου είναι δυνατόν, γίνεται προσομοίωση (τέτοιων) πραγματικών συστημάτων ουράς. Επίσης δίνονται εφαρμογές και γενικεύσεις σε πραγματικές καταστάσεις. Πιο συγκεκριμένα :

Στο **πρώτο κεφάλαιο** γίνεται μια σύντομη ανασκόπηση των βασικών εννοιών και προτάσεων της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Έμφαση δίνεται: (i) στην περιγραφή ορισμένων βασικών κατανομών (όπως της Poisson, γεωμετρικής, εκθετικής, Erlang)

(ii) στο ορισμό και την απόδειξη προτάσεων αναφορικά με τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes μιας τ.μ. και (iii) την πιθανογεννήτρια και ροπογεννήτρια μια τ.μ. «αντικείμενα» βασικά και απαραίτητα στην μετέπειτα μελέτη.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνεται ο ορισμός μιας στοχαστικής ανέλιξης (σ.α.), περιγράφονται τρόποι ταξινόμησής τους και δίνονται παραδείγματα σ.α. που συναντά κανείς σε ένα σύστημα ουράς. Τέλος αναφέρονται ποσότητες που χαρακτηρίζουν και πολλές φορές περιγράφουν μια σ.α.

Στο τρίτο κεφάλαιο δίνεται αρχικά ο ορισμός μιας ανέλιξης (αλυσίδας) Markov (A.M), του σημαντικότερου ίσως εργαλείου στην μελέτη των συστημάτων ουράς. Ακόμα, αναφέρονται οι σπουδαιότερες ιδιότητες των αλυσίδων αυτών και δίνονται τρόποι για την ταξινόμηση των καταστάσεών τους. Τέλος αποδεικνύονται οι συνθήκες ύπαρξης μιας *στάσιμης κατανομής* μιας A.M. Markov (δηλαδή της συμπεριφοράς-κατάστασης ισορροπίας μιας A.M. μετά την πάροδο ενός μεγάλου χρονικού διαστήματος). Στο κεφάλαιο αυτό, για συντομία, παραλείπονται οι αποδείξεις. Περισσότερα για τις αλυσίδες Markov μπορεί κανείς να δει π.χ. στα συγγράμματα: (i) Τ. Δάρας, Π. Σύψας, “Στοχαστικές Ανελίζεις: Θεωρία & Εφαρμογές” και (ii) Θ. Κάκκουλος, “Στοχαστικές Ανελίζεις”.

Η γνωστότερη, συνήθως, στοχαστική ανέλιξη Markov συνεχούς χρόνου, η λεγόμενη *ανέλιξη Poisson*, είναι το αντικείμενο του **τέταρτου κεφαλαίου**. Εδώ δίνεται ο ορισμός μιας τέτοιας διαδικασίας, υπολογίζεται η κατανομή των ενδιάμεσων της χρόνων και τέλος παρουσιάζονται ορισμένες γενικεύσεις μιας τέτοιας ανέλιξης.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η δεύτερη σε σπουδαιότητα έννοια (μετά εκείνη της A.M.) για την μελέτη ενός συστήματος ουράς, αυτή της *ανανεωτικής ανέλιξης*. Εκεί δίνεται η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μιας ανανεωτικής ανέλιξης και περιγράφεται η οριακή συμπεριφορά της (η συμπεριφορά της δηλαδή μετά την παρέλευση ενός μεγάλου χρονικού διαστήματος). Τέλος, μελετώνται οι λεγόμενες *ανανεωτικές ανελίζεις ανταμοιβής* (ανελίζεις στις οποίες όταν συμβαίνει ένα γεγονός, ανανέωση, εισπράττουμε ένα χρηματικό ποσό).

Στο έκτο κεφάλαιο αναφέρονται τα χαρακτηριστικά ενός συστήματος ουράς, δίνεται ο (κατά Kendall) τρόπος ονομασίας μιας ουράς και παρουσιάζονται τα *μέτρα λειτουργικότητας* της (ποσότητες όπως το μήκος της και ο χρόνος αναμονής σε αυτήν που συνήθως είναι απαραίτητες για την μελέτη μιας ουράς). Ακόμα, περιγράφονται οι βασικές υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για την μελέτη ενός συστήματος ουράς και αναφέρονται τρία βασικά εργαλεία τα οποία διαθέτει κανείς στην προσπάθειά του να μελετήσει ένα τέτοιο σύστημα ουράς: (i) *την βασική ταυτότητα κόστους* (ii) *το θεώρημα του Little* και (iii) *την ιδιότητα PASTA*. Τέλος γίνεται επαλήθευση της ιδιότητας με την βοήθεια προσομοίωσης ενός πραγματικού συστήματος.

Στο έβδομο κεφάλαιο μελετάται η M/M/1 ουρά (η ουρά μελετάται, λόγω του Μαρκοβιανού χαρακτήρα της, με την βοήθεια των αλυσίδων Markov). Αρχικά υπολογίζονται τα μέτρα λειτουργικότητας της χωρίς την χρήση κατανομών (συνήθως ο υπολογισμός γίνεται με την βοήθεια κατανομών). Ακόμα, υπολογίζεται η κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα (ποσότητα απαραίτητη για τον υπολογισμό των μέτρων αυτών και γενικά για την μελέτη της ουράς) με την βοήθεια τριών διαφορετικών προσεγγίσεων (για να γίνει εμφανές το δυναμικό της θεωρίας): (i) της *αναδρομικής προσέγγισης* (ii) της *απευθείας προσέγγισης* και (iii) της *προσέγγισης με την βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης* (ο συνήθης υπολογισμός είναι αυτός της

αναδρομικής προσέγγισης). Στην συνέχεια υπολογίζεται η κατανομή του χρόνου παραμονής στο σύστημα και του χρόνου αναμονής στην ουρά, σε ένα τέτοιο σύστημα ουράς, με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes και υπολογίζεται ακόμα η *περίοδος απασχόλησης* ενός τέτοιου συστήματος. Τέλος, γίνονται φανερά τα χαρακτηριστικά των M/M/1 συστημάτων ουράς και επαληθεύονται βασικές σχέσεις τους με την βοήθεια προσομοιώσεων (τέτοιων) πραγματικών συστημάτων.

Στο όγδοο κεφάλαιο μελετάμε αναλυτικά M/G/1 συστήματα ουρών. Στο κεφάλαιο αυτό έχει γίνει προσπάθεια να γίνει φανερή η «ποικιλία» διαφορετικών προσεγγίσεων και τεχνικών που μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποιος στην μελέτη των συστημάτων αυτών. Στα συστήματα αυτά, το μήκος της ουράς δεν είναι πλέον Μαρκοβιανό, οπότε η αντιμετώπισή τους είναι διαφορετική από εκείνη του M/M/1 συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα λοιπόν, μελετάται τις στιγμές των αναχωρήσεων των πελατών από αυτό, οπότε αρχικά (με την βοήθεια μιας λεγόμενης ενσωματωμένης αλυσίδας Markov) υπολογίζονται τα μέτρα λειτουργικότητάς του. Στην συνέχεια υπολογίζεται η κατανομή των αναχωρήσεων με την βοήθεια πιθανογεννητριών συναρτήσεων ($1^{ος}$ τύπος Pollaczek-Khinchin). Η κατανομή του χρόνου παραμονής σε ένα τέτοιο σύστημα υπολογίζεται με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes ($2^{ος}$ τύπος Pollaczek-Khinchin). Η κατανομή του χρόνου αναμονής σε μια τέτοια ουρά αποδεικνύεται με την βοήθεια της ανεξαρτησίας και (αντίστοιχων) μετασχηματισμών Laplace-Stieltjes ($3^{ος}$ τύπος Pollaczek-Khinchin). Τα μέτρα λειτουργικότητας του υπολογίζονται ακόμα, χωρίς την χρήση των μετασχηματισμών αλλά με την βοήθεια της λεγόμενης *προσέγγισης μέσης τιμής* (συνδυασμός του Θεωρήματος Little και την ιδιότητας PASTA). Επιπλέον, τα χαρακτηριστικά ενός τέτοιου συστήματος γίνονται φανερά με την βοήθεια προσομοιώσεων πραγματικών συστημάτων M/G/1 ουρών. Τέλος δίνονται αρκετές εφαρμογές σε πραγματικά προβλήματα M/G/1 συστημάτων ουράς.

Στο ένατο κεφάλαιο μελετάμε αναλυτικά G/M/1 συστήματα ουρών. Και στα συστήματα αυτά, το μήκος της ουράς δεν είναι πλέον Μαρκοβιανό, τα μελετάμε τις στιγμές των αφίξεων των πελατών σε αυτό (με την βοήθεια μιας δεύτερης ενσωματωμένης αλυσίδας Markov, των μετασχηματισμών Laplace-Stieltjes και ενός θεωρήματος για τις ρίζες μια γνήσιας κυρτής συνάρτησης), οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή των αφίξεων και από αυτήν τα μέτρα λειτουργικότητάς του. Η κατανομή του χρόνου παραμονής σε ένα τέτοιο σύστημα υπολογίζεται με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes και ιδιοτήτων των δεσμευμένων μέσων τιμών. Η κατανομή του χρόνου αναμονής σε μια τέτοια ουρά αποδεικνύεται και εδώ με την βοήθεια της ανεξαρτησίας και των (αντίστοιχων) μετασχηματισμών Laplace-Stieltjes. Τέλος δίνονται αρκετές εφαρμογές σε πραγματικά προβλήματα G/M/1 συστημάτων ουράς.

Τέλος στο παράρτημα δίνονται οι κώδικες των προσομοιώσεων που παρουσιάστηκαν στην εργασία.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

1.1	Πιθανότητα	1
1.2	Δεσμευμένη πιθανότητα	3
1.3	Τυχαίες μεταβλητές	7
1.4	Αριθμητικά χαρακτηριστικά μιας τ.μ.	13
1.5	Πολυδιάστατες τ.μ.	14
1.6	Άθροισμα τ.μ.	20
1.7	Πιθανογεννήτρια, ροπογεννήτρια.	21
1.8	Στοχαστική ανεξαρτησία τ.μ.	28

Κεφάλαιο 2. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

2.1	Στοχαστικές ανελίξεις.....	32
2.2	Ταξινόμηση των στοχαστικών ανελίξεων	32
2.3	Παραδείγματα στοχαστικών ανελίξεων.....	33
2.4	Κατανομή μιας στοχαστικής ανελίξης.....	34

Κεφάλαιο 3. ΑΛΥΣΙΔΕΣ MARKOV

3.1	Αλυσίδες Markov.....	37
3.2	Πίνακας μετάβασης ενός βήματος.....	38
3.3	Παραδείγματα αλυσίδων Markov	39
3.4	Υπολογισμός των χρονικά εξαρτημένων πιθανοτήτων	40
3.5	Ταξινόμηση των καταστάσεων μιας Α.Μ.	41
3.6	Επάνοδος και παροδικότητα	42
3.7	Θετικά και μηδενικά επανερχόμενες καταστάσεις	43
3.8	Περιοδικότητα	44
3.9	Στάσιμες κατανομές μιας Α.Μ.	45
3.10	Ασυμπτωτική συμπεριφορά των πιθανοτήτων μετάβασης.....	46
3.11	Ύπαρξη και μοναδικότητα στάσιμων κατανομών.....	47

Κεφάλαιο 4. ΑΝΕΛΙΞΗ POISSON

4.1	Εισαγωγή.....	50
4.2	Ενδιάμεσοι χρόνοι και χρόνοι αναμονής	52
4.3	Γενικεύσεις της ανελίξης Poisson.....	55

Κεφάλαιο 5. ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

5.1	Ανανεωτικές ανελίξεις.....	57
5.2	Οριακές συμπεριφορές.....	58
5.3	Ανανεωτικές ανελίξεις ανταμοιβής.....	59
5.4	Ηλικία μιας ανανεωτικής ανελίξης.....	61

Κεφάλαιο 6. ΟΥΡΕΣ

6.1 Το βασικό σύστημα ουράς.....	63
6.2 Χαρακτηριστικά συστημάτων ουράς.....	64
6.3 Συμβολική παράσταση των ουρών.....	65
6.4 Μέτρα λειτουργικότητας μιας ουράς.....	66
6.5 Υποθέσεις για τα συστήματα ουρών.....	67
6.6 Τάση συνωστισμού.....	67
6.7 Βασική ταυτότητα κόστους.....	68
6.8 Θεώρημα του LITTLE	68
6.9 Ιδιότητα PASTA.....	69
6.10 Επαλήθευση της ιδιότητας PASTA με simulation.....	71

Κεφάλαιο 7. M/M/1 ΟΥΡΑ

7.1 Εύρεση των $E(L)$, $E(S)$ και EL_q , EW χωρίς την χρήση κατανομών.....	74
7.2 Κατάσταση στατιστικής ισορροπίας της M/M/1	76
(α) Αναδρομική προσέγγιση	77
(β) Απευθείας προσέγγιση	78
(γ) Προσέγγιση με γεννήτρια συνάρτηση.....	78
7.3 Κατανομές των χρόνων.....	81
7.4 Περίοδος απασχόλησης.....	82
7.5 Προσομοίωση της M/M/1 ουράς με MATLAB.....	83

Κεφάλαιο 8. M/G/1 ΟΥΡΑ

8.1 Εισαγωγή	88
8.2 Οριακές κατανομές	89
8.3 Κατανομή των αναχωρήσεων.....	90
8.4 Κατανομή του χρόνου παραμονής.....	97
8.5 Κατανομή του χρόνου αναμονής.....	98
8.6 Προσέγγιση μέσης τιμής.....	99
8.7 Κατανομή της περιόδου απασχόλησης.....	102
8.8 Προσομοίωση της M/G/1 ουράς με MATLAB.....	104
8.9 Εφαρμογές στην M/G/1	112

Κεφάλαιο 9. G/M/1 ΟΥΡΑ

9.1 Εισαγωγή	124
9.2 Κατανομή των αφίξεων	124
9.3 Κατανομές των χρόνων.....	129
9.4 Μέσες τιμές.....	131
9.5 Εφαρμογές στην G/M/1	132

Παράρτημα	136
-----------------	-----

Βιβλιογραφία	142
--------------------	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

1.1 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Πείραμα τύχης είναι μια διαδικασία που μπορεί να επαναληφθεί (θεωρητικά) άπειρες φορές, κάτω από τις ίδιες (ουσιαστικά) συνθήκες και στο τέλος του οποίου παρατηρούμε κάποιο αποτέλεσμα.

Δειγματοχώρος (δ.χ.) η δειγματικός χώρος Ω (sample space), ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης (π.τ.).

Κάθε ένα από τα αποτελέσματα καλείται **απλό γεγονός η απλό ενδεχόμενο ή δειγματοσημείο** (outcome-simple event). **Γεγονός η ενδεχόμενο** (event) είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του Ω .

Αν το Ω είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο τότε ονομάζεται **διακριτός η απαριθμητός δ.χ.** (discrete sample space) ενώ αν είναι μη αριθμήσιμο σύνολο ονομάζεται **συνεχής δ.χ.** (continuous).

Αν $A \subseteq \Omega$ είναι ένα γεγονός, τότε λέμε ότι το A **πραγματοποιείται** σε μια εκτέλεση του πειράματος, αν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι στοιχείο του A .

1.1.1 Ορισμός

Έστω ότι ο δ.χ. Ω ενός π.τ. είναι ίσος με: $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Σε κάθε ένα από τ' αποτελέσματα a_j , $j=1, 2, \dots, n$, αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό p_j , τον οποίο ονομάζουμε **πιθανότητα** (probability) του απλού γεγονότος $\{a_j\}$ και ο οποίος ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις :

$$\alpha) \quad 0 \leq p_j \leq 1$$

$$\beta) \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1$$

Ο αριθμός αυτός μας φανερώνει το “πόσο δυνατόν” είναι να συμβεί το γεγονός $\{a_j\}$, $j=1, 2, \dots, n$. Γράφουμε $P(\{a_j\}) = p_j$, $j=1, 2, \dots, n$.

Για κάθε γεγονός $A \subseteq \Omega$, με $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$, $k=1, 2, \dots, m$ είναι

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$$

1.1.2 Παρατηρήσεις

Από τον παραπάνω ορισμό άμεσα προκύπτουν :

$$(i) \quad P(\Omega) = 1 \quad (\text{το σύνολο } \Omega \text{ καλείται } \mathbf{\text{βέβαιο}} \text{ γεγονός})$$

$$(ii) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

- (iii) Αν $A, B \subseteq \Omega$ και $A \cap B = \emptyset$ (δηλαδή τα γεγονότα A, B είναι **ξένα** μεταξύ τους) τότε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

1.1.3 Ορισμός (η πιθανότητα ως σχετική συχνότητα)

Έστω ότι ένα π.τ. επαναλαμβάνεται n φορές, και έστω ότι κάθε μια από αυτές τις επαναλήψεις είναι ανεξάρτητη από όλες τις προηγούμενες της. Για ένα γεγονός A , έστω $f(A)$ ο αριθμός των φορές που πραγματοποιείται το A στις n επαναλήψεις (**συχνότητα** του A). Η ποσότητα:

$$f_A = \frac{f(A)}{n}$$

καλείται **σχετική συχνότητα** του γεγονότος A . Αν θεωρήσουμε ότι το όριο αυτής της ποσότητας του n τείνοντος στο άπειρο υπάρχει, τότε ο αριθμός αυτός καλείται **πιθανότητα του A** .

Η σχετική συχνότητα ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- (1) $f_A \geq 0$
- (2) $f_\Omega = 1$
- (3) αν $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f_{A \cup B} = f_A + f_B$

1.1.4 Ορισμός (κατά Kolmogorov)

Γενικότερα, η πιθανότητα μπορεί να θεωρηθεί σαν μια συνολοσυνάρτηση:

$$P: \mathfrak{F} \rightarrow [0, 1]$$

όπου $\mathfrak{F}$ η κλάση (σ-άλγεβρα) των γεγονότων του δειγματοχώρου Ω , και η οποία συνολοσυνάρτηση ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες της παρατήρησης 1.1.2, με την (iii) αναφερόμενη σε αριθμήσιμο πλήθος ανά δύο ξένων γεγονότων, δηλαδή:

– αν $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ γεγονότα τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ τότε:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

1.1.5 Λογισμός πιθανοτήτων

Οι παρακάτω τύποι είναι εύκολο να αποδειχθούν και ισχύουν γενικά σε όλα τα πειράματα τύχης.

- (i) $P(A') = 1 - P(A)$
όπου A' είναι το συμπλήρωμα του συνόλου A , ως προς το σύνολο Ω .
- (ii) Αν $A, B \subseteq \Omega$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Για τρία γεγονότα A, B, Γ ο τύπος γίνεται

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma).$$

(iii) Αν $A \subseteq B$ τότε:

(α) $P(A) \leq P(B)$ και

(β) $P(B-A) = P(B) - P(A)$ όπου: $B-A = \{x \in B, x \notin A\}$.

(iv) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$.

1.1.6 Ορισμός

Δύο γεγονότα A, B του ίδιου πειράματος τύχης, ονομάζονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητα** αν η πραγματοποίηση του ενός δεν μας δίνει πληροφορίες για την πραγματοποίηση του άλλου.

Ένας δεύτερος, ισοδύναμος ορισμός είναι:

1.1.7 Ορισμός

Δυο γεγονότα A, B ονομάζονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητα** αν ικανοποιείται η σχέση:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται και σε περισσότερα από δυο γεγονότα. Έτσι π.χ. τρία γεγονότα A, B, Γ ονομάζονται ανεξάρτητα αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap \Gamma) = P(A)P(\Gamma), \quad P(B \cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma) \quad \text{και} \\ P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma) \quad .$$

1.2 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

1.2.1 Ορισμός

Η **δεσμευμένη πιθανότητα** (conditional probability) του γεγονότος B **δοθέντος** του γεγονότος A ορίζεται ως :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \quad \text{με την προϋπόθεση ότι } P(A) > 0 \quad .$$

Δηλαδή στην δεσμευμένη πιθανότητα *ενσωματώνουμε*, προσπαθώντας να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος, τυχόν διαθέσιμες πληροφορίες γι αυτό.

1.2.2 Παρατήρηση

(α) Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(\cdot|B)$ ικανοποιεί τις τρεις βασικές ιδιότητες του ορισμού της πιθανότητας, δηλαδή αν A, B είναι γεγονότα:

$$(i) \quad 0 \leq P(A|B) \leq 1$$

$$(ii) \quad P(\Omega|B) = 1$$

$$(iii) \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B) \quad \text{αν } A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

(β) Η δεσμευμένη πιθανότητα συνδέεται με την ανεξαρτησία. Έτσι αν:

$$P(B|A)=P(B) ,$$

δηλαδή η πληροφορία ότι συνέβη το A δεν αλλάζει την πιθανότητα του B , τότε τα γεγονότα A και B θα πρέπει να είναι ανεξάρτητα.

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν A και B είναι ανεξάρτητα τότε:

$$P(B/A)=P(B) .$$

Με την βοήθεια της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε έναν ισοδύναμο ορισμό της ανεξαρτησίας δύο γεγονότων.

1.2.3 Ορισμός

Δυο γεγονότα A, B ονομάζονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητα** εάν ισχύει:

$$P(B)=P(B|A)$$

(ισοδύναμα $P(A)=P(A|B)$).

Αν τώρα A, B είναι δυο γεγονότα τότε είναι εύκολο να αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα:

1.2.4 Θεώρημα Πολλαπλασιαστικό

Εάν $E_1, E_2, \dots, E_n$ γεγονότα ενός π.τ. τ.ω. $P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) > 0$, τότε ισχύει

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_n | E_{n-1} \cap E_{n-2} \cap \dots \cap E_1) \cdots P(E_3 | E_2 \cap E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)$$

Απόδειξη

Το θεώρημα αποδεικνύεται με την βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής ως προς n .

Για $n=2$, το θεώρημα προκύπτει από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας.

Έστω ότι το θεώρημα αληθεύει για $n=k$, δηλαδή

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) = P(E_k | E_{k-1} \cap E_{k-2} \cap \dots \cap E_1) \cdots P(E_3 | E_2 \cap E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)$$

Θα το αποδείξουμε για $n=k+1$:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap \dots \cap E_k \cap E_{k+1}) &= P(\underbrace{(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k)}_{\text{δ.π.}} \cap E_{k+1}) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \\ &= P(E_{k+1} | E_k \cap E_{k-1} \cap \dots \cap E_1) \cdot P(E_k \cap E_{k-1} \cap \dots \cap E_1) \stackrel{\substack{\text{επαγωγική} \\ \text{υπόθεση}}}{=} \\ &= P(E_{k+1} | E_k \cap E_{k-1} \cap \dots \cap E_1) \cdot P(E_k | E_{k-1} \cap E_{k-2} \cap \dots \cap E_1) \cdots P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1) \end{aligned}$$

■

Για δύο γεγονότα A, B το θεώρημα γίνεται:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

(ισοδύναμα $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$).

1.2.5 Θεώρημα

Αν A, B είναι δύο γεγονότα, του ίδιου δειγματοχώρου, και $P(B) > 0$ τότε:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας:

■

Αν τώρα $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω , τέτοια ώστε:

(α) $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

(β) $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$

τότε τα γεγονότα αυτά λέμε ότι αποτελούν μια **διαμέριση** του δ.χ. Ω , οπότε το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται και σε περισσότερα από δύο γεγονότα, ως εξής:

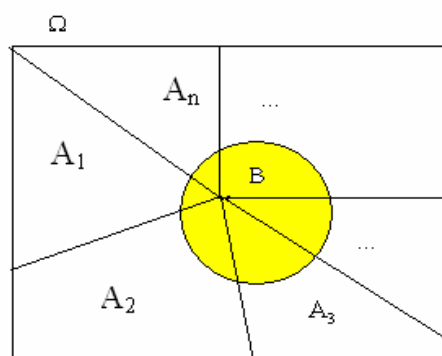
1.2.6 Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Αν $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω , και τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ αποτελούν διαμέριση του Ω , τότε:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(B|A_k) P(A_k)$$

Απόδειξη

Είναι εύκολο να δει κανείς (δείτε το παρακάτω σχήμα), ότι:



$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (B \cap A_k)$$

και τα γεγονότα $B \cap A_k, \quad k=1, 2, \dots, n$ είναι ανά δυο ξένα μεταξύ τους (γιατί τα γεγονότα $A_1, A_2, \dots, A_n$ αποτελούν διαμέριση), οπότε:

$$P(B) = P\left(\bigcup_{k=1}^n (B \cap A_k) \right) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(B|A_k) \cdot P(A_k)$$

■

Παρατήρηση 1.2.7

Αν δηλαδή θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος B , τότε μπορούμε να την υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας και «κατάλληλες» δεσμευμένες δεσμευμένες πιθανότητες $P(B|A_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$

Μία απλή αλλά παράλληλα και πολύ χρήσιμη εφαρμογή της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας και του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, είναι το λεγόμενο Θεώρημα Bayes που ακολουθεί.

1.2.8 Θεώρημα (Bayes)

Αν $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω , τα δε $A_1, A_2, \dots, A_n$ αποτελούν διαμέριση του δειγματοχώρου Ω , τότε ισχύει :

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)} \quad .$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{P(B)}$$

η δε $P(B)$ αντικαθίσταται από το θεώρημα ολικής πιθανότητας

■

Παράδειγμα 1.2.9 (Ιατρικά τεστ)

Η πιθανότητα διάγνωσης της φυματίωσης σε μία εξέταση (ακτινογραφία) ενός ατόμου που πάσχει από φυματίωση είναι 0,9. Η πιθανότητα να διαγνώσουμε σαν φυματικό ένα υγιές άτομο είναι 0,01. Έστω ότι το ποσοστό του πληθυσμού με φυματίωση είναι 0,001.

- (α) Ποιά η πιθανότητα ενός θετικού τεστ (δηλαδή το τεστ να δείξει ότι το άτομο πάσχει από φυματίωση).
- (β) Ποια η πιθανότητα ένα άτομο να είναι φυματικό, δεδομένου ότι το τεστ έδειξε ότι είναι φυματικό;

Λύση

Ορίζουμε τα γεγονότα: Φ = «το άτομο πάσχει από φυματίωση»
 Θ = «η διάγνωση είναι σωστή (θετική)»

- (α) Η πιθανότητα το τεστ να δείξει φυματίωση (θετικό τεστ), χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας, είναι:

$$P(\Theta) = P(\Theta|\Phi)P(\Phi) + P(\Theta|\Phi^c)P(\Phi^c) = 0,9 \cdot 0,001 + 0,01 \cdot 0,999 = 0,10$$

- (β) Αν το τεστ δείξει φυματίωση η πιθανότητα το άτομο όντως να πάσχει από φυματίωση είναι:

$$P(\Phi|\Theta) = \frac{P(\Theta|\Phi)P(\Phi)}{P(\Theta)} = \frac{0,0009}{0,10} = 0,009$$

■

Παρατήρηση 1.2.10

Βλέπουμε ότι, αν και το τεστ είναι θετικό, υπάρχει πιθανότητα μόνον 0,9% να πάσχει κανείς από φυματίωση (τεστ θετικό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι πάσχει κανείς από φυματίωση).

Η πιθανότητα βέβαια να πάσχει κανείς από φυματίωση όταν το τεστ είναι θετικό (αν και σχετικά μικρή) 0,9%, είναι **εννιαπλάσια** της πιθανότητας να πάσχει ένα άτομο από φυματίωση (0,1%).

Η δεσμευμένη πιθανότητα:

$P(\text{το τεστ θα διαγνώσει την ασθένεια (θετικό τεστ)} \mid \text{το άτομο πάσχει από μία συγκεκριμένη ασθένεια})$

καλείται **ευαισθησία του τεστ** και είναι ένα μέτρο ορθότητας του διαγνωστικού τεστ.

1.3 ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

1.3.1 Ορισμός

Μια **τυχαία μεταβλητή (τ.μ)** X , είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού έναν δ.χ. Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών (δηλαδή η $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$).

1.3.2 Ορισμός

Έστω ότι δίνεται μια τ.μ. X , τότε ορίζουμε μια συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$F(x) = L((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\})$$

Η συνάρτηση F καλείται **συνάρτηση κατανομής** (distribution function) της τ.μ. X και συνήθως γράφουμε F_X .

Αν δυο τ.μ. X και Y έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής, δηλαδή $F_X = F_Y$, τότε λέμε ότι οι τ.μ. είναι **ταυτοτικά κατανεμημένες ή ισόνομες**.

1.3.3 Πρόταση

Η συνάρτηση κατανομής F_X της τ.μ. X έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- (1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- (2) Η F_X είναι αύξουσα.
- (3) Η F_X είναι συνεχής από δεξιά σε όλα τα $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή: $F_X(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} F_X(t)$.
- (4) $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ και $F_X(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- (5) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, $a \leq b$.

Απόδειξη

Δείτε π.χ. X. Χαραλαμπίδης «Θεωρία Πιθανοτήτων και εφαρμογές», τεύχος 1, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2000, σελίδα 118.

■

Οι τυχαίες μεταβλητές διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, διακριτές ή συνεχείς, ανάλογα με το πλήθος των τιμών τους

1.3.4 Ορισμός

Μια τυχαία μεταβλητή X καλείται **διακριτή** αν το πλήθος των τιμών της είναι ένα το πολύ αριθμήσιμο σύνολο και κάθε μια από αυτές τις τιμές έχει θετική πιθανότητα. Δηλαδή αν η X παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ και $x_1 < x_2 < \dots$, τότε:

$$P(\{\omega / X(\omega) = x_k\}) = p_k > 0, \quad k=1, 2, \dots$$

Είναι φανερό ότι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\{X=x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

1.3.5 Ορισμός

Αν X είναι μια διακριτή τ.μ., τότε η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = P\{X=x\} = \begin{cases} p_k, & x=x_k, \quad k=1, 2, \dots \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

καλείται **πυκνότητα πιθανότητας (π.π.)** της τ.μ. X (probability density function).

Είναι φανερό ότι η πυκνότητα πιθανότητας μιας διακριτής τ.μ. ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $f_X(x) \geq 0$ και

(β) $\sum_{n=1}^{\infty} f_X(x_n) = 1$.

1.3.6 Χρήσιμες π.π. διακριτών τ.μ.

Ορισμένες βασικές (διακριτές) πυκνότητες πιθανότητας είναι και οι παρακάτω. Θα λέμε ότι μια τ.μ. X **ακολουθεί**:

(α) την **διωνυμική κατανομή** (binomial distribution) με παραμέτρους n και p , αν η π.π. της δίνεται από την:

$$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

Αν έχουμε ένα διωνυμικό πείραμα τύχης (δηλαδή ένα πείραμα τύχης με δυο δυνατά αποτελέσματα, τα οποία καλούμε «επιτυχία» και «αποτυχία») με πιθανότητα επιτυχίας p , το οποίο επαναλαμβάνουμε ανεξάρτητα (δηλαδή μιά επανάληψη δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα μιας άλλης) κάτω από τις ίδιες θεωρητικά συνθήκες n φορές, η πιθανότητα επιτυχίας p παραμένει σταθερή και η τ.μ. X παριστάνει τον αριθμό των επιτυχιών που έχουμε στις n επαναλήψεις

του διωνυμικού π.τ., τότε η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p

- (β) την **κατανομή Poisson** (Poisson distribution) με παράμετρο λ , με $\lambda > 0$, αν η π.π. της ισούται με:

$$P\{X=k\}=e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Αν X είναι μια τ.μ. που μετρά ποσότητες όπως:

- (1) ο αριθμός των ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια συγκεκριμένη διασταύρωση κατά την διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος
- (2) ο αριθμός των αεροπλάνων που φτάνουν σ' ένα μεγάλο αεροδρόμιο
- (3) ο αριθμός των τηλεφωνημάτων που φτάνουν σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο

Αλλά και ποσότητες όπως

- (4) ο αριθμός των γαλαξιών που υπάρχουν σε μια συγκεκριμένη περιοχή του σύμπαντος

τότε η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με κάποια παράμετρο λ .

(γ)

(i)

την **γεωμετρική(1) κατανομή X** (shifted geometric distribution) με παράμετρο r , με $0 < r < 1$, η οποία αντιστοιχεί σε (διωνυμικό) πείραμα στο οποίο η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε προσπάθεια είναι r (της αποτυχίας $1-r$), οπότε η πιθανότητα να έχουμε για *πρώτη φορά επιτυχία στην k -οστή προσπάθεια* είναι :

$$P\{X=k\}=r(1-r)^{k-1}, \quad k=1,2,\dots$$

(η τ.μ. X μετρά τον αριθμό των προσπαθειών μέχρι να έχουμε την I^{η} επιτυχία, σ' ένα διωνυμικό πείραμα τύχης)

και ισοδύναμα:

(ii)

την **γεωμετρική(2) κατανομή Y** (geometric distribution) με παράμετρο r , με $0 < r < 1$, η οποία αντιστοιχεί σε (διωνυμικό) πείραμα στο οποίο η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε προσπάθεια είναι r (της αποτυχίας $1-r$), οπότε η πιθανότητα να έχουμε k αποτυχίες πριν από την πρώτη επιτυχία είναι :

$$P\{Y=k\}=r(1-r)^k, \quad k=0,1,2,\dots$$

(η Y μετρά τον αριθμό των αποτυχημένων προσπαθειών μέχρι την I^{η} επιτυχία, σ' ένα διωνυμικό πείραμα τύχης).

Μια από τις βασικές (χρήσιμες) ιδιότητες της γεωμετρικής κατανομής είναι η λεγόμενη ιδιότητα της αμνησίας.

Ιδιότητα της αμνησίας (memoryless)

Η γεωμετρική κατανομή έχει μια πολύ σημαντική ιδιότητα την οποία καλούμε ιδιότητα της **αμνησίας**. Σύμφωνα με αυτήν: τα αποτελέσματα του παρελθόντος δεν επηρεάζουν τις πιθανότητες για το μέλλον. Συμβολικά

$$P\{X > m + k / X > m\} = P\{X > k\},$$

για οποιουδήποτε μη αρνητικούς ακεραίους m και n

Απόδειξη

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{X > m+k / X > m\} &= \frac{P\{X > m+k \text{ και } X > m\}}{P\{X > m\}} = \frac{P\{X > m+k\}}{P\{X > m\}} = \\ &= \frac{(1-r)^{m+k}}{(1-r)^m} = (1-r)^k = P\{X > k\} \end{aligned}$$

■

1.3.7 Ορισμός

Αν το πλήθος των τιμών μιας τ.μ. X είναι ένα μη-αριθμήσιμο σύνολο S , και $P\{X=x\}=0, \forall x \in S$, τότε η τ.μ. X καλείται **συνεχής**.

Αν υπάρχει μια πραγματική, μη αρνητική συνάρτηση f_X , τέτοια ώστε:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

τότε η f_X καλείται **πυκνότητα πιθανότητας** (π.π.) της τ.μ. X

Από τον ορισμό της π.π., είναι εύκολο να δει κανείς ότι:

$$\alpha) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad \text{και}$$

$$\beta) \quad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \quad \text{για όλα τα } x \text{ για τα οποία η } f_X(x) \text{ είναι συνεχής.}$$

1.3.8 Χρήσιμες π.π. συνεχών τ.μ.

Ορισμένες βασικές (συνεχείς) πυκνότητες πιθανότητας είναι και οι παρακάτω. Θα λέμε ότι μια τ.μ. X **ακολουθεί**:

- (α) την **ομοιόμορφη κατανομή** (uniform distribution) με παραμέτρους α και β αν η π.π. της ορίζεται από την:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & x \in [\alpha, \beta], \alpha < \beta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα σημείο από το διάστημα (α, β) και η τ.μ. X παριστάνει την *τετμημένη του σημείου*, τότε η $X \approx U(\alpha, \beta)$

- (β) την **κανονική κατανομή** (normal distribution) με παραμέτρους μ και σ , αν η π.π. της είναι ίση με:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Αν $\mu=0$ και $\sigma=1$, τότε λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την **τυπική κανονική κατανομή** (standard normal distribution).

Αν μια τ.μ. μετρά ποσότητες όπως ύψος, βάρος, μήκος, εμβαδόν, όγκο, δείκτη ευφυΐας κ.λ.π τότε (συνήθως) η X ακολουθεί την κανονική κατανομή με κατάλληλες παραμέτρους μ και σ

- (γ) την **εκθετική κατανομή** (exponential distribution) με παράμετρο λ , με $\lambda > 0$, αν η π.π. της είναι ίση με:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Η σ.κ. της είναι } F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}.$$

Αν η τ.μ. X παριστάνει ποσότητες όπως: η διάρκεια ζωής μιάς ηλεκτρικής συσκευής, η διάρκεια εξυπηρέτησης ενός πελάτη σ'ένα σύστημα εξυπηρέτησης (στο οποίο οι αφίξεις είναι Poisson), τότε συνήθως η τ.μ. ακολουθεί την αρνητική εκθετική κατανομή.

Ιδιότητα της αμνησίας (memoryless)

Η εκθετική κατανομή (όπως και η γεωμετρική) έχει την ιδιότητα της αμνησίας, δηλαδή:

$$P\{X > s+t | X > t\} = P\{X > s\}, \text{ για όλα τα μη αρνητικά } s \text{ και } t.$$

Απόδειξη

Για οποιαδήποτε μη αρνητικά s και t ισχύει :

$$\begin{aligned} P\{X > s+t | X > t\} &= \frac{P\{X > s+t \text{ και } X > t\}}{P\{X > t\}} = \\ &= \frac{P\{X > s+t\}}{P\{X > t\}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P\{X > s\} \end{aligned}$$

■

- (δ) την **γάμμα κατανομή** (gamma distribution) με παραμέτρους α και λ με $\alpha, \lambda > 0$ αν η π.π. της ορίζεται από την σχέση:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

όπου η συνάρτηση:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

καλείται **συνάρτηση γάμμα**.

Μπορεί ναδειχθεί ότι: $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, απ' όπου συνεπάγεται ότι $\Gamma(n) = (n-1)!$, για $n=1,2,\dots$.

Η **αρνητική εκθετική κατανομή** είναι ειδική περίπτωση της γάμμα κατανομής για $\alpha=1$ και $\beta=1/\lambda$.

(ε) την **κατανομή Erlang**

Θεωρούμε k ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_k$ με κατανομή εκθετική με κοινή παράμετρο λ και συμβολίζουμε με X την τ.μ που ορίζεται από την ισότητα $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k$. Η κατανομή γάμμα στην οποία η παράμετρος α είναι ένας φυσικός αριθμός n ονομάζεται και κατανομή **Erlang**. Ο συνηθισμένος συμβολισμός για την τ.μ. X είναι $E_k(\lambda)$ ή απλά E_k και λέγεται **Erlang k-τάξης** ($k=1,2,\dots$).

Η π.π. της X αποδεικνύεται ότι είναι:

$$f_X(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} , \quad t > 0 .$$

Η σ.κ. της είναι:

$$F_X(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} , \quad t \geq 0 .$$

(στ) την **υπερεκθετική κατανομή** αν η X ακολουθεί με πιθανότητα p_i , $i=1,2,\dots,k$ μια εκθετική τ.μ. X_i με μέσο $\frac{1}{\mu_i}$. Για την υπερεκθετική τ.μ. χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $H_k(p_1, \dots, p_k; \mu_1, \dots, \mu_k)$ ή απλά H_k . Η π.π. είναι:

$$f_X(t) = \sum_{i=1}^k p_i \mu_i e^{-\mu_i t} , \quad t > 0$$

1.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΙΑΣ Τ.Μ.

Έστω X μια τ.μ. της οποίας η πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ είναι γνωστή. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε (όλες τις) πιθανότητες αναφορικά με την X . Υπάρχουν περιπτώσεις όμως που η κατανομή της τ.μ X είναι άγνωστη. Για να έχει λοιπόν κάποιος μια μερική εικόνα της κατανομής της X , ορίζει κάποιους αριθμούς που χαρακτηρίζουν (και καλούνται **παράμετροι** της τ.μ.) την X . Μερικές από αυτές τις παραμέτρους είναι η μέση τιμή, η διασπορά, οι ροπές και ορίζονται παρακάτω.

1.4.1 Ορισμός

Η **μέση τιμή** (mean) ή **μαθηματική ελπίδα** (expectation) μιας τ.μ. X με π.π. f_X είναι ο αριθμός:

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_X(x_n) & , \text{ αν } X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx & , \text{ αν } X \text{ συνεχής} \end{cases} ,$$

με την προϋπόθεση ότι οι ποσότητες του δεξιού μέλους έχουν νόημα (δηλαδή τόσο το άθροισμα όσο και το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένα).

Αν g είναι μια πραγματική συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $Y=g(X)$ είναι μια τ.μ. Η μέση τιμή της Y , όταν υπάρχει, υπολογίζεται:

$$E(Y) = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) f_X(x_n) & , \text{ αν } X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx & , \text{ αν } X \text{ συνεχής} \end{cases} .$$

1.4.2 Ορισμός

(α) Αν $g(x)=x^r$, τότε η μέση τιμή της $Y=g(X)$ καλείται **ροπή r-τάξεως** της τ.μ X .

(β) Αν $g(x) = (x-E(X))^r$, τότε η μέση τιμή της $Y=g(X)$ καλείται **κεντρική ροπή r-τάξεως** της τ.μ. X .

(γ) Αν $g_r(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)$, τότε η μέση τιμή της τ.μ. $Y=g(X)$ καλείται **παραγοντική ροπή r-τάξεως** της τ.μ X .

Η ροπή πρώτης τάξεως μιας τ.μ. είναι η μέση της τιμή, ενώ η κεντρική ροπή πρώτης τάξης είναι πάντα μηδέν.

Μια ποσότητα εξ ίσου ενδιαφέρουσα, με την μέση τιμή μίας τ.μ., είναι η κεντρική ροπή δεύτερης τάξης της η οποία καλείται **διασπορά** της τ.μ. Η διασπορά λοιπόν μιας τ.μ. X δίνεται από την σχέση:

$$\sigma^2(X) = V(X) = E[(X - (EX))^2] = E(X^2) - (EX)^2$$

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς καλείται **τυπική απόκλιση** της τ.μ. Οι μονάδες μέτρησης της διασποράς είναι τα τετράγωνα των μονάδων μέτρησης της τ.μ.

Ένα μέτρο απαλλαγμένο από μονάδες είναι ο **συντελεστής μεταβλητότητας** C_X^2 ο

οποίος ορίζεται από την $C_X^2 \equiv \frac{\sigma_X^2}{(E[X])^2}$.

1.5 ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ Τ.Μ.

Έστω X_1, X_2 δύο διακριτές τ.μ. οι οποίες ορίζονται στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο Ω και οι οποίες παίρνουν τιμές σ' ένα σύνολο S .

1.5.1 Ορισμός (για διακριτές τ.μ.)

(1) Αν ορίσουμε μια συνάρτηση f_{X_1, X_2} στο $S \times S$, από τον τύπο:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\},$$

τότε η συνάρτηση αυτή καλείται **από κοινού π.π.** των τ.μ. X_1, X_2 , έχει δε τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \geq 0$, $\forall (x_1, x_2) \in S \times S$

(β) $P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\} = \sum_{X_1 \in B_1} \sum_{X_2 \in B_2} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$, $\forall B_1, B_2 \in S$ γεγονότα

και ιδιαίτερα:

$$\sum_{x_1 \in S} \sum_{x_2 \in S} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 1$$

(2) Η συνάρτηση f_{X_1} που ορίζεται από την σχέση:

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2),$$

είναι η π.π. της τ.μ. X_1 . Οι π.π. $f_{X_1}(x)$, $f_{X_2}(x)$ καλούνται **περιθωριακές π.π.** της $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$.

(3) Η συνάρτηση F_{X_1, X_2} που δίνεται από την σχέση:

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = \sum_{t_1 \leq x_1} \sum_{t_2 \leq x_2} f_{X_1, X_2}(t_1, t_2),$$

καλείται **από κοινού σ.κ.** των τ.μ. X_1, X_2 , οι δε ιδιότητες της είναι ανάλογες εκείνων της συνάρτησης κατανομής μιας τ.μ.

(4) Αν για κάθε x_2 τέτοιο ώστε $f_{x_2}(x_2) > 0$, ορίσουμε την συνάρτηση $f_{x_1, x_2}(\cdot | x_2)$ από την σχέση:

$$f_{x_1, x_2}(x_1 | x_2) = \frac{f_{x_1, x_2}(x_1, x_2)}{f_{x_2}(x_2)} = P\{X_1 = x_1 | X_2 = x_2\} \quad ,$$

τότε η συνάρτηση αυτή καλείται **δεσμευμένη (ή υπό συνθήκες) π.π.** της τ.μ. X_1 **δοθέντος** ότι $X_2 = x_2$.

Έστω τώρα X_1, X_2 δυο συνεχείς τ.μ. οι οποίες ορίζονται στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο Ω , και οι οποίες παίρνουν τιμές σ' ένα σύνολο S .

1.5.2 Ορισμός (για συνεχείς τ.μ.)

(1) Αν υπάρχει μια συνάρτηση f_{x_1, x_2} στο $S \times S$ τ.ω:

$$(\alpha) \quad f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) \geq 0 \quad , \quad \forall (x_1, x_2) \in S \times S$$

$$(\beta) \quad P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\} = \int_{B_1} \int_{B_2} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad , \quad \forall B_1, B_2 \in S \text{ γεγονότα}$$

και ιδιαίτερα :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad ,$$

τότε η συνάρτηση f_{x_1, x_2} καλείται **από κοινού π.π.** των τ.μ. X_1, X_2 .

(2) Η συνάρτηση f_{x_1} που ορίζεται από την σχέση:

$$f_{x_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_2$$

είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. X_1 . Οι π.π. f_{x_1} , f_{x_2} καλούνται **περιθωριακές π.π.** της f_{x_1, x_2} .

(3) Η συνάρτηση F_{x_1, x_2} που ορίζεται από την σχέση:

$$F_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{x_1, x_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

καλείται **από κοινού σ.κ.** των τ.μ. X_1, X_2 .

(4) Αν για κάθε x_2 τέτοιο ώστε $f_{x_2}(x_2) > 0$, ορίσουμε την συνάρτηση $f_{x_1, x_2}(\cdot | x_2)$ από την σχέση:

$$f_{X_1, X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

τότε η συνάρτηση αυτή καλείται **δεσμευμένη** (ή **υπό συνθήκες**) **π.π.** της τ.μ. X_1 **δοθέντος** ότι $X_2=x_2$.

Όλοι οι παραπάνω ορισμοί γενικεύονται και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από δυο τ.μ (διακριτές ή συνεχείς).

Αν X_1, X_2 δυο τ.μ. και $Y=g(X_1, X_2)$ μία τ.μ. η οποία είναι συνάρτηση των τ.μ. X_1, X_2 τότε:

1.5.3 Ορισμός

Η **μαθηματική ελπίδα** (ή **μέση τιμή**) της τ.μ. $Y=g(X_1, X_2)$ ορίζεται από την σχέση:

$$EY = E[g(X_1, X_2)] = \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} g(x_1, x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) & , \quad X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & , \quad X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

με την προϋπόθεση ότι οι ποσότητες του δεξιού μέλους έχουν νόημα (δηλαδή είναι πεπερασμένες).

1.5.4 Ορισμός

Η **διασπορά** της τ.μ. $Y=g(X_1, X_2)$ ορίζεται από την σχέση:

$$\sigma^2(Y) = \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} [g(x_1, x_2) - E[g(X_1, X_2)]]^2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) & , \quad X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x_1, x_2) - E[g(X_1, X_2)]]^2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & , \quad X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

όταν οι ποσότητες του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένες.

1.5.5 Ορισμός

Η **συνδιασπορά** των τ.μ. X_1, X_2 ορίζεται να είναι ο παρακάτω αριθμός:

$$C(X_1, X_2) = E[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)] = E(X_1 X_2) - EX_1 EX_2$$

Η συνδιασπορά $C(X_1, X_2)$ είναι ένα **μέτρο** της **συσχέτισης** των τ.μ. X_1, X_2 . Όταν $C(X_1, X_2) > 0$, τότε αν η μια τ.μ. αυξάνει τότε αυξάνει και η άλλη κατά μέσον όρο. Όταν $C(X_1, X_2) < 0$, τότε αν η μια τ.μ. αυξάνει τότε η άλλη μικραίνει κατά μέσον όρο. Αν $C(X_1, X_2) = 0$ τότε οι τ.μ. X_1, X_2 καλούνται **ασυσχέτιστες**.

