ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ RADON NIKODYM ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ BANACH, ΣΥΝΕΧΗ ΙΔΙΑΖΟΝΤΑ ΜΕΤΡΑ ΚΑΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ L^1

ΖΑΚΥΝΘΙΝΑΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Επιβλέπων : Επίκουρος Καθηγητής **Πετράκης Μίνως**

ΧΑΝΙΑ , 2011

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην διατριβή αυτή, παρουσιάζουμε μια συνοπτική εισαγωγή στη θεωρία στην θεωρία των χώρων με την RNP (Ιδιότητα Radon Nikodym).

Δίνουμε όμως πλήρη απόδειξη του βασικού θεωρήματος της dentability *(θεώρημα 6.8)*.

Στο [D] ο R. Doss αποδεικνύει το εξής αποτέλεσμα:

Αν το λ είναι συνεχές μέτρο στον κύκλο Π τότε υπάρχει $n \perp m$ (m είναι το μέτρο Lebesgue στον Π) έτσι ώστε $n * \lambda << m$.

Στο κεφάλαιο 6 χρησιμοποιούμε αναπαραστάσεις τελεστών στον L^1 με στοχαστικούς πυρήνες και αποδεικνύουμε ότι στην περίπτωση που το μέτρο λ είναι Rajchman το μέτρο ν στο θεώρημα του R.Doss μπορεί να παρθεί να είναι ένα Riesz γινόμενο της μορφής $w^* - \lim \prod_{k=1}^{\infty} (1 \pm \cos(n_k x))$ *(θεώρημα 6.8).*

Το μέτρο αυτό είναι ιδιάζον προς το m.

Επίσης παραθέτουμε εφαρμογές στην πραγματική ανάλυση ενός θεωρήματος από το [B2].

1.Προκατακτικά - Ορισμοί

Έστω $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ ένας χώρος πιθανότητας και X ένας χώρος Banach.

Μία συνάρτηση καλείται απλή εάν υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ και $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_\mathrm{N} \in \Sigma$ έστι ώστε $f : \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \chi_{\mathrm{E}_1}$ όπου $\chi_{\mathrm{E}_1}(\omega) = 0$ εάν $\omega \notin \mathrm{E}_i$. Το (Bohner) ολοκλήρωμα μιας απλής συναρτήσεως f είναι εξ ΄ορισμού $\int_{\mathrm{E}} f d\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{E}_\imath)$, $\mathrm{E} \in \Sigma$.

Μία συνάρτηση $f : \Omega \to X$ καλείται μετρήσιμη εάν υπάρχει μια ακολουθία απλών συναρτήσεων $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\lim_n \|s_n - f\| = 0$ λ-σχεδόν παντού.

Εάν $f : \Omega \to X$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση και υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\lim_n \|s_n - f\| d\lambda = 0$ τότε η f καλείται Bohner ολοκληρώσιμη. Σ ΄αυτήν την περίπτωση $\int_{\mathrm{E}} f d\lambda$ ορίζεται $\forall\ \mathrm{E} \in \Sigma$ σαν το όριο $\lim_n \int_E s_n d\lambda$.

Ο ίδιος ο Bohner έδωσε τον παρακάτω χαρακτηρισμό των Bohner ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

1.1 Θεώρημα : Έστω $f : \Omega \to X$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Η f είναι Bohner ολοκληρώσιμη εάν και μόνο αν $\int_\Omega \|f\| d\lambda < \infty$.

Με $L^1_X(\lambda)$ συμβολίζουμε τον χώρο Banach όλων των Bohner ολοκληρώσιμων

Παρατήρηση: πολλά από τα κλασικά θεωρήματα για μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις και *Lebesgue* ολοκληρώσιμες συναρτήσεις γενικεύονται στην περίπτωση διανυσματικών συναρτήσεων με τιμές σ ΄ένα χώρο Banach. Σχεδόν όλες οι αποδείξεις παραμένουν οι ίδιες (αρκεί κάποιος να αντικαταστήσει τις απόλυτες τιμές με νόρμες). Παρακάτω αναφέρονται (χωρίς απόδειξη) ορισμένα θεωρήματα για Bohner συναρτήσεις.

1. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία απο Bohner ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_n : \Omega \to X$. Εάν $\lim_n f_n = f$ στο λ-μέτρο (δηλαδή εάν $\lim_n \lambda(\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \varepsilon\}) = 0\ \forall \varepsilon > 0$)

και εάν υπάρχει πραγματική *Lebesgue* ολοκληρώσιμη σηνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\|f_n\| \leq g$ λ-σχεδόν παντού, τότε η f είναι Bohner οοκληρώσιμη και $\lim_n \int_E f_n d\lambda = \int_E f_n d\lambda$ $\forall$ $\mathrm{E} \in \Sigma$.

2. Εάν $f \in L^1_X$ τότε $\left\| \int_{\mathrm{E}} f d\lambda \right\| \leq \int_{\mathrm{E}} \|f\| d\lambda$ $\forall$ $\mathrm{E} \in \Sigma$.

3. Εάν $f, g \in L^1_X$ και $\int_{\mathrm{E}} f d\lambda = \int_{\mathrm{E}} g d\lambda$ $\forall$ $\mathrm{E} \in \Sigma$ τότε $f = g$ λ-σχεδόν παντού.

4. Εάν $f : [0,1] \to X$ είναι Bohner ολοκληρώσιμη τότε για όλα σχεδόν τα $s \in [0,1]$ έχουμε $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_S^{s+h} f(t)dt = f(s)$.

5. Έστω T ένας κλειστός τελεστής από τον χώρο Banach X στον χώρο Banach Ψ. Εάν η $f : \Omega \to X$ και η $Tf : \Omega \to \Psi$ είναι Bohner ολοκληρώσιμες τότε $T(\int_E f d\lambda) = \int_{\mathrm{E}} (Tf) d\lambda$.

6. Εάν $f \in L^1_X$ και $\mathrm{E} \in \Sigma$, $\lambda(\mathrm{E}) > 0$ τότε $\frac{1}{\lambda(\mathrm{E})} \int_{\mathrm{E}} f d\lambda \in \overline{co}(f(E))$.

Ένα απο τα σημαντικά θεωρήματα για μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \Omega \to X$ είναι το θεώρημα Μετρησιμότητας του Pettis.

1.2 Θεώρημα [D-U] : Έστω $f : \Omega \to X$ μια συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

1. Η f είναι μετρίσιμη

2. $\forall x^* \in X^*$ η πραγματική συνάρτηση $x^* f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη και υπάρχει $\mathrm{E} \in \Sigma$, $\lambda(\mathrm{E}) = 0$ έτσι ώστε το σύνολο $f(\Omega \backslash \mathrm{E})$ είναι (norm)διαχωρίσιμο υποσύνολο το X.

Απόδειξη:

($1 \Rightarrow 2$) Ας υποθέσουμε ότι η $f : \Omega \to X$ είναι μετρίσιμη. Απο το θεώτημα του Egoroff μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία (f_n) απλών συναρτήσεων έτσι ώστε $\lim_n \|f_n - f\| = 0$ λ-σχεδόν ομοιόμορφα. Δηλαδή για κάθε $n \in N$ υπάρχει ένα σύνολο $\mathrm{E}_n \in \Sigma$ έτσι ώστε

$\lambda(\mathrm{E}_n) < \frac{1}{n}$ και $\lim_n f_n = f$ ομοιόμορφα στο $\Omega \backslash \mathrm{E}_n$. Κάθε συνάρτηση f_n έχει πεδίο τιμών ένα φραγμένο υποσύνολο κάποιου υπόχωρου του X που είναι πεπερασμένης διάστασης. Επομένως το σύνολο $f(\Omega \backslash \mathrm{E}_n)$ είναι ολικά φραγμένο (totally bounded) και διαχωρίσιμο.

Είναι φανερό λοιπόν ότι το σύνολο $f(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \backslash \mathrm{E}_n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(\Omega \backslash \mathrm{E}_n)$ είναι διαχωρίσιμο. Παρατηρούμε επίσης ότι το σύνολο $\Omega \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \backslash \mathrm{E}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n$ έχει λ-μέτρο μηδέν αφού $\lambda(\mathrm{E}_n) < \frac{1}{n}$. Έχουμε αποδείξει λοιπόν ότι υπάρχει σύνολο $\mathrm{E}, \lambda(\mathrm{E}) = 0$ έτσι ώστε το σύνολο $f(\Omega \backslash \mathrm{E})$ είναι διαχωρίσιμο.

Εάν $x^* \in X^*$ τότε η συνάρτηση $x^* f_n$ είναι απλή αφού η f_n είναι απλή. Γνωρίζουμε ότι $f_n(\omega) \to f(\omega)$ για όλα σχεδόν τα $\omega \in \Omega$ επομένως $x^* f_n(\omega) \to x^* f(\omega)$ για όλα σχεδόν τα $\omega \in \Omega$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $x^* f_n : \Omega \to$ είναι μετρήσιμη.

$(2 \Rightarrow 1)$: Έστω $\mathrm{E} \in \Sigma$, με $\lambda(\mathrm{E}) = 0$ και $f(\Omega \backslash \mathrm{E})$ διαχωρίσιμο υποσύνολο του X. Έστω (x_n) ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $f(\Omega \backslash \mathrm{E})$. Με τη βοήθεια του θεωρήματος Hahn-Banach μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία (x_n^*) συναρτησοειδών στον X^* έτσι ώστε $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$ και $\|x_n^*\| = 1$. Εάν $\omega \in \Omega \backslash \mathrm{E}$ τότε $\|f(\omega)\| = \sup_n |x_n^* f(\omega)|$. Επομένως η συνάρτηση $\|f(\cdot) - x_n\|$ είναι μετρήσιμη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τα σύνολα $\mathrm{E}_n = \{\omega \in \Omega : g_n(\omega) < \varepsilon\}$. Εάν το μέτρο λ είναι πλήρες τότε κάθε E_n ανήκει στην Σ. Σε κάθε περίπτωση $\exists \beta_n \in \Sigma$ με $\lambda(\beta_n \triangle E_n) = 0$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $g : \Omega \to X$ ως εξής:

$g(\omega) = \chi_n$ εάν $\omega \varepsilon \beta_n \backslash \bigcup_{m<n} \beta_m$

$g(\omega) = 0$ εάν $\omega \notin \bigcup_n \beta_n$.

Παρατηρούμε ότι $\|g(\omega) - f(\omega)\| < \varepsilon$ για όλα σχεδόν τα $\omega \in \Omega$. Δηλαδή η f μπορεί να προσεγγιστεί από μια συνάρτηση g που παίρνει αριθμήσιμο το πλήθος τιμές. Εάν πάρουμε $\varepsilon = \frac{1}{n}$ είναι φανερό ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία (g_n') από συναρτήσεις που παίρνουν αριθμήσιμες το πλήθος τιμές και $\|g_n' - f\| < \frac{1}{n}$ σχεδόν παντού. Κάθε g_n' έχει τη μορφή $g_n' = \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m} X_{E_{n,m}}$ με $\mathrm{E}_{n,i} \cap \mathrm{E}_{n,j} = \emptyset$ εάν $i \neq j$ και $E_{n,m} \in \Sigma$. Επειδή το μέτρο λ είναι πεπερασμένο είναι δυνατόν να "κόψουμε" λίγο τις g_n' και να ορίσουμε μια ακολουθία (f_n) από απλές συναρτήσεις που να συγκλίνουν σχεδόν παντού στην f. Αυτό σημαίνει ότι είναι η f είναι μετρήσιμη.

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο, Σ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και X ένας χώρος Banach.

1.3 Ορισμός: Η απεικόνιση $\vec{\mu} : \Sigma \to X$ καλείται διανυσματικό μέτρο (vector measure) εάν $\vec{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(\mathrm{A}_n)$ για κάθε ακολουθία $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων συνόλων από την σ-άλγεβρα Σ.

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(\mathrm{A}_n)$ όχι μόνο συγκλίνει αλλά και κάθε αναδιάταξη των όρων της δίνει συγκλίνουσα σειρά εάν το $\vec{\mu}$ είναι διανυσματικό μέτρο.

Η κύμανση (variation) ενός διανυσματικού μέτρου $\vec{\mu}$ είναι η (επεκτεταμένη πραγματική) συνάρτηση $|\vec{\mu}| : \Sigma \to [0,\infty]$ της οποίας η τιμή σ΄ένα σύνολο $E \in \Sigma$ είναι $|\vec{\mu}|(\mathrm{E}) = \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|\vec{\mu}(A)\|$ όπου το supremum το παίρνουμε πάνω σ ΄όλες τις διαμερίσεις του E σε πεπερασμένο το πλήθος ξένων ανα δύο στοιχείων από την Σ. Εάν $|\vec{\mu}|(\Omega) < \infty$ τότε το διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu}$ καλείται μέτρο φραγμένης κύμανσης (bounded variation).

Εάν (Ω,Σ,λ) είναι ένας χώρος πιθανότητας, X ένας χώρος Banach και $f \in L^1_X(\lambda)$ μια Bohner ολοκληρώσιμη συνάρτηση μπορούμε να ορίσουμε ένα διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu} : \Sigma \to X$ ως εξής: $\vec{\mu}(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} f d\lambda$, $\mathrm{E} \in \Sigma$. Το ότι το $\vec{\mu}$ είναι αριθμήσιμα προσθετικό χρειάζεται απόδειξη (Εάν $\mathrm{E} = \bigcup_{n} \mathrm{E}_n$ με $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανα δυο συνόλων από τη Σ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathrm{E}_n} f d\lambda$ συγκλίνει απολύτως γιατί κυριαρχείται από την συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathrm{E}_n}\|f\|\, d\lambda$. Παρατηρούμε ότι $\left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n} f d\lambda - \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathrm{E}_n} f\, d\lambda \right\| = \left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n} f d\lambda \right\|$. Είναι φανερό ότι $\lim_{m} \lambda\, (\bigcup_{n=m+1}^{\infty} \mathrm{E}_n) = 0$ και επομένως $\lim_{m} \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} \mathrm{E}_n} f d\lambda \right\| = 0 \Rightarrow \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathrm{E}} f d\lambda$. Αυτό σημαίνει ότι $\vec{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(\mathrm{E}_n)$).

Το μέτρο $\vec{\mu}, \vec{\mu}(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} f d\lambda$ είναι φραγμένης κύμανσης (bounded variation) και απολύτως συνεχές ως προς το λ (δηλαδή εάν $E \in \Sigma$ και $\lambda(\mathrm{E}) = 0$ τότε $|\vec{\mu}|(\mathrm{E}) = 0$).

Είναι φυσικό να ρωτήσουμε εάν κάθε διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu}$, που είναι φραγμένης κύμανσης και είναι απόλυτα συνεχές ως προς το λ προέρχεται απο μια Bohner ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι αρνητική όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα: Έστω $(\Omega, \Sigma, \lambda) = ([0,1]$, *Lebesgue* μετρήσιμα σύνολα, *Lebesgue* μέτρο). Έστω X ο Banach χώρος $L^1[0,1]$. Θεωρούμε το διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu} : \Sigma \to L^1[0,1]$ που ορίζεται ως εξής $\vec{\mu}(\mathrm{A}) = X_{\mathrm{A}}, \forall \mathrm{A} \in \Sigma$.

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι το $\vec{\mu}$ είναι ένα διανυσματικό μέτρο πεπερασμένης κύμανσης και απολύτως συνεχές ως προς λ.

Ας υποθέσουμε ότι $\exists f \in L^1_{L^1}(\lambda)$ έτσι ώστε $\vec{\mu}(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f\, d\lambda$ θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Έστω $F \in L^\infty[0,1] = (L^1[0,1]))^*$. Είναι φανερό ότι $\int_{\mathrm{A}} (F, f(t)) d\lambda(t) = (F, \int_{\mathrm{A}} f(t) d\lambda(t)) = (F, X_A) = \int_{\mathrm{A}} F(t) d\lambda(t)$. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα σύνολο $\mathrm{A}(F) \in \Sigma$ με $\lambda(\mathrm{A}(F)) = 0$ έτσι ώστε $(F, f(t)) = F(t) \forall t \in [0,1] \backslash A(F)$.

Έστω (I_n) η ακολουθία όλων των υποδιαστημάτων του $[0,1]$ με ρητά άκρα. Έστω $F_n = X_{I_n} \in L^\infty[0,1]$. Έστω $\mathrm{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}(F_n)$ και $x \in [0.1] \backslash \mathrm{A}$.

Έχουμε ότι $\int_{\mathrm{I}_n} f(x)(s) d\lambda(s) = \int F_n(s) f(x)(s) d\lambda(s) = F_n(x)$. Εάν $x \notin I_n$ τότε $F_n(x) = 0$ επομένως $f(x)(s) = 0$ για όλα σχεδόν τα $s \in [0,1]$ εάν $x \in [0,1] \backslash \mathrm{A}$. Αυτό συνεπάγεται ότι η $f : [0,1] \to L^1$ μηδενίζεται σχεδόν παντού. Δεν είναι δυνατόν λοιπον $\int_{\mathrm{A}} f d\lambda = X_{\mathrm{A}}$, $\forall \mathrm{A} \in \Sigma$.

2. Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ RADON - NIKODYM

2.1 Ορισμός: Ο χώρος Banach X λέμε ότι έχει την Radon - Nikodym Ιδιότητα (RNP) εάν για κάθε χώρο πιθανότητας (Ω,Σ,λ) και για κάθε διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu} : \Sigma \to X$ (το οποίο είναι φραγμένης κύμανσης και απόλυτως συνεχές ως προς το λ) υπάρχει Bohner ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \in L^1_X(\lambda)$ έτσι ώστε $\vec{\mu}(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} f\, d\lambda \;\; \forall E \in \Sigma$.

2.2 Ορισμός: Έστω K ένα κλειστό φραγμένο κυρτό υποσύνολο του χώρου Banach X. Το σύνολο K έχει την Radon - Nikodym Ιδιότητα εάν για κάθε χώρο πιθανότητας (Ω,Σ,λ) και κάθε διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu} : \Sigma \to X$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς λ, είναι φραγμένης κύμανσης και που το "average range" $\mathrm{A}(\vec{\mu}) = \{\frac{\vec{\mu}(\mathrm{E})}{\lambda(\mathrm{E})}, \mathrm{E} \in \Sigma, \lambda\mathrm{E} > 0\}$. περιέχεται στο K υπάρχει $f \in L^1_X(\lambda)$ έτσι ώστε $\vec{\mu}(\mathrm{A}) = \int f d\lambda \;\; \forall E \in \Sigma$.

Ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο $\mathrm{K} \subset X$ έχει την RNP εάν κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του K έχει την RNP.

Οι χώροι $L^1, c_o, c[0,1], l^\infty, L^\infty$ δεν έχουν την RNP. Κάθε αυτοπαθής χώρος, κάθε δυϊκός χώρος είναι διαχωρίσιμος (π.χ. l^1) κάθε χώρος με boundelly complete βάση έχει την RNP.

Είναι πολύ εύκολο να δεί κανείς ότι:

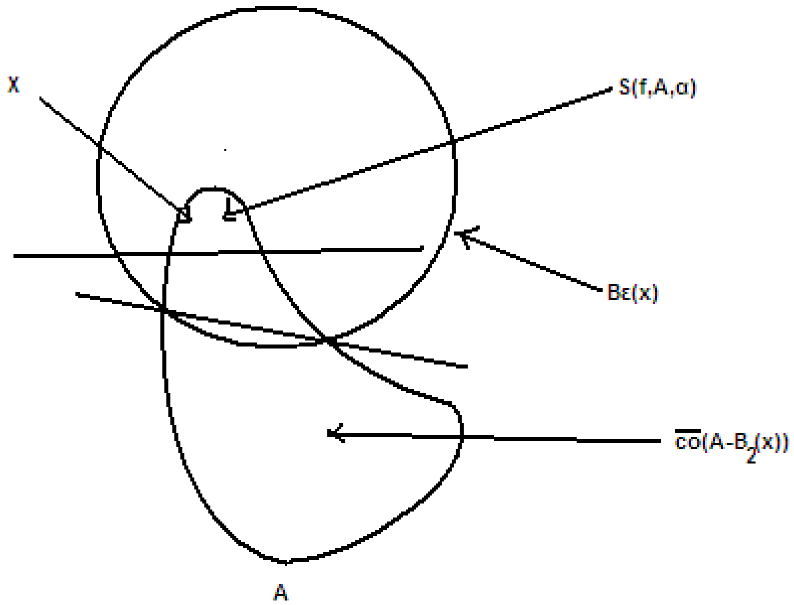
1. Εάν X, Ψ είναι ισομορφικοί χώροι Banach και ο X έχει την RNP τότε και ο Ψ έχει την RNP.

2. Εάν ο X έχει την RNP τότε και κάθε υπόχωρος του X έχει την RNP.

3. Εάν κάθε διαχωρίσιμος υπόχωρος του X έχει την RNP τότε και ο X έχει την RNP.

2.3 Ορισμός: Έστω A ένα φραγμένο υποσύνολο του X. Το A καλείται dentable εάν $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \varepsilon \mathrm{A}$ έτσι ώστε $x \notin \overrightarrow{co}(A \backslash B_\varepsilon(x))$.
($\overrightarrow{co}$ συμβολίζει την κλειστή κυρτή θήκη και $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : \|x-y\| < \varepsilon\}$)

Εάν A είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $X, \alpha > 0$ και $f \in X^*, f \neq 0$ τότε το slice του A που ορίζεται από το f και το α είναι το σύνολο $s(\mathrm{A}, f, \alpha) = \{x \in \mathrm{A} : f(x) > \sup(f(A)) - \alpha\}$. Είναι εύκολο να δεί κανείς (με τη βοήθεια του Hahn-Banach) ότι ένα σύνολο A είναι dentable εάν και μόνο εάν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο slice $s(A, f, \alpha)$ του οποίου η διάμετρος είναι μικρότερη απο ε.



Το 1967 ο M.A.Rieffel εισήγαγε την ένοια της dentability και απέδειξε το εξής θεώρημα.

2.4 Θεώρημα [D-U] : Έστω X ένας χώρος Banach. Εάν κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι dentable τότε ο X έχει την RNP ιδιότητα.

Απόδειξη: Έστω $\vec{\mu} : \Sigma \to X$ ένα διανυσματικό μέτρο φραγμένης κύμανσης και απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο πιθανότητας λ.

Εάν $|\vec{\mu}|$ είναι η variation του μ από το κλασικό Radon-Nikodym θεώρημα μπορούμε να βρούμε $h \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda), h \geq 0$ έτσι ώστε $|\vec{\mu}|(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} hd\lambda,\ \forall \mathrm{E} \in \Sigma$. Εάν $F \in \Sigma$ με $\mathrm{A}(F)$ συμβολίσουμε το σύνολο $\{\frac{\vec{\mu}(G)}{\lambda(G)} : G \subset F, \lambda(G) > 0\}$.

Εάν η συνάρτηση h είναι φραγμένη στο F τότε το $A(F)$ είναι φραγμένο σύνολο διότι $\left\| \frac{\vec{\mu}(G)}{\lambda(G)} \right\| \leq \frac{|\vec{\mu}|(G)}{\lambda(G)} = \frac{1}{\lambda(G)} \int_G hd\lambda$.

Η καρδιά της απόδειξης Rieffel βρίσκεται στο επόμενο λήμμα.

2.5 Λήμμα: $\forall 3 > 0, \forall \mathrm{E} \in \Sigma$ *με* $\lambda(\mathrm{E}) > 0, \exists F \in \Sigma$ *με* $F \subset \mathrm{E}$ *και* $\lambda(F) > 0$ *έτσι ώστε* $diamA(F) \leq \varepsilon$. *Για να αποδείξουμε το λήμμα ας υποθέσουμε ότι η h είναι φραγμένη στο*

E, *και επομένως το σύνολο* $\mathrm{A}(\mathrm{E})$ *είναι φραγμένο. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας αφού* $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \mathrm{E} : h(\omega) \le n\}$. *Το σύνολο* $\mathrm{A}(\mathrm{E})$ *είναι dentable επομένως* $\exists F_0 \subset \mathrm{E}, \lambda F_0 > 0$ *έτσι ώστε* $\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)} \notin \overline{co}(\mathrm{A}(\mathrm{E}) \backslash \mathrm{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)})) = Q$.

Εάν $diamA(F) \le \varepsilon$ έχουμε αποδείξει το λήμμα. Εάν $diamA(F) > \varepsilon$ τότε $\exists \mathrm{B} \subset F_0, \lambda \mathrm{B} > 0$ έτσι ώστε $\frac{\vec{\mu}(\mathrm{B})}{\lambda(\mathrm{B})} \in Q$. Πραγματικά εάν $\frac{\vec{\mu}(\mathrm{K})}{\lambda(\mathrm{K})} \notin Q \ \forall \mathrm{K} \subset F_0, \lambda \mathrm{K} > 0$ τότε $\left\| \frac{\vec{\mu}(\mathrm{K})}{\lambda(\mathrm{K})} - \frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda F_0} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow diamA(F) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Διαλέγουμε τώρα μια maximal (αναγκαστικά αριθμήσιμη) οικογένεια από ξένα ανά δύο σύνολα $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lambda(\mathrm{B}_n) > 0, \mathrm{B}_n F_0$ και $\frac{\vec{\mu}(\mathrm{B}_n)}{\lambda \mathrm{B}_n} \in Q \ \forall n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο $F = F_0 \backslash (\cup \mathrm{B}_n)$. Εάν $\lambda F = 0$ τότε $\vec{\mu} F = 0$ και μπορούμε να γράψουμε $\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda F_0} = \frac{\vec{\mu}(\cup \mathrm{B}_n)}{\lambda(\cup \mathrm{B}_i)} = \sum_n \frac{\lambda(\mathrm{B}_n)}{\lambda(\cup \mathrm{B}_i)} \cdot \frac{\vec{\mu}(\mathrm{B}_n)}{\lambda(\mathrm{B}_n)}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)}$ βρίσκεται στο Q πράγμα άτοπο. Δεν είναι λοιπόν δυνατόν να είναι $\lambda F = 0$.

Επομένως $\lambda F > 0$. Από την maximality της (B_n) εάν $G \subset F$ και $\lambda G > 0$ τότε $\frac{\vec{\mu} G}{\lambda G} \notin Q \Rightarrow \left\| \frac{\vec{\mu} G}{\lambda G} - \frac{\vec{\mu} F_0}{\lambda F_0} \right\| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $diamA(F) \le \varepsilon$ και το λήμμα έχει αποδειχθεί.

Τώρα συνεχίζουμε την απόδειξη του θεωρήματος. Μπορούμε να πάρουμε (ξανά!) μια maximal (αναγκαστικα αρθμήσιμη) οικογένεια $(\mathrm{E}_i)_i$ από ξένα ανά δύο σύνολα στην $\Sigma, \lambda \mathrm{E}_i > 0$ έτσι ώστε $diamA(\mathrm{E}_i) \le \varepsilon \ \forall i$. Είναι φανερό τώρα ότι με επαγωγή μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία διαμερίσεων $\Pi_n = (\mathrm{E}_i^n)_i$, αύξουσα ως προς την refinement έτσι ώστε $diamA(\mathrm{E}_i^n) < \frac{1}{2^{n+1}} \ \forall 1, n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_n : \Omega \to X, g_n = \sum_i \frac{\vec{\mu}(E_i^n)}{\lambda(E_i^n)} X_{E_i^n}$. Παρατηρούμε ότι η g_n είναι ομοιόμορφα Cauchy ($\|g_n(\omega) - g_m(\omega)\| < \frac{1}{2^{n+1}}$ εάν $m < n$) και επομένως η g_n συγκλίνει στην L_X^1 νόρμα σε κάποια συνάρτηση $g \in L_X^1$. Για κάθε $\mathrm{E} \in \Sigma$ έχουμε ότι

$$\left\| \vec{\mu}(\mathrm{E}) - \int_{\mathrm{E}} g_n d\lambda \right\| = \left\| \sum_i \vec{\mu}(\mathrm{E}_i^n \cap E) - \sum_i \frac{\vec{\mu}(E_i^n)}{\lambda E_i^n} \lambda(\mathrm{E}_i^n \cap E) \right\| \le \sum_i \left\| \frac{\vec{\mu}(\mathrm{E}_i^n \cap E)}{\lambda(\mathrm{E}_i^n \cap E)} - \frac{\vec{\mu}(\mathrm{E}_i^n)}{\lambda(\mathrm{E}_i^n)} \right\| \lambda(\mathrm{E}_i^n \cap E) \le$$

Επομένως $\vec{\mu}(E) = \lim_n \int_{\mathrm{E}} g_n d\lambda = \int_{\mathrm{E}} g d\lambda \ \forall \mathrm{E} \in \Sigma$.

Εδώ τελείωσε η απόδειξη του θεωρήματος!

Παρατήρηση: Ας υποθέσουμε ότι το $\mathrm{A}(\Omega) = \{\frac{\vec{\mu}(\mathrm{E})}{\lambda(\mathrm{E})}, \mathrm{E} \in \Sigma, \lambda \mathrm{E} > 0\}$ είναι φραγμένο από το 1. Έστω $\varphi_n = g_n - g_{n-1}, n \ge 1$. Είναι φανερό ότι $\varphi_n = \sum_i x_i^n X_{E_i^n}$, με $x_i^n \in X, \|x_i^n\| \le \frac{1}{2^n}$. Μπορούμε να ορίσουμε $\vec{v} : S \to l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ως εξής $(\vec{v}(\mathrm{E}))_{n,i} = \frac{1}{2^n} \lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{E}_i^n)$. Έστω $\mathrm{T} : l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to X$ ένας (φραγμένος) γραμμικός τελεστής έτσω ώστε $T(e_{n,i}) = 2^n x_i^n$ όπου το $e_{n,i}$ είναι το n, i μοναδικό διάνυσμα της συνηθισμένης βάσης του $l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Μπορεί εύκολα να δεί κανείς ότι $T \circ \vec{v} = \vec{\mu}$.

Παρατήρηση: Έστω $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ ένα πραγμάτικο μέτρο στο $[0, 1]$ και έστω ότι $|\mu(E)| \leq \lambda(E)$ όπου λ το μέτρο *Lebesgue*. Με τη μέθοδο της αποδείξεως του προηγούμενου θεωρήματος μπορούμε να αποδείξουμε ότι το μέτρο μ έχει μια Radon-Nikodyn παράγωγο. Έτσι έχουμε μια πολύ απόδειξη του κλασικού Radon-Nikodyn θεωρήματος. Η παρατήρηση αυτή οφείλεται στον R.E.Huff.

3. Martingales

Έστω $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ ένας χώρος πιθανότητας και $\Sigma' \subset \Sigma$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Με X συμβολίζουμε κάποιο χώρο Banach. Η συνάρτηση $g \in L^1_X(\lambda)$ καλείται conditional expectation της f ως προς Σ' εάν η g είναι Σ'-μετρήσιμη και $\int_E g d\lambda = \int_E f d\lambda, \forall E \in \Sigma'$. Με $E(f \mid \Sigma')$ συμβολίζουμε την conditional expectation της f ως προς Σ'.

Παρατήρηση: Το κλασικό θεώρημα Radon - Nikodym δίδει αμέσως ότι εάν $f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση και $\Sigma' \subset \Sigma$ μια σ-υποάλγεβρα της Σ τότε η $E(f \mid \Sigma')$ υπάρχει. Πραγματικά εάν η $\Sigma' \to \mathbb{R}$ είναι το μέτρο $\mu(A) = \int_A f d\lambda$ τότε $m \ll \lambda$ και η $E(f \mid \Sigma')$ είναι η Radon-Nikodym παράγωγος $\frac{dm}{d\lambda}$. Ο ίδιος συλλογισμός αποδεικνύει ότι αν $f : \Omega \to X$ είναι μια bohner ολοκληρώσιμη συνάρτηση και ο X έχει την RNP τότε η $E(f \mid \Sigma')$ υπάρχει.

Αυτό που είναι σημαντικό είναι ότι ακόμα και εάν ο χώρος X δεν έχει την RNP μπορούμε να ορίσουμε conditional expectation συναρτήσεων στον L^1_X ως εξής: Ξεκινάμε από τις απλές συναρτήσεις της μορφής $f = \sum_{i=1}^{n} x_i X_{A_i}, A_i \in \Sigma, x_i \in X$. Ορίζουμε $E(f \mid \Sigma') = \sum_{i=1}^{n} x_i E(X_{A_i}/\Sigma')$ όπου η $E(X_{A_i}/\Sigma')$ είναι η πραγματική coditional expectation της συνάρτησης $X_{A_i} \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$.

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή (που η f είναι απλή συνάρτηση) έχουμε

1. Η $g = E(f \mid \Sigma')$ είναι Σ' μετρήσιμη

2. $\int_A g d\lambda = \sum x_i \int_A E(X_{A_i}/\Sigma') = \sum x_i \int_A X_{A_i} = \int_A f d\lambda, \forall A \in \Sigma'$.

3. Η $E(f \mid \Sigma')$ είναι γραμμική ως προς την f.

4. Η $\|E(f|\Sigma')(\omega)\| \leq E(\|f(\cdot)\|/\Sigma')(\omega)$

Εάν τώρα $f \in L^1_X(\lambda)$ είναι μια οποιαδήποτε Bohner ολοκληρώσιμη συνάρτηση

$f : \Omega \to X$ τότε η f μπορεί να προσεγγιθεί από απλές συναρτήσεις (S_n). Η ακολουθία $(\mathrm{E}(s_n/\Sigma')_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy στον $L_X^1(\lambda)$ και το όριο της είναι ανεξάρτητο από την ακολουθία (S_n). Το όριο αυτό είναι η $\mathrm{E}(f \mid \Sigma')$.Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο εξής

3.1 Θεώρημα: Έστω $f \in L_X^1(\Omega, \Sigma, \lambda), \Sigma' \subset \Sigma$ μια σ-υποάλγεβρα της Σ. Υπάρχει $g = \mathrm{E}(f \mid \Sigma')$ (ουσιαστικά μοναδική) έτσι ώστε

α. $\mathrm{E}(f \mid \Sigma') \in L_X^1(\Omega, \Sigma, \lambda)$

β. $\int_A g d\lambda = \int_A f d\lambda, \forall A \in \Sigma'$

Ο τελεστής $\mathrm{E}(\bullet/\Sigma') : L_X^1 \to L_X^1$ είναι γραμμικός και ικανοποιεί τα εξής:

1. $\|\mathrm{E}(f|\Sigma')(\omega)\| \leq \mathrm{E}(\|f(\bullet)\|/\Sigma')(\omega)$ λ-σχεδόν παντού

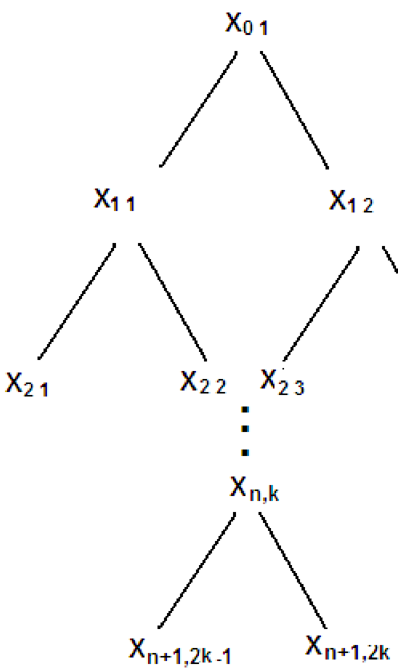
2. $\|\mathrm{E}(f|\Sigma')(\omega)\| \leq \|f\|_1, \forall \in L_X^1(\lambda)$

3. Εάν $\Sigma'' \subset \Sigma'$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\mathrm{E}(\mathrm{E}(f \mid \Sigma'))/\Sigma'') = \mathrm{E}(\mathrm{E}(f \mid \Sigma'')/\Sigma') = \mathrm{E}(f \mid \Sigma'')$.

3.2 Ορισμός: Έστω $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \ldots \Sigma_n \ldots \subset \Sigma$ μια αύξουσα ακολουθία $(f_n, \Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}, f L_X^1(\lambda)$ καλείται martingale εάν $\mathrm{E}(f_{n+1}/\Sigma_n) = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1: Έστω$\in L_X^1(\lambda)$ και $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \ldots \subset \Sigma_n$ μια αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρων. Έστω $f_n = \mathrm{E}(f/\Sigma_n)$. Τότε η ακολουθία (f_n, Σ_n) είναι ένα martingale.

