ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΣΤΙΣ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

Επιβλέπων : Επίκουρος Καθηγητής **Δάρας Τρύφων**

ΧΑΝΙΑ , 2012

Περιεχόμενα

Στην οικογένειά μου!

Για την παρούσα εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Τρ. Δάρα για την πολύτιμη βοήθειά του, καθώς επίσης και την οικογένειά μου για την αμέριστη συμπαράστασή τους.

Κεφάλαιο 1. Στοχαστικές Διαδικασίες

1.1. Στοχαστικές Διαδικασίες

Φαινομένα τα οποία μεταβάλλονται σε σχέση με τον χρόνο ή τον χώρο μπορούν να μελετηθούν με τη βοήθεια της Θεωρίας Πιθανοτήτων και την κατασκευή μαθηματικών μοντέλων με την χρήση οικογενειών τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες ικανοποιούν κάθε φορά ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες.

Τέτοια φαινόμενα μπορεί να είναι παραδείγματος χάριν η θνησιμότητα των ατόμων σε μια χώρα, λαμβάνοτας υπ'όψιν κάθε φορά κάποια ιστορικά γεγονότα ή ο ρυθμός εξυπηρέτησης πελατών σε μία υπηρεσία ανάλογα με τον αριθμό των υπαλλήλων και το χρόνο που χρειάζεται κάθε υπάλληλος για να εξυπηρετήσει κάποιον πελάτη.

Ορισμός 1.1.1

Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t\in T}$, οι οποίες ορίζονται συνήθως στον ίδιο πιθανοθεωριτικό χώρο Ω, καλείται **στοχαστική διαδικασία**. Δηλαδή $\forall t \in T$, η συνάρτηση X_t είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Το σύνολο T καλείται **παραμετρικός χώρος** της διαδικασίας. Εάν κάθε μία από τις τ.μ. X_t παίρνει τιμές σ' ένα σύνολο S, τότε καλούμε το S **χώρο καταστάσεων** της διαδικασίας.

Σε μια στοχαστική διαδικασία λοιπόν, για κάθε τιμή της παραμέτρου t, η X_t είναι μια τ.μ. της οποίας η κατανομή είναι συνήθως γνωστή. Για να έχουμε μια πλήρη εικόνα της διαδικασίας (επειδή όμως το t μεταβάλλεται στον χώρο T) χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε την από κοινού κατανομή βασικών (πεπερασμένων) υποσυνόλων της $\{X_t\}_{t\in T}$. Η κατανομή αυτή υπολογίζεται με την βοήθεια της από **κοινού συνάρτηση κατανομής** που ορίζεται από την σχέση:

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = P\{X_{t_1} \le x_1, X_{t_2} \le x_2, \cdots, X_{t_n} \le x_n\}$$

Αρκετές πληροφορίες σε μια διαδικασία μας δίνουν και οι λεγόμενες **συναρτήσεις κατανομής μετάβασης** που ορίζονται από την σχέση:

$$F_{t_0,t_1}(x_0,x_1) = P\{X_{t_1} \le x_1 / X_{t_0} = x_0\},$$

μ' άλλα λόγια οι δεσμευμένες συναρτήσεις κατανομών.

Παρατήρηση 1.1.2

Τις περισσότερες φορές όμως η κατανομή της διαδικασίας είναι αρκετά περίπλοκη και έτσι δύσκολο να υπολογιστεί. Στις περιπτώσεις αυτές προσπαθούμε να λάβουμε πληροφορίες από τις παρακάτω ποσότητες.

(α) τη **συνάρτηση μέσης τιμής** της διαδικασίας: $\mu(t) = E[X_t]$

(β) τη **συνάρτηση διασποράς** $\sigma^2(t) = V(X_t) = E[X_t - \mu(t)]^2$

(γ) τη **συνάρτηση συνδιασποράς** της διαδικασίας: $R(s,t) = E[(X_s - \mu(s))(X_t - \mu(t))]$.

1.2. Ταξινόμηση των Στοχαστικών Διαδικασιών

Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν να διαφέρουν ως προς τον παραμετρικό χώρο, τον χώρο καταστάσεων και τις σχέσεις εξάρτησης μεταξύ των τ.μ. X_t. Με βάση καθένα από αυτά τα τρία χαρακτηριστικά, μπορούμε να τις ταξινομήσουμε ως εξής.

- **Με βάση τον χώρο καταστάσεων.**

  Εάν το σύνολο S είναι ένα (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο, τότε ή διαδικασία καλείται σ.δ. **διακριτού χώρου καταστάσεων**, ενώ εάν το S δεν είναι αριθμησιμο καλείται σ.δ. **συνεχούς χώρου καταστάσεων**.

- **Με βάση τον παραμετρικό χώρο.**

  Εάν το σύνολο T είναι ένα (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο, τότε η σ.δ. καλείται διαδικασία σε **διακριτό χρόνο** ή **αλυσίδα**, ενώ εάν το T δεν είναι αριθμήσιμο η σ.δ. καλείται διαδικσία σε **συνεχή χρόνο**.

- **Με βάση τις σχέσεις εξάρτησης.**

  Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$, καλείται:

1. **Ανέλιξη με ανεξάρτητες προσαυξήσεις**

   Εάν οι τ.μ

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

   είναι ανεξάρτητες, $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in S$ με $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

   Εάν το σύνολο T περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο t_0 (π.χ t_0=0), πρέπει επιπλέον οι τ.μ.

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

   να είναι ανεξάρτητες.

2. **(α) Ισχυρά** ή **αυστηρά στάσιμη**

   Εάν, οι από κοινού συναρτήσεις κατανομών των οικογενειών τυχαίων μεταβλητών

$$\{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, X_{t_3+h}, \dots, X_{t_n+h}\}, \{X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \dots, X_{t_n}\}$$

με $t_{i+h} \in T, i = 1,2,\ldots,n$ είναι ίσες $\forall\, h > 0,\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in S$.

(β) Ασθενώς στάσιμη ή στάσιμη με την ευρεία έννοια

Εάν

i. η διαδικασία έχει πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης

ii. η συνάρτηση μέσης τιμής $\mu(t) = E[X_t]$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου t).

i. η συνδιασπορά $r_X(s,t) = \mathrm{cov}\,(X(s),X(t)) = EX(s)X(t) - EX(s)EX(t)$ εξαρτάται μόνον από το $h, \forall t \in T$.

1.3 Παραδείγματα Στοχαστικών Διαδικασιών

Α. Αλυσίδες Markov

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα φαινόμενο το οποίο εξελίσεται μέσα στο χρόνο και κάθε δεδομένη στιγμή μπορεί να βρίσκεται σε μια κατάσταση μέσα από ένα σύνολο δυνατών καταστάσεων S. Έστω ακόμα ότι για να το περιγράψουμε κατασκευάζουμε ένα μοντέλο με την βοήθεια μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n \ / \ n = 0,1,2,\ldots\}$, όπου η τ.μ. X_n περιγράφει το φαινόμενο την χρονική στιγμή n.

Ένα φαινόμενο ικανοποιεί την **ιδιότητα Markov** ή με άλλα λόγια η στοχαστική διαδικασία $\{X_n \ / \ n = 0,1,2,\ldots\}$ που περιγράφει το φαινόμενο είναι μια **αλυσίδα Markov** όταν (το φαινόμενο) ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: «δοθείσης της παρούσας κατάστασης του φαινομένου, οι καταστάσεις στις οποίες βρισκόταν το φαινόμενο στο παρελθόν δεν επηρεάζουν τις μελλοντικές καταστάσεις».

Ορισμός 1.3.1

Εάν μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geq 0}$, με χώρο καταστάσεων S, ικανοποιεί την σχέση:

$$P\{X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\} =$$
$$= P\{X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n\}$$

$\forall n \in N \ \ \forall x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in S$, τότε καλείται **αλυσίδα Markov.**

Εάν υποθέσουμε ότι το γεγονός $\{X_n = x_n\}$ παριστάνει το παρόν, το $\{X_{n+1} = x_{n+1}\}$ το μέλλον και το $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$ το παρελθόν, τότε η ιδιότητα Markov μας αναφέρει ότι *το μέλλον δοθέντος του παρόντος και του παρελθόντος, εξαρτάται μόνο από το παρόν.*

με $t_{i+h} \in T, i = 1,2,\dots,n$ είναι ίσες $\forall\, h > 0,\ t_1, t_2, \dots, t_n \in S$.

(β) Ασθενώς στάσιμη ή στάσιμη με την ευρεία έννοια

Εάν

i. η διαδικασία έχει πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης

ii. η συνάρτηση μέσης τιμής $\mu(t) = E[X_t]$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου t).

i. η συνδιασπορά $r_X(s,t) = \mathrm{cov}\,(X(s), X(t)) = EX(s)X(t) - EX(s)EX(t)$ εξαρτάται μόνον από το $h, \forall t \in T$.

1.3 Παραδείγματα Στοχαστικών Διαδικασιών

Α. Αλυσίδες Markov

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα φαινόμενο το οποίο εξελίσεται μέσα στο χρόνο και κάθε δεδομένη στιγμή μπορεί να βρίσκεται σε μια κατάσταση μέσα από ένα σύνολο δυνατών καταστάσεων S. Έστω ακόμα ότι για να το περιγράψουμε κατασκευάζουμε ένα μοντέλο με την βοήθεια μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n \;/\; n = 0,1,2,\dots\}$, όπου η τ.μ. X_n περιγράφει το φαινόμενο την χρονική στιγμή n.

Ένα φαινόμενο ικανοποιεί την **ιδιότητα Markov** ή με άλλα λόγια η στοχαστική διαδικασία $\{X_n \;/\; n = 0,1,2,\dots\}$ που περιγράφει το φαινόμενο είναι μια **αλυσίδα Markov** όταν (το φαινόμενο) ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: «δοθείσης της παρούσας κατάστασης του φαινομένου, οι καταστάσεις στις οποίες βρισκόταν το φαινόμενο στο παρελθόν δεν επηρεάζουν τις μελλοντικές καταστάσεις».

Ορισμός 1.3.1

Εάν μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geq 0}$, με χώρο καταστάσεων S, ικανοποιεί την σχέση:

$$P\{X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\} =$$
$$= P\{X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n\}$$

$\forall n \in N\ \ \forall x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in S$, τότε καλείται **αλυσίδα Markov.**

Εάν υποθέσουμε ότι το γεγονός $\{X_n = x_n\}$ παριστάνει το παρόν, το $\{X_{n+1} = x_{n+1}\}$ το μέλλον και το $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$ το παρελθόν, τότε η ιδιότητα Markov μας αναφέρει ότι *το μέλλον δοθέντος του παρόντος και του παρελθόντος, εξαρτάται μόνο από το παρόν.*

Όταν ο χώρος καταστάσεων S είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο (π.χ. ένα πεπερασμένο σύνολο), έχουμε μια **αλυσίδα Markov** με **διακριτό** χώρο καταστάσεων.

Εάν η σ.δ. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια αλυσίδα Markov, τότε η ποσότητα:

$$p_{n,n+1}(x,y) = P\{X_{n+1} = y \,/ X_n = x\},\ x,y \in S, n \in N_0$$

καλείται **πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος τον χρόνο n,** από την κατάσταση x στην κατάσταση y και είναι η πιθανότητα να κάνει το σύστημα μια μετάβαση στην κατάσταση y, την χρονική στιγμή n+1, δοθέντος ότι την χρονική στιγμή n ήταν στην κατάσταση x.

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος, αποτελούν τα στοιχεία ενός πίνακα:

$$P = [p(x,y)]_{x,y\in S}$$

ο οποίος καλείται **πίνακας μετάβασης ενός βήματος** της αλυσίδας και ο οποίος είναι πολύ χρήσιμος στην μελέτη της διαδικασίας.

Παραδείγματα Αλυσίδων Markov

(α) Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Έστω $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες (και ταυτοτικά κατανεμημένες) τυχαίες μεταβλητές. Η ανεξαρτησία είναι η απλούστερη δυνατή μεταξύ τυχαίων μεταβλητών, η δε έννοια της αλυσίδας Markov μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μια γενίκευση της ακολουθίας αυτής των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

(β) Τυχαίοι περίπατοι

Θεωρούμε $\{k_n\}_{n\geq 1}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με ακέραιες τιμές και με κοινή πυκνότητα πιθανότητας f. Θεωρούμε ακόμα X_0 μια τ.μ. που παίρνει και αυτή ακέραιες τιμές και ανεξάρτητη των k_i. Ορίζουμε σαν:

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i$$

Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $S = \mathbb{Z}$ και πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος:

$$p(x,y) = f(y-x)$$

και καλείται **γενικευμένος τυχαίος περίπατος** Ο πίνακας μετάβασης ενός βήματος θεωρείται ότι είναι άπειρης διάστασης.

Στην ειδική περίπτωση που:

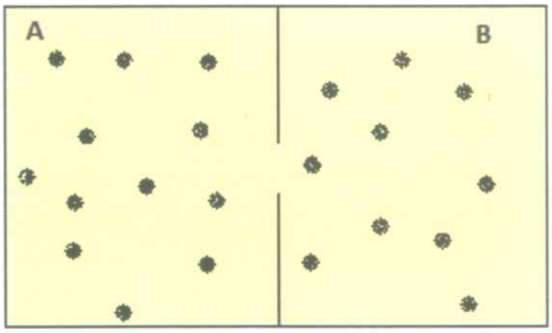
$$f(1) = p, \qquad f(-1) = q, \qquad f(0) = r, \qquad 0 \leq p, q, \qquad r \leq 1, \qquad p + q + r = 1$$

λέμε ότι έχουμε έναν **απλό τυχαίο περίπατο.** Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι ίσες με:

$$p(x,y) = \begin{cases} p & y = x+1 \\ q & y = x-1 \\ r & y = x \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

(γ) Αλυσίδα Ehrenfest

Οι λεγόμενες **αλυσίδες Ehrenfest** είναι απλά μοντέλα για την περιγραφή της ανταλλαγής θερμότητας ή της ανταλλαγής μορίων αερίων μεταξύ δυό απομονομένων σωμάτων.



Συνήθως συναντώνται σαν μοντέλα δοχείων με μπάλες (οι μπάλες είναι τα μόρια και τα δοχεία είναι τα σώματα)

Το κλασσικότερο είναι το εξής: έστω δύο δοχεία Α και Β, και k σφαίρες οι οποίες είναι αριθμημένες 1,2, ... , k. Τοποθετούμε ορισμένες από αυτές στο δοχείο Α και τις υπόλοιπες στο δοχείο Β. Έπειτα επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό από τους 1,2, ... , k. Η σφαίρα που είναι αριθμημένη με αυτόν τον αριθμό, αφαιρείται από το δοχείο που βρίσκεται και τοποθετείται στο άλλο. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή απεριόριστα και θεωρούμε ότι οι επιλογές απο επανάληψη σε επανάληψη είναι ανεξάρτητες.

Αν X_n παριστάνει *το πλήθος των σφαιρών που βρίσκονται στο δοχείο Α* μετά από n επαναλήψεις, τότε η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $S = \{0,1,2, \dots . k\}$. Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μετάβασης σκεφτόμαστε ως εξής: έστω ότι υπάρχουν x σφαίρες στο δοχείο Α την χρονική στιγμή n, και έστω ότι τη χρονική στιγμή $(n+1)$ υπάρχουν $x-1$ σφαίρες. Θα πρέπει να επιλεγεί μια σφαίρα από το δοχείο Α και να τοποθετηθεί στο Β. Η κάθε σφαίρα από το δοχείο Α έχει πιθανότητα $\frac{x}{k}$ να επιλεγεί για να τοποθετηθεί στο δοχείο Β. Άρα, οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος $p(x, x-1) = \frac{x}{k}$.

Επίσης, αν θέλουμε την χρονική στιγμή $(n+1)$ να βρίσκονται στο δοχείο Α $x+1$ σφαίρες, θα πρέπει να επιλέξουμε μια από τις $k-x$ σφαίρες από το Β, με με πιθανότητα

$\frac{k-x}{k} = 1 - \frac{x}{k}$ και να την μεταφέρουμε στο A, δηλαδή:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{k} & y = x - 1 \\ 1 - \dfrac{x}{k} & y = x + 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

(δ) Κλαδωτή αλυσίδα

Έστω ότι μελετάμε έναν πληθυσμό, όπως π.χ. φορείς μίας ασθένειας, πελάτες που φθάνουν σε ένα σημείο εξυπηρέτησης, κ.α., ο οποίος εξελίσσεται με τον χρόνο. Στον πληθυσμό αυτό υπάρχει ένας αρχικός «*οργανισμός*» (φορέας αρρώστιας, πελάτης που εξυπηρετείται) ο οποίος καλείται *προγεννήτορας οργανισμός* ή *μηδενική γενιά* και ο οποίος στο τέλος του βιολογικού του κύκλου παράγει έναν τυχαίο αριθμό ξ απογόνων σύμφωνα με μια υποθετική κατανομή:

$$P\{\xi = m\} = a_m, \; m = 0,1,2,...., \; \sum_{m=0}^{+\infty} a_m = 1$$

Υποθέτουμε ότι όλοι οι απόγονοι δρουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον και γεννούν απογόνους πάντα σύμφωνα με την παραπάνω κατανομή. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται, θεωρητικά έπ' άπειρον, κατά τον ίδιο τρόπο.

Εάν με X_n συμβολίσουμε *το μέγεθος του πληθυσμού της $n^{οστής}$ γενιάς*, τότε η σ.δ. $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ καλείται **κλαδωτή αλυσίδα**. Υποθέτουμε ακόμα ότι ο αρχικός πληθυσμός X_0 αποτελείται από έναν μόνο οργανισμό, δηλ. X_0 =1. Το μέγεθος του πληθυσμού X_{n+1} της n+1-γενιάς είναι ίσο με: $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \xi_k$ όπου ξ_k *ο αριθμός των απογόνων που γεννά ο k οργανισμός της $n^{οστής}$ γενιάς*. Οι $\{\xi_k\}_{k=1}^{+\infty}$, λόγω των υποθέσεων, είναι ανεξάρτητες τ.μ. με (κοινή) κατανομή την παραπάνω.

Οι κλαδωτές αλυσίδες πρωτοχρησιμοποιήθηκαν από τους Galton & Watson (1873), σαν μοντέλα για την εκτίμηση της εξαφάνισης ενός ανδρικού πληθυσμού (διατήρηση επωνύμου). Στα μοντέλα αυτά μας ενδιαφέρει: (α) ο αριθμός των οργανισμών κατά την διάρκεια μίας γενιάς (*κατανομή* της X_n) (β) η πιθανότητα να εξαφανιστεί ο πληθυσμός κάποτε, η λεγόμενη *πιθανότητα εξάλειψης*, δηλαδή η πιθανότητα: $P\{X_n = 0, \text{ για κάποιο } n\}$.

Εφαρμογές

(α) **(Εξάλειψη επωνύμων)** Ο Lotka με βάση τα στοιχεία απογραφής για τους απογόνους των λευκών οικογενειών του 1920 στις Η.Π.Α., υπολόγισε ότι η κατανομή $\{p_k\}$ των αγοριών κατά οικογένεια προσεγγίζεται από την: p_0=0,48, $p_\kappa = (0{,}21)(0{,}59)^{\kappa-1}$ $k \geq 1$, απ' όπου προκύπτει ότι η πιθανότητα εξάληψης ενός επωνύμου ήταν ίση με $s=0,86$ (αρκετά μεγάλη). Εάν υπήρχαν k άντρες με το ίδιο επώνυμο, τότε s = $(0,86)^k$.

(β) **(επιδημία)** Ένας οργανισμός φορέας μίας μολυσματικής αρρώστιας μολύνει k οργανισμούς του «γειτονικού» του περιβάλλοντος, οι οποίοι με την σειρά τους μολύνουν άλλους με τον ίδιο τρόπο. Θέλουμε να ξέρουμε αν πρόκειται για επιδημία ή η αρρώστια τείνει να εξαλειφθεί;

(γ) (**Ουρές**) Πελάτης φτάνει σε ένα κενό σημείο εξυπηρέτησης και αρχίζει να εξυπηρετείται. Κατά την διάρκεια της εξυπηρέτησης του, άλλοι πελάτες φθάνουν και σχηματίζουν μίαν ουρά. Ποία η πιθανότητα κάποτε να πάψει να υπάρχει η ουρά;.

(ε) Μοντέλο κελλιού του Pólya

Το λεγόμενο **μοντέλο κελλιού του Pólya** είναι ένα είδος στατιστικού μοντέλου το οποίο χρησιμοποιείται για να καταλάβουμε μερικές (στατιστικές) κατανομές. Σ΄ ένα τέτοιο μοντέλο κελλιού, τα αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν (όπως άτομα, πλοία, μόρια κ.α.) αναπαριστώνται σαν χρωματιστές μπάλες σ΄ ένα δοχείο (κελλί). Στο βασικότερο από αυτά τα μοντέλα, έχουμε ένα δοχείο το οποίο περιέχει x άσπρες και y μαύρες μπάλες. Μια μπάλα επιλέγεται τυχαία από το δοχείο και παρατηρείται το χρώμα της. Μετά η μπάλα τοποθετείται πάλι πίσω στο δοχείο μαζί με μιά ακόμα μπάλα του ίδιου χρώματος και η διαδικασία συνεχίζεται επ΄ αόριστον (είναι φανερό ότι η διαδικασία είναι διαφορετική απο την δειγματοληψία με ή χωρίς επανάληψη από το δοχείο). Μπορούμε λοιπόν να απαντήσουμε ερωτήσεις αναφορικά με το να επιλέξουμε μιά μπάλα ενός συγκεκριμένου χρώματος.

Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα τέτοιου είδους μοντέλο για να περιγράψουμε την εξάπλωση μιας αρρώστιας σε ένα πληθυσμό.

Έστω λοιπόν, ένας πληθυσμός με i άτομα προσβεβλημένα από μία επιδημία και s επιδεκτικούς στην επιδημία. Ένα προσβεβλημένο άτομο προσθέτει, κάθε φορά που μολύνει ένα άτομο, a ακόμα άτομα στον κατάλογο των προσβεβλημένων. Εάν:

$$X_n = \text{ο αριθμός των προσβεβλημένων στον χρόνο } n.$$

Η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ μια αλυσίδα Markov.

Το μοντέλλου κελλιού γι΄ αυτή την περίπτωση είναι το εξής: έστω ότι έχουμε ένα κελλί που περιέχει r κόκκινα και g πράσινα σφαιρίδια. Επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο από το κελλί, σημειώνουμε το χρώμα του και το τοποθετούμε πίσω. Κάθε φορά που το επιστρέφουμε, βάζουμε ακόμα a σφαιρίδια του ίδιου χρώματος στο κελλί. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία απεριόριστα. Έστω λοιπόν,

$$X_n = \text{ο αριθμός των κόκκινων σφαιριδίων στο τέλος του } n^{οστού} \text{ πειράματος.}$$

Αν $X_n = x,\ x \in S\ (x \geq r)$, ανεξάρτητα από το πως φτάσαμε στην κατάσταση x, το σύστημα θα «μεταβεί» στην κατάσταση $x+a$ ή την x στο χρόνο $(n+1)$ και οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι ίσες με:

$$P\{X_{n+1}=y\ /\ X_0=x_0,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_n=x\}=\begin{cases}\dfrac{x}{r+g+na} & y=x+a\\ 1-\dfrac{x}{r+g+na} & y=x\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται από το χρόνο και τη παρούσα κατάσταση.

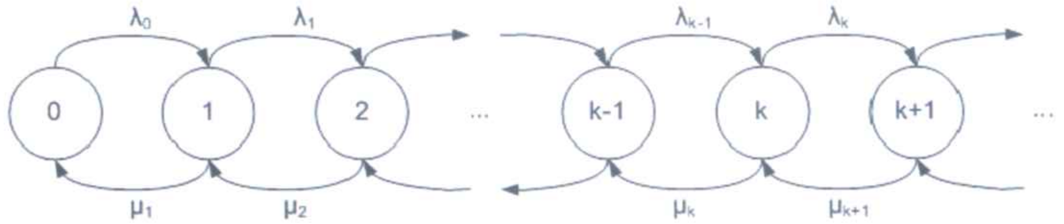
(στ) Αλυσίδες Γέννησης-Θανάτου

Θεωρούμε $\{X_n\}_{n\geq 0}$ μία στοχαστική διαδικασία με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,2,\dots\}$ ή $S=\{0,1,2,\dots,k\}$ και πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος

$$p(x,y)=\begin{cases}p_x & y=x+1\\ q_x & y=x-1\\ r_x & y=x\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

και έστω ότι η X_n παριστάνει *τον πληθυσμό μιας περιοχής την χρονική στιγμή* n.

Τότε, η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια αλυσίδα Markov η οποία καλείται **αλυσίδα γέννησης-θανάτου,** (δ.γ-θ) γιατί μια μετάβαση από την κατάσταση x στην $x+1$ αντιστοιχεί σε μια «γέννηση» ενώ μια μετάβαση από την κατάσταση x στην $x-1$ αντιστοιχεί σε έναν «θάνατο». Οι διαδικασίες αυτές καθορίζονται από τους ρυθμούς «γεννήσεων» $\{\lambda_i\}_{i=0\dots\infty}$ και τους ρυθμούς «θανάτων» $\{\mu_i\}_{i=1\dots\infty}$. Σχηματικά:

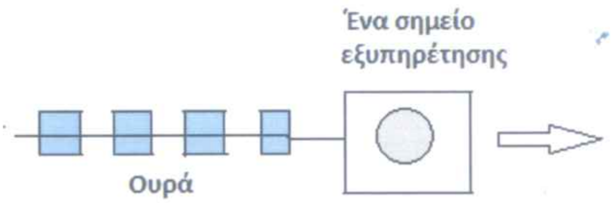


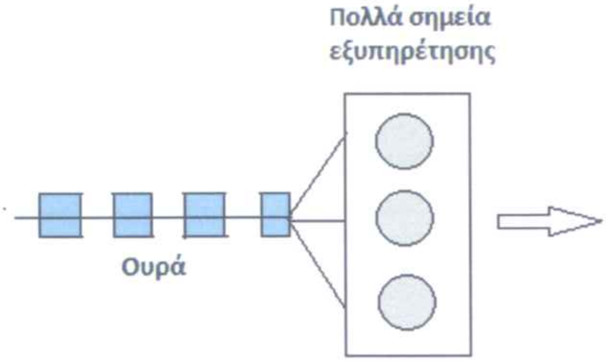
Μια διαδικασία γέννησης-θανάτου για την οποία $\mu_i = 0$ for all $i \geq 0$, καλείται **αμιγής διαδικασία γέννησης**, ενώ εάν ισχύει $\lambda_i = 0$ for all $i \geq 0$, η σ.δ καλείται **αμιγής διακασία θανάτου**.

Οι διαδικασίες γ-θ έχουν πολλές εφαρμογές στην δημογραφία, την θεωρία ουρών, την βιολογία (π.χ. στην εξέλιξη των βακτηρίων) κ.α. Οι τυχαίοι περίπατοι και η αλυσίδα Ehrenfest είναι ειδικές περιπτώσεις αλυσίδων γέννησης-θανάτου.