Το επόμενο βασικό θεώρημα μας δίνει το εύρος των τιμών της συνδιασποράς δύο τυχαίων μεταβλητών.

1.5.6 Θεώρημα (Ανισότητα του Schwartz)

$$-\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} \leq C(X_1, X_2) \leq \sigma_{X_1}\sigma_{X_2} .$$

Απόδειξη

Αν θέσουμε σαν $Z = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}$, $W = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$, τότε $EZ = EW = 0$ και $\sigma^2(Z) = \sigma^2(W) = 1$ ενώ

$$EZW = E\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \cdot \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) = \frac{1}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} C(X_1, X_2) . \text{ Τώρα}$$

$$0 \leq E(Z+W)^2 = EZ^2 + EW^2 + 2EZW = 2 + \frac{2}{\sigma_1 \sigma_2} C(X_1, X_2) \Rightarrow$$

$$C(X_1, X_2) \geq -\sigma_1 \sigma_2$$

Ανάλογα

$$0 \leq E(Z-W)^2 = EZ^2 + EW^2 - 2EZW = 2 - \frac{2}{\sigma_1 \sigma_2} C(X_1, X_2) \Rightarrow$$

$$C(X_1, X_2) \leq \sigma_1 \sigma_2$$

■

1.5.7 Θεώρημα (Ισότητα του Bienayme)

(α) Αν X_1, X_2 είναι δύο τ.μ. τ.ω. $EX_1^2 < \infty, EX_2^2 < \infty$, τότε:

$$\sigma^2(X_1 + X_2) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + 2C(X_1, X_2)$$

Αν επιπλέον οι τ.μ. X_1, X_2 είναι ασυσχέτιστες, τότε:

$$\sigma^2(X_1 + X_2) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2)$$

(β) Γενικότερα τώρα: αν $X_j, j=1, \dots, n$ τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά, τότε:

$$\sigma^2(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{j=1}^n \sigma_{X_j}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} C(X_i, X_j) .$$

Αν οι τ.μ. $X_j, j=1, \dots, n$ είναι ανά δύο ασυσχέτιστες, τότε έχουμε:

$$\sigma^2(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{j=1}^n \sigma_{X_j}^2$$

Απόδειξη

Αναπτύσσοντας την διασπορά, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sigma^2(X_1 + X_2) &= E(X_1 + X_2)^2 - [E(X_1 + X_2)]^2 = EX_1^2 + EX_2^2 + 2EX_1X_2 - (EX_1)^2 - (EX_2)^2 - 2EX_1EX_2 \\ &= EX_1^2 - (EX_1)^2 + EX_2^2 - (EX_2)^2 + 2(EX_1X_2 - EX_1EX_2) \\ &= \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + 2C(X_1, X_2) \end{aligned}$$

■

1.5.8 Ορισμός

Η δεσμευμένη (ή υπό συνθήκες) μέση τιμή της τ.μ. X_1 δοθέντος ότι $X_2=x_2$ ορίζεται από την σχέση:

$$E(X_1|X_2=x_2)=\begin{cases} \sum_{x_1} x_1 f_{X_1,X_2}(x_1|x_2) & , \quad X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1,X_2}(x_1|x_2) dx_1 & , \quad X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

1.5.9 Ορισμός

Η δεσμευμένη (ή υπό συνθήκες) διασπορά της τ.μ. X_1 δοθέντος ότι $X_2=x_2$ ορίζεται από την σχέση

$$\sigma^2(X_1|X_2=x_2)=\begin{cases} \sum_{x_1} [x_1-E(X_1|X_2=x_2)]^2 f_{X_1,X_2}(x_1|x_2) & , \quad X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{\infty} [x_1-E(X_1|X_2=x_2)]^2 f_{X_1,X_2}(x_1|x_2) dx_1 & , \quad X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases} .$$

1.5.10 Παρατήρηση

Είναι φανερό από τον ορισμό 1.5.8 ότι η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X_1 δοθέντος ότι $X_2=x_2$ είναι μια συνάρτηση του x_2 , έστω $\varphi(x_2)$, δηλαδή:

$$\varphi(x_2)=E(X_1|X_2=x_2) .$$

Η τ.μ. $\varphi(X_2)$ παριστάνεται επίσης και σαν $E(X_1|X_2)$. Δηλαδή η τ.μ. $E(X_1|X_2)$ ορίζεται από την σχέση:

$$E(X_1|X_2)(x)=\varphi(x)=E(X_1|X_2=x)$$

Επειδή η $E(X_1|X_2)$ είναι μια τ.μ. έχει νόημα να μιλάμε για την μέση τιμή της.

1.5.11 Θεώρημα

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) $E\{E[g(X_1, X_2)|X_1]\}=E[g(X_1, X_2)]$
- (ii) $E[g_1(X_1)g_2(X_1, X_2)|X_1]=g_1(X_1)E[g_2(X_1, X_2)|X_1]$
- (iii) $\sigma^2[E(X_1|X_2)] \leq \sigma^2(X_1)$

με την προϋπόθεση ότι όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται παραπάνω έχουν νόημα.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε εδώ τα (i), (ii), (iii) στην περίπτωση συνεχών τ.μ. Οι αποδείξεις για διακριτές τ.μ. είναι ανάλογες.

- (i) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε

$$\begin{aligned}
E[E[g(X_1, X_2)|X_1]] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[g(X_1, X_2)|X_1=x_1] f_{X_1}(x_1) dx_1 = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) f_{X_1}(x_1) dx_2 dx_1 = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} f_{X_1}(x_1) dx_2 dx_1 = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\
&= E[g(X_1, X_2)]
\end{aligned}$$

(ii) Για κάθε τιμή x_1 , έχουμε

$$\begin{aligned}
E[g_1(X_1)g_2(X_1, X_2)|X_1=x_1] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x_1)g_2(x_1, x_2)f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)dx_2 = \\
&= g_1(x_1) \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x_1, x_2)f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)dx_2 \\
&= g_1(x_1) E[g_2(X_1, X_2)|X_1=x_1]
\end{aligned}$$

Επομένως (επειδή η σχέση ισχύει για κάθε τιμή x_1), παίρνουμε

$$E[g_1(X_1) \cdot g_2(X_1, X_2)|X_1] = g_1(X_1) \cdot E[g_2(X_1, X_2)|X_1]$$

(i) Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι:

$$\sigma^2(X_1) = \sigma^2[E(X_1|X_2)] + E[\sigma^2(X_1|X_2)]$$

Από την σχέση αυτή και επειδή $\sigma^2(X_1|X_2) \geq 0$, έπεται ότι $E[\sigma^2(X_1|X_2)] \geq 0$,
οπότε $\sigma^2(X_1) \geq \sigma^2[E(X_1|X_2)]$

■

Δύο σπουδαίες εφαρμογές της δεσμευμένης μ.τ. δίνονται στην πρόταση που ακολουθεί.

1.5.12 Πρόταση

Αν X_1, X_2 δύο τότε:

$$(i) \quad EX_2 = \sum_{x_1} E[X_2|X_1=x_1] f_{X_1}(x_1) \quad \text{για διακριτές τ.μ.}$$

$$(ii) \quad EX_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X_2|X_1=x_1] f_{X_1}(x_1) dx_1 \quad \text{για συνεχείς τ.μ.}$$

Ακόμα:

$$(iii) \quad P(A) = \sum_{x_1} P\{A|X_1=x_1\} P\{X_1=x_1\} \quad \text{για διακριτές τ.μ.}$$

$$(iv) \quad P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{A|X_1=x_1\} f_{X_1}(x_1) dx_1 \quad \text{για συνεχείς τ.μ.}$$

Απόδειξη

Δείτε π.χ. S. Ross: "Introduction to Probability Models", 8th ed., academic press, 2003, international edition, σελ. 106 και 119. ■

1.6 ΑΘΡΟΙΣΜΑ Τ.Μ.

Πολλές φορές έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y με γνωστές κατανομές και προσπαθούμε να υπολογίσουμε, εφ' όσον είναι δυνατόν, την κατανομή του αθροίσματος $Z=X+Y$. Θα θέλαμε δηλαδή να περιγράψουμε, μ' έναν συστηματικό τρόπο, την π.π. της τ.μ. Z από τις π.π. των τ.μ. X, Y . Το πρώτο βήμα για να αναπτύξουμε μια συστηματική τεχνική για τον υπολογισμό της κατανομής της τ.μ. $Z=X+Y$ είναι να βρούμε έναν τύπο για την περιγραφή της π.π. της Z , όταν X και Y έχουν από κοινού π.π. $f(x, y)$.

1.6.1 Θεώρημα (για διακριτές τ.μ.)

Αν X, Y δύο διακριτές τ.μ. με α.κ.π.π. την $f(x, y)$, τότε η π.π. της $Z=X+Y$ είναι ίση με:

$$P(Z=z) = \sum_x f(x, z-x)$$

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι:

$$\{Z=z\} = \bigcup_x (\{X=x\} \cap \{Y=z-x\})$$

που είναι μια ένωση από ασυμβίβαστα γεγονότα επομένως:

$$P(Z=z) = \sum_x P(X=x, Y=z-x) = \sum_x f(x, z-x).$$

Ομοίως για την συνεχή περίπτωση ■

1.6.2 Θεώρημα

Αν X, Y δύο συνεχείς τ.μ. με α.κ.π.π. την $f(x, y)$, τότε η π.π. της $Z=X+Y$ είναι ίση με:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx$$

Απόδειξη

Έστω:

$$A = \{(x, y) : x+y \leq z\}. \text{ Τότε } P\{Z \leq z\} = \iint_A f(u, v) du dv = \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{z-u} f(u, v) dv du =$$

(αντικαθιστώντας $x=u, y=v+u$)

$$= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^z f(x, y-x) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx$$

■

1.6.3 Ορισμός

Ονομάζουμε **συνέλιξη** (convolution) των π.π. f_X, f_Y των τ.μ. X και Y αντίστοιχα, την π.π. της τ.μ. $Z=X+Y$ δηλ. την $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx$. Συμβολίζουμε $f_{X+Y}=f_X*f_Y$

Στην περίπτωση ανεξαρτησίας των τ.μ. X και Y , το θεώρημα 1.6.2, γίνεται:

1.6.4 Θεώρημα

Αν X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε:

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

Απόδειξη

Προκύπτει από το θεώρημα 1.6.2 και την ανεξαρτησία των τ.μ. μεταβλητών X,Y . ■

Ανάλογη μορφή, στην περίπτωση της ανεξαρτησίας, έχει και το θεώρημα 1.6.1

1.7 ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ - ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ

Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών μπορεί να περιέχει αρκετές πληροφορίες. Ένας τρόπος για να «αποθηκεύσει» κανείς αυτές τις πληροφορίες είναι με την βοήθεια μιας ειδικής κατηγορίας συναρτήσεων, που ορίζονται με την βοήθεια της ακολουθίας, και οι οποίες ονομάζονται **γεννήτριες συναρτήσεις**. Δύο τέτοιες γεννήτριες συναρτήσεις (η πιθανογεννήτρια και η ροπογεννήτρια) μιάς τ.μ. ορίζονται παρακάτω.

1.7.1 Ορισμός

Έστω $\alpha=\{\alpha_i:i=0,1,2,\dots\}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Καλούμαι **γεννήτρια συνάρτηση** (generating function) της ακολουθίας α την συνάρτηση:

$$P_{\alpha}(s)=\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i s^i$$

για όλα εκείνα τα s , πραγματικούς αριθμούς, για τα οποία το άθροισμα του δεξιού μέλους συγκλίνει.

1.7.2 Παρατήρηση

Η ακολουθία α μπορεί να δημιουργηθεί από την γεννήτριά, χρησιμοποιώντας την ισότητα:

$$\alpha_i = \frac{P_{\alpha}^{(i)}(0)}{i!}$$

όπου με $P_{\alpha}^{(i)}$ εννοούμε την i -ιοστή παράγωγο της γεννήτριας συνάρτησης $P_{\alpha}(s)$ (έτσι δικαιολογείται και η ονομασία γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας).

Σε πολλές περιπτώσεις είναι πιο εύκολο να δουλεύουμε με την γεννήτρια παρά με την ίδια την ακολουθία.

1.7.3 Ορισμός

Έστω X μια τ.μ. που παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές $n = 0, 1, 2, \dots$ με αντίστοιχες πιθανότητες $P\{X = n\} = p(n)$, Ονομάζουμε **πιθανογεννήτρια συνάρτηση** ή **γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας** (probability generating function) της τ.μ. X , την γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας των τιμών $a_n = p(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, δηλαδή την συνάρτηση P_X που ορίζεται από την:

$$P_X(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n, \quad ,$$

για όλα εκείνα τα z για τα οποία η παραπάνω σειρά συγκλίνει.

1.7.4 Πρόταση

Από τον ορισμό της πιθανογεννήτριας συνάρτησης, προκύπτουν άμεσα οι παρακάτω ιδιότητες.

- (α) $P_X(z) = E[z^X]$
- (β) Για τις τιμές του z : $-1 \leq z \leq 1$ προκύπτει $-1 \leq P_X(z) \leq 1$ και η σειρά συγκλίνει.
- (γ) $P_X(0) = P\{X=0\}$ και $P_X(1) = 1$

1.7.5 Πρόταση

(α) Ισχύει:

$$E[X(X-1)\dots(X-k+1)] = P_X^{(k)}(1)$$

ειδικότερα: $E[X] = P_X'(1)$

- (β) $\text{var}(X) = P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2$
- (γ) Αν η π.π. της X είναι $f_X(n) = A\alpha_0^n + B\alpha_1^n$ τότε η γεννήτρια συνάρτησή της είναι

$$P_X(z) = \frac{A}{1-\alpha_0 z} + \frac{B}{1-\alpha_1 z}$$

(και αντιστρόφως) για όλα εκείνα τα z για τα οποία η $P_X(z)$ έχει νόημα.

Απόδειξη

(α) Παραγωγίζοντας την P_X ως προς z , k φορές έχουμε

$$P_X^{(k)}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} z^{i-k} i(i-1)\dots(i-(k-1))P\{X=i\} = E[z^{X-k} X(X-1)\dots(X-(k-1))]$$

από την οποία προκύπτει αμέσως το ζητούμενο.

(β)

$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[X(X-1) + X] - [E(X)]^2 =$$

$$= E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 = P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2$$

(γ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\frac{1}{1-\alpha z} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i z^i$ έχουμε:

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_X(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A\alpha_0^n + B\alpha_1^n) z^n = A \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n z^n + B \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n z^n = A \frac{1}{1-\alpha_0 z} + B \frac{1}{1-\alpha_1 z}$$

Για το αντίστροφο:

$$P_X(z) = A \frac{1}{1-\alpha_0 z} + B \frac{1}{1-\alpha_1 z} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_X(n) z^n = A \frac{1}{1-\alpha_0 z} + B \frac{1}{1-\alpha_1 z} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_X(n) z^n = A \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n z^n + B \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n z^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_X(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A\alpha_0^n + B\alpha_1^n) z^n \Rightarrow$$

$$f_X(n) = A\alpha_0^n + B\alpha_1^n$$

■

1.7.6 Ορισμός

Αν X τ.μ., ονομάζουμε **ροπογεννήτρια συνάρτηση** (moment generating function) της τ.μ. X , την συνάρτηση M_X που ορίζεται από την:

$$M_X(t) \equiv E[e^{tX}]$$

με την προϋπόθεση να είναι πεπερασμένα το ολοκλήρωμα (μέση τιμή) για την συνεχή και το άθροισμα για την διακριτή περίπτωση. Δηλαδή:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f_X(x) & , \quad X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx & , \quad X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

1.7.7 Παρατήρηση

(α) Για την διακριτή περίπτωση: $M_X(t) = P_X(e^t)$

(β) Αναπτύσσοντας το e^t σε δυναμοσειρά, και παίρνοντας μέσες τιμές, προκύπτει $M_X(0) = 1$. Πράγματι:

$$e^{tX} = 1 + \frac{tX}{1!} + \frac{t^2 X^2}{2!} + \dots$$

Επομένως:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(1 + \frac{tX}{1!} + \frac{t^2 X^2}{2!} + \dots\right) = 1 + \frac{t}{1!} E(X) + \frac{t^2}{2!} E(X^2) + \dots$$

και για $t=0$, $M_X(0)=1$

Στη συνέχεια παίρνοντας παράγωγο, έχουμε:

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = E(X) + \frac{2t}{2!} E(X^2) + \frac{3t^2}{3!} E(X^3) + \dots = E(X) + \frac{t}{1!} E(X^2) + \frac{t^2}{2!} E(X^3) + \dots$$

και συνεχίζοντας να παραγωγίζουμε:

$$\frac{d^n}{dt^n} M_X(t) = E(X^n) + \frac{t}{1!} E(X^{n+1}) + \frac{t^2}{2!} E(X^{n+2}) + \dots$$

Θέτοντας $t=0$ προκύπτει:

$$M_X^{(n)}(0) = E[X^n]$$

από την οποία δικαιολογείται και η ονομασία **ροπογεννήτρια** (με την προϋπόθεση ότι η ροπή n -ιστής τάξης του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένη) .

1.7.8 Θεώρημα

Έστω X, Y τ.μ. με σ.κ. και ροπογεννήτριες F_X, F_Y, M_X, M_Y αντίστοιχα . Τότε $M_X(t) = M_Y(t)$ για όλα τα t αν και μόνο αν $F_X(z) = F_Y(z)$ για όλα τα z . Δηλαδή, μ' άλλα λόγια η ροπογεννήτρια καθορίζει μονοσήμαντα την κατανομή .

Απόδειξη

Δείτε π.χ. σελ. 276 θεώρημα 11 «An introduction to Measure Theoretic Probability» George G. Roussas ή σελ. 210 θεώρημα 4.6 «Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications» Kishor S. Trivedi

■

1.7.9 Ορισμός

Αν X_1, X_2 δύο τ.μ. με α.κ.π.π. την $f(x, y)$, η **από κοινού ροπογεννήτρια** τους δίνεται από την:

$$M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) & , \quad X_1, X_2 \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & , \quad X_1, X_2 \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

Η έννοια του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης επεκτείνεται και είναι χρήσιμη και στην περίπτωση των τ.μ.

1.7.10 Ορισμός

Για μια πραγματική συνάρτηση $h(t)$ με $t \geq 0$, ο **μετασχηματισμός** (transform) **Laplace-Stieltjes**, συμβολίζεται με $\tilde{h}$, και ορίζεται από την:

$$\tilde{h}(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-sx} h(x) dx .$$

Στην ειδική περίπτωση που η συνάρτηση h είναι η π.π. μιας μη αρνητικής τ.μ. X , η οποία έχει σ.κ. $F_X(\cdot)$ τότε, άμεσα προκύπτει:

$$\tilde{h}(s) = M_X(-s).$$

Για την περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$\tilde{X}(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_X(x) \quad \text{με } s \geq 0.$$

1.7.11 Πρόταση

Αν X μια τ.μ. με μετασχηματισμό Laplace $\tilde{X}$, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (1) $|\tilde{X}(s)| \leq 1$, για κάθε $s \geq 0$
- (2) $\tilde{X}(0) = 1$
- (3) $\tilde{X}'(0) = -E(X)$
- (4) $\tilde{X}^{(k)}(0) = (-1)^k E(X^k)$
- (5) Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. και $Z = X + Y$ τότε:

$$\tilde{Z}(s) = \tilde{X}(s)\tilde{Y}(s)$$

Απόδειξη

- (1) Προφανής

$$(2) \quad \tilde{X}(0) = \int_0^{\infty} 1 f_X(x) dx = 1$$

$$(3) \quad \frac{d}{ds} \tilde{X}(s) = \frac{d}{ds} \left(\int_0^{\infty} e^{-sx} f_X(x) dx \right) = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-sx}) f_X(x) dx = \int_0^{\infty} -x (e^{-sx}) f_X(x) dx$$

και για $s=0$ προκύπτει

$$\tilde{X}'(0) = - \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = -E(X)$$

- (4)

$$\frac{d}{ds} \tilde{X}(s) = - \int_0^{\infty} x (e^{-sx}) f_X(x) dx$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \tilde{X}(s) = - \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (x e^{-sx} f_X(x)) dx = - \int_0^{\infty} x f_X(x) (-x) e^{-sx} dx = (-1)^2 \int_0^{\infty} x^2 f_X(x) e^{-sx} dx$$

και εργαζόμενοι ομοίως προκύπτει:

$$\frac{d^k}{ds^k} \tilde{X}(s) = (-1)^k \int_0^{\infty} x^k f_X(x) e^{-sx} dx \quad \text{και για } s=0$$

$$\frac{d^k}{ds^k} \tilde{X}(0) = (-1)^k \int_0^{\infty} x^k f_X(x) dx = (-1)^k E(X^k)$$

$$(5) \quad \tilde{Z}(s) = M_Z(-s) = E(e^{-sZ}) = E(e^{-s(X+Y)}) = E(e^{-sX} e^{-sY})$$

αλλά οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες οπότε και οι τ.μ. e^{-sX} και e^{-sY} είναι επίσης ανεξάρτητες άρα η ελπίδα του γινομένου τους ισούται με το γινόμενο των ελπίδων τους, επομένως

$$\tilde{Z}(s) = E(e^{-sX} e^{-sY}) = E(e^{-sX}) E(e^{-sY}) = M_X(-s) M_Y(-s) = \tilde{X}(s) \tilde{Y}(s)$$

■

1.7.12 Εφαρμογές σε χρήσιμες κατανομές

(α) Η διωνυμική τ.μ. X με παραμέτρους n και p , με $0 < p < 1$ έχει:

- (i) μέση τιμή $E(X) = np$,
- (ii) διασπορά $\sigma^2(X) = np(1-p)$,
- (iii) γεννήτρια συνάρτηση $P_X(z) = 1 - p + pz$ και
- (iv) ροπογεννήτρια $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$, με t πραγματικό αριθμό.

(β)

(Α)

Η γεωμετρική τ.μ. X με παράμετρο r , με $0 < r < 1$ και π.π.

$P\{X=k\} = r(1-r)^{k-1}$, $k=1, 2, \dots$, έχει:

- (i) γεννήτρια συνάρτηση $P_X(z) = \frac{rz}{1 - (1-r)z}$,
- (ii) μέση τιμή $E(X) = \frac{1}{r}$ και
- (iii) διασπορά $\sigma^2(X) = \frac{1-r}{r^2}$.

(Β)

Η γεωμετρική τ.μ. Y με παράμετρο r , με $0 < r < 1$ και π.π.

$P\{X=k\} = r(1-r)^k$, $k=0, 1, 2, \dots$, έχει:

- (i) γεννήτρια συνάρτηση $P_X(z) = \frac{r}{1 - (1-r)z}$,
- (ii) μέση τιμή $E(X) = \frac{1-r}{r}$ και
- (iii) διασπορά $\sigma^2(X) = \frac{1-r}{r^2}$.

(γ) Η Poisson τ.μ. X με παράμετρο λ , με $\lambda > 0$, έχει:

- (i) γεννήτρια συνάρτηση $P_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}$,
- (ii) μέση τιμή $E(X) = \lambda$,
- (iii) διασπορά $\sigma^2(X) = \lambda$ και
- (iv) συντελεστή μεταβλητότητας $c_X^2 = \frac{1}{\lambda}$.

(δ) Η εκθετική τ.μ. X με παράμετρο λ , με $\lambda > 0$, έχει:

(i) μέση τιμή $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

(ii) διασπορά $\sigma^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(iii) Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes δίνεται από την σχέση

$$\tilde{X}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

(ε) Η κατανομή **Erlang k-τάξης** έχει:

(i) μέση τιμή $E[X] = \frac{k}{\lambda}$,

(ii) η διασπορά της είναι $\sigma^2(X) = \frac{k}{\lambda^2}$

(iii) ο συντελεστής μεταβλητότητας $c_X^2 = \frac{1}{\lambda}$.

(iv) Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes δίνεται από την σχέση:

$$\tilde{X}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^k$$

(στ) Η υπερεκθετική κατανομή $H_k(p_1, \dots, p_k; \mu_1, \dots, \mu_k)$ έχει:

(i) μέση τιμή $E[X] = \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{\mu_i}$.

(ii) Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes δίνεται από την σχέση:

$$\tilde{X}(s) = \sum_{i=1}^k \frac{p_i \mu_i}{\mu_i + s}$$

1.7.13 Μετασχηματισμοί σε συνδυασμούς κατανομών

Αν $X_1, \dots, X_n$ είναι συνεχείς τ.μ. με π.π. $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ αντίστοιχα και η π.π. της τ.μ. Y ορίζεται από την σχέση:

$$f_Y(y) = p_1 f_{X_1}(y) + \dots + p_n f_{X_n}(y)$$

τότε, από την σχέση αυτή και την γραμμικότητα της ροπογεννήτριας, προκύπτει άμεσα:

$$M_Y(s) = p_1 M_{X_1}(s) + \dots + p_n M_{X_n}(s)$$

1.7.14 Παράδειγμα

Σε μια τράπεζα υπάρχουν τρία ταμεία, δυο που εξυπηρετούν το ίδιο γρήγορα και ένα λίγο πιο αργό. Ο χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη στα δυο πρώτα, είναι εκθετικά κατανομημένος με παράμετρο $\lambda=6$ ενώ στο τρίτο επίσης εκθετικά κατανομημένος αλλά με $\lambda=4$. Ένας πελάτης μπαίνοντας στην τράπεζα επιλέγει με ίδια πιθανότητα ένα

από τα τρία ταμεία. Ποια είναι η π.π. του χρόνου εξυπηρέτησης και η ροπογεννήτρια (του χρόνου αυτού) γι' αυτόν τον συγκεκριμένο πελάτη;

Λύση

Η π.π. του χρόνου εξυπηρέτησης Y του πελάτη είναι:

$$\frac{2}{3}6e^{-6x} + \frac{1}{3}4e^{-4x}, \quad x \geq 0$$

(η εκθετική έχει π.π. $\lambda e^{-\lambda x}$ και ροπογεννήτρια $\frac{\lambda}{\lambda-s}$)

και η ροπογεννήτρια: $M(s) = \int_0^{\infty} e^{sx} \left(\frac{2}{3}6e^{-6x} + \frac{1}{3}4e^{-4x} \right) dx = \frac{2}{3} \frac{6}{6-s} + \frac{1}{3} \frac{4}{4-s}$.

Και το αντίστροφο πρόβλημα

Αν Y είναι μια τ.μ. με ροπογεννήτρια $M(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{2-s} + \frac{3}{4} \frac{1}{1-s}$ τότε $M(s) = \frac{1}{4} \frac{2}{2-s} + \frac{3}{4} \frac{1}{1-s}$ και αναγνωρίζουμε ότι η Y δημιουργείται από δυο εκθετικές τ.μ. (υπο την έννοια της πρότασης 1.7.13) με παραμέτρους 2 και 1 και πιθανότητες $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ αντίστοιχα.

■

1.8 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ Τ.Μ.

1.8.1 Ορισμός

Οι τ.μ X_1, X_2 καλούνται (στοχαστικά) ανεξάρτητες αν:

$$P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\} = P\{X_1 \in B_1\} P\{X_2 \in B_2\}$$

για οποιαδήποτε μετρήσιμα υποσύνολα (γεγονότα) B_1, B_2 των πραγματικών αριθμών.

Το παρακάτω θεώρημα δίνει ισοδύναμους ορισμούς της ανεξαρτησίας δυο τ.μ.

1.8.2 Θεώρημα

Οι τ.μ X_1, X_2 είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες αν και μόνον αν ισχύει μια από τις παρακάτω σχέσεις:

$$(\alpha) \quad F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$$

$$(\beta) \quad f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$

$$(\gamma) \quad M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = M_{X_1}(t_1) M_{X_2}(t_2)$$

Απόδειξη

Δείτε π.χ. Γ. Ρούσσας: «Στοιχεία Πιθανοθεωρίας μετ' εφαρμογών», Πάτρα 1973.

■

Άμεσες συνέπειες του ορισμού της ανεξαρτησίας δύο τυχαίων μεταβλητών δίνονται από την παρακάτω πρόταση.

1.8.3 Πρόταση

Αν οι τ.μ. X_1, X_2 είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες, τότε:

$$(1) E[g_1(X_1)g_2(X_2)] = E[g_1(X_1)]E[g_2(X_2)]$$

$$(2) M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

(3) Αν $Y_1 = g_1(X_1), Y_2 = g_2(X_2)$ τότε οι τ.μ. Y_1, Y_2 είναι και αυτές ανεξάρτητες.

Απόδειξη

Δείτε π.χ. Γ. Ρούσσας: «Στοιχεία Πιθανοθεωρίας μετ' εφαρμογών», Πάτρα 1973. ■

Τα παρακάτω δύο θεωρήματα είναι τα βασικότερα που συναντά κανείς στην Θεωρία Πιθανοτήτων.

1.8.4 Θεώρημα (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Αν οι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή και διασπορά και θέσουμε:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

τότε:

$$P\left\{\frac{S_n - ES_n}{\sigma(S_n)} \leq x\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x)$$

όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής την τυπικής κανονικής κατανομής.

1.8.5 Παρατήρηση

Ο τρόπος σύγκλισης, που περιγράφεται στο παραπάνω θεώρημα, λέγεται **σύγκλιση κατά κατανομή**.

Μ' άλλα λόγια το Κ.Ο.Θ. αναφέρει ότι, ανεξάρτητα από την κατανομή των τ.μ. $X_1, \dots, X_n$, η κατανομή της τ.μ. $\frac{S_n - ES_n}{\sigma(S_n)}$ είναι η τυποποιημένη κανονική ($N(0,1)$), ή

επειδή $ES_n = n\mu$, $\sigma^2(S_n) = n\sigma^2$, έχουμε:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

ή ισοδύναμα: $S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$

Αν $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$, έχουμε:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \approx N(0,1)$$

ή ισοδύναμα, η κατανομή του λεγόμενου δειγματικού μέσου:

$$\overline{X_n} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

1.8.6 Θεώρημα (Ισχυρός Νόμος Μεγάλων Αριθμών – Kolmogorov)

Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ μια ακολουθία ανεξαρτήτων και ταυτοτικά κατανομημένων τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά (δηλαδή $\sigma^2(X_k) = \sigma^2 < +\infty$, $k = 1, 2, \dots$). Τότε:

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{\sigma.β.} \mu$$

1.8.7 Παρατήρηση

Πολλές φορές συμβαίνει, το άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών (οι οποίες έχουν ίδιου τύπου κατανομή), να έχει και αυτό κατανομή του ίδιου τύπου. Η ιδιότητα αυτή των κατανομών, αυτών, καλείται **αναπαραγωγική ιδιότητα**. Η διωνυμική, η Poisson, η κανονική και η γάμμα κατανομή είναι μερικά παραδείγματα κατανομών που έχουν την ιδιότητα αυτή. Πράγματι, μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση:

1.8.9 Πρόταση

- (i) Αν $X_1, \dots, X_k$ ανεξάρτητες τ.μ. τέτοιες ώστε $X_j \approx B(n_j, p)$, $j=1, \dots, k$, τότε η τ.μ. $S_k = X_1 + \dots + X_k \approx B(n, p)$ όπου $n = n_1 + \dots + n_k$.
- (ii) Αν $X_1, \dots, X_k$ ανεξάρτητες τ.μ. τέτοιες ώστε $X_j \approx P(\lambda_j)$, $j=1, \dots, k$. Τότε η τ.μ. $S_k = X_1 + \dots + X_k \approx P(\lambda)$ όπου $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$.
- (iii) Αν $X_1, \dots, X_k$ ανεξάρτητες τ.μ. τέτοιες ώστε $X_j \approx N(\mu_j, \sigma_j^2)$, $j=1, \dots, k$. Τότε η τ.μ. $S_k = X_1 + \dots + X_k \approx N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_k$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2$.
- (iv) Αν $X_1, \dots, X_k$ ανεξάρτητες τ.μ. τέτοιες ώστε X_j , $j=1, \dots, k$ ακολουθεί την γάμμα κατανομή με παραμέτρους α_j, β . Τότε η τ.μ. $S_k = X_1 + \dots + X_k$ ακολουθεί την γάμμα κατανομή με παραμέτρους α, β όπου $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε εδώ το (i), τα υπόλοιπα αποδεικνύονται ανάλογα.

- (i) Χρησιμοποιώντας το μονοσήμαντο της αντιστοιχίας μεταξύ της πυκνότητας πιθανότητας μιας τ.μ. και της ροπογεννήτριας της, είναι αρκετό να δείξουμε ότι η ροπογεννήτρια της τ.μ. $S_k = X_1 + \dots + X_k$ είναι εκείνη μιας τ.μ. με κατανομή την $B(n, p)$. Από την ανεξαρτησία των τ.μ. $X_1, \dots, X_k$ έχουμε:

$$\begin{aligned} M_{S_k}(t) &= M_{X_1 + \dots + X_k}(t) = M_{X_1}(t) \dots M_{X_k}(t) = \\ &= (pe^t + q)^{n_1} \dots (pe^t + q)^{n_k} = (pe^t + q)^n \end{aligned}$$

και αυτή είναι η ροπογεννήτρια μιας $B(n, p)$ τ.μ. με $n = n_1 + \dots + n_k$.

■

1.8.10 Παρατήρηση

Υπάρχουν περιπτώσεις που η αναπαραγωγική ιδιότητα δεν ισχύει.

Για παράδειγμα αν X, Y είναι δύο ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή, το άθροισμά τους $X+Y$ δεν ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή (αλλά την λεγόμενη τριγωνική).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

2.1 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

2.1.1 Ορισμός

Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t \in T}$, οι οποίες ορίζονται συνήθως στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο Ω , καλείται **στοχαστική ανέλιξη** (stochastic process). Δηλαδή $\forall t \in T$, η συνάρτηση X_t είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Το σύνολο T καλείται **παραμετρικός χώρος** (index set) της ανέλιξης. Αν υποθέσουμε ότι κάθε μία από τις τ.μ. X_t παίρνει τιμές μέσα σε ένα σύνολο S τότε καλούμε το S **χώρο καταστάσεων** (state space) της ανέλιξης.

2.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

Τα χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τις στοχαστικές ανελιξεις, και με την βοήθεια των οποίων γίνεται η ταξινόμησή τους, είναι:

- ❖ ο παραμετρικός χώρος,
- ❖ ο χώρος καταστάσεων και
- ❖ οι σχέσεις εξάρτησης μεταξύ των τ.μ. X_t .

(Α) Ταξινόμηση με βάση τον παραμετρικό χώρο.

Αν τώρα το σύνολο T είναι ένα (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο, τότε η σ.α. καλείται ανέλιξη σε **διακριτό χρόνο** ή **αλυσίδα**, ενώ αν το T δεν είναι αριθμήσιμο η σ.α. καλείται ανέλιξη σε **συνεχή χρόνο**. Στην περίπτωση αλυσίδας, παίρνουμε σαν T το σύνολο $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

(Β) Ταξινόμηση με βάση τον χώρο καταστάσεων.

Αν το σύνολο S είναι ένα (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο, τότε η ανέλιξη καλείται σ.α. **διακριτού χώρου καταστάσεων**, ενώ αν το S δεν είναι αριθμήσιμο καλείται σ.α. **συνεχούς χώρου καταστάσεων**. Στην περίπτωση σ.α. με διακριτό χώρο καταστάσεων παίρνουμε, συνήθως το σύνολο $S = N = \{0, 1, 2, \dots\}$.

(Γ) Ταξινόμηση με βάση τις σχέσεις εξάρτησης.

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in T}$, καλείται:

(1) *Ανέλιξη με ανεξάρτητες προσανξήσεις*

Αν οι τ.μ

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in S$ τ.ω. $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Αν το σύνολο T περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο t_0 , πρέπει επιπλέον οι τ.μ.

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

να είναι ανεξάρτητες.

(2) (α) Αυστηρά στάσιμη

Αν, οι από κοινού συναρτήσεις κατανομών των οικογενειών τ.μ.

$$\{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, X_{t_3+h}, \dots, X_{t_n+h}\}, \{X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \dots, X_{t_n}\}$$

με $(t_i+h) \in T$, $i=1,2,\dots,n$ είναι ίδιες $\forall h>0$ και $t_1, t_2, \dots, t_n \in S$.

(β) Στάσιμη με την ευρεία έννοια

Αν: (i) η ανέλιξη έχει πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης

(ii) η συνδιασπορά:

$$C(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) - E X_t \cdot E X_{t+h}$$

εξαρτάται μόνον από το h , $\forall t \in T$ (δηλαδή $C(X_t, X_{t+h}) = \varphi(h)$).

2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

(Α) Ανελίζεις απαρίθμησης

2.3.1 Ορισμός

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{N_t\}_{t \geq 0}$ καλείται σ.α. **απαρίθμησης (counting process)** αν η τ.μ. N_t παριστάνει τον *συνολικό αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα* $(0, t]$. Π.χ. οι ανελίζεις που μετρούν τον αριθμό των τηλεφωνημάτων που φθάνουν σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο, τον αριθμό των δυστυχημάτων που γίνονται σε μια διασταύρωση είναι ανελίζεις απαρίθμησης.

Σε μια σ.α. απαρίθμησης ικανοποιούνται:

- i) $N_t \geq 0$
- ii) N_t παίρνει ακέραιες τιμές
- iii) Αν $s < t$ τότε $N_s \leq N_t$
- iv) Για $s < t$, ο αριθμός $N_t - N_s$ παριστάνει τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο διάστημα $(s, t]$.

2.3.2. Παρατήρηση

- (α) Μια σ.α. απαρίθμησης είναι **ανεξαρτήτων προσανυξήσεων**, αν οι αριθμοί των γεγονότων που συμβαίνουν σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα, είναι ανεξάρτητες τ.μ. Για παράδειγμα οι τ.μ. N_t και $(N_{t+s}-N_t)$ είναι ανεξάρτητες
- (β) Μια σ.α. απαρίθμησης είναι **στάσιμων προσανυξήσεων**, αν ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα χρονικό διάστημα, είναι τ.μ. της οποίας η κατανομή εξαρτάται μόνο από το μήκος του χρονικού διαστήματος. Για παράδειγμα οι τ.μ. $(N_{t_2}-N_{t_1})$ και $(N_{t_2+s}-N_{t_1+s})$ έχουν την ίδια κατανομή.
- (γ) Μια ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t \geq 0}$ καλείται **ανέλιξη Poisson**, αν ισχύει:

$$P\{N_t=k\}=e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots$$

δηλαδή ο συνολικός αριθμός N_t των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $(0,t]$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt , για κάποια παράμετρος $\lambda > 0$ (που είναι ο μέσος αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν στην μονάδα του χρόνου και) που καλείται **τάση** ή **ένταση** ή **ρυθμός** της ανέλιξης.

(B) Στοχαστικές ανελίζεις σε ουρές

Ας υποθέσουμε ότι «πελάτες» φθάνουν σ' ένα σημείο εξυπηρέτησης, π.χ. τα ταμεία ενός super market, τα γκισέ μιας τράπεζας, τα διόδια ενός σταθμού διοδίων και θέλουν να εξυπηρετηθούν. Εάν οι «εξυπηρετητές» είναι απασχολημένοι, τότε σχηματίζουν μια ουρά. Μερικές στοχαστικές ανελίζεις οι οποίες σχετίζονται μ' ένα σύστημα ουράς είναι:

- (α) η X_t μπορεί να παριστάνει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα τον χρόνο t ή
- (β) η X_t μπορεί να παριστάνει τον αριθμό των πελατών που έχουν εξυπηρετηθεί μέχρι τον χρόνο t .
- (γ) η ανέλιξη $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ όπου W_n παριστάνει τον χρόνο που «ξοδεύει» στο σύστημα ή στην ουρά ο n -ιστός πελάτης.

2.4 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΜΙΑΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΕΛΙΞΗΣ

Σε μια στοχαστική ανέλιξη, η X_t είναι μια τ.μ. της οποίας η κατανομή λαμβάνεται όπως μιας οποιασδήποτε τ.μ. Επειδή όμως το t μεταβάλλεται στον χώρο T , για να έχουμε μια πλήρη εικόνα της ανέλιξης χρειαζόμαστε την από κοινού κατανομή των βασικών τ.μ της οικογένειας $\{X_t\}_{t \in T}$.

Η από κοινού **συνάρτηση κατανομής** ορίζεται από την σχέση:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n\}$$

Τις περισσότερες πληροφορίες σε μια ανέλιξη, τις παίρνουμε από τις λεγόμενες **συναρτήσεις κατανομής μετάβασης** (transition distribution functions) που ορίζονται από την σχέση:

$$F_{t_0, t_1}(x_0, x_1) = P\{X_{t_1} \leq x_1 / X_{t_0} = x_0\},$$

2.4.1 Ορισμός

Μια σ.α. $\{X_t\}_{t \in T}$ καλείται **χρονικά ομογενής** (time-homogeneous) αν η συνάρτηση κατανομής μετάβασης εξαρτάται από την διαφορά $t_1 - t_0$ αντί από τα t_0, t_1 , οπότε έχουμε:

$$F_{t_0, t_0+t}(x_0, x_1) = F_{0, t}(x_0, x_1), \quad t_0 \in T$$

2.4.2 Παρατήρηση

Πολλές φορές αντί της κατανομής, χρησιμοποιούμε ποσότητες όπως:

- (α) η **συνάρτηση μέσης τιμής** $\mu(t) = E[X_t]$
- (β) η **συνάρτηση διασποράς** $\sigma^2(t) = V(X_t) = E[X_t - \mu(t)]^2$
- (γ) η **συνάρτηση συνδιασποράς** $R(s, t) = E[(X_s - \mu(s))(X_t - \mu(t))]$.

Η παρακάτω πρόταση είναι μια από τις πιο βασικές στην θεωρία των σ.α.

2.4.3 Πρόταση (Ισότητα του Wald)

Αν $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με $EX_1 = \mu$ και $V(X_1) = \sigma^2$ και επιπλέον N είναι μια θετική, ακεραίων τιμών τ.μ. ανεξάρτητη από τις $X_1, X_2, \dots$ με $EN = \lambda$ και:

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

τότε:

$$ES_N = \mu\lambda \quad \text{και} \quad V(S_N) = \sigma^2\lambda + \mu^2V(N).$$

Απόδειξη

Με την βοήθεια των $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ δεσμευμένων μαθηματικών ελπίδων έχουμε:

$$\begin{aligned} ES_N &= E[E(S_N|N)] = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^N X_j | N=n\right] \cdot P\{N=n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^n X_j | N=n\right] \cdot P\{N=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^n X_j\right] \cdot P\{N=n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n E[X_1] \cdot P\{N=n\} = E[X_1] \sum_{n=1}^{\infty} n P\{N=n\} = E[X_1] E[N] = \mu \lambda \end{aligned}$$

Η διασπορά $V(S_N)=E(S_N^2)-(ES_N)^2$. Αλλά :

$$\begin{aligned}
 ES_N^2 &= E[E(S_N^2|N)] = \sum_{n=1}^{\infty} E[S_N^2|N=n] \cdot P\{N=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} E[S_n^2|N=n] \cdot P\{N=n\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} E[S_n^2] \cdot P\{N=n\} \stackrel{EX^2=V(X)+(EX)^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (V(S_n)+(ES_n)^2) \cdot P\{N=n\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (V(\sum_{j=1}^n X_j) + (E\sum_{j=1}^n X_j)^2) \cdot P\{N=n\} = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (n V(X_1) + (n EX_1)^2) \cdot P\{N=n\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (n \sigma^2 + (n \mu)^2) \cdot P\{N=n\} \\
 &= \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} n P\{N=n\} + \mu^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P\{N=n\} = \sigma^2 EN + \mu^2 EN^2 = \sigma^2 \lambda + \mu^2 EN^2
 \end{aligned}$$

οπότε:

$$V(S_N) = E(S_N^2) - (ES_N)^2 = \sigma^2 \lambda + \mu^2 EN^2 - (EN)^2 \mu^2 = \sigma^2 \lambda + \mu^2 V(N).$$

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΛΥΣΙΔΕΣ MARKOV

3.1 ΑΛΥΣΙΔΕΣ MARKOV

Έστω ένα φαινόμενο (το οποίο προσπαθούμε να περιγράψουμε με την βοήθεια μιας σ.α. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, όπου η τ.μ. X_n περιγράφει το φαινόμενο την χρονική στιγμή n .), ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: «εάν είναι γνωστή η παρούσα κατάσταση του φαινομένου, οι καταστάσεις στις οποίες βρισκόταν το φαινόμενο στο παρελθόν δεν επηρεάζουν τις μελλοντικές καταστάσεις». Τότε λέμε ότι το φαινόμενο ικανοποιεί την **ιδιότητα Markov** ή ότι η σ.α. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μια **αλυσίδα Markov**.

3.1.1 Ορισμός

Αν μια σ.α. $\{X_n\}_{n \geq 0}$, με χώρο καταστάσεων S ικανοποιεί την σχέση:

$$P\{X_{n+1}=x_{n+1} | X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_{n-1}=x_{n-1}, X_n=x_n\} = P\{X_{n+1}=x_{n+1} | X_n=x_n\},$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \forall x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in S$$

τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ καλείται **αλυσίδα Markov**.

3.1.2 Παρατηρήσεις

Αν το γεγονός $\{X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_{n-1}=x_{n-1}\}$ παριστάνει το παρελθόν, το $\{X_n=x_n\}$ το παρόν, και το $\{X_{n+1}=x_{n+1}\}$ το μέλλον, η ιδιότητα Markov μας αναφέρει ότι το μέλλον δοθέντος του παρόντος και του παρελθόντος, εξαρτάται μόνο από το παρόν.

Συνήθως ο χώρος καταστάσεων S είναι ένα το πολύ αριθμήσιμο (**αλυσίδα Markov με διακριτό χώρο καταστάσεων**). Ένας δεύτερος ισοδύναμος ορισμός μιας αλυσίδας Markov είναι ο ακόλουθος.

3.1.3 Ορισμός

Μια σ.α. $\{X_n\}_{n \geq 0}$, με χώρο καταστάσεων S , καλείται **αλυσίδα Markov**, εάν:

$$P\{X_{t_{n+1}}=x_{t_{n+1}} / X_{t_0}=x_{t_0}, X_{t_1}=x_{t_1}, \dots, X_{t_n}=x_{t_n}\} = P\{X_{t_{n+1}}=x_{t_{n+1}} / X_{t_n}=x_{t_n}\}$$

$$\forall n \geq 0 \text{ και } \forall x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_{n+1}} \in S, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$$

Δηλαδή στον ορισμό 3.1.3 της αλυσίδας Markov, οι χρονικές στιγμές δεν είναι ανάγκη να είναι διαδοχικές.

3.1.4 Πρόταση

Αν η ανέλιξη $\{X_n\}_{n \geq 0}$ είναι μια αλυσίδα Markov, με χ.κ. S , τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} (α) \quad & P\{X_{t_{n+1}}=x_{t_{n+1}}, \dots, X_{t_{n+m}}=x_{t_{n+m}} / X_{t_0}=x_{t_0}, X_{t_1}=x_{t_1}, \dots, X_{t_n}=x_{t_n}\} = \\ & = P\{X_{t_{n+1}}=x_{t_{n+1}}, \dots, X_{t_{n+m}}=x_{t_{n+m}} / X_{t_n}=x_{t_n}\} \end{aligned}$$

$$\forall n \geq 0, m \geq 1 \quad \text{και} \quad \forall x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_{n+m}} \in S, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+m}$$

(β) (αντιστροφή χρόνου)

$$P\{X_n = x_n / X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_{n+m} = x_{n+m}\} = P\{X_n = x_n / X_{n+1} = x_{n+1}\}$$

$$\forall n \geq 0, m \geq 1 \quad \text{και} \quad x_k \in S, \quad n \leq k \leq n+m$$

3.1.5 Παρατήρηση

Η παραπάνω πρόταση μας αναφέρει:

- (α) η πιθανότητα του να βρίσκεται το σύστημα σε μια σειρά από μελλοντικές καταστάσεις δεδομένου του παρόντος και του παρελθόντος, εξαρτάται μόνον από το παρόν.
- (β) το παρελθόν δοθέντος του μέλλοντος και του παρόντος εξαρτάται μόνον από το παρόν, δηλαδή έχουμε ένα είδος αντιστροφής του χρόνου στην αλυσίδα Markov («αντίστροφη» εκείνης του ορισμού μιας αλυσίδας Markov).