Παράδειγμα 2: Έστω $(x_{n,k}), n = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots, 2^n$ ένα δένδρο σ΄ένα χώρο Banach X. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $(x_{n,k})$ είναι φραγμένη και $x_{n,k} = \frac{1}{2}(x_{n+1}, 2k - 1 + x_{n+1,2k})$ $\forall n = 0, 1, 2, \ldots, 1 \leq k \leq 2^n$. Έστω $I_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}], n = 0, 1, 2, \ldots, 1 \leq k \leq 2^n$ η ακολουθία των δυαδικών διαστημάτων. Με Σ_n συμβολίζουμε την πεπερασμένη άλγεβρα που γεννάται από την $I_{n,k}$ $1 \leq k \leq 2$.



Μπορούμε να ορίσουμε ένα martingale με τιμές στο χώρο X ως εξής:

$$\xi_0 = x_{01} X_{I_{o1}}$$

$$\xi_1 = x_{11} X_{I_{11}} + x_{12} X_{12}$$

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{2^n} x_{n,k} X_{I_{n,k}} \quad , \xi_n : [0,1] \to X.$$

Μπορεί εύκολα να δεί κανείς ότι $\int_{[0,1]} \xi_0 = \int_{[0,1]} \xi_1$ αφού $x_{01} = \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12})$. Ομοίως έχουμε ότι $\mathrm{E}(\xi_{n+1}/\Sigma_n) = \xi_{n.}$ Δηλαδή η ακολουθία (ξ_n, Σ_n) είναι ένα martingale.

Ένα δένδρο $(x_{n,k})$ καλείται ε-δένδρο εάν $\|x_{n+1,2k-1} - x_{n,k}\| > \varepsilon \;\; \forall n \forall k \;\; 1 \leq k \leq 2.$

Είναι φανερό ότι το martingale $(\xi_n \Sigma_n)$ που αντιστοιχεί σ ΄ένα ε-δένδρο δεν μπορεί να συγκλίνει αφού $\|\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)\| > \varepsilon, \forall t \in [0,1]$. Στον $L^1[0,1]$ υπάρχει ένα 1-δένδρο. Πραγματικά εάν $h_{n,k} = \frac{X_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}}{\frac{1}{2^n}}, 1 \leq k \leq 2^n, n = 0, 1, \ldots$ έχουμε ότι $\|h_{n,k}\|_1 \leq 1$ $\forall n \forall k, 1 \leq k \leq 2^n$ και $\|h_{n+1,2k-1} - h_{n+1,2k}\|_1 = 1.$ Είναι επίσης φανερό ότι $(h_{n,k})$ είναι δένδρο δηλαδή $h_{n+1,2k-1} + h_{n+1,2k} = 2h_{n,k}, \forall n, \forall k, 1 \leq k \leq 2^n.$

3.3 MAXIMAL INEQUALITY [Bou] : Έστω $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \ldots \subset \Sigma_n \subset \Sigma$ μια αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών από μετρήσιμα υποσύνολα του Ω.

Έστω (h_n) μια ακολουθία θετικών πραγματικών συναρτήσεων έτσι ώστε:

1. Η h_j είναι η Σ_j μετρήσιμη $\forall j \in \mathbb{N}$

2. Εάν $i \leq n, \mathrm{A} \in \Sigma_j$ τότε $\int_{\mathrm{A}} h_i d_\lambda \leq \int_{\mathrm{A}} h_n d_\lambda$ και

3. $\sup_j \int_\Omega h_j < \infty$

Τότε $\forall c > 0$ $\lambda(\{\omega \in \Omega : \sup_j \int_\Omega h_j(\omega) > c\}) \leq \frac{1}{c} \sup_j \int_\Omega h_j d\lambda.$

Απόδειξη: Έστω $n \in \mathbb{N}$ ένας σταθερός φυσικός αριθμός. Με A_1συμβολίζουμε το σύνλο $\{\omega \in \Omega : h_1(\omega) > c\}$.

Εάν $2 \leq i \leq n$ με A_i συμβολίζουμε το σύνολο $\mathrm{A}_i = \{\omega \in \Omega, h_1(\omega) \leq c, \ldots, h_{i-1}(\omega) \leq c,$ και $h_1(\omega) > c$. Είναι φανερό ότι $\mathrm{A}_i \in \Sigma_i$ και $\mathrm{A}_\iota \cap \mathrm{A}_j = \emptyset, i \neq j, 1 \leq i \leq n.$

Παρατηρούμε ότι

$c \cdot \lambda(\{\omega \in \Omega : \sup_{j \leq n} \int_\Omega h_j(\omega) > c\}) = c\lambda(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n c\lambda(\mathrm{A}_i) \leq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} h_i d\lambda \leq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} h_n d\lambda \leq \int_\Omega h_n d\lambda \leq \sup_j$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι $\lambda(\{\omega : \sup_{j \leq n} \int_\Omega h_j(\omega) > c\}) \leq \frac{1}{c} \sup_j \int_\Omega h_j$. Είναι φανερό ότι εάν $n \to \infty$ έχουμε $\lambda(\{\omega : \sup_j h_j(\omega) > c\}) \leq \frac{1}{c} \sup_j \int_\Omega h_j$.

3.4 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ LEVY - DEVB [Bou] : Έστω $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ χώρος πιθανότητας και $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \Sigma_n \ldots \subset \Sigma$ ακολουθία από σ-υποάλγεβρες της Σ των οποίων η ένωση γεννά τη Σ. Έστω $f_n = E(f/\Sigma_n)$ όπου f μια οποιαδήποτε Bohner ολοκληρώσιμη συνάρτηση $(f \in L_X^1(\lambda))$. Τότε $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$ λ-σχεδόν παντού και $\lim_n \|f_n - f\|_1 = 0.$

Απόδειξη: Έστω $\varphi = \{f \in L_X^1(\lambda)$ έτσι ώστε $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \to 0$ λ-σχεδόν παντού και $\|f_n - f\|_1 \to 0$ όταν $n \to \infty\}$. θα αποδειχθεί ότι το φ είναι κλειστό και πυκνό στον $L_X^1(\lambda)$

Α΄) Το φ είναι πυκνό στον $L^1_X(\lambda)$: Εάν $f \in L^1_X(\Omega, \Sigma_n, \lambda)$ (δηλαδή εάν η f είναι Σ_n-μετρήσιμη τότε $\mathrm{E}(f/\Sigma_k) = f\ \forall k \geq n \Rightarrow f \in \varphi$. Είναι φανερό λοιπόν ότι $\varphi \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} L^1_X(\Omega, \Sigma_n, \lambda)$. Κάθε συνάρτηση της μορφής $x \cdot X_A, x \in X \in A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$ ανήκει στο φ. Αφού η $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$ είναι πυκνή στην Σ μπορούμε να δούμε ότι και κάθε συνάρτηση της μορφής $x \cdot X_{B,}x \in X, B \in \Sigma$ ανήκει στην φ. Παρατηρούμε ότι ο γραμμικός χώρος φ περιέχει το πυκνό σύνολο των απλών συναρτήσεων $\Rightarrow$ φ είναι πυκνό στον $L^1_X(\Omega, \Sigma, \lambda)$.

Β΄) Ο φ είναι κλειστός στον $L^1_X(\lambda)$. Έστω f στην κλειστή θήκη του φ. $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$ $\exists g \in \varphi$ έτσι ώστε $\|f - g\| < \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \delta$. Έστω $g_n = E(G/\Sigma_n)$. Για όλα σχεδόν τα $\omega \in \Omega$ έχουμε $\|f_n(\omega) - f_\kappa(\omega)\| \leq \|g_n(\omega) - g_\kappa(\omega)\| + \|(f_n - g_n)(\omega) - (f_k - g_k)(\omega)\| \leq \|g_n(\omega) - g_\kappa(\omega)\| + \|E(f$

Έστω $h_j(\omega) = \mathrm{E}(\|f - g\|/\Sigma_j)(\omega)$. Από τις παραπάνω ανισότητες και από το ότι $g \in \varphi$ έχουμε ότι $\limsup_{n,k\to\infty} \|f_n(\omega) - f_k(\omega)\| \leq 2 \sup_j h_j(\omega), \lambda$-σχεδόν παντού. Η ακολουθία (h_j) ικανοποιεί τις συνθήκες της maximal inequality *(3.3)* και επομένως $\lambda(\{\omega : \limsup_{n,k\to\infty} \|f_n(\omega) - f_k(\omega)\| > \varepsilon\}) \leq \lambda(\{\omega : 2 \sup_j h_j(\omega) > \varepsilon\}) \leq \frac{2}{\varepsilon} \sup_j \|h_j\|_1 = \frac{2}{\varepsilon} \sup_j \int_\Omega$

Αφού τα ε, δ ήταν οποιοιδήποτε θετικοί αριθμοί είναι φανερό ότι το όριο $\lim_n (\omega) = \widehat{f}(\omega)$ υπάρχει σχεδόν παντού. Τώρα θα μπορέσουμε να αποδείξουμε ότι η f που πήραμε στο $\overline{\varphi}$ ανήκει στο φ .$\forall \varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $g \in L^1_X(\Omega, \Sigma_{\mathrm{N}}, \lambda)$ για κάποιο $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Όταν $n \geq \mathrm{N}$ έχουμε $\|f - f_n\|_1 < \|f - g\|_1 + \|g - E(g/\Sigma_n)\|_1 + \|E(g - f/\Sigma_n\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \|g - f\|_1 = 0.$ Αυτό συνεπάγεται ότι κάποια υπακολουθία (f_{n_i}) της (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού στην f $\Rightarrow f(\omega) = \lim_i f_{n_i}(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_n f_n(\omega)\ \lambda$.

3.5 Θεώρημα [D-U] : Έστω X ένας χώρος Banach και $K \subset X$ είναι κλειστό, φραγμένο σύνολο με την RNP. Τότε κάθε martingale με τιμές στο K συγκλίνει σχεδόν παντού.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το K έχει την RNP για το χώρο $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ και ότι $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_n$ είναι μια αύξουσα ακολουθία σ-υποάλγεβρων της Σ και ότι η $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$ γεννά την Σ. Έστω (f_n, Σ_n) ένα martingale με τιμές στο K. Ορίζουμε τα διανυσματικά μέτρα $\vec{\mu}(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f_n d\lambda, \forall \mathrm{A} \in \Sigma, n \in \mathbb{N}$. Τα $\vec{\mu}(n)$ είναι συνεχή ως προς λ ($\vec{\mu}_n \ll \lambda$). Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι το "average range" $A(\vec{\mu}_n) = \{\frac{\vec{\mu}_n(\mathrm{E})}{\lambda(\mathrm{E})}, \lambda(\mathrm{E}) > 0\}$ περιέχεται στο K . Διότι εάν $x^* \in X^*$, τότε $x^*(\frac{\vec{\mu}_n(A)}{\lambda(A)}) = \frac{1}{\lambda\mathrm{A}} \int_{\mathrm{A}} x^* f_n \lambda_\lambda \leq \sup\{x^*(x) : x \in K\}$. Αφού το K είναι (ασθενώς) κλειστό , κυρτό $\Rightarrow$ $\frac{\vec{\mu}_n(\mathrm{A})}{\lambda(\mathrm{A})} \in \mathrm{K}$. Παρατηρούμε τώρα ότι το $\lim_n \vec{\mu}_n(A)$ υπάρχει

$\forall A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$ αφού το (f_n, Σ_n) είναι martingale και η ακολουθία $\int_A f_n d\lambda$ είναι τελικά σταθερή για $A \in \Sigma_n$. Μάλιστα μπορεί να δειχθεί ότι το όριο $\lim_n \vec{\mu}_n(A)$ υπάρχει $\forall A \in \Sigma$ αφού η $\cup \Sigma_n$ γεννά την Σ. Πραγματικά $\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \Sigma \ \exists B \in \Sigma_N$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\lambda(A \nabla B) < \frac{\varepsilon}{2M}$ όπου $M = \sup\{\|x\|, x \in K\}$. Εάν $n \geq N$ έχουμε

$$\left\| \int_A f_n d\lambda - \int_A f_N d\lambda \right\| \leq \left\| \int_B f_n d\lambda - \int_B f_N d\lambda \right\| + \int_{A\nabla B} \|f_n\| d\lambda + \int_{A\nabla B} \|f_N\| d\lambda \leq 0 + 2\lambda(A \triangle B)M < \varepsilon.$$

Αφού λοιπόν η ακολουθία $\vec{\mu}_n(A)$ είναι Cachy το όριο $\vec{\mu}_n(A) = \lim_{n \atop \forall A \in \Sigma} \vec{\mu}_n(A)$ υπάρχει. Το θεώρημα των Vitali - Hahn -Saks *(3.6)* συνεπάγεται ότι το $\vec{\mu} : \Sigma \to X, \vec{\mu}(A) = \lim \vec{\mu}_n(A)$ είναι μέτρο (δηλαδή είναι αριθμήσιμα προσθετικό). Αφού $\vec{\mu} \ll \lambda, A(\vec{\mu}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A(\vec{\mu}_n) \subset K$ και το K έχει την RNP υπάρχει $f \in L^1_X(\Omega, \Sigma, \lambda)$ έτσι ώστε $\vec{\mu}(A) = \int_A f d\lambda \ \forall A \in \Sigma$. Για $A \in \Sigma_n$ έχουμε $\int_A f d\lambda = \vec{\mu}(A) = \vec{\mu}_n(A) = \int_A f_n d\lambda \Rightarrow E(f/\Sigma_n) = f_n$ λ-σχεδόν παντού. Από το θεώρημα του Levy-Doob *(3.6)* έχουμε ότι $\lim_n \|f_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$ λ –σχεδόν παντού. Απεδείχθη λοιπόν ότι εάν το K έχει την RNP τότε κάθε martingale με τιμές στο K συγκλίνει σχεδόν παντού.

Στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα των Vitali-Hahn-Saks. Για ¨πληρώτητα ¨ παραθέτουμε την απόδειξη του από τον Dunford-Schwartz Yel.Ip155.

3.6 Θεώρημα VITALI-HAHN-SAKS [D-S] : Έστω $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ χώρος πιθανότητας, X χώρος Banach και $\vec{\mu}_n : \Sigma \to X$ μια ακολουθία από λ-συνεχή ($\vec{\mu} \ll \lambda$) διανυσματικά μέτρα. Εάν το όριο $\lim_n \vec{\mu}_n(E)$ υπάρχει $\forall E \in \Sigma$ τότε $\lim_{\lambda(E)>0} \vec{\mu}_n(E) = 0$ ομοιόμορφα $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$ Επιπλέον το $\vec{\mu} : \Sigma \to X$, $\vec{\mu}(E) = \lim_n \vec{\mu}_n(E)$ είναι διανυσματικό μέτρο.

Απόδειξη: Μπορεί εύκολα να δεί κανείς ότι μπορούμε να ορίσουμε μια μετρική στο Σ. Η απόσταση των συνόλων $A, B \in \Sigma$ θα είναι $\lambda(A \nabla B)$. Μπορεί να αποδειχεί ότι αν αυτός ο μετρικός χωρός είναι πλήρης. Κάθε $\vec{\mu}_n : \Sigma \to X$ είναι συνεχής συνάρτηση από τον μετρικό χώρο Σ στο X επειδή $\vec{\mu}_n \ll \lambda$. Τα σύνολα $\Sigma_{n,m} = \{E : E \in \Sigma, \left\| \vec{\mu}_n(E) - \mu_m(E) \right\| \leq \varepsilon$ είναι κλειστά $\forall \varepsilon > 0$. Επομένως και το σύνολο $\Sigma_\rho = \bigcap_{n,m \geq p} \Sigma_{n,m}$ είναι κλειστό στον πλήρη μετρικό χώρο Σ. Αφού το $\lim_n \mu(E)$ υπάρχει $\forall E \in \Sigma$ έχουμε ότι $\Sigma = \bigcup_{\rho=1}^{\infty} \Sigma_\rho$. Από το θεώρημα του Baire κάποιο από τα Σ_ρ έχει εσωτερικό σημείο. Υπάρχει λοιπόν ακέραιος $q, r > 0, A \in \Sigma$ έτσι ώστε $\forall E$ στη σειρά K με κέντρο το A και ακτίνα r να έχουμε $\left\| \vec{\mu}_n(E) - \vec{\mu}_m(E) \right\| \leq \varepsilon, n, m \geq 1$. Ας πάρουμε $0 < \delta < r$ έτσι ώστε $\left\| \vec{\mu}_n(\widetilde{B}) \right\| < \varepsilon \ \ n = 1, 2, 3, \ldots, q-1, q \ \ \forall \widetilde{B}$ με $\lambda(\widetilde{B}) < \delta$. Εάν τώρα $\lambda B < \delta$ για κάποιο B έτσι ώστε $A \backslash B, A \cup B$ να ανήκουν στη σφαίρα $K = \{E \in \Sigma : \lambda(A \nabla E) < r\}$. Θα

έχουμε
$\vec{\mu}_n(\mathrm{B}) = \vec{\mu}_q(\mathrm{B}) + (\vec{\mu}_n(\mathrm{B}) - \vec{\mu}_q(\mathrm{B})) \ = \vec{\mu}_q(B) + (\vec{\mu}_n(A \cup B) - \vec{\mu}_q(A \cup B)) \ - (\vec{\mu}_n(A \backslash B) - \vec{\mu}_q(A \backslash B$
Έχουμε δείξει λοιπόν ότι
$(*)\ \lim_{\lambda(\mathrm{E}) \to 0} \vec{\mu}_n(\mathrm{E}) = 0$ ομοιόμορφα για $n = 1, 2, 3, \ldots$

Απομένει να δειχθεί ότι $\vec{\mu}$ είναι αριθμήσιμα προσθετικό. Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{\mu}_n(\mathrm{E}_m) \to 0$ για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\mathrm{E}_0 \supset \mathrm{E}_1 \supset \ldots \supset \mathrm{E}_m \ldots$ με $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \emptyset$. Έχουμε για μια τέτοια ακολουθία $\{\mathrm{E}_\iota\}$ ότι $\lambda(\mathrm{E}_m) = \sum_{k=m}^{\infty} \lambda(\mathrm{E}_n \backslash \mathrm{E}_{k+1})$. Από την $(*)$ έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\left\| \vec{\mu}_n(\mathrm{E}_m) \right\| < \varepsilon \ \ \forall m \geq m_\varepsilon, n = 1, 2, \ldots \Rightarrow \left\| \vec{\mu}(E_m) \right\| \leq \varepsilon$
$\forall m \geq m_\varepsilon \Rightarrow \vec{\mu}(\mathrm{E}_m) \underset{m \to \infty}{\to} 0$ A.E.D.