Εφαρμογή (θεωρία ουρών)

Ας υποθέσουμε ότι «πελάτες» φθάνουν σ'ένα σημείο εξυπηρέτησης , π.χ τις αντλίες ενός βενζινάδικου, τα γκισέ μιας τράπεζας, τα ταμεία ενός super market, τα διόδια ενός σταθμού διοδίων και θέλουν να εξυπηρετηθούν. Εάν οι «εξυπηρετητές» είναι απασχολημενοι, τότε σχηματίζουν μιαν **ουρά**. Υπάρχουν πολλές στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες σχετίζονται μ' ένα σύστημα ουράς. Π.χ. (α) εάν η X_t μπορεί να παριστάνει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα τον χρόνο t ή (β) τον αριθμό των πελατών που έχουν εξυπηρετηθεί μέχρι τον χρόνο t. (γ) η διαδικασία $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ όπου W_n παριστάνει τον χρόνο που «ξοδεύει» στο σύστημα ή στην ουρά ο $n^{\text{οστός}}$ πελάτης.





Ο βασικός μας στόχος όταν μελετάμε ένα σύστημα ουράς είναι συνήθως να το βελτιώσουμε, μεταβάλλοντας το κατάλληλα. Για παράδειγμα, ο ρυθμός άφιξης μπορεί να είναι αρκετά μικρός ώστε οι μονάδες εξυπηρέτησης (π.χ. ταμεία) να είναι άχρηστες για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα χρόνου (οπότε μπορεί να καταργήσουμε κάποια από αυτές).

Οι βασικοί παράγοντες ενός συστήματος ουράς, τους οποίους μπορούμε και να μεταβάλλουμε, είναι οι εξής:

(α) **Οι αφίξεις**: μπορούμε π.χ. να έχουμε αφίξεις πελατών με ραντεβού.

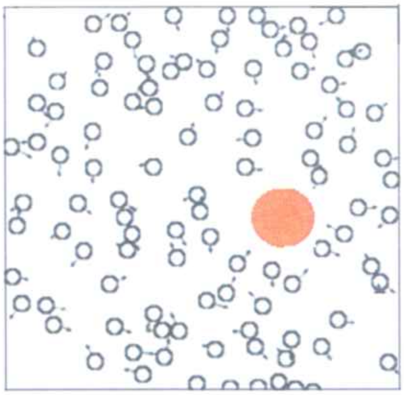
(β) **Η εξυπηρέτηση:** μπορούμε να ελαττώσουμε τον χρόνο εξυπηρέτησης των πελατών με αύξηση των σημείων εξυπηρέτησης, εκπαίδευση των εξυπηρετητών, με αύξηση των ωρών εξυπηρέτησης κ.α.

(γ) **Η επιλογή των πελατών προς εξυπηρέτηση**: μπορούμε π.χ. να επιλέγουμε πρώτα πελάτες με μικρό χρόνο εξυπηρέτησης.

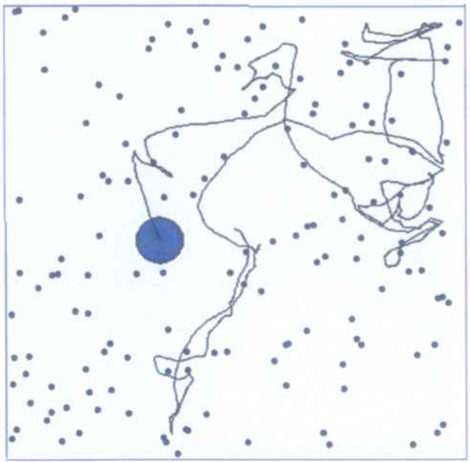
Συνήθως κάνουμε εκείνες τις αλλαγές στο σύστημα, από τις οποίες προκύπτει οικονομικό όφελος.

Β. Στοχαστική διαδικασία του Wiener

Έστω ότι θέλουμε να παρατηρήσουμε τη κίνηση ενός μικροσκοπικού σωματιδίου, το οποίο αρχικά βρίσκεται «βυθισμένο» μέσα σ' ένα υγρό ή αέριο. Η κίνηση που αρχίζει να εκτελεί το σωματίδιο, οφείλεται στο ότι δέχεται έναν μεγάλο αριθμό από τυχαίες και ανεξάρτητες ωθήσεις, οι οποίες προέρχονται από τη σύγκρουσή του με τα μόρια του υγρού ή του αέριου.



Η κίνηση αυτή καλείται **κίνηση του Brown** και μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια μιας τριάδας τυχαίων μεταβλητών (X_t, Y_t, Z_t). Η τυχαία μεταβλητή αυτή, παριτάνει τη θέση του σωματίδιου τον χρόνο t. Η δε, στοχαστική διαδικασία $\{(X_t, Y_t, Z_t), t \in T\}$ είναι η κίνηση του Brown.



Γενικότερα, μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$ καλείται **διαδικασία Wiener** ή **κίνηση Brown** με **συντελεστή ώθησης** $\boldsymbol{\mu}$, εάν:

i. $X(0) = 0$
ii. η $\{X_t\}_{t\in T}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις
iii. για κάθε $t > 0$, η X_t είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή μt.

Στη Θεωρία Πιθανοτήτων η ανέλιξη Wiener είναι από τις πιό χρήσιμες στοχαστικές διαδικασίες με εφαρμογές στην Κβαντική Μηχανική, την στατιστική προσαρμογή δεδομενων, την ανάλυση τιμών μετοχών κ.τ.λ

Γ. Διαδικασίες απαρίθμησης

Μια στοχαστική διαδικασία $\{N_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **διαδικασία απαρίθμησης** εάν η N_t παριστάνει *τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα* $(0,t]$.

Μια τέτοια διαδικασία θα μπορούσε να μετράει τον αριθμό των αεροπλάνων που προσγειώνονται σ' ένα αεροδρόμιο, τον αριθμό των τηλεφωνημάτων που φθάνουν σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο, τον αριθμό των δυστυχημάτων που γίνονται σε μια διασταύρωση κ.α.

Πολλές φορές συμβάνει να ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

- Γεγονότα που συμβαίνουν σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα.
- Η πιθανότητα να συμβεί ένας αριθμός γεγονότων σ' ένα διάστημα είναι ίδια για όλα τα διαστήματα που έχουν ίσο μήκους.
- Σ' ένα πολύ μικρό διάστημα, μπορεί να συμβεί ένα το πολύ γεγονός.

Σ' αυτή την περίπτωση, η διαδικασία απαρίθμησης $\{N_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **διαδικασία Poisson**.

Ορισμός 1.3.2.
Μια διαδικασία απαρίθμησης $\{N_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **διαδικασία Poisson** με ρυθμό λ , εάν:

(α) $N_0 = 0$

(β) η $\{N_t\}_{t\geq 0}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

(γ) ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σε κάθε διάστημα μήκους t, ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt, δηλαδή:

$$P\{N_t = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

όπου $\lambda > 0$ είναι ο μέσος αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν στην μονάδα του χρόνου και καλείται **τάση** ή **ρυθμός** της διαδικασίας.

Παρατήρηση 1.3.3

(α) Η διαδικασία Poisson και η κίνηση του Brown είναι δύο παραδείγματα στοχαστικών διαδικασιών που δεν είναι ασθενώς στάσιμες. Γενικότερα, μια διαδικασία με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις δεν είναι ασθενώς στάσιμη εκτός αν είναι σταθερή.

(β) Μια διαδικασία Poisson είναι μια αμιγής διαδικασία γέννησης με $\lambda_i = \lambda$ for all $i \geq 0$

Παράδειγμα 1.3.4
Πελάτες φθάνουν σ' ένα βενζινάδικο γραφείο σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda = 4$ ανά ώρα. Το βενζινάδικο ανοίγει στις 8.00 π.μ. (α) Ποιά η πιθανότητα να φθάσει

ακριβώς ένας πελάτης μέχρι τις 8.30 π.μ. (β) Ποιά η πιθανότητα να φθάσει ένας ακριβώς πελάτης μέχρι τις 8.30 π.μ. και 5 συνολικά πελάτες μέχρι τις 10.30 π.μ.

Λύση

Εάν N_t ο αριθμός των πελατών που φθάνουν στο βενζινάδικο μέχρι τον χρόνο t, τότε η σ.δ. $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ = 4 πελάτες ανά ώρα

(α) τα 30 λεπτά είναι 1/2 της ώρας, άρα ζητάμε την πιθανότητα:

$$P\{N_{1/2} = 1\} = e^{-4\frac{1}{2}} \frac{4\frac{1}{2}}{1!} = 2e^{-2}$$

(β) Από τις 8.00 π.μ. μέχρι τις 10.30 είναι δύο και μισή ώρες ή 5/2 ώρες, δηλαδή θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα:

$$P\left\{N_{\frac{1}{2}} = 1, N_{\frac{5}{2}} = 5\right\} = P\left\{N_{\frac{1}{2}} = 1, N_{\frac{5}{2}} - N_{\frac{1}{2}} = 5 - 1\right\} = P\left\{N_{\frac{1}{2}} = 1\right\} P\left\{N_{\frac{5}{2}} - N_{\frac{1}{2}} = 4\right\}$$

$$= e^{-4\frac{1}{2}} \frac{4\frac{1}{2}}{1!} e^{-4\times 2} \frac{(4\times 2)^4}{4!} = 0{,}01549$$

?

Κεφάλαιο 2. Στοχαστικές Διαδικασίες δεύτερης τάξης

2.1 Στοχαστικές Διαδικασίες δεύτερης τάξης

Οι περισσότερες από τις σπουδαιότερες στοχαστικές διαδικασίες, όπως η σ.δ. Poisson, η σ.δ. Wiener κ.α. έχουν την χαρακτηριστική ιδιότητα ότι οι ροπές δεύτερης τάξης τους είναι πεπερασμένες. Η ιδιότητα αυτή μας βοηθά στο να ορίσουμε μια ειδική κλάση σ.δ., τις λεγόμενες *στάσιμες* για τις οποίες είναι δυνατόν να αποδειχθεί ένας νόμος των μεγάλων αριθμών (σύγκλιση των δειγματικών μέσων).

Ορισμός 2.1.1
Η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$ καλείται **δεύτερης τάξεως διαδικασία** όταν:

$$EX_t^2 < \infty \quad \text{για κάθε } t \in T.$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε σ.δ. δεύτερης τάξης καθώς και τυχαίες μεταβλητές που ορίζονται με την βοήθεια «γραμμικών» μετασχηματισμών (όπως η ολοκλήρωση και η διαφόρηση) σ.δ. δεύτερης τάξεως.

2.2. Μέση Τιμή και Συνδιακύμανση διαδικασίας

Δύο χαρακτηριστικές ποσότητες μιάς σ.δ. είναι η *συνάρτηση μέσης τιμής* της και η *συνάρτηση συνδιασποράς* της.

Έστω λοιπόν $\{X_t, t \in T\}$, μία δεύτερης τάξεως σ.διαδικασία.

Ορισμός 2.2.1
Η **μέση τιμή,** $\mu_X(t)$, $t \in T$ της διαδικασίας ορίζεται από τη σχέση

$$\mu_X(t) = EX_t$$

Η **συνδιακύμανση** ή **συνδιασπορά** $r_X(s,t)$, $s \in T$ και $t \in T$ ορίζεται από τον τύπο:

$$r_X(s,t) = \text{cov}\,(X(s),X(t)) = EX(s)X(t) - EX(s)EX(t).$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται επίσης και **συνάρτηση (αυτό)-συνδιακύμανσης**.

Ιδιότητες 2.2.2.
(α) Είναι φανερό ότι:

$$\operatorname{Var} X_t = \sigma^2(X_t) = \operatorname{cov}(X_t, X_t),$$

άρα η διακύμανση (ή διασπορά) της X_t μπορεί να εκφραστεί σε σχέση τη συνδιακύμανση ως εξής

$$Var\, X_t = r_X(t,t) \qquad (1)$$

Δηλαδή $\sigma^2(X_t) = r_X(t,t)$

Ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \in T\}$, είναι μια τυχαία μεταβλητή της μορφής:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j X_{t_j},$$

όπου n είναι θετικός ακέραιος, $t_{1,\dots,}t_n$ είναι σημεία στο $\mathbf{T}$, και $b_1, \dots, b_n$ σταθερές που ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς. Η συνδιακύμανση δύο τέτοιου είδους πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_{s_i}, \sum_{j=1}^{n} b_j X_{t_j}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \operatorname{cov}(X_{s_i}, X_{t_j}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j\, r_x(s_i, t_j)$$

Οπότε ισχύει:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j X(t_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j r_X(t_i, t_j) \qquad (2)$$

(β) Από τον ορισμό της της συνδιακύμανσης βλέπουμε άμεσα

(I) $r_X(s,t) = r_X(t,s)$, $s, t \in T$ (ιδιότητα της συμμετρίας).

(II) Ακόμα, η συνδιακύμανση είναι *μη-αρνητικά ορισμένη*, δηλαδή αν n είναι θετικός ακέραιος, $t_{1,\dots,}t_n \in T$ και $b_1, \dots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j r_X(t_i, t_j) \geq 0 \qquad (3)$$

$$\mathrm{Var}\, X_t = \sigma^2(X_t) = \mathrm{cov}\,(X_t, X_t),$$

άρα η διακύμανση (ή διασπορά) της X_t μπορεί να εκφραστεί σε σχέση τη συνδιακύμανση ως εξής

$$Var\, X_t = r_X(t,t) \qquad (1)$$

Δηλαδή $\sigma^2(X_t) = r_X(t,t)$

Ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \in T\}$, είναι μια τυχαία μεταβλητή της μορφής:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j X_{t_j},$$

όπου n είναι θετικός ακέραιος, $t_{1,\dots,}t_n$ είναι σημεία στο $\mathbf{T}$, και $b_1, \dots, b_n$ σταθερές που ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς. Η συνδιακύμανση δύο τέτοιου είδους πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_{s_i}, \sum_{j=1}^{n} b_j X_{t_j}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \,\mathrm{cov}(X_{s_i}, X_{t_j}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j\, r_x(s_i, t_j)$$

Οπότε ισχύει:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j X(t_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j r_X(t_i, t_j) \qquad (2)$$

(β) Από τον ορισμό της της συνδιακύμανσης βλέπουμε άμεσα

(I) $r_X(s,t) = r_X(t,s),\; s,t \in T$ (ιδιότητα της συμμετρίας).

(II) Ακόμα, η συνδιακύμανση είναι *μη-αρνητικά ορισμένη*, δηλαδή αν n είναι θετικός ακέραιος, $t_{1,\dots,}t_n \in T$ και $b_1, \dots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j r_X(t_i, t_j) \geq 0 \qquad (3)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της (2). Πράγματι, έστω

$$Y = \sum_{k=1}^{n} c_k X_{t_k}$$

τότε, $V(Y) = V\left(\sum_{k=1}^{n} c_k X_{t_k}\right) = r_X\left(\sum_{k=1}^{n} c_k X_{t_k}, \sum_{k=1}^{n} c_k X_{t_k}\right)=$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j r_X(t_i, t_j) \geq 0.$$

Ορισμός 2.2.3

Η **συνάρτηση συσχέτισης** της διαδικασίας $\{X_t, t \in T\}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{p_X(s,t) = p(X_s, X_t) = \frac{r_X(s,t)}{\sigma_X(s)\sigma_X(t)} \quad s,t \geq 0}$$

Παράδειγμα 2.2.4

Εάν $X_t = Y\cos(\omega t + \theta)$ και $Y \sim U(-A, A)$, $\Theta \sim U(-\pi, \pi)$ ανεξάρτητες. Να βρεθεί η συνάρτηση μέσης τιμής και η συνάρτηση συνδιασποράς της X_t.

Λύση

$$\mu_X(t) = EX_t = EY\cos(\omega t + \Theta) = EYE\cos(\omega t + \Theta)=0$$

λόγω του ότι οι Y, Θ *είναι* ανεξάρτητες

Ακόμα, για s$< t$

$$r_X(s,t) = EX_sX_t = E(Y\cos(\omega s + \Theta)Y\cos(\omega t + \Theta)) =$$

$$E(Y^2\cos(\omega s + \Theta)\cos(\omega t + \Theta))$$

όμως λόγω ανεξαρτησίας είναι ίσο με

$$= EY^2\frac{1}{2}E(\cos[\omega(t+s) + 2\Theta] + \cos(t-s)\omega)$$

$$= EY^2\frac{1}{2}\cos(t-s)\omega = \frac{1}{3}A^2\cos(t-s)\omega$$

'Αρα:

$$r_X(s,t) = \frac{1}{3}A^2\cos(t-s)\omega$$

Παράδειγμα 2.2.5

Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson, με ρυθμό λ και

$$Y(t) = X_t - tX_1,\ t \in [0,1]$$

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μέσης τιμής και η συνάρτηση συνδιασποράς.

Λύση

Η συνάρτηση μέσης τιμής της Y_t δίνεται από τη σχέση

$$\mu_Y(t) = EY_t = EX_t - tEX_1 = \lambda t - \lambda t = 0.$$

Η συνάρτηση συνδιασποράς είναι ίση με (χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $r_X(s,t) = \lambda min(s,t)$ που αποδεικνύεται παρακάτω – παράδειγμα 2.3.19)

$$\begin{aligned} r_Y(s,t) &= cov(Y_s, Y_t) = cov(X_s - sX_1, X_t - tX_1) \\ &= r_X(s,t) - tr_X(s,1) - sr_X(t,1) + ts\sigma^2(X_1) = \\ &= \lambda min(s,t) - ts\lambda - s\lambda t + ts\lambda = \lambda(min(s,t) - ts). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2.6

Εάν $X_t = A_0\cos(\omega_0 t + \theta)$, $Y_t = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi)$, $A_0, A_1, \omega_0, \omega_1$ σταθερές και $\varphi, \theta \sim U(-\pi,\pi)$ ανεξάρτητες. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση συνδιασποράς $cov(X_t, Y_{t+\tau}) = 0$ $(\theta \neq \varphi)$.

Λύση

Είναι φανερό ότι $EX_t = EY_t = 0$.

Για $\theta \neq \varphi$, έχουμε:

$$\begin{aligned} EX_tEY_{t+\tau} &= E(A_0\cos(\omega_0 t + \theta)A_1\cos(\omega_1(t+\tau) + \varphi)) = \\ &= A_0A_1\, E\cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_1(t+\tau) + \varphi) = \end{aligned}$$

$$= A_0 A_1 E\cos(\omega_0 t + \theta) E\cos(\omega_1(t+\tau) + \varphi)$$

λόγω ανεξαρτησίας.

Αλλά: $E\cos(\omega_0 t + \theta) = E\cos(\omega_1(t+\tau) + \varphi) = 0.$

Άρα, $cov(X_t,\ Y_{t+\tau}) = 0$

Ορισμός 2.2.7

(α) Η σ.δ. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι **ανεξαρτήτων προσαυξήσεων** εάν $\forall\ 0 < t_1 < \cdots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές:

$$X_0, X_{t_1} - X_0, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{ είναι ανεξάρτητες.}$$

(β) Εάν $\forall h > 0,\ s,t \geq 0$ και $s < t$ οι τυχαίες μεταβλητές $X_t - X_s$ και $X_{t+h} - X_{s+h}$ έχουν την ίδια κατανομή, τότε η $\{X_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **στάσιμων προσαυξήσεων.**

Παραδείγματα στοχαστικών διαδικασιών με ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις είναι η στοχαστική διαδικασία Poisson, η στοχαστική διαδικασία Wiener.

Πρόταση 2.2.8

Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ μία στοχαστική διαδικασία με ανεξάρτητες (όχι απαραίτητα) και στάσιμες προσαυξήσεις $X_0 = 0$. Τότε ισχύει:

$$\mu_X(t) = EX_t = t\mu_1,$$

όπου $\mu_1 = EX_1$ και

$$\sigma_X^2(t) = \sigma^2(X_t) = \sigma_1^2 t,$$

όπου $\sigma_1^2 = \sigma^2(X_1)$. Ακόμα $\sigma^2(X_t - X_s) = \sigma_1^2(t-s)$.

Απόδειξη

Θέτουμε:

$$f(t) = EX_t = E(X_t - X_0)$$

Τότε

$$f(t+s) = EX_{t+s} = E(X_{t+s} - X_0) = E(X_{t+s} - X_s) + E(X_s - X_0)$$

όμως λόγω στάσιμων προσαυξήσεων έχουμε,

$$E(X_{t+s} - X_s) + E(X_s - X_0) = E(X_t - X_0) + E(X_s - X_0) = f(t) + f(s)$$

Η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση αυτή, είναι η

$$f(t) = ct.$$

Αλλά $f(1) = EX_1 = c$ δηλαδή $c = \mu_1 = EX$. Άρα, $\mu_X(\mathrm{t}) = \mathrm{t}\mu_1$.

Εάν στην συνέχεια θεωρήσουμε:

$$g(\mathrm{t}) = \sigma^2(X_t) = \sigma^2(X_t - X_0)$$

τότε

$$g(\mathrm{t}+s) = \sigma^2(X_{t+s} - X_0) = \sigma^2[(X_{t+s} - X_s) + (X_s - X_0)]$$

λόγω ανεξαρτήτων προσαυξήσεων έχουμε,

$$\sigma^2[(X_{t+s} - X_s) + (X_s - X_0)] = \sigma^2(X_{t+s} - X_s) + \sigma^2(X_s - X_0)$$

αλλά λόγω στάσιμων προσαυξήσεων ισχύει,

$$\sigma^2(X_{t+s} - X_s) + \sigma^2(X_s - X_0) = \sigma^2(X_t - X_0) + \sigma^2(X_s - X_0)$$

$$= g(\mathrm{t}) + g(s)$$

Άρα,

$$g(\mathrm{t}) = ct$$

και $g(1) = \sigma^2(X_1) = \sigma_1^2 = c$. Άρα, $\sigma^2(X_t) = t\sigma_1^2$.

Τέλος, έστω ότι $t > s$, τότε, λόγω ανεξαρτήτων προσαυξήσεων έχουμε:

$$\sigma^2(X_t) = \sigma^2(X_t - X_s + X_s) = \sigma^2(X_t - X_s) + \sigma^2(X_s) \Rightarrow$$

$$\sigma^2(X_t - X_s) = \sigma^2(X_t) - \sigma^2(X_s).$$

Αλλά από τα προηγούμενα :

$$\sigma^2(X_t - X_s) = \sigma_1^2\, \mathrm{t} - \sigma_1^2\, s = \sigma_1^2(\mathrm{t} - s).$$

$\square$

2.3. Στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες

Εξετάζουμε τώρα μια κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών που έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα, την λεγόμενη ιδιότητα της *στασιμότητας*. Η ιδιότητα αυτή περιγράφει ένα φυσικό σύστημα το οποίο δεν μπορούμε να πούμε ότι έχει μια "ενυπάρχουσα" χρονική (χωρική) αρχή. Η παραδοχή της στασιμότητας είναι κατάλληλη για διαδικασίες που αναφέρονται στην θεωρία πληροφοριών, την αστρονομία, την βιολογία και την οικονομία. Εξετάζουμε συνήθως σ.δ. συνεχούς χρόνου. Οι ορισμοί για τις σ.δ. διακριτού χρόνου είναι ανάλογοι.

Ορισμός 2.3.1

Η σ.δ. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **ισχυρώς στάσιμη** ή **αυστηρά στάσιμη** ή **στάσιμη** αν και μόνο αν η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών:

$$X_{t_1,}X_{t_2},\dots,X_{t_n}$$

συμπίπτει με την από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών

$$X_{t_1+h,}X_{t_2+h},\dots,X_{t_n+h}$$

για κάθε $h \geq 0$ και για κάθε επιλογή δεικτών $t_{1,},t_2,\dots t_n$.

Δηλαδή μιά αυστηρά στάσιμη διαδικασία είναι μια διαδικασία της οποίας η από κοινού συνάρτηση κατανομής δεν αλλάζει όταν η διαδικασία «μετατοπίζεται» στον χρόνο ή τον χώρο.

Επομένως, παράμετροι όπως η μέση τιμή, διασπορά της σ.δ. δεν αλλάζουν αναφορικά με τον χρόνο ή τον χώρο.

Παραδείγματα 2.3.2

(I) Η γεωγραφική κατανομή των αστεριών, γαλαξιών, φυτών, ζώων είναι συχνά (αυστηρά) στάσιμη. Εδώ το σύνολο T είναι είτε ο Ευκλείδειος χώρος, ή η επιφάνεια σφαίρας ή το επίπεδο.

(II) Οικονομικές χρονοσειρές όπως η ανεργία, το Α.Ε.Π., το εισόδημα συχνά υποθέτουμε ότι περιγράφονται από μιά (αυστηρά) στάσιμη διαδικασία.

Στο παρακάτω σχήμα 1 φαίνεται μια προσομοίωση μιας στάσιμης και μιας μη στάσιμης σ.δ.

Σχήμα 1

Παρατήρηση 2.3.3

Μιά στάσιμη διαδικασία δεν πρέπει να συγχέεται με μια διαδικασία με **στάσιμη κατανομή**. Ακόμα, υπάρχουν αρκετές παρερμηνείες του όρου «στασιμότητα». Π.χ. μιά χρονικά-ομογενής αλυσίδα Markov (πολλές φορές καλείται στάσιμη αλυσίδα Markov). Μερικές φορές αναφέρεται σαν μιά σ.δ. με στάσιμες πιθανότητες μετάβασης.

Ορισμός 2.3.4

Η σ.δ. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **ασθενώς στάσιμη** ή **στάσιμη υπό την ευρεία έννοια** ή **στάσιμη υπό την έννοια της συνδιασποράς** αν και μόνο αν:

(I) $\mu_X(t) = \mu_X = EX_t$ είναι ανεξάρτητη από το t.

(II) $r_X(s,t) = r_X(t-s)$

ή ισοδύναμα

$$r_X(t,t+h) = r_X(h), \ \forall h > 0.$$

Δηλαδή,

$$\sigma^2(X_t) = r_X(t,t) = r_X(0)$$

Ισοδύναμα, η σ.δ. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ καλείται ασθενώς στάσιμη αν και μόνο αν $\forall \tau$ η στοχαστική διαδικασία $Y_t = X_{t+\tau}$, $t \geq 0$ έχει την ίδια συνάρτηση μέσης τιμής και συνδιασποράς με την στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Παρατήρηση 2.3.5

Η σ.δ. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι λοιπόν ασθενώς στάσιμη αν και μόνο αν:

I. η $\mu_X(t) = \mu_X = EX(t)$ είναι ανεξάρτητη από το t.

II. η $r_X(s,t) = \Phi\ (|s-t|)$, δηλαδή η συνάρτηση συνδιασποράς $r_X(s,t)$ εξαρτάται από την διαφορά ανάμεσα στα s και t, οπότε για την περιγραφή της μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μιά και όχι δύο μεταβλητές.

Παράδειγμα 2.3.6

Έστω $\{X_t\}_{t\geq 0}$ μια ασθενώς στάσιμη σ.δ. με μηδενική συνάρτηση μέσης τιμής και με συνάρτηση συνδιασποράς:

$$r_X(t) = Ae^{-bt}$$

Για το υπολογισμότ ης ροπής 2ης τάξης της τ.μ. $X_6 - X_2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} E[(X_6 - X_2)^2] &= EX_6^2 - 2EX_6X_2 + EX_2^2 \\ &= r_X(0) - 2r_X(4) + r_X(0) \\ &= A - Ae^{-4A} + A = 2A - Ae^{-4A} \end{aligned}$$

Πρόταση 2.3.7

Κάθε ισχυρά στάσιμη διαδικασία, στην οποία υπάρχουν οι ροπές δεύτερης τάξης, είναι και ασθενώς στάσιμη.