3.2 ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ

Σε μια Α.Μ. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ παριστάνουμε με $p_{n,n+1}(x,y)$ την πιθανότητα να κάνει το σύστημα μια μετάβαση στην κατάσταση y , την χρονική στιγμή $n+1$, δοθέντος ότι την χρονική στιγμή n ήταν στην κατάσταση x , και καλείται **πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος τον χρόνο n** , από την κατάσταση x στην κατάσταση y . Δηλαδή

$$p_{n,n+1}(x,y) = P\{X_{n+1} = y / X_n = x\} \quad x, y \in S \quad n \in N$$

Υποθέτουμε ότι όλες αυτές οι πιθανότητες είναι ανεξάρτητες του χρόνου n , και τις συμβολίζουμε με $p(x,y)$ ή $p_{x,y}$ (χρονικά **ομογενής** αλυσίδα Markov). Σε μια χρονικά ομογενή αλυσίδα Markov ισχύει: $\forall x, y \in S, n=1, 2, \dots$ και $m=0, 1, 2, \dots$

$$P\{X_{m+n} = y | X_n = x\} = P\{X_m = y | X_0 = x\}$$

Η απόδειξη γίνεται με την βοήθεια της επαγωγής ως προς m .

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος, αποτελούν τα στοιχεία ενός πίνακα:

$$P = [p(x,y)]_{x,y \in S}$$

ο οποίος καλείται **πίνακας μετάβασης ενός βήματος** της αλυσίδας Markov.

Για ένα σύστημα n -καταστάσεων, με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \dots, n\}$ η γενική μορφή του πίνακα P , είναι:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Το άθροισμα των πιθανοτήτων κάθε γραμμής θα πρέπει να είναι ίσο με την μονάδα (στοχαστικός ή πίνακας Markov)..

3.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΛΥΣΙΔΩΝ MARKOV

3.3.1 Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Αν $\{X_n\}_{n \geq 0}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, τότε η σ.α. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ είναι μια αλυσίδα Markov.

3.3.2 Αλυσίδα Ουράς

Έστω ότι έχουμε ένα σημείο εξυπηρέτησης, π.χ. ένα από τα διόδια ενός σταθμού διοδίων. Πελάτες (αυτοκίνητα) φθάνουν στο σημείο σε τακτά χρονικά διαστήματα και τελικά εξυπηρετούνται, σχηματίζοντας ουρά (κατά την διάρκεια της αναμονή τους να εξυπηρετηθούν).

Ένα απλό μοντέλο που περιγράφει το σύστημα είναι και το εξής: έστω ότι ο χρόνος μετριέται σε λεπτά και ας υποθέσουμε ότι αν υπάρχουν πελάτες που περιμένουν να εξυπηρετηθούν στην αρχή μιας χρονικής περιόδου, μόνον ένας πελάτης θα εξυπηρετηθεί κατά την διάρκεια της περιόδου. Έστω ξ_n ο αριθμός των (νέων) πελατών που φθάνουν κατά την διάρκεια της περιόδου και έστω ότι η $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανομημένες τ.μ. με κοινή πυκνότητα πιθανότητας f και ότι οι εν λόγω τ.μ. παίρνουν ακέραιες τιμές. Έστω X_0 ο αριθμός των πελατών που είναι παρόντες αρχικά και X_n ο αριθμός των πελατών που είναι παρόντες στο τέλος της n -ιοστής περιόδου. Τότε:

$$X_{n+1} = \begin{cases} \xi_{n+1} & \text{αν } X_n = 0 \\ X_n + \xi_{n+1} - 1 & \text{αν } X_n \geq 1 \end{cases}$$

Η σ.α. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ είναι μια αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ και πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος:

$$p(x, y) = \begin{cases} f(y) & , \quad x = 0 \\ f(y - x + 1) & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΧΡΟΝΙΚΑ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Ορίζουμε τον πίνακα $P^{(n)}$, για $n \geq 1$:

$$P^{(n)} = [p^{(n)}(x, y)]_{x, y \in S}$$

όπου το στοιχείο $p^{(n)}(x, y)$ δίνεται από την σχέση:

$$p^{(n)}(x, y) = P\{X_n = y / X_0 = x\}$$

και παριστάνει την πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση y μετά από n χρονικά διαστήματα, δοθέντος ότι ξεκίνησε από την κατάσταση x (πιθανότητα μετάβασης n βημάτων). Ο πίνακας $P^{(n)}$ καλείται **πίνακας μετάβασης n βημάτων** της αλυσίδας. Είναι προφανές: $P^{(1)} = P$

Η πρόταση που ακολουθεί μας δίνει έναν τρόπο υπολογισμού των πιθανοτήτων μετάβασης n -βημάτων.

3.4.1 Πρόταση (Chapman – Kolmogorov)

$\forall x, y \in S, \quad n, m = 1, 2, \dots$

$$p^{(n+m)}(x, y) = \sum_{z \in S} p^{(n)}(x, z) p^{(m)}(z, y)$$

3.4.2 Παρατήρηση

Οι παραπάνω ισότητες μας λένε ότι:

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$$

Ακόμα, από το ότι:

$$P^{(2)} = P^{(1)} \cdot P^{(1)} = P \cdot P = P^2$$

επαγωγικά παίρνουμε:

$$P^{(n)} = P^n \quad n = 1, 2, \dots$$

δηλαδή για να υπολογίσουμε τον πίνακα μετάβασης n -βημάτων $P^{(n)}$ αρκεί να υπολογίσουμε την n -ιοστή δύναμη του πίνακα P (δηλαδή τον πίνακα P^n).

Πολλές φορές θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να βρισκόμαστε σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, κάποια δεδομένη χρονική στιγμή, δηλαδή την πιθανότητα:

$$p_n(x) = P\{X_n = x\} \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in S$$

Οι πιθανότητες αυτής της μορφής προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό (στηλών) του πίνακα $P^{(n)}$ με το διάνυσμα των **αρχικών πιθανοτήτων** (αρχική κατανομή) $p(0)$ το οποίο ορίζεται:

$$p(0)=[p_0(x)]_{x \in S}$$

όπου: $p_0(x)=P\{X_0=x\}$, $x \in S$, παριστάνει την πιθανότητα να είμαστε στην κατάσταση x στην αρχή της αποστολής.

Πράγματι, από το θεώρημα ολικής πιθανότητας, έχουμε: για $n \geq 1$, $y \in S$

$$P\{X_n=y\} = \sum_{x \in S} P\{X_n=y / X_0=x\} P\{X_0=x\} = \sum_{x \in S} p_0(x)p^{(n)}(x,y)$$

3.4.3 Πρόταση

Σε μια αλυσίδα Markov, ισχύει:

$$(\alpha) \quad P\{X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_{n-1}=x_{n-1}, X_n=x_n\} = p_0(x_0) \cdot p(x_0, x_1) \cdot p(x_1, x_2) \dots p(x_{n-1}, x_n)$$

$$\forall x_0, x_1, \dots, x_n \in S, \quad n=1, 2, \dots \quad \text{Ακόμα}$$

(β) Για $x_k \in S$, $k=n, n+1, \dots, n+m$, $n \geq 0$, $m \geq 2$ έχουμε:

$$P\{X_{n+1}=x_{n+1}, \dots, X_{n+m}=x_{n+m} / X_n=x_n\} = p(x_n, x_{n+1}) \cdot p(x_{n+1}, x_{n+2}) \dots p(x_{n+m-1}, x_{n+m})$$

3.5 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΙΑΣ Α.Μ.

Μια κατάταξη των καταστάσεων μιας αλυσίδας Markov γίνεται με βάση το εάν *επικοινωνούν* μεταξύ τους ή όχι (δηλαδή αν ξεκινώντας από μια δοσμένη κατάσταση μπορούμε να μεταπηδήσουμε σε μια άλλη δοσμένη κατάσταση και να επιστρέψουμε στην αρχική).

3.5.1 Ορισμός

Λέμε ότι η κατάσταση x **οδηγεί** στην κατάσταση y (γράφουμε $x \rightarrow y$) αν υπάρχει θετική πιθανότητα το σύστημα να κινηθεί από την x στην y , σ' έναν πεπερασμένο αριθμό μεταβάσεων, δηλαδή αν για κάποιο $n \geq 0$, $p^{(n)}(x,y) > 0$.

Αν $x \rightarrow y$ και $y \rightarrow x$, θα λέμε ότι οι καταστάσεις x και y **επικοινωνούν** (γράφουμε $x \leftrightarrow y$).

3.5.2 Πρόταση

Η σχέση «επικοινωνία» είναι μια σχέση ισοδυναμίας στον χώρο των καταστάσεων S μιας Α.Μ.

Η σχέση της «επικοινωνίας» θα διαμερίζει λοιπόν τον $\chi.κ.$ S σε κλάσεις ισοδυναμίας, δηλαδή σε ξένα μεταξύ τους σύνολα καταστάσεων, τα στοιχεία καθενός εκ των οποίων (καταστάσεις) επικοινωνούν μεταξύ τους.

3.5.3 Ορισμός

- (α) Ένα σύνολο καταστάσεων $C \subseteq S$ καλείται (στοχαστικά) **κλειστό** (closed), αν $p(x,y)=0$, για όλα τα $x \in C$ και για όλα τα $y \notin C$ (δηλαδή από την στιγμή που το σύστημα εισέρχεται στο σύνολο C , παραμένει εκεί για πάντα).
- (β) Ένα κλειστό σύνολο C καλείται **ανάγωγο** (irreducible) αν συμπίπτει με μια κλάση ισοδυναμίας. Μια αλυσίδα Markov καλείται **ανάγωγη** αν ο χώρος καταστάσεων S είναι ένα ανάγωγο σύνολο.
- (γ) Μια κατάσταση x καλείται **απορροφητική** (absorbing) αν $p(x,x)=1$, δηλαδή αν το σύστημα εισέλθει στην x παραμένει εκεί για πάντα.

3.6 ΕΠΑΝΟΔΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

Μια δεύτερη κατάταξη των καταστάσεων μιας αλυσίδας γίνεται με βάση το εάν το σύστημα, ξεκινώντας από μια κατάσταση x θα επιστρέψει κάποτε σ' αυτήν την κατάσταση ή όχι (επάνοδος ή παροδικότητα).

Σε μια αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ με χώρο καταστάσεων S , ορίζουμε τις ακόλουθες πιθανότητες:

- (α) για καταστάσεις x, y και $n \geq 1$

$$f^n(x,y) = P\{X_n=y, X_{n-1} \neq y, \dots, X_1 \neq y / X_0=x\}$$

που είναι η (δεσμευμένη) πιθανότητα δεδομένου ότι το σύστημα ξεκίνησε από την κατάσταση x , η πρώτη μετάβαση στην κατάσταση y να γίνει τον χρόνο n .

- (β) με $f^*(x,y)$ συμβολίζουμε την πιθανότητα το σύστημα να επιστρέψει (κάποτε) στην κατάσταση y , δεδομένου ότι ξεκίνησε από την κατάσταση x (δηλαδή την πιθανότητα, ξεκινώντας από την κατάσταση x , υπάρχει μια χρονική στιγμή n κατά την οποία το σύστημα θα βρίσκεται στην κατάσταση y). Τότε:

$$f^*(x,y) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n=y / X_0=x\}\right) \text{ απ' όπου έχουμε: } f^*(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f^n(x,y)$$

3.6.1 Ορισμός

- (α) Μια κατάσταση $x \in S$ καλείται **επανερχόμενη** (recurrent) αν $f^*(x,x)=1$, δηλαδή η x είναι επανερχόμενη αν με πιθανότητα 1 η Α.Μ. αρχίζοντας από την x , θα επιστρέψει τελικά στην x (κάποτε).
- (β) Μια κατάσταση $x \in S$ καλείται **παροδική** (transient) αν $f^*(x,x)<1$ (δηλαδή, υπάρχει θετική πιθανότητα, το σύστημα ξεκινώντας από την κατάσταση x να μην επιστρέψει ποτέ σ' αυτήν).

Για να καθορίσουμε το αν μια κατάσταση x είναι επανερχόμενη ή παροδική χρησιμοποιούμε συνήθως την παρακάτω πρόταση (αντί να υπολογίσουμε την $f^*(x,x)$).

3.6.2 Πόρισμα

Μια κατάσταση $x \in S$

(α) είναι επανερχόμενη αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x,x)$ αποκλίνει.

(β) είναι παροδική αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x,x)$ συγκλίνει.

(γ) εάν $x \in S$ μια αυθαίρετη κατάσταση και $y \in S$ μια παροδική κατάσταση.

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(x,y)$ συγκλίνει και μάλιστα έχουμε ότι: $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x,y)=0$.

3.6.3 Πόρισμα

Ο χώρος καταστάσεων S μιας πεπερασμένης αλυσίδας Markov περιέχει τουλάχιστον μια επανερχόμενη κατάσταση.

Το θεώρημα που ακολουθεί συνδέει την έννοια της επικοινωνίας με εκείνη της επανόδου ή παροδικότητας σε μια A.M.

3.6.4 Θεώρημα

(α) Έστω $x,y \in S$ και $x \rightarrow y$. Αν η κατάσταση x είναι επανερχόμενη, τότε και η y είναι επανερχόμενη και $f^*(x,y)=1=f^*(y,x)$

(β) Γενικότερα, έστω δύο καταστάσεις x,y οι οποίες επικοινωνούν. Τότε και οι δύο είναι του ίδιου τύπου δηλαδή ή και οι δύο είναι επανερχόμενες ή και οι δύο είναι παροδικές.

3.7 ΘΕΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΕΠΑΝΕΡΧΟΜΕΝΕΣ

Μια κατάταξη των επανερχόμενων καταστάσεων μπορεί να γίνει με την βοήθεια του αν ο χρόνος επανόδου (ξεκινώντας από την δεδομένη επανερχόμενη κατάσταση) σε μια επανερχόμενη κατάσταση είναι πεπερασμένος ή όχι.

Έστω ότι η $f^*(x,x)=1$, που συμβαίνει όταν η κατάσταση x είναι επανερχόμενη.

3.7.1 Ορισμός

Η ποσότητα:

$$\mu_x = \sum_{n=1}^{\infty} n f^n(x,x)$$

καλείται **μέσος χρόνος επανόδου** στην κατάσταση x , και είναι ο μέσος χρόνος που χρειάζεται η αλυσίδα, ξεκινώντας από της κατάσταση x να επιστρέψει στην κατάσταση x .

3.7.2 Ορισμός

Μια επανερχόμενη κατάσταση x καλείται **θετικά επανερχόμενη** αν $\mu_x < +\infty$, ενώ

μηδενικά επανερχόμενη αν $\mu_x = +\infty$.

Ο παρακάτω ορισμός είναι απαραίτητος για να αποδείξει κανείς σχέσεις ανάμεσα στις επανερχόμενες (θετικά ή μηδενικά) και τις παροδικές καταστάσεις μιας Α.Μ.

3.7.3 Ορισμός

Αν $y \in S$, μια δοσμένη κατάσταση, $A \subset \Omega$, τότε: $\forall y \in S, \omega \in \Omega \quad v(y) = v(y; \omega) =$ ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται η κατάσταση y στην ακολουθία $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ (για δοσμένο $\omega \in \Omega$) δηλαδή ο $v(y)$ είναι ο ολικός αριθμός των επισκέψεων στην κατάσταση y .

Η δείκτρια τ.μ. του γεγονότος A :

$$I_A(y) = \begin{cases} 1 & y \in A \\ 0 & y \notin A \end{cases}$$

τότε:

$$v(y) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{y\}}(X_n(\omega))$$

Ακόμα: $\forall y \in S, \omega \in \Omega \quad v(y, n) = v(y; n; \omega) =$ ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται η κατάσταση y στην ακολουθία $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ (για δοσμένο $\omega \in \Omega$), δηλαδή ο $v(y, n)$ είναι ο αριθμός των επισκέψεων στην κατάσταση y στις πρώτες n μεταβάσεις.

Ορίζουμε σαν:

$$t_y = t_y(\omega) = \min \{n > 0 / X_n(\omega) = y\}$$

τον χρόνο της πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση y .

3.7.4 Πρόταση

Σε μια Α.Μ. ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) μια κατάσταση x είναι **επανερχόμενη** αν και μόνον αν, ξεκινώντας από την x , ο αριθμός των επισκέψεων στην x είναι άπειρος και αντίστοιχα
- (ii) μια κατάσταση x είναι **παροδική** αν και μόνον αν, ξεκινώντας από την x , η αλυσίδα επισκέπτεται την κατάσταση x πεπερασμένο αριθμό φορών.

3.8 ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

3.8.1 Ορισμός

Αν $x \in S$, τότε η **περίοδος** $d(x)$ της κατάστασης x , ορίζεται να είναι ο Μ.Κ.Δ. των $n \geq 1$, τέτοια ώστε $p^{(n)}(x, x) > 0$. Αν $p^{(n)}(x, x) = 0, \forall n \geq 1$ τότε ορίζουμε $d(x) = 0$.

Μια Α.Μ. καλείται **μη-περιοδική**, αν κάθε κατάσταση της έχει περίοδο 1.

3.8.2 Πρόταση

Αν $x \leftrightarrow y$ τότε $d(x) = d(y)$

3.8.3 Παρατήρηση

Από την πρόταση γίνεται φανερό ότι και η περιοδικότητα είναι ιδιότητα κλάσης, δηλαδή όλες οι καταστάσεις μιας Α.Μ. που επικοινωνούν μεταξύ τους έχουν την ίδια περίοδο.

3.9 ΣΤΑΣΙΜΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΙΑΣ Α.Μ.

Έστω $\{X_n\}_{n \geq 0}$ μια αλυσίδα Markov, με χ.κ. S και πίνακα μετάβασης ενός βήματος P.

3.9.1 Πρόταση

Αν $\{\pi(x)\}_{x \in S}$ είναι μη-αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$(\alpha) \quad \sum_{x \in S} \pi(x) = 1$$

$$(\beta) \quad \pi(y) = \sum_{x \in S} \pi(x)p(x,y), \quad y \in S$$

ή με την μορφή πινάκων, αν $\pi = \{\pi(x)\}_{x \in S}$

$$\pi \cdot P = \pi$$

τότε η ακολουθία $\pi = \{\pi(x)\}_{x \in S}$ καλείται **στάσιμη κατανομή** της Α.Μ. (stationary distribution).

3.9.2 Παρατήρηση

Έστω $\pi = \{\pi(x)\}_{x \in S}$ η στάσιμη κατανομή (εφ' όσον υπάρχει) μιας Α.Μ.

(α) Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x,y) = \pi(y)$ υπάρχουν (και είναι ανεξάρτητες της αρχικής κατάστασης x) τότε καλούνται **οριακές πιθανότητες** ή **οριακή κατανομή** (limiting distribution) των καταστάσεων της αλυσίδας.

Έστω τώρα $\{p_0(x)\}_{x \in S}$ η αρχική κατανομή της Α.Μ., τότε:

$$\begin{aligned} P\{X_n = y\} &= \sum_{x \in S} p_0(x)p^{(n)}(x,y) \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = y\} &= \sum_{x \in S} p_0(x) \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x,y) = \sum_{x \in S} p_0(x)\pi(y) = \pi(y) \end{aligned}$$

δηλαδή, αν οι οριακές πιθανότητες υπάρχουν, τότε ανεξάρτητα από το ποια είναι η αρχική κατανομή της Α.Μ., για μεγάλα n, η κατανομή της X_n είναι ίση προσεγγιστικά με την οριακή κατανομή.

(β) Αν υπάρχει η οριακή κατανομή μιας αλυσίδας Markov, τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι αποτελεί μια στάσιμη κατανομή. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν Α.Μ. οι οποίες έχουν στάσιμη κατανομή αλλά δεν υπάρχουν τα όρια.

3.10 ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ

Οι θετικά επανερχόμενες καταστάσεις μιας Α.Μ. παίζουν σημαντικό ρόλο στην ύπαρξη ή όχι της στάσιμης κατανομής της αλυσίδας.

3.10.1 Ορισμός

Μια θετικά επανερχόμενη και μη-περιοδική κατάσταση μιας Α.Μ. καλείται **εργοδική**.

3.10.2 Πρόταση

(α) Αν x είναι μια εργοδική κατάσταση μιας Α.Μ. , έχουμε:

$$p^{(n)}(x,x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_x}$$

(β) Αν x είναι μια επανερχόμενη, περιοδική με περίοδο d κατάσταση μιας Α.Μ., έχουμε:

$$p^{(nd)}(x,x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{d}{\mu_x}$$

3.10.3 Θεώρημα

Σε μια Α.Μ. ισχύουν τα εξής:

(α) αν y είναι μια παροδική ή μηδενικά επανερχόμενη κατάσταση, έχουμε:

$$p^{(n)}(x,y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in S$$

(β) αν y είναι μια εργοδική κατάσταση:

$$p^{(n)}(x,y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f^*(x,y)}{\mu_y} \quad \forall x \in S$$

3.10.4 Παρατήρηση

Το προηγούμενο θεώρημα περιγράφει την ασυμπτωτική συμπεριφορά των πιθανοτήτων μετάβασης n βημάτων μιας Α.Μ.. Η γνώση της συμπεριφοράς αυτής είναι απαραίτητη για δύο κυρίως λόγους: (α) για να μπορούμε να βρούμε το είδος των καταστάσεων της αλυσίδας και (β) να αποδείξουμε την ύπαρξη της στάσιμης κατανομής της.

3.10.5 Πρόταση

Μια πεπερασμένη, ανάγωγη Α.Μ. με χώρο καταστάσεων $S=\{1,2,...,m\}$ περιέχει μια θετικά επανερχόμενη κατάσταση.

3.10.6 Πόρισμα

(α) Σε μια ανάγωγη, επανερχόμενη Α.Μ. όλες οι καταστάσεις είναι είτε θετικά επανερχόμενες είτε μηδενικά επανερχόμενες.

- (β) Αν C είναι ένα πεπερασμένο, κλειστό, ανάγωγο σύνολο καταστάσεων. Τότε κάθε κατάσταση στο C είναι θετικά επανερχόμενη.
- (γ) Μια ανάγωγη Α.Μ. με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων είναι θετικά επανερχόμενη.

3.11 ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

3.11.1 Θεώρημα (Υπαρξη στάσιμων κατανομών)

Σε μια ανάγωγη, εργοδική αλυσίδα τα όρια:

$$\pi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x, y)$$

υπάρχουν και είναι ανεξάρτητα της αρχικής κατάστασης x . Επιπλέον:

(α) $\pi(y) > 0$

(β) $\sum_{x \in S} \pi(x) = 1$

(γ) $\pi(y) = \sum_{x \in S} \pi(x) p(x, y), \quad y \in S$

Αντίστροφα, έστω ότι έχουμε μια ανάγωγη, μη-περιοδική αλυσίδα και έστω ότι η οικογένεια των μη-αρνητικών αριθμών $\{\pi(x)\}_{x \in S}$ ικανοποιεί τις (β) και (γ). Τότε η αλυσίδα είναι εργοδική, τα $\pi(x)$ δίνονται από την $\pi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x, y)$ και

$$\pi(x) = \frac{1}{\mu_x}$$

όπου μ_x ο μέσος χρόνος επανόδου στην κατάσταση x .

3.11.2 Παρατήρηση

Το θεώρημα μας αναφέρει ότι: σε μια ανάγωγη, εργοδική αλυσίδα υπάρχει πάντα η οριακή κατανομή, η οποία είναι και στάσιμη κατανομή και είναι μοναδική. Ακόμα (αντίστροφα) αν μια ανάγωγη, μη-περιοδική αλυσίδα έχει μια στάσιμη κατανομή, τότε η αλυσίδα είναι εργοδική και η κατανομή συμπίπτει με την οριακή κατανομή.

3.11.3 Πρόσβαση

- (α) Μια ανάγωγη Α.Μ. είναι θετικά επανερχόμενη αν και μόνον αν έχει μια (μοναδική) στάσιμη κατανομή.
- (β) Αν μια Α.Μ. έχει πεπερασμένο χώρο καταστάσεων και είναι ανάγωγη, τότε έχει μια (μοναδική) στάσιμη κατανομή.

3.11.4 Θεώρημα

Έστω C ένα ανάγωγο, κλειστό σύνολο μιας Α.Μ. από θετικά επανερχόμενες καταστάσεις. Τότε η Α.Μ. έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή $\{\pi(x)\}_{x \in S}$ η οποία

είναι συγκεντρωμένη στο C. Η $\{\pi(x)\}_{x \in S}$ δίνεται από την σχέση:

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_x} & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το θεώρημα για την ύπαρξη στάσιμων κατανομών σε μια A.M.

3.11.5 Θεώρημα

Αν S_0 είναι το σύνολο των θετικά επανερχόμενων καταστάσεων μιας A.M., τότε:

- (α) Αν $S_0 = \emptyset$, η A.M. δεν έχει στάσιμη κατανομή.
- (β) Αν $S_0 \neq \emptyset$ και είναι ένα ανάγωγο σύνολο, η A.M. έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή.
- (γ) Αν $S_0 \neq \emptyset$ αλλά δεν είναι ανάγωγο σύνολο, τότε η αλυσίδα έχει έναν άπειρο αριθμό στάσιμων κατανομών.

3.11.6 Ορισμός

Ο πίνακας μετάβασης ενός βήματος P μιας A.M. καλείται **διπλά στοχαστικός**, εάν $\forall y \in S, \sum_{x \in S} p(x,y) = 1$ δηλαδή (εκτός του ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του πίνακα είναι ίσο με την μονάδα και) το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα είναι ίσο με την μονάδα.

3.11.7 Θεώρημα

Έστω μια πεπερασμένη, ανάγωγη και μη-περιοδική A.M. με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, \dots, s\}$ και διπλά στοχαστικό πίνακα μετάβασης ενός βήματος P. Τότε η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας είναι ίση με:

$$\pi = [\pi(1) \quad \pi(2) \quad \dots \quad \pi(s)] = \left[\frac{1}{s} \quad \frac{1}{s} \quad \dots \quad \frac{1}{s} \right]$$

δηλαδή όλες οι οριακές πιθανότητες των καταστάσεων είναι ίσες με $\frac{1}{s}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΝΕΛΙΞΗ POISSON

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε ανελίξεις σε συνεχή χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων, οι οποίες ικανοποιούν ορισμένες (βασικές) χαρακτηριστικές ιδιότητες και τις οποίες (ανελίξεις) θα καλούμε *ανελίξεις Poisson*. Πολλά προβλήματα γύρω μας (εξέλιξη χρονική ή χωρική «πληθυσμών») όπως π.χ. αυτά που αφορούν:

- προσγειώσεις αεροπλάνων σ' ένα αεροδρόμιο,
- διελεύσεις αυτοκινήτων από έναν σταθμό διοδίων,
- αφίξεις τηλεφωνημάτων σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο,
- εκπομπή σωματιδίων από μια ραδιενεργό πηγή,

αλλά και γενικότερα, αυτά που αφορούν την:

- κατανομή των κατοικιών σε μια συγκεκριμένη περιοχή μιας χώρας
- κατανομή των γαλαξιών σε μια περιοχή του σύμπαντος

μπορούν να μοντελοποιηθούν και να μελετηθούν με την βοήθεια αυτών των στοχαστικών ανελίξεων.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι μελετάμε ένα φαινόμενο χρησιμοποιώντας μια ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t \geq 0}$, δηλαδή μιας σ.α. όπου η τ.μ. N_t παριστάνει τον *αριθμό (κάποιων) γεγονότων (του φαινομένου) που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα (0, t]*. Έστω ακόμα ότι τα γεγονότα αυτά ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Σ' ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, συμβαίνει ένα το πολύ γεγονός.
- (ii) Γεγονότα που συμβαίνουν σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα χρόνου είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα.
- (iii) Η πιθανότητα να συμβεί ένας συγκεκριμένος αριθμός γεγονότων σ' ένα χρονικό διάστημα, είναι ίδια για όλα τα (χρονικά) διαστήματα ίσου μήκους.

Η ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t \geq 0}$, σ' αυτή την περίπτωση, καλείται **ανέλιξη Poisson**.

4.1.1 Ορισμός

Μια πραγματική συνάρτηση $f=f(t)$ καλείται **τύπου $o(t)$** αν:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

4.1.2 Παρατήρηση

Η συνάρτηση $f=f(t)$ είναι λοιπόν $o(t)$, όταν συγκλίνει στο 0 γρηγορότερα από ότι το t . Άρα, η $f=f(t)$ είναι αμελητέα αν την συγκρίνουμε με το t (για t πολύ μικρό).

Ο αυστηρά μαθηματικός ορισμός μιας ανέλιξης Poisson είναι ο εξής:

4.1.3 Ορισμός

Μια ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t \geq 0}$ καλείται **ανέλιξη Poisson** (Poisson process) με **ρυθμό λ** , εάν:

- (α) $N_0 = 0$
- (β) η $\{N_t\}_{t \geq 0}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσανυξήσεις
- (γ) έχουμε ότι:

$$P\{N_{t+h} - N_t = 1\} = \lambda h + o(h)$$

$$P\{N_{t+h} - N_t \geq 2\} = o(h)$$

Σε μια σ.α. απαρίθμησης είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε την (ακριβή) κατανομή της N_t . Σε μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ αυτό είναι πάντα δυνατό, όπως φαίνεται από στον παρακάτω ορισμό (και το θεώρημα που ακολουθεί).

4.1.4 Ορισμός

Μια ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t \geq 0}$ καλείται **ανέλιξη Poisson** με ρυθμό λ , αν:

- (α) $N_0 = 0$
- (β) η $\{N_t\}_{t \geq 0}$ έχει ανεξάρτητες προσανυξήσεις
- (γ) ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σε κάθε διάστημα μήκους t , ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt , δηλαδή:

$$P\{N_{t+s} - N_s = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad \forall s, t \geq 0 \quad \& \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4.1.5 Θεώρημα

Οι δύο παραπάνω ορισμοί (4.1.3) και (4.1.4) μιας ανέλιξης Poisson είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη

(4.1.4) $\Rightarrow$ (4.1.3) Εάν $s < t$ τότε (λόγω της (γ)):

$$P\{N_t - N_s = n\} = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

δηλαδή η πιθανότητα αυτή εξαρτάται μόνον από το μήκος του χρόνου $(t-s)$, που σημαίνει ότι η σ.α. $\{N_t\}_{t \geq 0}$ είναι στάσιμων προσανυξήσεων.

Επίσης:

$$P\{N_{t+h} - N_t = 1\} = e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^1}{1!} = \lambda h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^n}{n!} = \lambda h \cdot (1 - \lambda h + o(h)) = \lambda h + o(h)$$

και

$$P\{N_{t+h} - N_t \geq 2\} = e^{-\lambda h} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^n}{n!} = o(h)$$

(4.1.3) $\Rightarrow$ (4.1.4) Εάν $f_t(\cdot) = f(t, \cdot)$ είναι η π.π. της N_t , δηλαδή

$$f_t(n) = P\{N_t = n\}$$

τότε:

$$\begin{aligned} f(t+h, 0) &= P\{N_{t+h} = 0\} = P\{N_t = 0, N_{t+h} - N_t = 0\} \\ &= P\{N_t = 0\} \cdot P\{N_{t+h} - N_t = 0\} = f(t, 0) \cdot \{1 - P\{N_{t+h} - N_t \geq 1\}\} \\ &= f(t, 0) \cdot \{1 - \lambda h + o(h)\} = f(t, 0) - \lambda h f(t, 0) + o(h) f(t, 0) \\ &\Rightarrow \frac{f(t+h, 0) - f(t, 0)}{h} = -\lambda f(t, 0) + \frac{o(h)}{h} f(t, 0) \end{aligned} \quad (1)$$

και παίρνοντας όρια και στα δύο μέλη της (1), του $h \rightarrow 0^+$, έχουμε:

$$f'(t, 0) = -\lambda f(t, 0) \Rightarrow f(t, 0) = P\{N_t = 0\} = ce^{-\lambda t}$$

όπου το c υπολογίζεται από την συνθήκη $f(0, 0) = P\{N_0 = 0\} = 1 = c$, δηλαδή

$$f(t, 0) = P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Για $n \geq 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(t+h, n) &= P\{N_{t+h} = n\} = P\left\{\bigcup_{k=0}^n \{N_t = n-k, N_{t+h} - N_t = k\}\right\} = \sum_{k=0}^n P\{N_t = n-k, N_{t+h} - N_t = k\} \\ &= P\{N_t = n, N_{t+h} - N_t = 0\} + P\{N_t = n-1, N_{t+h} - N_t = 1\} + \sum_{k=2}^n P\{N_t = n-k, N_{t+h} - N_t = k\} \\ &= P\{N_t = n\} P\{N_{t+h} - N_t = 0\} + P\{N_t = n-1\} P\{N_{t+h} - N_t = 1\} + \sum_{k=2}^n P\{N_t = n-k\} P\{N_{t+h} - N_t = k\} \\ &= f(t, n) P\{N_h = 0\} + f(t, n-1) P\{N_h = 1\} + o(h) \\ &= f(t, n) \{1 - \lambda h\} + \lambda h f(t, n-1) + o(h) \\ &\Rightarrow \frac{f(t+h, n) - f(t, n)}{h} = -\lambda f(t, n) + \lambda f(t, n-1) \end{aligned} \quad (3)$$

και παίρνοντας όρια και στα δύο μέλη της (3), του $h \rightarrow 0^+$, έχουμε:

$$f'(t, n) = -\lambda f(t, n) + \lambda f(t, n-1) \Rightarrow \frac{d}{dt} \{e^{\lambda t} f(t, n)\} = \lambda e^{\lambda t} f(t, n-1)$$

που είναι ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων και, ισχυριζόμαστε ότι, έχει λύση της μορφής:

$$f(t, n) = P\{N_t = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n \geq 1 \quad (4)$$

Πράγματι, επαγωγικά n , έχουμε:

(i) Για $n=1$:

$$\frac{d}{dt}\{e^{\lambda t}f(t,1)\}=\lambda e^{\lambda t}f(t,0)=\lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}=\lambda \Rightarrow e^{\lambda t}f(t,1)=\int \lambda dt =\lambda t+c \Rightarrow f(t,1)=(\lambda t+c)e^{-\lambda t}$$

Το c υπολογίζεται από την συνθήκη $f(0,1)=0=c$, οπότε:

$$f(t,1)=P\{N_t=1\}=\lambda te^{-\lambda t}$$

(ii) Υποθέτουμε ότι η (4) ισχύει για $n=m$, δηλαδή :

$$f(t,m)=P\{N_t=m\}=e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!}$$

(iii) Τέλος για $n=m+1$, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\{e^{\lambda t}f(t,m+1)\}=\lambda e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}=\lambda \frac{(\lambda t)^m}{m!} \Rightarrow e^{\lambda t}f(t,m+1)=\frac{(\lambda t)^{m+1}}{(m+1)!}+c$$

και λόγω του ότι $f(0,m+1)=0 \Rightarrow c=0$ έχουμε:

$$f(t,m+1)=P\{N_t=m+1\}=e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m+1}}{(m+1)!}$$

που είναι η (4). ■

4.1.6 Παρατήρηση

Είναι φανερό ότι μια ανέλιξη Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$, είναι μια ανέλιξη Markov (και αυτό γιατί από τις σχέσεις (4.1.3)(β) και (γ), το «μέλλον» είναι ανεξάρτητο όχι μόνον του «παρελθόντος» αλλά και του «παρόντος»).

4.2 ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΙ ΧΡΟΝΟΙ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΙ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Σε μια ανέλιξη Poisson ενδιαφέρον παρουσιάζουν ποσότητες όπως:

- οι χρόνοι που πραγματοποιούνται τα διάφορα γεγονότα καθώς και
- οι χρόνοι ανάμεσα στην πραγματοποίηση διαδοχικών γεγονότων.

4.2.1 Ορισμός

Έστω $\{N_t\}_{t \geq 0}$ μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ και έστω ότι η τ.μ. T_1 παριστάνει τον χρόνο, από την χρονική στιγμή 0 μέχρι την πραγματοποίηση του 1^{ου} γεγονότος και για $n > 1$, η T_n παριστάνει τον χρόνο από την πραγματοποίηση του $(n-1)$ γεγονότος μέχρι την πραγματοποίηση του n -ιστού γεγονότος. Η σ.α. $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται σ.α. των ενδιάμεσων χρόνων (interarrival times).

4.2.2 Πρόταση

Έστω $\{N_t\}_{t \geq 0}$ μια σ.α. Poisson με ρυθμό λ και $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι η σ.α. των ενδιάμεσων χρόνων. Τότε οι τ.μ. T_n είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες, η δε (κοινή τους) κατανομή είναι η εκθετική με παράμετρο λ .

Απόδειξη

Δείτε π.χ. Θ. Κάκουλου: «Στοχαστικές Ανελιξίες», σελίδα 97.

■

4.2.3 Παρατήρηση

Σε μια σ.α. Poisson οι υποθέσεις των ανεξάρτητων και στάσιμων προσανξήσεων είναι ουσιαστικά ισοδύναμες με το ότι σε κάθε χρονική στιγμή, η σ.α. (πιθανοθεωρητικά) ξαναρχίζει από την αρχή. Μ' άλλα λόγια, από μια (οποιαδήποτε) δεδομένη χρονική στιγμή και μετά, η ανέλιξη, είναι ανεξάρτητη όλων όσων έχουν συμβεί μέχρι τότε (ανεξάρτητες προσανξήσεις) και επίσης έχει την ίδια κατανομή (από τις στάσιμες προσανξήσεις). Η ανέλιξη δηλαδή δεν έχει μνήμη, και έτσι οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναμένεται να ακολουθούν την εκθετική κατανομή (κατανομή που ως γνωστό χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα της «αμνησίας»).

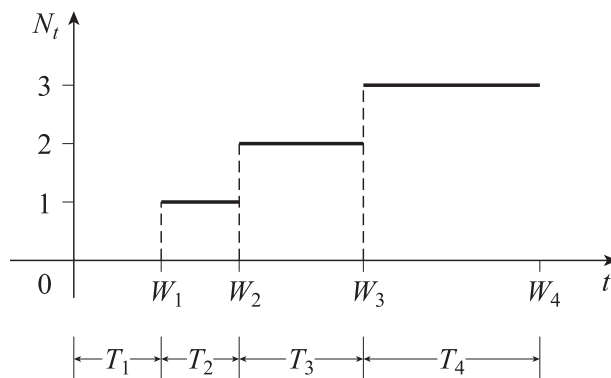
4.2.4 Ορισμός

Έστω $\{N_t\}_{t \geq 0}$ μια σ.α. Poisson με ρυθμό λ και έστω W_n είναι ο χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του n -ιοστού γεγονότος. Τότε, η σ.α. $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται σ.α. των χρόνων αναμονής (waiting times).

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι:

$$W_n = \sum_{k=1}^n T_k$$

Μια δυνατή πραγματοποίηση μιας ανέλιξης Poisson φαίνεται στο σχήμα 4.1 (μαζί με τους ενδιάμεσους χρόνους καθώς και τους χρόνους αναμονής).



Σχήμα 4.1

4.2.5 Πρόταση

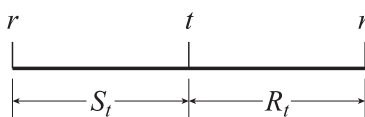
Η τ.μ. W_n (χρόνος αναμονής) ακολουθεί την γάμμα κατανομή (Erlang) με παραμέτρους n και $1/\lambda$, δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας της είναι ίση με:

$$f_{W_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0$$

Απόδειξη

Δείτε π.χ. Τ.Δάρα – Π. Σύψα: «Στοχαστικές Ανελίξεις: Θεωρία και εφαρμογές», σελίδα 159. ■

Δύο ακόμα ποσότητες που μας ενδιαφέρουν σε μια σ.α. Poisson, είναι ο *οπισθοδρομικός χρόνος επανόδου* και ο *προδρομικός χρόνος επανόδου*. Έστω λοιπόν t μια χρονική στιγμή κατά την οποία δεν συμβαίνει κανένα γεγονός και r ο χρόνος κατά τον οποίο συμβαίνει το τελευταίο γεγονός (πριν από τον χρόνο t) και έστω n ο χρόνος κατά τον οποίο συμβαίνει το πρώτο μετά τον χρόνο t γεγονός (δείτε σχήμα 4.2.).



Σχήμα 4.2

4.2.6 Ορισμός

Έστω $\{N_t\}_{t \geq 0}$ μια σ.α. Poisson με ρυθμό λ και έστω ότι η τ.μ S_t μετρά τον χρόνο από την πραγματοποίηση του $(j-1)$ γεγονότος, μέχρι την χρονική στιγμή t κατά την οποία δεν συμβαίνει κανένα γεγονός. Η S_t καλείται **οπισθοδρομικός χρόνος επανόδου** (backward recurrence time).

Ακόμα, έστω ότι η τ.μ R_t που μετρά τον χρόνο από την χρονική στιγμή t , κατά την οποία δεν συμβαίνει κανένα γεγονός, μέχρι την πραγματοποίηση του j γεγονότος. Τότε, η R_t καλείται **προδρομικός χρόνος επανόδου** (forward recurrence time).

Οι παρακάτω δύο προτάσεις μας δίνουν την ακριβή κατανομή των τ.μ. R_t και S_t αντίστοιχα.

4.2.7 Πρόταση

Η κατανομή της τ.μ R_t είναι ανεξάρτητη του t και δίνεται από την σχέση:

$$P\{R_t \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

δηλαδή ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ .

Απόδειξη

Δείτε π.χ. Π.-Χ..Γ. Βασιλείου: «Στοχαστικές μέθοδοι στις επιχειρησιακές έρευνες», σελίδα 253. ■

4.2.8 Πρόταση

Η κατανομή της τ.μ S_t δίνεται από την σχέση:

$$P\{S_t=t\}=e^{-\lambda t} \quad \text{και} \quad P\{S_t \leq x\}=1-e^{-\lambda x}$$

Απόδειξη

Δείτε π.χ. Π.-Χ..Γ. Βασιλείου: «Στοχαστικές μέθοδοι στις επιχειρησιακές έρευνες», σελίδα 254.

■

4.3 ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΝΕΛΙΞΗΣ POISSON

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε μερικές ενδιαφέρουσες και χρήσιμες γενικεύσεις της ανέλιξης Poisson.

4.3.1 Μη ομογενής ανέλιξη Poisson

Έστω ότι σε μια ανέλιξη Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$ ο ρυθμός λ δεν είναι σταθερός αλλά εξαρτάται από τον χρόνο, δηλαδή $\lambda=\lambda(t)$. Η συνθήκη (γ) στον πρώτο ορισμό της ανέλιξης Poisson γίνεται σε αυτή την περίπτωση:

$$P\{N_{t+h}-N_t=1\}=\lambda(t)h+o(h).$$

Τότε η N_t ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο:

$$\rho(t)=\int_0^t \lambda(r) dr.$$

ο οποίος καλείται **συνάρτηση μέσης τιμής** της ανέλιξης. Η ανέλιξη $\{N_t\}_{t \geq 0}$ καλείται σε αυτή την περίπτωση **μη-ομογενής ανέλιξη** ή **χρονικά εξαρτημένη ανέλιξη Poisson**.

4.3.2 Παρατήρηση

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι σε μια μη-ομογενή ανέλιξη Poisson, δεν είναι ούτε ανεξάρτητες ούτε ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ.

4.3.3 Ανέλιξη Poisson με τυχαίο ρυθμό

Έστω ότι σε μια ανέλιξη Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$ ο ρυθμός λ δεν είναι πάλι σταθερός αλλά μια τ.μ. Λ με κατανομή F (π.π. $f_\Lambda(x)$) και μέση τιμή λ . Η κατανομή της τ.μ. N_t υπολογίζεται από την σχέση:

$$P\{N_t=n\}=\int_0^\infty P\{N_t=n \mid \Lambda=x\} f_\Lambda(x) dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} f_\Lambda(x) dx \quad (*)$$

η δε μέση της τιμή ισούται με:

$$EN_t = E[E[N_t | \Lambda]] = \int_0^{\infty} E[N_t | \Lambda=x] f_{\Lambda}(x) dx = t \int_0^{\infty} x f_{\Lambda}(x) dx = t E\Lambda = \lambda t$$

Η σ.α. $\{N_t\}_{t \geq 0}$ καλείται **μικτή ή δεσμευμένη ανέλιξη Poisson**. Μια τέτοια ανέλιξη, είναι φανερό από την (*), ότι έχει στάσιμες προσανυζήσεις αλλά όχι απαραίτητα ανεξάρτητες.

4.3.4 Σύνθετη ανέλιξη Poisson

Έστω $\{N_t\}_{t \geq 0}$ είναι μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ και $\forall t \geq 0$ ορίζουμε:

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n$$

όπου $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ταυτοτικά κατανομημένων (θετικών) τ.μ. και ανεξάρτητων από την $\{N_t\}_{t \geq 0}$. Η ανέλιξη $\{X_t\}_{t \geq 0}$ καλείται **σύνθετη ανέλιξη Poisson**.

Εάν $Y_n = 1 \Rightarrow X_t = N_t$, οπότε η σύνθετη ανέλιξη Poisson σε αυτή την περίπτωση είναι η συνήθης ανέλιξη Poisson.

Στην περίπτωση εφαρμογών μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson μας ενδιαφέρουν η μέση τιμή της και η διασπορά της (ακριβέστερα η μέση τιμή και διασπορά της N_t). Με την βοήθεια των χαρακτηριστικών συναρτήσεων είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι, οι ποσότητες αυτές είναι ίσες με:

$$EX_t = \lambda t EY_1 \quad \& \quad V(X_t) = \lambda t EY_1^2$$

4.3.5 Παράδειγμα

Έστω ότι η ζημιά Y που πληρώνει μια ασφαλιστική εταιρεία σε έναν πελάτη ύστερα από ένα αυτοκινητιστικό δυστύχημα είναι μια τ.μ. και έστω N_t ο αριθμός των δυστυχημάτων που συμβαίνουν σε χρόνο t από τους ασφαλισμένους της εταιρείας. Εάν η σ.α. $\{N_t\}_{t \geq 0}$ είναι μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ , τότε το συνολικό ποσό που

θα πρέπει να πληρώσει η εταιρεία είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson ($X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n$

είναι η ζημιά που πληρώνει η εταιρεία στο n -οστο δυστύχημα).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

5.1 ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι, οι ενδιάμεσοι χρόνοι T_n σε μια ανέλιξη Poisson είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανομημένες τ.μ. με (με κοινή κατανομή την) εκθετική κατανομή.

Θέλοντας να γενικεύσουμε τα παραπάνω, μπορούμε να θεωρήσουμε μια στοχαστική ανέλιξη απαρίθμησης στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι ανεξάρτητοι και ταυτοτικά κατανομημένοι (αλλά) με μια οποιοδήποτε κατανομή.