3.7 Λήμμα: Έστω K *ένα κυρτό κλειστό φραγμένο υποσύνολο του* X *. Έστω* $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_n$ *μια αύξουσα ακολουθία* σ*-αλγεβρών στο* $[0,1]$ *και* $\xi_n : [0,1] \to \mathrm{K}$ *μια ακολουθία από* Σ_n *–μετρήσιμες συναρτήσεις για την οποία* $\sum_n \|\xi_n - E_n(j_{n+1})\| < \varepsilon$. *(Εδώ με* E_n *συμβολίζουμε την Expectation ως προς* Σ_n*). Τότε υπάρχει ένα martingale* (ξ_n', Σ_n) *με τιμές στο* $\mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $\|\xi_n - \xi_n'\|_1 < \varepsilon$.

Απόδειξη: fix $k \in \mathbb{N}$.

Έχουμε ότι $\|\xi_n - \mathrm{E}_\kappa(\xi_{\kappa+1})\|_1 + \sum_{n>k} \|E_k(\xi_n) - E_k(\xi_{n+1})\|_1 < \varepsilon$. Η ακολουθία $(\mathrm{E}_\kappa(\xi_n))_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι Cauchy και επομένως συγκλίνει στον L_X^1 σ ΄ένα όριο ξ_k'. Είναι φανερό ότι $\|\xi_\kappa - \xi_\kappa'\| < \varepsilon$. Η ξ_κ' παίρνει τιμές (σχεδον παντου) στο σύνολο K. Παρατηρούμε ότι $\xi_{\kappa+1}' = \lim_{n \to \infty} E_{\kappa+1}(\xi_n)$ επομένως $E_\kappa(\xi_{\kappa+1}') = \lim_{n \to \infty} E_\kappa(\xi_n) = \xi_\kappa'$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $(\xi_\kappa', \Sigma_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}}$ είναι ένα martingale.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το εξής θεώρημα

3.8 Θεώρημα [D-U] : Έστω K *ένα κλειστό φραγμένο κυρτό υποσύνολο του* X. *Εάν κάθε martingale* $\xi_n : [0,1] \to \mathrm{K}$ *συγκλίνει σχεδόν παντού τότε κάθε υποσύνολο του* K *είναι dentable.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $\mathrm{A} \subset \mathrm{K}$ δεν είναι dentable. Αυτο σημαίνει ότι $\exists \varepsilon > 0$ έτσι ώστε $\forall x \in A, x \in \overline{co}(A \backslash B(x, \varepsilon))$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_n, \ldots$ σ –αλγεβρών από (μετρήσιμα) υποσύνολα του$[0,1]$ και μια ακολουθία $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\xi_n : [0,1] \to K$ έτσι ώστε

1. Κάθε Σ_n είναι πεπερασμένη

2. $\|\xi_{n+1} - \xi_n\| \geq \varepsilon$

3. Κάθε ξ_n είναι Σ_n-μετρήσιμη και παίρνει τιμές στο A.

4. $\sum\limits_n \|\xi_n - \mathrm{E}_n[\xi_{n+1}]\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$.

Η κατασκευή των Σ_n και των ξ_n θα γίνει επαγωγή ως προς n.

α. $\Sigma_1 = \{\varphi, [0,1]\}, \xi_1 = x \cdot X_{[0,1]}$ όπου x είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο του A.

β. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει την Σ_n και ξ_n. Έστω $(\mathrm{I}_i)_{i=1}^{j}$ η διαμέριση του $[0,1]$ που γεννά την Σ_n , και ας υποθέσουμε ότι η $\xi_n : [0,1] \to \mathrm{A}$ είναι της μορφής $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^{j} x_i X_{I_i} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_j \in A)$.

Fix **i**. Γνωρίσουμε ότι $x_i \in \overline{co}(A \backslash B(x_i, \varepsilon))$ και επομένως υπάρχουν θετικοί αριθμοί $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \ldots, \lambda_{i,k_i}$, και στοιχεία $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,k_i}$ του συνόλου $\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}(x_{i,\varepsilon})$ έτσι ώστε

i. $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \ldots, \lambda_{i,k_i} = 1$

ii. $\|x_i - (\lambda_{i,1} x_{i,1} + \ldots + \lambda_{i,k_i} x_{i,k_i}\| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 2^{-n}$. Έστω $\mathrm{I}_{i,1}, \mathrm{I}_{i,2}, \ldots, \mathrm{I}_{i,k_i}$ μια διαμέριση του I_i έτσι ώστε $\lambda(\mathrm{I}_{i,\kappa}) = \lambda_{i,\kappa} \lambda(\mathrm{I}_i)$.

(Εδώ βέβαια το λ είναι το μέτρο Lebesgue).

Ορίζουμε Σ_{n+1} να είναι η άλγεβρα που γεννάται από το $\{\mathrm{I}_{i,\kappa} : 1 \leq i \leq j, 1 \leq k \leq k_i\}$. Επίσης ορίζουμε $\xi_{n+1} : [0,1] \to X$ να είναι $\xi_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{j} \sum\limits_{k=1}^{k_i} x_{i,k} X_{I_{i,k}}$. Επειδή $\|x_i - x_{i,k}\| \geq \varepsilon \forall i \; \kappa\alpha\iota \; k$ έχουμε ότι $\|\xi_{n+1} - \xi_n\|_1 > \varepsilon$.

Παρατηρούμε ότι

$\mathrm{E}n(\xi_{n+1}) = \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=1}^{k_j} x_{i,k} \frac{\lambda(I_{i,k})}{\lambda(I_i)} X_{I_i} \Rightarrow \| \xi_n - E_n(\xi_{n+1}) \|_1 \leq \sum_{i=1}^{j} \left\| x_i - \sum_{k=1}^{k_i} \lambda_{i,\kappa} x_{i,k} \right\| \lambda(\mathrm{I}_i) < \frac{\varepsilon}{3} 2^{-n}$. Αυτό συνεπάγεται $\Sigma \| \xi_n - E_n(\xi_{n+1}) \|_1 < \frac{\varepsilon}{3} \cdot —$. Μπορούμε να πούμε ότι μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει το εξής θεώρημα.

3.9 Θεώρημα: Έστω K *ένα κυρτό, κλειστό, φραγμένο υποσύνολο του* X*. Τα επόμενα είνα ισοδύναμα.*

(1). Το K *έχει την RNP*

(2). Κάθε martingale με τιμές στο K *συγκλίνει σχεδόν παντού*

(3). Κάθε υποσύνολο του K *είναι martingale*

(3)⇒(1) *(2.4)*
(1)⇒(2) *(3.5)*
(2)⇒(3) *(3.8)*

4 ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ L^1

Έστω $\mathrm{T} : L^1[0,1] \to X$ ένας τελεστής και $\mathrm{A} \subset [0,1]$ ένα σύνολο θετικού μέτρου. Με Γ_{A} συμβολίζουμε το σύνολο $\Gamma_{\mathrm{A}} = \{\mathrm{T}\varphi : \operatorname{supp}\varphi \subset \mathrm{A}, \varphi \geq 0, \int \varphi = 1\}$.

4.1 Λήμμα [B1] : Έστω $S(\Gamma_{\mathrm{A}}, x^*, \alpha)$ ένα slice του συνόλου Γ_{A} . Τότε υπάρχει $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}, \lambda\mathrm{B} > 0$ έτσι ώστε $\Gamma_{\mathrm{B}} \subset S(\Gamma_{\mathrm{A}}, x^*, a)$.

Απόδειξη: Έστω $\gamma = \sup x^*(\Gamma_{\mathrm{A}}) - a$ και $\varphi \geq 0, \operatorname{supp}\varphi \subset \mathrm{A}, \int \varphi = 1$ έτσι ώστε $\int \varphi \mathrm{T}^*(x^*) > \gamma$.

Το σύνολο $\mathrm{K} = \{y \in L^1(\mathrm{A}) : y \geq 0 \ \ \kappa\alpha\iota \int y\mathrm{T}^*(x^*) \leq \gamma \|y\|_1\}$ είναι ένας κυρτός κλειστός κώνος του $L^1(\mathrm{A})$. Είναι φανερό ότι $\varphi \notin \mathrm{K}$ και επομένως από το θεώρημα Hahn-Banach $\exists g \in L^\infty(A)$ έτσι ώστε $\int \varphi g > \sup\limits_{y \in \mathrm{K}} \int yg \geq 0$.

Το σύνολο $\mathrm{B} = [g > 0]$ είναι ένα υποσύνολο του A και έχει θετικό μέτρο. Εάν τώρα $y \geq 0, \int y = 1$ και $\operatorname{supp} y \subset \mathrm{B}$ έχουμε ότι $\int y\mathrm{T}^*(x^*) > \gamma$ (αφού $y \notin \mathrm{K}$)
$\Rightarrow x^*(Ty) > \sup x^*(\Gamma_{\mathrm{A}}) - \alpha$

Αυτό σημαίνει ότι $\Gamma_{\mathrm{B}} \subset S(\Gamma_{\mathrm{A}}, x^*, a)$.

Αναπαραστάσιμοι Τελεστές

4.2 Ορισμός: Έστω X ένας χώρος Banach. Ένας τελεστής $\mathrm{T} : L^1[0,1] \to X$ ένας τελεστής. Ας υποθέσουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \forall \mathrm{A} \subset [0,1]$ θετικού μέτρου $\exists \mathrm{B} \subset \mathrm{A}, (\lambda\mathrm{B} > 0)$ έτσι ώστε $diam\Gamma_{\mathrm{B}} < \varepsilon$. Τότε ο τελεστής T είναι αναπαραστάσιμος.

Απόδειξη: Το διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu} : \Sigma \to X, \vec{\mu}(\mathrm{A}) = \mathrm{T}(X_{\mathrm{A}})$ έχει την ιδιότητα : $\forall \mathrm{E} \subset [0,1]$ με $\lambda\mathrm{E} > 0 \ \exists \ \mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}$ έτσι ώστε το average range $\mathrm{A}(\vec{\mu}) = \{\frac{\vec{\mu}(\mathrm{E}')}{\lambda(\mathrm{E}')}, \mathrm{E}' \subset \mathrm{E}_1, \lambda\mathrm{E}' > 0\}$ να έχει διάμετρο μικρότερη του ε. Όπως προκύπτει από την απόδειξη του θεωρήματος *(2.4)* το $\vec{\mu}$ έχει Radon-Nikodym παράγωγο η οποία θα είναι η συνάρτηση που "αναπαραστά" τον T.

4.3 Θεώρημα: Έστω $\mathrm{K} \subset X$ ένα κυρτό κλειστό υποσύνολο του X με την RNP. Εάν $\mathrm{T} : L^1[0,1] \to X$ είναι ένας τελεστής έτσι ώστε $\Gamma_{[0,1]} = \{\mathrm{T}\varphi : \varphi \geq 0, \int \varphi = 1\} \subset \mathrm{K}$ τότε ο T είναι αναπαραστάσιμος.

Απόδειξη: Εάν $A \subset [0,1], \lambda(A) > 0$ τότε το σύνολο $\Gamma_A = \{T\varphi : \varphi \geq 0 \ \mathrm{supp}\varphi \subset A, \int \varphi 1\}$ είναι dentable και επομένως $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ slice S του Γ_A έτσι ώστε $diamS < \varepsilon$. Από το λήμμα *(4.1)* $\exists B \subset A, \lambda B > 0$ έτσι ώστε $\Gamma_B \subset S$ και ότι ο τελεστής T είναι αναπαραστάσιμος.

4.4 Θεώρημα: Έστω K ένα κλειστό κυρτό φραγμένο υποσύνολο του X. Εάν κάθε τελεστής $T : L^1 \to X$ έτσι ώστε $\Gamma_{[0,1]} \subset K$ είναι αναπαραστάσιμος τότε κάθε martingale με τιμές στο K συγκλίνει σχεδόν παντού (και επομένως το K έχει την RNP).

Απόδειξη: Έστω $\xi_n : [0,1] \to X$ ένα martingale με τιμές στο K. Θεωρούμε τον τελεστή $T : L^1 \to X$, $T\varphi = \lim_n \int \xi_n \varphi$. (Το όριο υπάρχει για κάθε απλή συνάρτηση φ και επομένως $\varphi \in L^1$).

Έστω $g \in L_X^\infty$ η παράγωγος του T. Έχουμε ότι $\int \varphi g = \lim_n \int \xi_n \varphi, \varphi \in L^1$. Αυτό σημαίνει ότι $E(g/\Sigma_n) = \xi_n$. Από το θεώρημα του Levy-Doob έχουμε ότι το martingale συγκλίνει σχεδόν παντού στην g.

4.5 Θεώρημα (Danford-Pettis) [D-U] : Έστω $T : L^1 \to X$ ένας αναπαραστάσιμος τελεστής. Εάν $K \subset L^1$ και το σύνολο $T(K)$ είναι norm-συμπαγές υποσύνολο του X.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $\exists g \in L_X^\infty$ έτσι ώστε $Tf = \int fgd\lambda, \forall f \in L^1$. Έστω K ένα φραγμένο ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο (uniformly intergalle) υποσύνολο του L^1. Διαλέγουμε μια ακολουθία (g_n) απλών συναρτήσεων η οποία να συγκλίνει σχεδόν παντού στην g. Από το θεώρημα του Egoroff μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο E_1 έτσι ώστε $\lim_n g_n = g$ ομοιόμορφα στο E_1 και το μέτρο $\lambda([0,1] \backslash E_1)$ να είναι τόσο μικρό ώστε

$$\int_{[0,1]\backslash E_1} |f| d\lambda < \frac{E}{\|T\|+1} \quad \forall f \in K.$$

Αφού η συνάρτηση $g \cdot X_{E_1} : [0,1] \to X$ έχει (σχετ.) συμπαγές πεδίο τιμών, ο τελεστής $f \mapsto \int_{E_1} fgd\lambda$ είναι συμπαγής και επομένως το σύνολο $\{\int_{E_1} fgd\lambda , f \in K\}$ είναι σχετ. συμπαγής.

Παρατηρούμε ότι για $f \in K$

$$\left\| \int_{[0,1]\backslash E_1} fgd\lambda \right\| \leq \frac{\|T\| \cdot \varepsilon}{\|T\|+1} < \varepsilon.$$

Το σύνολο $\{\mathrm{T}(f) : f \in \mathrm{K}\} = \{\int_{E_1} fgd\lambda + \int_{[0,1]\setminus E_1} fgd\lambda, f \in \mathrm{K}\}$ είναι totally bounded από 2ε –σφαίρες. Άρα το σύνολο $\mathrm{T}(\mathrm{K})$ είναι σχετ.συμπαγές.

4.6 Θεώρημα (Lewis - Stegall): Έστω $\mathrm{T} : L^1 \to X$ ένας τελεστής. Ο T είναι αναπαραστάσιμος εάν και μόνο εάν υπάρχουν τελεστές $S : L^1 \to l^1, U : l^1 \to X$ έτσι ώστε $\mathrm{T} = U \circ S$. Η απόδειξη (στη γλώσσα των διανυσματικών μέτρων) έχει γίνει στο κεφάλαιο 2.

Παρατήρηση: Γνωρίζουμε ότι ο χώρος l^1 έχει την ιδιότητα του Schur δηλαδή εάν μια ακολουθία συγλίνει ασθενώς στον l^1 τότε συγκλίνει και στη νόρμα του l^1. Το θεώρημα των Lewis - Stegall δίνει μια άλλη απόδειξη του θεωρήματος των Dunford-Pettis *(4.5)*.

4.7 Θεώρημα: Έστω $\mathrm{T} : L^1 \to X$ ένας ασθενώς συμπαγής τελεστής. Τότε ο T είναι αναπαραστάσιμος.

Απόδειξη [**S**] : Χωρίς βλαβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος. Έστω W ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X έτσι ώστε $\{\mathrm{T}f : \|f\|_1 \leq 1\} \subseteq W$. Μπορούμε να δεχθούμε ότι το W είναι κυρτό συμμετρικό. Διαλέγουμε μια ακολουθία $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ όταν X^*, $\|x_i^*\| = 1$ η οποία "νορμάρει" κάθε στοιχείο του X (δηλαδή εάν $x \in X$, τότε $\|x\| = \sup_i |x_i^*(x)|$) . Έστω $\alpha = \sup_{x \in W} \|x\|$.

Ορίζουμε την απεικόνηση

$$\Phi : W \to Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-\alpha, \alpha]$$
$$\Phi(x) = (x_i^*(x))_{i=1}^{\infty} \quad x \in W.$$

Η συνάρτηση Φ είναι ομοιομορφισμός του W με την ασθενή τοπολογία του Q (διότι η $co(\{x_i^*, i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$ είναι w^* –πυκνή στην $\mathrm{B}_{X^*} = \{x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$ και επομένως είναι πυκνή ως προς την ομοιόμορφη σύγλιση στην ασθενώς συμπαγή κυρτά υποσύνολα του X).

Έστω $h_i = T^* x_i^* \in L^\infty$. Μπορούμε να δούμε ότι $\sup_i |h_i(\omega)| = \|T^* x_i^*\| \leq \alpha$

Ορίζουμε $y : [0,1] \to Q$
$y(\omega) = (h_i(\omega))_{i=1}^{\infty}$.

Αφού η y είναι η "κατά συντεταγμένες μετρήσιμη" είναι μετρήσιμη. Θα δείξουμε ότι

$y(\omega) \in \Phi(W)$ λ –σχεδόν παντού και τότε η συνάρτηση $\Phi^{-1} \circ \Psi$ θα είναι η "παράγωγος του T.

Ισχυριζόμαστε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_n = \{\omega : \exists x \in W \mu\varepsilon |x_i^*(x) - h_i(\omega)| < \frac{1}{n} \forall i \leq n\}$ έχει μέτρο 1. Αυτό το σύνολο είναι μετρήσιμο επειδή είναι της μορφής $y^{-1}(U)$ όποθ U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Q.