Έστω τώρα $\{X_t\}_{t\geq 0}$ μια δεύτερης τάξεως ασθενώς στάσιμη σ.δ. Τότε, επειδή η $r_X(s,t)$ εξαρτάται από την διαφορά ανάμεσα στα s και t:

$$r_X(s,t) = r_X(0,t-s) \quad s,t \geq 0$$

Οπότε

$$r_X(t,t+h) = r_X(0,h) \triangleq r_X(h) \quad \forall\, h > 0.$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση:

$$r_X(t) = r_X(0,t)$$

την οποία καλούμε **συνάρτηση συνδιασποράς**.

Ακόμα,

$$\sigma^2(X_t) = r_X(t,t) = r_X(0,0) = r_X(0).$$

Παρατήρηση 2.3.8

Είναι γνωστό από την ανισότητα Cauchy- Schwarz ότι εάν X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη δεύτερη ροπή, τότε:

$$(EXY)^2 \leq EX^2 EY^2$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy- Schwarz για τις τ.μ. $X - EX$ και $Y - EY$ παρατηρούμε ότι:

$$\left(cov\,(X,Y)\right)^2 \leq Var\,X \cdot Var\,Y$$

Αν $X = X_s$ και Y$= X_t$, τότε:

$$r_X^2(s,t) \leq r_X(s,s) * r_X(t,t)$$

Ακόμα, σαν συνέπεια της παραπάνω ανισότητας έχουμε:

$$|cov(X_0, X_t)| \leq \sqrt{Var\,X_0\, Var\,X_t}$$

και ως εκ τούτου (σε μια ασθενώς στάσιμη διαδικασία):

$$|\, r_X(t)| \leq \sqrt{r_X(0) * r_X(0)} = r_X(0), \qquad -\infty < t < \infty.$$

Τέλος, εάν $r_X(0) \neq 0$ τότε

$$p_X(X_s,X_{t+s}) = \frac{cov(X_s,X_{t+s})}{\sqrt{\sigma^2(X_s) * \sigma^2(X_t)}} = \frac{r_X(t)}{r_X(0)}$$

Δηλαδή είναι ανεξάρτητη από το s.

Παράδειγμα 2.3.9 (Α.Τ.Κ. ακολουθία)

Μια ακολουθία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ανεξάρτητων και ταυτοτικά κατανεμημένων τ.μ. (Α.Τ.Κ.) με μέση τιμή μ, είναι προφανώς μιά ισχυρά στάσιμη σ.δ. Εάν η κοινή τους κατανομή έχει πεπερασμένη διασπορά σ^2 τότε η σ.δ. είναι και ασθενώς στάσιμη.

Εδώ $\mu_X(n) = \mu, \forall n$ (λόγω της ταυτοτικής κατανομής)

η δε συνάρτηση συνδιασποράς

$$r_X(m,n) = EY_nY_m - EY_nEY_m$$

- $n \neq m$ και Y_n, Y_m ανεξάρτητες τότε $EY_nEY_m - EY_nEY_m = 0$
- $n = m \quad EY_n^2 - (EY_n)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$

Άρα,

$$r_X(m,n) = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \sigma^2 & n = m \end{cases}$$

Μια γενικότερη περίπτωση αυτής της ακολουθίας περιγράφεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3.10

Από την πρόταση 2.2.8 είναι φανερό ότι μία στοχαστική διαδικασία ανεξάρτητων και στάσιμων προσαυξήσεων δεν μπορεί να είναι ασθενώς στάσιμη (η μέση τιμή δεν είναι ανεξάρτητη του t).

Ακόμα, σε μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ με ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις ισχύει ότι:

$$cov(X_s,X_t) = \sigma_1^2\, min(t,s)$$

Οπότε (για έναν επιπλέον λόγο), μία τέτοια στοχαστική διαδικασία δεν είναι ασθενώς στάσιμη.

Πράγματι, είναι γνωστό ότι:

$$\sigma^2(X_t - X_s) = \sigma^2(X_t) + \sigma^2(X_s) - 2cov(X_s, X_t)$$

Έστω $t > s$

$$cov(X_s, X_t) = \frac{1}{2}\{\sigma^2(X_t) + \sigma^2(X_s) - \sigma^2(X_t - X_s)\}$$

το οποίο, λόγω της 2.2.8, γίνεται

$$\frac{1}{2}\{\sigma_1^2\, t - \sigma_1^2\, s - \sigma_1^2(t - s)\} = s\sigma_1^2$$

Άρα,

$$cov(X_s, X_t) = \sigma_1^2 min(t, s)$$

Παρατήρηση 2.3.11

Από την 2.3.10 γίνεται φανερό ότι, η στοχαστική διαδικασία Poisson και η στοχαστική διαδικασία Wiener δεν είναι ασθενώς στάσιμες.

Παράδειγμα 2.3.12 (Λευκός θόρυβος-white noise)

Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ασυσχέτιστων τ.μ. με συνάρτηση μέσης τιμής $EX_t = \mu$ (συνήθως μ=0) και συνάρτηση συνδιασποράς

$$cov(X_t, X_s) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{εάν } t = s \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(συνήθως $\sigma^2 = 1$), καλείται **λευκός θόρυβος**.

Μια τέτοια διαδικασία είναι φανερά ότι είναι ασθενώς στάσιμη (το παράδειγμα είναι γενίκευση του παραδείγματος 2.3.9).

Παράδειγμα 2.3.13 (τετριμένη ακολουθία)

Έστω Z μια τ.μ. με γνωστή κατανομή και $Z_0 = Z_1 = \cdots = Z$. Η στοχαστική διαδικασία $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι εύκολο να δει κανείς ότι είναι μια ισχυρά στάσιμη σ.δ. Εάν η τ.μ. Z έχει πεπερασμένη διασπορά σ^2, τότε η $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι (και) μιά ασθενώς στάσιμη σ.δ. με συνάρτηση συνδιασποράς

$$r_Z(t) = cov(Z_0, Z_t) = cov(Z, Z) = \sigma^2(Z) = \sigma^2$$

Παρατήρηση 2.3.14
Η ακολουθία $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ (τετριμένη) και η ακολουθία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ (Α.Τ.Κ.) είναι μπορεί να πει κανείς δύο «ακραία» παραδείγματα στάσιμων διαδικασιών. Διαφέρουν όμως σε πράγματα όπως π.χ.

(1) Εάν είναι γνωστή η κοινή κατανομή της $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ τότε παρατηρώντας τις $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ δεν έχουμε καμιά πληροφορία που θα μας βοηθήσουμε να προβλέψουμε την Y_{n+1}. Εάν όμως παρατηρήσουμε μόνον την Z_0, μπορούμε να προβλέψουμε πλήρως την $Z_0, Z_1, \dots$.

(2) Εάν η $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ, τότε από τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, οι δειγματικοί μέσοι:

$$\frac{1}{n}\{Y_0 + Y_1 + \dots + Y_{n-1}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$$

Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με την ακολουθία $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$, γιατί:

$$\frac{1}{n}\{Z_0 + Z_1 + \dots + Z_{n-1}\} = Z_0 = Z$$

Δηλαδή υπάρχει τόση τυχαιότητα στον n-οστό δειγματικό μέσο, όση και στην πρώτη παρατήρηση.

Η συμπεριφορά με την οποία οι δειγματικοί μέσοι μιάς σ.δ. συγκλίνουν σε μια συγκεκριμένη παράμετρο καλείται **εργοδική.**

Ένα από τα σημαντικά (πρακτικά) προβλήματα,στην θεωρία πιθανοτήτων, είναι να βρούμε συνθήκες κάτω από τις οποίες μια στάσιμη διαδικασία είναι εργοδική.

Η θεωρία λοιπόν των στάσιμων διαδικασιών έχει σαν κύριο στόχο να κατηγοριοποιήσει σ.δ., οι οποίες βρίσκονται ανάμεσα στις διαδικασίες $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ και $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ανάλογα με την **εργοδική** τους **συμπεριφορά** και ανάλογα με το λεγόμενο **πρόβλημα της πρόβλεψης**.

Παράδειγμα 2.3.15 (ημιτονοειδή κύματα)
Εάν $X_t = A\cos(\lambda t + \theta)\,, t \in \mathbb{R}$ όπου A, λ σταθερές και $\theta \simeq U(-\pi, \pi)$. Τότε η $\{X_t\}$ είναι ασθενώς στάσιμη (κάθε πραγματοποίηση της διαδικασίας αυτής είναι ένα ημιτονοειδές «κύμα», με συχνότητα λ και πλάτος θ).

Λύση

i. Η $\mu_X(t) = EX_t = AE\cos(\lambda t + \theta) = A\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(\lambda t + \theta)\,d\theta = 0$

Επίσης,

ii. $r_X(t,t+\tau) = EX_tX_{t+\tau} =$

$$=E(A\cos(\lambda t+\theta)A\cos(\lambda t+\lambda\tau+\theta)) =$$

$$=\frac{A^2}{(2\pi)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\lambda t+\theta)\cos(\lambda t+\lambda\tau+\theta)\,d\theta =$$

$$=\frac{A^2}{(2\pi)}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos\lambda\tau+\cos(2\lambda t+2\theta+\lambda\tau)\}\,d\theta$$

$$=\frac{A^2}{(2\pi)}\cos(\lambda\tau)$$

που εξαρτάται μόνο από το τ. Συνεπώς, από **i.** και **ii.** έχουμε ότι η $\{X_t\}$ είναι ασθενώς στάσιμη.

□

Παράδειγμα 2.3.16

Η στοχαστική διαδικασία του παραδείγματος 2.2.4 είναι ασθενώς στάσιμη διαδικασία (είναι μιά γενίκευση της διαδικασίας του παραδείγματος 2.3.15).

Παράδειγμα 2.3.17 (τριγωνομετρικά πολυώνυμα)

'Εστω X και Y ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με $EX = 0$ και $EX^2 = \sigma^2(X) = \sigma^2$. 'Εστω ακόμα ότι οι X και Y είναι ασυσχέτιστες (δηλαδή $EXY = 0$). Εάν $\omega \in [0,\pi]$ (συχνότητα) και $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, ορίζουμε:

$$X_n = X\cos(\omega n) + Y\sin(\omega n)$$

Τότε: $EX_n = \cos(\omega n)EX + \sin(\omega n)EY = 0$

Η συνάρτηση συνδιασποράς είναι ίση με:

$C(X_n, X_{n+m}) = EX_nX_{n+m} - EX_nEX_{n+m} = EX_nX_{n+m} =$

$$= E\big(X\cos(\omega n) + Y\sin(\omega n)\big)\big(X\cos(\omega(n+m)) + Y\sin(\omega(n+m))\big) =$$

$$= EX^2\cos(\omega n)\cos(\omega(n+m)) + EXY\cos(\omega n)\sin(\omega(n+m)) +$$

$$+EXY\sin(\omega n)\cos(\omega(n+m)) + EY^2\sin(\omega n)\sin(\omega(n+m)) =$$

$$= \sigma^2\{\cos(\omega n)\cos(\omega(n+m)) + \sin(\omega n)\sin(\omega(n+m))\} =$$

$$= \sigma^2\{\cos(\omega n - \omega(n+m)) = \sigma^2\cos(\omega m)\}$$

και λόγω του ότι η συνδιασπορά των X_n, X_{n+m} εξαρτάται από την (χρονική) διαφορά m, έχουμε ότι η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in Z}$ είναι ασθενώς στάσιμη.

Στην περίπτωση μιά συνεχούς χρόνου σ.δ. και όταν ακόμα οι X,Y ακολουθούν την κανονική κατανομή έχουμε το επόμενο σημαντικό παράδειγμα (η σπουδαιότητά του θα φανεί παρακάτω)

Παράδειγμα 2.3.18

Εάν $Z_1, Z_2 \sim N(0,\sigma^2)$, ανεξάρτητες τ.μ , $\lambda \in \mathbb{R}$ και

$$X_t = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση μέσης τιμής και συνδιασποράς της $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

(β) Δείξτε ότι η $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια δεύτερης τάξεως ασθενώς στάσιμη διαδικασία.

Λύση

(α) $\mu_X(t) = EX_t = EZ_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t = 0$

Ακόμα

$$r_X(s,t) = cov(X_s, X_t) = EX_sX_t - EX_sEX_t$$

$$= E[(Z_1 \cos s\lambda + Z_2 \sin s\lambda)(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t)] =$$

$$= EZ_1^2 \cos s\lambda \cos \lambda t + EZ_1Z_2 \cos s\lambda \sin \lambda t +$$

$$+EZ_1Z_2 \cos \lambda t \sin s\lambda + EZ_2^2 \sin s\lambda \sin \lambda t =$$

$$\sigma^2(\cos s\lambda \cos \lambda t + \sin s\lambda \sin \lambda t) = \sigma^2 \cos \lambda (t-s)$$

(β) Από το (α) βλέπουμε ότι η $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι δεύτερης τάξης ασθενώς στάσιμη διαδικασία με συνάρτηση συνδιασποράς

$$r_X(t) = \sigma^2 \cos \lambda t,$$

Παράδειγμα 2.3.19

Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια διαδικασία Poisson, με ρυθμό λ, να υπολογιστεί η συνάρτηση μέσης τιμής και η συνάρτηση συνδιασποράς.

Λύση

Έχουμε ότι η $X_t \sim P(\lambda t)$ και $\sigma^2(X_t) = \lambda t$.

Η συνάρτηση μέσης τιμής

$$\mu_X(t) = EX_t = \lambda t.$$

Για τη συνάρτηση συνδιασποράς έχουμε:

Έστω $s < t$

$$r_X(s,t) = cov(X_s, X_t) = cov(X_s, (X_t - X_s) + X_s) =$$

$$= cov(X_s, X_t - X_s) + cov(X_s, X_s)$$

Αλλά $cov(X_s, X_t - X_s) = 0$ γιατί $X_s, X_t - X_s$ ανεξάρτητες, άρα

$$cov(X_s, X_t - X_s) + cov(X_s, X_s) = \sigma^2(X_s) = \lambda s$$

Δηλαδή, $r_X(s,t) = \lambda min(s,t)$.

▯

Παρατήρηση 2.3.20

Είναι φανερό ότι η σ.α Poisson <u>δεν είναι ασθενώς στάσιμη</u>.

Παράδειγμα 2.3.21

Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια ανέλιξη Poisson, με ρυθμό λ, και $Y(t) = X_{t+1} - X_t$, $t \geq 0$. Τότε, η $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ είναι δεύτερης τάξεως ασθενώς στάσιμη ανέλιξη.

Λύση

Η συνάρτηση μέσης τιμής είναι ίση με

$$EY_t = EX_{t+1} - EX_t = \lambda(t+1) - \lambda t = \lambda \text{ ανεξάρτητο του } t.$$

Η συνάρτησης συνδιασποράς είναι ίση με

$$r_X(s,t) = cov(Y_s, Y_t) = cov(X_{s+1} - X_s, X_{t+1} - X_t)$$

I. Εάν $|t-s| \geq 1$ τότε οι $X_{s+1}-X_s, X_{t+1}-X_t$ είναι ανεξάρτητες, άρα $r_X(s,t)=0$.

II. $|t-s|<1$ τότε έστω $s<t<s+1$

$$r_X(s,t) = cov(X_{s+1}-X_s, X_{t+1}-X_t) =$$

$$cov\big((X_t-X_s)+X_{s+1}-X_t, X_{t+1}-X_{s+1}+X_{s+1}-X_t\big) =$$

$$cov(X_t-X_s, X_{t+1}-X_{s+1}) + cov(X_t-X_s, X_{s+1}-X_t) +$$

$$cov(X_{s+1}-X_t, X_{t+1}-X_{s+1}) + cov(X_{s+1}-X_t, X_{s+1}-X_t)$$

Αλλά,

$$cov(X_t-X_s, X_{t+1}-X_{s+1}) = cov(X_t-X_s, X_{s+1}-X_t) =$$

$$= cov(X_{s+1}-X_t, X_{t+1}-X_{s+1}) = 0,$$

λόγω ανεξαρτησίας.

Οπότε,

$$r_X(s,t) = cov(X_{s+1}-X_t, X_{s+1}-X_t) = \sigma^2(X_{s+1}-X_t)$$

$$= \lambda\big(\mathbf{1}+(t-s)\big)$$

λόγω στασιμότητας των προσαυξήσεων.
Άρα τελικά,

$$r_X(s,t) = \begin{cases} \lambda(1-|t-s|) & αν\ |t-s| < \mathbf{1} \\ 0 & αν |t-s| \geq 1 \end{cases}$$

Δηλαδή η $\{Y_t\}$ είναι μία δεύτερης τάξεως ασθενώς στάσιμη διαδικασία, με συνάρτηση συνδιαποράς

$$r_X(t) = \begin{cases} \lambda(\mathbf{1}-|t|) & για\ |t| < 1 \\ 0 & για\ |t| \geq \mathbf{1} \end{cases}$$

▯

Παράδειγμα 2.3.22
Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ με $X_t = Y\cos\omega t,\ t \geq 0,\ \omega$ σταθερά και $Y \sim U(0,1)$

Να υπολογιστεί

(α) η μέση τιμή $\mu_X(t)$

(β) η συνδιασπορά $cov(X_s, X_t)$

Λύση

(α) Η μέση τιμή:

$$\mu_X(t) = EX_t = EY \cos \omega t = \frac{1}{2} \cos \omega t$$

(β) Για να υπολογίσουμε τη συνδιασπορά $cov(X_s, X_t)$ χρειάζεται πρώτα να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της $X_s X_t$.

Αλλά:

$$EX_sX_t = E(Y \cos \omega s\, Y \cos \omega t) = EY^2(\cos \omega t \cos \omega s)$$

$$= \frac{1}{3} \cos \omega s \cos \omega t$$

Οπότε η συνδιασπορά $cov(X_s, X_t)$ είναι ίση με

$$cov(X_s, X_t) = EX_sX_t - EX_sEX_t = \frac{1}{3} \cos \omega s \cos \omega t - \frac{1}{2} \cos \omega s \frac{1}{2} \cos \omega t$$

$$= \frac{1}{12} \cos \omega s \cos \omega t$$

Παρατήρηση 2.3.23

Από το (α) συμπεραίνουμε ότι η $\{X_t\}$ δεν είναι ασθενώς στάσιμη.

Παράδειγμα 2.3.24 (random telegraph signal)

Έστω $(N_t)_{t\geq 0}$ μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και T_0 μία ανεξάρτητη από αυτήν τυχαία μεταβλητή, τέτοια ώστε $P\{T_0 = \pm 1\} = 1/_2$.

Ορίζουμε,

$$T_t = T_0(-1)^{N_t}$$

Δείξτε ότι:

1. Η $\{T_t\}$ είναι ασθενώς στάσιμη και αυστηρά στάσιμη.
2. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη συνδιασπορά της $X(t) = \int_0^t T_s\, ds$.

Λύση

1. Για να δούμε ότι $\{T_t\}$ η είναι αυστηρά στάσιμη: πρέπει να προσέξουμε ότι, αρχίζοντας οποιαδήποτε χρονική στιγμή t ανεξάρτητα από τη τιμή του $N(t)$, καθώς η T_0 είναι εξ' ίσου πιθανό να είναι ίση με 1 ή με -1, έπεται ότι η $\{T_t\}$ είναι και αυτή εξ'ίσου πιθανό να είναι 1 ή -1. Έτσι, επειδή η διαδικασία Poisson συνεχίζει να είναι διαδικασία Poisson μετά από κάθε χρονική στιγμή, έχουμε ότι η $\{T_t\}$ είναι αυστηρά στάσιμη.

   Έχουμε ακόμα ότι:

$$T_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ (T_0 = 1\ \kappa\alpha\iota\ N_t = 2\kappa\ )\ \acute{\eta}\ (T_0 = -1\ \kappa\alpha\iota\ N_t = 2\kappa + 1\ ) \\ -1 & \alpha\nu\ (T_0 = 1\ \kappa\alpha\iota\ N_t = 2\kappa + 1\ )\ \acute{\eta}\ (T_0 = -1\ \kappa\alpha\iota\ N_t = 2\kappa) \end{cases}$$

   Η μέση τιμή είναι

$$ET_t(\omega) = 1 * P(T_0 = 1\ ) * P(\ N_t = 2\kappa\ ) + 1 * P(T_0 = -1\ ) * P(\ N_t = 2\kappa + 1\ )$$
$$-1 * P(T_0 = 1\ ) * P(\ N_t = 2\kappa + 1\ ) - 1 * P(T_0 = -1\ ) * P(\ N_t = 2\kappa\ ) =$$
$$\frac{1}{2}P(\ N_t = 2\kappa\ ) + \frac{1}{2}P(\ N_t = 2\kappa + 1\ ) - \frac{1}{2}P(\ N_t = 2\kappa + 1\ ) - \frac{1}{2}P(\ N_t = 2\kappa\ ) = 0$$

   Η

$$T_t^2 \equiv 1, \quad \text{άρα}\ ET_t^2 = \sigma^2 T(t) = 1$$

   Η συνδιασπορά είναι, λόγω του ότι $T_0^2 \equiv 1$, ίση με:

$$cov(T_s, T_{s+t}) = E(T_s\, T_{s+t}) = E(T_0(-1)^{N_s} * T_0(-1)^{N_{t+s}}) = E((-1)^{N_s + N_{t+s}})$$
$$= E\left((-1)^{N_{t+s} - N_s} * \underbrace{(-1)^{2N_s}}_{=1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k P(N(t) = k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-\lambda t}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda t)^k}{k!} = e^{-2\lambda t}$$

   που εξαρτάται από το t. Άρα η $\{T_t\}$ είναι ασθενώς στάσιμη.

2. Έχουμε:

(α) η μέση τιμή $EX(t) = \int_0^t ET_s\, ds = 0$

(β) η συνάρτησης συνδιασποράς:

$$\sigma^2\big(X(t)\big) = EX^2(t) = E\left(\int_0^t T_u\, du \int_0^t T_v\, dv\right) = \int_0^t \int_0^t E(T_u T_v) du dv =$$

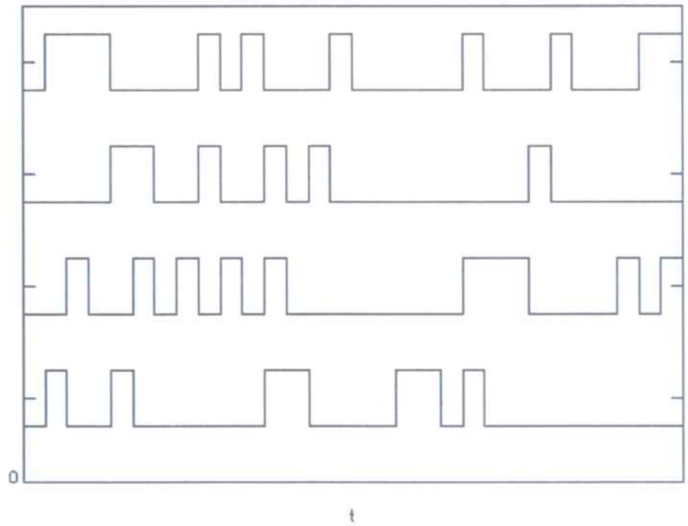
$$= 2 \iint_{0<u<v<t} E(T_u T_v) du dv = 2 \int_0^t \int_0^u e^{-2\lambda(u-v)}\, dv du$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(t - \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda t}\right).$$

Εφαρμογή

Έστω ένα σωματίδιο που κινείται με σταθερή μοναδιαία ταχύτητα κατά μήκος μιας ευθείας και έστω ότι το σωματίδιο συγκρούεται με άλλα σωματίδια, οι δε αυτές συγκρούσεις συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε φορά που το σωματίδιο συγκρούεται αλλάζει διεύθυνση. Εάν λοιπόν T_0, παριστάνει την αρχική του ταχύτητα, τότε η ταχύτητά του, τη χρονική στιγμή t,(έστω $T(t)$) δίνεται από τη σχέση $T_t = T_0(-1)^{N_t}$ όπου N_t ο αριθμός των συγκρούσεων του σωματιδίου μέχρι το χρόνο t. Εάν T_0 είναι εξ' ίσου πιθανό να είναι 1 ή -1 και είναι ανεξάρτητη από τη $\{N_t\}_{t\geq 0}$ τότε η $\{T_t\}$ είναι μία διαδικασία ***random telegraph signal*** (προσομοιώσεις της σ.δ φαίνονται στο σχήμα 2).

Η $X(t) = \int_0^t T_s\, ds$ δίνει τη μετακίνηση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t από τη θέση που είχε τη χρονική στιγμή 0.



Σχήμα 2: σ.δ *random telegraph signal*

Παράδειγμα 2.3.25

Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια δεύτερης τάξεως ασθενώς στάσιμη στοχαστική ανέλιξη και ορίσουμε την $Y_t = X_{t+1} - X_t$. Τότε η $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ είναι δεύτερης τάξεως ασθενώς στάσιμη στοχαστική ανέλιξη με μηδενική συνάρτηση μέσης τιμής, $\mu_Y(t) = 0$ και συνάρτηση συνδιασποράς:

$$\mathrm{r}_Y(\mathrm{t}) = 2r_X(t) - r_X(t-1) - r_X(t+1)$$

Λύση

Έχουμε,

$$\mu_Y(t) = EY_t = EX_{t+1} - EX_t = \mu_X(t+1) - \mu_X(t) = 0,$$

γιατί, οι $\mu_X(t+1)$ και $\mu_X(t)$ είναι ίσες λόγω (ασθενούς) στασιμότητας.

Επίσης, για $s < t$ έχουμε, η συνδιασπορά

$$\begin{aligned}\mathrm{r}_Y(s,\mathrm{t}) &= cov(X_{t+1} - X_t, X_{s+1} - X_s)\\ &= cov(X_{s+1}, X_{t+1}) - cov(X_{s+1}, X_t) - cov(X_{t+1}, X_s) + cov(X_t, X_s)\\ &= r_X(s+1, t+1) - r_X(s+1, t) - r_X(t+1, s) + r_X(t, s)\\ &= 2r_X(0, t-s) - r_X(t+1-s) - r_X(t-1-s)\end{aligned}$$

εξαρτάται από τη διαφορά του t με το s.

Άρα, η $\{Y_t\}$ είναι δεύτερης τάξεως ασθενώς στάσιμη στοχαστική ανέλιξη με συνάρτηση συνδιασποράς

$$\mathrm{r}_Y(\mathrm{t}) = \mathrm{r}_Y(0,\mathrm{t}) = 2r_X(t) - r_X(t-1) - r_X(t+1)$$

□

Παράδειγμα 2.3.26

Εάν $X_t = U\cos t + (V+1)\sin t,\ -\infty < t < \infty$,και οι τ.μ. U, V είναι ανεξάρτητες και $EU = EV = 0,\ EU^2 = EV^2 = 1.$

(α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση συνδιασποράς της X_t και

(β) να δειχθεί ότι η X_t δεν είναι ασθενώς στάσιμη.

Λύση

(α) Για τη συνάρτηση συνδιασποράς της X_t χρειαζόμαστε πρώτα

$$EX_tX_s = E[(U\cos t + (V+1)\sin t)(U\cos s + (V+1)\sin s)] =$$

$$EU^2 \cos t \cos s + EU(V+1)\cos t \sin s$$

$$+EU(V+1)\sin t \cos s + E(V+1)^2 \sin t \sin s$$

$$= \cos t \cos s + \sin t \sin s + \sin t \sin s$$

$$= \cos(t-s) + \sin t \sin s$$

Επίσης,

$$EX_t = E[(U\cos t + (V+1)\sin t)] = \sin t$$

$$EX_s = E[(U\cos s + (V+1)\sin s)] = \sin s$$

Άρα,

$$cov(X_t, X_s) = EX_tX_s - EX_tEX_s = \cos(t-s)$$

(β) $EX_t = \sin t$

όχι σταθερά, άρα η στοχαστική διαδικασία δεν είναι ασθενώς στάσιμη.