5.1.1 Ορισμός

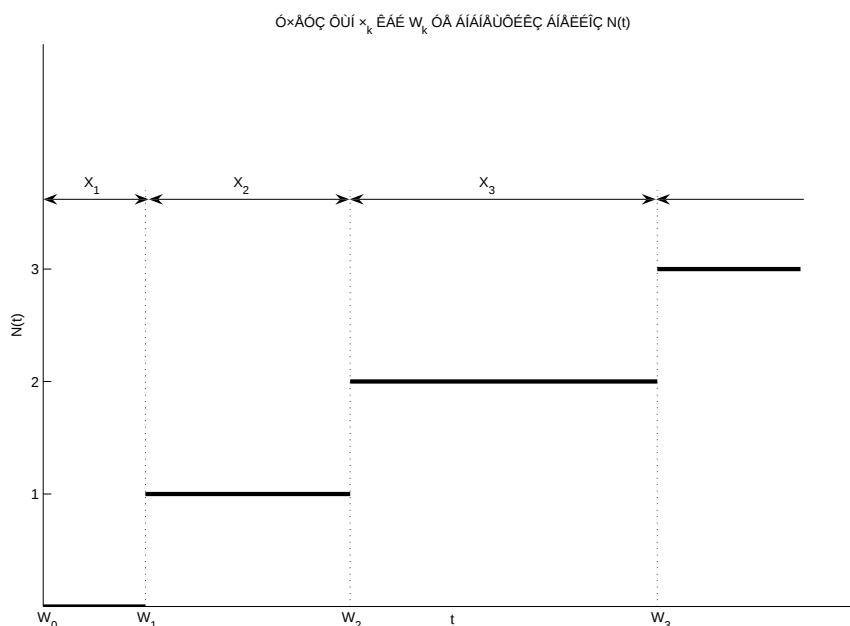
Έστω $\{N_t\}_{t \geq 0}$ μια στοχαστική ανέλιξη απαρίθμησης στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι θετικές, ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανομημένες τ.μ. (όπου με X_i συμβολίζουμε τον χρόνο μεταξύ του $(i-1)$ -οστού και του i -οστού γεγονότος). Η ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t \geq 0}$ λέγεται **ανανεωτική ανέλιξη** (renewal process).

Κάθε φορά που συμβαίνει ένα γεγονός λέμε ότι έχουμε μια **ανανέωση**. Ακόμα, κάθε φορά που συμβαίνει μια ανανέωση, λέμε ότι συμπληρώνεται ένας **ανανεωτικός κύκλος**.

5.1.2 Ορισμός

Ονομάζουμε **χρόνο αναμονής** W_n (waiting time) τον χρόνο μέχρι την εμφάνιση του n -οστού γεγονότος, δηλαδή:

$$W_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \text{ για } n \geq 1 \text{ και } W_0 = 0$$



5.1.3 Παράδειγμα

(α) (Αντικατάσταση μηχανών) Έστω ότι ένα εξάρτημα μιας μηχανής χαλάει, μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή, και αντικαθίσταται αμέσως από ένα νέο εξάρτημα. Το νέο εξάρτημα το προμηθευόμαστε από μια διαρκή και άπειρη σε πλήθος τέτοιων εξαρτημάτων παρακαταθήκη που διαθέτουμε. Αν με $N(t)$ συμβολίσουμε τον αριθμό των εξαρτημάτων που έχουν χαλάσει μέχρι την στιγμή t , τότε προφανώς η $\{N_t\}_{t \geq 0}$ είναι μια ανανεωτική ανέλιξη.

(β) (Ροή κυκλοφορίας) (1) Η σ.α. $\{N_t\}_{t \geq 0}$ μετρά τον αριθμό των οχημάτων που διέρχονται από ένα ορισμένο σημείο ενός δρόμου.

(2) Ας υποθέσουμε ότι αυτοκίνητα βρίσκονται σε έναν (απείρου θεωρητικά μήκους δρόμο με μια λωρίδα κυκλοφορίας και ας θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο σημείο του δρόμου σαν την αρχή του. Αν N_t παριστάνει τον αριθμό των οχημάτων που βρίσκονται σε απόσταση t χιλιομέτρων από την αρχή του δρόμου, τότε η $\{N_t\}_{t \geq 0}$ είναι μια ανανεωτική ανέλιξη

5.1.4 Σχέση της ανανεωτικής ανέλιξης με τους ενδιάμεσους χρόνους

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι, σε μια ανανεωτική ανέλιξη, ισχύει η εξής βασική σχέση: ο αριθμός ανανεώσεων μέχρι την στιγμή t είναι μεγαλύτερος ή ίσος από n αν και μόνον αν η ανανέωση συμβαίνει πριν από ή κατά την στιγμή t .

Συμβολικά: $N(t) \geq n \Leftrightarrow W_n \leq t$ (δείτε το παραπάνω σχήμα).

Έστω τώρα $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ μια ακολουθία μη αρνητικών, ανεξάρτητων τ.μ., με κοινή κατανομή F και ας υποθέσουμε ότι $F(0)=P\{X_n=0\}<1$.

Ας θεωρήσουμε ότι κάθε X_n είναι ο χρόνος μεταξύ του $(n-1)$ -οστού και του n -οστού γεγονότος (π.χ. αφίξεις).

Τότε, η:

$$\mu = EX_n = \int_0^{\infty} x dF(x)$$

είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών γεγονότων. Προφανώς $0 < \mu \leq \infty$ (λόγω του ότι $X_n \geq 0$ και $F(0) < 1$).

5.2 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΕΣ

Έστω $\{N_t\}_{t \geq 0}$ μια ανανεωτική ανέλιξη και $\{W_n\}_{n=1,2,\dots}$ οι χρόνοι αναμονής.

(α) Ένα από τα ερωτήματα που προκύπτουν σε μια τέτοιου είδους ανέλιξη, είναι αν μπορούν να συμβούν άπειρες ανανεώσεις μέσα σε ένα πεπερασμένου μήκους χρονικό διάστημα, δηλαδή αν μπορεί για κάποιο t πεπερασμένο, το $N(t)$ να είναι άπειρο. Με μια πρώτη ματιά η απάντηση είναι όχι.

Για να το αποδείξουμε ας σκεφτούμε ότι:

$$N(t) = \max \{n : W_n \leq t\} \quad (1).$$

Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών προκύπτει ότι με πιθανότητα 1 ισχύει:

$$\frac{W_n}{n} \rightarrow \mu \text{ καθώς } n \rightarrow \infty .$$

Αλλά $\mu > 0$ και επομένως το W_n πρέπει να τείνει στο άπειρο καθώς $n \rightarrow \infty$. και Λόγω της (1), όμως, το $N(t)$ πρέπει να είναι ένας πεπερασμένος αριθμός.

(β) Ένα δεύτερο ερώτημα αφορά την συμπεριφορά του $N(t)$ καθώς το t τείνει στο άπειρο.

Αποδεικνύεται ότι, με πιθανότητα 1, ισχύει:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$$

(θα συμβολίζουμε με $N(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$) .

Πράγματι, ο μόνος τρόπος για να είναι το $N(\infty)$ πεπερασμένο είναι, ένας από τους ενδιάμεσους χρόνους να είναι άπειρος, δηλαδή:

$$P\{N(\infty) < \infty\} = P\{X_n = \infty, \text{ για κάποιο } n\} = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = \infty\}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = \infty\} = 0 .$$

5.3 ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ ΑΝΤΑΜΟΙΒΗΣ (renewal reward processes)

Θεωρούμε μια ανανεωτική ανέλιξη $\{N_t\}_{t \geq 0}$ με ενδιάμεσους χρόνους X_n , $n \geq 1$ και υποθέτουμε ότι κάθε φορά που συμβαίνει μια ανανέωση εισπράττουμε ένα χρηματικό ποσό ως «ανταμοιβή». Συμβολίζουμε R_n , $n \geq 1$ το ποσό που κερδίζουμε την στιγμή της n -ιστής ανανέωσης και υποθέτουμε ότι τα R_n , $n \geq 1$ είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανομημένες τ.μ. (το R_n , $n \geq 1$ μπορεί να είναι εξαρτημένο από το X_n , $n \geq 1$).

Θέτοντας:

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$$

τότε, το $R(t)$ παριστάνει το συνολικό χρηματικό ποσό που έχουμε κερδίσει μέχρι την στιγμή t .

5.3.1 Θεώρημα

Εάν η (κοινή) κατανομή F έχει πεπερασμένη μέση τιμή ($E[X] < \infty$), τότε με πιθανότητα 1 ισχύει:

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu}$$

Η ποσότητα $\frac{1}{\mu}$ καλείται **ρυθμός** της ανανεωτικής διαδικασίας.

Απόδειξη

Είναι προφανές ότι:

$$W_{N(t)} \leq t < W_{N(t)+1} \Rightarrow \frac{W_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{W_{N(t)+1}}{N(t)}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, το όριο των $\frac{W_{N(t)}}{N(t)}$, $\frac{W_{N(t)+1}}{N(t)}$, καθώς το t τείνει στο άπειρο, είναι ίσο με μ .

Το $\frac{W_{N(t)}}{N(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i}{N(t)}$, που είναι η μέση τιμή από $N(t)$ ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανομημένες τ.μ.. Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι:

$$\frac{W_{N(t)}}{N(t)} \rightarrow \mu \text{ καθώς } N(t) \rightarrow \infty.$$

Αλλά $N(t) \rightarrow \infty$ όταν $t \rightarrow \infty$, οπότε προκύπτει ότι $\frac{W_{N(t)}}{N(t)} \rightarrow \mu$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

Γράφοντας:

$$\frac{W_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{W_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)},$$

έχουμε ότι $\frac{W_{N(t)+1}}{N(t)+1} \rightarrow \mu$ καθώς $t \rightarrow \infty$ (για τον ίδιο λόγο όπως παραπάνω) και

$\frac{N(t)+1}{N(t)} \rightarrow 1$ όταν $t \rightarrow \infty$, από τις οποίες προκύπτει $\frac{W_{N(t)+1}}{N(t)} \rightarrow \mu$ καθώς $t \rightarrow \infty$. ■

Έστω τώρα: $E[R] = E[R_n]$ και $E[X] = E[X_n]$

5.3.2 Θεώρημα (ανανεωτικών ανελίξεων ανταμοιβής)

Αν $E[R] < \infty$ και $E[X] < \infty$ τότε, με πιθανότητα 1, ισχύει:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$$

Απόδειξη

Έχουμε ότι:

$$\frac{R(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t} \quad (i)$$

Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών προκύπτει ότι:

$$\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{N(t)} \rightarrow E[R] \text{ καθώς το } t \text{ τείνει στο άπειρο} \quad (\text{ii})$$

Ακόμα, από το θεώρημα 5.3.1., έπεται ότι:

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{E[X]} \text{ καθώς το } t \text{ τείνει στο άπειρο.} \quad (\text{iii})$$

Τέλος, το θεώρημα 5.3.2 προκύπτει από την (i) με την βοήθεια των (ii) και (iii) ■

5.3.3 Παρατήρηση

Το θεώρημα 5.3.2 μας δείχνει ότι: η μέση τιμή, μακροπρόθεσμα, του ποσού που έχουμε κερδίσει στην μονάδα του χρόνου, είναι το πηλίκο της μέσης τιμής του ποσού που κερδίσαμε κατά την διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου προς την μέση τιμή της χρονικής διάρκειας ενός κύκλου.

5.4 ΗΛΙΚΙΑ ΜΙΑΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗΣ ΑΝΕΛΙΞΗΣ

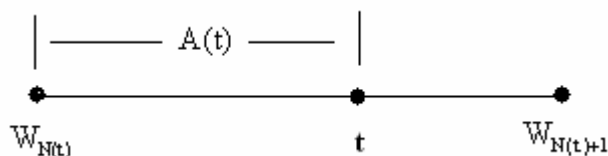
Έστω $\{N_t\}_{t \geq 0}$ μια ανανεωτική ανέλιξη με συνάρτηση κατανομής., για τους ενδιαμέσους χρόνους $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$, F . Ορίζουμε $A(t)$ να είναι ο χρόνος από την τελευταία ανανέωση μέχρι μια τυχαία χρονική στιγμή t .

Εάν θεωρήσουμε ότι οι ανανεώσεις παριστάνουν τις επανειλημμένες αντικαταστάσεις ενός εξαρτήματος μιας μηχανής, κάθε φορά που αυτό χαλάει, με ένα καινούργιο εξάρτημα, τότε το $A(t)$ αντιπροσωπεύει την **ηλικία** (ή την **τρέχουσα ζωή**) του εξαρτήματος που βρίσκεται σε χρήση την τυχαία στιγμή t .

Το $W_{N(t)}$ παριστάνει τον χρόνο από της τελευταίας ανανέωση του εξαρτήματος που συνέβη πριν από την χρονική στιγμή t ή ακριβώς την στιγμή t . Επομένως:

$$A(t) = t - W_{N(t)}.$$

(δείτε το παρακάτω σχήμα)



Θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της ηλικίας που ορίζουμε με:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\int_0^s A(t) dt}{s}$$

Για να υπολογίσουμε την παραπάνω μέση τιμή θα χρησιμοποιήσουμε τις ανανεωτικές ανελίξεις ανταμοιβών ως εξής: υποθέτουμε ότι κάθε στιγμή εισπράττουμε ένα χρηματικό ποσό με ρυθμό ίσο με την ηλικία της ανανεωτικής ανέλιξης εκείνη την στιγμή. Επομένως την στιγμή t , πληρωνόμαστε με ρυθμό $A(t)$ και έτσι το $\int_0^s A(t)dt$ παριστάνει το συνολικό ποσό που έχουμε εισπράξει μέχρι την στιγμή s .

Από το Θεώρημα ανανεωτικών ανελίξεων ανταμοιβής 5.3.2, έχουμε:

$$\frac{\int_0^s A(t)dt}{s} = \frac{E[\text{ποσό κατά την διάρκεια ενός κύκλου}]}{E[\text{χρόνος του ανανεωτικού κύκλου}]}$$

Η ηλικία της ανέλιξης την στιγμή t είναι t , επομένως :

$$\text{ποσό κατά την διάρκεια ενός κύκλου} = \int_0^X t dt = \frac{X^2}{2},$$

όπου X είναι η διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου.

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\text{μέση τιμή της ηλικίας} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\int_0^s A(t)dt}{s} = \frac{E[X^2]}{2E[X]}.$$

Πίνακας Στοχαστικών ανελίξεων κεφαλαίου

Ανέλιξη	Ονομασία	Ερμηνεία
$\{N_t\}_{t \geq 0}$	ανανεωτική ανέλιξη	N_t , αριθμός των γεγονότων (ανανεώσεων) που συμβαίνουν μέχρι τον χρόνο t
$\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$	ενδιάμεσοι χρόνοι	X_i ο χρόνος μεταξύ του $(i-1)$ -οστού και του i -οστού γεγονότος
$\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ $W_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, για $n \geq 1$ και $W_0 = 0$	χρόνοι αναμονής	W_n ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση του n -οστού γεγονότος
$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$	«ανταμοιβές»	R_n , $n \geq 1$ το ποσό που κερδίζουμε την στιγμή της n -οστής ανανέωσης
$\{A(t)\}_{t \geq 0}$	ηλικία	$A(t)$ ο χρόνος από την τελευταία ανανέωση μέχρι μια τυχαία χρονική στιγμή t

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΟΥΡΕΣ

6.1 ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΟΥΡΑΣ

Η θεωρία των ουρών είναι ενδιαφέρουσα και δημοφιλής για δυο κυρίως λόγους:

- ❖ Πρώτον, τα μοντέλα ουρών εύκολα περιγράφονται και σχεδιάζονται μέσω της αντίληψης που έχουμε για δραστηριότητες σχετικές με δημόσιες υπηρεσίες, τράπεζες, τηλεφωνικές κλήσεις, σύνδεσης στο διαδίκτυο μέσω server κ.λ.π.
- ❖ Δεύτερον, ακόμα και τα πιο απλά μοντέλα λύνονται με την βοήθεια των τύπων και συμπερασμάτων, που αναπτύσσονται στην Θεωρία Ουρών.

6.1.1 Παράδειγμα

Μια τράπεζα προσφέρει στους πελάτες της μια μεγάλη ποικιλία «προϊόντων» (εξυπηρετήσεων). Η ζήτηση γι' αυτά ποικίλει αναφορικά με την ημέρα και την βδομάδα. Το μέγεθος της αίθουσας αναμονής, της τράπεζας, είναι περιορισμένο, οπότε μερικοί πελάτες είναι αναγκασμένοι να φύγουν χωρίς να κάνουν καμιά συναλλαγή. Ο χρόνος που απαιτείται για μια συναλλαγή, δηλαδή για μια ιδιαίτερη ομάδα προϊόντων ποικίλει αναφορικά με την διαδικασία και τις ανθρώπινες δυνατότητες. Είναι καλύτερα για το κοινό να έχει κάθε είδος εξυπηρέτησης (προϊόντων) διαθέσιμο σε διαφορετική θέση ή όλες οι θέσεις πρέπει να προσφέρουν όλα τα είδη των εξυπηρετήσεων;

Στο παραπάνω σύστημα, παρατηρούμε ότι, έχουμε μια **ροή** (αφίξεις) **πελατών** οι οποίοι φθάνουν σ' ένα σημείο εξυπηρέτησης και πρέπει να **εξυπηρετηθούν**, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει ένα **φράγμα στον ρυθμό εξυπηρέτησης** τους (είτε γιατί δεν είναι δυνατόν να εξυπηρετηθούν περισσότεροι από έναν ορισμένο αριθμό πελάτες μέσα σ' ένα χρονικό διάστημα είτε γιατί η εξυπηρέτηση είναι προσιτή μόνο κατά την διάρκεια ορισμένων χρονικών περιόδων), με αποτέλεσμα τον **σχηματισμό** μιας ή περισσότερων **ουρών** αναμονής. Εάν η τράπεζα διαθέτει π.χ. τρία ταμεία για την εξυπηρέτηση των πελατών της, τρεις πελάτες μπορούν να εξυπηρετούνται ανά πάσα δεδομένη χρονική στιγμή.

Μελετάμε λοιπόν τέτοια σύστημα ουράς, και στόχος μας είναι να τα βελτιώσουμε, τροποποιώντας τα κατά έναν κατάλληλο τρόπο. Τροποποίηση του συστήματος μπορεί να γίνει σε κάποιον από τους εξής παράγοντες του.

- (α) **Στις αφίξεις** (μπορούμε π.χ. να έχουμε αφίξεις πελατών με ραντεβού)
- (β) **Στην εξυπηρέτηση** (μπορούμε π.χ. να ελαττώσουμε τον χρόνο εξυπηρέτησης π.χ. με την εισαγωγή νέων τεχνολογιών).
- (γ) **Στην επιλογή των πελατών προς εξυπηρέτηση** (μπορούμε π.χ. να επιλέγουμε πρώτα για εξυπηρέτηση πελάτες με μικρό χρόνο εξυπηρέτησης).

6.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΟΥΡΑΣ

Όταν μελετάμε ένα σύστημα ουράς, μελετάμε τα εξής χαρακτηριστικά του:

- (1) **Η διαδικασία άφιξης των πελατών**, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο φθάνουν οι πελάτες στο σύστημα. Καθορίζεται από την κατανομή των αφίξεων ή από τον μέσο χρόνο αναμονής ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αφίξεις και την (στοχαστική) εξάρτηση των χρόνων αυτών. Οι αφίξεις μπορεί να είναι:
 - (α) **Κανονικές αφίξεις**: οι πελάτες φθάνουν ένας-ένας σε ίσα χρονικά διαστήματα. .
 - (β) **Τυχαίες αφίξεις**: οι αφίξεις των πελατών δεν γίνονται σε ίσα χρονικά, ή οι πελάτες δεν φθάνουν ένας-ένας αλλά κατά ομάδες ή οι αφίξεις εξαρτώνται από διάφορα χαρακτηριστικά του συστήματος ή έχουμε συνεχή ροή πελατών κ.λ.π.
- (2) **Διαδικασία εξυπηρέτησης**: αναφέρεται στο (i) πόσο διαρκεί η εξυπηρέτηση (ii) πότε είναι προσιτή (iii) πόσοι πελάτες μπορούν να εξυπηρετηθούν σε ορισμένο χρονικό διάστημα. Τα βασικά στοιχεία της διαδικασίας εξυπηρέτησης είναι:
 - (α) **Χρόνος εξυπηρέτησης**: ο χρόνος που χρειάζεται ένας πελάτης για να εξυπηρετηθεί. Ο χρόνος αυτός μπορεί να υπολογιστεί, επίσης, αν είναι γνωστή η διαδικασία με την οποία οι πελάτες, που έχουν εξυπηρετηθεί, εγκαταλείπουν το σύστημα.
 - (β) **Δυνατότητα εξυπηρέτησης**: δηλαδή ο μέγιστος αριθμός των πελατών που μπορεί να εξυπηρετήσει το σύστημα σε μια δεδομένη χρονική στιγμή.
 - (γ) **Διαθεσιμότητα εξυπηρέτησης**: δηλαδή το χρονικό διάστημα κατά το οποίο είναι δυνατή η εξυπηρέτηση.
- (3) **Η πειθαρχία της ουράς**, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο επιλέγονται οι πελάτες, από το σύστημα, για να εξυπηρετηθούν. Η εξυπηρέτηση λοιπόν μπορεί να είναι:
 - (α) **FIFO (First In First Out)**: αυτοί που φθάνουν πρώτοι εξυπηρετούνται πρώτοι π.χ. ταχυδρομείο.
 - (β) **LIFO (Last In First Out)**: αυτοί που φθάνουν τελευταίοι εξυπηρετούνται πρώτοι π.χ. τα προϊόντα που τοποθετούνται τελευταία στα ράφια ενός super-market είναι αυτά που (συνήθως) πωλούνται πρώτα.
 - (γ) **SIRO (Service In Random Order)**: οι πελάτες επιλέγονται τυχαία να εξυπηρετηθούν.
 - (δ) **Προτεραιότητα**: ο πελάτης που πρόκειται να εξυπηρετηθεί επιλέγεται σύμφωνα με ορισμένο(α) κριτήριο(α), που συνήθως είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης του (π.χ. η λεγόμενη **SSTF (Shortest Service Time First)** όπου επιλέγεται πρώτος ο πελάτης με τον ελάχιστο απαιτούμενο χρόνο εξυπηρέτησης).
- (4) **Ο αριθμός των σημείων εξυπηρέτησης** : Είναι ο αριθμός των παράλληλων σημείων στα οποία οι πελάτες εξυπηρετούνται. (π.χ. οι 10 δίοδοι ενός σταθμού διοδίων). .

- (5) **Δυνατότητα του συστήματος ουράς:** Είναι ο μεγαλύτερος αριθμό πελατών που είναι δυνατόν να δεχθεί το σύστημα ουράς (υπάρχουν πολλές φορές περιορισμοί λόγω π.χ. περιορισμένου χώρου αναμονής).

6.3 ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΟΥΡΩΝ

Ένα σύστημα ουράς περιγράφεται, συνήθως, με την βοήθεια πέντε συμβόλων της μορφής A / B / Γ / Δ / Ε όπου το:

- A** εκφράζει την κατανομή της διαδικασίας αφίξεων
- B** εκφράζει την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης
- Γ** δίνει τον αριθμό των σημείων εξυπηρέτησης
- Δ** δίνει την δυνατότητα του συστήματος της ουράς
- E** εκφράζει την πειθαρχία της ουράς

A	B	Γ	Δ	E
αφίξεις	Χρόνος εξυπηρέτησης	Αριθμός σημείων εξυπηρέτησης	Δυνατότητα συστήματος	Πειθαρχία ουράς

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα γράμματα και αριθμοί που μπορούν να τοποθετηθούν στις θέσεις των A, B, Γ, Δ, E.

Παράσταση των Ουρών

Χαρακτηριστικά	Σύμβολο	Ερμηνεία
(A) Διαδικασία αφίξεων	M D E_k GI	Poisson Κανονικές αφίξεις κατανομή Erlang παραμέτρου κ γενική ανεξάρτητη
(B) Κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης	M D E_k G	Εκθετική Κανονική κατανομή Erlang παραμέτρου κ γενική
(Γ) Αριθμός (παράλληλων) σημείων εξυπηρέτησης	1, 2, 3,..... ∞	
(Δ) Δυνατότητα συστήματος	1, 2, 3,..... ∞	
(E) Πειθαρχία ουράς	FIFO LIFO SIRO PRI GD	First In First Out Last In First Out Service In Random Order Priority General Distribution

Έτσι για παράδειγμα το σύστημα ουράς M / D / 4 / 10 / FIFO είναι το σύστημα που έχει διαδικασία αφίξεων Poisson, κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης κανονική, 4 παράλληλα σημεία εξυπηρέτησης, μπορεί να δεχθεί μέχρι 10 πελάτες και εξυπηρετείται πρώτος εκείνος που φθάνει πρώτος στο σύστημα.

6.3.1 Παρατήρηση

Αν στα Δ / Ε έχουμε ∞ / FIFO τότε συνήθως αυτά παραλείπονται και έτσι χρησιμοποιούμε μόνο τα τρία πρώτα σύμβολα.

6.4 ΜΕΤΡΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΙΑΣ ΟΥΡΑΣ

Οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν σε μία ουρά, τις οποίες καλούμε **μέτρα λειτουργικότητας της ουράς** (προσπαθούμε να τις υπολογίσουμε μαθηματικά είναι:

- (α) Η κατανομή του χρόνου παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα (ή στην ουρά) ή ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα (ή στην ουρά).
- (β) Η κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα (ή την ουρά) ή ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα (ή στην ουρά) .
- (γ) Η κατανομή της περιόδου απασχόλησης ενός εξυπηρετητή ή η μέση περίοδος απασχόλησης ενός εξυπηρετητή.

Με $L(t)$ συμβολίζουμε το πλήθος των πελατών στο σύστημα την στιγμή t και η

$$p_k = P\{L=k\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L(t)=k\}$$

Η πιθανότητα p_k μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το ποσοστό του χρόνου που στο σύστημα βρίσκονται k πελάτες. Οι πιθανότητες p_k είναι από τον ορισμό τους ανεξάρτητες του χρόνου (κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας» του συστήματος).

Ακόμα, με S_n συμβολίζουμε τον χρόνο παραμονής του n -ιοστού πελάτη στο σύστημα και:

$$F_S(x) = P\{S \leq x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n \leq x\}$$

Η $F_S(x)$ μας δίνει την πιθανότητα ο χρόνος παραμονής ενός τυχαίου πελάτη στο σύστημα να μην ξεπερνάει τις x χρονικές μονάδες .

Για τις μέσες τιμές: $E(L)$ του πλήθους των πελατών στο σύστημα και $E(S)$ του χρόνου παραμονής ισχύουν:

$$E(L) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L(x) dx$$

και

$$E(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$$

6.5 ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΥΡΩΝ

Στα συστήματα που θα αναλύσουμε στην συνέχεια, χωρίς άλλη αναφορά, θα θεωρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω τρεις υποθέσεις:

- (α) Ο αριθμός $N(t)$ των πελατών που έχουν εισέλθει στο σύστημα μέχρι την στιγμή t , αποτελεί μια ανανεωτική ανέλιξη. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε με T_n την χρονική στιγμή άφιξης του n -οστού πελάτη (υποθέτοντας ότι $T_0 = 0$), τότε οι ενδιάμεσοι χρόνοι (μεταξύ διαδοχικών αφίξεων) $X_n = T_n - T_{n-1}$ είναι ανεξάρτητοι και ταυτοτικά κατανεμημένοι με κοινή κατανομή έστω X .
- (β) Οι πελάτες που καταφθάνουν στο σύστημα περιμένουν στο τέλος μιας μοναδικής ουράς αναμονής, η οποία λειτουργεί με τη λογική «όποιος προηγείται στην άφιξη, προηγείται και στην εξυπηρέτηση» (δηλαδή πρόκειται για μια ουρά FIFO). Όταν ένας εξυπηρετητής είναι διαθέσιμος, εξυπηρετεί τον επικεφαλής της ουράς αναμονής πελάτη.
- (γ) Οι χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με κοινή κατανομή έστω B . Δηλαδή, αν συμβολίσουμε με B_n τον χρόνο εξυπηρέτησης του n -ιοστού πελάτη, τότε η $\{B_n\}$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών, ανεξάρτητων και ταυτοτικά κατανεμημένων τ.μ., οι οποίες δεν εξαρτώνται από το πλήθος N των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα.

Με την έκφραση «**η κατάσταση του συστήματος**» θα εννοούμε τον αριθμό $L(t)$ των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα (στην ουρά συν στην εξυπηρέτηση) την χρονική στιγμή t .

6.6 ΤΑΣΗ ΣΥΝΩΣΤΙΣΜΟΥ

Έστω X η κοινή κατανομή των τ.μ. X_n και B η κοινή κατανομή των τ.μ. B_n .

6.6.1 Ορισμός

Ονομάζουμε **τάση συνωστισμού της ουράς ρ** , το πηλίκο της μέσης τιμής των χρόνων εξυπηρέτησης, προς την μέση τιμή των ενδιάμεσων των αφίξεων χρόνων, δηλαδή:

$$\rho = \frac{E(B)}{E(X)}.$$

Σε όλα τα παρακάτω υποθέτουμε ότι οι $E(B)$ και $E(X)$ είναι πεπερασμένες και μη μηδενικές.

6.6.2 Παρατήρηση

Θα δούμε ότι οι ουρές συμπεριφέρονται με διαφορετικούς ποιοτικά τρόπους, ανάλογα αν $\rho < 1$, $\rho = 1$ ή $\rho > 1$.

Στην περίπτωση που $\rho > 1$, οι χρόνοι εξυπηρέτησης υπερβαίνουν τους ενδιάμεσους αφίξεων χρόνους, κατά μέσον όρο, με συνέπεια το μήκος της ουράς να μεγαλώνει χωρίς φράγμα με πιθανότητα 1.

Χωρίς να μπαίνουμε σε λεπτομέρειες, σημειώνουμε ότι το ίδιο συμβαίνει και όταν $\rho=1$ (με εξαίρεση το D/D/1 σύστημα).

Στην περίπτωση που $\rho < 1$, η ουρά φθάνει σε ισορροπία καθώς $t \rightarrow \infty$.

Μια αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι, ότι η ισορροπία ή όχι της ουράς εξαρτάται από τις μέσες τιμές των F_X και F_B .

6.7 ΒΑΣΙΚΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΚΟΣΤΟΥΣ

Συμβολίζουμε με:

L= ο αριθμός των πελατών στο σύστημα,

L_q = ο αριθμός των πελατών στην ουρά,

S= ο χρόνος παραμονής ενός τυχαίου πελάτη στο σύστημα,

W= ο χρόνος αναμονής ενός τυχαίου πελάτη στην ουρά,

Ορισμένες χρήσιμες σχέσεις μεταξύ των παραπάνω ποσοτήτων και άλλων ποσοτήτων (σχετικών με ένα σύστημα ουράς) μπορούν να προκύψουν σκεπτόμενοι ως εξής: θεωρούμε ότι οι πελάτες οι οποίοι εισέρχονται στο σύστημα είναι υποχρεωμένοι να πληρώνουν χρήματα στο σύστημα (σύμφωνα με κάποιον ισχύοντα κάθε φορά κανόνα). Τότε προκύπτει η παρακάτω **βασική ταυτότητα κόστους**.

$$\begin{aligned} \text{Μέσος ρυθμός με τον οποίο κερδίζει το σύστημα} &= \\ &= \lambda \cdot (\text{μέσο ποσό που πληρώνει ο πελάτης}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

όπου λ είναι ο μέσος ρυθμός αφίξεων πελατών, δηλαδή:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t}.$$

Μια διαισθητική αντίληψη για την (6.1) είναι η εξής: έστω T ένα συγκεκριμένο μεγάλο χρονικό διάστημα. Θα υπολογίσουμε, με δυο τρόπους, το μέσο χρηματικό ποσό που κερδίζει το σύστημα το διάστημα T .

Αρχικά το ποσό αυτό μπορεί να υπολογιστεί πολλαπλασιάζοντας τον μέσο ρυθμό με τον οποίο το σύστημα κερδίζει, επί το μήκος του διαστήματος T .

Κατά δεύτερο τρόπο υπολογίζεται, πολλαπλασιάζοντας το μέσο ποσό που πληρώνει ο πελάτης επί τον μέσο αριθμό πελατών που εισέρχονται στο σύστημα το διάστημα T .

Αυτός ο μέσος αριθμός πελατών που εισέρχονται στο σύστημα το διάστημα T ισούται με το γινόμενο του λ επί το μήκος του T . Αφήνοντας το T να πάει στο άπειρο προκύπτει η βασική εξίσωση κόστους.

6.8 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ LITTLE

Τελειώνοντας, αναφέρουμε ένα θεώρημα το οποίο συνδέει τα μέτρα λειτουρ-

γικότητας ενός συστήματος ουράς και έτσι γίνεται εύκολος ο υπολογισμός μερικών από αυτά. Το θεώρημα αυτό, γνωστό σαν **Θεώρημα του Little**, αναφέρει διαισθητικά ότι: *αν σ' ένα σύστημα ουράς το (μέσο) μήκος της ουράς είναι μεγάλο, τότε ο (μέσος) χρόνος αναμονής σ' αυτήν αναμένεται να είναι μεγάλος.*

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι στο σύστημα της ουράς έχουμε κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας», γεγονός που σημαίνει ότι, η πιθανότητα να έχουμε (στο σύστημα) ένα συγκεκριμένο αριθμό πελατών, δεν εξαρτάται από το χρόνο, τότε το θεώρημα αναφέρει:

$$E(L) = \lambda E(S) \quad (6.2)$$

Διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε το θ. Little ως εξής: επιλέγοντας ο κανόνας που πληρώνει κάθε πελάτης το σύστημα να είναι

κάθε πελάτης πληρώνει στο σύστημα 1 ευρώ για κάθε χρονική μονάδα κατά την οποία βρίσκεται σε αυτό,

από την βασική εξίσωση κόστους προκύπτει άμεσα η (6.2).

Επίσης αν επιλέξουμε ο κανόνας πληρωμής να είναι:

κάθε πελάτης πληρώνει στο σύστημα 1 ευρώ για κάθε χρονική μονάδα κατά την οποία βρίσκεται στην ουρά,

από την βασική εξίσωση κόστους προκύπτει άμεσα:

$$E(L_q) = \lambda E(W) \quad (6.3)$$

Τέλος επιλέγοντας ο κανόνας που πληρώνει κάθε πελάτης το σύστημα να είναι:

κάθε πελάτης πληρώνει στο σύστημα 1 ευρώ για κάθε χρονική μονάδα κατά την οποία βρίσκεται στην εξυπηρέτηση,

από την βασική εξίσωση κόστους προκύπτει άμεσα:

$$E(L_s) = \lambda E(B) \quad (6.4)$$

όπου L_s είναι το πλήθος των πελατών στην εξυπηρέτηση και B ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη.

Οι εξισώσεις (6.1) – (6.4) λέγονται **εξισώσεις κόστους** και ισχύουν για σχεδόν όλα τα συστήματα ουρών ανεξάρτητα από διαδικασία αφίξεων, αριθμό εξυπηρετητών και πειθαρχία της ουράς.

6.9 ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

Σε αυτή την παράγραφο θα συγκρίνουμε την κατάσταση του συστήματος όπως αυτή φαίνεται από δυο διαφορετικές «οπτικές γωνίες». Μια, από αυτήν ενός πελάτη που φθάνει στο σύστημα και μια από αυτήν ενός εξωτερικού παρατηρητή μια τυχαία στιγμή του χρόνου. (Η διαφορά στις δυο περιπτώσεις ουσιαστικά συνίσταται στο ότι,

στην πρώτη περίπτωση οι στιγμές που βλέπουμε το σύστημα δεν είναι τυχαίες αλλά είναι στιγμές αφίξεων).

Για συστήματα ουρών με Poisson αφίξεις $M / \dots / \dots$ ισχύει η παρακάτω πολύ σημαντική ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) = οι αφικνούμενοι με Poisson πελάτες, βλέπουν (την κατάσταση του συστήματος σύμφωνα με) μέσες τιμές (χρόνων):

Οι πελάτες που φθάνουν στο σύστημα, βρίσκουν κατά μέσο όρο το ίδιο πλήθος πελατών στην ουρά, με αυτό που φαίνεται σε έναν εξωτερικό παρατηρητή, που παρατηρεί το σύστημα κάποια τυχαία στιγμή του χρόνου.

Ακριβέστερα μπορούμε να πούμε ότι: το ποσοστό των πελατών που κατά την άφιξή τους βρίσκουν το σύστημα σε κάποια κατάσταση A , είναι ακριβώς το ίδιο με το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται σε αυτή την κατάσταση A .

Δηλαδή χρησιμοποιώντας τους παρακάτω ορισμούς :

(α) Ορίζουμε:

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L(t)=n\}$$

όπου $L(t)$ είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t . Η πιθανότητα p_n μπορεί να ερμηνευθεί ως το ποσοστό (επί του συνολικού χρόνου) του χρόνου που βρίσκονται στο σύστημα n το πλήθος πελάτες.

(β) Ορίζουμε

$$\alpha_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{L_k^a = n\},$$

όπου L_k^a είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ακριβώς την στιγμή πριν την άφιξη του k -οστού πελάτη σε αυτό. Η πιθανότητα α_n μπορεί να ερμηνευθεί ως το ποσοστό (επί του συνόλου των πελατών που φθάνουν στο σύστημα) των πελατών που φθάνοντας στο σύστημα βρίσκουν σε αυτό n πελάτες,

μπορούμε να γράψουμε την ιδιότητα PASTA:

$$\alpha_n = p_n, \quad \text{για όλα τα } n.$$

6.9.1 Παρατήρηση

(α) Για να καταλάβουμε διαισθητικά την ιδιότητα PASTA, ας θεωρήσουμε μια τυχαία Poisson άφιξη. Αν ξέραμε ότι η άφιξη ενός πελάτη έγινε την στιγμή t , τότε η δεσμευμένη (από την γνώση του t) κατανομή της κατάστασης που βρίσκει ο πελάτης το σύστημα αυτή την στιγμή t , είναι ίδια με την κατανομή (χωρίς δέσμευση) της κατάστασης του συστήματος την στιγμή t . Αυτό συμβαίνει, γιατί η γνώση ότι μια άφιξη συνέβη την στιγμή t , δεν προσθέτει καμιά πληροφορία για την κατάσταση πριν την t . Το τελευταίο οφείλεται στην ανέλιξη Poisson, η οποία έχει ανεξάρτητες προσauζήσεις και επομένως η γνώση της στιγμής άφιξης t δεν προσθέτει πληροφορίες για την κατανομή της κατάστασης πριν την t .

Επομένως ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα θα το βλέπει σε κατάσταση σύμφωνα με τις οριακές πιθανότητες.

(β) Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει για αφίξεις με τυχαία κατανομή αλλά ειδικά για Poisson.

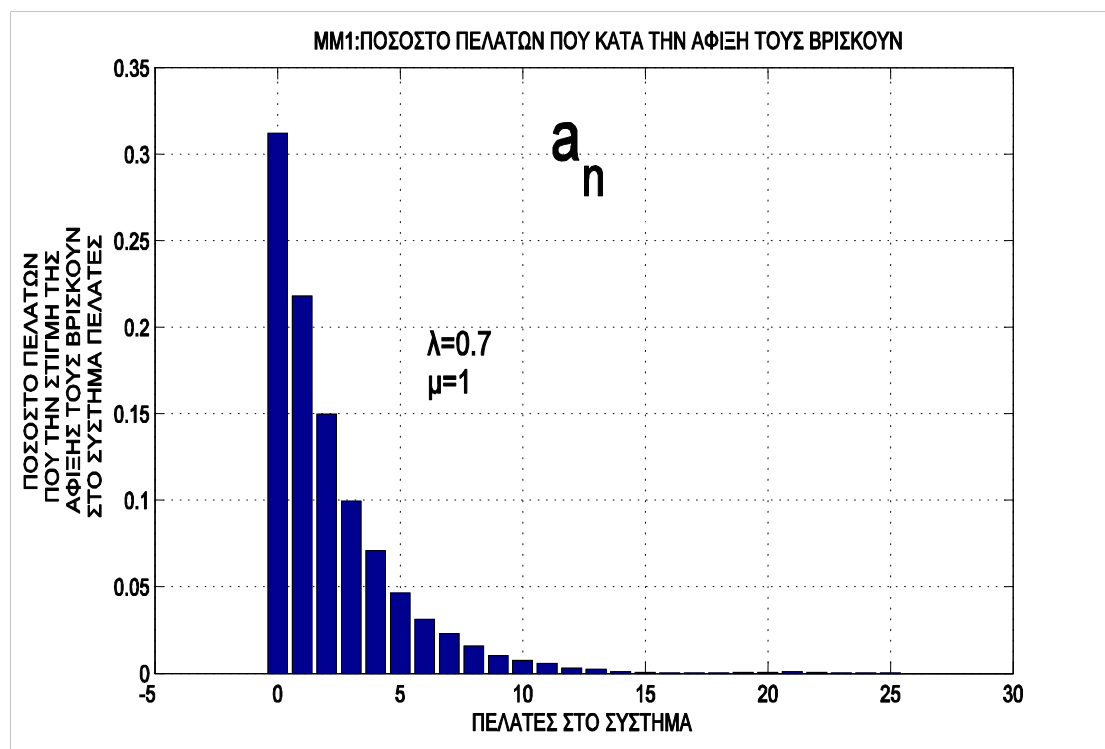
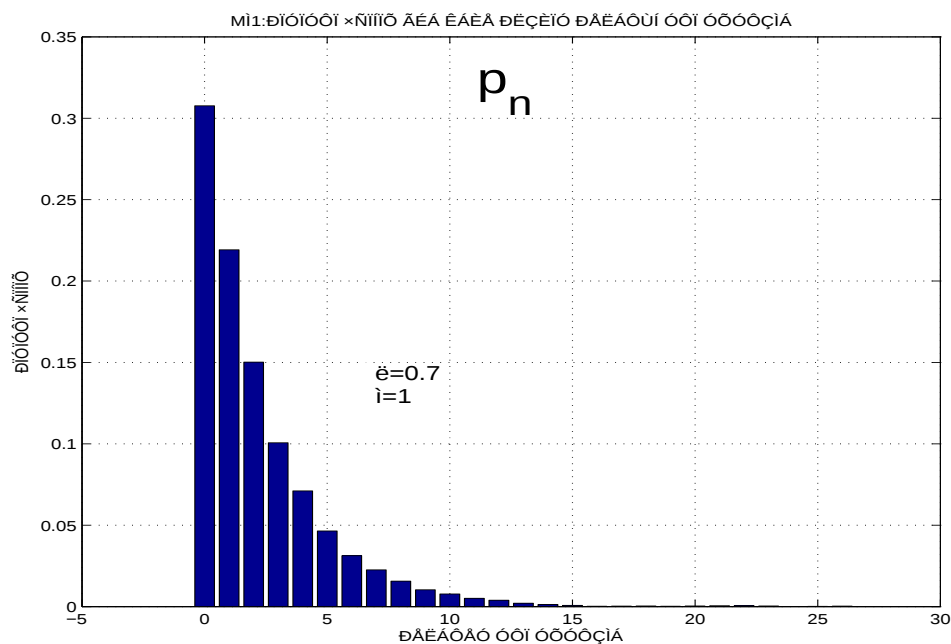
6.9.2 (Αντί)Παράδειγμα

Έστω ένα σύστημα D/D/1 που την χρονική στιγμή 0 είναι άδειο, έχει χρόνο εξυπηρέτησης 1 και οι αφίξεις γίνονται μια-μια στις χρονικές στιγμές 1, 3, 5, Κάθε πελάτης που εισέρχεται στο σύστημα βρίσκει το σύστημα άδειο με πιθανότητα 1, ενώ ένας εξωτερικός παρατηρητής παρατηρώντας κάποια τυχαία στιγμή το σύστημα έχει πιθανότητα $\frac{1}{2}$ να το δει άδειο.

Στα επόμενα κεφάλαια, θα δούμε ότι για διάφορα μοντέλα ουρών, είναι δυνατόν να υπολογιστούν μέτρα λειτουργικότητας (π.χ. $E(L)$ και $E(S)$), άμεσα με την χρήση της ιδιότητας PASTA και του θεωρήματος του Little (χωρίς την χρήση των αντιστοίχων κατανομών). Αυτός ο τρόπος υπολογισμού λέγεται **προσέγγιση μέσης τιμής** (mean value approach).

6.10 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΤΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΑΣ PASTA με simulation

Στα παρακάτω ραβδογράμματα παρατηρούμε την ισότητα μεταξύ των ποσοτήτων α_n (= πιθανότητα να βρει ένας αφικνούμενος πελάτης το σύστημα σε κατάσταση n) και p_n (= πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα σε κατάσταση n , μια τυχαία χρονική στιγμή) .



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: M/M/1 ΟΥΡΑ

Η απλούστερη, αλλά και αυτή που εμφανίζεται πιο συχνά στην πράξη, ουρά είναι η λεγόμενη M / M / 1 ουρά. Σε μια τέτοια ουρά:

- οι αφίξεις γίνονται σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson, με ρυθμό λ (άρα οι ενδιάμεσοι των αφίξεων χρόνοι X_n είναι ανεξάρτητοι και ταυτοτικά κατανομημένοι, η δε κοινή τους κατανομή X είναι εκθετική με μέσο $1/\lambda$),
- οι χρόνοι εξυπηρέτησης B_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., η δε κοινή τους κατανομή B είναι εκθετική με παράμετρο μ (και επομένως με μέσο $1/\mu$).
- υπάρχει ένα μόνο σημείο εξυπηρέτησης στο σύστημα,
- δεν υπάρχει κανένας φυσικός περιορισμός στο σχηματισμό της ουράς,
- οι δε πελάτες εξυπηρετούνται με την σειρά την οποία καταφθάνουν, δηλαδή όποιος έρχεται πρώτος εξυπηρετείται πρώτος

(στην ουσία έχουμε μια ουρά M / M / 1 / ∞ / FIFO).

Συμβολίζουμε με:

L= ο αριθμός των πελατών στο σύστημα,

L_q = ο αριθμός των πελατών στην ουρά,

S= ο χρόνος παραμονής ενός τυχαίου πελάτη στο σύστημα,

W= ο χρόνος αναμονής ενός τυχαίου πελάτη στην ουρά,

Θέλουμε να υπολογίσουμε την κατανομή και την μέση τιμή της κάθε μιας από τις παραπάνω τ.μ..

Από τον ορισμό της **τάσης συνωστισμού** $\rho = \frac{E(B)}{E(X)}$, για την M/M/1 προκύπτει ότι:

$$\rho = \lambda E(B) = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Σε ένα σύστημα με μοναδικό εξυπηρετητή, η ποσότητα της εργασίας που καταφθάνει στο σύστημα ανά μονάδα χρόνου είναι προφανώς $\lambda E(B)$. Η μέγιστη ποσότητα εργασίας που μπορεί να πάρει και να εκτελέσει ο εξυπηρετητής, είναι 1 μονάδα εργασίας ανά μονάδα χρόνου.

Για να αποφύγουμε την χωρίς όριο αύξηση του μήκους της ουράς, θα υποθέσουμε ότι $\lambda E(B) < 1$ και σε αυτή την περίπτωση το ρ θα το ονομάζουμε **ρυθμό** ή **ποσοστό απασχόλησης** του εξυπηρετητή επειδή είναι το μέρος του χρόνου που ο εξυπηρετητής είναι απασχολημένος (και ισοδυναμεί με την πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι απασχολημένος κάποια τυχαία στιγμή) .

7.1 ΕΥΡΕΣΗ ΤΩΝ $E(L)$, $E(S)$ ΚΑΙ $E(L_q), E(W)$ ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Θα προσπαθήσουμε πρώτα να υπολογίσουμε τις (μέσες τιμές) $E(L)$ και $E(S)$, χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε τις κατανομές των τ.μ. L και S . Ο υπολογισμός αυτός θα γίνει συνδυάζοντας το Θεώρημα του Little και την ιδιότητα PASTA. Η προσέγγιση αυτή καλείται **προσέγγιση μέσης τιμής** (mean value approach).