Ορίζουμε τον τελεστή
$S_n X \to l_\infty^n, S_n(x) = (x_i^*(x))_{i=1}^n$. Ο τελεστής $S_n \circ T$ είναι αναπαραστάσιμος με παράγωγο την συνάρτηση $\omega \mapsto (h_i(\omega))_{i=1}^n$. Το σύνολο $\{S_n \circ T\,(f) : \|f\|_1 \leq 1\}$ περιέχει στο σύνολο $S_n(W)$ που είναι norm συμπαγές. Αυτό σημαίνει ότι $(h_i(\omega))_{i=1}^n$ είναι στο $S_n(W)$ για όλα σχεδόν τα $\omega \in [0,1]$.

Αυτό συνεπάγεται ότι $\lambda(A_n) = 1 \Rightarrow \lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Για $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ διαλέγουμε $x_n \in W$ έτσι ώστε $\forall i \leq n$
$|x_i^*(x) - h_i(\omega)| < \frac{1}{n}$.

Έστω x_0 ένα ασθενές σημείο συσσώρευσης της $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Τότε $x_i^*(x_0) = h_i(\omega)\ \forall i$. Αυτό σημαίνει ότι $y(\omega) \in \Phi(W)$ λ –σχεδόν παντού. Η συνάρτηση $\Phi^{-1} \circ \Psi : [0,1] \to X$ είναι η παράγωγος του T.

4.8 Πόρισμα: Εάν $\mathrm{T} : L^1 \to X$ είναι ασθενώς συμπαγής τότε ο T απεικονίζει ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του L^1 σε norm συμπαγή υποσύνολα του X.

4.9 Superlemma [Bou] : (Asplund, Namioka, Bourgain).
Έστω $\mathrm{T}, \mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1$ κλειστά, κυρτά φραγμένα υποσύνολα του χώρου Banach X και $\varepsilon > 0$

έτσι ώστε
(1) $J \subset \overline{co}(\mathrm{K}_0 \cup \mathrm{K}_1)$

(2) $\mathrm{K}_o \subset J$ και $diam(\mathrm{K}_0) < \varepsilon$

(3) $J \backslash \mathrm{K}_1 = \emptyset$

Τότε υπάρχει ένα slice του J το οποίο περιέχει ένα σημείο του K_0 και του οποίου η διάμετρος είναι μικρότερη του ε.

Απόδειξη: $\forall r \in [0,1]$ θέτουμε $C_r = \{x \in X : x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_{1,} x_0 \in \mathrm{K}_1, r \leq \lambda \leq 1\}$.

Παρατηρούμε ότι όπως το $r \downarrow 0$ τα κυρτά σύνολα C_r αυξάνουν από το σύνολο K_1 στο

σύνολο $co = co(\mathrm{K}_0 \cup \mathrm{K}_1)$.

Πρώτα θα αποδειχθεί ότι εάν $0 < r \leq 1$ τότε $J \backslash \overline{C_r} \supset K_0 \backslash \overline{C_r} \neq \emptyset$.

Έστω $f \in X^*$ έτσι ώστε $\sup f(K_1) < \sup f(T)$

Έχουμε λοιπόν ότι $\sup f(T) \leq \sup f(\overline{co}) = \sup f(co) \leq \max\{\sup f(K_0), \sup f(K_1)\} \leq \sup f(T)$.

Επίσης παρατηρούμε ότι
$\sup f(\overline{C_r}) = \sup f(C_r) \leq \sup\{(1-\lambda)\sup f(K_0) + \lambda \sup f(K_1) : \lambda \in [r,1]\} = (1-r)\sup f(K_0) + r\sup$
Αυτό συνεπάγεται ότι δεν είναι δυνατόν $\overline{C_r} \supset K_0$ αφού τότε $\sup f(\overline{C_r}) \geq \sup f(K_0)$.

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι $diam(J \backslash \overline{C_r}) < \varepsilon$ εάν το r είναι αρκετά κοντά στο 0.

Αφού $J \subset co$ έχουμε $J \backslash \overline{C_r} \subset \overline{co} \backslash \overline{C_r}$. Επειδή το $\overline{C_r}$ είναι κλειστό το $co \backslash \overline{C_r}$ είναι πυκνό στο $\overline{co} \backslash \overline{C_r}$. Επομένως εάν $w \in J \backslash \overline{C_r}$ και $\delta > 0$ $\exists x \in co \backslash \overline{C_r}$ έτσι ώστε $\|w - x\| < \delta$. Διαλέγουμε $x_0 \in K_o, x_1 \in K_1$ και $\lambda \in [0,r)$ έτσι ώστε $\chi = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$.

Έχουμε ότι $\|w - x_0\| \leq \|w - x\| + \|x - x_0\| < \delta + \lambda \|x_0 - x_1\| \leq \delta + rM$ όπου
$\mathrm{M} = \sup\{\|\psi_0 - y_1\| : y_0 \in \mathrm{K}_0, y_1 \in \mathrm{K}_1\}$

Είναι εύκολο να δούμε τώρα ότι $diam(J \backslash \overline{C_r}) < \delta + rM + diam(K_o) + \delta + rM$

Επειδή $diam(K_o) < \varepsilon$ εάν πάρουμε τα δ, r κατάλληλα μικρά μπορούμε να κάνουμε την διάμετρο του $(J \backslash C_r)$ μικρότερη απο ε.

Τώρα εάν $x_0 \in K_o$ και $x_0 \notin J \backslash \overline{C_r}$ τότε υπάρχει ένα slice του J ξένο πρός το $\overline{C_r}$. Το slice αυτό έχει διάμετρο μικρότερη απο ε.

Υπάρχει μια w^* μορφή του Superlemma η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Superlemma* : Έστω $\varepsilon > 0$, J, K_0, K_1 w^*-συμπαγή υποσύνολα του δυϊκού χώρου Banach X^* έτσι ώστε

(1) $J \subset co(K_0 \cup K_1) (= w^* \overline{co}(K_0 \cup K_1))$

(2) $K_0 \subset J$ και $diam(K_o) < \varepsilon$

(3) $J \backslash K_1 \neq \emptyset$

Τότε υπάρχει ένα w^* –slice του J το οποίο περιέχει ένα σημείο του K_0 και του οποίου η διάμετρος είναι μικρότερη απο ε.

4.10 Θεώρημα [Bou] : Έστω K ένα ασθενώς συμπαγές κυρτό υποσύνολο του X . Τότε το K έχει την RNP.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το K είναι διαχωρίσιμο ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και ότι το K δεν είναι dentable. Έστω $\{x_i\}$ ένα πυκνό υποσύνολο του K και $\varepsilon > 0$.

Έστω D =ασθενώς κλειστή θήκη του $(w \in K) \subset K.$ Παρατηρούμε ότι $\Delta \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \frac{\varepsilon}{3})$.

Το σύνολο D με την ασθενή τοπολογία είναι συμπαγής (Hausdorff) και αφού τα σύνολα $D \cap B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ είναι ασθενώς κλειστά από το θεώρημα κατηγορίας του Baire μπορούμε να βρούμε ένα ασθενώς ανοικτό υποσύνολο του V του X έτσι ώστε $\varnothing \neq V \cap D \subset B(x_i, \frac{\varepsilon}{3})$ για κάποιο i

Έστω $\mathrm{K}_0 = \overline{co}(V \cap D)$ και

$\mathrm{K}_1 = \overline{co}(\mathrm{K} \backslash V)$

Παρατηρούμε ότι

(**1**) $\mathrm{K} \subset \overline{co}(K_0 \cup K_1)$

(**2**) $diam(K_o) < \varepsilon$.

Έστω τώρα $x \in ext(K) \cap V.$ (Αφού $V \cap D \neq \varnothing.$ υπάρχει τέτοιο x). Έχουμε ότι $x \notin$ασθενή θήκη $(\mathrm{K} \backslash V)$ και επομένως $x \notin K_1 = \overline{co}(\mathrm{K} \backslash V).$ Δηλαδή

(**3**) $K \backslash K_1 \neq \varnothing.$

Το Superlemma μπορεί να εφαρμοστεί για το σύνολο K αφού ισχύουν τα (1),(2),(3). Επομένως υπάρχει ένα slice του K διαμέτρου$< \varepsilon.$ Αυτό σημαίνει ότι το K είναι dentable.

4.11 Λήμμα: Έστω D, C κλειστά φραγμένα κυρτά υποσύνολα του $X.$ Έστω $J = \overline{co}(D \cap C)$ και έστω $f(x) = \sup f(T) > \sup f(C)$ για κάποιο $f \in X^*$ και $x \in J.$ Τότε $x \in D.$

Απόδειξη: $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset co(D \cup C)$ έτσι ώστε $\|x_n - x\| \to 0.$ Ας υποθέσουμε ότι $x_n = \lambda_n d_n + (1-\lambda_n) c_n, 0 \leq \lambda_n \leq 1 \;\; d_n \in D, c_n \in C.$ Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\lambda = \lim_n \; (\lambda_n f/d_n) + (1-\lambda_n) f(c_n)) \;\; \leq \lambda \sup f(D) + (1-\lambda) \sup f(C) < \sup f(J).$

Επομένως $\lambda = 1$. Αφού το C είναι φραγμένο έχουμε $\lim\|x - d_n\| = 0$ και αφού το D είναι κλειστό , $x \in D$.

Πρόταση 4.i: Έστω C και K κλειστή φραγμένα κυρτά υποσύνολα του X και έστω $J = \overline{co}(C \cup K)$. Εάν το K έχει την RNP και $\mathrm{K}\backslash C \neq \emptyset$ και $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει ένα slice του J, διαμέτρου< ε το οποίο περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του K.

Απόδειξη: Έστω $D = \{x \in J : \exists f \in X^* $ έτσι ώστε $ f(x) = \sup f(J) > \sup f(C)\}$. Από το προηγούμενο λήμμα $D \subset K$. Έχουμε ότι $\overline{co}(D \cup C)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του J τότε $\exists$ slice S του J έτσι ώστε $S \cap \overline{co}(D \cup C) = \emptyset$. Από το θεώρημα των Bishop-Phelps $\exists f \in S(J)$ =support functionals του J έτσι ώστε $S(J,f,a) \subset S$ για κάποιο $\alpha > 0$. Το f supports το J σε κάποιο σημείο x. Έχουμε ότι $x \notin \overline{co}(D \cup C) \supset D$ και ότι $f(x) = \sup f(J) > \sup f(C) \Rightarrow x \in D$ από το προηγούμενο λήμμα. Άρα πρέπει να έχουμε $J = \overline{co}(D \cup C)$. Αφού $K\backslash C \neq \emptyset$ έχουμε $D \neq \emptyset$.

Αφού το K έχει την RNP το σύνολα $D \subset K$ είναι dentable και επομένως $\exists x_0 \in D$ έτσι ώστε $x_0 \notin \overline{co}(D\backslash B(x_0, \frac{\varepsilon}{3}))$. Έστω $K_0 = \overline{co}(B(x_0, \frac{\varepsilon}{3}) \cap D)$ και $K_1 = \overline{co}((D\backslash B(x_0, \frac{\varepsilon}{3})) \cup C)$. Τα σύνολα K_0 και K_1 πληρούν τις υποθέσεις του Superlemma διότι

(**1**) $J = \overline{co}(K_0 \cup K_1)$ αφού $J = \overline{co}(D \cup C)$

(**2**) $diam(K_0) < 2\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ και $K_0 \subset \overline{co}(D) \subset J$

(**3**) Πρέπει να αποδείξουμε ότι $x_0 \in J\backslash K_1$. Πράγματι εάν $x_0 \in K_1$ και $D_1 = \overline{co}(D\backslash B(x_0, \frac{\varepsilon}{3}))$ παρατηρούμε ότι $K_1 = \overline{co}(D_1 \cup C)$. Αφού το $x_0 \in D \Rightarrow \exists f \in X^*$ έτσι ώστε $f(x_0) = \sup f(T) > \sup f(C)$ και αφού $x_0 \in K_1 \subset J \Rightarrow f(x_0) = \sup f(K_1) > f(C)$.

Από το προηγούμενο λήμμα (για $D_1 = D, K_1 = J$) έχουμε ότι το $x_0 \in J\backslash K_1 \neq \emptyset$.

4.12 Ορισμός: Έστω $K \subset X$, κλειστό, κυρτό φραγμένο και $x \in K$.

1. Το x καλείται expesed paint εάν $\exists f \in X^*$ τ.ω. $f(y) < f(x)\ \ \forall y \in K, y \neq x$. Το γράμμικό

συναρτησοειδές f λέμε ότι exposes το x.

2. Το x καλείται strongly exposed paint του K εάν $\exists f \in X^*$ το οποίο exposes το x και το $\{S(K,f,a) : a > 0\}$ είναι μια βάση περιοχών του X στη norm-τοπολογία. Σ΄αυτή την περίπτωση λέμε ότι το f strongly exposes to x.

3. Εάν $y \in \mathrm{K}$ και $f(y) = \sup f(K)$ για κάποιο $f \in X^*\backslash\{0\}$ τότε λέμε ότι το y είναι support-paint του K και το f ειναι support-συναρτησοειδές του K.

Χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς $S(K) = \{f \in X^*$: f είναι support συναρτησοειδές κάποιου $x \in K\}$

$SE(K) = \{f \in X^* : \tau o \ \ f$ *strongly exposes καποιο* $x \in K\}$
$str\exp(K)$ =*όλα τα strongly exposed σημεία του* K.

Είναι γνωστό ότι εάν το K είναι κλειστό κυρτό φραγμένο τότε το $S(K)$ είναι πυκνό στο X^* (θεώρημα Bishop-Phelps).

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι εάν το K έχει την RNP τότε $K = \overline{co}(str\exp K)$. Θα χρειαστούν ορισμένα τεχνικά λήμματα.

4.13 Λήμμα [D-U] : Έστω $f,g \in X^*, \|f\| = \|g\| = 1, \varepsilon > 0$. *Εάν όταν* $f(x) = 0$ *και* $\|x\| \leq 1$ *για κάποιο* $x \in X$ *έχουμε ότι* $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ *τότε ή* $\|f-g\| \leq \varepsilon$ *ή* $\|f+g\| \leq \varepsilon$.

Απόδειξη: Ο περιορισμός του g στον $f^{-1}(o)$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές νόρμας$\leq \frac{\varepsilon}{2}$. Από το Hahn-Banach $\exists h \in X^*$ τ.ω.$\|h\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ και $h = g$ στον $f^{-1}(o)$. Έχουμε λοιπόν ότι $g-h = 0$ στον $f^{-1}(o) \Rightarrow g-h = tf$ για κάποιο $t \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $|1-|t|| = |\|g\| - \|g-h\|| \leq \|h\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Εάν $t \geq 0$ τότε
$\|f-g\| = \|(1-t)f-h\| \leq (1-t)) + \|h\| = |1-|t|| + \|h\| \leq \varepsilon$.

Εάν $t < 0$ τότε $\|f+g\| = \|(1+t)f+h\| \leq |1+t| + \|h\| = |1-|t|| + \|h\| \leq \varepsilon$.

Το επόμενο τεχνικό λήμμα θα χρειαστεί αργότερα

4.14 Λήμμα: Έστω $f \in X^*$ *και* $\|f\| = 1$. *Εάν* $t > 0$ *με* V_t *συμβολίζουμε το σύνολο* $f^{-1}(o) \cap \{y : \|y\| \leq t\}$. *Έστω* x_0, y *σημεία του X τ.ω.* $f(x_0) > f(y)$ *και* $\frac{2}{t}\|x_0-y\| \leq 1$. *Εάν* $g \in X^*$, $\|g\| = 1$ *και* $g(x_0) > \sup f(y+V_t\ )$ *τότε* $\|f-g\| \leq \frac{2}{t}\|x_0-y\|$.

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ τ.ω. $\|x\| \leq 1$ και $f(x) = 0$. Έχουμε ότι $tx+y \in V_t+y \Rightarrow tg(x)+g(y) < g(x_0)$. Έστω $\varepsilon = \frac{1}{t}(g(x_0)-g(y))$. Τότε $g(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ και (απο συμμετρία) $|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Από το λήμμα *(4.13)* έχουμε ότι ή $\|g-f\| \leq \varepsilon = \frac{2}{t}(g(x_0)-g(y)) \ \leq \frac{2}{t}\|x_0-y\|$ ή $\|g+f\| \leq \frac{2}{t}(g(x_0)-g(y))$.

Εάν τώρα $\|g+f\| \le \frac{2}{t}(g(x_0)-g(y))$ θα καταλήξουμε σε άτοπο. Διότι
$0 < g(x_0)-g(y) < g(x_0)-g(y)+f(x_0)-f(y) = (g+f)(x_0-y) \le \|g+f\|\|x_0-y\|$
$\le \frac{2}{t}(g(x_0)-g(y))\|x_0-y\|$.

Αυτό συνεπάγεται ότι $1 < \frac{2}{t}\|x_0-y\|$.

Είχαμε πάρει όμως το $\frac{2}{t}\|x_0-y\| \le 1$.

Είχαμε λοιπόν ότι $\|g-f\| \le \frac{2}{t}\|x_0-y\|$.

4.15 Λήμμα: Έστω D ένα φραγμένο υποσύνολο του X, $\alpha > 0$ και $f \in X^*\backslash\{0\}$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $S(D,g,\frac{a}{2}) \subset S(D,f,a)$ για όλα τα $g \in X^*$ με $\|g-f\| \le \varepsilon$.

Απόδειξη: Έστω $\mathrm{M} = \sup\{\|x\| : x \in D\}$. Έστω $0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{4\mathrm{M}}$. Έστω $f,g \in X^*$, $\|f-g\| \le \varepsilon$.

Εάν $y \in D$ και $g(y) > \sup g(D) - \frac{a}{2}$ τότε
$f(y) \ge g(y) - |f(y)-g(y)| > \sup g(D) - \frac{a}{2} - \varepsilon\mathrm{M} \ge \sup f(D) - \varepsilon\mathrm{M} - \frac{a}{2} - \varepsilon\mathrm{M}$.

Δηλαδή $S(D,g,\frac{a}{2}) \subset S(D,f,a)$.