Πρόταση 2.3.27

Έστω η σ.δ.:

$$X_t = U\cos\omega t + V\sin\omega t,\ t \in \mathbb{R},\ c = \omega t \ \textit{και}\ U, V\ \textit{τυχαίες μεταβλητές}$$

(α) Εάν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ασθενώς στάσιμη , τότε $E(U) = 0 = E(V)$ (αναγκαία όχι ικανή)

(β) Η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ασθενώς στάσιμη αν και μόνο αν

i. Οι U, V ασυσχέτιστες ($EUV = 0$)
ii. $E(U^2) = E(V^2) = \sigma^2$

Απόδειξη

(α) Η μέση τιμή

$$\mu_x(t) = EX_t = (EU)\cos\omega t + (EV)\sin\omega t$$

Για να είναι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ ασθενώς στάσιμη, θα πρέπει η μέση τιμή να είναι σταθερή και ανεξάρτητη του t, που συμβαίνει αν $E(U) = 0 = E(V)$.

Ακόμα,

$$r_x(t,t+s) = E(X_t * X_{t+s}) =$$

$$= E\big[(U\cos\omega t + V\sin\omega t)\big(U\cos\big(\omega(t+s)\big) + V\sin\big(\omega(t+s)\big)\big)\big]$$

$$= E(U^2)\cos\omega t\cos\big(\omega(t+s)\big) + EUV\cos\omega t\sin\big(\omega(t+s)\big)$$

$$+EUV\sin\omega t\cos\big(\omega(t+s)\big) + E(V^2)\sin\omega t\sin\big(\omega(t+s)\big)$$

(β) ($\Rightarrow$) Έστω ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ασθενώς στάσιμη. Από το (α) έχουμε ότι:

$$E(U) = 0 = E(V)$$

Ακόμα, εάν $X_0 = U$, $X_{\frac{\pi}{2\omega}} = V$, τότε:

$EX_0^2 = EX_{\frac{\pi}{2\omega}}^2 = r_x(0{,}0) \triangleq \sigma_x^2$ οπότε:

$EX_0^2 = E(U^2) = \sigma_x^2$

$EX_{\frac{\pi}{2\omega}}^2 = E(V^2) = \sigma_x^2$

Από το (α) έχουμε

$$r_x(t,t+s) = \sigma^2\cos\omega s + EUV\sin(2\omega t + \omega s) \qquad (*)$$

Επειδή η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι αυστηρά στάσιμη, η $r_x(t,t+s)$ θα είναι συνάρτηση του s, οπότε από την $(*)$ έπεται $EUV = 0$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, εάν $EUV = 0$ και $E(U^2) = \sigma^2 = E(V^2)$, τότε (από το (α)):

$$r_x(t,t+s) = \cos\omega s = r_x(s)$$

η οποία εξαρτάται μόνο από το s.

Ακόμα, $\mu_x(t) = (EU)\cos\omega t + (EV)\sin\omega t = 0$.

Άρα, η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ασθενώς στάσιμη.

•

Για να είναι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ ασθενώς στάσιμη, θα πρέπει η μέση τιμή να είναι σταθερή και ανεξάρτητη του t, που συμβαίνει αν $E(U) = 0 = E(V)$.

Ακόμα,

$$r_x(t,t+s) = E(X_t * X_{t+s}) =$$

$$= E\big[(U\cos\omega t + V\sin\omega t)\big(U\cos\big(\omega(t+s)\big) + V\sin\big(\omega(t+s)\big)\big)\big]$$

$$= E(U^2)\cos\omega t\cos\big(\omega(t+s)\big) + EUV\cos\omega t\sin\big(\omega(t+s)\big)$$

$$+EUV\sin\omega t\cos\big(\omega(t+s)\big) + E(V^2)\sin\omega t\sin\big(\omega(t+s)\big)$$

(β) ($\Rightarrow$) Έστω ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ασθενώς στάσιμη. Από το (α) έχουμε ότι:

$$E(U) = 0 = E(V)$$

Ακόμα, εάν $X_0 = U$, $X_{\frac{\pi}{2\omega}} = V$, τότε:

$EX_0^2 = EX_{\frac{\pi}{2\omega}}^2 = r_x(0,0) \triangleq \sigma_x^2$ οπότε:

$EX_0^2 = E(U^2) = \sigma_x^2$

$EX_{\frac{\pi}{2\omega}}^2 = E(V^2) = \sigma_x^2$

Από το (α) έχουμε

$$r_x(t,t+s) = \sigma^2\cos\omega s + EUV\sin(2\omega t + \omega s) \qquad (*)$$

Επειδή η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι αυστηρά στάσιμη, η $r_x(t,t+s)$ θα είναι συνάρτηση του s, οπότε από την $(*)$ έπεται $EUV = 0$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, εάν $EUV = 0$ και $E(U^2) = \sigma^2 = E(V^2)$, τότε (από το (α)):

$$r_x(t,t+s) = \cos\omega s = r_x(s)$$

η οποία εξαρτάται μόνο από το s.

Ακόμα, $\mu_x(t) = (EU)\cos\omega t + (EV)\sin\omega t = 0$.

Άρα, η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ασθενώς στάσιμη.

•

Παράδειγμα 2.3.28 (ασθενώς στάσιμη $\not\Rightarrow$ ισχυρά στάσιμη)

Εάν $X_t = U\cos t + V\sin t,\ t \in \mathbb{R}$ όπου U, V ανεξάρτητες, ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές και $P(U=-2) = -\frac{1}{3}$, $P(U=1) = \frac{2}{3}$.

Η $\{X_t\}$ είναι ασθενώς στάσιμη, αλλά όχι αυστηρά στάσιμη. Δηλαδή, δεν ισχύει ότι οι X_t είναι ταυτοτικά κατανεμημένες άρα οι ροπές είναι σταθερές, ανεξάρτητες του t.

Λύση

Έχουμε, $\quad EU = EV = (-2)\frac{1}{3} + (1)\frac{2}{3}$ =0

$$EU^2 = EV^2 = (-2)^2\frac{1}{3} + (+1)^2\frac{2}{3} = 2$$

Ακόμα,

$$EUV = EU\,EV = 0$$

λόγω ανεξαρτησίας των U, V.

Οπότε,

$$EX_t = E[U\cos t + V\sin t] = EU\cos t + EV\sin t = 0$$

Άρα, από την πρόταση 2.3.27 έπεται ότι, η $\{X_t\}$ είναι ασθενώς στάσιμη.

Τώρα,

$$EX_t^3 = E(U\cos t + V\sin t)^3$$

$$= EU^3\cos^3 t + 3EU^2V\cos^2 t\sin t + 3E(UV^2)\cos t\sin^2 t + EV^3\sin^3 t$$

$$= -2(\cos^3 t + \sin^3 t)$$

η οποία εξαρτάται από το t.

Άρα η $\{X_t\}$ δεν μπορεί να είναι αυστηρώς στάσιμη.

□

Παρατήρηση 2.3.29

Η θεωρία των στάσιμων σ.δ. είναι σημαντική και χρήσιμη στην Στατιστική. Πολλές ακολουθίες $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ παρατηρήσεων, παραμετρικοποιημένες από τον χρόνο στον οποίο ελήφθησαν, μοντελοποιούνται από διαδικασίες. Στατιστικά προβλήματα όπως η *εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων* και η *πρόβλεψη μελλοντικών τιμών* της ακολουθίας συχνά μελετώνται με την βοήθεια αυτών των διαδικασιών. Οι ακολουθίες αυτές ονομάζονται **χρονοσειρές** (π.χ. η τιμή μιάς συγκεκριμένης μετοχής κατά την διάρκεια των δύο τελευταίων μηνών).

Θέλοντας να βρούμε μια δομή που χαρακτηρίζει τέτοιες ακολουθίες, μελετάμε διαδικασίες **κινούμενων μέσων** (moving averages) οι οποίες είναι «ομαλές» παραλλαγές μιάς στάσιμης ακολουθίας , δηλαδή

$$Y_n = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i X_{n-i}$$

με $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ σταθερές.

Εναλλακτικά, προσπαθούμε να προσαρμόσουμε μοντέλα στις παρατηρήσεις μας, οπότε θεωρούμε «σχήματα αυτοσυσχέτισης» Y, δηλαδή ακολουθίες τ.μ. που ικανοποιούν την σχέση:

$$Y_n = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i Y_{n-i} + \xi_n$$

με $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ μια ακολουθία ασυσχέτιστων τ.μ. με μέση τιμή 0 και σταθερή πεπερασμένη διασπορά.

Παράδειγμα 2.3.30 (διαδικασίες κινούμενου μέσου)

Έστω $\{\xi_n\}_{n=0,\pm 1,\pm 2,\dots}$ μια ακολουθία ασυσχέτιστων τ.μ. με κοινή μέση τιμή μ και με διασπορά σ^2. Έστω $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ πραγματικές σταθερές και έστω η σ.δ.

$$X_n = \alpha_1 \xi_n + \alpha_2 \xi_{n-1} + \dots + \alpha_m \xi_{n-m+1_m}$$

Τότε, η μέση τιμή της διαδικασίας είναι ίση με

$$EX_n = \alpha_1 E\xi_n + \alpha_2 E\xi_{n-1} + \dots + \alpha_m E\xi_{n-m+1_m} = \mu\{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m\} = \mu\alpha$$

όπου $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$

Ακόμα $\sigma^2(X_n) = \sigma^2 \alpha$.

Η συνάρτηση συνδιασποράς είναι ίση με (αν θέσουμε $\hat{\xi_k} = \xi_k - \mu$)

$$cov(X_n, X_{n+r}) = E\{(X_n - \mu\alpha)(X_{n+r} - \mu\alpha)\} = E\left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \hat{\xi}_{n-i+1} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \hat{\xi}_{n+r-j+1}\right\}$$

$$=\begin{cases} \sigma^2\{\alpha_m\alpha_{m-r} + \cdots + \alpha_1\} & \text{εάν } r \leq m-1 \\ 0 & r \geq m \end{cases}$$

Δηλαδή η ακολουθία $\{X_n\}_{n=0,\pm1,\pm2,\dots}$ είναι μιά ασθενώς στάσιμη σ.δ.

□

Παρατήρηση 2.3.31

Εάν $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{m}}$, $k = 1,2,\dots,m$ τότε η συνάρτηση συνδιασποράς είναι ίση με

$$r_X(n) = \begin{cases} \sigma^2\left(1 - \frac{r}{m}\right) & \text{εάν } r \leq m-1 \\ 0 & r \geq m \end{cases}$$

Εάν m=1, έχουμε την ακολουθία των ασυσχέτιστων τ.μ.

Παράδειγμα 2.3.32 (**autoregressive διαδικασία**)

Έστω $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών με $E\xi_n = 0$, $\forall n$ και

$$\sigma^2(\xi_n) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{1-\lambda^2} & n = 0 \\ \sigma^2 & n \geq 1 \end{cases}$$

και $\lambda^2 < 1$. Ορίζουμε, $X_0 = \xi_0$ και

$$X_n = \lambda X_{n-1} + \xi_n \quad n \geq 1.$$

H $\{X_n\}_{n\geq 0}$ καλείται **autoregressive στοχαστική διαδικασία πρώτης τάξης** (η σχέση ορισμού αναφέρει ότι, η κατάσταση X_n τη χρονική στιγμή n, είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο της κατάσταση τη χρονική στιγμή $n-1$, συν ένα τυχαίο σφάλμα ξ_n).

Χρησιμοποιώντας αναδρομικά τη σχέση ορισμού της $\{X_n\}$, έχουμε:

$$X_n = \lambda(\lambda X_{n-2} + \xi_{n-1}) + \xi_n = \lambda^2 X_{n-2} + \lambda\xi_{n-1} + \xi_n = \cdots = \sum_{\kappa=0}^{n} \lambda^{n-\kappa}\xi_\kappa$$

Τώρα,

$$EX_n = \sum_{\kappa=0}^{n} \lambda^{n-\kappa} E\xi_\kappa = 0$$

και

$$cov(X_n, X_{n+m}) = cov\left(\sum_{\kappa=0}^{n} \lambda^{n-\kappa}\xi_\kappa, \sum_{\kappa=0}^{n+m} \lambda^{n+m-\kappa}\xi_\kappa\right) = \sum_{\kappa=0}^{n} \lambda^{n-\kappa}\lambda^{n+m-\kappa} cov(\xi_\kappa, \xi_\kappa)$$

(λόγω του ότι ξ_i, ξ_j ασυσχέτιστες για $i \neq j$)

$$= \sigma^2 \lambda^{2n+m}\left(\frac{1}{1-\lambda^2} \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda^{-2\kappa}\right) = \frac{\sigma^2 \lambda^m}{1-\lambda^2}$$

που εξαρτάται απο το m. Δηλαδή, η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι μία ασθενώς στάσιμη (διακριτού χρόνου) στοχαστική διαδικασία.

Προφανώς η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ δεν είναι αυστηρά στάσιμη.

●

Ορισμός 2.3.33

Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$, $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ δύο στοχαστικές διαδικασίες δεύτερης τάξεως, η **συνάρτηση ετερο-συνδιασποράς** τους ορίζεται από την σχέση:

$$r_{XY}(s,t) = cov(X_s, Y_t) = EX_sY_t - EX_sEY_t$$

Παρατήρηση 2.3.34

1. Είναι φανερό ότι $r_{XY}(s,t) = r_{YX}(s,t)$ και $r_{XX}(s,t) = r_X(s,t)$

2. Η συνάρτηση ετερο-συνδιασποράς χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε και τη συνάρτηση διασποράς του αθροίσματος των δύο διαδικασιών. Δηλαδή, εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}, \{Y_t\}_{t\geq 0}$ στοχαστικές ανελίξεις δεύτερης τάξεως και $Z_t = X_t + Y_t$, τότε η συνδιασπορά της $\{Z_t\}$ είναι ίση με:

$$r_Z(s,t) = cov(X_s + Y_s, X_t + Y_t)$$

$$= cov(X_s, X_t) + cov(X_s, Y_t) + cov(Y_s, X_t) + cov(Y_s, Y_t)$$

$$= r_X(s,t) + r_{XY}(s,t) + r_{YX}(s,t) + r_Y(s,t)$$

Εάν $r_{XY}(s,t) = r_{YX}(s,t) = 0$ τότε

$$r_{X+Y}(s,t) = r_X(s,t) + r_Y(s,t)$$

Οι παραπάνω τύποι και ορισμοί μπορούν να επεκταθούν σε οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος στοχαστικών διαδικασιών.

Έτσι, εάν X_t^{κ} $\kappa = 1, 2, \dots . n$ είναι δεύτερης τάξης ασθενώς στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες και έστω ότι οι συναρτήσεις συνδιασποράς μηδενίζονται, τότε η σ.δ.

$$X_t = \sum_{\kappa=1}^{n} X_\kappa$$

Είναι μιάς δεύτερης τάξης στάσιμη σ.δ., με:

I. $\mu_X(\mathrm{t}) = \sum_{\kappa=1}^{n} \mu_{X_\kappa}(\mathrm{t})$

II. $\mathrm{r}_X(\mathrm{t}) = \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{r}_{X_\kappa}(\mathrm{t})$

Παράδειγμα 2.3.35

Εάν $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}, \dots, Z_{n1}, Z_{n2}$ είναι $2n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $Z_{\kappa 1}, Z_{\kappa 2} \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\kappa^2)$, $\kappa = 1, 2, \dots, n$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και ορίσουμε

$$X_t = \sum_{\kappa=1}^{n} (Z_{\kappa 1} \cos \lambda_\kappa \mathrm{t} + Z_{\kappa 2} \sin \lambda_\kappa \mathrm{t})$$

Τότε, η μέση τιμή της X_t είναι:

$$\mu_X(\mathrm{t}) = \sum_{\kappa=1}^{n} \{(EZ_{\kappa 1}) \cos \lambda_\kappa \mathrm{t} + (EZ_{\kappa 2}) \sin \lambda_\kappa \mathrm{t}\} = 0$$

και εάν

$$X_\kappa(\mathrm{t}) = Z_{\kappa 1} \cos \lambda_\kappa \mathrm{t} + Z_{\kappa 2} \sin \lambda_\kappa \mathrm{t}$$

τότε είδαμε $\mathrm{r}_{X^{(\kappa)}}(\mathrm{t}) = \sigma_\kappa^2 \cos \lambda_\kappa \mathrm{t}$

Άρα,

$$\mathrm{r}_X(\mathrm{t}) = \sum_{\kappa=1}^{n} \sigma_\kappa^2 \cos \lambda_\kappa \mathrm{t}$$

δηλαδή η $\{X_t\}$ είναι μία δεύτερης τάξεως ασθενώς στάσιμη στοχαστική διαδικασία.

□

Ένα τρίτο είδος στασιμότητας είναι η λεγόμενη *στασιμότητα δεύτερης τάξης*. Προκύπτει όταν οι συνθήκες της στασιμότητας αναφέρονται σε ζευγάρια τυχαίων μρταβλητών της στοχαστικής διαδικασίας (αντίστοιχος ορισμός για την $n^{οστής}$ τάξης στασιμότητα).

Ορισμός 2.3.36

Μία στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$ καλείται **δεύτερης τάξης στάσιμη** εάν:
πυκνότητα πιθανότητα

i. Η πυκνότητα πιθανότητας παραμένει σταθερή για κάθε χρονική μετατόπιση Δ, δηλαδή: $f_{X_{t_i}}(x_i) = f_{X_{t_i+\Delta}}(x_i)$

ii. Η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας παραμένει σταθερή για κάθε χρονική μετατόπιση Δ, δηλαδή:
$$f_{X_{t_1},X_{t_2}}(x_1,x_2) = f_{X_{t_1+\Delta},\ X_{t_2+\Delta}}(x_1,x_2),\ \forall t_1,t_2,\Delta$$

Παρατήρηση 2.3.37
Εάν οι συναρτήσεις μέσης τιμής και συνδιασποράς υπάρχουν τότε, μία δεύτερης τάξης στάσιμη διαδικασία, είναι ασθενώς στάσιμη.

Αλλά και μία στοχαστική διαδικασία μπορεί να είναι ασθενώς στάσιμη χωρίς να είναι στάσιμη δεύτερης τάξης.

2.4 Διαδικασία Gaussian

Μια από τις σπουδαιότερες κλάσεις στοχαστικών διαδικασιών είναι οι λεγόμενες Gaussian. Η σπουδαιότητα τους βρίσκεται στο ότι «κληρονομούν» ιδιότητες της κανονικής κατανομής. Έτσι, στις διαδικασίες αυτές, η κατανομή διαφόρων ποσοτήτων (όπως π.χ. την μέσης τιμής της διαδικασίας αναφορικά με ένα εύρος χρόνου) μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά.

Ορισμός 2.4.1
Η στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$ καλείται **Gaussian ή κανονικά κατανεμημένη** εάν και μόνο εάν κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδιασμός των τυχαίων μεταβλητών X_t, $t \in T$ είναι κανονικά κατανεμημένος (ακολουθεί μ΄ άλλα λόγια την κανονική κατανομή).

Παρατήρηση 2.4.2

1. Εάν $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι Gaussian, τότε $\forall\, t \in T$ η X_t είναι κανονικά κατανεμημένη και $EX_t^2 < \infty$. Δηλαδή πρόκειται για μία διαδικασία δεύτερης τάξεως.

2. Οι διαδικασίες Gaussian έχουν ιδιότητες τις οποίες, γενικά, δεν τις έχουν άλλες διαδικασίες δεύτερης τάξης. Χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές στη Μηχανική, τη Φυσική κ.α.

3. **Παράδειγμα**

Εάν $Z_1, Z_2 \sim N(0, \sigma^2)$, ανεξάρτητες και

$$X_t = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$$

τότε η $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι Gaussian.

Πράγματι, εάν $n \in N,\ t_1, \dots, t_n \geq 0$ και $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ τότε η

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa X_{t_\kappa} = \sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa (Z_1 \cos \lambda t_\kappa + Z_2 \sin \lambda t_\kappa) =$$

$$Z_1 \left(\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa \cos \lambda t_\kappa \right) + Z_2 \left(\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_{\kappa} \sin \lambda t_\kappa \right)$$

Που είναι γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικά κατανεμημένων τ.μ. Άρα, η $\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa X_{t_\kappa}$ θα είναι κανονικά κατανεμημένη.

Επομένως, η $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι Gaussian.

4. Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι Gaussian με μηδενικές μέσες τιμές, τότε η τ.μ. $X_t \sim N(0, r_X^2\ (t,t))$.

Άρα,

$$EX_t^4 = 3\left(r_X(t,t)\right)^2.$$

Ορισμός 2.4.3 (*από κοινού κανονική*)

Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \dots, X_n$ έχουν την **από κοινού κανονική (ή Gaussian) κατανομή**, εάν $\forall\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ η

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa X_{t_\kappa}$$

είναι κανονικά κατανεμημένη.

Παρατήρηση 2.4.4

(1) Μία στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι Gaussian εάν και μόνο εάν $\forall\ n \in \mathbb{N}$ και $\forall\ t_1, \ldots, t_n \ \in \mathbb{R}^+$ οι τυχαίες μεταβλητές $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ έχουν την από κοινού κανονική κατανομή.

(2) Εάν $X_1, \ldots, X_n$ έχουν την από κοινού κανονική κατανομή και έστω f η πυκνότητα πιθανότητας στο $\mathbb{R}^n$ (Η f υπάρχει αν και μόνο αν ο πίνακας συνδιασποράς έχει ορίζουσα μη-μηδενική).

Μπορεί να δειχθεί ότι η f έχει τη μορφή:

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}\sqrt{det\Sigma}} e^{-1/2[(\tilde{x}-\tilde{\mu})^T \Sigma^{-1}(\tilde{x}-\tilde{\mu})]}$$

όπου Σ ο πίνακας συνδιασποράς

$$\Sigma = \begin{bmatrix} cov(X_1, X_1) & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & \cdots & cov(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

Και $\tilde{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \ \tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$

Δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας καθορίζεται μονοσήμαντα από την συνάρτηση μέσης τιμής και την συνάρτηση συνδιασποράς

Εάν $n = 2$

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-p^2}} e^{-\frac{Q(X_1, X_2)}{2}}$$

Όπου,

$$Q(X_1, X_2) = \frac{1}{1-p^2}\left[\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2p\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

p, ο συντελεστής συσχέτισης των X_1, X_2.

(3) Δύο διαδικασίες Gaussian, που έχουν τις ίδιες συναρτήσεις μέσης τιμής και συνδιασποράς, έχουν τις ίδιες από κοινού συναρτήσεις κατανομής (έπεται εύκολα από το (2)).

Παρατήρηση 2.4.5 *(αυστηρά στάσιμη διαδικασία)*
Είναι φανερό ότι μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι **αυστηρά στάσιμη** εάν $\forall\, h > 0$, η στοχαστική διαδικασία $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ όπου $Y_t = X_{t+h}$, έχει τις ίδιες από κοινού συναρτήσεις κατανομής με την $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Παρατήρηση 2.4.6

1. Μία αυστηρά στάσιμη διαδικασία δεν είναι απαραίτητο να έχει πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης.

   Εάν έχει, είναι φανερό ότι είναι μία ασθενώς στάσιμη δεύτερης τάξης διαδικασία.

2. Εάν $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι δεύτερης τάξης, ασθενώς στάσιμη διαδικασία και έστω η X ότι είναι Gaussian τότε, είναι αυστηρά στάσιμη.

   Γιατί, εάν $h > 0$, τότε η στοχαστική διαδικασία $Y_t = X_{t+h}$ έχει τις ίδιες συναρτήσεις μέσης τιμής και συνδιασποράς αντίστοιχα με αυτές της X_t. Αλλά τότε οι δύο διαδικασίες έχουν τις ίδιες από κοινού συναρτήσεις κατανομής.

3. Η $X_t = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$ όπου $Z_1, Z_2 \sim N(0,\sigma^2)$ ανεξάρτητες, είναι ασθενώς στάσιμη (παράδειγμα 2.3.18) και Gaussian. Άρα είναι (και) αυστηρά στάσιμη διαδικασία.

2.5 Διαδικασία Wiener

Είχε γίνει αντιληπτό, με την βοήθεια μικροσκοπίου, ότι σωματίδια τα οποία βρίσκονται μέσα σ' ένα υγρό συνεχώς κινούνται διαγράφοντας μια ασυνήθιστη κίνηση. Η κίνηση αυτή είναι αποτέλεσμα των συγκρούσεων του σωματιδίου με τα μικρότερα και μη διακρινόμενα μόρια του υγρού. Οι συγκρούσεις υποθέτουμε ότι συμβαίνουν πολύ συχνά, σε μικρά χρονικά διαστήματα, ανεξάρτητα μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα του κάθε χτυπήματος θεωρείται πολύ μικρό σε σχέση με το συνολικό αποτέλεσμα. Η κίνηση αυτή καλείται **κίνηση Brown**, εξ' αιτίας του R. Brown (1827) που την μελέτησε από τους πρώτους προσεκτικά.

Το 1900 ο L. Bachelier, διδακτορικός φοιτητής των μαθηματικών στη Σορβόννη, μελετούσε τη συμπεριφορά των τιμών των μετοχών στο χρηματιστήριο του Παρισιού και παρατήρησε υψηλές ασυνήθιστες προσαυξήσεις (στις τιμές αυτές, από ημέρα σε ημέρα). Προσδιόρησε, για πρώτη φορά, την κίνηση αυτή μαθηματικά, και την χρησιμοποίησε ως μοντέλο για την περιγραφή της προσαύξησης των τιμών των μετοχών.

Από τότε, πολλά Μαθηματικά μοντέλα έχουν κατασκευαστεί ή προταθεί για την κίνηση αυτή. Εάν από αυτά είναι και το παρακάτω.

Έστω ότι η θέση ενός σωματιδίου περιγράφεται με την βοήθεια ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμάνων του οποίου η αρχή είναι η θέση του σωματιδίου την χρονική στιγμή t=0. Τότε οι τρεις συντεταγμένες της θέσης του σωματιδίου μεταβάλονται ανεξάρτητα, κάθε μια σύμφωνα με μιά διαδικασία $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.

Ορισμός 2.5.1
Η στοχαστική διαδικασία $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ καλείται **διαδικασία Wiener** αν και μόνο αν

1. $W_0 = 0$
2. $\forall t > 0$, η $W(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με $EW(t) = 0$
3. Η $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Η ιδιότητα (1) είναι αποτέλεσμα της εκλογής του συστήματος συντεταγμένων. Οι ιδιότητες (2) και (3) είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι (υποθέτουμε ότι) η κίνηση προκαλείται από έναν πολύ μεγάλο αριθμό ασυσχέτιστων μεταξύ τους και αμελητέων, αν τις θεωρήσουμε μεμονομένα, συγκρούσεων οι οποίες δεν εμφανίζουν κάποια τάση να ωθήσουν το σωματίδιο προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Ακόμα, το κεντρικό οριακό θεώρημα είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι οι προσαυξήσεις $W(t) - W(s)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

Ένα τέτοιου είδους μοντέλο αρχικά κατασκευάστηκε από τον A. Einstein το 1905. Συνέδεσε την παράμετρο σ^2 με διάφορες φυσικές παραμέτρους όπως ο αριθμός του Avogadro. Αν και το μαθηματικό μοντέλο φαίνεται εύλογο και προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα αρκετά καλά, παρουσιάζει μερικά μειονεκτήματα τα οποία θα δούμε αργότερα. Τόσο η δουλειά του Bachelier όσο και του Einstein δεν ήταν αρκετά αυστηρή. Κανένας δεν απέδειξε ότι μια τέτοιου είδους στοχαστική διαδικασία, που ικανοποιεί τις τρεις παραπάνω ιδιότητες που την ορίζουν υπάρχει.