Από την ιδιότητα PASTA ξέρουμε ότι: ένας πελάτης την στιγμή που καταφθάνει στο σύστημα, βρίσκει σε αυτό, ένα μέσο αριθμό πελατών $E(L)$, από τους οποίους ο καθένας, χρειάζεται μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $1/\mu$, δηλαδή όλοι μαζί χρειάζονται χρόνο $(1/\mu)E(L)$. Άρα ο χρόνος που θα παραμείνει ο πελάτης στο σύστημα, είναι το άθροισμα του χρόνου $(1/\mu)E(L)$, που θα περιμένει στην ουρά για να εξυπηρετηθούν οι $E(L)$ πελάτες που προηγούνται, συν το χρόνο $1/\mu$ για την δική του εξυπηρέτηση, δηλαδή:

$$E(S) = \frac{1}{\mu} E(L) + \frac{1}{\mu},$$

Από το θεώρημα του Little όμως: $E(L) = \lambda E(S)$, οπότε προκύπτει:

$$EL = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \quad (7.1)$$

και

$$ES = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad (7.2)$$

Ακόμα :

(αριθμός πελατών στο σύστημα) = (αριθμός πελατών στην ουρά) + (αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση)

από την οποία παίρνοντας μέσες τιμές έχουμε:

$$E(L) = E(L_q) + \rho \Rightarrow \quad (\rho = \text{μέσος αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση})$$

$$E(L_q) = E(L) - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (7.3)$$

Τέλος από το Θεώρημα του Little προκύπτει:

$$EL_q = \lambda EW \Rightarrow$$

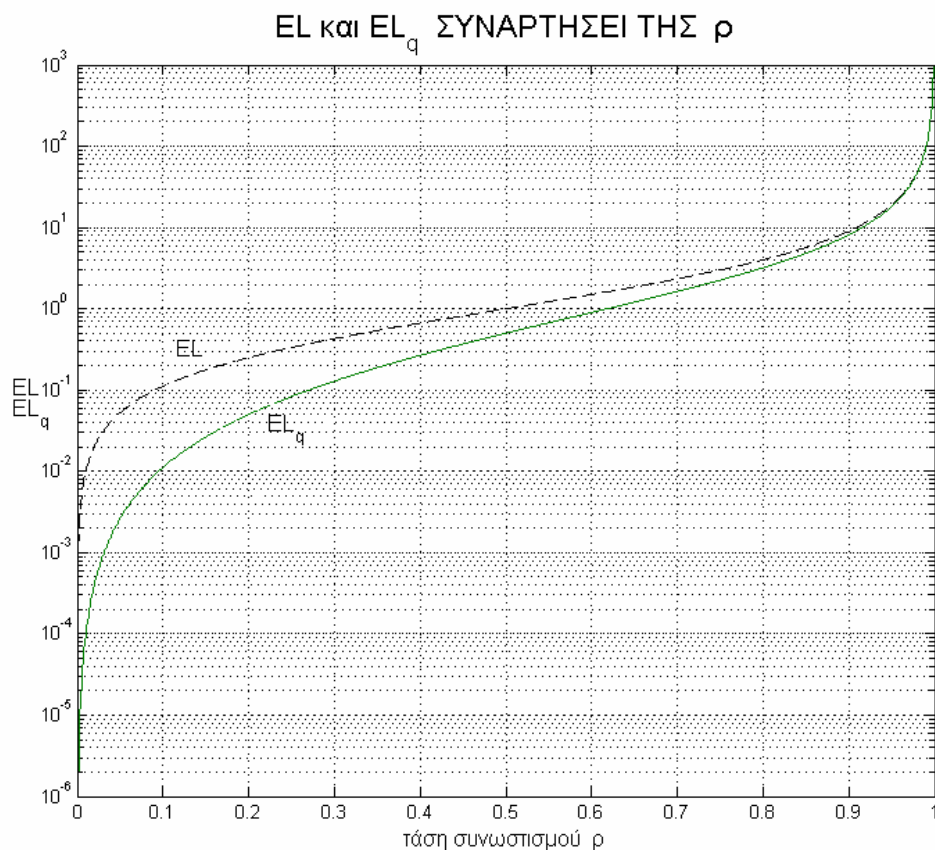
$$EW = \frac{1}{\lambda} EL_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (7.4)$$

7.1.1 Παρατήρηση

Στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 7.1) φαίνονται οι σχέσεις των EL και ρ (δηλαδή η (7.1)) καθώς και των EL_q και ρ (δηλαδή η σχέση (7.3)) .

Παρατηρούμε ότι καθώς το ρ τείνει στο 0, τα EL και EL_q τείνουν και αυτά στο 0 (μάλιστα το EL_q ταχύτερα λόγω του ρ^2 στον 7.3) γεγονός που αναμένεται αφού το ρ να τείνει στο μηδέν σημαίνει ότι το λ τείνει στο μηδέν δηλαδή έχουμε όλο και λιγότερες αφήξεις, άρα όλο και λιγότεροι πελάτες υπάρχουν στην ουρά και το σύστημα.

Επίσης ότι καθώς το ρ τείνει στο 1 τα EL και EL_q τείνουν στο άπειρο (λόγω του παρονομαστή στις (7.1) και (7.3) ο οποίος τείνει στο 0), γεγονός που και πάλι αναμενόταν αφού το ρ να τείνει στο ένα σημαίνει ότι το λ και μ είναι περίπου ίσα, δηλαδή ο αριθμός αυτών που φτάνουν στο σύστημα είναι ίσος με τον αριθμό αυτών που εξυπηρετούνται. Μετά όμως από ένα «εύλογο» χρονικό διάστημα επέρχεται κούραση στους εξυπηρετητές, με αποτέλεσμα η ουρά να μεγαλώνει απεριόριστα.



Σχήμα 7.1

7.2 ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΗΣ Μ/Μ/1

7.2.1 Κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε και πάλι την ποσότητα EL , υπολογίζοντας αυτή την φορά την κατανομή της τ.μ. L (ο υπολογισμός των υπόλοιπων τριών μέσω των τιμών γίνεται κατά τρόπο ανάλογο με αυτό της παραγράφου 7.1.).

Έστω λοιπόν $\{N_i\}_{i \geq 0}$ είναι η σ.α. του αριθμού των αφίξεων (ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ), δηλαδή η τ.μ. N_i παριστάνει τον **αριθμό των αφίξεων στο διάστημα $(0, t]$** , και έστω $L(t) =$ **ο αριθμός των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t** .

Θέλουμε να υπολογίσουμε την κατανομή της $\{L(t)\}_{t \geq 0}$, δηλαδή τις πιθανότητες :

$$p_n(t) = P\{L(t)=n\}, \quad n \in S$$

Έστω ακόμα $\{p_i(0)\}_{i \in S}$ η αρχική κατανομή της $L(0)$, η οποία θα θεωρείται δεδομένη. Αν ορίσουμε τις πιθανότητες μετάβασης:

$$p_{in}(t) = P\{L(t)=n / L(0)=i\}, \quad i, n \in S$$

(οι πιθανότητες $p_n(t) = \sum_i p_i(0) p_{in}(t)$). Αποδεικνύεται ότι, (δείτε π.χ. Τ. Δάρας- Π.

Σύψας, «Στοχαστικές Ανελίξεις», σελ. 187), οι πιθανότητες αυτές ικανοποιούν τις σχέσεις (διαφορικές εξισώσεις ως προς t και εξισώσεις διαφορών ως προς n):

$$\frac{dp_{in}(t)}{dt} = p'_{in}(t) = -(\lambda + \mu) p_{in}(t) + \mu p_{i,n+1}(t) + \lambda p_{i,n-1}(t), \quad n \geq 1$$

$$\frac{dp_{i0}(t)}{dt} = p'_{i0}(t) = -\lambda p_{i0}(t) + \mu p_{i1}(t)$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων αυτό είναι δύσκολο να λυθεί, εν γένει. Στην περίπτωση όμως που το σύστημα ουράς βρίσκεται σε κατάσταση «**στατιστικής ισορροπίας**» δηλαδή όταν το:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n, \quad \forall n \in S$$

ή με άλλα λόγια, όταν η πιθανότητα να έχουμε n πελάτες στο σύστημα δεν εξαρτάται από τον χρόνο που λειτουργεί το σύστημα (υποθέτοντας ότι ο χρόνος είναι αρκετά μεγάλος), προκύπτει το σύστημα

$$p_{n+1} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_n - \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (7.5)$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \quad (7.6)$$

που είναι ένα σύστημα εξισώσεων διαφορών ως προς n . Οι πιθανότητες όμως αυτές

πρέπει να ικανοποιούν και την εξίσωση κανονικοποίησης :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \quad (7.7)$$

Δίνουμε τώρα διάφορες προσεγγίσεις για την λύση αυτού του συστήματος .

(α) Αναδρομική προσέγγιση

Από την πρώτη των εξισώσεων, για $n=1$ παίρνουμε:

$$p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

και συνεχίζοντας να χρησιμοποιούμε την σχέση, έχουμε:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad n \in S \quad (7.8)$$

Η (7.7) με την βοήθεια της (7.8) γίνεται: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 1$ και επειδή $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ έχουμε::

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} \quad (7.9)$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ συγκλίνει αν και μόνον αν $\rho < 1$ (ή ισοδύναμα αν και μόνον αν $\lambda < \mu$ που διαισθητικά φανερό, αφού όταν το $\lambda > \mu$, ο ρυθμός των αφίξεων είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό των αναχωρήσεων με αποτέλεσμα η ουρά να μεγαλώνει χωρίς κάποιο όριο). Έτσι όταν $\rho < 1$, η πιθανότητα να έχουμε 0 πελάτες στο σύστημα είναι ίση με:

$$p_0 = 1 - \rho \quad (7.10)$$

Άρα, η πιθανότητα, να έχουμε n πελάτες στο σύστημα, σε κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$p_n = \rho^n (1 - \rho), \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad (7.11)$$

Δηλαδή ο αριθμός L των πελατών στο σύστημα, όταν το αυτό βρίσκεται σε κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας», έχει την γεωμετρική (2) κατανομή με παράμετρο $1 - \rho$, οπότε η μέση τιμή της:

$$EL = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (7.12)$$

Η διασπορά του αριθμού των πελατών στο σύστημα από αυτό τον αριθμό, είναι ίση με:

$$\text{var}(L) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2} \quad (7.13)$$

(β) Απευθείας προσέγγιση

Οι εξισώσεις (7.5) είναι εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η γενική λύση τους έχει την μορφή:

$$p_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n, \quad n=0,1,2,\dots \quad (7.14)$$

όπου x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της $\lambda - (\lambda + \mu)x + \mu x^2 = 0$, οπότε $x_1 = 1$ και $x_2 = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$.

Επομένως όλες οι λύσεις των (7.5) έχουν την μορφή:

$$p_n = c_1 + c_2 \rho^n, \quad n=0,1,2,\dots$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση $n=0$, $n=1$ και αντικαθιστώντας τις σχέσεις που προκύπτουν στην (7.6) παίρνουμε $c_1 = 0$.

Τέλος από την (7.7) προκύπτει το $c_2 = 1 - \rho$. Άρα:

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad n=0,1,2,\dots$$

(γ) Προσέγγιση με γεννήτρια συνάρτηση

Η πιθανογεννήτρια της τ.μ. L είναι:

$$P_L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad (7.15)$$

η οποία ορίζεται για $|z| \leq 1$.

Πολλαπλασιάζοντας την (7.5) επί z^n και προσθέτοντας ως προς n , έχουμε:

$$p_{n+1} z^n = \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_n z^n - \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1} z^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} z^n = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n - \frac{\lambda}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^n \Rightarrow \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} z^n = (\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^n \Rightarrow$$

$$(\lambda + \mu) p_0 z^0 + \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} z^n = (\lambda + \mu) p_0 z^0 + (\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^n \Rightarrow$$

$$\lambda p_0 + \mu p_0 + \mu(p_2 z^1 + p_3 z^2 + \dots) = (\lambda + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - \lambda(p_0 z^1 + p_1 z^2 + \dots) \Rightarrow$$

$$\lambda p_0 + \mu p_0 + \mu z^{-1}(p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots) = (\lambda + \mu) P_L(z) - \lambda z(p_0 z^0 + p_1 z^1 + \dots) \Rightarrow$$

$$\lambda p_0 + \mu p_0 + \mu z^{-1}(P_L(z) - p_0 z^0 - p_1 z^1) = (\lambda + \mu) P_L(z) - \lambda z P_L(z) \Rightarrow$$

$$\lambda p_0 + \mu p_0 + \mu z^{-1} P_L(z) - \mu p_0 z^{-1} - \mu p_1 = (\lambda + \mu - \lambda z) P_L(z) \Rightarrow$$

$$\lambda p_0 + \mu p_0 - \mu p_0 z^{-1} - \mu \frac{\lambda}{\mu} p_0 = (\lambda + \mu - \lambda z - \mu z^{-1}) P_L(z) \Rightarrow P_L(z) = \frac{\mu p_0 - \mu p_0 z^{-1}}{\lambda + \mu - \lambda z - \mu z^{-1}} \Rightarrow$$

$$P_L(z) = \frac{p_0}{1 - \rho z}$$

και επειδή $P_L(1) = 1$ αντικαθιστώντας όπου $z=1$ βρίσκουμε:

$$p_0 = 1 - \rho.$$

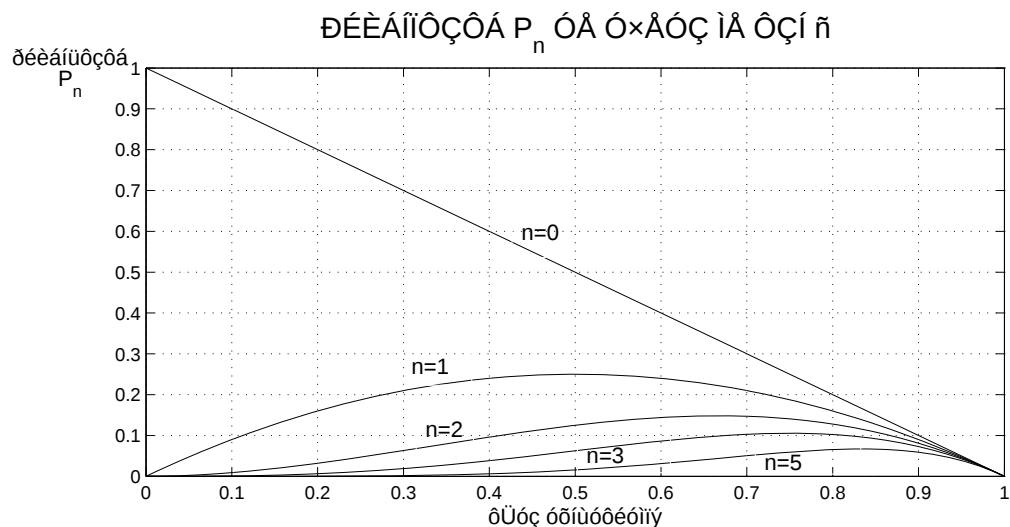
Επομένως:

$$P_L(z) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho z} = (1 - \rho) \frac{1}{1 - \rho z} = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} (\rho z)^n = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n z^n \quad (7.16)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του z^n στην (7.15) και στην (7.16) προκύπτει και πάλι η (7.11).

7.3.1 Παρατήρηση

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η σχέση ανάμεσα στην πιθανότητα p_n και την τάση συνωστισμού ρ (δηλαδή η (7.11)) για $n=0,1,2,3,5$. Για κάθε τιμή του ρ είναι: $p_0 > p_1 > p_2 > p_3 > p_5 \dots$ (δηλαδή για οποιαδήποτε τιμή του ρ , η πιθανότητα p_n να υπάρχουν στο σύστημα n άτομα μικραίνει, καθώς το n μεγαλώνει.



Πριν προχωρήσουμε, αναφέρουμε και πάλι, τις στοχαστικές ανελίξεις του κεφαλαίου.

Πίνακας Στοχαστικών ανελίξεων (του κεφαλαίου) και κατανομών τους

Ανέλιξη	Ονομασία	Ερμηνεία
$\{N_t\}_{t \geq 0}$	ανανεωτική αφίξεων	N_t , αριθμός των πελατών που φτάνουν στο σύστημα μέχρι τον χρόνο t
$\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ X	ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων (κοινή) κατανομή των X_n	X_i ο χρόνος μεταξύ της άφιξης του $(i-1)$ -οστού και του i -οστού πελάτη Εκθετική με παράμετρο λ
$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ B	χρόνοι εξυπηρέτησης (κοινή) κατανομή των B_n	B_n ο χρόνος εξυπηρέτησης του n -οστού πελάτη Εκθετική με παράμετρο μ
$\{L(t)\}_{t \geq 0}$ $p_n(t) = P\{L(t)=n\}$, $n \in S$ $p_n(t) = p_n$		$L(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t Κατανομή της $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ Κατανομή της $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, δηλαδή ανεξαρτησία από το t

7.2.2 Κατανομή του αριθμού των πελατών στην ουρά

(α) Είναι φανερό ότι: $L=1+L_q$, από όπου προκύπτει άμεσα (με την βοήθεια της κατανομής της L που βρήκαμε παραπάνω) ότι η κατανομή της L_q :

$$P\{L_q=0\}=1-\rho^2 \quad \text{και} \quad P\{L_q=n\}=(1-\rho)\rho^{n+1}$$

Για την μέση τιμή της ισχύει:

$$E(L_q)=0p_0+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n=\sum_{n=1}^{\infty}np_n-\sum_{n=1}^{\infty}p_n=L-(1-p_0)=\frac{\rho}{1-\rho}-\rho=\frac{\rho^2}{1-\rho}$$

δηλαδή:

$$E(L_q) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (7.17)$$

(β) Για τις δεσμευμένες κατανομές του αριθμού των πελατών στην ουρά, έχουμε:

- (i) Η κατανομή του αριθμού των πελατών στην ουρά, όταν **το σύστημα δεν είναι κενό** είναι ίση με:

$$P\{L_q = n | L > 0\} = \frac{P\{L = n+1\}}{P\{L \geq 1\}} = \frac{(1-\rho)\rho^{n+1}}{\rho} = (1-\rho)\rho^n, \quad n=0,1,\dots$$

ενώ

- (ii) η κατανομή του αριθμού των πελατών στην ουρά, όταν **η ουρά δεν είναι κενή** (δηλαδή όταν υπάρχουν τουλάχιστον δύο πελάτες στο σύστημα), ισούται με:

$$P\{L_q = n | L \geq 2\} = \frac{P\{L = n+1\}}{P\{L \geq 2\}} = \frac{(1-\rho)\rho^{n+1}}{\rho^2} = (1-\rho)\rho^{n-1}, \quad n=1,2,\dots$$

7.2.3. Μέσες τιμές των μέτρων λειτουργικότητας

Από την (7.11) και το θεώρημα του Little υπολογίζεται άμεσα η μέση τιμή της τ.μ. S (που εκφράζει τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα):

$$ES = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (7.18)$$

Ανάλογα παίρνουμε:

$$EW = \frac{1}{\lambda} EL_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

όπου W ο χρόνος αναμονής στην ουρά

7.4 ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΩΝ ΧΡΟΝΩΝ

Μπορούμε ακόμη να υπολογίσουμε την κατανομή των τ.μ. S και W, αλλά θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η ουρά μας είναι FIFO (δηλαδή τ' αποτελέσματα αυτής της παραγράφου εξαρτώνται από την πειθαρχία της ουράς και ισχύουν μόνο για την ουρά M / M / 1 / ∞ / FIFO).

7.4.1 Κατανομή του χρόνου παραμονής S

Έστω L^a είναι ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα ακριβώς την στιγμή πριν να φτάσει ένας πελάτης και B_k ο χρόνος εξυπηρέτησης του k-οστού πελάτη. Ο πελάτης που βρίσκεται εκείνη την στιγμή στην εξυπηρέτηση έχει έναν υπόλοιπο χρόνο για εξυπηρέτηση και όχι έναν κανονικό χρόνο εξυπηρέτησης. Όμως

αυτοί οι χρόνοι είναι ίδιοι λόγω της «αμνησίας» που έχει η εκθετική κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης, οπότε έχουμε:

$$S = \sum_{k=1}^{L^a+1} B_k \quad (7.19)$$

Έτσι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της τ.μ. S είναι:

$$\tilde{S}(s) = E(e^{-sS}) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{L^a=n\} E(e^{-s(B_1+\dots+B_{n+1})}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n E(e^{-sB_1}) \dots E(e^{-sB_{n+1}})$$

(οι τ.μ. B_k είναι ανεξάρτητες)

Επειδή οι B_k είναι εκθετικά κατανεμημένες με παράμετρο μ , έπεται $E(e^{-sB_k}) = \frac{\mu}{\mu+s}$ επομένως:

$$\tilde{S}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1} = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s} \quad (7.20)$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η S είναι εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\mu(1-\rho)$.

7.4.2 Κατανομή του χρόνου αναμονής W

Είναι γνωστό ότι: $S=W+B$ και οι W και B είναι ανεξάρτητες, επομένως:

$$\tilde{S}(s) = \tilde{W}(s)\tilde{B}(s) = \tilde{W}(s) \frac{\mu}{\mu+s}$$

και χρησιμοποιώντας την (7.20), λύνουμε ως προς $\tilde{W}(s)$ και έχουμε:

$$\tilde{W}(s) = \frac{(1-\rho)(\mu+s)}{\mu(1-\rho)+s} = (1-\rho) \cdot 1 + \rho \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η W ισούται με 1 με πιθανότητα $(1-\rho)$, ενώ η W είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $\mu(1-\rho)$ με πιθανότητα ρ . Έτσι

$$P(W>t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0 \quad (7.21)$$

7.5 ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗΣ

7.5.1 Ορισμός

Ονομάζουμε **περίοδο απασχόλησης** (busy period BP) του συστήματος, το χρονικό διάστημα που ξεκινά την στιγμή που ένας πελάτης φτάνοντας στο σύστημα το βρίσκει άδειο (χωρίς πελάτες) και τελειώνει την πρώτη στιγμή που το σύστημα μένει ξανά άδειο.

Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη στιγμή που το σύστημα μένει άδαιο, μέχρι την έναρξη της επόμενης περιόδου απασχόλησης, ονομάζεται **περίοδος αδράνειας** του συστήματος (idle period IP) .

7.5.2 Ορισμός

Την «ζωή» ενός εξυπηρετητή μπορούμε να την διακρίνουμε σε **κύκλους**.

Ένας **κύκλος**, είναι ο χρόνος που περνάει ανάμεσα σε δυο διαδοχικές αφίξεις, οι οποίες βρίσκουν το σύστημα άδαιο (χωρίς πελάτες). Μ' άλλα λόγια ένας κύκλος ξεκινά ταυτόχρονα με μια περίοδο απασχόλησης BP (κατά την διάρκεια της οποίας ο εξυπηρετητής εξυπηρετεί αδιάκοπα πελάτες) και συνεχίζεται με μια περίοδο αδράνειας IP (κατά την διάρκεια της οποίας το σύστημα είναι άδαιο), τελειώνει δε ταυτόχρονα με το τέλος της περιόδου αδράνειας IP.

Λόγω της αμνησίας που έχει η εκθετική κατανομή, η περίοδος αδράνειας IP είναι εκθετικά κατανομημένη, με μέσο $1/\lambda$. Παρακάτω θα υπολογίσουμε την μέση τιμή και την κατανομή της περιόδου απασχόλησης BP.

7.5.3 Μέση τιμή της περιόδου απασχόλησης

Προφανώς το κλάσμα του χρόνου που ο εξυπηρετητής εργάζεται, ισούται με το πηλίκο της μέσης τιμής της περιόδου απασχόλησης, προς την μέση τιμή του κύκλου, δηλαδή:

$$\rho = \frac{E(BP)}{E(BP)+E(IP)} = \frac{E(BP)}{E(BP)+\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow$$

$$E(BP) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{EB}{1-\rho} = \frac{EB}{1-\lambda EB} \quad (7.22)$$

7.6 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ M/M/1 ΟΥΡΑΣ ΜΕ MATLAB

(Οι κώδικες παρατίθενται στο παράρτημα)

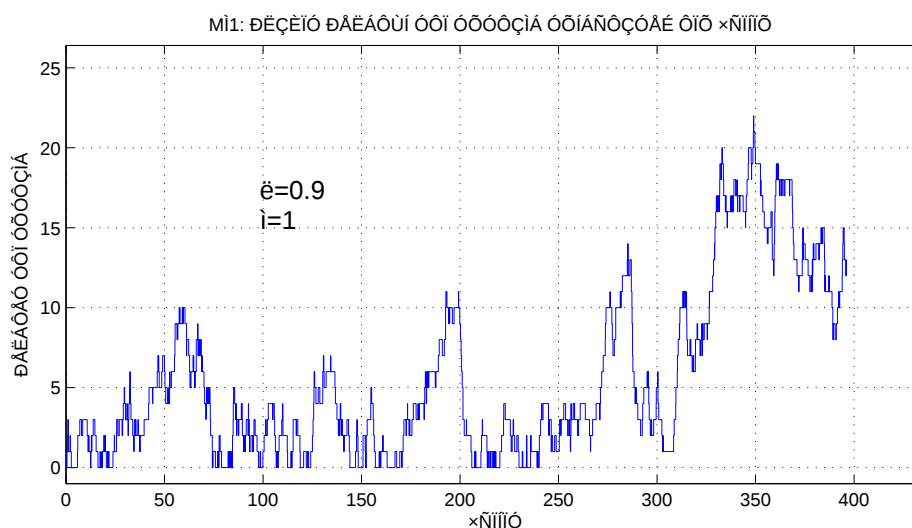
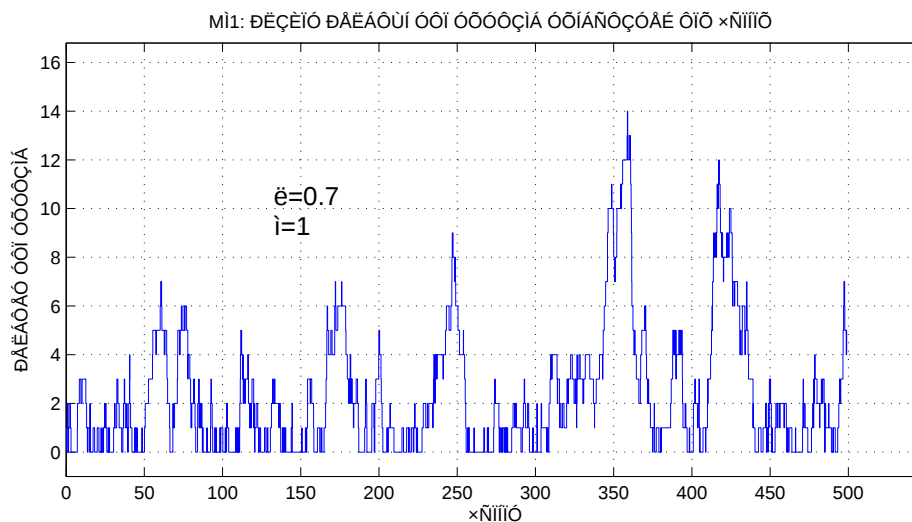
(Α) Σχέση αριθμού πελατών (στο σύστημα) και χρόνου

Στα δυο παρακάτω διαγράμματα (τα οποία είναι δύο δυνατές πραγματοποιήσεις ενός συστήματος ουράς M/M/1, αναφορικά με τον αριθμό των πελατών στο σύστημα), παρατηρούμε ότι:

- (i) όταν η τάση συνωστισμού ρ είναι 0,7 το πλήθος των πελατών τείνει να κινείται σε χαμηλά επίπεδα με μέγιστη τιμή το 14, ενώ
- (ii) όταν το ρ αυξηθεί σε 0,9 η αναμενόμενη αντίδραση του συστήματος, είναι το πλήθος να τείνει να κινείται σε αυξημένα επίπεδα με μέγιστη τιμή το 22. Π.χ. λόγω των (7.12) και (7.13) για $\rho=0,7$ το $EL=2,3$ με διασπορά $var(L)=7,7$ ενώ για $\rho=0,9$ το $EL=9$ με $var(L)=90$

Μ' άλλα λόγια, όσο η τάση συνωστισμού αυξάνει (που κατά κύριο λόγο σημαίνει

ότι όλο και περισσότεροι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα), αυξάνει, με την πάροδο του χρόνου, και ο αριθμός των πελατών στο σύστημα.



(B) Σχέση μεταξύ p_n και ρ

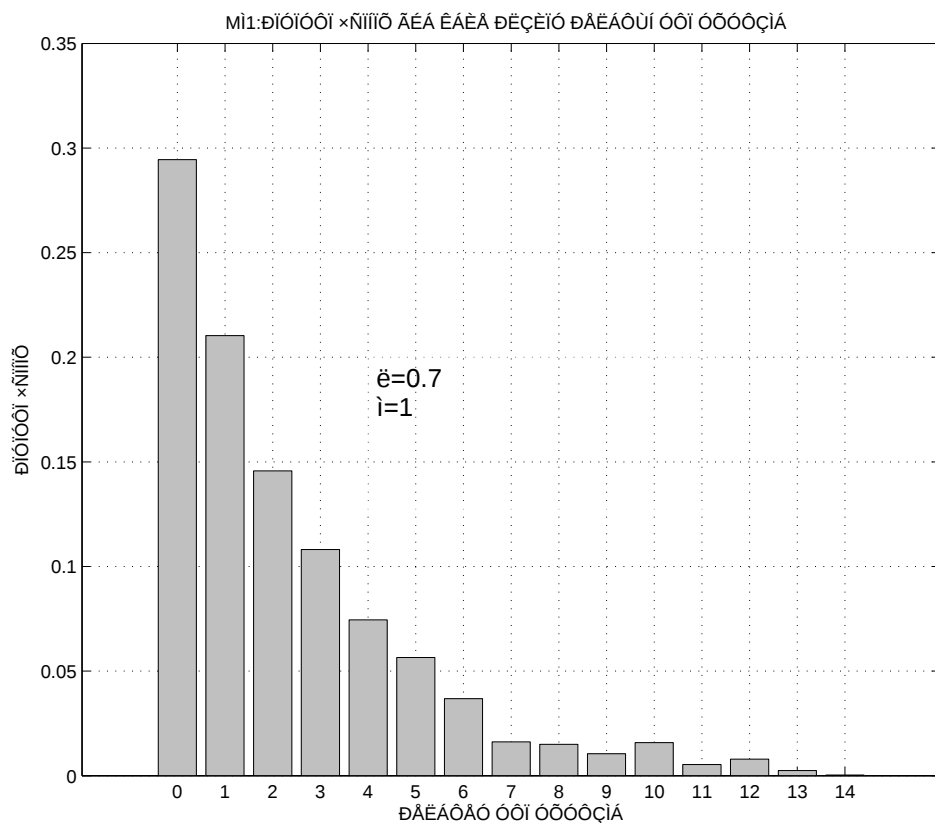
(για διάφορες τιμές του n)

Στα δυο παρακάτω ραβδογράμματα παρατηρούμε ότι , όταν:

- (i) η τάση συνωστισμού ρ είναι 0,7 η πιθανότητα το πλήθος των πελατών να είναι 0 είναι περίπου 0,3 , για πλήθος 1 γίνεται 0,21, για πλήθος 2 γίνεται 0,15 κ.λ.π. ενώ
- (ii) όταν το ρ αυξηθεί σε 0,9 οι πιθανότητες είναι για πλήθος 0 περίπου 0,13 , για πλήθος 1 γίνεται 0,129 , για πλήθος 2 γίνεται 0,122 κ.λ.π. δηλαδή σε αυτή την περίπτωση οι πιθανότητες μειώνονται (ή και δεν μειώνονται καν) με μικρότερο ρυθμό απ' ότι προηγουμένως , πράγμα αναμενόμενο αν δούμε και τον αντίστοιχο παρακάτω πίνακα ο οποίος στηρίζεται στην (7.11)

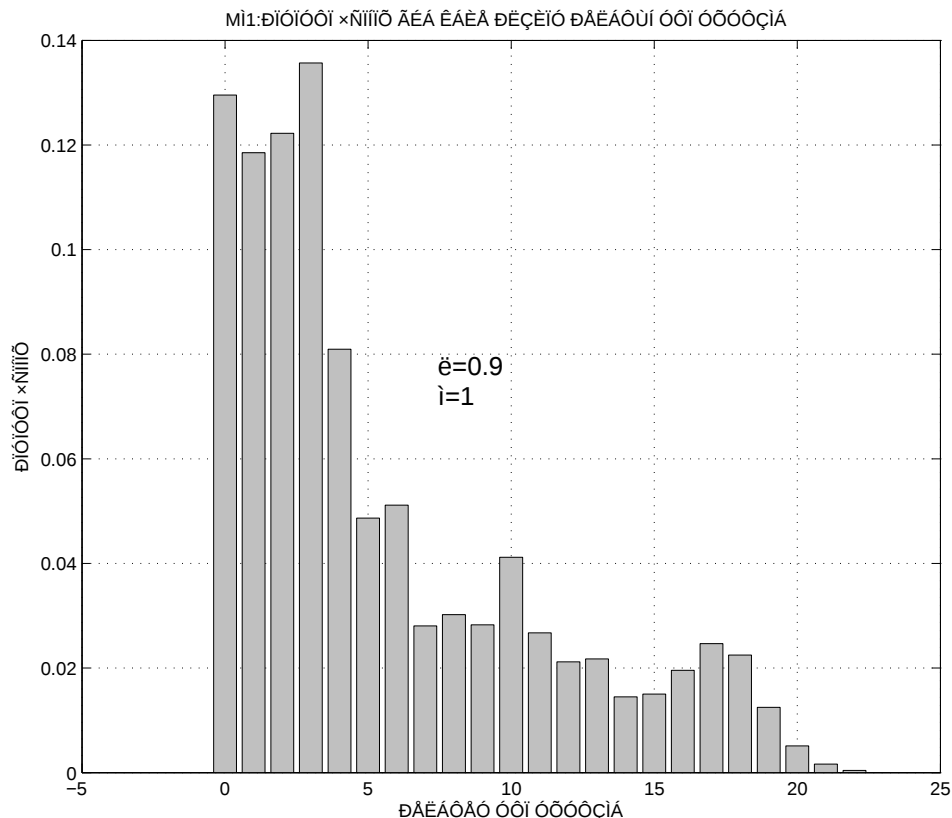
Πιθανότητα ύπαρξης πελατών στο σύστημα (p_n)

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0,7	0,30	0,21	0,15	0,10	0,07	0,05	0,04	0,02
0,9	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,059	0,053	0,047



Μ' άλλα λόγια, είναι φανερό ότι:

- (1) όταν το p είναι μικρό (πιο κοντά στο μηδέν), τότε είναι μεγάλες οι πιθανότητες να βρούμε μικρό αριθμό πελατών στο σύστημα (γεγονός που αναμένεται, αφού ο μέσος αριθμός αφίξεων είναι, κατά πολύ, μικρότερος από τον μέσο αριθμό αναχωρήσεων).
- (2) όταν το p είναι μεγάλο (πιο κοντά στο 1), τότε μεγαλώνουν οι πιθανότητες να βρούμε μεγάλο αριθμό πελατών στο σύστημα (γεγονός που αναμένεται, αφού ο μέσος αριθμός αφίξεων είναι, κατά πολύ, μικρότερος από τον μέσο αριθμό αναχωρήσεων).

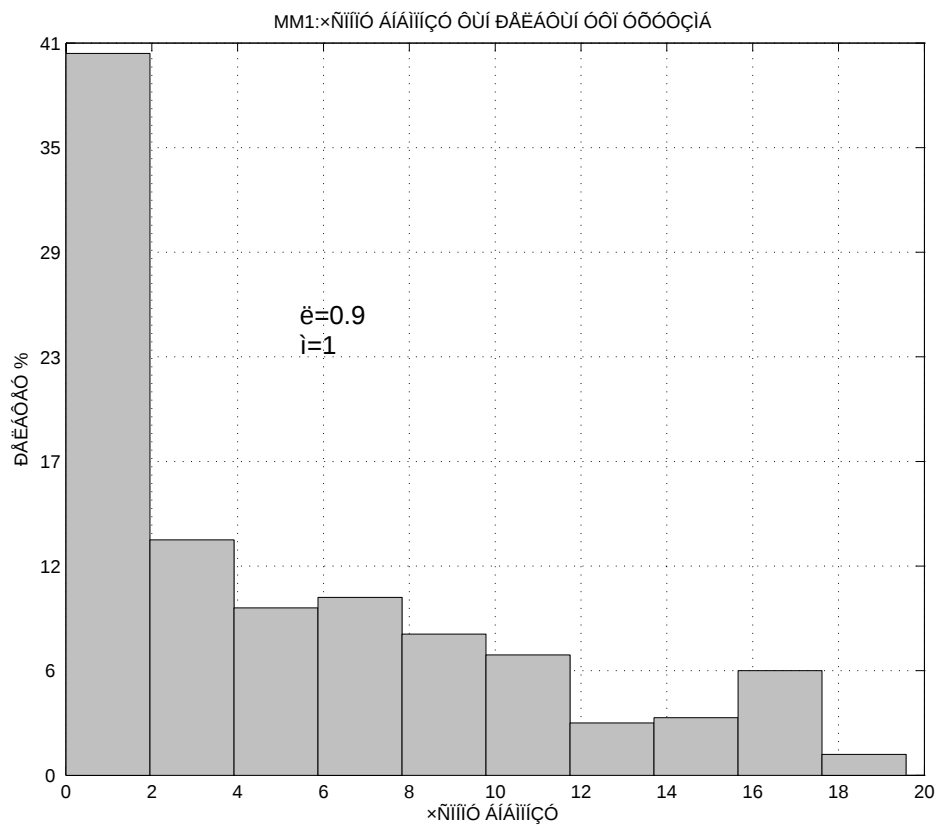
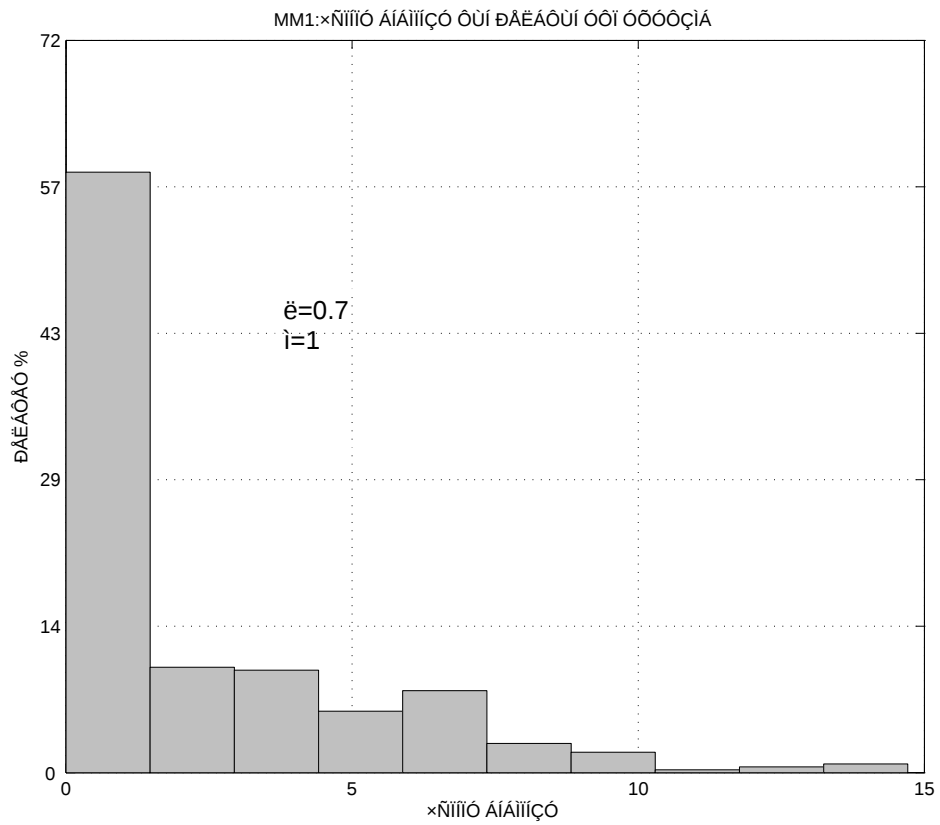


(Γ) Σχέση χρόνου παραμονής πελατών στο σύστημα και τάσης συνωστισμού.

Στα δυο παρακάτω ιστογράμματα (τα οποία είναι και πάλι δύο δυνατές πραγματοποιήσεις ενός συστήματος ουράς M/M/1, αναφορικά με τον χρόνο παραμονής πελατών στο σύστημα αυτό) παρατηρούμε ότι , όταν:

- (i) η τάση συνωστισμού ρ είναι 0,7 η πιθανότητα να έχει ένας πελάτης μικρό χρόνο παραμονής (στο σύστημα) είναι αρκετά μεγάλη
- (ii) όταν το ρ αυξηθεί σε 0,9 οι πιθανότητες να έχουν οι πελάτες και μεγαλύτερους σχετικά χρόνους παραμονής αυξάνονται πράγμα αναμενόμενο λόγω του μεγαλύτερου μέσου μήκους της ουράς .

δηλαδή, μ' άλλα λόγια, όσο αυξάνει η τάση συνωστισμού ρ και τείνει προς το 1 (που κατά κύριο λόγο σημαίνει και ότι όλο και περισσότεροι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα, σε σχέση με αυτούς που αφού εξυπηρετηθούν εξέρχονται), τόσο είναι πιο πιθανό να παραμείνει κανείς στο σύστημα για περισσότερο χρόνο (γεγονός που διαισθητικά είναι φανερό).



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: M/G/1 ΟΥΡΑ

8.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα μοντέλο ουράς γενικότερο της M/M/1 ουράς, είναι η λεγόμενη M/G/1 ουρά. Στην M/G/1 ουρά:

- οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ (επομένως οι ενδιάμεσοι, των αφίξεων, χρόνοι X_n είναι ανεξάρτητοι και ταυτοτικά κατανομημένοι, η δε κοινή τους κατανομή X είναι εκθετική με μέσο $1/\lambda$)
- εξυπηρετούνται με πειθαρχία FIFO από
- έναν μοναδικό εξυπηρετητή.

Ακόμα, οι χρόνοι εξυπηρέτησης B_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., η δε κοινή τους κατανομή B είναι μια γενική κατανομή με σ.κ. $F_B(\cdot)$, π.π. $f_B(\cdot)$, πεπερασμένη και μη μηδενική μέση τιμή EB και διασπορά σ_B^2 και είναι ανεξάρτητοι από την διαδικασία αφίξεων.

Από τον ορισμό της *τάσης συνωστισμού* $\rho = \frac{E(B)}{E(X)}$, για την M/G/1 προκύπτει:

$$\rho = \frac{E(B)}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda E(B)$$

Για τους ίδιους λόγους που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 7, και θα εξηγήσουμε και παρακάτω, θεωρούμε ότι:

$$\lambda E(B) < 1 \quad (8.1)$$

(ρ το ποσοστό του χρόνου που ο εξυπηρετητής είναι απασχολημένος μακροπρόθεσμα μετρημένο, το οποίο ισοδυναμεί με την πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι απασχολημένος κάποια τυχαία στιγμή).

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογίσουμε την οριακή κατανομή (ή κατανομή ισορροπίας) του αριθμού των πελατών στο σύστημα και τις κατανομές του χρόνου παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, του χρόνου αναμονής ενός πελάτη στην ουρά και της χρονικής διάρκειας της περιόδου απασχόλησης. Επιπλέον θα υπολογίσουμε τους μέσους των παραπάνω κατανομών με την προσέγγιση μέσης τιμής.

Υπενθυμίζουμε τους συμβολισμούς: S και W είναι οι χρόνοι παραμονής ενός τυχαίου πελάτη στο σύστημα και στην ουρά αντίστοιχα, οπότε οι μέσες τιμές τους ικανοποιούν την σχέση:

$$ES = EW + EB.$$

Ακόμα, L, L_q, L_s οι αριθμοί των πελατών στο σύστημα, στην ουρά και στην εξυπηρέτηση αντίστοιχα, και οι μέσες τιμές τους ικανοποιούν την σχέση:

$$EL = EL_q + EL_s$$

8.2 ΟΡΙΑΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Η κατάσταση της M/G/1 ουράς μπορεί να περιγραφεί από ένα ζεύγος (n, x) όπου: n είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα και x ο χρόνος που έχει ήδη καταναλωθεί για την εξυπηρέτηση του πελάτη που βρίσκεται στον εξυπηρετητή. Επομένως χρειαζόμαστε μια διδιάστατη περιγραφή της κατάστασης. Η πρώτη διάσταση είναι διακριτή, αλλά η δεύτερη συνεχής και αυτό κυρίως δυσκολεύει τους υπολογισμούς.

Αν όμως επιλέξουμε να παρατηρήσουμε το σύστημα τις στιγμές των αναχωρήσεων, τότε το $x=0$ για τον επόμενο πελάτη (αν υπάρχει) στον εξυπηρετητή, τότε για την περιγραφή της κατάστασης αρκεί μόνο το n . Συμβολίζουμε με L_k^d τον αριθμό των πελατών που απομένουν στο σύστημα την στιγμή της αναχώρησης του k -οστού πελάτη. Στην επόμενη παράγραφο θα υπολογίσουμε την οριακή κατανομή:

$$d_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{L_k^d = n\}$$

Η πιθανότητα d_n μπορεί να ερμηνευθεί ως το ποσοστό (επί του συνόλου των πελατών που αναχωρούν από το σύστημα) των πελατών που αναχωρώντας αφήνουν πίσω τους στο σύστημα n πελάτες.

Ενδιαφερόμαστε όμως, ακόμα περισσότερο, για την οριακή κατανομή (πιθανότητα) p_n που ορίζεται ως:

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L(t) = n\}$$

όπου $L(t)$ είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t . Η πιθανότητα p_n μπορεί να ερμηνευθεί ως το ποσοστό (επί του συνολικού χρόνου) του χρόνου που βρίσκονται στο σύστημα n το πλήθος πελάτες. Από αυτήν την κατανομή μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα που έχει μεγάλο ενδιαφέρον.

Μια άλλη πολύ ενδιαφέρουσα κατανομή είναι η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα όπως φαίνεται σε έναν πελάτη που φθάνει στο σύστημα δηλαδή:

$$\alpha_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{L_k^a = n\}$$

όπου L_k^a είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ακριβώς την στιγμή πριν την άφιξη του k -οστού πελάτη σε αυτό. Η πιθανότητα α_n μπορεί να ερμηνευθεί ως το ποσοστό (επί του συνόλου των πελατών που φθάνουν στο σύστημα) των πελατών που φθάνοντας στο σύστημα βρίσκουν σε αυτό n πελάτες. Από αυτήν την κατανομή μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε την κατανομή του ενδιαμέσου χρόνου.

Ποια είναι η σχέση μεταξύ των τριών αυτών κατανομών; Βεβαίως από την ιδιότητα PASTA ήδη ξέρουμε ότι $\alpha_n = p_n$ για όλα τα n . Εξηγούμε τώρα γιατί ισχύει και $\alpha_n = d_n$ για όλα τα n .

Λέγοντας **κατάσταση του συστήματος** θα εννοούμε το πλήθος των πελατών που βρίσκονται σε αυτό. Θεωρούμε ότι οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις γίνονται κατ' άτομο (όχι κατά ομάδες). Επομένως όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση n , με μία

άφιξη μεταβαίνει στην $(n+1)$ κατάσταση, ενώ με μία αναχώρηση από την n στην $(n-1)$. Άρα σε κατάσταση ισορροπίας, ο αριθμός των μεταβάσεων ανά μονάδα χρόνου από την n στην $(n+1)$ θα είναι ίδιος με τον αριθμό των μεταβάσεων ανά μονάδα χρόνου από την $(n+1)$ στην n . Οι μεταβάσεις από την n στην $(n+1)$ αντιστοιχούν στις αφίξεις πελατών που βρίσκουν n πελάτες στο σύστημα, η συχνότητα των οποίων ισούται με το γινόμενο του συνολικού αριθμού λ των αφίξεων στην μονάδα του χρόνου, επί το ποσοστό α_n των πελατών που κατά την άφιξή τους βρίσκουν n πελάτες στο σύστημα. Οι μεταβάσεις από την κατάσταση $(n+1)$ στην n αντιστοιχούν στις αναχωρήσεις πελατών που την στιγμή της αναχώρησης αφήνουν πίσω τους n πελάτες στο σύστημα. Η συχνότητα των τελευταίων ισούται με το γινόμενο του συνολικού αριθμού λ των αναχωρήσεων στην μονάδα του χρόνου, επί το ποσοστό d_n των πελατών που κατά την αναχώρησή τους αφήνουν n πελάτες στο σύστημα. Εξισώνοντας τις δύο αυτές συχνότητες προκύπτει ότι $\alpha_n = d_n$.

Τονίζουμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει για συστήματα στα οποία τόσο οι αφίξεις όσο και οι αναχωρήσεις γίνονται μία-μία και όχι κατά ομάδες (πράγμα που σημαίνει ότι ισχύει και για την G/G/c ουρά).

Συνοψίζοντας, για την M/G/1 ουρά, οι πελάτες που φθάνουν, οι πελάτες που αναχωρούν και εξωτερικοί παρατηρητές όλοι βλέπουν την ίδια κατανομή του πλήθους των πελατών στο σύστημα. Δηλαδή:

$$\alpha_n = d_n = p_n$$

8.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΑΝΑΧΩΡΗΣΕΩΝ (departure distribution)

Σε αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε την κατανομή του *αριθμού των πελατών (στο σύστημα), που αφήνει πίσω του ένας πελάτης που αναχωρεί από αυτό*, όταν το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία.

Συμβολίζουμε με A_k τον *αριθμό των πελατών που φθάνουν στο σύστημα κατά την διάρκεια της εξυπηρέτησης του k -οστού πελάτη*. Τότε ισχύει:

$$L_{k+1}^d = L_k^d - 1 + A_{k+1}$$

η οποία έχει νόημα αν $L_k^d > 0$.

Στην περίπτωση που $L_k^d = 0$ προφανώς $L_{k+1}^d = A_{k+1}$.

Οι δυο αυτές ισότητες δείχνουν (κεφ. 3, παράδειγμα 3.3.2) ότι, η ακολουθία $\{L_k^d\}_{k=0}^{\infty}$ αποτελεί μια αλυσίδα Markov, η οποία ονομάζεται **M/G/1 ενσωματωμένη αλυσίδα Markov** (embedded Markov chain) γιατί επικεντρωνόμαστε, σε ενσωματωμένα σημεία του άξονα του χρόνου, δηλαδή στις στιγμές αναχωρήσεων.

Πράγματι, η πιθανότητα:

$$P\{L_{k+1}^d = j / L_1^d, L_2^d, \dots, L_{k-1}^d, L_k^d = i\} = P\{L_{k+1}^d = L_k^d - 1 + A_{k+1} = j / L_1^d, L_2^d, \dots, L_{k-1}^d, L_k^d = i\} =$$

$$P\{A_{k+1} = j-i+1 / L_1^d, L_2^d, \dots, L_{k-1}^d, L_k^d = i\} \stackrel{\text{ανεξαρτησια}}{=}$$

$$P\{A_{k+1} = j-i+1\} = \begin{cases} \alpha_j & \text{εαν } i=0, j \geq 0 \\ \alpha_{j-i+1} & \text{εαν } i \geq 1, j \geq i-1 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

εξαρτάται μόνον από το γεγονός $\{L_k^d = i\}$, που σημαίνει ότι η $\{L_k^d\}_{k=0}^\infty$ είναι μια Α.Μ.

Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος:

$$p_{i,j} = P\{L_{k+1}^d = j / L_k^d = i\}$$

Είναι φανερό ότι:

$$p_{i,j} = P\{L_{k+1}^d = j / L_k^d = i\} = 0 \quad \text{για όλα τα } j < i-1.$$

Για τα $j \geq i-1$, η $p_{i,j}$ είναι η πιθανότητα να καταφθάνουν $(j-i+1)$ πελάτες στο σύστημα, κατά την διάρκεια εξυπηρέτησης του $(k+1)$ -οστού πελάτη και αυτό για κάθε $i > 0$.

Στην κατάσταση 0, ο k -οστός πελάτης φεύγοντας από το σύστημα το αφήνει άδειο, άρα η $p_{0,j}$ δίνει την πιθανότητα ότι κατά την διάρκεια της εξυπηρέτησης του $(k+1)$ -οστού πελάτη καταφθάνουν στο σύστημα j το πλήθος πελάτες.

Επομένως ο πίνακας P των πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος, έχει την μορφή

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

όπου με α_n συμβολίζουμε, όπως είδαμε, την πιθανότητα να καταφθάσουν n πελάτες στο σύστημα κατά την διάρκεια μιας εξυπηρέτησης.

8.3.1. Παρατήρηση

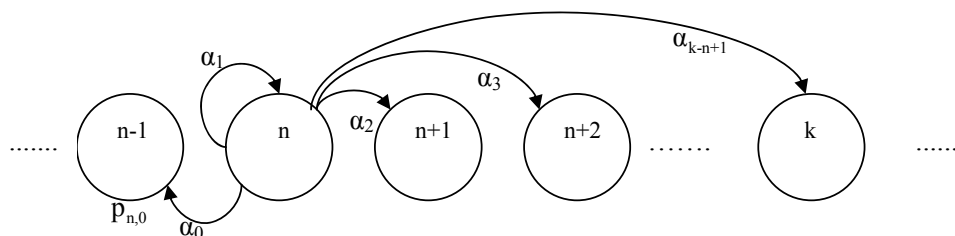
Από τον πίνακα μετάβασης P , είναι φανερό ότι η αλυσίδα είναι ανάγωγη (όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν) και μη-περιοδική (π.χ. επειδή, υποθέτουμε ότι, η $p_{0,0} > 0$, έχουμε ότι $d(0)=1$, και επειδή η σ.α. $\{L_k^d\}_{k=0}^\infty$ είναι ανάγωγη έπεται, λόγω της πρότασης 3.8.2, ότι όλες καταστάσεις της έχουν περίοδο 1, δηλαδή η αλυσίδα είναι μη-περιοδική.

Για να υπολογίσουμε την $\alpha_n = P\{A_k = n\}$, σημειώνουμε ότι με δεδομένη την χρονική διάρκεια της εξυπηρέτησης, a_s πούμε t , ο αριθμός των αφίξεων στο σύστημα σε

αυτήν την διάρκεια έχει την κατανομή Poisson με παράμετρο (λt), επομένως (χρησιμοποιώντας την σχέση 1.5.12(iv)):

$$\alpha_n = P\{A_k = n\} = \int_0^\infty P\{A_k = n/B_k = t\} f_B(t) dt = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_B(t) dt. \quad (8.2)$$

Το κατευθυνόμενο γράφημα της αλυσίδας Markov φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 8.1



Σχήμα 8.1: Κατευθυνόμενο γράφημα για την M/G/1 ενσωματωμένη αλυσίδα Markov

Αναφέρουμε και πάλι, τις στοχαστικές ανελίξεις του κεφαλαίου.

Ανέλιξη	Ονομασία	Ερμηνεία	
$\{N_t\}_{t \geq 0}$	ανανεωτική αφίξεων	N_t , αριθμός των πελατών που φτάνουν στο σύστημα μέχρι τον χρόνο t	Διαγράφηκε: ¶
$\{X_k\}_{k=1}^\infty$ X	ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων (κοινή) κατανομή των X_n	X_i ο χρόνος μεταξύ της άφιξης του (i-1)-οστού και του i-οστού πελάτη Εκθετική με παράμετρο λ	Διαγράφηκε: ¶
$\{B_n\}_{n=1}^\infty$ B	χρόνοι εξυπηρέτησης (κοινή) κατανομή των B_n	B_n ο χρόνος εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη μέση τιμή EB και διασπορά σ_B^2	Διαγράφηκε: ¶
$\{L(t)\}_{t \geq 0}$ $p_n(t) = P\{L(t) = n\}$, $p_n(t) = p_n$		$L(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t Κατανομή της $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ Κατανομή της $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ σε κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή ανεξαρτησία από το t	Διαγράφηκε: ¶
$\{L_k^d\}_{k=0}^\infty$		αριθμός των πελατών που απομένουν στο σύστημα την στιγμή της αναχώρησης του k- οστού πελάτη.	

$d_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{L_k^d = n\}$		η κατανομή της $\{L_k^d\}_{k=1}^{\infty}$ σε κατάσταση ισορροπίας (δηλαδή ανεξάρτητα του κ)
$\{L_k^a\}_{k=1}^{\infty}$ $\alpha_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{L_k^a = n\}$		ο αριθμός των πελατών στο σύστημα την στιγμή πριν την άφιξη του k -οστού πελάτη η κατανομή της $\{L_k^a\}_{k=1}^{\infty}$ σε κατάσταση ισορροπίας (δηλαδή ανεξάρτητα του κ)
$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$		αριθμός των πελατών που φθάνουν στο σύστημα κατά την διάρκεια της εξυπηρέτησης του k -οστού πελάτη

Θα υπολογίσουμε τώρα την οριακή κατανομή της L_k^d , που θα την συμβολίζουμε με $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ και την οριακή τυχαία μεταβλητή με L^d . Δηλαδή:

$$d_n = P\{L^d = n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{L_k^d = n\}$$

Οι οριακές πιθανότητες d_n , οι οποίες ξέρουμε ότι ισούνται με τις p_n , λόγω της αλυσίδας Markov ικανοποιούν την σχέση:

$$[d_0 \ d_1 \ \dots \ d_n \ \dots] \cdot P = [d_0 \ d_1 \ \dots \ d_n \ \dots]$$

από όπου προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας:

$$d_0 = d_0 \alpha_0 + d_1 \alpha_0$$

$$d_1 = d_0 \alpha_1 + d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_0$$

$$d_2 = d_0 \alpha_2 + d_1 \alpha_2 + d_2 \alpha_1 + d_3 \alpha_0 \quad \text{κ.λ.π.}$$

οι οποίες συνοπτικά γράφονται

$$d_n = d_0 \alpha_n + d_1 \alpha_n + d_2 \alpha_{n-1} + \dots + d_n \alpha_1 + d_{n+1} \alpha_0 = d_0 \alpha_n + \sum_{k=0}^n d_{n+1-k} \alpha_k, \quad \text{για } n=0,1,2,\dots \quad (8.3)$$

Για να επιλύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας, και να υπολογίσουμε την $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$, θα χρησιμοποιήσουμε γεννήτριες συναρτήσεις.

Οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των L^d και A είναι:

$$P_{L^d}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \quad \text{και} \quad P_A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

που ορίζονται για όλα τα $z \leq 1$.

Πολλαπλασιάζοντας την (8.3) με z^n και αθροίζοντας ως προς όλα τα n , έχουμε:

$$\begin{aligned}
P_{L^d}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(d_0 \alpha_n + \sum_{k=0}^n d_{n+1-k} \alpha_k \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n \sum_{k=0}^n d_{n+1-k} \alpha_k + d_0 \alpha_n z^n \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=0}^n d_{n+1-k} \alpha_k \right) + \sum_{n=0}^{\infty} d_0 \alpha_n z^n = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n d_{n+1-k} \alpha_k z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} d_0 \alpha_n z^n = \\
&= z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n d_{n+1-k} \alpha_k z^{n+1-k} z^k + d_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \left(z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} d_{n+1-k} \alpha_k z^{n+1-k} z^k \right) + d_0 P_A(z) = \\
&= d_0 P_A(z) + z^{-1} \left[\alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} z^{n+1} + \alpha_1 z^1 \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n + \alpha_2 z^2 \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-1} z^{n-1} + \dots \right] = \\
&= d_0 P_A(z) + z^{-1} \left[\alpha_0 (d_1 z^1 + d_2 z^2 + \dots) + \alpha_1 z^1 (d_1 z^1 + d_2 z^2 + \dots) + \alpha_2 z^2 (d_1 z^1 + d_2 z^2 + \dots) + \dots \right] = \\
&= d_0 P_A(z) + z^{-1} P_A(z) [P_{L^d}(z) - d_0]
\end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς $P_{L^d}(z)$ προκύπτει:

$$P_{L^d}(z) = \frac{d_0 P_A(z)(1-z^{-1})}{1-z^{-1}P_A(z)}$$

Ξέρουμε ότι $d_0 = p_0$, αλλά στην περίπτωση ουράς με έναν εξυπηρετητή, το ρ εκφράζει την πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι απασχολημένος, δηλαδή στο σύστημα να υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης, οπότε $p_0 = 1 - \rho$.

8.3.2 Παρατήρηση

Το ίδιο προκύπτει και από την παραπάνω σχέση, γιατί:

$$\begin{aligned}
P_{L^d}(1) &= 1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d_0 P_A(z)(z-1)}{P_A(z)-z} \stackrel{L'Hospital}{=} d_0 P_A(1) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)'}{(P_A(z)-z)'} = \\
&= \frac{d_0}{P_A'(1)-1} = \frac{d_0}{EA-1} = \frac{d_0}{\rho-1} \Rightarrow d_0 = 1 - \rho
\end{aligned}$$

οπότε:

$$d_0 = 1 - \rho > 0 \Leftrightarrow \rho < 1$$

Στην περίπτωση τώρα που το $d_0 > 0$, τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι η αλυσίδα $\{L_k^d\}_{k=0}^{\infty}$ είναι θετικά επανερχόμενη οπότε, από τη παρατήρηση 8.3.1. και το θεώρημα 3.11.1., έπεται ότι η οριακή κατανομή της $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ υπάρχει και είναι και μοναδική). Δηλαδή με άλλα λόγια βλέπουμε ότι, ικανή (αλλά και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι να έχουμε $\rho < 1$ ($\Leftrightarrow \lambda EB < 1$) (γεγονός που υποθέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου).

Αντικαθιστώντας τώρα το d_0 και πολλαπλασιάζοντας επί $-z$, παίρνουμε:

$$P_{L^d}(z) = \frac{(1-\rho)P_A(z)(z-1)}{P_A(z)-z} \quad (8.4)$$

Χρησιμοποιώντας την (8.2) η γεννήτρια συνάρτηση $P_A(z)$ γράφεται:

$$\begin{aligned} P_A(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_B(t) dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_B(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f_B(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^n}{n!} \right) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f_B(t) e^{\lambda t z} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-\lambda z)t} f_B(t) dt = \tilde{B}(\lambda-\lambda z) \end{aligned} \quad (8.5)$$

την οποία αντικαθιστούμε στην (8.4) και έχουμε:

$$P_{L^d}(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\tilde{B}(\lambda-\lambda z)}{-z+\tilde{B}(\lambda-\lambda z)} \quad (8.6)$$

Η ισότητα (8.6) είναι ο **1^{ος} τύπος Pollaczek-Khinchin**.

Παραγωγίζοντας την (8.6) μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές της L^d .

8.3.3 Εφαρμογή στην M/M/1

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανομημένος με μέσο $1/\mu$, οπότε λόγω της (1.7.12δ(iii)) είναι:

$$\tilde{B}(s) = \frac{\mu}{\mu+s} \quad \text{άρα} \quad \tilde{B}(\lambda-\lambda z) = \frac{\mu}{\mu+\lambda-\lambda z}$$

και αντικαθιστώντας στην (8.6) μετά τις πράξεις έχουμε:

$$P_{L^d}(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z} = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n z^n$$

η οποία είναι γεννήτρια της γεωμετρικής(2) κατανομής με παράμετρο το $(1-\rho)$

(1.7.12 βB). Επομένως, λόγω του ότι $P_{L^d}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$, έχουμε:

$$d_n = p_n = P\{L^d = n\} = (1-\rho)\rho^n \quad \text{για } n=0,1,2,\dots$$

Ειδικότερα για $n=0$ είναι $p_0 = 1-\rho$.

8.3.4 Εφαρμογή στην M/E₂/1

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι Erlang-2 κατανομημένος με μέσο $2/\mu$

τότε (1.7.12 ε) θα είναι: $\tilde{B}(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^2$ και αντικαθιστώντας στην (8.6) έχουμε:

$$P_{L^d}(z) = \frac{(1-\rho)(1-z) \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda-\lambda z} \right)^2}{-z + \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda-\lambda z} \right)^2} = \frac{(1-\rho)(1-z)\mu^2}{\mu^2 - z(\mu+\lambda-\lambda z)^2} =$$

$$= \frac{(1-\rho)(1-z)}{1-z \left(1 + \frac{\rho(1-z)}{2} \right)^2} = \frac{1-\rho}{1-\rho z - \frac{\rho^2 z(1-z)}{4}}$$

η οποία για $\rho=1/3$ γίνεται:

$$P_{L^d}(z) = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{z}{3} - \frac{z(1-z)}{36}} = \frac{24}{z^2 - 13z + 36} = \frac{24}{(4-z)(9-z)} = \frac{\frac{24}{4-z} - \frac{24}{9-z}}{1 - \frac{z}{4} - 1 - \frac{z}{9}} = \frac{\frac{6}{4-z} - \frac{8}{9-z}}{1 - \frac{z}{4} - 1 - \frac{z}{9}}$$

και λόγω της πρότασης 1.7.5 (γ), έπεται ότι:

$$d_n = p_n = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{4} \right)^n - \frac{8}{15} \left(\frac{1}{9} \right)^n, \quad n=0,1,2,\dots$$

8.3.5 Εφαρμογή στην M/H₂/1

Υποθέτουμε ότι $\lambda=1$ και ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι υπερεκθετικά κατανομημένος με παραμέτρους $p_1=1-p_2=\frac{1}{4}$ και $\mu_1=1$, $\mu_2=2$. Έτσι ο μέσος χρόνος εξυπηρέ-

τησης θα είναι: $\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$, επομένως $\mu=8/5$ και $\rho=\frac{1}{8}=\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5}$.

Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes (σύμφωνα με την 1.7.12 στ) θα είναι:

$$\tilde{B}(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{1+s} + \frac{3}{4} \frac{2}{2+s} = \frac{1}{4} \frac{8+7s}{(1+s)(2+s)},$$

οπότε από την (8.6) έχουμε:

$$P_{L^d}(z) = \frac{(1-z) \frac{3}{8} \frac{1}{4} \frac{15-7z}{(2-z)(3-z)}}{-z + \frac{1}{4} \frac{15-7z}{(2-z)(3-z)}} = \frac{3}{8} \frac{(15-7z)(1-z)}{(15-7z)-4z(2-z)(3-z)} =$$

$$= \frac{3}{8} \frac{15-7z}{(3-2z)(5-2z)} = \frac{3}{8} \frac{9/4}{3-2z} + \frac{3}{8} \frac{5/4}{5-2z/5} = \frac{9/32}{1-2z/3} + \frac{3/32}{1-2z/5}$$

και λόγω της πρότασης 1.7.5 γ, έπεται ότι:

$$d_n = p_n = \frac{9}{32} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{32} \left(\frac{2}{5}\right)^n, \quad n=0,1,2,\dots$$

8.4 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΠΑΡΑΜΟΝΗΣ (sojourn time)

Ας υποθέσουμε ότι ένας πελάτης φθάνει στο σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Συμβολίζουμε με (την τ.μ.) S τον συνολικό χρόνο που καταναλώνει ο πελάτης στο σύστημα, η δε S υποθέτουμε ότι έχει σ.κ. $F_S(\cdot)$ και π.π. $f_S(\cdot)$. Η κατανομή του πλήθους των πελατών που αφήνει πίσω του αμέσως μετά την αναχώρησή του από το σύστημα είναι ίση με $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$. Αφήνει πίσω του δε τόσους πελάτες όσοι ήταν αυτοί που αφίχθησαν κατά την διάρκεια της παραμονής του στο σύστημα (εδώ υποθέτουμε ότι η πειθαρχία της ουράς είναι FIFO). Επομένως:

$$d_n = P\{L^d = n\} = \int_0^{\infty} P\{L^d = n / S_k = t\} f_S(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_S(t) dt$$

και αντικαθιστώντας την στην $P_{L^d}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ προκύπτει (με ακριβώς την ίδια διαδικασία που προέκυψε και η 8.5) ότι: $P_{L^d}(z) = \tilde{S}(\lambda - \lambda z)$ την οποία αντικαθιστούμε στην (8.6) και παίρνουμε:

$$\tilde{S}(\lambda - \lambda z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\tilde{B}(\lambda - \lambda z)}{-z + \tilde{B}(\lambda - \lambda z)}$$

και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $s = \lambda - \lambda z$ έχουμε:

$$\tilde{S}(s) = \frac{(1-\rho)s\tilde{B}(s)}{s - \lambda + \lambda\tilde{B}(s)} \quad (8.7)$$

Η ισότητα (8.7) είναι ο 2^{ος} τύπος Pollaczek-Khinchin .

8.4.1 Εφαρμογή στην M/M/1

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $1/\mu$, οπότε λόγω της (1.7.12δ(iii)) είναι $\tilde{B}(s) = \frac{\mu}{\mu + s}$, οπότε η (8.7) γίνεται:

$$\tilde{S}(s) = \frac{(1-\rho)s \frac{\mu}{\mu + s}}{s - \lambda + \lambda \frac{\mu}{\mu + s}} = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho) + s},$$

που είναι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes για εκθετική κατανομή (1.7.12 δ) με παράμετρο $\mu(1-\rho)$ οπότε από την 1.3.8 γ:

$$F_S(t) = P(S \leq t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0$$

και

$$E(S) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

8.4.2 Εφαρμογή στην M/E₂/1

Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις έχουν $\lambda=1$ και ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι Erlang-2 κατανομημένος με μέσο $1/3$ (δηλ. $\mu=3$ και $\rho=\lambda/\mu=1/3$) τότε (1.7.12 ε) θα είναι:

μέσος $=k/v$ δηλαδή $1/3=2/v$ άρα $v=6$ και $\tilde{B}(s) = \left(\frac{v}{v+s} \right)^k = \left(\frac{6}{6+s} \right)^2$ και αντικαθιστώντας

στην 8.7 προκύπτει μετά τις πράξεις:

$$\tilde{S}(s) = \frac{2}{5} \frac{3}{s+3} - \frac{3}{5} \frac{8}{s+8}$$

η οποία είναι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes για συνδυασμό εκθετικών κατανομών (παράδειγμα 1.7.14) με $\lambda_1=3$ και $\lambda_2=8$ οπότε έχουμε :

$$F_s(t) = \frac{2}{5}(1-e^{-3t}) - \frac{3}{5}(1-e^{-8t}) , t \geq 0 .$$

8.4.3 Εφαρμογή στην M/H₂/1

Θεωρούμε πάλι την εφαρμογή 8.3.3. Είναι $\lambda=1$, $\rho=5/8$ και

$$\tilde{B}(s) = \frac{1}{4} \frac{8+7s}{(1+s)(2+s)}$$

οπότε από την (8.7) προκύπτει:

$$\tilde{S}(s) = \frac{27}{32} \frac{\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} + \frac{5}{32} \frac{\frac{3}{2}}{s+\frac{3}{2}}$$

η οποία είναι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes για συνδυασμό εκθετικών κατανομών (παράδειγμα 1.7.14) με $\lambda_1=1/2$ και $\lambda_2=3/2$ οπότε έχουμε :

$$F_s(t) = \frac{27}{32}(1-e^{-t/2}) + \frac{5}{32}(1-e^{-3t/2}) , t \geq 0$$

8.5 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΝΑΜΟΝΗΣ (waiting time distribution)

Έστω S και πάλι ο συνολικός χρόνος που καταναλώνει ένας πελάτης στο σύστημα (με σ.κ. $F_s(\cdot)$ και π.π. $f_s(\cdot)$). Ο χρόνος αυτός, είναι το άθροισμα του χρόνου αναμονής W του πελάτη στην ουρά και του χρόνου εξυπηρέτησης του B . Οι χρόνοι W και B είναι ανεξάρτητοι και ξέρουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes του αθροίσματός τους ισούται (λόγω της 1.7.11(5)) με το γινόμενο των μετασχηματισμών της κάθε μιας τ.μ., οπότε:

$$\tilde{S}(s) = \tilde{W}(s)\tilde{B}(s) \quad (8.8)$$

και λόγω της (8.7) προκύπτει:

$$\tilde{W}(s) = \frac{(1-\rho)s}{\lambda\tilde{B}(s)+s-\lambda} \quad (8.9)$$

ο οποίος είναι ο 3^{ος} τύπος Pollaczek-Khinchin .

8.5.1 Εφαρμογή στην M/M/1

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανομημένος με μέσο $1/\mu$,

άρα $\tilde{B}(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$, οπότε από την (8.9) παίρνουμε:

$$\tilde{W}(s) = \frac{(1-\rho)(s+\mu)}{\mu+s-\lambda}$$

το οποίο γράφουμε ισοδύναμα:

$$\tilde{W}(s) = (1-\rho) + \rho \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s}$$

για να δούμε μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace ότι $W=1$ με πιθανότητα $(1-\rho)$ και W αντιστοιχεί στην εκθετική κατανομή με παράμετρο $\mu(1-\rho)$ με πιθανότητα ρ . Άρα η σ.κ. της τ.μ. W , είναι:

$$F_W(t) = P\{W \leq t\} = (1-\rho) + \rho(1 - e^{-\mu(1-\rho)t}) , \text{ με } t \geq 0 .$$

8.5.2 Παρατήρηση

Από την παραπάνω σ.κ. βλέπουμε ότι:

- (α) η πιθανότητα ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη να είναι μηδέν, είναι $1-\rho$ το οποίο συμφωνεί απολύτως με το προηγούμενο συμπέρασμά μας ότι $p_0 = 1-\rho$.
- (β) με δεδομένο ότι ο χρόνος αναμονής δεν είναι μηδέν (δηλαδή με πιθανότητα ρ), ο χρόνος αναμονής είναι εκθετικά κατανομημένος με παράμετρο $\mu(1-\rho)$, το οποίο επίσης συμφωνεί με προηγούμενο συμπέρασμά μας .

8.6 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Ο μέσος χρόνος αναμονής (στην ουρά) μπορεί βεβαίως να υπολογιστεί από την (8.9) παραγωγίζοντας και αντικαθιστώντας $s=0$. Μπορούμε όμως να τον υπολογίσουμε και χωρίς την χρήση των μετασχηματισμών Laplace-Stieltjes όπως θα δούμε αμέσως.

8.6.1 Η εργασία στο σύστημα και άλλη μια εξίσωση κόστους

Για ένα οποιοδήποτε σύστημα ουράς (όχι μόνο για το M/G/1), ορίζουμε ως **εργασία** στο σύστημα την τυχαία στιγμή t , να είναι το άθροισμα των υπολοίπων χρόνων εξυπηρέτησης όλων των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα αυτή την στιγμή t .

Π.χ. υποθέτουμε ότι κάποια στιγμή t στο σύστημα βρίσκονται τρεις πελάτες, δυο στην ουρά και ένας στον εξυπηρετητή. Ο ένας στον εξυπηρετητή έχει ήδη εξυπηρετη-

θεί για 3 από τις 5 συνολικά απαιτούμενες χρονικές μονάδες ώστε να ολοκληρωθεί η εξυπηρέτησή του (οπότε ο υπόλοιπος χρόνος εξυπηρέτησής του είναι 2), ενώ οι άλλοι δυο στην ουρά έχουν χρόνους εξυπηρέτησης 6 και 4 χρονικές μονάδες (από την στιγμή που θα αρχίσει η εξυπηρέτησή τους) αντίστοιχα (οπότε οι υπόλοιποι χρόνοι εξυπηρέτησής τους είναι ίδιοι με τους χρόνους εξυπηρέτησής τους 6 και 4 αντίστοιχα). Με τις παραπάνω υποθέσεις η εργασία στο σύστημα την στιγμή t είναι $2+6+4=12$.

Συμβολίζουμε με V την (χρονικά) μέση τιμή της εργασίας του συστήματος.

Σύμφωνα με την βασική ταυτότητα κόστους (6.1) και επιλέγοντας ο κανόνας που πληρώνει κάθε πελάτης το σύστημα να είναι:

κάθε πελάτης πληρώνει στο σύστημα με ρυθμό y , όπου y είναι ο υπόλοιπος χρόνος εξυπηρέτησής του είτε αυτός ο πελάτης βρίσκεται στην ουρά είτε στον εξυπηρετητή.

συμπεραίνουμε ότι ο ρυθμός με τον οποίο το σύστημα κερδίζει ισούται με V . Άρα η βασική ταυτότητα κόστους γράφεται:

$$V = \lambda \cdot E[\text{ποσό που πληρώνει ο πελάτης}]. \quad (8.10)$$

Αν B είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός συγκεκριμένου πελάτη και W ο χρόνος αναμονής του στην ουρά τότε, όσο ο πελάτης είναι στην ουρά πληρώνει με σταθερό ρυθμό B , ενώ όταν είναι στην εξυπηρέτηση και έχει περάσει x χρόνος από την στιγμή που ξεκίνησε η εξυπηρέτησή του, πληρώνει με ρυθμό $(B-x)$. Δηλαδή συνολικά ο πελάτης πληρώνει $BW + \int_0^B (B-x)dx$ και η (8.10) γίνεται:

$$V = \lambda \cdot E \left[BW + \int_0^B (B-x)dx \right]$$

η οποία μετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος γράφεται και:

$$V = \lambda \cdot E[BW] + \frac{1}{2} \lambda \cdot E[B^2] \quad (8.11)$$

Η (8.11) είναι πολύ χρήσιμη και ισχύει για όλα σχεδόν τα συστήματα ουρών.

Επιπλέον, εάν ο χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη είναι ανεξάρτητος από τον χρόνο αναμονής του στην ουρά (που σε πολλά συστήματα συμβαίνει), τότε η (8.11) παίρνει τη μορφή:

$$V = \lambda \cdot E[B] \cdot E[W] + \frac{1}{2} \lambda \cdot E[B^2] \quad (8.12)$$

8.6.2 Εφαρμογή της εργασίας στην M/G/1

Στην M/G/1 ουρά, για έναν τυχαίο πελάτη την στιγμή t ακριβώς πριν να μπει στο σύστημα ισχύει:

Ο χρόνος W αναμονής του στην ουρά = εργασία στο σύστημα την στιγμή t .

Παίρνοντας ελπίδες και στα δυο μέλη προκύπτει:

$$EW = \text{μέση εργασία όπως φαίνεται σε έναν πελάτη την στιγμή της άφιξης}$$

Όμως λόγω της PASTA:

(η μέση εργασία όπως φαίνεται σε έναν πελάτη την στιγμή της άφιξης) = (χρονικά μέση τιμή της εργασίας)

δηλαδή $EW = V$ η οποία ισότητα σε συνδυασμό με την (8.12) μας δίνει την

$$EW = \frac{\lambda E[B^2]}{2(1-\lambda EB)} \quad (8.13\alpha)$$

η σε άλλη μορφή:

$$EW = \frac{\rho EB(1+c_B^2)}{2(1-\rho)} \quad (8.13\beta)$$

8.6.3 Παρατήρηση

(α) Είναι φανερό (από την 8.13β) ότι, η μέση τιμή του χρόνου αναμονής στην ουρά εξαρτάται μόνο από την μέση τιμή και την διασπορά του χρόνου εξυπηρέτησης και όχι γενικά από την κατανομή του. Δηλαδή για να εκτιμήσουμε τον μέσο χρόνο αναμονής είναι αρκετό να γνωρίζουμε EB και c_B^2 .

(β) Ακόμα, η μέση τιμή του χρόνου αναμονής στην ουρά, αυξάνεται με την αύξηση του συντελεστή μεταβλητότητας του B .

Με την βοήθεια των (8.13 α και β) και των: Θ .Little, $\rho = \lambda EB$, $ES = EW + EB$ μπορούμε να υπολογίσουμε μέσες τιμές για τα L , S και L_q :

$$ES = EB + \frac{\rho EB(1+c_B^2)}{2(1-\rho)} = EB + \frac{\lambda E[B^2]}{2(1-\lambda EB)} \quad (8.14)$$

Ακόμα:

$$EL_q = \frac{\rho^2(1+c_B^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_B^2}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda^2 E[B^2]}{2(1-\lambda EB)} \quad (8.15)$$

Επίσης:

$$E(L) = \rho + \frac{\rho^2(1+c_B^2)}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_B^2}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda^2 E[B^2]}{2(1-\lambda EB)} \lambda EB + \frac{\lambda^2 E[B^2]}{2(1-\lambda EB)} \quad (8.16)$$

8.6.4 Εφαρμογή στην M/M/1

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης B είναι εκθετικά κατανομημένος με παράμετρο μ συνεπώς (ως γνωστόν από την εκθετική κατανομή) έχει μέσο $E(B) = 1/\mu$,

$\sigma_B^2 = \frac{1}{\mu^2}$ και $c_B^2 = 1$, οπότε εφαρμόζοντας στις παραπάνω σχέσεις (8.13) έως (8.16) προκύπτουν άμεσα οι γνωστές (7.1) έως (7.4).

8.7 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗΣ

Αποδεικνύουμε πρώτα μια σημαντική σχέση για την διάρκεια της περιόδου απασχόλησης BP.

Η **πρώτη (κύρια) περίοδος απασχόλησης** BP, ξεκινάει την στιγμή της εξυπηρέτησης του πρώτου πελάτη του οποίου τον χρόνο εξυπηρέτησης συμβολίζουμε B_1 . Καθ' όλη την διάρκεια αυτής της εξυπηρέτησης νέοι πελάτες ίσως εισέρχονται στο σύστημα περιμένοντας στην ουρά, το πλήθος των οποίων συμβολίσουμε με N και ας ονομάσουμε αυτούς τους πελάτες $C_1, C_2, \dots, C_N$. Με την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του πρώτου πελάτη, ο C_1 πελάτης ξεκινάει να εξυπηρετείται και ταυτόχρονα αντί να αφήσουμε τους υπόλοιπους $C_2, \dots, C_N$ πελάτες να περιμένουν την σειρά τους στην ουρά, επιλέγουμε να τους βγάλουμε προσωρινά έξω από το σύστημα. Ο C_2 θα ξαναμπει στο σύστημα όταν αυτό αδειάσει από πελάτες, όχι μόνο από τον C_1 που εξυπηρετείται αλλά και όλους αυτούς τους νέους πελάτες που πιθανόν θα φθάσουν στο σύστημα κατά την διάρκεια της εξυπηρέτησης του C_1 και τους οποίους αφήνουμε να εισέλθουν στο σύστημα και να προηγηθούν στην εξυπηρέτηση (κατά παράβαση της FIFO) αυτών που βγάλαμε έξω. Με αυτό τον τρόπο ο C_1 ξεκινάει μια νέα περίοδο απασχόλησης BP_1 , μέχρι το πέρας της οποίας ο C_2 πρέπει να περιμένει. Με τον ίδιο τρόπο ο C_3 πρέπει να περιμένει την ολοκλήρωση της BP_2 την οποία ξεκίνησε ο C_2 και ούτω καθ' εξής. Με το πέρας της τελευταίας BP_N (την οποία ξεκίνησε ο C_N) ολοκληρώνεται και η κύρια περίοδος BP.

Τονίζουμε ότι σε αυτήν την διαδικασία παραβιάσαμε την FIFO αλλά αυτό καθόλου δεν επηρεάζει την διάρκεια της κύριας περιόδου BP, επειδή η διάρκειά της είναι ανεξάρτητη από την σειρά με την οποία εξυπηρετούνται πελάτες.

Από την παραπάνω σκέψη λοιπόν προκύπτει η σημαντική σχέση :

$$BP = B_1 + BP_1 + BP_2 + \dots + BP_N \quad (8.17)$$

όπου οι τ.μ. $BP, BP_1, BP_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες, ταυτοτικά κατανεμημένες και είναι επιπλέον ανεξάρτητες και από το N. (Ο αριθμός N βεβαίως εξαρτάται από το B_1).

Με την βοήθεια της (8.17) θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes για την περίοδο απασχόλησης BP.

$$\widetilde{BP}(s) = E(e^{-sBP}) = \int_0^\infty E(e^{-sBP}/B_1=t) f_B(t) dt \quad (8.18)$$

και δεσμεύοντας ως προς το N έχουμε:

$$\begin{aligned}
E(e^{-sBP}/B_1=t) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{-sBP}/B_1=t, N=n) P(N=n/B_1=t) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{-s(B_1+BP_1+\dots+BP_N)}/B_1=t, N=n) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{-s(t+BP_1+\dots+BP_n)}) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{-st} e^{-sBP_1} \dots e^{-sBP_n}) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-st} (E(e^{-sBP}))^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-(s+\lambda-\lambda \widetilde{BP}(s))t}
\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην (8.18), έχουμε:

$$\widetilde{BP}(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda-\lambda \widetilde{BP}(s))t} f_B(t) dt ,$$

δηλαδή

$$\widetilde{BP}(s) = \widetilde{B}(s + \lambda - \lambda \widetilde{BP}(s)) \quad (8.19)$$

Παραγωγίζοντας την (8.19) ως προς s και θέτοντας $s=0$ προκύπτουν οι ροπές της BP (Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\widetilde{X}(0)=1$, $\widetilde{X}'(0)=-E(X)$ και $\widetilde{X}^{(k)}(0)=(-1)^k E(X^k)$), οπότε:

$$E(BP) = \frac{E(B)}{1-\lambda EB}$$

που είναι η (7.22) που ξαναβρήκαμε στην παράγραφο 7.5. Παραγωγίζοντας δυο φορές, παίρνουμε:

$$E(BP^2) = \frac{E(B^2)}{(1-\rho)^3} \quad (8.20)$$

η οποία σε συνδυασμό με την (7.35) δίνει:

$$\sigma_{BP}^2 = \frac{\sigma_B^2 + \rho(EB)^2}{(1-\rho)^3} \quad (8.21)$$

Και

$$c_{BP}^2 = \frac{\rho + c_B^2}{1-\rho} \quad (8.22)$$

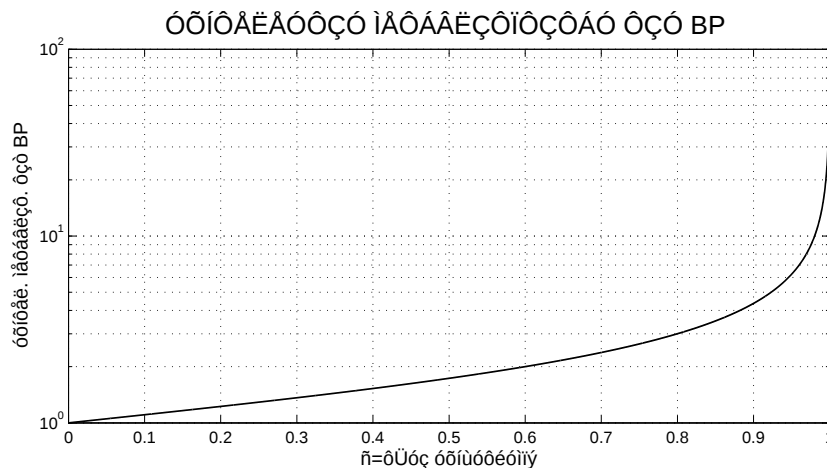
Η (8.22) δείχνει ότι καθώς το ρ τείνει στο 1, ο συντελεστής μεταβλητότητας του BP τείνει στο άπειρο.

8.7.1 Εφαρμογή στην M/M/1

Για εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης είναι $c_B^2=1$ οπότε από την (8.22) προκύπτει:

$$c_{BP}^2 = \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad (8.23)$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η (8.23), ότι καθώς το ρ τείνει στο 1, ο συντελεστής μεταβλητότητας του BP τείνει στο άπειρο (λόγω του παρονομαστή ο οποίος τείνει στο 0). Μ' άλλα λόγια καθώς το ρ τείνει στο 1, δηλαδή οι αφίξεις τείνουν να γίνουν όσες και οι αναχωρήσεις, τότε είναι γνωστό ότι η ουρά τείνει να γίνει απεριόριστη, οπότε και η περίοδος απασχόλησης τείνει να γίνει άπειρη). Επίσης όταν το ρ τείνει στο 0 ο συντελεστής μεταβλητότητας του BP τείνει στον συντελεστή μεταβλητότητας του B (δηλαδή στο 1).

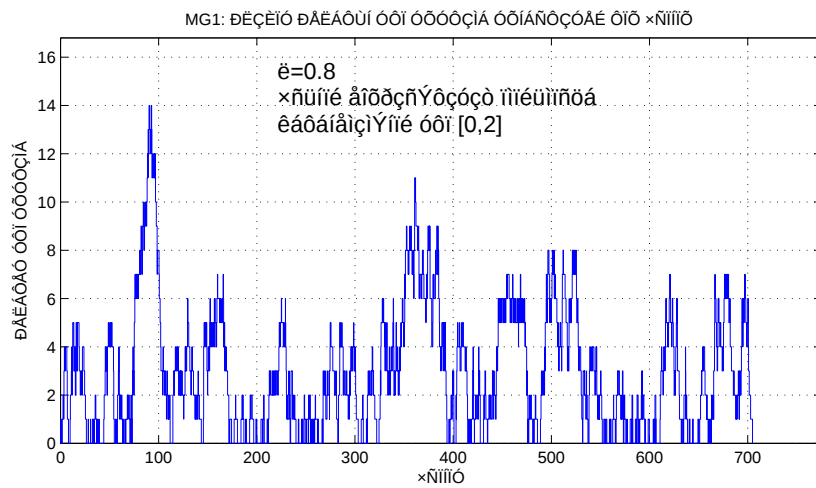
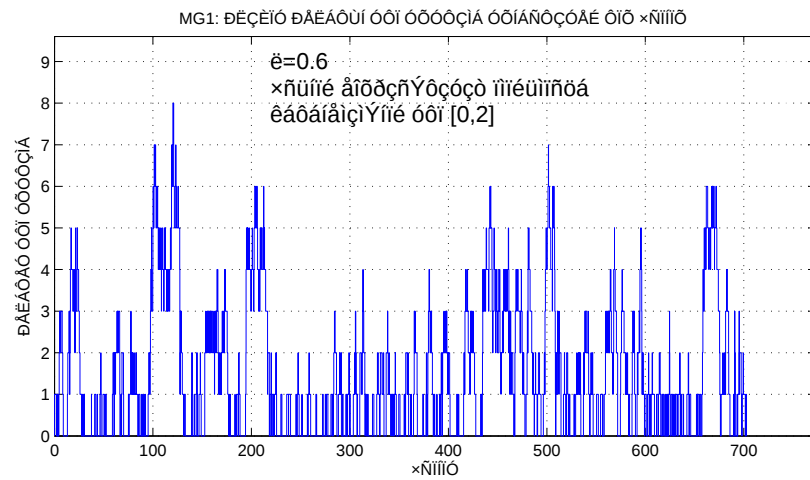
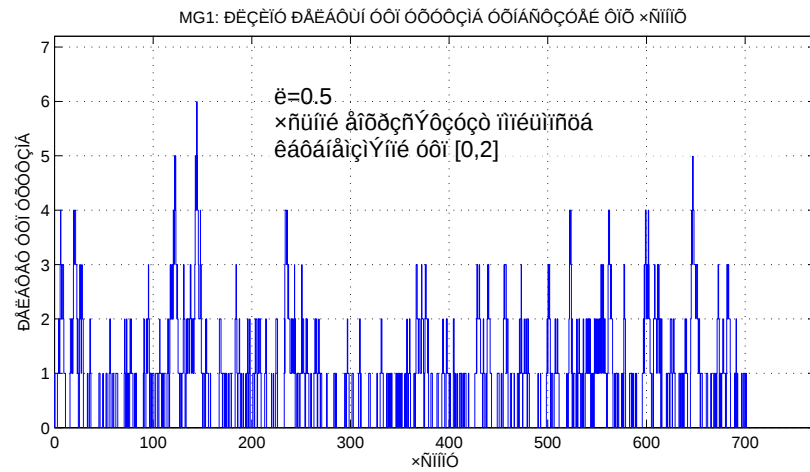


(Οι κώδικες παρατίθενται στο παράρτημα)

Στα τρία παρακάτω διαγράμματα (τα οποία είναι δυνατές πραγματοποιήσεις ενός συστήματος ουράς M/G/1, αναφορικά με τον αριθμό των πελατών στο σύστημα, όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ομοιόμορφα κατανομημένοι στο διάστημα $[0,2]$) παρατηρούμε ότι:

- (i) όταν η τάση συνωστισμού ρ είναι 0,5 το πλήθος των πελατών τείνει να κινείται σε χαμηλά επίπεδα με μέγιστη τιμή το 6 , ενώ
- (ii) όταν το ρ αυξηθεί σε 0,6 η αναμενόμενη αντίδραση του συστήματος, είναι το πλήθος να τείνει να κινείται σε αυξημένα επίπεδα με μέγιστη τιμή το 8 και
- (iii) τέλος όταν $\rho=0,8$ το πλήθος κινείται σε ακόμα υψηλότερες τιμές με μέγιστη το 14.

Μ' άλλα λόγια, όσο η τάση συνωστισμού αυξάνει, αυξάνει με την πάροδο του χρόνου και ο αριθμός των πελατών στο σύστημα.

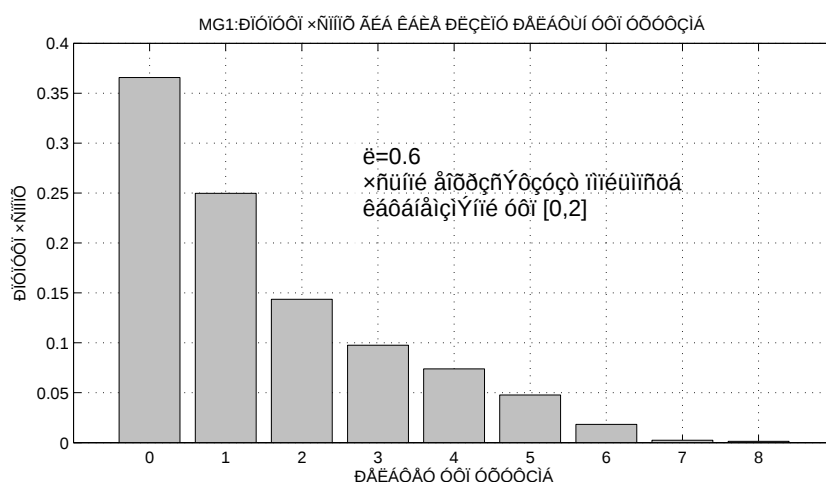
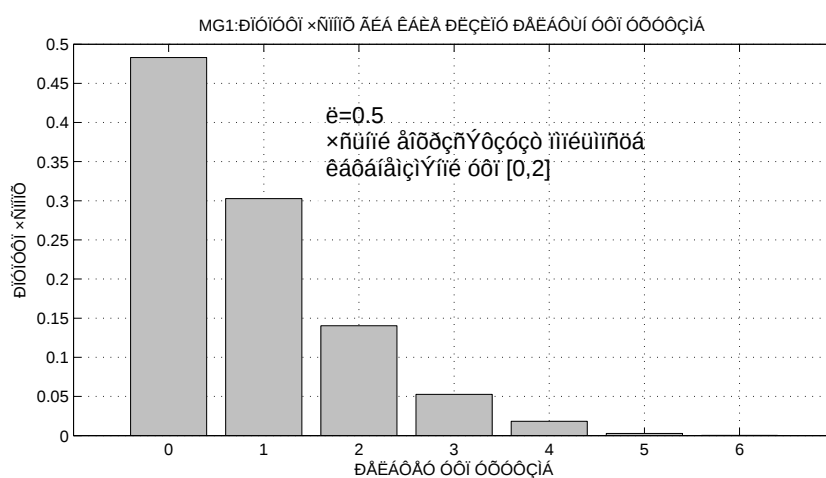


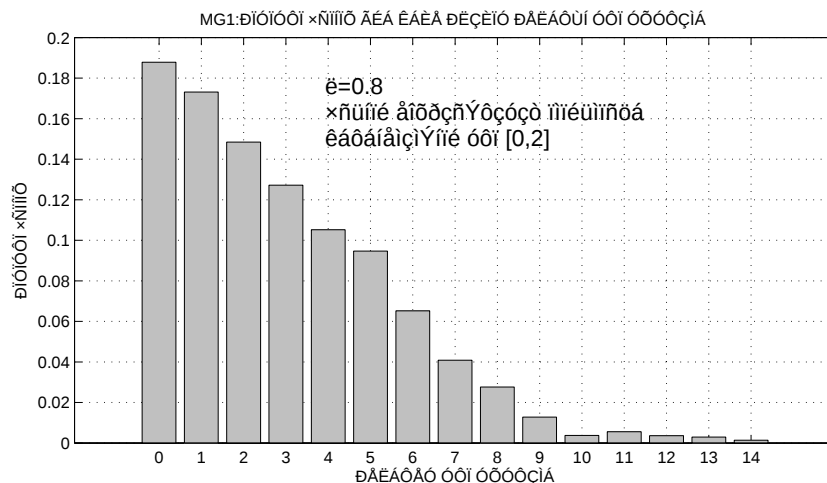
(B) Σχέση μεταξύ p_n και p
(για διάφορες τιμές του n)

Στα τρία παρακάτω ραβδογράμματα παρατηρούμε ότι, όταν:

- (i) η τάση συνωστισμού p είναι 0,5 η πιθανότητα το πλήθος των πελατών να είναι 0 είναι περίπου 0,48 , για πλήθος 1 γίνεται 0,30, για πλήθος 2 είναι 0,14 κ.λ.π. ενώ
- (ii) όταν το p αυξηθεί σε 0,6 οι πιθανότητες είναι για πλήθος 0 περίπου 0,37 , για πλήθος 1 γίνεται 0,25 , για πλήθος 2 γίνεται 0,14 κ.λ.π. και τέλος
- (iii) όταν το p γίνει 0,8 οι πιθανότητες είναι για πλήθος 0 περίπου 0,19 , για πλήθος 1 γίνεται 0,17 , για πλήθος 2 γίνεται 0,15 κ.λ.π.