4.16 Λήμμα [B], [Bou] : Έστω K ένα κλειστό φραγμένο κυρτό υποσύνολο του X . Έστω ότι $\forall\delta > 0 \forall f \in X^* \exists g \in X^*$ τ.ω. $\|f-g\| \le \delta$ και το g ορίζει κάποιο slice του K διαμέτρου το πολύ δ. Τότε $K = \overline{co}(str\exp(K))$. Επιπλέον το σύνολο $SE(K)$ όλων των συναρτησοειδών τα οποία strongly expose καποιο σημείο του K είναι ένα πυκνό G_δ υποσύνολο του X^*.

Απόδειξη: Για $\delta > 0$ $O_\delta = \{f \in X^* : \textit{το } f$ ορίζει κάποιο slice του K διαμέτρου$\le \delta\}$. Το σύνολο O_δ είναι ανοικτό απο το προηγούμενο λήμμα. Το O_δ είναι πυκνό από την υπόθεση μας. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_{\frac{1}{n}}$ είναι πυκνό G_δ . Επίσης παρατηρούμε ότι $SE(K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_{\frac{1}{n}}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $K = \overline{co}(str\exp(K))$. Εάν το $\overline{co}(str\exp(K))$ είναι γνήσιο υποσύνολο του K υπάρχει ένα slice $S(\mathrm{K},f,a)$ τ.ω.
$S(\mathrm{K},f,a) \cap \overline{co}(str\exp(K)) \ne \emptyset$.

Αφού το $SE(K)$ είναι πυκνό στο X^* μπορούμε να βρούμε $g \in SE(K)$ τ.ω.
$S(\mathrm{K},g,\frac{a}{2}) \subset (\mathrm{K},f,a)$.

Τώρα εάν το $x \in K$ είναι strongly expesed από το g τότε x ανήκει και στο $\overline{co}(str\exp(K))$ και $S(\mathrm{K}, g, \frac{a}{2})$.

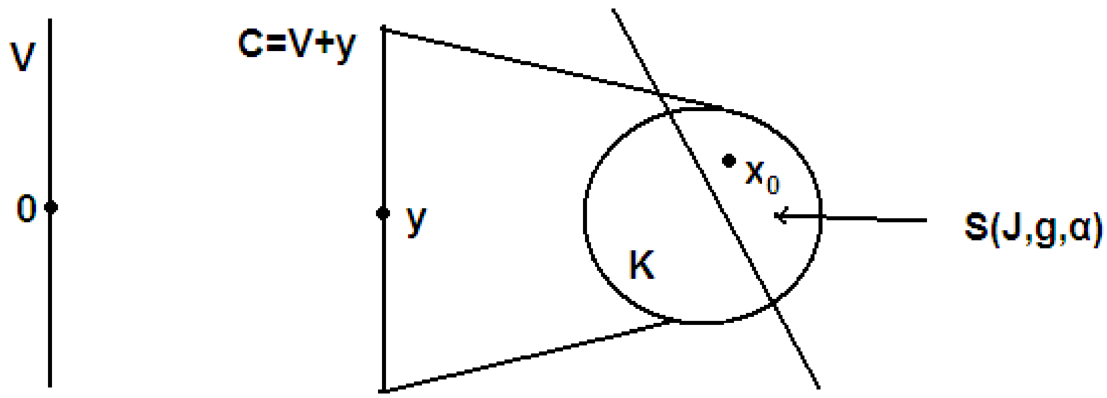
Αυτά τα σύνολα όμως είναι ξένα. Άρα $K = \overline{co}(str\exp(K))$.

4.17 Θεώρημα: Έστω K *ένα κλειστό φραγμένο , κυρτό υποσύνολο του* X *τ.ω. το* K *έχει την RNP. Τότε* $K = \overline{co}(str\exp K)$*. Επιπλέον το* $SE(K)$ *είναι ένα πυκνό* G_δ *υποσύνολο του* X^*.

Απόδειξη: Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι ισχύει η υπόθεση του προηγούμενου λήμματος *(4.15)*.

Έστω $f \in X^*, \|f\| = 1$ και $0 < \delta < 1$.

Αφού το K είναι φραγμένο $\exists y \in X$ τ.ω. $f(y) < f(x) - 1 \ \ \forall x \in K$. Έστω $\mathrm{M} = \sup\{\|x-y\| \ : x \in K\}, t = \frac{2M}{\delta}, V = f^{-1}(0) \cap \{x \in X \|x\| \leq t\}$ και $C = V + y$.



Παρατηρούμε ότι εάν $z \in C$ και $\alpha \in \mathrm{K}$ τότε $f(z) = f(y) < f(x) - 1$ δηλαδή $C \cap K = \varnothing$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση *(4.i)* η οποία λέει ότι υπάρχει ένα slice $S(J, g, a)$ του συνόλου $J = \overline{co}(C \cup K)$ τ.ω. $diamS(J, g, a) < \delta$. Επιπλέον υπάρχει ένα σημείο $x_0 \in K$ το οποίο ανήκει στο $S(J, g, a)$.

Παρατηρούμε τώρα ότι $S(J, g, a) \cap C = \varnothing$. Διότι εάν $w \in S(J, g, a) \cap C$ τότε $1 > \delta > diamS \geq \|x_0 - w\| \geq f(x_0) - f(w) = f(x_0) - f(y) > 1$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $\sup g(K) > \sup g(C)$ (διότι διαφορετικά $\sup g(K) = \sup g(C)$ και επομένως κάθε slice $S(J,g,a), \beta > 0$ θα περιείχε σημεία του $C.$) . Έχουμε λοιπόν ότι $S\sup g(K) = \max\{\sup g(K), \sup g(C)\} \; = \sup g(J).$

Αφού $K \subset J \Rightarrow S(K,g,a) \subset S(J,g,a)$ και επομένως $diamS(K,g,a) < \delta.$

Έχουμε τελικά ότι $\frac{2}{t}\|x_0 - y\| \le \frac{2M}{t} = \delta < 1$ και το (*Λήμμα 4.14)* μας λέει ότι $\|g - f\| \le \frac{2}{t}\|x_0 - y\| \le \delta.$

Έχουμε αποδείξει ότι $\forall \delta > 0 \;\; \forall f \in X^* \exists g \in X^*$τ.ω. $\|f - g\| \le \delta$ και το g ορίζει κάποιο slice του K διαμέτρου $< \delta.$ Το δεύτερο (*Λήμμα 4.16)* μας δίδει την απόδειξη του θεωρήματος.

4.18 ΘΕΩΡΗΜΑ [Bou] : Έστω $D \subset X$ ένα κλειστό κυρτό σύνολο και έστω ότι το $S(K) \subset X^*$ είναι 2^{ης} Baire κατηγορίας για κάθε κλειστό φραγμένο κυρτό υποσύνολο Κ *του D.*

Τότε το D έχει την RNP.

Απόδειξη: Εάν το D δεν έχει την RNP τότε υπάρχει ένα διαχωρίσιμο κλειστό, φραγμένο κυρτό υποσύνολο Κ του D το οποίο δεν είναι dentable.

Υποθέτουμε ότι κάθε slice του Κ έχει διάμετρο μεγαλύτερη απο $3\delta,\, \delta > 0.$ Έστω $\{x_i\}$ένα αριθμήσιμο πυκνο υποσύνολο του Κ και $U_i = \{g \in X^* \,:\, \text{το } g$ ορίζει ένα slice του Κ ξένο προς το $U_i\}.$ Εάν $g \in \bigcap_i O_i$ και $g(x) < \sup g(K).$ Αυτό συνεπάγεται ότι $S(K) \subset X^* \setminus \bigcap_i O_i.$

Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι κάθε O_i είναι ανοικτό και πυκνό στο X^*. Το ότι το O_i είναι ανοικτό φαίνεται αμέσως από προηγούμενο λήμμα.

Έστω $f \in X^*, 0 < \varepsilon < 1, \|f\| = 1.$

Υπάρχει $y \in X$ τ.ω. $f(x) - f(y) > 0 \forall x \in K.$ Έστω $M = \sup\{\|x - y\| \,:\, x \in K\}, t \ge \frac{2M}{\varepsilon}.$

Με V συμβολίζουμε το σύνολο $f^{-1}(0) \cap \{z \,:\, \|z\| \le t\}$ και C το σύνολο $V + y$. Προφανώς $U_i \backslash C \neq \varnothing.$ Το superlemma μας λέει ότι το σύνολο $J = \overline{co}(U_i \cap C)$ έχει ένα slice S έτσι ώστε $diam(S) < 3\delta$ και $S \cap U_i \neq \varnothing$ αφού η διάμετρος του U_i είναι $< 2\delta.$ Τώρα εάν $K \subset J$ τότε το $S \cap K$ θα ήταν ένα slice του K διαμέτρου $< 3\delta$ πράγμα που είναι άτοπο. Επομένως $\exists x_0 \in K \setminus J.$ Διαλέγουμε $g \in X^*, \|g\| = 1$ τ.ω. $g(x_0) > \sup g(J)$ και παρατηρούμε ότι $\frac{2}{t}\|x_0 - y\| \leq \frac{2M}{t} \leq \varepsilon < 1.$

Το προηγούμενο λήμμα μας δίνει ότι $\|g - f\| \leq \varepsilon$. Είναι φανερό ότι το g ορίζει κάποιο slice του K ξένο προς το $U_i \rightarrow g \in O_i$

Απεδείχθη ότι το O_i είναι πυκνό.

Το κύριο αποτέλεσμα που έχει αποδειχθεί μπορεί να συνοψισθεί στο επόμενο.

4.19 Θεώρημα (Phelps - Bourgain), [Bou] : Έστω C ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

(1) Το C έχει την RNP

(2) Για κάθε κλειστό φραγμένο κυρτό $K \subset C$ έχουμε ότι $K = \overline{co}(str\exp(K))$

(3) Για κάθε κλειστό φραγμένο κυρτό $K \subset C$ το $S(K)$ είναι 2ης Baire κατηγορίας στο X^*.

4.20 Ορισμός:

1) Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο. Μία πραγματική συνάρτηση $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται positive charge στο A εάν $\lambda(x) > 0 \ \forall x \in A$ και $\sum_{x \in A} \lambda(x) = 1.$

2) Έστω D ένα φραγμένο $\subset X$ και $f \in X^*, f \neq 0.$ Το slice $S(D,f,a), a > 0$ καλείται pointed slice εάν υπάρχει $x_0 \in D$ τ.ω. $f(x_0) = \sup f(D).$

3) Εάν $S(D,f,a)$ είναι ένα pointed slice τότε κάθε $y \in D$ τ.ω. $f(y) = \sup f(D)$ καλείται slicing point.

Σκοπός μας είναι να δώσουμε την απόδειξη του εξής θεωρήματος των Huff-Morris [Bou].

4.21 Θεώρημα: Έστω $C \subset X$ ένα κλειστό λυρτό σύνολο χωρίς την RNP. Τότε υπάρχει ένα ασθενώς κλειστό και ασθενώς διακριτό φραγμένο υποσύνολο W του C τ.ω.

(α) Το W δεν έχει ακραία σημεία ($\forall x \in W \;\; x \in co(W \backslash \{x\})$)

(β) Εάν $f \in X^*$ και $\exists x \in W$ τ.ω. $f(x) = \sup f(W)$ τότε $f(x) = f(y) \forall y \in W$.

Χρειάζεται ορισμένα τεχνικά λήμματα.

4.22 Λήμμα: Έστω K_1, K κλειστά φραγμένα κυρτά υποσύνολα του X και έστω ότι $\mathrm{K} \subsetneqq \mathrm{K}$. Τότε $\exists y \in K, g \in X^*$ και $\beta > 0$ τ.ω. $g(y) = \sup g(K) > \sup g(K_1) + \beta$

Απόδειξη: Εφαρμογή του Bishop-Phelps θεώρημα.

4.23 Λήμμα: Έστω K ένα κλειστό φραγμένο κυρτό nondentable υποσύνολο του X. Τότε $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. εάν D_0, D_1 είναι υποσύνολα του K έτσι ώστε

(1) $dia(D_0) \leq \varepsilon$

(2) $K = \overline{co}(D_0 \cup D_1)$

Τότε $K = \overline{co}(D_1)$

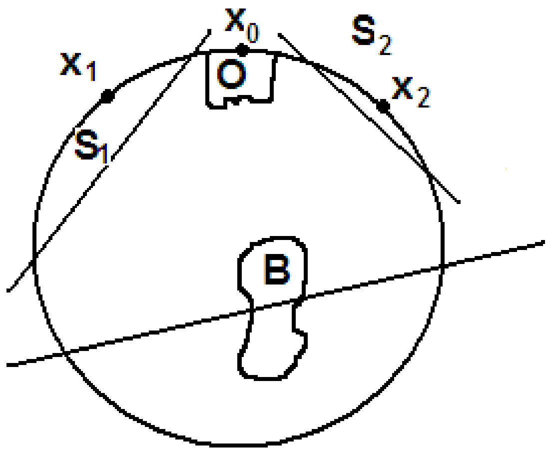
Απόδειξη: Superlemma!

4.24 Λήμμα: Έστω $K \subset X$ ένα κλειστό φραγμένο κυρτό nondentable σύνολο. Τότε $\exists \varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $B \subset K$ τ.ω. $diamB \leq \varepsilon, \forall$ pointed slise $S(K, f, a)$ με slicing point x_0 και για κάθε norm γειτονιά O του x_0 υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος από pointed slices $S_1, S_2, \ldots, S_n$ με αντίστοιχα slicing points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ έτσι ώστε

(α) $\overline{S_i} \subset \overline{S}(K, f, a)) \backslash B, i = 1, 2, \ldots, n$

(β) $\mathrm{O} \cap co\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \emptyset$

Απόδειξη:



Έστω $\varepsilon > 0$ τ.ω. κάθε slice του K να έχει διάμετρο $\geq 2\varepsilon$. Έστω $D = \{y \in K : g \in X^*$ τ.ω.$g(y) = \sup g(K) < \sup g[(K \backslash \overline{S}(K,f,a)) \cup B]\}$

Από το λήμμα .... και τον ορισμό του D έχουμε ότι $K = \overline{co}((K \backslash \overline{S}(K,f,a) \cup B \cup D)$.

Το B έχει διάμετρο$\leq \varepsilon \Rightarrow K = \overline{co}((K \backslash \overline{S}(K,f,a) \cup D)$ σύμφωνα με το λήμμα *(4.23).*

Υπάρχουν λοιπόν $z_n \in K \backslash \overline{S}(K,f,a)$ και $W_n \in co(D)$ και $\beta_n \in [0,1]$ έτσι ώστε $x_0 = \lim_n (\beta_n z_n + (1-\beta_n) w_n)$.

Έχουμε ότι
$\sup f(K) = f(x_0) = \lim_n (\beta_n f(z_n) + (1-\beta_n) f(w_n)) \leq \lim_n \beta_n (\sup f(K) - a) + (1-\beta_n) \sup f(K) = \sup$

Επομένως $\lim \beta_n = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\exists\ \mathrm{N} \in \mathbb{N}, W_N \in O$.

Εάν $W_N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x_i \in D, \lambda_i > 0, \Sigma \lambda_\imath = 1$ διαλέγουμε pointed slices $S_1, S_2, \ldots, S_n$ που αντιστοιχούν στα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τ.ω. $\overline{S_i} \subset \overline{S}(k,f,a), i = 1,2,\ldots,n$. (Από τον ορισμό του $D, \overline{B} \cap D = \varnothing$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ Huff-Morris [Bou] *(4.21).*

Το W θα κατασκευαστεί σαν την ένωση μιας ακολουθίας $A_n, n = 1,2,\ldots$ πεπερασμένων υποσυνόλων του C έτσι ώστε εάν $x \in A_i$ τότε $\exists$ positive charge $\lambda : A_{i+1} \to \mathbb{R}$ με $x = \sum_{y \in A_{i+1}} \lambda(y) y$.

Έστω $K \subset C$ ένα διαχωρίσιμο κλειστό φραγμένο κυρτό non-dentable υποσύνολο του C. Έστω $\varepsilon > 0$ τ.ω. κάθε slice του K να έχει διάμετρο $\geq 2\varepsilon$. Υπάρχει ακολουθία $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του K τ.ω. $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ και $diamB_i \leq \varepsilon$. Με επαγωγή θα κατασκευαστεί μια

ακολουθία $(ct_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μια αντίστοιχη οικογένεια $\{S_O : O \in ct_n\}$ με τις παρακάτω 7 ιδιότητες:

(**1**) ct_n είναι πεπερασμένο σύνολο $\forall n \in \mathbb{N}$. Τα στοιχεία του ct_n είναι σχετικά norm ανοικτά υποσύνολα του K.

(**2**) Εάν $\mathrm{O} \in \mathrm{A}_n$ τότε $diam(O) \leq \frac{1}{n}$

(**3**) $\forall O \in ct_n$ το S_O είναι ένα pointed slice του K.

(**4**) $\forall O \in ct_n$ $\exists$ pointed charge $\lambda_{\mathrm{O}} : A_{n+1} \to \mathbb{R}$ τ.ω. $\sum_{V\in ct_n} \lambda_{\mathrm{O}}(V)V \subset O$

(**5**) $O \subset S_O$ και το O περιέχει κάποιο slicing point του S_O

(**6**) $\overline{S_O} \cap \mathrm{B}_n = \emptyset \ \ \forall O \in ct_n$

(**7**) $\forall V \in ct_{n+1}, \overline{S_V} \subset \overline{S_O}$ για κάποιο $\mathrm{O} \in ct_n$

Αρχίζουμε παίρνοντας ένα Pointed slice S του K έτσι ώστε $\overline{S} \cap \mathrm{B}_n = \emptyset$. Αυτό μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του λήμματος *(4.23)* αφού $\overline{co}(B_1) \neq K$.

Έστω x ένα slicing point του S. Το ct_n είναι τότε το $\{S \cap B(x, \frac{1}{2})\}$ και η οικογένεια $\{S_O, O \in ct_n\} = \{S\}$.