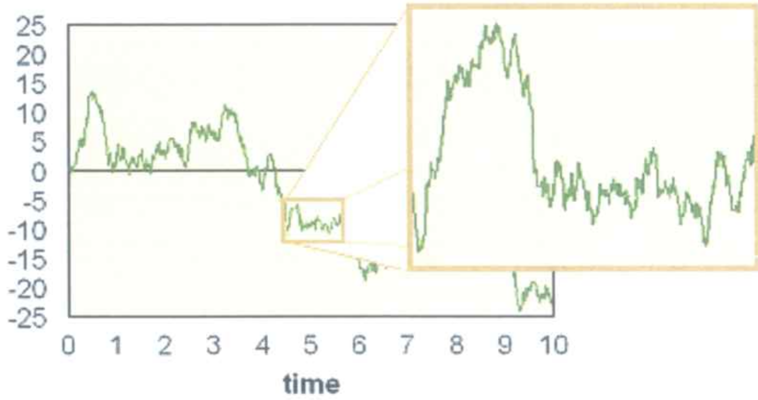
Μιά διαδικασία $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)-(3) καλείται επίσης και **κίνηση Brown**. Οι μαθηματικοί N. Wiener και P.Levy δημιούργησαν το μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας για την κίνηση αυτή, η οποία είναι τώρα συνήθως γνωστή σαν διαδικασία Wiener και P.Levy (ή κίνηση Brown).

Παρατήρηση 2.5.2

(1) Σαν σ.δ. Wiener συνήθως θεωρούμε μια σ.δ. $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ που ικανοποιεί, εκτός από τις ιδιότητες (1)-(3), και την επιπλέον ιδιότητα της «συνέχειας των τροχιών» την οποία θα περιγράψουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

(2) Αν σ=1, τότε η διαδικασία ονομάζεται ***κανονική κίνηση Brown***. Όμως, επειδή κάθε κίνηση Brown μπορεί να μετατραπεί σε κανονική θέτοντας $B(t) = W(t)/\sigma$, συνήθως μελετάμε την κανονική κίνηση Brown.

Μια προσομοίωση μιας σ.δ. Wiener φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 3.



Σχήμα 3: σ.δ. Wiener

Οι προσομειώσεις αυτές φαίνεται να έχουν το ίδιο σχήμα όσο και αν τις μεγενθύνουμε

Παράδειγμα 2.5.3 (Παραλλαγές της Κίνησης Brown)

1. Κίνηση Brown με Αδράνεια (Drift)

Η σ.δ. $\{X(t),\ t\geq 0\}$ είναι μια ***κίνηση Brown με συντελεστή αδράνειας*** (*drift coefficient*) μ και συντελεστή διασποράς σ^2, αν:

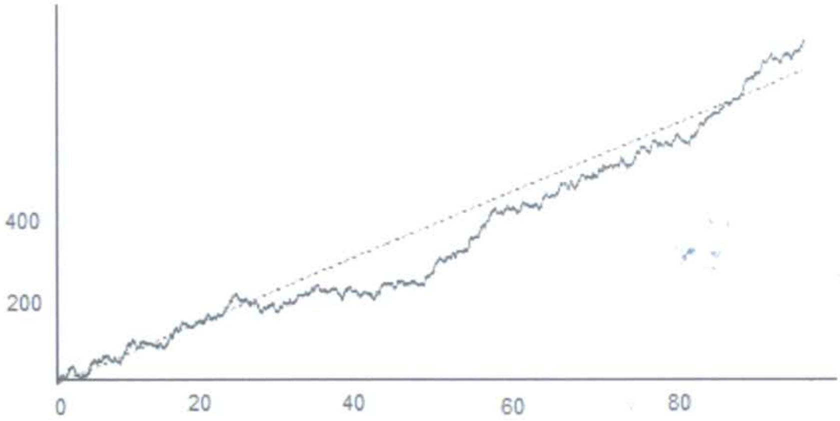
I) $X(0)=0$

II) η $\{X(t),\ t\geq 0\}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

III) η $X(t)$ έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή μt και διασπορά $t\sigma^2$.

Ένας ισοδύναμος ορισμός είναι να θεωρήσουμε ότι η $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ είναι μια κανονική κίνηση Brown και να ορίσουμε σαν $X(t) = \sigma W(t) + \mu t$.

Στο σχήμα 4 φαίνεται μια προσομοίωση της κίνησης Brown με μ=10 και σ=20 (με διακεκομμένη γραμμή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mu_X(t)$=10t).



Σχήμα 4

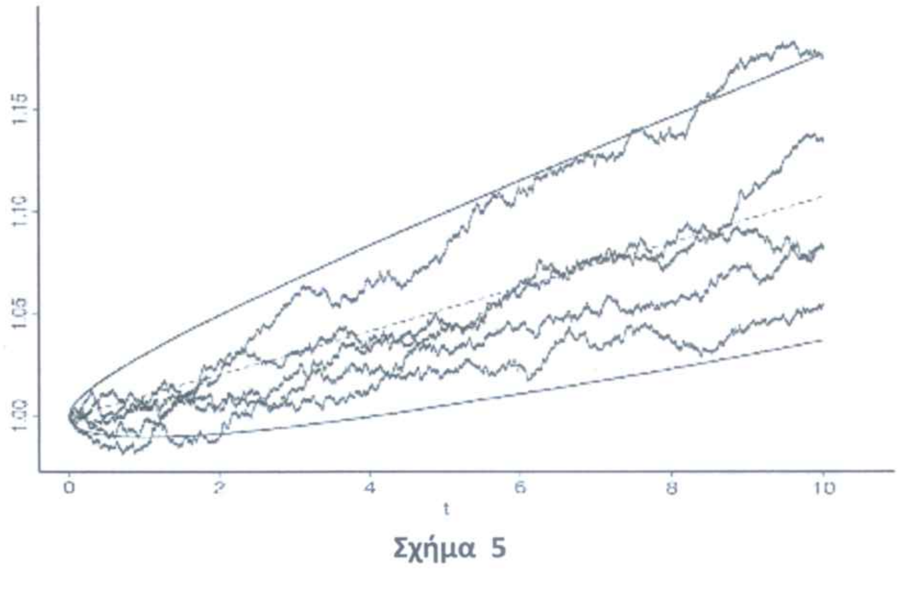
2. Γεωμετρική Κίνηση Brown

Η σ.δ $\{X(t),\ t\geq 0\}$ ονομάζεται ***γεωμετρική κίνηση Brown*** εάν

$$X(t)=e^{Y(t)}$$

όπου $\{Y(t),\ t\geq 0\}$ είναι μια κίνηση Brown με συντελεστή αδράνειας μ και συντελεστή διασποράς σ^2.

Στο σχήμα 5 φαίνονται προσομοιώσεις της γεωμετρικής κίνησης Brown $X(t) = e^{0{,}01\,W(t)+0{,}01\,t}$



Σχήμα 5

Πρόταση 2.5.4

1. (α) Εάν $a \leq s, t$ τότε

$$E\Big(\big(W(s) - W(\alpha)\big)\big(W(t) - W(\alpha)\big)\Big) = \sigma^2\big(min(s-\alpha, t-\alpha)\big)$$

(β) $r_w(s,t\ ) = \begin{cases} \sigma^2 min(|s|,|t|), & st > 0 \\ 0, & st \leq 0 \end{cases}$

2. Μία διαδικασία Wiener είναι διαδικασία Gaussian.

Απόδειξη

1. (α) Έστω $s < t$, τότε:

$$E\Big(\big(W(s) - W(\alpha)\big)\big(W(t) - W(\alpha)\big)\Big)$$

$$= E\Big(\big(W(s) - W(\alpha)\big)\big\{\big(W(t) - W(s)\big) + \big(W(s) - W(\alpha)\big)\big\}\Big)$$

$$= E\Big(\big(W(s) - W(\alpha)\big)\big(W(t) - W(s)\big)\Big) + E\big(W(s) - W(\alpha)\big)^2$$

(λόγω ανεξαρτησίας)

$$= E\big(W(s) - W(\alpha)\big)E\big(W(t) - W(s)\big) + E\big(W(s) - W(\alpha)\big)^2$$

$$= (s - \alpha)$$

(β) Έπεται από το παράδειγμα 2.3.10, μιάς και μιά σ.δ. είναι μια διαδικασία ανεξάρτητων και στάσιμων προσαυξήσεων.

(Χάριν ευκολίας, θα χρησιμοποιούμε το W_t αντί του $W(t)$)

(2) Εάν $n \in \mathbb{N}\ \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ και $t_1 \leq \cdots \leq t_n$ η τυχαία μεταβλητή

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \beta_\kappa W_{t_\kappa}$$

είναι κανονικά κατανεμημένη γιατί

$$W_{t_j} = \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) + \cdots + \left(W_{t_1} - W_0\right)$$

δηλαδή η $\sum_{\kappa=1}^{n} \beta_\kappa W_{t_\kappa}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των προσαυξήσεων $W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ που είναι ανεξάρτητες και κανονικά κατανεμημένες.

Άρα, η $\sum_{\kappa=1}^{n} \beta_\kappa W_{t_\kappa}$ είναι κανονικά κατανεμημένη.

Παρατήρηση 2.5.5 (ισοδύναμος ορισμός διαδικασίας Wiener)
Μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι μια σ.δ. $\{W_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια διαδικασία Wiener αν είναι μια διαδικασία Gaussian με μηδενική συνάρτηση μέσης τιμής και συνάρτηση συνδιασποράς:

$$cov(W_s, W_t) = \sigma_1^2 min(t,s)$$

Παράδειγμα 2.5.6 (παραλλαγές της διαδικασίας Wiener).
Εάν $\{W_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια διαδικασία Wiener, να βρεθεί η διασπορά των παρακάτω τ.μ. (παραλλαγές της σ.δ Wiener):

1. Έστω $X_1(t) = s\left(W_{t/\sigma^2}\right)$

   Τότε $\sigma^2(X_1(t)) = \sigma^2\left(sW_{t/\sigma^2}\right) = \sigma^2 s^2\, t/\sigma^2 = s^2 t.$

2. Έστω $X_2(t) = t\,W(1/t)$

   Τότε,

$$\sigma^2(X_2(t)) = \sigma^2\left(t\,W_{1/t}\right) = t^2\sigma^2(W_{1/t}) = t^2\sigma^2\, 1/t = \sigma^2 t.$$

3. Εάν $\sigma^2 = 1$. Έστω $Y(t) = |W_t|$.

   Είναι γνωστό ότι η πυκνότητα πιθανότητας της $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ είναι

$$f_W(x) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2t}$$

   Άρα,

$$EY_t = E(|W_t|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_W(x) dx = 2\int_0^{\infty} x \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2t} dt = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

Έχουμε,

$$\mathcal{J} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int x\, e^{-\frac{x^2}{(\sqrt{2t})^2}} dx$$

Θέτουμε,

$$\frac{x}{\sqrt{2t}} = w \Rightarrow dx = \sqrt{2t}\, dw$$

Και

$$\mathcal{J} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int w\sqrt{2t}\, e^{-w^2} \sqrt{2t}\, dw = \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}} \int 2we^{-w^2} dw$$

Αντικαθιστώντας:

$$-w^2 = u \Rightarrow -2wdw = du$$

Τελικά παίρνουμε,

$$-\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}} \int e^u du = -\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}} e^u + c = -\sqrt{2t}e^{-w^2} + c == -\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2t} + c$$

Άρα,

$$\tilde{\mathcal{J}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} x \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2t}\, dt == -\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2t} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

Ακόμα,

$$EY_t^{\,2} = EW_t^{\,2} = t$$

Οπότε,

$$\sigma^2(Y_t) = EY_t^{\,2} - (EY_t)^2 = t - \left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\right)^2 = t - \frac{2t}{\pi} = \frac{t(\pi - 2)}{\pi}$$

4 Έστω $\sigma^2 = 1$ Και $V_t = W_t - tW_1,\ 0 \leq t \leq 1$

Ισχύει: $E(V_t V_s) = t(1 - s)$ όταν $t \leq s$

Γιατί, έχουμε

$$E(V_t V_s) = E\big((W_t - tW_1)(W_s - sW_1)\big) =$$

$$= EW_t W_s - sEW_t W_1 - tEW_s W_1 + tsEW_1^{\,2}$$

$$= t - st - ts + ts = t(1-s)$$

Οπότε

$$\sigma^2(V_t) = E(V_t^2) = E(V_t V_t) = t(1-t)$$

▯

Παράδειγμα 2.5.7

Εάν $\{W_t\}_{t\geq 0}$ μία στοχαστική διαδικασία Wiener, να βρεθεί η συνάρτηση μέσης τιμής και η συνάρτηση συνδιασποράς της $\{X_t\}_{t\geq 0}$, όπου:

(a) $X_t = W_t^2$

Η συνάρτηση μέσης τιμής είναι ίση με:

$$EX_t = EW_t^2 = \sigma^2 t = \mu_x(t)$$

Η συνάρτηση συνδιασποράς

$$r_x(s,t) = E(W_t^2 W_s^2) - EW_t^2 EW_s^2$$

$$\alpha\nu\ s \leq t, \qquad EW_t^2 EW_s^2 = \sigma^4 ts \quad \kappa\alpha\iota$$

$$E(W_t^2 W_s^2) = E[(W_t - W_s) + W_s]^2 W_s^2$$

$$= E(W_t - W_s)^2 W_s^2 + EW_s^4 + 2E(W_t - W_s)W_s^3 \ \overline{\overline{\alpha\nu\varepsilon\xi.}}$$

$$= E(W_t - W_s)^2 EW_s^2 + EW_s^4 + 2\underbrace{E(W_t - W_s)}_{=0} EW_s^3 =$$

$$= \sigma^2(t-s)\sigma^2 s + 3\sigma^4 s^2 = \sigma^4 ts - \sigma^4 s^2 + 3\sigma^4 s^2$$

$$= \sigma^4 ts + 2\sigma^4 s^2$$

Άρα,

$$r_x(s,t) = 2\sigma^4 s^2, \ s \leq t$$

και γενικά,

$$r_x(s,t) = 2\sigma^4 \min(s^2, t^2)$$

(b) $X_t = tW\left({}^{1}/_{t}\right)$

Η συνάρτηση μέσης τιμής είναι ίση με:

$$\mu_x(t) = EX_t = tEW\left(1/_t\right) = 0$$

Η συνάρτηση συνδιασποράς

$$r_x(s,t) = EX_sX_t = sEW\left(1/_s\right)\, tEW\left(1/_t\right) = st\,\sigma^2 \min\left(\frac{1}{s},\frac{1}{t}\right) = \sigma^2 \min\left(\frac{st}{s},\frac{st}{t}\right)$$
$$= \sigma^2 \min(t,s)$$

(γιατί $s < t \Rightarrow \frac{1}{s} > \frac{1}{t}$)

(c) $X_t = \frac{1}{c}W(c^2t)$

Η συνάρτηση μέσης τιμής είναι ίση με:

$$\mu_x(t) = \frac{1}{c}EW(c^2t) = 0$$

Η συνάρτηση συνδιασποράς

$$r_x(s,t) = \frac{1}{c^2}EW(c^2t)W(c^2s) = \frac{1}{c^2}\sigma^2\min(c^2t,c^2s) = \frac{1}{c^2}\sigma^2c^2\min(t,s) = \sigma^2\min(t,s)$$

(d) $X_t = W(t) - tW(1)$

Η συνάρτηση μέσης τιμής είναι ίση με:

$$\mu_x(t) = EX_t = EW(t) - tEW(1) = 0$$

Η συνάρτηση συνδιασποράς

$$r_x(s,t) = \sigma^2(min(s,t) - st)$$

(ο υπολογισμός είναι ανάλογος με το παράδειγμα , στη σ.δ. Poisson).

•

Παρατήρηση 2.5.8
Καμία από τις παραπάνω σ.δ. δεν είναι ασθενώς στάσιμη.

Παράδειγμα 2.5.9 (η σ.δ των Ornstein-Uhlenbeck)
Εάν $\{W_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια (τυποποιημένη) σ.διαδικασία Wiener και έστω η σ.δ.:

$$U(t) = e^{-\frac{\alpha t}{2}}W_{e^{\alpha t}}$$

Η σ.δ. $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ καλείται **σ.δ των Ornstein-Uhlenbeck.** Είναι ένα μοντέλο για την περιγραφή της κίνησης ενός σωματιδίου που βρίσκεται μέσα σε υγρό ή αέριο (οπότε είναι χρήσιμη στην στατιστική μηχανική).

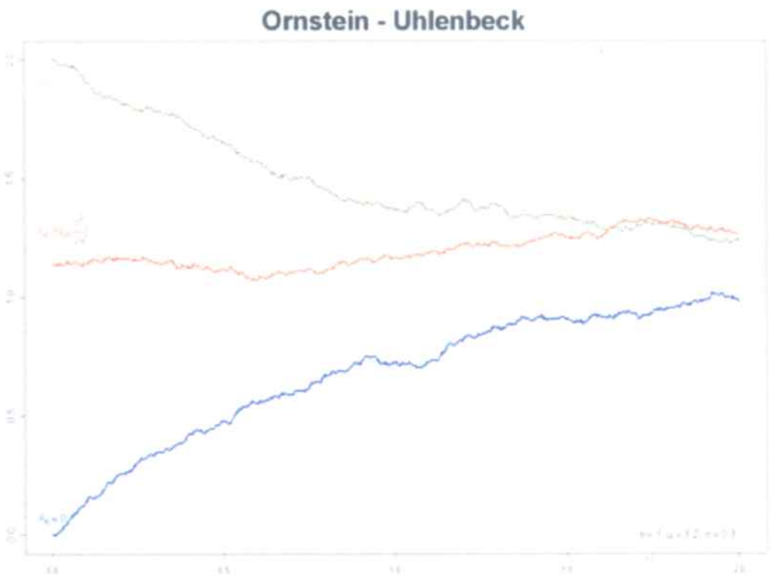
Η μέση της τιμή είναι ίση με: $EU(t) = e^{-\frac{\alpha t}{2}} EW_{e^{\alpha t}} = 0$

Η συνάρτηση συνδιασποράς της σ.δ. είναι ίση με:

$$Cov\big(U(t), U(t+s)\big) = e^{-\frac{\alpha t}{2}} e^{-\frac{\alpha(t+s)}{2}} Cov\big(W_{e^{\alpha t}}, W_{e^{\alpha(t+s)}}\big) =$$

$$= e^{-\alpha t} e^{-\frac{\alpha s}{2}} e^{\alpha t} = e^{-\frac{\alpha s}{2}}$$

Δηλαδή η σ.δ. $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ είναι μια ασθενώς στάσιμη σ.δ.



Σχήμα 6: σ.δ. Ornstein-Uhlenbeck

Παρατήρηση 2.5.10

Είδαμε ότι η σ.δ. $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ είναι μια ασθενώς στάσιμη σ.δ. και λόγω του ότι είναι (προφανώς) Gaussian είναι και αυστηρά στάσιμη. Εάν α=4λ, τότε έχει την ίδια συνάρτηση μέσης τιμής και συνδιασποράς με την σ.δ. random telegraph signal. Έτσι έχουμε δύο διαφορετικές σ.δ. που έχουν τις ίδιες ιδιότητες δεύτερης τάξης.

Ακόμα, είναι γνωστό ότι εάν δύο σ.δ. είναι Gaussian και έχουν ίδια συνάρτηση μέσης τιμής και συνδιασποράς, τότε είναι ταυτοτικά κατανεμημένες. Επομένως η σ.δ. random telegraph signal δεν είναι Gaussian.

Κεφάλαιο 3. Συνέχεια, διαφορησιμότητα και ολοκληρωσιμότητα Στοχαστικών διαδικασιών δεύτερης τάξης.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε παραγώγιση και ολοκλήρωση στοχαστικών διαδικασιών, συνεχούς παραμέτρου, δεύτερης τάξης. Θα δούμε ότι η διαδικασία Wiener, δεν είναι διαφορίσιμη υπό τη συνήθη έννοια, γεγονός που οδηγεί σε μια νέα στοχαστική διαδικασία που καλείται *λευκός θόρυβος*.

3.0 Μέση τετραγωνική απόσταση

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η ασθενής στασιμότητα είναι μια ιδιότητα που ορίζεται χρησιμοποιώντας μόνον τις δύο πρώτες ροπές μιάς σ.δ. Θα θέλαμε λοιπόν να έχουμε ένα μέτρο της «απόστασης» ή της «διαφοράς» δύο τ.μ. Χ και Υ και το οποίο θα οριζόταν (αν είναι δυνατόν) χρησιμοποιώντας τις δύο πρώτες ροπές των τ.μ.

Μιά τέτοια «φυσική» επιλογή ενός τέτοιου μέτρου θα ήταν η $E(X-Y)^2$ ή αν θέλαμε να διατηρήσουμε τις αρχικές μονάδες η $\sqrt{E(X-Y)^2}$.

Ορισμός 3.0.1
Η L_2-**νόρμα** μιάς τ.μ. Χ είναι ίση με:

$$\|X\|_2 = \sqrt{EX^2}$$

Με την βοήθεια της νόρμας αυτής ορίζεται η L_2-**απόσταση** ή **μέση τετραγωνική απόσταση** δύο τ.μ. Χ και Υ:

$$\|X-Y\|_2 = \sqrt{E(X-Y)^2}$$

Εάν έχει ορίσει κανείς μιά απόσταση (σ΄έναν χώρο), μπορεί να ορίσει την σύγκλιση μιά ακολουθίας τ.μ.

Ορισμός 3.0.2
Μιά ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ συγκλίνει στην τ.μ. Χ με την **έννοια του τετραγωνικού μέσου** ή **κατά μέσο τετράγωνο** εάν

$$\|X_n - X\|_2 = \sqrt{E(X_n-X)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{ή} \quad E(X_n-X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Παρατήρηση 3.0.3

Η συνέχεια, παράγωγος και το ολοκλήρωμα τ.μ., που θα ορίσουμε παρακάτω, θα χρησιμοποιήσει αυτό το είδος σύγκλισης δηλαδή θα ορισθούν κατά μέσο τετράγωνο.

3.1 Συνέχεια

Όταν μελετάμε στοχαστικές διαδικασίες δεύτερης τάξης συνεχούς παραμέτρου είναι συνηθισμένο να υποθέτουμε ότι η μέση τιμή και η συνδιασπορά είναι συνεχείς συναρτήσεις και επίσης κάνουμε και υποθέσεις για την ίδια την διαδικασία.

Ορισμός 3.1.1

Εάν η στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι δεύτερης τάξης, τότε καλείται **συνεχής κατά μέσο τετράγωνο** αν και μόνο αν

$$\lim_{s\to t} \mathrm{E}(\mathrm{X}_s - \mathrm{X}_t)^2 = 0 \qquad (1)$$

Πρόταση 3.1.2

Εάν $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ μία συνεχούς παραμέτρου διαδικασία δεύτερης τάξεως και

i. $\mu_x(t), t \in T$ είναι μία συνεχής συνάρτηση του t και
ii. $r_x(s,t), s, t \in T$ είναι από κοινού συνεχής στα s, t

Τότε, η $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι συνεχής κατά μέσο τετράγωνο.

Απόδειξη

Έχουμε,

$$\begin{aligned} E(X_s - X_t)^2 &= \big(E(X_s - X_t)\big)^2 + Var(X_s - X_t) \\ &= \big(E(X_s - X_t)\big)^2 + Var(X_s) + Var(X_t) - 2cov(X_s, X_t) \\ &= \big(\mu_x(s) - \mu_x(t)\big)^2 + r_x(s,s) + r_x(t,t) - 2r_x(s,t) \end{aligned}$$

Από το i. έχουμε

$$\lim_{s\to t}\big(\mu_x(s) - \mu_x(t)\big)^2 = 0, t \in T.$$

Και από το ii. όταν $r_x(s,s)$ και $r_x(s,t)$ προσεγγίζουν την $r_x(t,t)$ καθώς $s \to t$ έχουμε

$$\lim_{s\to t}\big(r_x(s,s) + r_x(t,t) - 2r_x(s,t)\big) = 0.$$

Απ' όπου έπεται η συνέχεια.

•

Γενικότερα, ισχύει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 3.1.3
εάν $\{X_t\}_{t\in T}, \{Y_t\}_{t\in T}$ είναι δύο στοχαστικές διαδικασίες δεύτερης τάξης με συνεχή συνάρτηση μέσης τιμής και συνδιασποράς η καθεμία. Τότε, η συνάρτηση συνδιασποράς $r_{xy}(s,t)$ είναι (από κοινού) συνεχής ως προς τα s, t. Δηλαδή,

$$\lim_{u\to s, v\to t} cov(X_u, Y_v) = cov(X_s, Y_t) \qquad (2)$$

Έχουμε, $cov(X_u, Y_v) = EX_uY_v - EX_uEY_v$

$$cov(X_s, Y_t) = EX_sY_t - EX_sEY_t$$

και η διαφορά τους είναι ίση με:

$$cov(X_u, Y_v) - cov(X_s, Y_t) = E(X_u - X_s)Y_v + EX_s(Y_v - Y_t) +$$

$$+\left(\mu_x(u) - \mu_x(s)\right)\mu_y(v) + \mu_x(s)\left(\mu_y(v) - \mu_y(t)\right) \qquad (3)$$

επειδή όμως οι $\mu_x(u)$ και $\mu_x(s)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ως προς s και t αντίστοιχα, έχουμε:

$$\lim_{u\to s, v\to t}\left(\mu_x(u) - \mu_x(s)\right)\mu_y(v) = 0 \qquad (4)$$

και

$$\lim_{u\to s, v\to t} \mu_x(s)\left(\mu_y(v) - \mu_y(t)\right) = 0. \qquad (5)$$

Τέλος, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε,

$$(E(X_u - X_s)Y_v)^2 \le E(X_u - X_s)^2 EY_v^2 = \left(E(X_u - X_s)\right)^2 \left(r_y(v,v) + \left(\mu_y(v)\right)^2\right)$$

Αλλά, από την (1), την i. και ii., έχουμε:

$$\lim_{u\to s, v\to t} E(X_u - X_s)Y_v = 0. \qquad (6)$$

Ανάλογα,

$$\lim_{u\to s, v\to t} EX_s(Y_v - Y_t) = 0. \qquad (7)$$

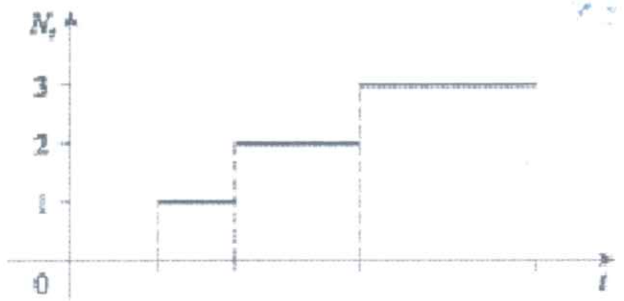
Τέλος, η (2) έπεται από τις (3)-(7).