Μ' άλλα λόγια, όταν το p είναι μικρό τότε είναι μεγάλες οι πιθανότητες να βρούμε μικρό αριθμό πελατών στο σύστημα, ενώ όταν το p είναι μεγάλο (πιο κοντά στο 1), τότε μεγαλώνουν οι πιθανότητες να βρούμε μεγάλο αριθμό πελατών στο σύστημα. .



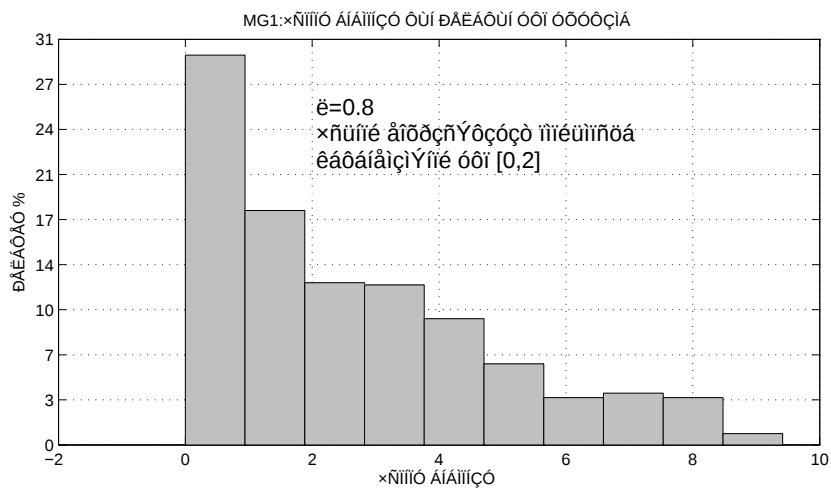
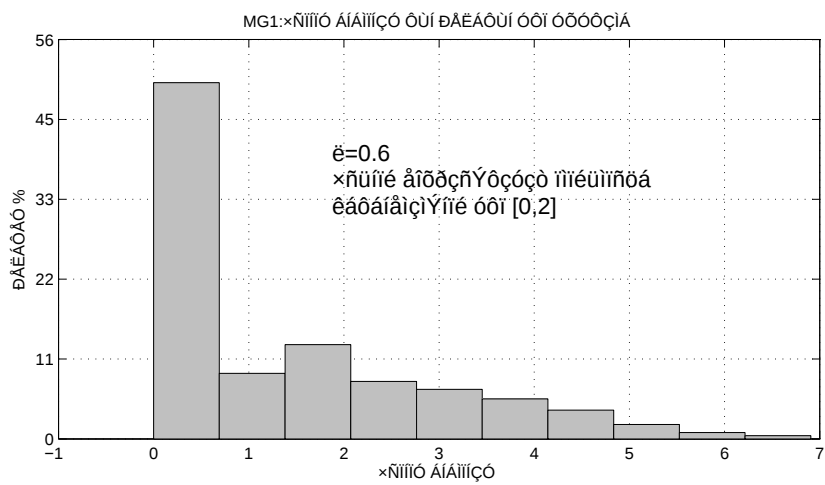
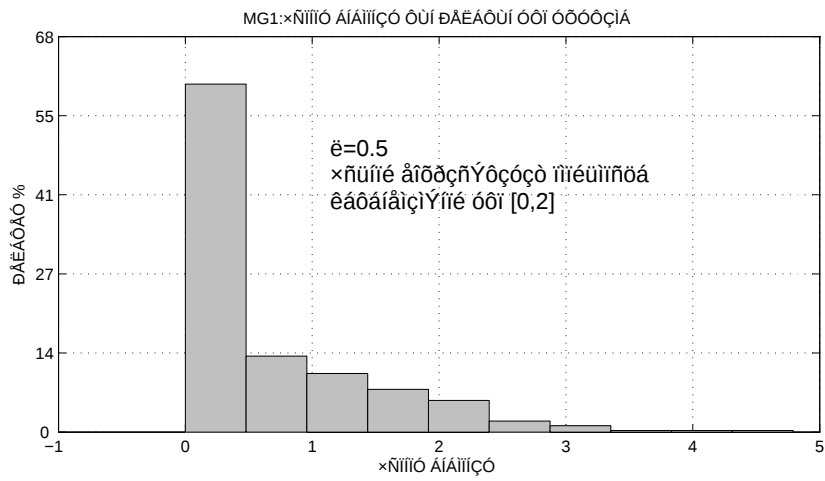


(Γ) Σχέση χρόνου παραμονής πελατών στο σύστημα και τάσης συνωστισμού.

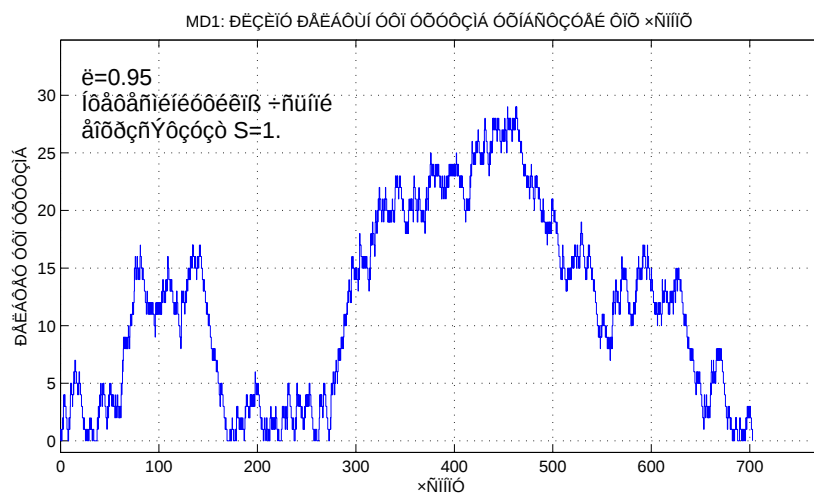
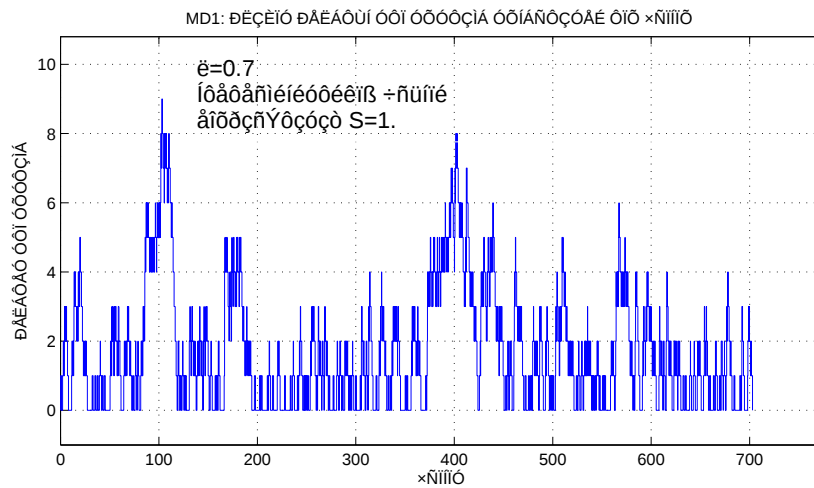
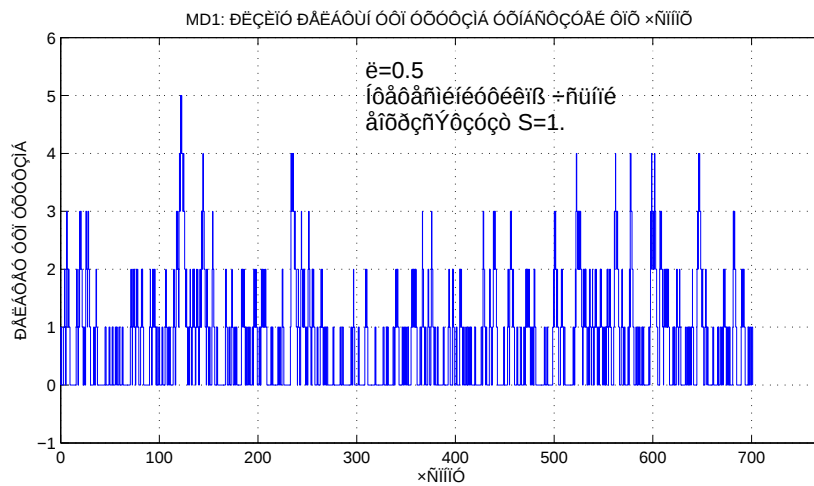
Στα τρία παρακάτω ιστογράμματα (τα οποία είναι δυνατές πραγματοποιήσεις ενός συστήματος ουράς M/G/1, αναφορικά με τον χρόνο παραμονής πελατών στο σύστημα αυτό όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο διάστημα [0,2]) παρατηρούμε ότι:

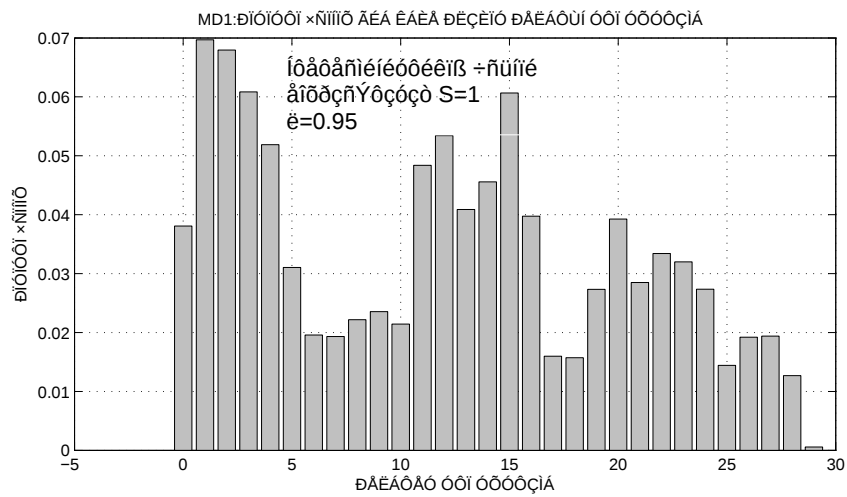
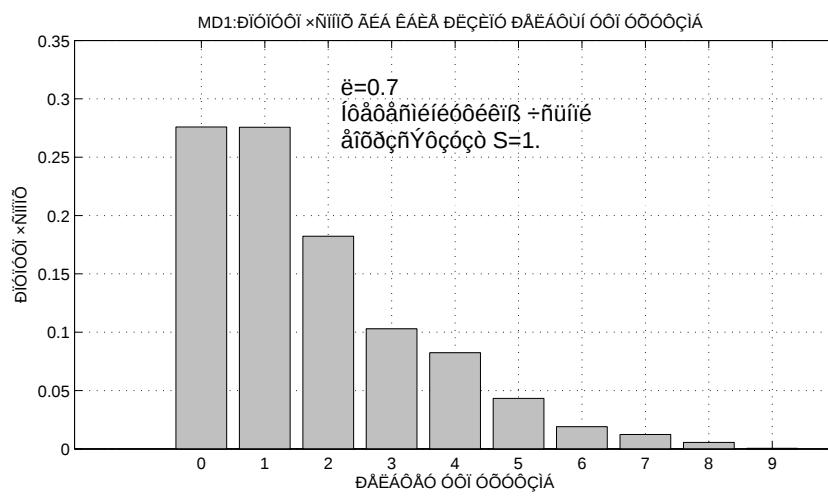
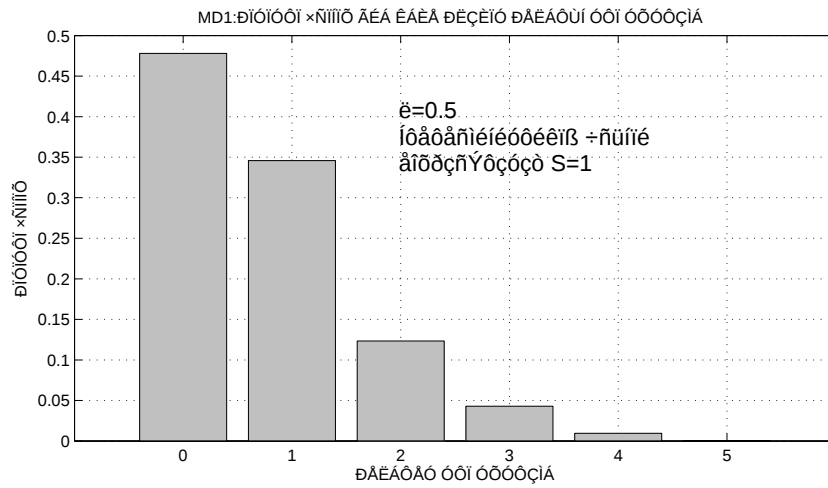
- (i) όταν η τάση συνωστισμού ρ είναι 0,5 η πιθανότητα να έχει ένας πελάτης μικρό χρόνο παραμονής είναι αρκετά μεγάλη ενώ
- (ii) καθώς το ρ αυξάνεται σε 0,6 ή σε 0,8 η πιθανότητα αυτή ελαττώνεται και αντίστοιχα μεγαλώνει η πιθανότητα να έχει αυξημένο χρόνο αναμονής

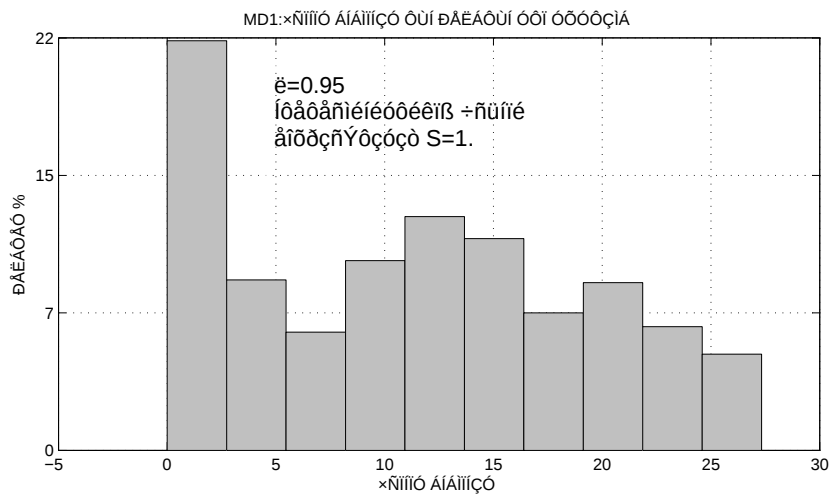
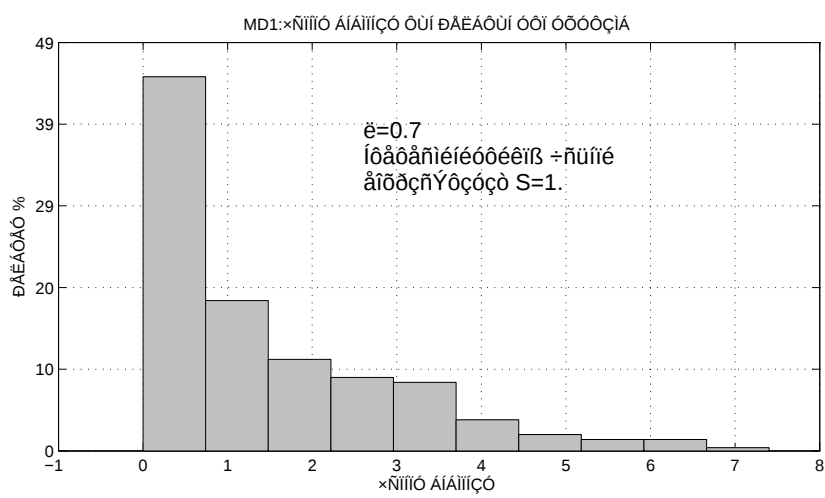
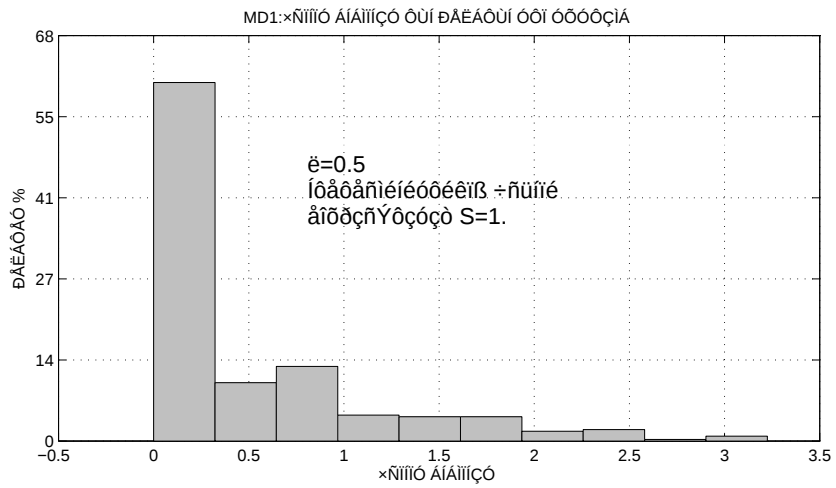
δηλαδή, όσο αυξάνει η τάση συνωστισμού ρ και τείνει προς το 1, τόσο είναι πιο πιθανό να παραμείνει κανείς στο σύστημα για περισσότερο χρόνο (γεγονός που διαισθητικά είναι φανερό).



Οι ίδιες παρατηρήσεις, με τις παραπάνω, ισχύουν και για τις παρακάτω τριάδες διαγραμμάτων. Εδώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι πάντα 1 (κανονικοί).







8.9 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ M/G/1

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Στο υποκατάστημα του Ταχυδρομείου Χανίων ένας υπάλληλος εξυπηρετεί τους πελάτες (σύμφωνα με την σειρά άφιξής τους), οι οποίοι φθάνουν σε αυτό σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό 5 πελάτες ανά ώρα. Παρακολουθώντας την εξυπηρέτηση, δεν έγινε δυνατό να προσδιοριστεί η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης, όμως υπολογίστηκαν η μέση τιμή και η τυπική απόκλισή τους που είναι 10 λεπτά και 4 λεπτά αντίστοιχα. Μακροπρόθεσμα, ποιος είναι ο αριθμός των πελατών στο υποκατάστημα;

ΛΥΣΗ

Είναι

$$\lambda = \frac{1}{12} \text{ πελ} / \text{min}, EB = 10 \text{ min}, \mu = \frac{1}{10} \text{ πελ} / \text{min}, \rho = \frac{10}{12} = \frac{5}{6},$$

$$\sigma = 10 \text{ min} \Rightarrow \sigma^2 = 100 (\text{min})^2$$

Οπότε:

$$EL = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)} = \frac{5}{6} + \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot 100}{2\left(1 - \frac{5}{6}\right)} = 5 \text{ πελάτες στο σύστημα.}$$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δυο εργαζόμενοι ανταγωνίζονται για πρόσληψη σε μια δουλειά. Ο Α εργαζόμενος ισχυρίζεται ότι εξυπηρετεί ταχύτερα από τον Β, ενώ ο Β επιμένει ότι είναι πιο συνεπής στην δουλειά του αν και όχι τόσο ταχύς. Όταν δουλεύει ο Α οι πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό 2 πελάτες ανά ώρα τους οποίους ο Α εξυπηρετεί σε 24 κατά μέσον όρο λεπτά ανά πελάτη με μια τυπική απόκλιση (στο χρόνο εξυπηρέτησης) 20 λεπτών. Όταν δουλεύει ο Β οι πελάτες καταφθάνουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αλλά ο Β τους εξυπηρετεί σε 25 κατά μέσον όρο λεπτά ανά πελάτη με μια τυπική απόκλιση (στο χρόνο εξυπηρέτησης) μόνο 2 λεπτών. Αν το κριτήριο για την πρόσληψη του ενός από τους δυο είναι το μέσο μήκος της ουράς που δημιουργεί ο καθένας, ποιος από τους δυο θα προσληφθεί;

ΛΥΣΗ

Για τον Α εργαζόμενο έχουμε :

$$\lambda = \frac{1}{30} \text{ πελ} / \text{min}, \mu = \frac{1}{24} \text{ πελ} / \text{min}, \rho = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}, \sigma = 20 \text{ min} \Rightarrow \sigma^2 = 400 (\text{min})^2$$

Οπότε:

$$EL_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{30}\right)^2 \cdot 400}{2\left(1 - \frac{4}{5}\right)} \cong 2,711 \text{ πελάτες στην ουρά.}$$

Για τον Β εργαζόμενο έχουμε:

$$\lambda = \frac{1}{30} \text{ πελ / min}, \mu = \frac{1}{25} \text{ πελ / min}, \rho = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}, \sigma = 2 \text{ min} \Rightarrow \sigma^2 = 4 (\text{min})^2$$

Οπότε:

$$EL_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{30}\right)^2 4}{2\left(1 - \frac{5}{6}\right)} \cong 2,097 \text{ πελάτες στην ουρά.}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο θα προσληφθεί ο εργαζόμενος Β .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Θεωρούμε ένα M/G/1 σύστημα με $\lambda=10$ αφίξεις / ώρα και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης 5 λεπτά και τυπική απόκλιση (των χρόνων εξυπηρέτησης) σ . Το σύστημα μεταβάλλεται αυξάνοντας τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης κατά 10% και ταυτόχρονα μειώνοντας την τυπική απόκλιση κατά 10% . Να ορίσετε την επίπτωση που θα έχει αυτή η μεταβολή στο σύστημα συγκρίνοντας τον μέσο χρόνο παραμονής του πελάτη σε αυτό, πριν και μετά την μεταβολή.

ΛΥΣΗ

Πριν την μεταβολή έχουμε :

$$\lambda = \frac{1}{6} \text{ πελ / min}, EB = 5 \text{ min}, \mu = \frac{1}{5} \text{ πελ / min}, \rho = \frac{5}{6},$$

Οπότε:

$$EW = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2\lambda(1-\rho)} = 5 + \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \sigma^2}{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right)} = (17,5 + 0,50\sigma^2) \text{ min}.$$

Μετά την μεταβολή έχουμε :

$$\lambda = \frac{1}{6} \text{ πελ / min}, EB = 5,5 \text{ min}, \mu = \frac{1}{5,5} \text{ πελ / min}, \rho = \frac{5,5}{6}, \sigma_1 = 0,9\sigma$$

Οπότε:

$$EW = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2\lambda(1-\rho)} = 5,5 + \frac{\left(\frac{5,5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 0,81\sigma^2}{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{5,5}{6}\right)} = (35,75 + 0,81\sigma^2) \text{ min}$$

που σημαίνει ότι μετά την μεταβολή ο πελάτης παραμένει περισσότερο χρόνο στο σύστημα .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Σε ένα ταχυδρομικό γραφείο πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό 30 πελάτες ανά ώρα. Το ένα τέταρτο των πελατών θέλουν να εξαργυρώσουν μια επιταγή. Οι χρόνοι εξυπηρέτησής τους είναι εκθετικά κατανομημένοι με μέσο 2 λεπτά. Οι υπόλοιποι πελάτες θέλουν να αγοράσουν γραμματόσημα και οι χρόνοι εξυπηρέτησής τους είναι επίσης εκθετικά κατανομημένοι με μέσο 1 λεπτό. Στο ταχυδρομικό γραφείο υπάρχει μόνο ένας υπάλληλος.

- (α) Να υπολογίσετε την γεννήτρια συνάρτηση $P_L(z)$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα.
- (β) Να υπολογίσετε την κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα.
- (γ) Να υπολογίσετε το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα.
- (δ) Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $\tilde{S}(s)$ του χρόνου παραμονής στο σύστημα.
- (ε) Να υπολογίσετε τον μέσο χρόνο παραμονής στο σύστημα.
- (στ) Να υπολογίσετε την μέση διάρκεια της περιόδου απασχόλησης.
- (ζ) Να υπολογίσετε το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα και τον μέσο χρόνο παραμονής στην περίπτωση που όλοι οι πελάτες έχουν χρόνους εξυπηρέτησης εκθετικά κατανομημένους με μέσο 75 δευτερόλεπτα.

ΛΥΣΗ

Είναι $\lambda = \frac{1}{2}$ πελ./min, $EB_1 = 2$ min, $EB_2 = 1$ min άρα $EB = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4}$ min

Επομένως: $\mu = \frac{4}{5}$ πελ./min και $\rho = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{8}$.

(Αν η τ.μ. Z είναι με πιθανότητα q ίση με την τ.μ. X και με πιθανότητα $(1-q)$ ίση με την τ.μ. Y τότε $\tilde{Z}(s) = q\tilde{X}(s) + (1-q)\tilde{Y}(s)$).

Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes του συνδυασμού των χρόνων εξυπηρέτησης είναι:

$$\tilde{B}(s) = p_1\tilde{B}_1(s) + p_2\tilde{B}_2(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_2 + s} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 + s}$$

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad P_L(z) &= \frac{(1-\rho)(1-z)\tilde{B}(\lambda z)}{-z + \tilde{B}(\lambda z)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{15-7z}{(3-2z)(5-2z)} = \frac{\frac{9}{32}}{1-\frac{2}{3}z} + \frac{\frac{3}{32}}{1-\frac{2}{5}z} = \\ &= \frac{27}{32} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-(1-\frac{1}{3})z} + \frac{5}{32} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1-(1-\frac{3}{5})z} \end{aligned}$$

Η γεωμετρική (2) τ.μ. Y με παράμετρο r , με $0 < r < 1$ και π.π.:

$$P\{Y=k\} = r(1-r)^k, \quad k=0,1,2,\dots$$

έχει γεννήτρια συνάρτηση:

$$P_Y(z) = \frac{r}{1-(1-r)z}$$

άρα η παραπάνω γεννήτρια είναι συνδυασμός μιας γεωμετρικής (2) με παράμετρο $1/3$ και πιθανότητα $27/32$ και μιας γεωμετρικής (2) με παράμετρο $3/5$ και πιθανότητα $5/32$.

(β) Η κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι:

$$p_n = p_1 r_1 (1-r_1)^n + p_2 r_2 (1-r_2)^n = \frac{27}{32} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{32} \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{9}{32} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{32} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

για $n=0,1,2,\dots$

(γ) $EL = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \frac{43}{24}$ πελάτες στο σύστημα

$$\begin{aligned} (\delta) \quad \tilde{S}(s) &= \frac{(1-\rho)s\tilde{B}(s)}{s-\lambda+\lambda\tilde{B}(s)} = \frac{(1-\frac{5}{8})s \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1+s} \right)}{s - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1+s} \right)} = \frac{3}{4} \frac{4+7s}{(4s+1)(4s+3)} = \\ &= \frac{27}{32} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+s} + \frac{5}{32} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+s}, \end{aligned}$$

η εκθετική τ.μ. X με παράμετρο λ , έχει μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes

$\tilde{X}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$, οπότε η κατανομή της S είναι συνδυασμός δυο εκθετικών με

$\lambda_1 = \frac{1}{4}$ και $p_1 = \frac{27}{32}$ η πρώτη και με $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ και $p_2 = \frac{5}{32}$ η δεύτερη.

(ε) Οι μέσες τιμές των παραπάνω εκθετικών είναι: $\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1} = 4$ και $\mu_2 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{4}{3}$

οπότε:

$$ES = p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 = \frac{27}{32} \cdot 4 + \frac{5}{32} \cdot \frac{4}{3} = \frac{43}{12} \text{ min.}$$

(στ) Είναι: $E(BP) = \frac{E(B)}{1-\lambda EB} = \frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{5}{8}} = \frac{10}{3} \text{ min}$

(ζ) Σε αυτή την περίπτωση έχουμε M/M/1 σύστημα οπότε:

$$EB = 75 \text{ sec} = \frac{5}{4} \text{ min} , \mu = \frac{4}{5} \text{ πελ/min} , \rho = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{8} \text{ και}$$

$$EL = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{5}{3} \text{ πελ.} , ES = \frac{EL}{\lambda} = \frac{10}{3} \text{ min.}$$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Θεωρούμε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από ένα μηχάνημα επισκευής και συντήρησης κινητήρων. Στο σύστημα καταφθάνουν κινητήρες σύμφωνα με μια Poisson ροή με ρυθμό 10 κινητήρες ανά ώρα. Ο χρόνος για την επισκευή και συντήρηση του κάθε κινητήρα αποτελείται από δυο φάσεις. Ο χρόνος για κάθε φάση ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο 1 λεπτό.

(α) Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes του χρόνου επισκευής και συντήρησης των κινητήρων.

(β) Να υπολογίσετε την κατανομή του αριθμού των κινητήρων στο σύστημα.

(γ) Να υπολογίσετε το μέσο πλήθος κινητήρων στο σύστημα και το μέσο χρόνο παραμονής του κινητήρα στο σύστημα.

ΛΥΣΗ

Είναι $\lambda = 10 \text{ κιν./h} = \frac{1}{6} \text{ κιν./min}$, $EB = EB_1 + EB_2 = 2 \text{ min}$ αρα $\mu = \frac{1}{EB} = \frac{1}{2} \text{ κιν/min}$.

$$\text{Επομένως: } \rho = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

(α) Η κατανομή Erlang-k είναι άθροισμα από εκθετικές με ίδια παράμετρο και ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της Erlang-k είναι $\tilde{B}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^k$.

$$\text{Αρα: } \tilde{B}(s) = \left(\frac{1}{1+s} \right)^2.$$

$$(\beta) \tilde{B}(\lambda - \lambda z) = \tilde{B}\left(\frac{1-z}{6}\right) = \left(\frac{6}{7-z}\right)^2 \text{ και:}$$

$$\begin{aligned} P_L(z) &= \frac{(1-\rho)(1-z)\tilde{B}(\lambda-\lambda z)}{-z + \tilde{B}(\lambda-\lambda z)} = \frac{2 \left(\frac{6}{7-z}\right)^2 (1-z)}{3 \left(\frac{6}{7-z}\right)^2 - z} = \frac{-\frac{24}{5}}{z-4} + \frac{\frac{24}{5}}{z-9} = \\ &= \frac{8}{5} \frac{\frac{3}{4}}{1 - \left(1 - \frac{3}{4}\right)z} + \left(-\frac{3}{5}\right) \frac{\frac{8}{9}}{1 - \left(1 - \frac{8}{9}\right)z} \end{aligned}$$

η οποία είναι συνδυασμός μιας γεωμετρικής(2) με παράμετρο $3/4$ και μιας γεωμετρικής(2) με παράμετρο $8/9$, οπότε:

$$p_n = \frac{8}{5} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(-\frac{3}{5}\right) \frac{8}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(-\frac{8}{15}\right) \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

για $n=0,1,2,\dots$

$$(γ) \quad EL = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \frac{11}{24} \text{ κινητήρες στο σύστημα.}$$

Ακόμα:

$$\tilde{S}(s) = \frac{(1-\rho)s\tilde{B}(s)}{s-\lambda+\lambda\tilde{B}(s)} = \frac{(1-\frac{1}{3})s\left(\frac{1}{1+s}\right)^2}{s-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1+s}\right)^2} = \frac{8}{5} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+s} + \left(-\frac{3}{5}\right) \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+s},$$

επομένως η κατανομή της S είναι συνδυασμός δυο εκθετικών με παραμέτρους

$$\frac{1}{2} \text{ και } \frac{4}{3} \text{ και αντίστοιχες μέσες τιμές } 2 \text{ και } \frac{3}{4}.$$

Άρα:

$$ES = \frac{8}{5} 2 + \left(-\frac{3}{5}\right) \frac{3}{4} = \frac{11}{4} \text{ min.}$$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Σε ένα ταχυδρομικό γραφείο με έναν υπάλληλο πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό 60 πελάτες ανά ώρα. Οι μισοί από τους πελάτες έχουν χρόνο εξυπηρέτησης ο οποίος είναι άθροισμα ενός σταθερού χρόνου 15 sec και ενός εκθετικά κατανομημένου χρόνου με μέσο 15 sec. Οι υπόλοιποι μισοί πελάτες έχουν χρόνο εξυπηρέτησης εκθετικά κατανομημένο με μέσο 1 min. Να υπολογίσετε τον μέσο χρόνο αναμονής και το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά.

ΛΥΣΗ

Είναι $\lambda=1$ πελ./min. Έστω μια εκθετική τ.μ. X με παράμετρο 4, οπότε $EX=1/4$ και μια εκθετική τ.μ. Y με παράμετρο 1 οπότε $EY=1$. Τότε:

$$EB = \frac{1}{2} \left[E\left(\frac{1}{4}\right) + EX \right] + \frac{1}{2} EY = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} 1 = \frac{3}{4} \text{ min}$$

άρα

$$\mu = \frac{1}{EB} = \frac{4}{3} \text{ και } \rho = \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Είναι $\sigma_Y^2 = E(Y^2) - (EY)^2 \Rightarrow E(Y^2) = 2$. Ανάλογα $E(X^2) = \frac{1}{8}$, άρα:

$$E(B^2) = \frac{1}{2} E\left(\left(\frac{1}{4} + X\right)^2\right) + \frac{1}{2} E(Y^2) = \frac{1}{2} E\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2} X + X^2\right) + \frac{1}{2} E(Y^2) = \frac{37}{32} \text{ min}$$

Οπότε:

$$ER = \frac{E(B^2)}{2EB} = \frac{37}{48} \text{ και } EW = \frac{\rho ER}{1-\rho} = \frac{37}{16} \text{ min.}$$

Τέλος το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά είναι:

$$EL_q = \lambda EW = \frac{37}{16} \text{ πελάτες}$$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7

Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής το οποίο αποτελείται από ένα μηχάνημα που εκτελεί μια συγκεκριμένη εργασία. Στο μηχάνημα φθάνουν εργασίες για εκτέλεση με ρυθμό 10 εργασίες ανά ώρα. Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι αφίξεων χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή. Ο μέσος χρόνος εκτέλεσης από το μηχάνημα μιας εργασίας είναι 4 min με τυπική απόκλιση 3 min. Υπολογίστε το μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά των εργασιών.

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για ένα M/G/1 σύστημα με $EB=4 \text{ min}$ άρα $\mu=1/4 \text{ εργ./min}$, $\sigma_B=3 \text{ min}$ και $\lambda=1/6 \text{ εργ./min}$. Είναι:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}, \quad \sigma_B^2 = E(B^2) - (EB)^2 \Rightarrow E(B^2) = 25.$$

$$\text{Οπότε: } ER = \frac{E(B^2)}{2EB} = \frac{25}{8} \text{ και } EW = \frac{\rho ER}{1-\rho} = \frac{25}{4} \text{ min.}$$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8

Σε μια αυτοματοποιημένη γαλακτοπαραγωγική μονάδα, ένα ρομπότ αρμέγει τις αγελάδες. Οι αγελάδες προσέρχονται στο ρομπότ μέσω ενός τεχνάσματος. Όταν μια αγελάδα φθάσει στο ρομπότ, αυτό αρχικά ανιχνεύει κατά πόσο πρέπει να αρμέξει ή όχι την αγελάδα. Αν πρέπει την αρμέγει, διαφορετικά την αφήνει να φύγει. Η επίσκεψη της αγελάδας στο ρομπότ συνοδευόμενη με άρμεγμα διαρκεί χρόνο εκθετικά κατανομημένο με μέσο 6 min, ενώ χωρίς άρμεγμα διαρκεί χρόνο επίσης εκθετικά κατανομημένο με μέσο όμως 3 min. Οι αγελάδες φθάνουν στο ρομπότ σύμφωνα με μια Poisson ανέλιξη με ρυθμό 10 αγελάδες ανά ώρα και το ένα τέταρτο από αυτές αρμέγονται.

(α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes του χρόνου εξυπηρέτησης (σε min) μιας τυχαίας αγελάδας από το ρομπότ είναι:

$$\tilde{B}(s) = \frac{1}{4} \frac{4+21s}{(1+6s)(1+3s)}$$

- (β) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes του χρόνου αναμονής (σε min) μιας τυχαίας αγγελιάδας για να μπει στο ρομπότ είναι:

$$\tilde{W}(s) = \frac{3}{8} + \frac{9}{16} \frac{1}{1+12s} + \frac{1}{16} \frac{1}{1+4s}$$

- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα να είναι ο χρόνος αναμονής μιας τυχαίας αγγελιάδας για να μπει στο ρομπότ, το πολύ 3 min.

- (δ) Υπολογίστε το μέσο χρόνο αναμονής για να μπει μια αγγελιάδα στο ρομπότ.

ΛΥΣΗ

- (α) Είναι:

$$\lambda = \frac{1}{6} \text{ αγγελ./min}, EB_1 = 6 \text{ min με } p_1 = \frac{1}{4} \text{ και } EB_2 = 3 \text{ min με } p_2 = \frac{3}{4} \text{ αρα}$$

$$EB = \frac{1}{4} 6 + \frac{3}{4} 3 = \frac{15}{4} \text{ min}, \mu = \frac{4}{15} \text{ και } \rho = \frac{5}{8}.$$

Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν υπερεκθετική κατανομή (σύμφωνα με τον ορισμό της υπερεκθετικής), άρα:

$$\tilde{B}(s) = \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + s} + \frac{3}{4} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + s} = \frac{1}{4} \frac{4+21s}{(1+6s)(1+3s)}.$$

- (β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{W}(s) &= \frac{(1-\rho)s}{\lambda \tilde{B}(s) + s - \lambda} = \frac{3}{8} \frac{s}{\frac{1}{6} \frac{1}{4} \frac{4+21s}{(1+6s)(1+3s)} + s - \frac{1}{6}} = \frac{(1+6s)(1+3s)}{(1+4s)(1+12s)} = \\ &= A + \frac{B}{1+12s} + \frac{\Gamma}{1+4s} = \frac{6}{16} + \frac{9}{16} \frac{1}{1+12s} + \frac{1}{16} \frac{1}{1+4s} \end{aligned}$$

$$(\text{όπου } p_1 + p_2 + p_3 = \frac{6}{16} + \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = 1)$$

- (γ) Από τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes που βρήκαμε στο (β), έχουμε ότι η συνάρτηση κατανομής του χρόνου αναμονής είναι:

$$F_w(t) = \frac{6}{16} + \frac{9}{16} \left(1 - e^{-\frac{1}{12}t} \right) + \frac{1}{16} \left(1 - e^{-\frac{1}{4}t} \right)$$

Οπότε:

$$P(W \leq 3) = F_w(3) \approx 0,53$$

- (δ) $EW = \frac{9}{16} 12 + \frac{1}{16} 4 = 7 \text{ min}$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9

Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής το οποίο αποτελείται από ένα μηχάνημα που επεξεργάζεται εξαρτήματα, το ένα μετά το άλλο. Αυτά τα εξαρτήματα φθάνουν στο μηχάνημα με ρυθμό 1 ανά ώρα. Κάθε εξάρτημα υποβάλλεται σε δυο επεξεργασίες. Ο χρόνος για την πρώτη ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο 15 min. Η δεύτερη επεξεργασία ξεκινάει αμέσως με το πέρας της πρώτης και ο χρόνος της ακολουθεί επίσης εκθετική κατανομή με μέσο 20 min.

(α) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes του χρόνου παραμονής (σε ώρες) στο σύστημα ενός εξαρτήματος είναι:

$$\tilde{S}(s) = \frac{5}{4} \frac{1}{1+s} - \frac{1}{4} \frac{5}{5+s}.$$

- (β) Να υπολογίσετε την κατανομή και την μέση τιμή του χρόνου παραμονής ενός εξαρτήματος στο σύστημα .
- (γ) Κάποιος χρησιμοποιεί ως μέτρο για τον χρόνο παραμονής εξαρτήματος στο σύστημα τις 3 ώρες. Όταν ένα εξάρτημα παραμείνει περισσότερο από τις 3 ώρες το κόστος υπέρβασης είναι 100 ευρώ. Να υπολογίσετε το μέσο κόστος υπέρβασης ανά ώρα.

ΛΥΣΗ

(α) Πρόκειται για ένα M/G/1 σύστημα με $\lambda=1$ εξαρτ./ώρα και:

$$EB_1 = 15 \text{ min} = \frac{1}{4} \text{ h} \Rightarrow \mu_1 = 4 \text{ εξαρτ./h και } EB_2 = 20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h} \Rightarrow \mu_2 = 3 \text{ εξαρτ./h}$$

$$\text{Άρα } EB = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} \text{ h} \Rightarrow \mu = \frac{12}{7} \text{ και } \rho = \frac{1}{12} = \frac{7}{12}.$$

Επειδή η τ.μ. B είναι άθροισμα των ανεξάρτητων τ.μ. B_1 και B_2 έχουμε:

$$\tilde{B}(s) = \tilde{B}_1(s) \tilde{B}_2(s) \Rightarrow \tilde{B}(s) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} \frac{\mu_2}{\mu_2 + s} = \frac{4}{4+s} \frac{3}{3+s}$$

επομένως

$$\tilde{S}(s) = \frac{(1-\rho)s\tilde{B}(s)}{s-\lambda+\lambda\tilde{B}(s)} = \frac{5}{4} \frac{1}{1+s} - \frac{1}{4} \frac{5}{5+s}$$

που είναι συνδυασμός δυο εκθετικών με $\lambda_1=1$, άρα μέση τιμή 1 και $\lambda_2=5$ άρα μέση τιμή $\frac{1}{5}$.

(β) Η σ.κ. της S είναι $F_S(t) = \frac{5}{4}(1-e^{-t}) - \frac{1}{4}(1-e^{-5t})$ και η μέση τιμή της S είναι:

$$ES = \frac{5}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{5} \text{ h}$$

(γ) Το μέσο κόστος υπέρβασης ανά ώρα είναι:

$$\lambda(1-F_S(3))100 = \left(\frac{5}{4}e^{-3} - \frac{1}{4}e^{-15} \right) 100 \approx 6,22 \text{ ευρώ}.$$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 10

Σε μια βιοτεχνία που κατασκευάζει μικροαντικείμενα, στο τμήμα παραγγελιών, φθάνουν παραγγελίες σύμφωνα με μια Poisson ανέλιξη με ρυθμό 6 παραγγελίες ανά ώρα. Στο τμήμα απασχολείται ένας μοναδικός υπάλληλος ο οποίος είναι επιφορτισμένος να συλλέγει και να προωθεί στο τμήμα παραγωγής τις παραγγελίες μια-μια. Μια παραγγελία είναι μια λίστα με ποσότητες από μικροαντικείμενα που θέλει ο πελάτης. Για το ένα τέταρτο των παραγγελιών, ο χρόνος εξυπηρέτησής τους από το τμήμα παραγγελιών είναι εκθετικά κατανομημένος με μέσο 10 λεπτά, ενώ για τις υπόλοιπες ο αντίστοιχος χρόνος είναι επίσης εκθετικά κατανομημένος αλλά με μέσο 5 λεπτά.

- (α) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes του χρόνου εξυπηρέτησης (σε min) από το τμήμα παραγγελιών, μιας τυχαίας παραγγελίας είναι:

$$\tilde{B}(s) = \frac{1}{4} \frac{4+35s}{(1+10s)(1+5s)}$$

- (β) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes του χρόνου παραμονής (αναμονή συν εξυπηρέτηση) στο τμήμα παραγγελιών μιας τυχαίας παραγγελίας είναι:

$$\tilde{S}(s) = \frac{5}{32} \frac{3}{3+20s} + \frac{27}{32} \frac{1}{1+20s}$$

- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα να είναι ο χρόνος παραμονής μιας τυχαίας παραγγελίας στο τμήμα παραγγελιών, μεγαλύτερος από μισή ώρα.
(δ) Υπολογίστε το μέσο χρόνο παραμονής, στο τμήμα παραγγελιών, μιας παραγγελίας.

ΛΥΣΗ

Είναι

$$\lambda = \frac{1}{10} \text{ παραγγελ./min}, \quad p_1 = \frac{1}{4}, \quad EB_1 = 10 \text{ min} \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{10} \text{ και}$$

$$p_2 = \frac{3}{4}, \quad EB_2 = 5 \text{ min} \Rightarrow \mu_2 = \frac{1}{5} \text{ αρα}$$

$$EB = \frac{1}{4}10 + \frac{3}{4}5 = \frac{25}{4} \text{ min}, \quad \mu = \frac{4}{25} \text{ παρ/min και } \rho = \frac{6}{4} = \frac{75}{25}$$

- (α) Έχουμε:

$$\tilde{B}(s) = \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + s} + \frac{3}{4} \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + s} = \frac{1}{4} \frac{4+35s}{(1+5s)(1+10s)}.$$

- (β) Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes του χρόνου παραμονής στο τμήμα παραγγελιών μιας τυχαίας παραγγελίας είναι:

$$\begin{aligned}\tilde{S}(s) &= \frac{(1-\rho)s\tilde{B}(s)}{s-\lambda+\lambda\tilde{B}(s)} = \frac{\frac{3}{8}s \frac{1}{4} \frac{4+35s}{(1+10s)(1+5s)}}{\frac{1}{10} \frac{1}{4} \frac{4+35s}{(1+10s)(1+5s)} + s - \frac{1}{10}} = \\ &= \frac{\frac{3}{32} \frac{1}{\frac{3}{20} + s}}{\frac{1}{32} \frac{1}{\frac{1}{20} + s}} =\end{aligned}$$

που είναι συνδυασμός δυο εκθετικών με $\lambda_1 = \frac{3}{20}$ και $\lambda_2 = \frac{1}{20}$.

(γ) Από τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes που βρήκαμε στο (α), συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της S είναι:

$$F_s(t) = \frac{5}{32} \left(1 - e^{-\frac{3}{20}t} \right) + \frac{27}{32} \left(1 - e^{-\frac{1}{20}t} \right) = P(S \leq t)$$

Οπότε

$$P(S > 30) = 1 - P(S \leq 30) = 1 - F_s(30) \approx 0,19.$$

(δ) Ο μέσος χρόνο παραμονής μιας παραγγελίας, στο τμήμα παραγγελιών, είναι:

$$ES = \frac{5}{32} \frac{20}{3} + \frac{27}{32} 20 = \frac{215}{12} \approx 17,9 \text{ min}.$$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 11 (M/E_k/1)

Ασθενείς φθάνουν σε ένα φυσικοθεραπευτήριο σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson, με ρυθμό ένας ανά ώρα. Η φυσικοθεραπεία αποτελείται από τρία ξεχωριστά διαδοχικά στάδια, ανεξάρτητα και εκθετικά κατανεμημένα με μέσο χρόνο εξυπηρέτησης 15 λεπτά το καθένα. Ο κάθε ασθενής πρέπει να τελειώσει και με τα τρία στάδια πριν ο επόμενος εισέλθει για θεραπεία. Να υπολογίσετε το μέσο μήκος της ουράς που σχηματίζεται.