Ας υποθέσουμε ότι τα $A_1, A_2, \ldots., A_n$ και οι αντίστοιχες οικογένειες από pointed slices έχουν κατασκευαστεί και πληρούν τις 7 ιδιότητες. Έστω ότι $A_n = \{O_1, O_2, \ldots, O_k\}$ και έστω ότι $S_i = S_{O_i}$. Από την ιδιότητα (5) έχουμε ότι $\forall i = 1, 2, \ldots, k \ \ \exists$ slicing point $x_i \in S_i$ έτσι ώστε $x_i \in O_i$. Τώρα εφαρμόζουμε το λήμμα *(4.24)* για κάθε τριάδα $B_{n+1}, S_i, O_i, i = 1, 2, \ldots, k$ (στη θέση του $B, S(k, f, a), O$). Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρούμε slicing points $\{y_j : j = 1, 2, \ldots, r\}$ έτσι ώστε

(**A**) $\forall j = 1,2,\ldots,r,\ \ \overline{T_j} \subset \overline{S_i}$ για κάποιο $\iota = 1,2,\ldots,\kappa$

(**B**) $\overline{T_j} \cap B_{n+1} = \varnothing \quad \forall j = 1,2,\ldots,r.$

(**C**) $O_i \cap co\{y_j : j = 1,2,\ldots,r\} \neq \varnothing \ \ \forall i = 1,\ldots,k.$

Η συνθήκη (C) σημαίνει ότι $\forall i = 1,2,\ldots,k\ \exists$ positive charge λ_i στο πεπερασμένο σύνολο $\{y_j : j = 1,2,\ldots,r\}$ τ.ω. $\sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_i(y_j)y_j \in O_i$.

Μπορούμε να διαλέξουμε κατάλληλα μικρές norm ανοικτές γειτονιές V_j των y_j έτσι ώστε

(**D**) $\sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_i(y_j)y_jV_j \subset O_i \ \ \forall i = 1,2,\ldots,k.$

Επιπλέον μπορούμε να δεχθούμε ότι

(**E**) $diam(V_j) \leq \frac{1}{n+1}$ και

(**F**) $V_j \subset \overline{T_j}$ (το T_j είναι σχετικά ανοικτό σύνολο και V_j περιέχει το y_j

Ορίζουμε τώρα $A_{n+1} = \{V_j : j = 1,2,\ldots,r\}, \lambda_{O_i}(V_j) = \lambda_i(y_j), i = 1,2,\ldots,k, j = 1,2,\ldots,r$ και $S_{V_j} = T_j$. Μπορεί να ελεγθεί ότι πληρούνται οι 7 συνθήκες της επαγωγής.

Τώρα για $n \geq 1$ είναι $O \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ ορίζουμε σύνολα $O(n)$ ως εξής:

Εάν $O \in A_n$ τότε $O(n) = O$. Εάν το $O(n)$ έχει ορισθεί για κάθε στοιχείο του $\bigcup\limits_{i=j+1}^{n} A_i$ τότε εάν $O \in A_j$

$O(n) = \sum\limits_{V \in A_{j+1}} \lambda_0(v)V(n) \quad (*)$

Μπορούμε να δούμε ότι εάν $n \leq j$ και $O \in A_n$ έχουμε ότι $diamO(j) \leq \frac{1}{j}$ και $O(j) \subset O(n) = 0$

$A_1 \quad O(1) \ \ O(2) \ \ O(3)$
$A_2 \qquad\quad\ \ O(2) \ \ O(3)$
$A_3 \qquad\qquad\qquad\ O(3)$
.
.
.

Για κάθε $O \in A_n$ έστω x_0 το μοναδικό στοιχείο της τομής $\bigcap\limits_{j=n}^{\infty} O(j)$.

Αφού το $\overline{S_O}$ είναι κλειστό και $\overline{O(j)} \subset \overline{O} \subset \overline{S_O}$ έχουμε ότι $x_O \in \overline{S_O} \forall O$

Τώρα έστω

$A_n = \{x_O : O \in A_n\} n \in \mathbb{N}$ και $W = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Οι συνθήκες (6) και (7) συνεπάγονται ότι $A_p \cap B_n = \varnothing$ για $p \geq n \Rightarrow$το W είναι άπειρο (διαφορετικά $W \subset \bigcup\limits_{n=1}^{k} B_n$).

Έχουμε επίσης από την $(*)$ ότι $\sum\limits_{V \in A_{n+1}} \lambda_O(v)\overline{V(j)} \subset \overline{O(j)}$ για $n+1 \leq j, O \in A_n$

Δηλαδή εάν $O \in A_n$ έχουμε

$(**)$ $x_O = \sum\limits_{V \in A_{n+1}} \lambda_O(v) x_V$.

Αυτό σημαίνει ότι εάν $x \in A_i$ $\exists$ positive charge στο A_{i+1} έτσι ώστε $x = \sum\limits_{y \in A_{i+1}} \lambda(y) y$

Απομένει να αποδειχθεί ότι το W είναι ασθενώς κλειστό και ασθενώς διακριτό. Εάν $z \in K$ τότε $z \in B_m$ για κάποιο $m \geq 1$.

Οι ιδιότητες (6) και (7) συνεπάγονται ότι εάν $n \geq m$ και $V \in A_r$ τότε $x_V \in \overline{S_V} \subset \bigcup\{\overline{S_O}, O \in A_m\}$ και $\bigcup\limits_{r=m}^{\infty} A_r \subset \bigcup\{\overline{S_O}, O \in A_m\}$. Επίσης έχουμε ότι $\mathrm{B}_m \cap \bigcup\{\overline{S_o} : O \in A_m\} = \varnothing$.

Έστω $Z = \bigcap\{K \backslash \overline{S_O} : O \in A_m\}$. Έχουμε ότι $z \in Z$ και το Z είναι σχετικά ανοικτό και ότι $Z \cap W \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m-1} A_j \Rightarrow$ το $Z \cap W$ είναι πεπερασμένο. Το W είναι λοιπόν ασθενώς κλειστό και ασθενώς διακριτό.

5.Η RNP σε δυϊκούς χώρους

Γνωρίζουμε ότι ένας χώρος Banach X με την RNP δεν μπορεί να περιέχει ένα (φραγμένο) ε-δένδρο για κάποιο $\varepsilon > 0$. Το Αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Ο Bourgain και ο Rosental κατασκέυασαν ένα υπόχωρο του L^1 ο οποίος δεν περιέχει ε-δένδρο και δεν έχει την RNP. Για δυϊκούς χώρους όμως ισχύει το παρακάτω θεώρημα του Stegall.

5.1 Θεώρημα: Εάν X είναι ένας χώρος Banach τα επόμενα είναι ισοδύναμα

i. *Ο δυϊκός X^* έχει την RNP*

ii. *Ο X^* δεν περιέχει ε-δένδρα*

iii. *Για κάθε διαχωρίσιμο υπόχωρο Y του X ο συζυγής είναι διαχωρίσιμος*

Απόδειξη:(**D**.**v**. **Dulst I.Namioka**)

Είναι προφανές ότι (i)⇒(ii)

Το ότι (iii)⇒(i) αποδεικνύεται εύκολα διότι η RNP είναι "διαχωρίσιμα πεπερασμένη"

ιδότητα και κάθε διαχωρίσιμος δυϊκός έχει την RNP.
Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι (ii)⇒(iii)

5.2 Λήμμα: Έστω $\{K_n : n = 1,2,\ldots\}$ μια ακολουθία από συμπαγή κυρτά υποσύνολα ενός τοπολογικού γραμμικού χώρου E έτσι ώστε $K_{2n} \cup K_{2n+1} \subset K_n$ για κάθε n. Τότε υπάρχει ένα δένδρο $\{x_n\}$ στο E έτσι ώστε $x_n \in K_n \quad \forall n\mathbb{N}$. (Σημειώνουμε ότι το $\{x_n\}$ είναι δένδρο εάν $x_n = \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2n+1})$.

Απόδειξη: Έστω $Q = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $A_n = \{q \in Q : \frac{1}{2}(q(2n) + q(2n+1)) = q(n)\}$. Το A_n είναι ένα κλειστό υποσύνολο του Q και αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε είναι ότι $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \{A_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για σταθερό K ορίζουμε ένα στοιχείο p του Q ως εξής: Για $n > k,$ το $p(n)$ το παίρνουμε να είναι ένα τυχόν σημείο του K_n. Αυτό το $n = k$ εώς $n = 1$ δίνουμε τον εξής επαγωγικό ορισμό: Εάν για $m > n$ το $p(m) \in K_m$ έχει ορισθεί τότε θέτουμε $p(n) = \frac{1}{2}(p(2n) + p(2n+1))$. Αφού κάθε K_n είναι κυρτό και $K_{2n} \cup K_{2n+1} \subset K_n$ έχουμε ότι $p(n) \in K_n$. Είναι φανερό τώρα ότι $p \in A_1 \cap A_2 \cap\ldots\cap A_k$.

Πρόταση: Έστω X ένας χώρος Banach . Εάν υπάρχει ένα φραγμένο υποσύνολο B

του X^* και ένα $\varepsilon > 0$ τ.ω. $diam \cup > \varepsilon$ για κάθε σχετικά $w^* - ανοικτό$ υποσύνολο του B*, τότε το σύνολο $w^* - dcoB$ $(= w^*$ κλειστή κυρτή θήκη του* B*) περιέχεται ένα $\frac{\varepsilon}{2}$ –δένδρο.*

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε μια ακολουθία $\{U_n\}$ από (σχετικά) w^* –ανοικτά υποσύνολα του B και μια ακολουθία $\{x_n\}$ στο X έτσι ώστε

a. $\|x_n\| = 1 \quad n = 1,2,\dots$

b. $U_{2n} \cup U_{2n+1} \subset U_n$, $n = 1,2,\dots$

c. $\forall n,$ εάν $f \in U_{2n}$ και $g \in U_{2n+1}$ τότε $(f-g)(x_{n)} \geq \varepsilon$

Το U_1 το παίρνουμε να είναι το σύνολο B. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, το U_k έχει ορισθεί για $1 \leq k \leq 2^m$ και x_n για $1 \leq n < 2^{m-1}$ έτσι ώστε τα (a),(b),(c) να ισχύουν για όλα τα n έτσι ώστε $1 \leq n < 2^{m-1}$. Έστω $2^{m-1} \leq k < 2^m$. Από την υπόθεση $diamU_k > \varepsilon$, επομένως υπάρχουν $h_0, h_1, \in U_k$ τ.ω. $\|h_0 - h_1\| > \varepsilon$. Διαλέγουμε $x_k \in X$ έτσι ώστε $\|x_k\| = 1$ και $(h_0 - h_1)(x_k) = \varepsilon + \delta$ για κάποιο $\delta > 0$. Έστω $U_{2k} = \{f \in U_k : f(x_k) > h_0(x_k) - \frac{\delta}{2}\}$ και $U_{2k+1} = \{g \in U_k : g(x_k) < h_1(x_k) + \frac{\delta}{2}\}$. Τα U_{2k}, U_{2k+1} είναι w^* –ανοικτά υποσύνολα του B και τα U_{2k}, U_{2k+1}, x_k ικανοποιούν τα (a),(b),(c) για $n = k$.

Αφού τώρα τα $n = 2k$ και $n = 2k+1$ εξαντλούν το σύνολο $\{k : 2^{m-1} \leq k \leq 2^m\}$, η κατασκευή έχει τελειώσει.

Τώρα έστω $K_n = w^*dcoU_n$. Κάθε k_n είναι w^* –συμπαγές και κυρτό και η (b) συμπάγεια $K_{2n} \cup K_{2n+1} \subset K_n$. Από το λήμμα *(5.2)* υπάρχει ένα δένδρο $\{f_n\}$ στο X^* έτσι ώστε $f_n \in K_n$. Αφού $f_{2n} - f_{2n+1} \in K_{2n} - K_{2n+1} \subset w^* - \overline{co}(U_{2n} - U_{2n+1}$ έχουμε από το (c) ότι $(f_{2n} - f_{2n+1})(x_n) \geq \varepsilon$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|f_{2n} - f_{2n+1}\| \geq \varepsilon$.

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το (ii)⇒(iii) του θεωρήματος του Stegall. Ας υποθέσουμε ότι ο χώρος X περιέχει ένα διαχωρίσιμο υπόχωρο Y και ότι ο Y^* δεν είναι διαχωρίσιμος. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\forall\ 0 < \varepsilon < 1$ η μοναδιαία σφαίρα B_{X^*} περιέχει ένα $\frac{\varepsilon}{2}$ –δένδρο . Το σύνολο B_{Y^*} περιέχει ένα υπεράριθμο σύνολο A τ.ω. $\|f_1 - f_2\| > \varepsilon$ $\forall f_1, f_2 \in \mathrm{A} \quad f_1 \neq f_2$. Διότι διαφορετικά η σφαίρα B_{Y^*} μπορεί να καλυφθεί από αριθμήσιμες το πλήθος σφαίρας ακτίνας $\leq \varepsilon$, και κάθε μια από αυτές μπορεί να καλυφθεί από αριθμίσιμες το πλήθος σφαίρες ακτίνας $\leq \varepsilon^2$ κ.τ.λ.

Αφού $\varepsilon^n \to 0$ θα είχαμε ότι B_{Y^*} είναι διαχωρίσιμο $\Rightarrow$ Y^* διαχωρίσιμο.

Αφού B_{Y^*} είναι w^* –μετρικοποιήσιμο και $w^* - διαχωρίσιμο$ όλα τα σημεία του A εκτός από αριθμήσιμο πλήθος είναι w^* σημεία συσσώρευσης.

Εάν αφαιρέσουμε το πολύ αριθμήσιμο το πλήθος σημείων από το A και πάρουμε την w^* –κλειστότητα παίρνουμε ένα w^* –συμπαγές υποσύνολο A_1 του B_{Y^*} έτσι ώστε $diamV > \varepsilon$ για κάθε w^* –ανοικτό υποσύνολο του A_1.

Αφού ο περιορισμός $R^* : X^* \to Y^*$ είναι $w^* - w^*$ συνεχές και $R(\mathrm{B}_{X^*}) = \mathrm{B}_{Y^*}$ υπάρχει ένα minimal w^* –συμπαγές υποσύνολο B του B_{X^*} έτσι ώστε $R(B) = A_1$. Το B ικανοποιεί την υπόθεση γνωστής πρότασης.

Άρα το B_{X^*} περιέχει ένα άπειρο $\frac{\varepsilon}{2}$ –δένδρο.

6. Ιδιάζοντα συνεχή μέτρα και τελεστές στον L^1

Στο εδάφιο αυτό Ω είναι είτε το διάστημα $[0,1]$ εφοδιασμένο με τα μέτρα Lebesgue στα Borel υποσύνολα η ο κύκλος $\Pi = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ εφοδιασμένος με το μέτρο του Haar.

Αν $\mu, v \in C(\Pi)^* = \mathrm{M}(\Pi)$ θα λέμε ότι $\mu \perp v$ (το μ είναι ιδιάζον "singular" ως πρός v) αν $\exists$ $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \Sigma$ έτσι ώστε $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset, \mu(\mathrm{E}) = \mu(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}) \forall \ \mathrm{E} \in \Sigma$ των $v(\mathrm{E}) = v(\mathrm{E} \cap \mathrm{B}) \ \forall \ \mathrm{E} \in \Sigma.$

Το $\mu << v$ (απόλυτα συνεχές ως προς ν) αν όταν $v(\mathrm{E}) = 0 \Rightarrow \mu(\mathrm{E}) = 0.$

Το $\mu \in \mathrm{M}(\Pi)$ καλείται συνεχές (diffuse) αν $\mu(\{t\}) \ = 0 \ \forall \ t \in \Pi.$

Αν $\lambda \in \mathrm{M}(\Pi)$ με $\widehat{\lambda}(n), n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε τους συντελεστές Fourier του λ, $\widehat{\lambda}(n) = \int_\Pi e^{int} d\lambda(t).$ Αν $\widehat{\lambda}(n) \underset{|n| \to 0}{\to} 0$ θα λέμε ότι τι λ είναι Rajchman μετρου.

6.1 Ορισμός: Αν $\mu, v \in \mathrm{M}(\Pi)$ τότε η συνέλιξη $\mu * v$ ορίζεται ως μέτρο

$$\mu * v(\mathrm{E}) = \int_\Pi \mu(\mathrm{E} - t) dr(t), \quad \forall \ \mathrm{E} \ \in \Sigma.$$

Ισχύουν τα εξής :

1. $\mu * v = v * \mu$
2. $\mu * (v_1 + v_2) \ = \mu * v_1 + \mu * v_2$
3. $\mu * (v * \lambda) = (\mu * v) * \lambda$

Αν f $\in C(\Pi)$ τότε $\int f d(\mu * v) = \int_\Pi \int_\Pi f(x+y)) d\mu(x) dr(y)$

Με δ_X συμβολίζουμε το μέτρο Dirac στο X δηλαδή $\delta_\mathrm{X}(\mathrm{E}) = 1$ αν $x \in E$ και

$\delta_0 * \mu = \mu * \delta_0 = \mu = 0$ αν $x \notin E.$

Θεώρημα 6.2 (Menshov) : $\exists \ \lambda \perp Haar$ έτσι ώστε το *λ είναι Rajchman.*

Πρόταση 6.3 : Αν $\lambda << m = Haar$ τότε $\widehat{\lambda}(n) \underset{|n| \to \infty}{\to} 0$ δηλαδή λ είναι Rajchman μέτρο.

Πρόταση 6.4 : Αν λ είναι ένα μέτρο Rajchman στο Π τότε το λ είναι συνεχές (diffuse)

Απόδειξη: Από το θεώρημα του Wiener ([K]) έχουμε ότι

$$\int_{\Pi} |\mu(\{\tau\})|^2 d\tau = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |\widehat{\mu}(n)|^2$$

Αν $\widehat{\mu}(n) \to 0 \Rightarrow \int \mu(\{\tau\})d\tau = 0 \Rightarrow \mu(\{\tau\}) = 0$ m σχεδόν παντού.

Αν $\lambda \in \mathrm{M}(\Pi)$ με $\mathrm{T}_\lambda : L^1(\Pi) \to L^1(\Pi)$ συμβολίζουμε τον τελεστή συνέλιξης $\mathrm{T}_\lambda(f) = f * \lambda$ δηλαδή $(\mathrm{T}_\lambda f)(x) = \int_{\Pi} f(x-y)d\lambda(y)$.

Θεώρημα 6.5 A.Coste [DU] : $\mathrm{T}_\lambda : L^1(\Pi) \to L^1(\Pi)$ *είναι Bohner αναπαραστάσιμος ανν* $\lambda << m$

Θεώρημα 6.6 [DU]: T_λ *είναι D-P*$\Leftrightarrow$ λ *είναι μέτρο Rajchman.*

Απόδειξη:

Έστω $\mathrm{T}_\lambda : L^1(\Pi) \to L^1(\Pi)$ D-P.