•

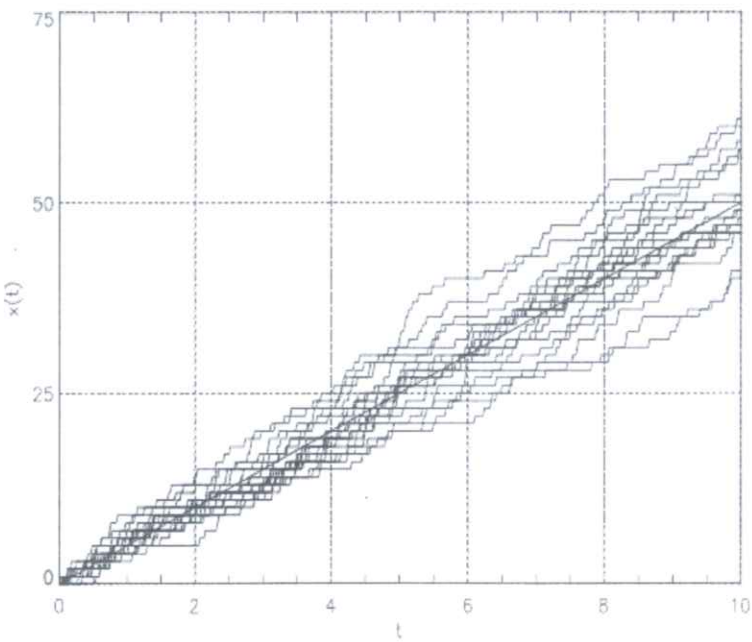
Παρατήρηση 3.1.4 (συνέχεια των τροχιών)

Σε μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$, όλες οι τυχαίες μεταβλητές X_t είναι ορισμένες σε ένα καθορισμένο χώρο πιθανοτήτων Ω. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $X(t,\omega)$ για να υποδηλώσουμε την εξάρτηση των σ.δ από τα t και ω. Για κάθε $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $X(t,\omega), t \in T$ συμβολίζει μία συνάρτηση πραγματικών τιμών t, την οποία καλούμε **τροχιά** ή **μονοπάτι** της διαδικασίας. Όμως, κάθε $\omega \in \Omega$ σχετίζεται με μία τροχιά, έτσι μπορούμε να σκεφτούμε μία στοχαστική διαδικασία σαν μία τυχαία τροχιά.

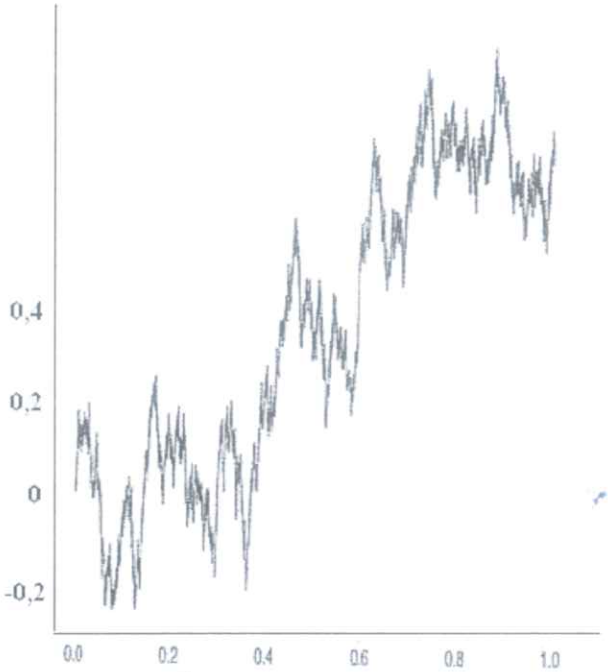
Στα σχήματα 1 και 2 βλέπουμε μια τροχιά και διάφορες τροχιές αντίστοιχα μιας διαδικασίας Poisson, στο δε σχήμα 3 μιά τροχιά μιας διαδικασίας Wiener.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Σε μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$ (δεύτερης τάξεως) συνεχούς χρόνου υποθέτουμε ότι, οι τροχιές είναι συνεχείς συναρτήσεις, δηλαδή για κάθε $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $X(t,\omega)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του t. Η υπόθεση αυτή (της συνέχειας των τροχιών μιας σ.δ.) φαίνεται να είναι μια εύλογη υπόθεση σε μοντέλα πραγματικών καταστάσεων που περιγράφονται με την βοήθεια σ.δ. που μεταβάλλονται «συνεχώς» (συνεχούς χρόνου). Οι τροχιές όμως ακεραίων τιμών σ.δ. (όπως η Poisson παραπάνω) δεν είναι συνεχείς. Είναι συνήθως αυτό που λέμε κατά *τμήματα συνεχείς* και στα σημεία ασυνέχειας υπάρχει το όριό τους από δεξιά. Μαθηματικά μιλώντας, ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

i. Η $X(s,\omega)$ έχει πεπερασμένο όριο καθώς $s \to t^-$.
ii. $X(s,\omega) \xrightarrow{s\to t^+} X(t,\omega)$ δηλαδή η $X(*,\omega)$ είναι δεξιά συνεχής.
iii. Η $X(*\,,\omega)$ έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας σε κάθε πεπερασμένο κλειστό υποδιάστημα του Τ.

Παρατήρηση 3.1.5

Μπορεί να δειχθεί ότι μιά στοχαστική διαδικασία που έχει τις ιδιότητες της διαδικασίας Wiener, και η οποία έχει και συνεχείς τροχιές. Θα θεωρούμε λοιπόν ότι μια σ.δ. είναι μια διαδικασία Wiener, αν ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού 2.5.1. και έχει και συνεχείς τροχιές.

3.2. Ολοκλήρωση

Σ' αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε τύπους για την μέση τιμή και την συνδιασπορά τυχαίων μεταβλητών και διαδικασιών που ορίζονται, με την βοήθεια μιας συνεχούς παραμέτρου δεύτερης τάξης σ.δ., μέσω ολοκλήρωσης.

Παρατήρηση 3.2.1

Για να δούμε πως το ολοκλήρωμα μιας διαδικασίας προκύπτει κατά έναν φυσικό τρόπο, έστω $\{X_t\}_{t\geq 0}$ μία δεύτερης τάξης στάσιμη διαδικασία η οποία έχει σταθερή αλλά άγνωστη μέση τιμή μ. Η διαδικασία αυτή παρατηρείται στο διάστημα $a \leq t \leq b$ και ο στόχος είναι να υπολογιστεί η μέση τιμή μ.

Ένας απλός και καλός (συνήθως) εκτιμητής δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\mu} = \frac{1}{b-a}\int_a^b X_t\, dt.$$

Εάν λοιπόν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια σ.δ., το **ολοκλήρωμα Riemann** της διαδικασίας αυτής, στο διάστημα $[a,b]$ ορίζεται ως εξής:

Θεωρούμε τα τυχαία αθροίσματα

$$S_n = \sum_{\kappa=1}^{n} X_{\tau_\kappa}(t_\kappa - t_{\kappa-1})$$

όπου $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ και $t_{\kappa-1} \leq \tau_\kappa \leq t_\kappa$.

Έστω ότι:

$$S_n \xrightarrow[]{\substack{\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o \\ \tau\varepsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu o}} S$$

καθώς $\max_{1\leq\kappa\leq n}(t_\kappa - t_{\kappa-1}) \to 0$.

Ορισμός 3.2.2

Η τυχαία μεταβλητή S ονομάζεται **(κατά Riemann) στοχαστικό ολοκλήρωμα** της $\{X_t\}_{t\geq 0}$ στο διάστημα $[a,b]$, και συμβολίζεται με:

$$S = \int_\alpha^\beta X_t\, dt,$$

Παρατήρηση 3.2.3

Η S υπάρχει αν και μόνο αν η $\varphi(s,t) = E(X_t X_s)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann (σαν συνάρτηση των s ,t).

Μπορεί να δειχθεί το παρακάτω θεώρημα σχετικά με την ύπαρξη του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Θεώρημα 3.2.4 (ύπαρξη στοχαστικού ολοκληρώματος)

Εάν **(α)** $\mu_X(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση του t

(β) $r_X(s,t)$ είναι συνεχής ως προς s ,t.

Τότε $\forall\, \beta > \alpha \geq 0$, το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta X_t\, dt$ υπάρχει και

$$E\left(\int_\alpha^\beta X_t\, dt\right) = \int_\alpha^\beta EX_t\, dt = \int_\alpha^\beta \mu_X(t)\, dt.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι:

$$\left(\int_\alpha^\beta X_t\, dt\right)\left(\int_\gamma^\delta X_s\, ds\right) = \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta X_t\, X_s\, ds\right) dt$$

Οπότε

$$E\left(\left(\int_\alpha^\beta X_t\, dt\right)\left(\int_\gamma^\delta X_s\, ds\right)\right) = \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta EX_s\, X_t\, ds\right) dt$$

Άρα και

$$E\left\{\left(\int_\alpha^\beta X_t\, dt\right)^2\right\} = \int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^\beta E(X_s\, X_t)\, ds\right) dt$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε ότι η συνδιασπορά:

$$cov\left(\int_\alpha^\beta X_t\, dt\, , \int_\gamma^\delta X_s\, ds\right) = E\left(\int_\alpha^\beta X_t\, dt * \int_\gamma^\delta X_s\, ds\right) - \left(E\int_\alpha^\beta X_t\, dt\right)\left(E\int_\gamma^\delta X_s\, ds\right)$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta EX_s X_t\, ds\right) dt - \int_\alpha^\beta EX_t\, dt * \int_\gamma^\delta EX_s\, ds =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta (EX_s X_t - EX_t EX_s)\, ds\right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta r_X(s,t)\, ds\right) dt$$

Ειδικότερα

$$\sigma^2\left(\int_\alpha^\beta X_t\,dt\right) = cov\left(\int_\alpha^\beta X_t\,dt\,,\int_\alpha^\beta X_s\,ds\right) = \int_\alpha^\beta\left(\int_\alpha^\beta r_x(s,t)\,ds\right)dt$$

Παρατήρηση 3.2.5

Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ μια δεύτερης τάξης στοχαστική διαδικασία, η οποία ικανοποιεί τις (α), (β) του θεωρήματος 3.2.4 και τις συνθήκες I., II., III. της παρατήρησης 3.1.4 Εάν ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία:

$$Y_s = \int_{t_0}^{s} X_t\,dt$$

τότε, η συνάρτηση μέσης τιμής της δίνεται από την σχέση:

$$\mu_Y(t) = \int_{t_0}^{t} \mu_X(s)ds$$

και η συνδιασπορά της από την:

$$r_Y(s,t) = \int_{t_0}^{s}\left(\int_{t_0}^{t} r_X(u,v)dv\right)du$$

Η $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία με συνεχή μονοπάτια και συνεχείς συναρτήσεις μέσης τιμής και συνδιασποράς.

Παράδειγμα 3.2.6

Εάν X_1, X_2 ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές με: (1) $EX_1 = EX_2 = 0$, και

(2) $\sigma^2(X_1) = \sigma^2(X_2) = \sigma^2$

Ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$ από τη σχέση

$$X_t = X_1\cos\lambda t + X_2\sin\lambda t\,, \qquad \lambda\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$$

Τότε, η μέση της τιμή είναι ίση με:

$$\mu_x(t) = EX_1\cos\lambda t + EX_2\sin\lambda t = 0, \qquad (i)$$

Ακόμα, η συνδιασπορά της είναι ίση με:

$$r_X(s,t) = cov(X_1 \cos\lambda s + X_2 \sin\lambda s, X_1 \cos\lambda t + X_2 \sin\lambda t)$$

$$= \sigma^2(X_1)\cos\lambda s \cos\lambda t + cov(X_1, X_2)\cos\lambda s \sin\lambda t$$

$$+ cov(X_2, X_1)\sin\lambda s \cos\lambda t + \sigma^2(X_2)\sin\lambda s \sin\lambda t$$

$$= \sigma^2(\cos\lambda s \cos\lambda t + \sin\lambda s \sin\lambda t)$$

$$\Rightarrow r_X(s,t) = \sigma^2(\cos\lambda(t-s)), \qquad (ii)$$

Από τις (i) και (ii) είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις , $\mu_x(t)$, $r_X(s,t)$ είναι συνεχείς, οπότε το:

$$Y_t = \int_0^t X(u)du$$

υπάρχει.

Η μέση τιμή της $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ είναι

$$Y_t = \int_0^t (X_1 \cos\lambda u + X_2 \sin\lambda u)du = X_1 \int_0^t \cos\lambda u\, du + X_2 \int_0^t \sin\lambda u\, du$$

$$= \frac{X_1}{\lambda}\sin\lambda t - \frac{X_2}{\lambda}\cos\lambda t + \frac{X_2}{\lambda}$$

Άρα,

$$EY_t = \sin\frac{\lambda t}{\lambda} EX_1 - \cos\frac{\lambda t}{\lambda} EX_2 + \frac{1}{\lambda} EX_2 = 0$$

Επίσης,

$$r_Y(s,t) = E(Y_s Y_t) = E\left(\int_0^s X(u)du\right)\left(\int_0^t X(v)dv\right)$$

$$= E\left(\frac{X_1}{\lambda}\sin\lambda s - \frac{X_2}{\lambda}\cos\lambda s + \frac{X_2}{\lambda}\right)\left(\frac{X_1}{\lambda}\sin\lambda t - \frac{X_2}{\lambda}\cos\lambda t + \frac{X_2}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\sin\lambda s \sin\lambda t\, E{X_1}^2 - \sin\lambda s \cos\lambda t \frac{1}{\lambda^2} EX_1 X_2 + \sin\lambda s \frac{1}{\lambda^2} EX_1 X_2$$

$$- \sin\lambda t \cos\lambda s \left(\frac{1}{\lambda^2}\right) EX_1 X_2 + \frac{1}{\lambda^2}\cos\lambda s \cos\lambda t\, E{X_2}^2 - \frac{1}{\lambda^2}\cos\lambda s\, E{X_2}^2$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2}\sin\lambda t\, EX_1 X_2 - \frac{1}{\lambda^2}\cos\lambda t\, E{X_2}^2 + \frac{1}{\lambda^2} E{X_2}^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\lambda}\{\sin\lambda s \sin\lambda t + \cos\lambda s \cos\lambda t - \cos\lambda s \cos\lambda t + 1\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\lambda}\{1 - \cos\lambda s - \cos\lambda t + \cos[\lambda(t-s)]\}$$

Παράδειγμα 3.2.7

Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ορίζεται από τη σχέση

$$X_t = Z_1 \cos\lambda t + Z_2 \sin\lambda t \ , \lambda > 0$$

όπου, $Z_1, Z_2 \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ ανεξάρτητες. Να δειχθεί ότι

$$P\left\{\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} X_t^2 dt > c\right\} = e^{-\frac{\lambda c}{2\pi\sigma^2}}$$

Λύση

Έχουμε

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} X_t^2\, dt = Z_1^{\ 2}\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \cos^2\lambda t dt + Z_2^{\ 2}\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \sin^2\lambda t dt + 2Z_1^{\ 2}Z_2^{\ 2}\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \cos\lambda t \sin\lambda t\, dt$$

$$= \frac{\left(Z_1^{\ 2} + Z_2^{\ 2}\right)\pi}{\lambda}$$

Αλλά, $Z_1 \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ οπότε,

$$\frac{Z_1}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \frac{Z_1^{\ 2}}{\sigma^2} \sim X_1^2$$

Άρα,

$$\frac{Z_1^{\ 2} + Z_2^{\ 2}}{\sigma^2} \sim X_2^2$$

Οπότε,

$$P\left\{\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} X_t^2 dt > c\right\} = P\left\{\frac{\left(Z_1^{\ 2} + Z_2^{\ 2}\right)\pi}{\lambda} > c\right\} = P\left\{\frac{\left(Z_1^{\ 2} + Z_2^{\ 2}\right)}{\sigma^2} > \frac{c\lambda}{\sigma^2\pi}\right\}$$

$$= \int_{\frac{c\lambda}{\sigma^2\pi}}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(2)2} e^{-x/2}\, dx = e^{-\frac{c\lambda}{2\sigma^2\pi}}$$

•

Παρατήρηση 3.2.8 (Gaussian διαδικασίες)

Εάν $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι μία διαδικασία Gaussian, τότε η $\int_\alpha^\beta f(t)\, X_t dt$ είναι κανονικά κατανεμημένη. Πράγματι, το άθροισμα (εκτίμηση ολοκληρώματος)

$$\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{\kappa=1}^{n} f\left(\alpha+\frac{(\beta-\alpha)\kappa}{n}\right) X_{\alpha+\frac{(\beta-\alpha)\kappa}{n}}$$

έχει την κανονική κατανομή και συγκλίνει στο παραπάνω ολοκλήρωμα του $n \to +\infty$ και σαν όριο (κανονικών τυχαίων μεταβλητών) έχει την κανονική κατανομή.

Γενικότερα, εάν $h(s,t), s \in S, t \in [\alpha,\beta]$ και $\forall\, s \in S$ η $h(s,t)$ είναι τμηματικά συνεχής και $\{X_t\}$ Gaussian και ορίσουμε:

$$Y(s) = \int_{\alpha}^{\beta} h(s,t)\, X_t\, dt$$

τότε η $\{Y_s\}$ είναι Gaussian στοχαστική διαδικασία.

Πρόταση 3.2.9

Εάν $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ μία στοχαστική διαδικασία Wiener με παράμετρο σ^2 και f, g συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε κάθε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε

$$E\left\{\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(W_t - W_\alpha)dt \int_{\alpha}^{\beta} g'(t)(W_t - W_\alpha)dt\right\} = \sigma^2 \int_{\alpha}^{\beta} \big(f(t)-f(\beta)\big)\big(g(t)-g(\beta)\big)dt$$

Απόδειξη

Ισχύει , όπως έχουμε δει, ότι: $E(W_s - W_\alpha)(W_t - W_\alpha) = \sigma^2 \min_{\alpha\le s,t}(s-\alpha, t-\alpha)$. Ακόμα, εάν $\mathrm{I} = \int_\alpha^\beta f'(t)(W_t - W_\alpha)dt \int_\alpha^\beta g'(t)(W_t - W_\alpha)dt$, έχουμε:

$$E\{\mathrm{I}\} = E\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f'(s)\, g'(t)(W_s - W_\alpha)(W_t - W_\alpha)dt\; ds =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f'(s)\, g'(t) E(W_s - W_\alpha)(W_t - W_\alpha)dt\; ds$$

$$= \sigma^2 \int_{\alpha}^{\beta}\left(f'(s)\int_{\alpha}^{\beta} g'(t)\, min(s-\alpha, t-\alpha)dt\right)ds \qquad (1)$$

Αλλά

$$\int_\alpha^\beta g'(t)\, min(s-\alpha, t-\alpha)dt = \int_\alpha^s g'(t)(t-\alpha)dt + (s-\alpha)\int_s^\beta g'(t)dt$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$g(t)(t-\alpha)\Big|_{\alpha}^{s} - \int_{\alpha}^{s} g(t)dt + (s-\alpha)g(\beta) - g(s) = (s-\alpha)g(\beta) - \int_{\alpha}^{s} g(t)dt$$

$$= \int_{\alpha}^{s} \big(g(\beta) - g(t)\big)dt$$

Οπότε η (1) γίνεται

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(s)\left(\int_{\alpha}^{s}\big(g(\beta) - g(t)\big)dt\right)ds$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta}\big(g(\beta) - g(t)\big)\left(\int_{t}^{s} f'(s)ds\right)dt = \int_{\alpha}^{s}\big(g(\beta) - g(t)\big)\big(f(\beta) - f(t)\big)dt$$

•

Εφαρμογή 3.2.10

Εάν $\alpha = 0,\ \beta = 1$ και $f(t) = g(t) = t,\ t \in [0,1]$, τότε:

$$E\left(\int_{0}^{1} W_t\, dt\right)^2 = \sigma^2 \int_{0}^{1} (t-1)^2 dt = \frac{\sigma^2}{3}$$

Ακόμα,

$$E\int_0^1 W_t\, dt = \int_0^1 EW_t\, dt = 0$$

Το $\left(\int_0^1 W_t\, dt\right)$ είναι κανονικά κατανεμημένο, αφού $W_t \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2 t)$ και η

$$\sigma^2\left(\int_{0}^{1} W_t\, dt\right) = E\left(\int_{0}^{1} W_t\, dt\right)^2 = \frac{\sigma^2}{3}$$

•

3.3. Παράγωγος

Έστω $\{X_t\}_{t\in T}$ μία στοχαστική διαδικασία δεύτερης τάξης με συνεχή συνάρτηση μέσης τιμής και συνδιασποράς.

Ορισμός 3.3.1
Η $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι **διαφορίσιμη** εάν $\exists$ $\{Y_s\}_{s\in T}$ σ.δ. που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

i. $\mu_Y(t), t \in T$ είναι μία συνεχής συνάρτηση του t και
ii. $r_Y(s,t), s,t \in T$ είναι από κοινού συνεχής στα s,t
iii. Η $Y(s,\omega)$ έχει πεπερασμένο όριο καθώς $s \to t^-$.
iv. $Y(s,\omega) \xrightarrow{s\to t^+} Y(t,\omega)$ δηλαδή η $Y(*,\omega)$ είναι δεξιά συνεχής.
v. Η $Y(*,\omega)$ έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας σε κάθε πεπερασμένο κλειστό υποδιάστημα.

και για $t_0, t \in T$ έχουμε:

$$X_t - X_{t_0} = \int_{t_0}^{t} Y_s\, ds.$$

Η $\{Y_t\}_{t\in T}$ καλείται **παράγωγος** της $\{X_t\}$ και συμβολίζεται με X_t' .

Τότε:

$$X_t - X_{t_0} = \int_{t_0}^{t} X_u'\, du \qquad (*)$$

Παρατήρηση 3.3.2
Μπορεί να δειχθεί ότι:

1. Η $\{X_t\}$ έχει συνεχείς τροχιές (εάν είναι παραγωγίσιμη), γεγονός που προκύπτει από την (*).

2. Ισχύει $X_t' = \frac{dX_t}{dt}$ εκτός από τα σημεία ασυνέχειας.

3. (α) $X_t - X_{t_0} = \int_{t_0}^{t} Y_s ds \Rightarrow EX_t - EX_{t_0} = \int_{t_0}^{t} EY_s\, ds \Rightarrow \mu_X(t) - \mu_X(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mu_{X'}(s)\, ds$

οπότε

$$\mu_{X'}(t) = \frac{d}{dt}\mu_X(t)$$

(β) Εάν $\{X_t\}$ δεύτερης τάξης, διαφορίσιμη σ.δ. και $\{Y_t\}$ σ.δ. δεύτερης τάξης με συνεχείς συναρτήσεις μέσης τιμής και συνδιασποράς. Τότε ισχύει,

i. $r_{YX'}(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} r_{YX}(s,t)$ και

ii. $r_{X'Y}(s,t) = \frac{\partial}{\partial s} r_{XY}(s,t)$

Πράγματι, έχουμε:

$$X_t - X_{t_0} = \int_{t_0}^{t} X'_u \, du$$

Οπότε,

$$Y_s\left(X_t - X_{t_0}\right) = \int_{t_0}^{t} Y_s X'_u \, du$$

και

$$EY_s\left(X_t - X_{t_0}\right) = \int_{t_0}^{t} E Y_s X'_u \, du \qquad (1)$$

Αλλά,

$$\mu_X(t) - \mu_X(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mu_{X'}(u) \, du$$

Οπότε

$$\mu_Y(s)\big(\mu_X(t) - \mu_X(t_0)\big) = \int_{t_0}^{t} \mu_Y(s)\mu_{X'}(u) \, du \qquad (2)$$

Αφαιρώντας τις $(1), (2)$ έχουμε,

$$r_{YX}(s,t) - r_{YX}(s,t_0) = \int_{t_0}^{t} r_{YX'}(s,u) du.$$

Αλλά, η $r_{YX'}(s,t)$ είναι συνεχής, οπότε παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς t έχουμε:

$$r_{XX'}(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} r_{YX}(s,t)$$

Ειδικότερα τώρα,

4. Εάν $\{X_t\}$ στοχαστική διαδικασία δεύτερης τάξεως, διαφορίσιμη, τότε

$$r_{XX'}(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} r_{XX}(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} r_X(s,t)$$

και

$$r_{X'X'}(s,t) = \frac{\partial}{\partial s} r_{XX'}(s,t)$$

οπότε συνδυάζοντάς τις δύο αυτές σχέσεις, έχουμε:

$$r_{X'}(s,t) = r_{X'X'}(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} r_X(s,t)$$

5. Ανάλογα, ορίζεται η δεύτερη παράγωγος $X''(t)$ (εφ' όσον η $X'(t)$ είναι διαφορίσιμη).

6. Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ διαφορίσιμη, δεύτερης τάξεως, ασθενώς στάσιμη στοχαστική διαδικασία. Τότε,

    i. $\mu_{X'}(t) = 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$

    ii. $r_{X'}(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} r_X(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} r_X(t-s) = -r_X''(t-s)$

    Δηλαδή, και η $\{X'(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι δεύτερης τάξεως, ασθενώς στάσιμη με

$$r_{X'}(t) = -\frac{d^2}{dt^2} r_X(t)$$

Παράδειγμα 3.3.3

Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ δεύτερης τάξεως, ασθενώς στάσιμη στοχαστική διαδικασία. Τότε οι X_t και X_t' είναι ασυσχέτιστες $\forall \ t$.

Πράγματι,

$$cov(X_t, X_t') = r_{XX'}(t,t)$$

Αλλά, $r_{XX'}(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} r_X(t-s) = r_X'(t-s)$ οπότε

$$r_{XX'}(t,t) = r_X'(0)$$

Ακόμα, η $r_X(t)$ είναι συμμετρική. Δηλαδή, $r_X(t) = r_X(-t)$ οπότε παραγωγίζοντας συμπεραίνουμε ότι:

$$r_X'(t) = -r_X'(-t)$$

και για $t = 0$ έχουμε $r_X'(0) = 0$

οπότε:

$$cov(X_t, X_t') = 0.$$

Δηλαδή, οι X_t και X_t' είναι ασυσχέτιστες $\forall \ t$.

•

Πρόταση 3.3.4

Έστω τώρα $\{X_t\}_{t\in T}$ μια δεύτερης τάξεως, διαφορίσιμη στοχαστική διαδικασία. Τότε οι τυχαίες μεταβλητές:

$$\frac{X_{t+h} - X_t}{h}$$

συγκλίνουν κατά μέσο τετράγωνο στην $X_t'(\omega)$ καθώς $h \to 0$. Δηλαδή,

$$\lim_{h\to 0} E\left(\frac{X_{t+h}-X_t}{h} - X_t'\right)^2 = 0, t \in T.$$

Απόδειξη

Έχουμε,

$$\frac{X_{t+h} - X_t}{h} - X_t' = \frac{1}{h}\left\{\int_t^{t+h} X_u' \, du - h\, X_t'\right\} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (X_u' - X_t')du$$

Οπότε,

$$E\left(\frac{X_{t+h} - X_t}{h} - X_t'\right)^2 = \frac{1}{h^2}\int_t^{t+h}\left(\int_t^{t+h} E(X_u' - X_t')(X_v' - X_t')\,dv\right)du$$

Αλλά, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$E(X_u' - X_t')(X_v' - X_t') \leq \sqrt{E(X_u' - X_t')^2}\sqrt{E(X_v' - X_t')^2}$$

Τώρα, η $\{X_t'\}$ είναι συνεχής κατά μέσο τετράγωνο οπότε, για $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$E(X_u' - X_t')^2 \leq \varepsilon, \text{ εάν } |u - t| \leq \delta.$$

Εάν $|h| \leq \delta$ τότε, βλέπουμε ότι

$$\sqrt{E(X_u' - X_t')^2}\sqrt{E(X_v' - X_t')^2} \leq \varepsilon$$

καθώς τα u, v κυμαίνονται μεταξύ t και $t + h$ βλέπουμε ότι

$$E\left(\frac{X_{t+h} - X_t}{h} - X_t'\right)^2 \leq \varepsilon, \qquad -\delta \leq h \leq \delta.$$

Και αφού το ε μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μικρό, από αυτό συνάγεται το ζητούμενο.