ΛΥΣΗ

Ακολουθώντας ο κάθε ασθενής αυτό το μοντέλο εξυπηρέτησης, η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης που προκύπτει είναι Erlang τάξης k=3. Είναι:

$$\lambda = \frac{1}{60} \text{ πελ / min}, \quad \mu = \frac{1}{45} \text{ πελ / min}, \quad \rho = \frac{3}{4}$$

και από την Erlang τάξης k=3:

$$EL_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2(1 + \sigma^2 \mu^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2 \left[1 + \frac{k}{\mu^2} \left(\frac{\mu}{k} \right)^2 \right]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2 \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{2(1-\rho)} =$$

$$= \frac{\rho^2(1+k)}{2k(1-\rho)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 (1+3)}{2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)} = \frac{3}{2} \text{ πελάτες στην ουρά.}$$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 12 (M/D/1)

Την τουριστική περίοδο αεροπλάνα προσγειώνονται στον μοναδικό διάδρομο του αεροδρομίου Χανίων ακολουθώντας κατανομή Poisson με ρυθμό 15 ανά ώρα. Η διαδικασία προσγείωσης για κάθε αεροπλάνο διαρκεί 120 δευτερόλεπτα. Να υπολογίσετε EL_q , EW , EL και ES .

ΛΥΣΗ

$$\text{Είναι } \lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ αεροπλ./min, } EB = 2 \text{ min, } \mu = \frac{1}{2} \text{ αεροπλ./min, } \rho = \frac{1}{2}$$

Οπότε:

$$EL_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 0}{2\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \text{ αεροπλάνα}$$

Ακόμα:

$$EW = \frac{\rho EB(1+c_B^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1+0)}{2\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 1 \text{ min}$$

Επίσης:

$$EL = \rho + EL_q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ αεροπλάνα}$$

Τέλος:

$$ES = EB + EW = 2 + 1 = 3 \text{ min}$$

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: G/M/1 ΟΥΡΑ

9.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην G/M/1 ουρά, οι πελάτες:

- ❖ φθάνουν ένας-ένας στο σύστημα, με ενδιαμέσους χρόνους αφίξεων $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι και ταυτοτικά κατανομημένοι, η δε κοινή τους κατανομή έχει μια τυχαία σ.κ. $F_A(.)$, π.π. $f_A(.)$ και μέσο $1/\lambda$.
- ❖ εξυπηρετούνται με πειθαρχία FIFO από έναν μοναδικό εξυπηρετητή.
- ❖ Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., η δε κοινή τους κατανομή είναι εκθετική με μέση τιμή $1/\mu$, και ακόμα είναι ανεξάρτητες από την διαδικασία αφίξεων.

Όπως και στα προηγούμενα και εδώ θεωρούμε ότι (γίνεται φανερό γιατί στην πρόταση 9.2.2, παρακάτω):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Η κατάσταση της G/M/1 ουράς μπορεί να περιγραφεί από το ζεύγος (n, x) όπου n είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα και x ο χρόνος που έχει περάσει από την τελευταία άφιξη πελάτη. Επομένως χρειαζόμαστε μια διδιάστατη περιγραφή της κατάστασης. Όμως, όπως και στην M/G/1 ουρά, αν παρατηρήσουμε το σύστημα σε επιλεγμένες στιγμές τα πράγματα θα απλοποιηθούν.

Συγκεκριμένα επιλέγουμε να παρατηρούμε το σύστημα τις στιγμές των αφίξεων, οπότε το $x=0$, άρα για την περιγραφή της κατάστασης του συστήματος αρκεί μόνο το n . Συμβολίζουμε με L_k^a τον αριθμό των πελατών στο σύστημα την στιγμή ακριβώς πριν την άφιξη του k -οστού πελάτη. Στην επόμενη παράγραφο θα υπολογίσουμε την οριακή κατανομή:

$$\alpha_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{L_k^a = n\}.$$

Από αυτήν την κατανομή μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή του χρόνου παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.

9.2 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΑΦΙΞΕΩΝ (arrival distribution)

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε την κατανομή του αριθμού των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα, την στιγμή ακριβώς πριν την άφιξη ενός πελάτη, όταν το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία (δηλαδή την κατανομή της L_k^a).

Αρχικά θα καθορίσουμε την σχέση ανάμεσα στις τ.μ. L_{k+1}^a και L_k^a . Ορίζουμε την τ.μ. D_{k+1} , ως τον αριθμό των πελατών οι οποίοι εξυπηρετήθηκαν στο χρονικό διάστημα ανάμεσα στις στιγμές των αφίξεων του k -οστού και $(k+1)$ -οστού πελάτη. Τότε είναι προφανής η σχέση:

$$L_{k+1}^a = L_k^a + 1 - D_{k+1}$$

γιατί, οι L_{k+1}^a πελάτες που βρίσκει ο $(k+1)$ -οστός πελάτης στο σύστημα, είναι όσοι βρήκε ο k -οστός (δηλ. L_k^a) συν ένας (που είναι ο k -οστός) μείον D_{k+1} , που είναι όσοι εξυπηρετήθηκαν και επομένως έφυγαν κατά το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις στιγμές των αφίξεων του k -οστού και $(k+1)$ -οστού πελάτη.

Απ' αυτήν την εξίσωση είναι φανερό, ότι η σ.α. $\{L_k^a\}_{k=0}^{\infty}$ είναι μια αλυσίδα Markov και επίσης, επειδή $D_{k+1} \geq 0$, έπεται ότι:

$$L_{k+1}^a \leq L_k^a + 1 \quad (9.1)$$

Πράγματι, εάν ορίσουμε σαν $\beta_n = P\{D_k = n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, τότε για $j > 0$:

$$P\{L_{k+1}^a = j / L_1^a, L_2^a, \dots, L_{k-1}^a, L_k^a = i\} = P\{L_{k+1}^a = L_k^a + 1 - D_{k+1} = j / L_1^a, L_2^a, \dots, L_{k-1}^a, L_k^a = i\} =$$

$$P\{D_{k+1} = i + 1 - j / L_1^a, L_2^a, \dots, L_{k-1}^a, L_k^a = i\} \stackrel{\text{ανεξαρτησία}}{=}$$

$$P\{D_{k+1} = i + 1 - j\} = \begin{cases} \beta_{i+1-j} & \text{εάν } i \geq j-1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ακόμα, εάν $j=0$:

$$P\{L_{k+1}^a = 0 / L_1^a, L_2^a, \dots, L_{k-1}^a, L_k^a = i\} = P\{D_{k+1} \geq i + 1\} = \sum_{k=i+1}^{\infty} \beta_i = p_{i,0}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι, και οι δύο παραπάνω πιθανότητες εξαρτώνται μόνον από το γεγονός $\{L_k^a = i\}$, που σημαίνει ότι η $\{L_k^a\}_{k=0}^{\infty}$ είναι μια A.M.

Αυτή η αλυσίδα Markov ονομάζεται **G/M/1 ενσωματωμένη αλυσίδα Markov**.

Τώρα θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες των μεταβάσεων ενός βήματος :

$$p_{i,j} = P\{L_{k+1}^a = j / L_k^a = i\}.$$

Λόγω της (9.1) είναι φανερό ότι $p_{i,j} = 0$ για όλα τα $j > i + 1$.

Για τα $j \leq i + 1$, η $p_{i,j}$ είναι η πιθανότητα ότι ακριβώς $(i + 1 - j)$ πελάτες εξυπηρετήθηκαν, στο χρονικό διάστημα ανάμεσα στις στιγμές των αφίξεων του k -οστού και $(k+1)$ -οστού πελάτη.

Επειδή συμβολίσαμε με β_i συμβολίσουμε την πιθανότητα να εξυπηρετήθηκαν i πελάτες κατά την διάρκεια ενός ενδιάμεσου χρόνου, με δεδομένο ότι ο εξυπηρετητής έμεινε απασχολημένος καθ' όλη την διάρκεια αυτού του χρόνου (πράγμα που σημαίνει ότι ήταν παρόντες παραπάνω από i πελάτες), ο πίνακας P των πιθανοτήτων μετάβασης έχει την μορφή

$$P = \begin{pmatrix} p_{0,0} & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_{1,0} & \beta_1 & \beta_0 & 0 & 0 & \dots \\ p_{2,0} & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & 0 & \dots \\ p_{3,0} & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

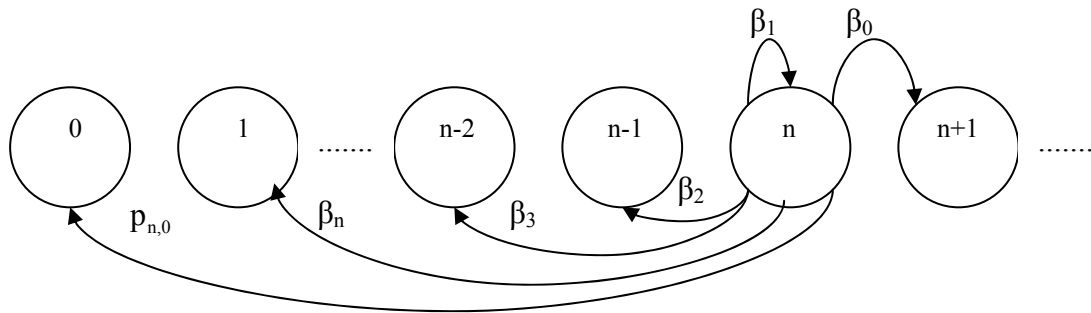
9.2.1 Παρατήρηση

Από τον πίνακα μετάβασης P , είναι φανερό ότι η αλυσίδα $\{L_k^\alpha\}_{k=0}^\infty$ είναι ανάγωγη (όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν) και μη-περιοδική (π.χ. επειδή, υποθέτουμε ότι, $p_{0,0} > 0$, έχουμε ότι $d(0)=1$, και επειδή η σ.α. $\{L_k^\alpha\}_{k=0}^\infty$ είναι ανάγωγη έπεται, λόγω της πρότασης 3.8.2, ότι όλες καταστάσεις της έχουν περίοδο 1, δηλαδή η αλυσίδα είναι μη-περιοδική).

Για να υπολογίσουμε τα β_i , σημειώνουμε ότι με δεδομένη την χρονική διάρκεια του ενδιαμέσου χρόνου, ας πούμε t , ο αριθμός των πελατών οι οποίοι εξυπηρετήθηκαν σε αυτό το διάστημα, είναι τ.μ. με κατανομή Poisson και παράμετρο (μt) , επομένως:

$$\beta_i = P\{D_k = i\} = \int_0^\infty P\{D_k = i / T_n = t\} f_A(t) dt = \int_0^\infty \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} f_A(t) dt \quad (9.2)$$

Το κατευθυνόμενο γράφημα της αλυσίδας Markov φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 9.1:



Σχήμα 9.1: Κατευθυνόμενο γράφημα για την G/M/1 ενσωματωμένη αλυσίδα Markov

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την οριακή κατανομή της $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$. Οι οριακές πιθανότητες α_n , υπολογίζονται από την σχέση:

$$[\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n \quad \dots] \cdot P = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n \quad \dots]$$

οπότε ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\alpha_0 = \alpha_0 p_{0,0} + \alpha_1 p_{1,0} + \alpha_2 p_{2,0} + \dots = \sum_{i=0}^\infty \alpha_i p_{i,0} \quad (9.3)$$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1}\beta_0 + \alpha_n\beta_1 + \alpha_{n+1}\beta_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{n-1+i}\beta_i, \quad n=1,2,\dots \quad (9.4)$$

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων ισορροπίας θα πάμε, στην απευθείας προσέγγιση δηλαδή, να βρούμε λύσεις της μορφής:

$$\alpha_n = \sigma^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.5)$$

Αντικαθιστώντας την (9.5) στην (9.4) και διαιρώντας με σ^{n-1} παίρνουμε $\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i \beta_i$

και λόγω της (9.2):

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i \int_0^{\infty} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} f_A(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(\mu-\mu\sigma)t} f_A(t) dt$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αναγνωρίζουμε ότι είναι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes του ενδιάμεσου χρόνου, επομένως:

$$\sigma = \tilde{A}(\mu - \mu\sigma) \quad (9.6)$$

Ξέρουμε ότι $\tilde{A}(0) = 1$ οπότε το $\sigma = 1$ είναι ρίζα της (9.6) που όμως δεν βοηθάει για να κανονικοποιήσουμε την λύση των εξισώσεων ισορροπίας. Θα αποδείξουμε τώρα ότι αν $\rho < 1$ η εξίσωση (9.6) έχει μια ρίζα σ στο διάστημα $(0, 1)$ η οποία είναι και μοναδική μέσα σ' αυτό το διάστημα, με την βοήθεια της οποίας θα μπορούμε να υπολογίζουμε τις α_n .

9.2.2 Πρόταση

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(\sigma) = \tilde{A}(\mu - \mu\sigma)$ για $\sigma \in [0, 1]$. Εάν $\rho < 1$, τότε:

(α) $g(0) > 0$

(β) $g'(1) > 1$

(γ) η g είναι αυστηρά κυρτή στο $[0, 1]$

(δ) η εξίσωση $\sigma = \tilde{A}(\mu - \mu\sigma)$ έχει μια μοναδική ρίζα σ στο διάστημα $(0, 1)$.

Απόδειξη

(α) $g(0) = \tilde{A}(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} f_A(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\mu t}} f_A(t) dt$. Επειδή $\frac{1}{e^{\mu t}} > 0$ και $f_A(t) \geq 0$ για όλα τα t ,

το $g(0) \geq 0$. Αλλά η $f_A(t)$ δεν είναι παντού μηδέν άρα $g(0) > 0$.

(β) $g(\sigma) = \tilde{A}(\mu - \mu\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-(\mu - \mu\sigma)t} f_A(t) dt$ και παραγωγίζοντας:

$$g'(\sigma) = \frac{d\left(\int_0^{\infty} e^{-(\mu - \mu\sigma)t} f_A(t) dt\right)}{d\sigma} = \int_0^{\infty} \frac{d\left(e^{-(\mu - \mu\sigma)t} f_A(t)\right)}{d\sigma} dt = \mu \int_0^{\infty} t e^{-(\mu - \mu\sigma)t} f_A(t) dt$$

και αντικαθιστώντας:

$$g'(1) = \mu \int_0^{\infty} t f_A(t) dt = \mu E[A] = \mu \frac{1}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} > 1$$

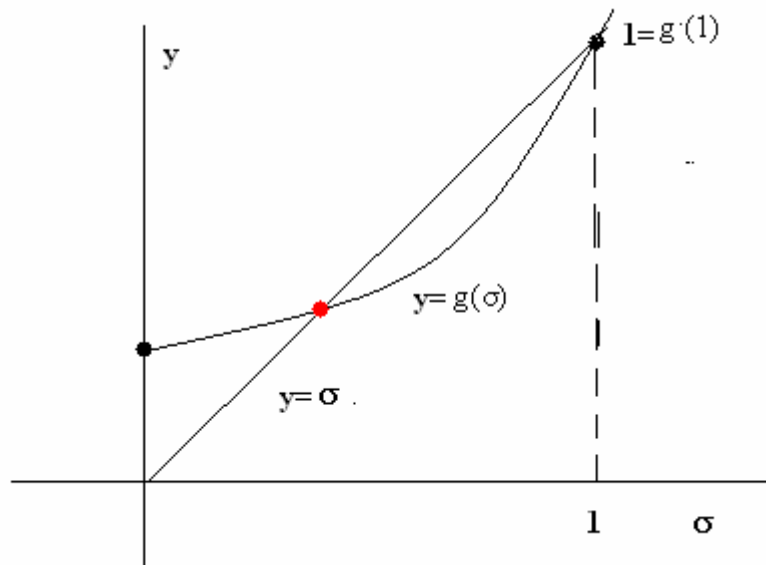
λόγω του ότι $\rho < 1$.

(γ)

$$\begin{aligned} g''(\sigma) &= \frac{d\left(\mu \int_0^\infty t e^{-(\mu-\mu\sigma)t} f_A(t) dt\right)}{d\sigma} = \mu \int_0^\infty \frac{d\left(t e^{-(\mu-\mu\sigma)t} f_A(t)\right)}{d\sigma} dt = \\ &= \mu \int_0^\infty t e^{-(\mu-\mu\sigma)t} f_A(t) (-t)(-\mu) dt = \mu^2 \int_0^\infty t^2 e^{-(\mu-\mu\sigma)t} f_A(t) dt > 0 \end{aligned}$$

γιατί $\mu^2 > 0$, $e^{-(\mu-\mu\sigma)t} > 0$ και $t^2 f_A(t) \geq 0$ και δεν είναι παντού μηδέν. Οπότε η g είναι αυστηρά κυρτή στο $[0,1]$.

(δ) από τα α, β, γ έχουμε $g(0) > 0$, $g'(1) > 1$ (που σημαίνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο 1 έχει κλίση μεγαλύτερη από 1, δηλαδή βρίσκεται κάτω από την $y=\sigma$ για $x \in (0,1)$) και η g είναι αυστηρά κυρτή στο $[0,1]$ (δείτε σχήμα 9.2).



Σχήμα 9.2. Γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = g(\sigma) = \tilde{A}(\mu - \mu\sigma)$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να βρούμε ένα $\sigma_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\sigma_1) \leq \sigma_1$ και στην συνέχεια λόγω της αυστηρής κυρτότητας η μοναδικότητα της ρίζας είναι προφανής.

Υποθέτουμε ότι για όλα τα $\sigma \in [0,1)$ είναι $g(\sigma) > \sigma$, δηλαδή η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από την $y=\sigma$ για όλα τα $\sigma \in [0,1)$. Για ένα τυχαίο $\sigma \in [0,1)$ η ευθεία που ενώνει τα $(1,1)$ και $(\sigma, g(\sigma))$ έχει κλίση $\frac{g(\sigma)-1}{\sigma-1}$ που είναι μικρότερη από 1 ενώ το όριο της καθώς σ τείνει 1 είναι μεγαλύτερο από 1, πράγμα άτοπο. ■

Τώρα για την κανονικοποίηση της (9.5) έχουμε:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=0}^{\infty} k \sigma^n = k \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n = k \frac{1}{1-\sigma} \Rightarrow k=1-\sigma$$

άρα:

$$\alpha_n = (1-\sigma)\sigma^n, \quad n=0,1,2,\dots \quad (9.7)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι, το μήκος της ουράς την στιγμή ακριβώς πριν την άφιξη ενός πελάτη ακολουθεί την γεωμετρική (2) κατανομή με παράμετρο $(1-\sigma)$, όπου σ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\sigma = \tilde{A}(\mu-\mu\sigma)$ στο διάστημα $(0,1)$.

9.2.3 Εφαρμογή στην M/M/1

Για εκθετικά κατανεμημένους ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων έχουμε: $\tilde{A}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$ οπότε η εξίσωση (9.6) γίνεται $\sigma = \frac{\lambda}{\lambda+\mu-\mu\sigma}$ η οποία έχει ρίζες $\sigma=1$ και $\sigma=\rho = \frac{\lambda}{\mu} \in (0,1)$.

Έτσι η κατανομή των αφίξεων είναι:

$$\alpha_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n=0,1,2,\dots$$

9.2.4 Εφαρμογή στην $E_2/M/1$

Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι έχουν κατανομή **Erlang 2-τάξης** με μέση τιμή $E[A] = \frac{k}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes είναι:

$$\tilde{A}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s} \right)^k = \left(\frac{3}{3+s} \right)^2$$

Εάν επιπλέον υποθέτουμε ότι $\mu=4$, έτσι $\rho = \frac{3}{8} < 1$. Η εξίσωση (9.6) γίνεται:

$$\sigma = \left(\frac{3}{3+4-4\sigma} \right)^2 \Rightarrow 16(\sigma-1) \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) \left(\sigma - \frac{9}{4} \right) = 0$$

και η ρίζα στο $(0,1)$ είναι η $1/4$, οπότε:

$$\alpha_n = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^n, \quad n=0,1,2,\dots$$

9.3 ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΩΝ ΧΡΟΝΩΝ

(Α) Κατανομή του χρόνου παραμονής S

9.3.1 Παρατήρηση

Ξέρουμε ότι, όταν ένας πελάτης φτάσει στο σύστημα βρίσκει σε αυτό n πελάτες, με πιθανότητα α_n . Άρα ο χρόνος παραμονής του S στο σύστημα, εάν θεωρήσουμε ότι η πειθαρχία της ουράς είναι FIFO, είναι το άθροισμα των $(n+1)$ εκθετικά κατανεμημένων χρόνων εξυπηρέτησης, ο καθένας με μέσο $1/\mu$.

Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes του χρόνου παραμονής S ενός πελάτη στο σύστημα. Χρησιμοποιώντας δεσμευμένες μέσες τιμές, έχουμε:

$$\begin{aligned}\tilde{S}(s) &= E(e^{-sS}) = E\left[E\left[e^{-sS} \mid L_k^\alpha\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{-sS} \mid L_k^\alpha = n\right] \cdot P\{L_k^\alpha = n\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\sigma)\sigma^n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1} = \frac{\mu(1-\sigma)}{\mu+s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu\sigma}{\mu+s}\right)^n = \frac{\mu(1-\sigma)}{\mu(1-\sigma)+s}\end{aligned}\quad (9.8)$$

γιατί:

- (i) είναι γνωστό ότι το άθροισμα n ανεξάρτητων εκθετικά κατανομών κάθε μια με μέσο $1/\mu$, είναι κατανομή Erlang n-τάξης με μέση τιμή $\frac{n}{\mu}$
- (ii) Εάν $L_k^\alpha = n$ τότε, λόγω της παρατήρησης 9.3.1 και του (i), η κατανομή του χρόνου S θα η Erlang (n+1)-τάξης με μέση τιμή $\frac{n+1}{\mu}$, οπότε:

$$E\left[e^{-sS} \mid L_k^\alpha = n\right] = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1}$$

Από την σχέση $\tilde{S}(s) = \frac{\mu(1-\sigma)}{\mu(1-\sigma)+s}$ συμπεραίνουμε ότι ο S είναι εκθετικά κατανομημένος με παράμετρο $\mu(1-\sigma)$, άρα:

$$P(S \leq t) = 1 - e^{-\mu(1-\sigma)t}, \quad t \geq 0$$

(είναι η ίδια κατανομή με αυτήν του ενδιάμεσο χρόνου στην M/M/1 ουρά, αλλά στη θέση του ρ έχουμε σ).

9.3.2 Εφαρμογή στην M/M/1

Είδαμε στην εφαρμογή 9.2.3. ότι, στην M/M/1 ουρά, $\sigma = \rho = \frac{\lambda}{\mu} \in (0,1)$, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes του χρόνου παραμονής S ενός πελάτη στο σύστημα, γίνεται (χρησιμοποιώντας τον τύπο 9.8):

$$\tilde{S}(s) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s}$$

από την οποία συμπεραίνουμε (όπως και στο κεφάλαιο 7) ότι η S είναι εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\mu(1-\rho)$.

(B) Κατανομή του χρόνου αναμονής W

Είναι γνωστό ότι $S=W+B$ και οι W και B είναι ανεξάρτητες τ.μ., επομένως:

$$\tilde{S}(s) = \tilde{W}(s)\tilde{B}(s) = \tilde{W}(s) \frac{\mu}{\mu+s}$$

και αντικαθιστώντας την $\tilde{S}(s)$, λύνουμε ως προς $\tilde{W}(s)$ και, έχουμε:

$$\tilde{W}(s) = \frac{(1-\sigma)(\mu+s)}{\mu(1-\sigma)+s} = (1-\sigma) + \sigma \frac{\mu(1-\sigma)}{\mu(1-\sigma)+s} \quad (9.9)$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η W ισούται με ένα με πιθανότητα $(1-\sigma)$, ενώ η W είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\mu(1-\sigma)$ με πιθανότητα σ . Έτσι:

$$P(W \leq t) = 1 - \sigma e^{-\mu(1-\sigma)t}, \quad t \geq 0$$

9.3.3 Εφαρμογή στην M/M/1

Επειδή στην περίπτωση αυτή έχουμε $\sigma = \rho = \frac{\lambda}{\mu} \in (0,1)$, η σχέση 9.9 γίνεται:

$$\tilde{W}(s) = \frac{(1-\rho)(\mu+s)}{\mu(1-\rho)+s} = (1-\rho) + \rho \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s}$$

δηλαδή η W ισούται με 1 με πιθανότητα $(1-\rho)$, ενώ η W είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\mu(1-\rho)$ με πιθανότητα ρ , οπότε:

$$P(W > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0$$

που είναι η σχέση (7.21).

9.4 ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ

Στηριζόμενοι στην ιδιότητα PASTA ξέρουμε ότι: την στιγμή που φθάνει ένας πελάτης στο σύστημα, βρίσκει σε αυτό, έναν αριθμό πελατών L^a , από τους οποίους ο καθένας, χρειάζεται μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $1/\mu$, δηλαδή όλοι μαζί χρειάζονται χρόνο $E(L^a) \frac{1}{\mu}$. Άρα ο χρόνος που θα παραμείνει ο πελάτης στο σύστημα, είναι το

άθροισμα του χρόνου $E(L^a) \frac{1}{\mu}$, που θα περιμένει στην ουρά για να εξυπηρετηθούν οι

$E(L^a)$ πελάτες που προηγούνται, συν το χρόνο $1/\mu$ για την δική του εξυπηρέτηση, δηλαδή:

$$E(S) = \frac{1}{\mu} E(L^a) + \frac{1}{\mu}, \quad (9.10)$$

η οποία συνδυαζόμενη με το θ.Little

$$E(L) = \lambda E(S) \quad (9.11)$$

δημιουργεί δύο εξισώσεις με τρεις αγνώστους και λόγω της $E(L^a) \neq E(L)$ (αφού δεν έχουμε Poisson αφίξεις), η προσέγγιση μέσης τιμής δεν αποδίδει. Αν όμως πάρουμε βοήθεια και από την (9.7) έχουμε:

$$\begin{aligned} E(L^a) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \alpha_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\sigma)\sigma^n = (1-\sigma) \sum_{n=0}^{\infty} n\sigma^n = \\ &= (1-\sigma)(1\sigma + 2\sigma^2 + 3\sigma^3 + \dots) = (1-\sigma)[(\sigma + \sigma^2 + \sigma^3 + \dots) + (\sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4 + \dots) + \dots] = \\ &= (1-\sigma) \left[\frac{\sigma}{1-\sigma} + \frac{\sigma^2}{1-\sigma} + \frac{\sigma^2}{1-\sigma} + \dots \right] = \sigma + \sigma^2 + \sigma^3 + \dots = \frac{\sigma}{1-\sigma} \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στις (9.10) και (9.11) προκύπτει:

$$E(S) = \frac{1}{\mu(1-\sigma)}$$

και

$$E(L) = \frac{\lambda}{\mu(1-\sigma)} = \frac{\rho}{1-\sigma}.$$

9.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ M/G/1

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ένα κατάστημα ένας υπάλληλος εξυπηρετεί τους πελάτες (σύμφωνα με την σειρά άφιξής τους), οι οποίοι φθάνουν σε αυτό σύμφωνα με μια υπερεκθετική ανέλιξη. Ο ενδιαμέσος αφίξεων χρόνος είναι με πιθανότητα $1/3$ εκθετικά κατανομημένος με μέσο 1 λεπτό και με πιθανότητα $2/3$ επίσης εκθετικά κατανομημένος με μέσο 3 λεπτά. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανομημένοι με μέσο 1 λεπτό.

- Να υπολογίσετε την κατανομή του πλήθους των πελατών οι οποίοι βρίσκονται στο κατάστημα, την στιγμή της άφιξης ενός πελάτη.
- Να υπολογίσετε το μέσο πλήθος πελατών στο κατάστημα, την στιγμή της άφιξης ενός πελάτη.
- Να υπολογίσετε τον $\tilde{S}(s)$.
- Να υπολογίσετε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο κατάστημα.
- Να υπολογίσετε τον μέσο πλήθος πελατών στο κατάστημα μια τυχαία χρονική στιγμή.

ΛΥΣΗ

Είναι ένα G/M/1 σύστημα στο οποίο οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν εκθετική κατανομή με $EB=1 \text{ min}$ και $\mu=1 \text{ πελ/min}$. Οι αφίξεις ακολουθούν υπερεκθετική με:

$$p_1 = \frac{1}{3}, EX_1 = 1 \text{ min} \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ πελ/min} \text{ και } p_2 = \frac{2}{3}, EX_2 = 3 \text{ min} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3} \text{ πελ/min}$$

$$\text{άρα } EX = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{7}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{7}.$$

- (α) Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $\sigma = \tilde{A}(\mu - \mu\sigma)$ ως προς σ , στο διάστημα $(0,1)$.
Είναι:

$$\tilde{A}(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{1+s} + \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+s} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+s} + \frac{2}{3} \frac{1}{1+3s}$$

Επομένως:

$$\tilde{A}(\mu - \mu\sigma) = \tilde{A}(1 - \sigma) = \frac{1}{3} \frac{1}{2-\sigma} + \frac{2}{3} \frac{1}{4-3\sigma}$$

και η εξίσωση $\sigma = \tilde{A}(\mu - \mu\sigma)$ γράφεται

$$\frac{1}{3(2-\sigma)} + \frac{2}{3(4-3\sigma)} = \sigma$$

που δίνει λύση στο $(0,1)$ την $\sigma \approx 0,48$.

Άρα η πιθανότητα να βρει η πελάτης στο σύστημα, ένας πελάτης που μόλις φθάνει σε αυτό, είναι:

$$\alpha_n = (1-\sigma)\sigma^n = (1-0,48)(0,48)^n = 0,52(0,48)^n \quad \text{για } n=0,1,2,\dots$$

(β)

$$E(L^a) = \frac{\sigma}{1-\sigma} \approx 0,92 \text{ πελ. στο σύστημα την στιγμή άφιξης πελάτη.}$$

(γ)

$$\tilde{S}(s) = \frac{\mu(1-\sigma)}{\mu(1-\sigma)+s} \approx \frac{0,52}{0,52+s}$$

που σημαίνει ότι η S είναι εκθετική με παράμετρο $0,52$.

- (δ) Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο κατάστημα είναι:

$$E(S) = \frac{1}{(1-\sigma)\mu} \approx 1,92 \text{ min.}$$

- (ε) $E(L) = \lambda E(S) \approx 0,82$ πελάτες στο σύστημα μια τυχαία χρονική στιγμή.

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Σε ένα σύστημα ουράς με έναν εξυπηρετητή, η κατανομή του ενδιαμέσου αφίξεων χρόνου δίνεται από την σχέση:

$$F_A(t) = \frac{13}{24}(1-e^{-3t}) + \frac{11}{24}(1-e^{-2t}), \quad t \geq 0$$

Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο $1/6$.

- (α) Να υπολογίσετε την κατανομή του πλήθους των πελατών στο σύστημα, την στιγμή της άφιξης ενός πελάτη.

(β) Να υπολογίσετε την κατανομή του χρόνου αναμονής.

ΛΥΣΗ

Είναι ένα G/M/1 σύστημα όπου οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν εκθετική κατανομή με $EB=1/6$ και $\mu=6$.

Οι αφίξεις είναι συνδυασμός δυο εκθετικών με $p_1=\frac{13}{24}$, $\lambda_1=3$ και $p_2=\frac{11}{24}$, $\lambda_2=2$.

(α) Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $\sigma=\tilde{A}(\mu-\mu\sigma)$ ως προς σ , στο διάστημα $(0,1)$.

Είναι:

$$\tilde{A}(s)=\frac{13}{24}\frac{3}{3+s}+\frac{11}{24}\frac{2}{2+s}$$

Επομένως:

$$\tilde{A}(\mu-\mu\sigma)=\tilde{A}(6-6\sigma)=\frac{85-61\sigma}{24(3-2\sigma)(4-3\sigma)}$$

και η εξίσωση $\sigma=\tilde{A}(\mu-\mu\sigma)$ γράφεται:

$$\frac{85-61\sigma}{24(3-2\sigma)(4-3\sigma)}=\sigma \text{ που δίνει λύση στο } (0,1) \text{ την } \sigma=\frac{5}{12}.$$

Άρα η κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα την στιγμή άφιξης κάποιου πελάτη, είναι:

$$\alpha_n=(1-\sigma)\sigma^n=\frac{7}{12}\left(\frac{5}{12}\right)^n \text{ για } n=0,1,2,\dots$$

(β) Η κατανομή του χρόνου αναμονής είναι:

$$P(W \leq t)=1-\sigma e^{-\mu(1-\sigma)t}=1-\frac{5}{12}e^{-\frac{7}{2}t}, \quad t \geq 0.$$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Σε ένα σύστημα ουράς με έναν εξυπηρετητή, οι ενδιαμέσοι αφίξεων χρόνοι είναι υπερεκθετικά κατανεμημένοι με σ.κ. που δίνεται από την σχέση:

$$F_A(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-\frac{1}{2}t})+\frac{1}{2}(1-e^{-\frac{1}{4}t}), \quad t \geq 0$$

Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο 1. Να υπολογίσετε την κατανομή του χρόνου παραμονής των πελατών στο σύστημα.

ΛΥΣΗ

Είναι ένα G/M/1 σύστημα όπου οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν εκθετική κατανομή με $EB=1$ και $\mu=1$.

Οι αφίξεις ακολουθούν υπερεκθετική (με $p_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_1=\frac{1}{2}$ και $p_2=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{4}$)

Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $\sigma=\tilde{A}(\mu-\mu\sigma)$ ως προς σ , στο διάστημα $(0,1)$.

Είναι:

$$\tilde{A}(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+2s} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+4s}$$

Επομένως:

$$\tilde{A}(\mu - \mu\sigma) = \tilde{A}(1 - \sigma) = \frac{1}{2(3-2\sigma)} + \frac{1}{2(5-4\sigma)}$$

και η εξίσωση $\sigma = \tilde{A}(\mu - \mu\sigma)$ γράφεται:

$$\frac{1}{2(3-2\sigma)} + \frac{1}{2(5-4\sigma)} = \sigma \quad \text{που δίνει λύση στο } (0,1) \text{ την } \sigma \approx 0,36.$$

Οπότε

$$\tilde{S}(s) = \frac{\mu(1-\sigma)}{\mu(1-\sigma)+s} \approx \frac{0,64}{0,64+s}.$$

■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Θεωρούμε ένα σύστημα ουράς με έναν εξυπηρετητή στο οποίο οι ενδιαμέσοι αφίξεων χρόνοι είναι ακριβώς 4 λεπτά. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο 2 λεπτά. Να υπολογίσετε την συνάρτηση κατανομής του χρόνου παραμονής των πελατών στο σύστημα .

ΛΥΣΗ

Είναι ένα G/M/1 σύστημα όπου οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν εκθετική κατανομή με $EB=2 \text{ min}$ και $\mu=1/2 \text{ πελ/min}$.

Οι ενδιαμέσοι αφίξεων χρόνοι έχουν συνάρτηση π.π.:

$$f_A(t) = \delta(t-a) = \begin{cases} 0, & t \neq 4 \\ +\infty & t=4 \end{cases}$$

η οποία είναι η γενικευμένη συνάρτηση Dirac και η οποία έχει μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $\tilde{A}(s) = e^{-4s}$.

Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $\sigma = \tilde{A}(\mu - \mu\sigma)$ ως προς σ , στο διάστημα $(0,1)$.

Είναι

$$\tilde{A}(\mu - \mu\sigma) = \tilde{A}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma\right) = e^{-4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma\right)} = e^{-2(1-\sigma)}$$

και η εξίσωση $\sigma = \tilde{A}(\mu - \mu\sigma)$ γράφεται

$$e^{-2(1-\sigma)} = \sigma \quad \text{που δίνει λύση στο } (0,1) \text{ την } \sigma \approx 0,203.$$

Οπότε

$$F_S(t) = P(S \leq t) = 1 - e^{-\mu(1-\sigma)t} \approx 1 - e^{-0,4t}, \quad t \geq 0.$$

■

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

M/M/1 ΟΥΡΑ

```
function [times, customnum] = simmm1(n, lambda, mu)

% SIMMM1 προσομοίωση της M/M/1 ουράς
% Poisson αφίξεις με ρυθμό lambda
% Poisson χρόνοι εξυπηρέτησης με ρυθμό mu
% Είσοδος: n = αριθμός βημάτων
%         lambda
%         mu
% Εξοδος: times = χρονικές στιγμές βημάτων
%         figure(1) : πελάτες στο σύστημα την κάθε χρονική στιγμή
%         figure(2) : ποσοστό χρόνου (επί του συνολικού χρόνου)
%                   για τα διάφορα πλήθη πελατών στο σύστημα
%         figure(3) : κατανομή των πελατών (που βρίσκονται στο
%                   σύστημα) σε κλάσεις χρόνου αναμονής

if (nargin==0)
    n=700 ;
    lambda=0.9;
    mu=1;
end

rand('state',0)

i=0;
times(1)=0; % πρώτο βήμα την στιγμή 0
customnum(1)=i; % αρχικά κανείς πελάτης στο
                % σύστημα

for k=2:n
    if i==0
        mutemp=0;
    else
        mutemp=mu;
    end

    time=-log(rand)/(lambda+mutemp); % ενδιάμεσοι βημάτων χρόνοι
                                     % εκθετική κατανομή με
                                     % παράμετρο lambda+mu

    if rand<lambda/(lambda+mutemp)
        i=i+1; % άφιξη πελάτη
    else
        i=i-1; % αναχώρηση πελάτη
    end

    customnum(k)=i;
    times(k)=time;
end

times=cumsum(times) % αθροιστικοί χρόνοι βημάτων

j=1;
chronoi(1+max(customnum))=0;
```

```

while (j<=(length(times)-1))
    chrono(1+customnum(j))=chrono(1+customnum(j))+times(j+1)-
    times(j);
    j=j+1;
end

size=[0:1:max(customnum)]; % υπολογισμός ποσοστών

waittime([])=0
timearr([])=0
timedep([])=0

for j=1:(length(times)-1)
    if customnum(j+1)>customnum(j)
        timearr=[timearr times(j+1)]

    else
        timedep=[timedep times(j+1)]
    end
end

if length(timearr)==length(timedep)
    waittime(length(timedep))=0
else
    waittime(1+length(timedep))=0
end

for k=2:(length(timedep))
    if timedep(k-1)>timearr(k)
        waittime(k)=timedep(k-1)-timearr(k)
    else
        waittime(k)=0
    end
end

figure(1);
stairs(times,customnum);
axis([0,1.1*max(times),-1,1.2*max(customnum)]);
title('MM1: ΠΛΗΘΟΣ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ');
xlabel('ΧΡΟΝΟΣ');
ylabel('ΠΕΛΑΤΕΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ');
grid;

figure(2);
bar(size,chrono./max(times));
title('MM1:ΠΟΣΟΣΤΟ ΧΡΟΝΟΥ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΠΛΗΘΟΣ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ');
xlabel('ΠΕΛΑΤΕΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ');
ylabel('ΠΟΣΟΣΤΟ ΧΡΟΝΟΥ');
grid;

figure(3)
hist(waittime);
title('MM1:ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΤΩΝ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ');
xlabel('ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ');
ylabel('ΠΕΛΑΤΕΣ %');
pos = round(get(gca, 'YTick')./ length(waittime)*100);
set(gca,'YTickLabel',pos);
grid;

```

M/G/1 ΟΥΡΑ

```

function [times,customnum] = simmg1(tmax, lambda)

% SIMMG1 προσομοίωση της M/G/1 ουράς
% Poisson αφίξεις με ρυθμό lambda
% Χρόνοι εξυπηρέτησης ομοιόμορφα κατανομημένοι στο [0,2]
% Είσοδος: tmax = διάστημα προσομοίωσης
%          lambda
%
% Εξοδος: times = χρονικές στιγμές αφίξεων ή αναχωρήσεων
%          figure(1) : πελάτες στο σύστημα την κάθε χρονική στιγμή
%          figure(2) : ποσοστό χρόνου (επί του συνολικού χρόνου)
%                   για τα διάφορα πλήθη πελατών στο σύστημα
%          figure(3) : κατανομή των πελατών (που βρίσκονται στο
%                   σύστημα) σε κλάσεις χρόνου αναμονής

if (nargin==0)
    tmax=700;
    lambda=0.8;
end

rand('state',0)

arrtime=-log(rand)/lambda;          % αφίξεις Poisson

i=1;

while (arrtime(i,:) <= tmax)
    arrtime = [arrtime; arrtime(i, :)-log(rand)/lambda];
    i=i+1;
end

n=length(arrtime);                  % αφίξεις τις στιγμές
                                     % t_1,...,t_n

servtime=2.*rand(1,n);              % χρόνοι εξυπηρέτησης
                                     % s_1,...,s_k

cumservtime=cumsum(servtime);

arrsubtr=arrtime-[0 cumservtime(:,1:n-1)]';    % διαφορές (t_k)-(k-1)

arrmatrix=arrsubtr*ones(1,n);        % πίνακας διαφορών

deptime=cumservtime+max(triu(arrmatrix)); % αναχωρήσεις τις στιγμές
                                     % (x_k)=k+max{(t_1)-0,
                                     % (t_2)-1,...(t_k)-(k-1)}

B=[ones(n,1) arrtime ; -ones(n,1) deptime'];

Bsort=sortrows(B,2);                % αύξουσα κατάταξη των
                                     % χρόνων

```

```

jumps=Bsort(:,1);

times=[0;Bsort(:,2)];

customnum=[0;cumsum(jumps)];

waittime=deptime-arrrtime'-servtime;          % χρόνοι αναμονής

j=1;
chronoi(1+max(customnum))=0;

while (j<=(length(times)-1))
    chronoi(1+customnum(j))=chronoi(1+customnum(j))+times(j+1)-
    times(j);
    j=j+1;
end

size=[0:1:max(customnum)];                    % υπολογισμός ποσοστού

figure(1);
stairs(times,customnum);
axis([0,1.1*max(times),0,1.2*max(customnum)]);
title('MG1: ΠΛΗΘΟΣ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ');
ylabel('ΠΕΛΑΤΕΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ');
xlabel('ΧΡΟΝΟΣ');
grid;

figure(2);
bar(size,chronoi./max(times));
title('MG1:ΠΟΣΟΣΤΟ ΧΡΟΝΟΥ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΠΛΗΘΟΣ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ');
xlabel('ΠΕΛΑΤΕΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ');
ylabel('ΠΟΣΟΣΤΟ ΧΡΟΝΟΥ');
grid;

figure(3)
hist(waittime);
title('MG1:ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΤΩΝ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ');
xlabel('ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ');
ylabel('ΠΕΛΑΤΕΣ %');
pos = round(get(gca, 'YTick')./ length(waittime)*100);
set(gca,'YTickLabel',pos);
grid;

```

M/D/1 ΟΥΡΑ

```

function [times, customnum] = simmdl(tmax, lambda)

% SIMMD1 προσομοίωση της M/D/1 ουράς
% Poisson αφίξεις με ρυθμό lambda
% Ντετερμινιστικοί χρόνοι εξυπηρέτησης S=1
% Είσοδος: tmax = διάστημα προσομοίωσης
%          lambda
%
% Εξοδος: times = χρονικές στιγμές αφίξεων ή αναχωρήσεων
%          figure(1) : πελάτες στο σύστημα την κάθε χρονική στιγμή
%          figure(2) : ποσοστό χρόνου (επί του συνολικού χρόνου)
%                   για τα διάφορα πλήθη πελατών στο σύστημα
%          figure(3) : κατανομή των πελατών (που βρίσκονται στο
σύστημα)
%                   σε κλάσεις χρόνου αναμονής

if (nargin==0)
    tmax=700;
    lambda=0.95;
end

rand('state',0)

arrtime=-log(rand)/lambda;           % αφίξεις Poisson
i=1;

while (arrtime(i,:)<=tmax)
    arrtime = [arrtime; arrtime(i, :)-log(rand)/lambda];
    i=i+1;
end

n=length(arrtime);                   % αφίξεις τις στιγμές
                                     % t_1,...,t_n

arrsubtr=arrtime-(0:n-1)';           % διαφορές (t_k)-(k-1)

arrmatrix=arrsubtr*ones(1,n);        % πίνακας διαφορών

deptime=(1:n)+max(triu(arrmatrix));  % αναχωρήσεις τις στιγμές
                                     % (x_k)= k+max{(t_1)-0,
                                     % (t_2)-1,...,(t_k)-(k-1)}

B=[ones(n,1) arrtime ; -ones(n,1) deptime'];

Bsort=sortrows(B,2);                 % αύξουσα κατάταξη των
                                     % χρόνων

jumps=Bsort(:,1);

times=[0;Bsort(:,2)];

customnum=[0;cumsum(jumps)];

waittime=-1.+deptime-arrtime';       % χρόνοι αναμονής

j=1
chronoi(1+max(customnum))=0;

```

```

while (j<=(length(times)-1))
    chrono(1+customnum(j))=chrono(1+customnum(j))+times(j+1)-
    times(j);
    j=j+1;
end

size=[0:1:max(customnum)]; % υπολογισμός ποσοστών

figure(1);
stairs(times,customnum);
axis([0,1.1*max(times),-1,1.2*max(customnum)]);
title('MD1: ΠΛΗΘΟΣ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ');
xlabel('ΧΡΟΝΟΣ');
ylabel('ΠΕΛΑΤΕΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ');
grid;

figure(2)
bar(size,chrono./max(times));
title('MD1:ΠΟΣΟΣΤΟ ΧΡΟΝΟΥ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΠΛΗΘΟΣ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ');
xlabel('ΠΕΛΑΤΕΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ');
ylabel('ΠΟΣΟΣΤΟ ΧΡΟΝΟΥ');
grid;

figure(3)
hist(waittime);
title('MD1:ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΤΩΝ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ');
xlabel('ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ');
ylabel('ΠΕΛΑΤΕΣ %');
pos = round(get(gca, 'YTick')./ length(waittime)*100);
set(gca, 'YTickLabel',pos);
grid;

```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(Α) Ελληνική

1. Π.-Χ. Γ. Βασιλείου, “Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες”, Εκδόσεις Ζήτη, 1999.
2. Τ.Ι. Δάρας, Π.Θ. Σύψας, “Στοχαστικές Ανελίζεις: Θεωρία & Εφαρμογές”, Εκδόσεις Ζήτη, 2003.
3. Θ.Ν. Κάκκουλος, “Στοχαστικές Ανελίζεις”, Β’ έκδοση, 1978
4. Σ. Κουνιάς, Χ. Μουσιάδης, “Θεωρία Πιθανοτήτων Ι: Κλασική Πιθανότητα, Μονοδιάστατες κατανομές”, Εκδόσεις Ζήτη, 1999.
5. Δ. Ξηροκώστας, “Επιχειρησιακή Έρευνα: Εφαρμοσμένη Θεωρία Αναμονής”, 1984.
6. Γ. Γρ. Ρούσσας, “Στοιχεία Πιθανοθεωρίας μετ’ εφαρμογών”, 1973.
7. Χ. Χαραλαμπίδης, “Θεωρία Πιθανοτήτων και εφαρμογές”, τεύχος 1, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2000
8. F.S. Hillier, G.J. Lieberman, “Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα”, Εκδόσεις Παπαζήση, 1985.
9. P. Hoel, S. Port, C. Stone, “Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002.

(Β) Ξενόγλωσση

1. I. Adan, J. Resing, Eindhoven University of Technology, 2001.
2. D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis, “Introduction to Probability”, Athena Scientific 2002.
3. G. Grimmett, D. Stirzaker, “Probability and random processes”, Oxford University Press, New York, 1992.
4. I. Kaj, R. Gaigalas, “Simulation of Queuing Processes”, 2002.
5. S. Karlin, H.M.Taylor, “A first course in Stochastic Processes”, Academic Press, New York, 1975.
6. S. Karlin, H.M.Taylor, “An introduction to Stochastic Modeling”, Academic press, New York, 1984.
7. A. Papoulis, “Probability, random variables and stochastic processes”, McGraw-Hill series, New York 1984.
8. S. Ross, “Applied Probability Models with Optimization Applications”, Dover, 1970.
9. Ross, Sheldon M., “Stochastic processes”, Wiley series, 1983.
10. S. Ross: “Introduction to Probability Models”, 8th ed., academic press, 2003, international edition.