Έστω $u_n(t) = e^{-int}$. Ισχύει ότι $u_n \to 0$ (w) στον L^1.

Άρα $\|\mathrm{T}_\lambda(u_n)\| \to 0$.

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{T}_\lambda(u_n)(x) = \int_{\Pi} u_n(x-y)d\lambda y = \int_{\Pi} e^{+inx}e^{-iny}d\lambda(n) = u_n(x) \cdot \widehat{\lambda}(+n)$

Άρα $\left\| u_n(x) \cdot \widehat{\lambda}(+n) \right\|_{L^1} = \widehat{\lambda}(+n) \to 0$ και λ είναι μέτρο Rajchman. Αντίστροφα αφού $\mathrm{T}_\lambda(u_n) = \widehat{\lambda}(n)u_n$. Ο τελεστής είναι διαγώνιος τελεστής $L^2(\Pi) \to L^2(\Pi)$. Επειδή $\widehat{\lambda}(n) \xrightarrow[|n|\to 0]{} 0$ έχουμε ότι T είναι συμπαγής. Αφού $\mathrm{T}(\mathrm{B}_{L^2(\Pi)})$ είναι συμπαγής $\Rightarrow \mathrm{T} : L^1(\Pi) \to L^1(\Pi)$ είναι DP ([DU]).

Έστω m το μέτρο Lebesgue στο διάστημα $[0,1]$. Με $L^1[0,1]$ συμβολίζουμε το χώρο των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με τη νόρμα $\|f\| = \int |f| dm,\ f \in L^1$. Με $\mathrm{M}[0,1]$ συμβολίζουμε το χώρο των Radon μέτρων $\mathrm{M}[0,1] = C[0,1]^*$. (ο δυϊκός χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο (0,1))

Θεώρημα 6.7 [K],[W1] : Έστω $\mathrm{T} : L^1[0,1] \to L^1[0,1]$. *Υπάρχει στοχαστικός πυρήνας* $[0,1] \ni x \mapsto \mu_x \in \mathrm{M}[0,1]$ *έτσι ώστε* $\mathrm{T}f(x) = \int f d\mu_x$ *m-σχεδόν παντού. Είναι γνωστό ότι ο* T *είναι Bohner αναπαραστάσιμος αν* $\mu_x << m$ *σχεδον παντού.*

Είναι επίσης γνωστό [W1] ότι αν (ξ_n) είναι ένα martingale που αντιστοιχεί στον τελεστή T και $(v_x)_{x\in[0,1]}$ αναπαραστά τον T* με την ένοια ότι $T^*f(x) = \int f dr_x \quad m$ σχεδόν παντού τότε $w^* \lim \xi_n(x) = v_x,\ m$ σχεδόν παντού ([W1] *πρόταση 2.8*)

Έστω M_0 ο χώρος L^1 εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|f\|_{M_0} = \sup_{I\in\varphi} \left|\int_I f\right|$ όπου φ η οικογένεια όλων των υποδιαστημάτων του [0,1]. Στο [B2],[W1] έχει αποδειχθεί το εξής θεώρημα :

Έστω $T : L^1 \to L^1$ Dunford-Pettis. Τότε ο T^* έχει αναπαράσταση (v_x) (δηλαδή $T^*f = \int f dr_x$) έτσι ώστε κάθε μέτρο r_x να είναι συνεχές.

Στο [W1] γενικεύτηκε αυτό το αποτέλεσμα (*πόρισμα 4.4*).

Έστω $T : L^1 \to L^1$

Αν $W : L^1 \to M_0$ είναι η τυπική ταυτοτική απεικόνιση τότε $W \circ T$ είναι Bohner αναπαραστάσιμος $\Leftrightarrow$ T^* έχει αναπαράσταση με συνεχή μόνο μέτρα.

Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζουμε το κύριο θεώρημα (θεώρημα 6.8) της εργασίας μας.

Στο [D] αποδείχθει το εξής θεώρημα:

Αν το λ είναι συνεχές μέτρο στο T τότε υπάρχει v ιδιάζον μέτρο ως προς το Lebesque μέτρο m έτσι ώστε $v * \lambda << m$.

Μια απόδειξη με χρήση τελεστών στον L^1 υπάρχει στο [W2] .

Συνδιάζοντας ιδέες από το [W2] και τα [B2],[G-R] αποδεικνύουμε το κύριο θεώρημα μας, το οποίο είναι το εξής :

Θεώρημα 6.8: Έστω λ μέτρο Rajchman στο T . Τότε υπάρχει ένα ιδιάζον Riesz γινόμενο της μορφής $v = w^* - \lim \prod_{k=1}^{\infty} (1 \pm \cos(n_k x))$ έτσι ώστε $v * \lambda << m$.

Για να κάνουμε την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε κάποιες προτάσεις.

Πρόταση 6.9: Έστω $S : L^1 \to L^1 \subseteq M$ έτσι ώστε $S^*f(x) = \int f dv_x$

τότε $<Sf, h> = \int f(x) < v_x, h > dm(x)$ για κάθε h συνεχή συνάρτηση.

Απόδειξη:
$(S^*f)(x) = \int f(x) < \mu_x, h > dm(x) .= \int h \bullet Sf = \int S^*h \bullet f = \int (\int h dv_t) f(t) dm(t) \Rightarrow \int h dv_t =$
$< \vec{\mu}(t), h > \Rightarrow v_t = \vec{\mu}(t).$

Πρόταση 6.10: Αφού $v_\lambda \perp m \Rightarrow$ ο S δεν είναι αναπαραστάσιμος. (Αυτό προκύπτει και από το γεγονός ότι το $(w_{n,k})$ είναι δ-δένδρο και επομένως το martingale ξ_n δεν συγκλίνει στον $L^1_{L^1}$.)

Απόδειξη (*Θεώρημα 6.8)*

Έστω $\mathrm{T}_\lambda : L^1(\mathrm{T}) \to L^1(\mathrm{T})$ ο τελεστής συνέλιξης $\mathrm{T}_\lambda f = f * \lambda$, δηλαδή
$(\mathrm{T}_\lambda f)(x) = \int_T f(x-y) d\lambda(y), \quad f \in L^1(T), \quad x \in T.$

Σύμφωνα με το θεώρημα 6.6 ο τελεστής T_λ είναι Danford - Pettis. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $u_n(x) = \cos(nx)$. Είναι γνωστό (Λήμμα Riemann - Lebesgue) ότι $u_n \to 0$ ασθενώς στον L^1. Άρα $\|\mathrm{T}_\lambda(u_n)\| \to 0$. Κατασκευάζουμε ένα δυαδικό δένδρο στον $L^1(T)$ ως εξής:

Έστω $w_{0,1} = 1$. Μπορούμε να βρούμε $n_1 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\|\mathrm{T}_\lambda(u_{n_1})\| < \frac{1}{2^1}$,

θέτουμε $w_{1,1} = 1 - \cos(n_1 x)$,$w_{1,2} = 1 + \cos(n_1 x)$.

Άν το $w_{n,k}$ έχει κατασκευαστεί ορίζουμε $w_{n+1,2k-1} = w_{n,k}(1 + \cos(n_k x))$

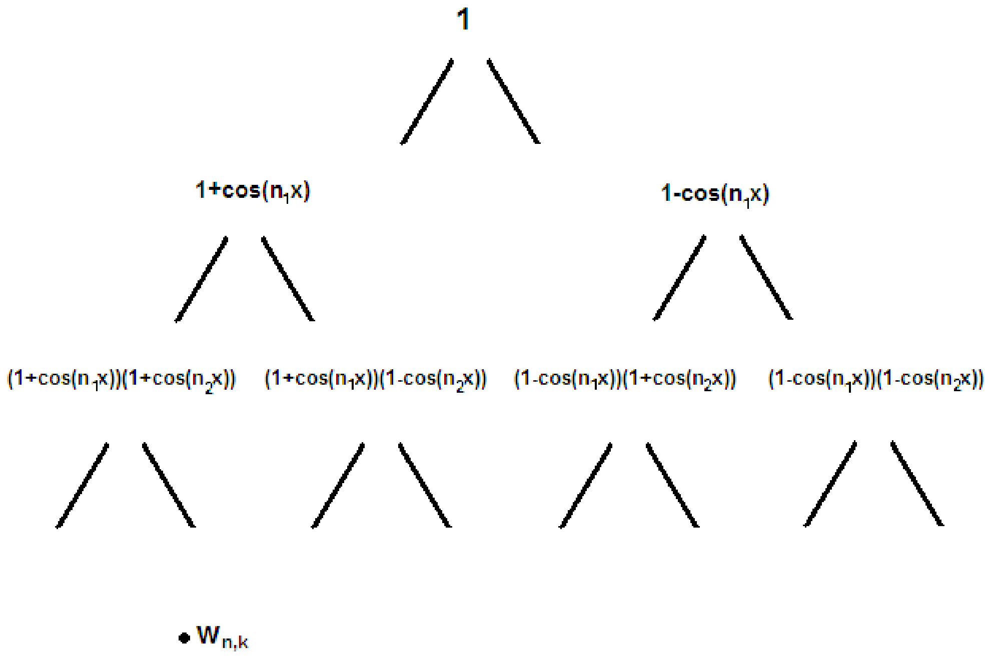
,$w_{n+1,2k} = w_{n,k}(1 - \cos(n_k x))$.

Οι φυσικοί αριθμοί n_k μπορούν να επιλεχθούν τόσο μεγάλοι έτσι ώστε :

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \|\mathrm{T}_\lambda(w_{n+1,2k-1} - w_{n+1,2k})\| = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \|\mathrm{T}_\lambda(w_{n,k} \cos(n_k x)\| < \frac{1}{2^n} \qquad (*)$$

Αυτό μπορεί να γίνει αφού διαλέγοντας μεγάλα n_k μπορούμε να έχουμε $\|\mathrm{T}_\lambda(w_{n,k} u_{n_k}\|$ όσο μικρή θέλουμε αφού ο T_λ είναι D - P και $w_{n,k} u_{n_k} \underset{p \to 0}{\overset{(w)}{\to}} 0$.

Το δένδρο $(w_{n,k})$ στον $L^1(T)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι της μορφής του επόμενου σχήματος:



Ένα στοιχείο $w_{n,k}$ του δένδρου είναι της μορφής

$(1 \pm \cos n_1 x)(1 \pm \cos n_2 x) \cdots (1 \pm \cos n_k x)$.

Μπορούμε να επιλέξουμε τα $n_k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\frac{n_{n+1}}{n_k} \geq 3$. Έστω $\xi_n : T \to L^1(T)$ το martingale που ορίζεται από αυτό το δένδρο.

Είναι γνωστό ότι αν $v_\lambda = w^* - \lim \xi_n(x)$ τότε έχουμε την αναπαράσταση $S^* f(x) = \int f dv_x$, m a.e όπου [W] $S : L^1(T) \to L^1(T)$ είναι ο τελεστής που ορίζεται από $S\varphi = \lim_n \int \xi_n \varphi$ (Bohner ολοκλήρωμα) και αντιστοιχεί στο δένδρο $(w_{n,k})$.

Απο γνωστό θεώρημα ([Z], σελ.208) γνωρίζουμε ότι $v_\lambda = w^* - \prod_{k=1}^{\infty} (1 \pm \cos(n_k t))$ είναι ιδιάζον ως προς το Lebesgue μέτρο m, $v_\lambda \perp m$.

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $x \mapsto v_x$ αναπαραστά τον τελεστή $S : L^1(T)$ με την εξής έννοια : $\forall \;\; L \in C(T)$, $\forall \;\; f \in L^1(T)$

$< Sf, h >= \int f(x) < v_x, h > dm(x)$.

Εδώ ταυτίζουμε τον $L^1(T)$ με ένα κλειστό υπόχωρο των μέτρων $\mu(\mathrm{T}) = C(T)^*$ δηλαδή θεωρούμε ότι το μέτρο Sf δρά με ολοκλήρωση στη συνεχή συνάρτηση h.

Από την ιδιότητα (*) έχουμε ότι ο τελεστής $\mathrm{T}_\lambda S$ είναι αναπαραστάσιμος.

Ο τελεστής $\mathrm{T}_\lambda \circ S$ αναπαριστάται από την οικογένεια των δέντρων $x \longrightarrow \lambda * v_x$ διότι :

Αν $h \in C(T) < T_\lambda \circ Sf, h >=< Sf, T_\lambda^* h >=< Sf, T_\lambda h >$, αφού $T_\lambda^* = T_\lambda$ στον L^2

$= \int f(x) < \nu_x, T_\lambda h > dm(x) = \int f(x) < \lambda * \nu_x, h > dm(x).$

Όμως αφού ο τελεστής $T_\lambda \circ S$ είναι Bohner αναπαραστάσιμος (στην πραγματικότητα μπορούν να τον πάρουμε συμπαγή τελεστή) έχουμε ότι $\lambda * \nu_x << m$ για όλα σχεδόν τα ν_x.

Παίρνουμε $\nu =$ ένα από αυτά τα ν_x.

Πόρισμα 6.11: Αν λ_j είναι Rajchman $j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε υπάρχει $\nu = w^*\Pi(1+\cos(n_k x))$ έτσι ώστε $\nu * \lambda_j << m \ \ \forall \ j$.

Απόδειξη: Θεωρώ $\lambda = \sum \frac{\lambda_j}{2^j}$. Τότε $\lambda_j << \lambda$, λ είναι Rajchman άρα υπάρχει

$\nu = w^*\Pi(1+\cos(n_k x))$, $\nu * \lambda << m$. Άρα $\nu * \lambda_j << m$ αφού $\lambda_j << \lambda$.

Παρατήρηση: Αν K είναι συμπαγές σύνολο από Rajchman μέτρα $\subseteq \mathrm{M}$ τότε $\exists$ $\nu = w^*\Pi(1+\cos(n_k x))$ έτσι ώστε $\nu * \lambda << m$, $\forall \ \lambda \in \mathrm{K}$.

Πρόταση 6.12 : Υπάρχει στοχαστικός πυρήνας $x \to \mu_x$ και $\Omega, m(\Omega) > 0$ έτσι ώστε $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \ \widehat{\mu}_x(n) > 0 \ \ \forall x \in \Omega$ και $\int |\widehat{\mu}_x(n)| dm(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, τα μέτρα μ_x είναι diffuse.

Απόδειξη:

Έστω ότι $T : L^1(\Pi) \to C_o$ είναι ο τελεστής $T(f) = (\int f u_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$, $f \in L^1$ όπου $u_n(t) = e^{-int}$. Αν $\|u_n\|_{L^1} = 1$ ο T δεν είναι D - P.

Αν $\mathrm{T} : L^1 \to X$ δεν είναι D - P τότε $\exists \ D : L^1 \to L^1$ D - P έτσι ώστε το $D : L^1 \to X$ δεν είναι αναπαραστάσιμο [B2].

Συνεπώς $\exists \ D : L^1 \to L^1$ D - P τέτοιο ώστε ο $T \circ D : L^1 \to C_o$ δεν είναι αναπαραστάσιμος.

Τώρα $TD(f) = T(Df) = (\int (Df) u_n dm)_{n\in\mathbb{N}} = (\int f D^* u_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$,

1) $D^* u_n \nrightarrow 0$ σχεδόν παντού

2) $\|D^* u_n\| \to 0$

Αν $(D^*\varphi)(x) = \int \varphi d\mu_\chi$, $x \mapsto \mu_x$, μ_x diffuse, έχουμε $(D^* u_n)(x) = \int u_n d\mu_\chi = \widehat{\mu}_x(n)$.

Θεώρημα 6.13 : Αν $\|g_n\|_{L^1} \to 0 \ \exists \ \nu \perp m$ τότε $\int g_n d\nu \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Έστω $\|g_n\|_1 \to 0$ θεωρούμε τον τελεστή $Tf = (\int fg_n)_{n\in\mathbb{N}}$, T είναι D-P υπάρχει S μη αναπαραστάσιμος ώστε $T \circ S$ αναπαραστάσιμος.

Έστω $(S^*\varphi)(x) = \int \varphi dv_x,\ x \mapsto v_x$ στοχαστικός πυρήνας.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι $(v_x)_S \neq 0,\ \forall x \in \Omega,\ m(\Omega) > 0.$

$TSf = (\int Sfg_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\int fS^*g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαραστάσιμος $\Rightarrow S^*g_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού

και $\int g_n dv_x \to 0$ σχεδόν παντού

και αν $\|g_n\|_{L^1} \to 0\ \exists\ x \mapsto v_x$ τέτοιο ώστε $v_x \perp m$ ώστε $\int g_n dv \to 0.$

Πρόταση 6.14 : Αν το λ δεν είναι Rajchman μέτρο τότε $\exists\ v \perp m$, v diffuse έτσι ώστε $\lambda * v \perp m$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[B1] *J. Bourgain*, La proprieté de Radon - Nikodym, Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie 36, (1980)

[B2] *J. Bourgain*, Dunford - Pettis operators on L^1 and the Radon - Nikodym property, Israel J. Math. 37, (1980), 34 - 47

[Bou] *R. D. Bourgin*, Geometric Aspects of convex set with the Radon - Nikodym property, Lecture notes in Math. 993, Springer 1983

[D-S] *N. Dunford - J. T. Schwartz*, Linear Operators, Part I, Interscience, New York and London, 1958

[D-U] *J. Diestel - J. Uhl Jr*, Vector Measures , AMS 1977

[G-R] *N. Ghoussoub - H. P. Rosental*, Martingales, G_δ –embeddings and quetients of L_1. Math. Ann. 264 (1983), no. 3, 321 - 332

[K] *Y.* Katznelson, An introduction to Harmonic Analysis, John Wiley and sons, Inc. New York, 1968

[S] *C. Stegall*, The Radon - Nikodym property in Banach spaces. I, proceedings of the conferences on vector measures and intergral representations of operators, and on functional analysis / Banach space geometry (Essen, 1982), 1 - 61

[W1] *L. Weis*, On the represantation of order continuous operators by random measures, Trans of Ams, 1984, 535 - 563

[W2] *L. Weis*, Diffuse stochastische Kerne, (German) [Diffuse stochastic Kernels] Proceedings of the conferences on vector measures and intergral representation of operators and on functional analysis / Banach space geometry (Essen, 1982). 213 - 222

[Z] *A. Zygmund*, Trigonometric series Vol I - II, Campridge Univ. Press (1959)