•

Παρατήρηση 3.3.5 (στοχαστικές διαδικασίες Gaussian)
Εάν $\{X_t\}_{t\in T}$ δεύτερης τάξεως, διαφορίσιμη και Gaussian στοχαστική διαδικασία. Τότε και η $\{X'_t\}$ είναι Gaussian.

Απόδειξη

Εάν $t_1, \dots, t_n \in T$ και $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ πρέπει να δείξουμε ότι η τ.μ.:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X'_{t_i}$$

είναι κανονικά κατανεμημένη.

Επειδή η X_t είναι διαφορίσιμη, έχουμε ότι:

$$\lim_{h\to 0} E\left(\frac{X_{t_i+h} - X_{t_i}}{h} - X'_{t_i}\right)^2 = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

Αλλά τότε, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι:

$$\lim_{h\to 0} E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{X_{t_i+h} - X_{t_i}}{h} - \sum_{i=1}^{n} a_i X'_{t_i}\right)^2 = 0 \qquad (*)$$

Για κάθε h, η τυχαία μεταβλητή:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{X_{t_i+h} - X_{t_i}}{h}$$

είναι κανονικά κατανεμημένη οπότε χρησιμοποιώντας και την $(*)$, έχουμε ότι η

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X'_{t_i}$$

έχει την κανονική κατανομή.

•

Μιά από τις σημαντικότερες ιδιότητες της διαδικασίας Wiener είναι ότι δεν είναι παραγωγίσιμη (με την έννοια που ορίσαμε παραπάνω), γι' αυτό και έχουμε το ασυνήθιστο εκείνο σχήμα όταν παριστάνουμε γραφικά μιά τροχιά της διαδικασίας («γωνίες»).

Παρατήρηση 3.3.6 (στοχαστική διαδικασία Wiener)
Η στοχαστική διαδικασία Wiener $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ δεν είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι

$$E\left(\frac{W_{t+h}-W_t}{h}\right)^2=\frac{\sigma^2}{|h|}$$

Οπότε:

$$\lim_{h\to 0} E\left(\frac{W_{t+h}-W_t}{h}\right)^2=\infty \quad (i)$$

Εάν η W_t ήταν διαφορίσιμη, τότε:

$$\lim_{h\to 0} E\left(\frac{W_{t+h}-W_t}{h}-W_t'\right)^2=0$$

Απ' όπου:

$$\lim_{h\to 0} E\left(\frac{W_{t+h}-W_t}{h}\right)^2=E(W_t')^2$$

το οποίο αντίκειται στην (i).

•

Παρατήρηση 3.3.7
Μπορεί όμως να δειχθεί κάτι ισχυρότερο δηλαδή ότι, με πιθανότητα 1 κάθε μία από τις τροχιές $X_t(\omega)$ δεν είναι διαφορίσιμη ούτε σε ένα απλό σημείο t. Αποτελεί ίσως έκπληξη, αφού οι τροχιές περιγράφουν την κίνηση ενός μορίου. Αν όμως κανείς παρατηρήσει την κίνηση σ' ένα μικροσκόπιο, πείθεται ότι είναι «ασυνήθιστη» εξ' ου και μη-διαφορίσιμη. Είναι λοιπόν δύσκολο να παραστήσει κανείς γραφικά μιά τροχιά της διαδικασίας Wiener (τα παραπάνω σχήματα είναι μια τέτοια προσπάθεια αναπαράστασης).

3.4 Λευκός θόρυβος

Παρατήρηση 3.4.1 (λευκός θόρυβος -- White noise)
Έστω $f(t)$ συνεχώς διαφορίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Από τη στιγμή που η W_t δεν είναι διαφορίσιμη, το:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dW_t \triangleq \int_\alpha^\beta f(t)W_t'dt$$

δεν έχει νόημα, με την έννοια που ορίσαμε το ολοκλήρωμα.

Παρ' όλα αυτά το ολοκλήρωμα αυτό έχει την παρακάτω σημασία. Ορίζουμε λοιπόν,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)W_t'\,dt = \lim_{h\to 0}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\frac{W_{t+h}-W_t}{h}\,dt$$

στην περίπτωση που το όριο υπάρχει.

Θα δείξουμε ότι, το παραπάνω όριο υπάρχει και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)W_t'\,dt = f(\beta)W_\beta - f(\alpha)W_\alpha - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)W_t\,dt$$

Πράγματι, έχουμε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\frac{W_{t+h}-W_t}{h}\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} W_s\,ds\right\}dt$$

Απ' όπου με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} W_s\,ds\right\}dt = f(t)\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} W_s\,ds\,\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)\left(\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} W_s\,ds\right)dt$$

Αλλά,

$$\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} W_s\,ds = W_t$$

Η W_t έχει συνεχείς τροχιές, οπότε το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης συγκλίνει στην

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)W_t'\,dt = f(\beta)W_\beta - f(\alpha)W_\alpha - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)W_t\,dt \qquad (**)$$

Παρατηρούμε ότι το:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)W_t\,dt$$

είναι καλά ορισμένο και ότι η (**) είναι μία σχέση την οποία θεωρούμε ορισμό του ολοκληρώματος. Η (**) συμφωνεί με την γνωστή μας σχέση της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

Ορισμός 3.4.2
Η παράγωγος W_t', της σ. διαδικασίας Wiener καλείται **λευκός θόρυβος** («White noise»).

Δεν είναι μία τυπική στοχαστική διαδικασία. Αν και της έχουμε δώσει ένα σαφή ορισμό, δεν είναι σίγουρο ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάπου. Παρ' όλα αυτά ο λευκός θόρυβος χρησιμοποιείται στο να ορίσουμε αυτό που ονομάζουμε **στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις** οι οποίες εξισώσεις μπορούν να θεωρηθούν σαν μοντέλα για την περιγραφή συστημάτων ή φαινομένων στις φυσικές επιστήμες και ιδιαίτερα στην Μηχανική.

Παρατήρηση 3.4.3
Επειδή η στοχαστική διαδικασία Wiener, είναι μία Gaussian διαδικασία, έπεται ότι η τυχαία μεταβλητή $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t$ είναι κανονικά κατανεμημένη.
Αλλά,

$$E\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)W_t' dt\right) = f(\beta)EW_\beta - f(\alpha)EW_\alpha - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)EW_t\, dt$$

Όμως, $EW_\beta = EW_\alpha = EW_t = 0$ ως μέση τιμή κανονικά κατανεμημένων μεταβλη-τών. Οπότε,

$$E\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)W_t' dt\right) = 0.$$

Επιπλέον, αν f, g συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις, ισχύει (όπως θα δούμε παρακάτω) η σχέση:

$$E\left\{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dW_t\right\} = \sigma^2 \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt$$

Θέτοντας $f = g$, η διασποράς της $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t$ είναι:

$$Var\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t\right) = E\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t\right)^2 = \sigma^2 \int_{\alpha}^{\beta} f^2(t)dt.$$

Πρόταση 3.4.4
Εάν f, g συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$E\left\{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dW_t\right\} = \sigma^2 \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt$$

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t = f(\beta)W_\beta - f(\alpha)W_\alpha - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)W_t\, dt$$

$$= f(\beta)\left(W_\beta - W_\alpha\right) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(W_t - W_\alpha)dt$$

Οπότε,

$$E\left\{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dW_t\right\}$$

$$= E\left\{\left(f(\beta)\left(W_\beta - W_\alpha\right) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(W_t - W_\alpha)dt\right)\right.$$

$$\left.* \left(g(\beta)\left(W_\beta - W_\alpha\right) - \int_{\alpha}^{\beta} g'(t)(W_t - W_\alpha)dt\right)\right\}$$

$$= f(\beta)g(\beta)\, E(W_t - W_\alpha)^2 - E\left[f(\beta)\left(W_\beta - W_\alpha\right)\int_{\alpha}^{\beta} g'(t)(W_t - W_\alpha)dt\right]$$

$$- E\left[g(\beta)\left(W_\beta - W_\alpha\right)\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(W_t - W_\alpha)dt\right]$$

$$+ E\left[\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(W_t - W_\alpha)dt \int_{\alpha}^{\beta} g'(t)(W_t - W_\alpha)dt\right] \qquad (*)$$

Αλλά,

$$f(\beta)g(\beta)\, E(W_t - W_\alpha)^2 = f(\beta)g(\beta)\sigma^2(\beta - \alpha) \qquad (i)$$

Επίσης,

$$E\left[f(\beta)\left(W_\beta - W_\alpha\right)\int_{\alpha}^{\beta} g'(t)(W_t - W_\alpha)dt\right] = f(\beta)\int_{\alpha}^{\beta} g'(t)E(W_t - W_\alpha)\left(W_\beta - W_\alpha\right)dt$$

$$= \sigma^2 f(\beta)\int_{\alpha}^{\beta} g'(t)(t-\alpha)dt = f(\beta)\sigma^2 g(t)(t-\alpha)\,\Big|_{\alpha}^{\beta} - \sigma^2 f(\beta)\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$$

$$= \sigma^2 f(\beta)g(\beta)(\beta - \alpha) - \sigma^2 f(\beta)\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt \qquad (ii)$$

Ανάλογα,

$$E\left[g(\beta)(W_\beta - W_\alpha)\int_\alpha^\beta f'(t)(W_t - W_\alpha)dt\right] = g(\beta)\int_\alpha^\beta f'(t)E(W_t - W_\alpha)(W_\beta - W_\alpha)dt$$

$$= \sigma^2 f(\beta)g(\beta)(\beta - \alpha) - \sigma^2 g(\beta)\int_\alpha^\beta f(t)dt \qquad (iii)$$

Τέλος, έχουμε δείξει ότι:

$$E\left[\int_\alpha^\beta f'(t)(W_t - W_\alpha)dt\int_\alpha^\beta g'(t)(W_t - W_\alpha)dt\right] = \sigma^2\int_\alpha^\beta (f(t) - f(\beta))(g(t) - g(\beta))dt$$

$$= \sigma^2\int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt - \sigma^2 g(\beta)\int_\alpha^\beta f(t)dt - \sigma^2 f(\beta)\int_\alpha^\beta g(t)dt$$

$$+ \sigma^2 f(\beta)g(\beta)(\beta - \alpha) \qquad (iv)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις $(i) - (iv)$ στην $(*)$ αποδεικνύεται το ζητούμενο.

•

Παράδειγμα 3.4.5

Εάν $X = \int_0^1 tdW_t$, $Y = \int_0^1 t^2 dW_t$. Υπολογίστε τις ποσότητες:

(α) $EX, EY, \sigma^2(X), \sigma^2(Y)$

(β) $p(X,Y)$

Λύση

(α) είναι φανερό ότι

$$EX = E\int_0^1 tdW_t = 0 \qquad EY = E\int_0^1 t^2 dW_t = 0$$

$$\sigma^2(X) = EX^2 = E\left(\int_0^1 tdW_t\right)^2 = \sigma^2\int_0^1 t^2 dt = \frac{\sigma^2 t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\sigma^2}{3}$$

$$\sigma^2(Y) = EY^2 = E\left(\int_0^1 t^2 dW_t\right)^2 = \sigma^2\int_0^1 t^4 dt = \frac{\sigma^2}{5}$$

(β) $cov(X,Y) = EXY - EXEY = EXY =$

$$= E\left(\int_0^1 t dW_t \int_0^1 t^2 dW_t\right) = \sigma^2 \int_0^1 t^3 dt = \frac{\sigma^2}{4}$$

Άρα,

$$p(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)}\sqrt{\sigma^2(Y)}} = \frac{\frac{\sigma^2}{4}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{3}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{5}}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

•

Πρόταση 3.4.6

Εάν f, g συνεχώς διαφορίσιμες στα αντίστοιχα διαστήματα. Τότε,

1. $E\left(\int_\alpha^\beta f(t)dW_t \int_c^d g(t)dW_t\right) = 0,\ \alpha \leq \beta \leq c \leq d$

2. $E\left(\int_\alpha^\beta f(t)dW_t \int_\alpha^c g(t)dW_t\right) = \sigma^2 \int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt\ ,\ \alpha \leq \beta \leq c$

Απόδειξη

1. Έχουμε,

$$E\left(\int_\alpha^\beta f(t)dW_t \int_c^d g(t)dW_t\right)$$

$$= E\left[\left(f(\beta)W_\beta - f(\alpha)W_\alpha - \int_\alpha^\beta f'(t)W_t dt\right) * \left(g(d)W_d - g(c)W_c - \int_c^d g'(t)W_t dt\right)\right]$$

$$= E\left[\left(f(\beta)(W_\beta - W_\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(s)(W_s - W_\alpha)\, ds\right) * \left(g(d)(W_d - W_c) - \int_c^d g'(t)(W_t - W_c) dt\right)\right]$$

Αλλά ισχύει ότι, αν $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ τότε,

$$E(W_{t_2} - W_{t_1})(W_{t_4} - W_{t_3}) = 0$$

Οπότε έχουμε το ζητούμενο.

2. Το $\int_{\alpha}^{c} g(t)dW_t = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dW_t + \int_{\beta}^{c} g(t)dW_t$, οπότε:

$$E\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t \int_{\alpha}^{c} g(t)dW_t\right) = E\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t\left(\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dW_t + \int_{\beta}^{c} g(t)dW_t\right)\right)$$
$$= E\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dW_t\right) + E\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t \int_{\beta}^{c} g(t)dW_t\right)$$
$$= \sigma^2 \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt$$

•

Παράδειγμα 3.4.7
Να βρεθεί η συνάρτηση συνδιασποράς σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. $X_t = \int_0^t s dW_s$
2. $X_t = \int_0^1 \cos ts \, dW_s$

Λύση

1. $EX_t = EX_s = 0$

Για $s \leq t$

$$cov(X_s, X_t) = E\left(\int_0^t u dW_u \int_0^s v dW_v\right) = \sigma^2 \int_0^s u^2 du = \sigma^2 \frac{u^3}{3}\Big|_0^s = \sigma^2 \frac{s^3}{3}$$

Άρα,

$$r_x(s,t) = \frac{\sigma^2}{3} min(s^3, t^3)$$

2. Έχουμε $EX_t = EX_s = 0$. Ακόμα,

$$cov(X_s, X_t) = E\left(\int_0^1 \cos tu \, dW_u \int_0^1 \cos sv \, dW_v\right) = \sigma^2 \int_0^1 \cos tu \cos su \, du$$
$$= \frac{\sigma^2}{2}\int_0^1 (\cos(t+s)u + \cos(t-s)u)\, du$$
$$= \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\sin(t+s)}{t+s} + \frac{\sin(t-s)}{t-s}\right) = r_x(s,t)$$

•

Παράδειγμα 3.4.8
Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ορίζεται από την

$$X_t = \int_0^t e^{\alpha(t-u)}\, dW_u, \qquad t \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί η μέση τιμή και η συνάρτηση συνδιασποράς της $\{X_t\}$.

Λύση

Η $\{X_t\}$ έχει μέση τιμή $EX_t = 0$

Για $s \leq t$ υπολογίζουμε ακόμα για τη συνάρτηση συνδιασποράς, την

$$EX_tX_s = E\left\{\int_0^t e^{\alpha(t-u)}\, dW_u \int_0^s e^{\alpha(s-u)}\, dW_u\right\} = e^{\alpha(t+s)} E \int_0^t e^{-\alpha u}\, dW_u \int_0^s e^{-\alpha u}\, dW_u$$

$$= \sigma^2 e^{\alpha(t+s)} \int_0^s e^{-2\alpha u}\, du = \sigma^2 e^{\alpha(t+s)} \left(\frac{1 - e^{-2\alpha s}}{2\alpha}\right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left\{e^{\alpha(t+s)} - e^{\alpha(t-s)}\right\}$$

Και λόγω συμμετρίας έχουμε

$$r_x(s,t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left\{e^{\alpha(t+s)} - e^{\alpha|t-s|}\right\}$$

Ειδικότερα, θέτοντας $s = t$

$$\sigma^2(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(e^{2\alpha t} - 1), \qquad t \geq 0$$

•

Παρατήρηση 3.4.9
Εάν η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $(-\infty,\beta]$ και $\int_{-\infty}^{\beta} f^2(t)dt < \alpha$, τότε αποδεικνύεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(t)dW_t = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dW_t$$

Ακόμα,

a) $\int_{-\infty}^{\beta} f(t)dW_t \sim \mathcal{N}(0, \widetilde{\sigma^2})$ όπου $\widetilde{\sigma^2} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\beta} f^2(t)dt$

b) Εάν g συνεχώς διαφορίσιμη στο $(-\infty,\beta]$ και $\int_{-\infty}^{\beta} g^2(t)dt < \infty$, τότε

$$E\left(\int_{-\infty}^{\beta} f(t)dW_t \int_{-\infty}^{c} g(t)dW_t\right) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{min(\beta,c)} f(t)g(t)dt$$

Παράδειγμα 3.4.10

Εάν

$$X_t = \int_{-\infty}^{t} e^{2\alpha(t-u)}\, dW_u\,, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha = σταθερά$$

Να δειχθεί ότι η X_t είναι δεύτερης τάξεως, ασθενώς στάσιμη στοχαστική διαδικασία.

Λύση

Έχουμε $EX_t = 0$. Ακόμα,

$$\int_{-\infty}^{t} e^{2\alpha(t-u)}\, du = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{t} e^{2\alpha(t-u)}\, du = \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{1-e^{2\alpha(t-u)}}{-2\alpha} = -\frac{1}{2\alpha} < \infty$$

Άρα η X_t είναι καλά ορισμένη.

Ακόμα, για $s \leq t$,

$$r_x(s,t) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{s} e^{\alpha(s-u)+\alpha(t-u)}\, du = \sigma^2 e^{\alpha(s+t)} \int_{-\infty}^{s} e^{-2\alpha u}\, du = \sigma^2 e^{\alpha(s+t)} \frac{e^{-2\alpha s}}{-2\alpha}$$

$$= \frac{\sigma^2}{-2\alpha} e^{\alpha(t-s)} = \frac{\sigma^2}{-2\alpha} e^{\alpha|t-s|}$$

Άρα, είναι δεύτερης τάξεως, ασθενώς στάσιμη στοχαστική διαδικασία.

Παράδειγμα 3.4.11

Εάν $\{W_t\}_{t\geq 0}$ μία στοχαστική ανέλιξη Wiener με $\sigma^2(W_t) = t$. Ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία

$$Z_t = \int_0^t W_s ds$$

Να υπολογιστούν οι ποσότητες

a. $EZ_t = \mu_z(t)$
b. $\sigma^2(Z_t)$
c. $r_z(s,t)$

Λύση

a. $EZ_t = \int_0^t EW_s ds = 0$

b. $\sigma^2(Z_t) = \sigma^2\left(\int_0^t W_s ds\right) = \int_0^t \left(\int_0^t r_x(u,v)du\right) dv =$

$$= \int_0^t \left(\int_0^t E(W_u W_v)du\right) dv = 2\int_0^t \left(\int_0^u E(W_u W_v)\,du\right) dv$$

$$= 2\int_0^t \left(\int_0^u \sigma^2 u du\right) dv = 2\int_0^t \sigma^2 \frac{u^2}{2} du = \frac{\sigma^2 t^3}{3}$$

c. Για τον υπολογισμό της $r_z(s,t)$ έχουμε

$$Z_t = Z_s + \int_0^t (W_u - W_s)du + (t-s)W_s$$

Άρα,

$$Z_s Z_t = Z_s^{\ 2} + Z_s \int_0^t (W_u - W_s)du + (t-s)W_s Z_s, \qquad (*)$$

Αλλά,

$$EZ_s^{\ 2} = var(Z_s) = \frac{\sigma^2 s^3}{3}, \qquad (i)$$

Ακόμα,

$$E\left(Z_s \int_0^t (W_u - W_s)du\right) = E\left[\left(\int_0^s W_u du\right)\left(\int_s^t (W_v - W_s)dv\right)\right]$$

$$= \int_0^s \left(\int_s^t EW_u * E(W_v - W_s)du\right) dv = 0, \qquad (ii)$$

Τέλος,

$$E(W_s Z_s) = E\left(W_s \int_0^s W_u du\right) = E\int_0^s (W_s W_u)du = \int_0^s \sigma^2 u du = \frac{1}{2}s^2\sigma^2, \qquad (iii)$$

Άρα, παίρνοντας μέσες τιμές στην $(*)$ και χρησιμοποιώντας τις $(i), (ii), (iii)$,

Έχουμε:

$$r_z(s,t) = EZ_s Z_t = \frac{\sigma^2 s^3}{3} + (t-s)\frac{1}{2}s^2\sigma^2 = \frac{1}{6}s^2\sigma^2(3t-s)$$

Η $(*)$ συμβολίζεται συνήθως σε μορφή λεγόμενου **στοχαστικού διαφορικού** σαν,

$$dI(t) = X_t dW_t$$

(είναι απλά θέμα συμβολισμού, καμία παραγώγιση δεν «εκτελείται»).

Ο συμβολισμός αυτός βοηθάει στο να χρησιμοποιούμε ευκολότερα τους κανόνες λογισμού.

Παράδειγμα 3.5.3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^T W_t \, dW_t$.

Λύση

Θεωρούμε την διαμέριση: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \mathrm{T}$ του διαστήματος [0,T].

Σχηματίζουμε το μερικό άθροισμα:

$$\mathrm{I_n(T)} = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)$$

Επειδή:

$$2W_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) = \left(W_{t_i} + W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2 - W_{t_i}^2 - \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2 = W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2 - \left(\Delta W_{t_i}\right)^2$$

όπου: $\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$.

Οπότε:

$$\mathrm{I_n(T)} = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2$$

Θα δείξουμε ότι:

$$\int_0^T W_t \, dW_t = \tfrac{1}{2} W_T^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{T}.$$

Θα πρέπει δηλαδή να δείξουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\tfrac{1}{2}W_T^2 - \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2 - \tfrac{1}{2}W_T^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{T}\right]^2 = 0$$

Αλλά,

$$E\left[\frac{1}{2}W_T^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2-\frac{1}{2}W_T^2+\frac{1}{2}T\right]^2=E\left[\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2-\frac{1}{2}T\right]^2$$

Οπότε θα πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2-T\right]^2=0$$

Αλλά

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2-T\right]^2=E\left[\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2\right]^2-2T\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2+T^2\right]=$$

$$=E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2\right]^2-2T\sum_{i=0}^{n-1}E\left(\Delta W_{t_i}\right)^2+T^2$$

Αλλά, λόγω του ότι η $\{W_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια διαδικασία Wiener $EW_{t_i}^2=t_i$, έχουμε:

$$-2T\sum_{i=0}^{n-1}E\left(\Delta W_{t_i}\right)^2+T^2=-2T\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)+T^2==-2T*T+T^2=-T^2$$

Οπότε:

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2-T\right]^2=E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2\right]^2-T^2$$

Ακόμα,

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2\right]^2=E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^4+2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j<i}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2\left(\Delta W_{t_j}\right)^2\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}E\left(\Delta W_{t_i}\right)^4+2E\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j<i}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2\left(\Delta W_{t_j}\right)^2$$

Αλλά, $EW_{t_i}^2=3{t_i}^2$ και οι ΔW_{t_i} και ΔW_{t_j} είναι ανεξάρτητες για $i\neq j$, οπότε:

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2\right]^2=\sum_{i=0}^{n-1}E\left(\Delta W_{t_i}\right)^4+2E\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j<i}^{n-1}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2\left(\Delta W_{t_j}\right)^2$$

$$=3\sum_{i=0}^{n-1}{t_i}^2+2E\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j<i}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j)$$

Οπότε:

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta W_{t_i})^2 - T\right]^2 = 3\sum_{i=0}^{n-1} t_i{}^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j<i}(t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j) - T^2$$

Εάν θέσουμε:

$$m = \max_i (t_{i+1} - t_i),$$

τότε (επειδή $T \le mn$)

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta W_{t_i})^2 - T\right]^2 = 3nm^2 + n(n-1)m^2 - T^2 \le 2nm^2$$

Τέλος, (εάν θεωρήσουμε ότι $m = \max_i (t_{i+1} - t_i) = \frac{T}{n}$, δηλαδή τα σημεία είναι ισαπέχοντα), έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta W_{t_i})^2 - T\right]^2 \le \lim_{n\to\infty} 2nm^2 = \lim_{n\to\infty} 2n\frac{T^2}{n^2} = 0$$

Άρα:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta W_{t_i})^2 - T\right]^2 = 0$$

?

Παρατήρηση 3.5.4

(α) Είναι φανερό ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα Ito διαφέρει από το ολοκλήρωμα Riemann (αν όχι, θα έπρεπε να είχαμε $\int_0^T W_t\, dW_t = \frac{1}{2}W_T^2$).

(β) Ο υπολογισμός του στοχαστικού ολοκληρώματος Ito, μιάς σ.δ αναφορικά με την σ.δ. Wiener, με την βοήθεια του ορισμού είναι διαδικασία αρκετά δύσκολη και χρησιμοποιείται μόνον σε μερικές ειδικές περιπτώσεις. Μια δεύτερη διαδικασία υπολογισμού του εν λόγω ολοκληρώματος, με την βοήθεια του λεγόμενου τύπου του Ito, περιγράφεται παρακάτω.

Έστω τώρα f μια ομαλή συνάρτηση και έστω ότι $f(X_0)$ γνωστή. Τότε είναι γνωστό, τύπος του Taylor, ότι

$$f(X_0 + h) \simeq f(X_0) + h\frac{df(X_0)}{dx} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2 f(X_0)}{dx^2}$$

ή εάν $\Delta f(X_0) = f(X_0 + h) - f(X_0)$, τότε

$$\Delta f(X_0) \simeq h\frac{df(X_0)}{dx} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2f(X_0)}{dx^2}.$$

Ανάλογα, εάν η g είναι μια ομαλή συνάρτηση δύο μεταβλητών x και y και

$$\Delta g(x_0,y_0) = g(x_0 + h, y_0 + k) - g(x_0,y_0)$$

τότε, ο τύπος του Taylor γίνεται:

$$\Delta g(x_0,y_0) \simeq h\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} + k\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial y^2}k^2$$

$$+\frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}hk$$

Στο στοχαστικό λογισμό χρειαζόμαστε έναν τύπο ανάλογο των τύπων αυτών του Taylor, για τυχαίες μεταβλητές.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση f , δύο μεταβλητών, η οποία εξαρτάται από το t και μία στοχαστική διαδικασία X (η οποία συνδέεται με κάποιο τρόπο με μια στοχαστική διαδικασία $Wiener$), δηλαδή $f = f(t,X)$.

Για παράδειγμα εάν η f είναι η τιμή δικαιώματος μιας μετοχής, τότε θα εξαρτάται από την τιμή της μετοχής.

Μια έκφραση για τη μεταβολή της f σ'ένα μικό διάστημα χρόνου Δt, δίνεται από τον συνήθη τύπο του Taylor.

$$\Delta f(t,X) = \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(\Delta X)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial X}\Delta t\Delta X \quad (1)$$

όπου, $\frac{\partial f}{\partial X}$, η παράγωγος της f ως προς τη δεύτερή της μεταβλητή υπολογισμένη στο σημείο $(t, X(t))$.

Έστω ότι η X συνδέεται με την $\{W_t\}_{t\geq 0}$ μέσω της

$$\Delta X(t) = \alpha(t, X(t))\Delta t + \beta(t, X(t))\Delta W_t \quad (2)$$

όπου α και β γνωστές συναρτήσεις των t και X.

Παρατήρηση 3.5.5

Τώρα για Δt πολύ μικρό (π.χ 10^{-6}), το $(\Delta t)^2$ είναι πολύ μικρότερο από το Δt και έτσι αμελητέο. Ακόμα, $E(\Delta t\Delta W_t) = \Delta t\ E\Delta W_t = 0$. Δηλαδή, για Δt πολύ μικρό, το $\Delta t\Delta W_t$ είναι και αυτό αμελητέο. Τέλος, επειδή $E((\Delta W_t)^2) = \Delta t$ και $V((\Delta W_t)^2) = \Delta t$ που είναι πολύ μικρότερο του Δt. Άρα, $(\Delta W_t)^2 \to \Delta t$.

Σε συνεχή χρόνο, το $(\Delta t)^2$ γράφεται σαν $(dt)^2$=0, το $\Delta t \Delta W$ γράφεται σαν $dtdW = 0$,

το ΔW γράφεται σαν $dW = 0$. Δηλαδή έχουμε τον παρακάτω πίνακα πολλαπλασιασμού

	dt	dW
dt	0	0
dW	0	dt

Η (1) με τη βοήθεια της (2) και της παρατήρησης γίνεται

$$df(t,X) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \alpha(t,X(t))\frac{\partial f}{\partial X}dt + \frac{1}{2}\beta(t,X(t))\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}dt + \beta(t,X(t))\frac{\partial f}{\partial X}dW_t$$

Ο τύπος αυτός καλείται **τύπος του Ito**

Η μορφή του με τη βοήθεια στοχαστικών ολοκληρωμάτων

$$\int_0^T df(t,X) = \int_0^T \left\{\frac{\partial f}{\partial t}dt + \alpha(t,X(t))\frac{\partial f}{\partial X}dt + \frac{1}{2}\beta(t,X(t))\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}dt\right\}dt$$

$$+ \int_0^T \left\{\beta(t,X(t))\frac{\partial f}{\partial X}\right\}W_t$$

3.6 Εφαρμογές τύπου του Ito

(A) Εάν η f είναι συνάρτηση μόνο του W_t $(f = f(x))$, τότε

$$df = \frac{df}{dx}dW + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(dW)^2 \Rightarrow df = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx}dt + \frac{df}{dx^2}dW$$

Παράδειγμα 3.6.1

Εάν $f = f(x)$, δηλαδή $W = f(W)$, τότε:

$$\frac{df}{dx} = 1, \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = 0$$

Άρα, $df = dW$

⍰

Παράδειγμα 3.6.2

Εάν $f(x) = x^4$, τότε:

$$\frac{df}{dx} = 4x^3, \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2$$

Άρα,

$$df = \frac{1}{2}12W^2dt + 4W^3dW$$

ή σε μορφή ολοκληρωμάτων στο $[0,T]$:

$$W_T^4 - W_0^4 = 6\int_0^T W_t^2\,dt + 4\int_0^T W_t^3\,dW_t$$

αλλά $W_0^4 = 0$ και

$EW_T^4 = 6\int_0^T EW_t^2dt + 4\int_0^T EW_t^3\,dW_t = 6\int_0^T tdt = 6\frac{t^2}{2}\Big|_0^T = 3T^2$ (όπως αναμενόταν)

⍰

Παράδειγμα 3.6.3

Για το $\int_0^T W_t dW_t$ (ή $dI = W_t dW_t$)

Εξετάζουμε την ύπαρξη

$$\int_0^T EW_t^2\,dt = \int_0^T tdt = \frac{T^2}{2} < \infty$$

Επειδή $\int xdx = \frac{x^2}{2}$. Έστω $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Άρα λόγω του $(\boldsymbol{A})$,

$$df = \frac{df}{dW}dW + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dW^2}dt$$

και

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x}{2} = x, \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = 1.$$

Άρα, $df = WdW + \frac{1}{2}dt$ ή σε μορφή ολοκληρωμάτων,

$$\int_0^T df = \int_0^T \frac{1}{2}dt + \int_0^T W_t dW_t \Rightarrow f(T) - f(0) = \frac{1}{2}T + \int_0^T W_t dW_t \Rightarrow$$

$$\frac{W_T^2}{2} - \frac{W_0^2}{2} = \frac{1}{2}T + \int_0^T W_t dW_t.$$

Δηλαδή,

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{W_T^2}{2} - \frac{1}{2}T$$

⍰

Παρατήρηση 3.6.4
Εάν $\int_0^T W_t dW_t = \frac{W_T^2}{2} \Rightarrow E\int_0^T W_t dW_t = \frac{EW_T^2}{2} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}T$ άτοπο.

$(\boldsymbol{B})$ Εάν $f = f(t, W)$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor για συτνάρτηση f δύο μεταβλητών έχουμε

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial W}dW + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}(dW)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial W}dtdW$$

Με τη χρήση του πίνακα πολλαπλασιασμού παίρνουμε

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}dt + \frac{\partial f}{\partial W}dW$$

Παράδειγμα 3.6.5
Εάν $f(t, W) = e^{\mu t + \sigma W_t}$, τότε:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu e^{\mu t + \sigma W_t} = \mu f$$

$$\frac{\partial f}{\partial W} = \sigma e^{\mu t + \sigma W_t} = \sigma f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial W^2} = \sigma^2 e^{\mu t + \sigma W_t} = \sigma^2 f$$

Άρα, ο τύπος του Ito, σ'αυτή τη περίπτωση γίνεται

$$df = \mu f dt + \frac{1}{2}\sigma^2 f dt + \sigma f dW \Rightarrow$$

$$\frac{df}{f} = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW$$

Κεφάλαιο 4. Στοχαστικές Διαφορικές εξισώσεις

4.1 Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

Έστω ότι προσπαθούμε να μελετήσουμε (μοντελοποιήσουμε) ένα σύστημα ή φαινόμενο. Πολλές φορές το μαθηματικά μοντέλο που κατασκευάζουμε για την μελέτη, απαιτεί την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων (η λύση των οποίων μας δίνει ποσότητες που μας ενδιαφέρουν). Εάν οι συντελεστές αυτών των διαφορικών εξισώσεων περιέχουν κάποιο είδος τυχαιότητας, έχουμε τις λεγόμενες **στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις**. Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε τρόπους εύρεσης την λύσης αυτών των εξισώσεων. Δίνουμε πρώτα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.1.1

Έστω $X(t)$ παριστάνει τη θέση ενός σώματος τη χρονική στιγμή t, το οποίο κινείται κατά μήκος μίας ευθείας (ή μια από τις συντεταγμένες της θέσης του στο χώρο). Τότε, $X'(t), X''(t)$ είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του αντίστοιχα (τη χρονική στιγμή t).

Εάν m είναι η μάζα του σώματος και $F(t)$ η δύναμη που δρα στο σώμα τη χρονική στιγμή t, τότε από το νόμο του Νεύτωνα, έχουμε:

$$F(t) = mX''(t)$$

Θα Θεωρήσουμε τα εξής είδη δυνάμεων:

(α) *Η τριβή*: $-fX'(t)$, που οφείλεται στην ιξώδες του μέσου, είναι ανάλογη της ταχύτητας και έχει αντίθετη φορά (της κίνησης).

(β) *Δύναμη «επαναφοράς»*: π.χ σ'ένα εκρεμμές ή ελατήριο, είναι ανάλογη της απόστασης από την αρχή των αξόνων και έχει διεύθυνση προς την αρχή των αξόνων.

(γ) Μία εξωτερική δύναμη $\xi(t)$, ανεξάρτητη από την κίνηση του σώματος.

Άρα, η ολική δύναμη έχει τη μορφή:

$$F(t) = -fX'(t) - kX(t) + \xi(t), \qquad f, k \geq 0 \ \textit{σταθερές}$$

Έχουμε δηλαδή τη διαφορική εξίσωση

$$mX''(t) + fX'(t) + kX(t) = \xi(t).$$

Έστω ότι η εξωτερική δύναμη οφείλεται σε κάποιο «τυχαίο» γεγονός. Δηλαδή, η $\xi(t)$ είναι μία στοχαστική διαδικασία. Τότε και η $X(t)$ είναι μία στοχαστική διαδικασία και η παραπάνω εξίσωση είναι μία **στοχαστική διαφορική εξίσωση** (αναφορικά με τις δύο αυτές στοχαστικές διαδικασίες).

Παρατήρηση 4.1.2
Εάν η εξωτερική δύναμη οφείλεται στην σύγκρουση μορίων, τότε η φυσική διαίσθηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η δύναμη είναι του τύπου «λευκού θορύβου» ("white noise") με κατάλληλη παράμετρο σ^2. Σ'αυτή την περίπτωση, η $X(t)$ ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$mX''(t) + fX'(t) + kX(t) = W'(t)$$

όπου $W'(t)$ ο λευκός θόρυβος με παράμετρο σ^2.

Παράδειγμα 4.1.3
Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο το οποίο περιγράφει την κατανομή (μέγεθος) ενός πληθυσμού. Αν $N(t)$ το μέγεθος του πληθυσμού την χρονική στιγμή t, $N(0) = N_0$, και $\alpha(t)$ ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού την χρονική στιγμή t, τότε ένα μοντέλο προκύπτει από την λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha(t)N(t)$$

Υπάρχουν περιπτώσεις όμως που το $\alpha(t)$ δεν είναι ακριβώς γνωστό, αλλά έχει τυχαίες διακυμάνσεις της μορφής:

$$\alpha(t) = r(t) + \theta_t$$

Η τιμή του θορύβου (στοχαστική διαδικασία) θ_t δεν είναι γνωστή, παρά μόνον η κατανομή του. Η συνάρτηση $r(t)$ είναι μη-τυχαία. Θα θέλαμε να υπολογίσουμε την λύση μιας τέτοια εξίσωσης.

Μια **στοχαστική διαφορική εξίσωση** λοιπόν, πρώτης τάξης περιγράφει την αύξηση μιας μεταβλητής X η οποία οφείλεται σε μία ή περισσότερες «τυχαίες» διαδικασίες.

Εδώ, η πηγή της τυχαιότητας είναι μια στοχαστική διαδικασία $Wiener$. Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση λοιπόν, είναι μια εξίσωση της μορφής:

$$dX(t) = a\big(t, X(t)\big)dt + \beta\big(t, X(t)\big)dW(t)$$

όπου α, β είναι γνωστές συναρτήσεις των t και X. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η στοχαστική διαδικασία X_0 είναι γνωστή.

Η μορφή της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων ειναι:

$$\int_0^T dX(t) = X_T - X_0 = \int_0^T \alpha\big(t, X(t)\big)dt + \int_0^T \beta\big(t, X(t)\big)dW(t) \quad ή$$

$$X_T - X_0 = \int_0^T a(t, X_t)dt + \int_0^T \beta(t, X_t)dW(t).$$

Αυτή η μορφή είναι γνωστή ως **στοχαστική ολοκληρωτική εξίσωση**.

Παρατήρηση 4.1.4

i. Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση είναι μια διαδικασία κατά την οποία προσπαθούμε να (υπολογίσουμε) προσδιορίσουμε την τυχαία στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$.
ii. **Στοχαστικό διαφορικό** είναι η έκφραση που προκύπτει από την εφαρμογή του τύπου του Ito σε μία στοχαστική διαδικασία.
iii. Ο όρος $a(t, X_t)$ καλείται **κλίση** (drift) ενώ ο όρος $\beta(t, X_t)$ καλείται **διάχυση** (diffusion).
iv. Το ολοκλήρωμα $\int_0^T a(t, X_t)dt$ είναι ολοκλήρωμα Riemann ενώ το ολοκλήρωμα $\int_0^T \beta(t, X_t)dW(t)$ είναι ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα Ito.
v. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση της $\{X_t\}$ καλείται **δυναμική** της $\{X_t\}$.

Ορισμός 4.1.5

Λύση μιας στοχαστικής εξίσωσης είναι μια τυχαία στοχαστική διαδικασία, η οποία έχει στοχαστικό διαφορικό του ίδιου τύπου με της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (ισχυρή λύση).

Πρόταση 4.1.6

Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση της παραπάνω μορφής έχει μοναδική λύση X, εάν υπάρχουν σταθερές K και L τέτοιες ώστε :

$\forall 0 \leq t \leq T$ και τυχόν x

i. $\alpha^2(t,x) + \beta^2(t,x) \le K(1+x^2)$ (ανάπτυξη)

ii. $|\alpha(t,x_1) - \alpha(t,x_2)| + |\beta(t,x_1) - \beta(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|$ (Συνθήκη Lipschitz)

Παραδείγματα 4.1.7

Α. Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση για την αριθμητική κίνηση Brown.

Η **αριθμητική κίνηση Brown** είναι η (τυχαία) στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$, η οποία ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

όπου, μ, σ σταθερές και $\sigma > 0$.

Σε μορφή ολοκληρωμάτων:

$$\int_0^T dX_t = \int_0^T \mu dt + \int_0^T \sigma dW_t \quad \text{ή}$$

$$X_T - X_0 = \mu T + \sigma(W_T - W_0)$$

$$\Rightarrow X_T = X_0 + \mu T + \sigma W_T$$

Παρατήρηση 4.1.8

i. Η λύση X_T ισούται με τον μη τυχαίο όρο $X_0 + \mu T$ και ένα πολλαπλάσιο μιας κανονικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής W_t, άρα είναι κανονικά κατανεμημένη.

ii. Η μέση τιμή της λύσης είναι

$$EX_T = EX_0 + E\mu T + \sigma EW_t = X_0 + \mu T$$

Η διασπορά

$$V(X_T) = V(X_0 + \mu T + \sigma W_t) = \sigma^2 T$$

Δηλαδή, η μέση τιμή και η διασπορά αυξάνονται γραμμικά ως προς το T.

iii. Η στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$ είναι ένα μοντέλο το οποίο μπορεί να περιγράψει μια μεταβλητή (στην οικονομία), που αυξάνεται με σταθερό ρυθμό και χαρακτηρίζεται από αυξανόμενη αβεβαιότητα.

Η διαδικασία μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, οπότε δεν είναι κατάλληλο μοντέλο για μετοχές.

B. Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση για την γεωμετρική κίνηση Brown.

Η **γεωμετρική κίνηση Brown** είναι ένα μοντέλο για την μεταβολή στην στοχαστική διαδικασία (dX_t), αναφορικά με την παρούσα τιμή X_t.

Η αλλαγή ή ρυθμός επιστροφής $\frac{dX_t}{X_t}$ μοντελοποείται σαν μια αριθμητική κίνηση Brown.

Έχουμε λοιπόν,την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

$$\text{ή } dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t W_t \quad (*)$$

Είναι ένα σύνηθες μοντέλο για τιμές μετοχών, οπότε η σ.δ. X παριστάνεται με S.

Παρατήρηση 4.1.9

Για να βρούμε μία λύση στη παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση, εφαρμόζουμε τον τύπο του Ito, σε μία «δοκιμαστική» στοχαστική διαφορική λύση και παράγουμε το στοχαστικό διαφορικό της. Εάν το στοχαστικό αυτό διαφορικό είναι το ίδιο με την $(*)$, τότε η «δοκιμαστική» λύση είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

Τώρα, εάν η S δεν ήταν τυχαία, τότε η $\frac{dS_t}{S_t}$ θα ήταν η παράγωγος του $\ln S_t$. Θα θεωρήσουμε λοιπόν σαν δικιμαστική λύση την $\ln S_t$.

Η $f(t,x) = \ln x$ είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής, οπότε

$$\mathrm{d}\ln S_t = \frac{d \ln S}{dS} dS + \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln S}{dS^2} (dS)^2$$

Αλλά,

$$\frac{d \ln S}{dS} = \frac{1}{S}, \qquad \frac{d^2 \ln S}{dS^2} = -\frac{1}{S^2}, \qquad (dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$$

Άρα,

$$d\ln S = \frac{1}{S}(\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S^2}\right)\sigma^2 S^2 dt = \mu dt + \sigma dW - \frac{1}{2}\sigma^2 dt =$$

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW$$

ή με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων

$$\int_0^T \ln S_t = \int_0^T \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \int_0^T \sigma dW_t \Rightarrow \ln S_T - \ln S_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T \quad (**)$$

Παρατήρηση 4.1.10

Από την $(**)$ βλέπουμε ότι ο $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ έχει την κανονική κατανομή με μέση τιμή:

$$E\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) = E\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma E W_T = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$$

και διασπορά,

$$V\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) = V\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right) = \sigma^2 V(W)_t = \sigma^2 T$$

Δηλαδή, ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής μοντελοποιείται σαν κανονική τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή και η διασπορά αυξάνονται γραμμικά με το χρόνο.

Από την $(**)$, έχουμε:

$$\frac{S_T}{S_0} = exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right\} \Rightarrow$$

$$S_T = S_0 exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right\}.$$

Εφαρμογή 4.1.11

Το μέγεθος ενός πληθυσμού είναι μία στοχαστική διαδικασία P_t που ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dP_t = 0{,}02 P_t dt + 0{,}2 P_t dW_t$$

Εάν ο αρχικός πληθυσμός είναι $P_0 = 100$,

1. Να βρείτε έναν τύπο για τον πληθυσμό P_t.
2. Υπολογίστε τη μέση τιμή της P_t.

Λύση

1. Ο πληθυσμός ικανοποεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t, \qquad \text{με } \mu = 0{,}02 \text{ και } \sigma = 0{,}2$$

Άρα από το προηγούμενο παράδειγμα

$$P_t = P_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t} \quad \text{ή}$$

$$P_t = 100 e^{\left(0{,}02 - \frac{1}{2}0{,}2^2\right)t + 0{,}2W_t} \Rightarrow$$

$$P_t = 100 e^{0.2W_t}$$

2. $EP_t = 100Ee^{0{,}2W_t} = 100e^{\frac{1}{2}0{,}2^2 t} = 100e^{0{,}02t}$

Γ. Η στοχαστική διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dW_t$$

δόθηκε από τους ***Ornstein-Uhlenbeck*** σαν ένα μοντέλο για την περιγραφή της επιτάχυνσης ενός σωματιδίου (γύρης) μέσα σ'ενα υγρό, το οποίο συγκρούεται με τα μόρια του υγρού.

Εάν λοιπόν η τ.μ. X_t παριστάνει τη ταχύτητα (σε μία διάσταση), η dX_t παριστάνει τη μεταβολή της ανα μονάδα χρόνου, δηλαδή την επιτάχυνση. Η επιτάχυνση αυτή επιβραδύνεται από μια δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας $-\lambda X_t$ και από μια τυχαία διαταραχή W_t με ένταση σ που προκαλείται από τις συγκρούσεις.

Για να λύσουμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $f(t,x)$ όπου

$$f(t,x) = xe^{\lambda t}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Ito, έχουμε

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(dX)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t} dt dX$$

Αλλά,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda x e^{\lambda t}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{\lambda t}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Ακόμα,

$$dtdX = dt(-\lambda X_t dt + \sigma dW_t) = -\lambda X(dt)^2 + \sigma dt dW_t = 0$$

Άρα τελικά,

$$df = df(t,x) = \lambda X e^{\lambda t} dt + e^{\lambda t} dX = \lambda X e^{\lambda t} dt + e^{\lambda t}(-\lambda X dt + \sigma dW) = \sigma dW$$

Δηλαδή,

$$X_T e^{\lambda T} = X_0 e^{\lambda * 0} + \sigma \int_0^T e^{\lambda t} dW_t \Rightarrow$$

$$X_T = X_0 e^{-\lambda T} + \sigma e^{-\lambda T} \int_0^T e^{\lambda t} dW_t$$

η ζητούμενη λύση.

Παρατήρηση 4.1.12
Το στοχαστικό ολοκλήρωμα της λύσης είναι κανονικά κατανεμημένο γιατί η συνάρτηση $g(t) = e^{\lambda t}$ είναι ανεξάρτητη του ω (μη τυχαία).
Άρα και η X_T είναι κανονικά κατανεμημένη, με μέση τιμή

$$EX_T = e^{-\lambda T} EX_0 + \sigma e^{-\lambda T} E \int_0^T e^{\lambda t} dW_t = e^{-\lambda T} EX_0$$

(για μεγάλα T, $EX_T \xrightarrow[T \to \infty]{} 0$)

Η διασπορά της $X_T : V(X_T) = E(X_T - EX_T)^2$. Αλλά,

$$X_T - EX_T = \sigma e^{-\lambda T} \int_0^T e^{\lambda t} dW_t$$

Οπότε,

$$V(X_T) = E\left(\sigma e^{-\lambda T}\int_0^T e^{\lambda t}dW_t\right)^2 = \sigma^2 e^{-2\lambda t}E\left(\int_0^T e^{\lambda t}dW_t\right)^2 = \sigma^2 e^{-2\lambda t}\int_0^T E\left(e^{\lambda t}\right)^2 dt$$

$$= \sigma^2 e^{-2\lambda t}\int_0^T e^{2\lambda t}dt = \sigma^2 e^{-2\lambda t}\frac{1}{2\lambda}\left(e^{2\lambda T}-1\right) = \frac{\sigma^2}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda T}\right)$$

(για μεγάλο T, η $V(X_T) \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{\sigma^2}{2\lambda}$)

Παράδειγμα 4.1.13

Είναι γνωστό ότι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

είναι η

$$S_t = S_0\, e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\,\sigma W_t} \quad (*)$$

Θα δείξουμε ότι η $(*)$ είναι όντως η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή την ικανοποιεί.

Θεωρούμε ότι η S_t είναι συνάρτηση των t και W_t οπότε, από τον τύπο του Ito, για την S_t έχουμε λόγω του ότι:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = S_0\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\,\sigma W_t} = S_t\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial W} = S_0\sigma e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t} = S_t\sigma$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial W^2} = S_0\sigma^2 e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\,\sigma W_t} = S_t\sigma^2$$

και επειδή,

$$dS_t = \frac{\partial S}{\partial t}dt + \frac{\partial S}{\partial W}dW + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial W^2}(dW)^2$$

Άρα,

$$dS_t = S_t\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + S_t\sigma dW_t + \frac{1}{2}S_t\sigma^2 dt = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Δηλαδή η S_t ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση.

?

4.2 Στοχαστικές Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Θεωρούμε τώρα την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\alpha_0 X'(t) + \alpha_1 X(t) = W'(t) \quad (1)$$

όπου $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 \neq 0$ και $W'(t)$ ο λευκός θόρυβος ("white noise") με παράμετρο σ^2.

Παρατήρηση 4.2.1
Η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\alpha_0 X'(t) + \alpha_1 X(t) = W'(t)$$

είναι μια ειδική περίπτωση της λεγόμενης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης των Ornstein-Uhlenbeck (δείτε παράδειγμα 4.1.7 (Γ)), με $\lambda = -\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ και $\sigma = \frac{1}{\alpha_0}$. Άρα η λύση της είναι ίση με (χρησιμοποιώντας τον τύπο του Ito):

$$X_t = X_0 e^{-\lambda t} + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dW_s = X_0 e^{at} + \frac{1}{\alpha_0} e^{at} \int_0^t e^{-at} dW_s$$

Παρακάτω, θα υπολογίσουμε την λύση της άμεσα, χωρίς την χρήση του τύπου του Ito.

Παράδειγμα 4.2.2
Η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ της θέσης, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$mX''(t) + fX'(t) + kX(t) = W'(t)$$

Εάν $k = 0$, δηλαδή δεν έχουμε δύναμη επαναφοράς, τότε:

$$mX''(t) + fX'(t) = W'(t).$$

Εάν $V(t) = X'(t)$ παριστάνει την ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή t. Τότε

$$mV'(t) + fV(t) = W'(t).$$

(ολοκληρώνοντας την ταχύτητα, έχουμε την αρχική στοχαστική διαδικασία).

Έστω ότι προσπαθούμε να βρούμε λύσεις της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (η οποία δεν είναι καλά ορισμένη, αφού η στοχαστική διαδικασία του «λευκού

$$\int_{t_0}^{t} X(s)\,ds = \left(X(t_0) - \frac{W(t_0)}{\alpha_0}\right)\frac{\left(e^{a(t-t_0)}-1\right)}{a} + e^{at}\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-as}}{\alpha_0} W(s)ds$$

και παραγωγίζοντας:

$$X(t) = \left(X(t_0) - \frac{W(t_0)}{\alpha_0}\right)e^{a(t-t_0)} + \frac{W(t)}{\alpha_0} + \frac{a}{\alpha_0}\int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} W(s)ds \quad (3)$$

Παρατήρηση 4.2.4

i. Επειδή τα παραπάνω βήματα είναι αντιστρεπτά, το δεξί μέλος της (3), ορίζει τη γενική λύση της (2).

ii. Χρησιμοποιώντας το ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dW(t) = f(\beta)W(\beta) - f(\alpha)W(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)W(t)\,dt,$$

έχουμε:

$$X(t) = X(t_0)e^{a(t-t_0)} + \frac{1}{\alpha_0}\int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} dW(s) \qquad (4)$$

που συμπίπτει με αυτή της παρατήρησης 4.2.1.

Εάν C είναι μία τυχαία μεταβλητή, τότε η στοχαστική διαδικασία που ορίζεται από τη σχέση:

$$X(t) = Ce^{a(t-t_0)} + \frac{1}{\alpha_0}\int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} dW(s).$$

ικανοποιεί τη συνθήκη $X(t_0) = C$, δηλαδή ισχύει η (4).

Η στοχαστική διαδικασία είναι η μοναδική λύση της (2) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $X(t_0) = C$.

Παράδειγμα 4.2.5

Έστω ότι η αρχική συνθήκη $X(t_0) = x_0 = ct$ (ανεξάρτητη του $\omega \in \Omega$). Τότε, η λύση:

$$X(t) = X(t_0)e^{a(t-t_0)} + \frac{1}{\alpha_0}\int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} dW(s) =$$

$$= x_0 e^{a(t-t_0)} + \frac{1}{\alpha_0}\int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)}\, dW(s)$$

Έστω, για ευκολία, $X_t, t \geq 0$ και $t_0 = 0$. Δηλαδή,

$$X(t) = x_0 e^{at} + \frac{1}{\alpha_0}\int_0^t e^{a(t-s)}\, dW(s)$$

Η $X(t)$ έχει:

i. Συνάρτηση μέσης τιμής:

$$\mu_x(t) = EX(t) = x_0 e^{at} + \frac{1}{\alpha_0} E\int_0^t e^{a(t-s)}\, dW(s) = x_0 e^{at}$$

ii. Συνάρτηση συνδιασποράς είναι ίση με:

$$r_x(s,t) = EX(t)X(s) - \mu_x(t)\mu_x(s) =$$

$$= E\left(x_0 e^{at} + \frac{1}{\alpha_0}\int_0^t e^{a(t-u)}\, dW(u)\right)\left(x_0 e^{as} + \frac{1}{\alpha_0}\int_0^s e^{a(t-v)}\, dW(v)\right) - x_0^2 e^{a(t+s)} =$$

$$= x_0^2 e^{a(t+s)} + E\left(x_0 e^{at}\frac{1}{\alpha_0}\int_0^s e^{a(t-v)}\, dW(v)\right) + E\left(x_0 e^{as}\frac{1}{\alpha_0}\int_0^t e^{a(t-u)}\, dW(u)\right)$$

$$+ \frac{1}{a_0^2} E\left(\int_0^t e^{a(t-u)}\, dW(u) * \int_0^s e^{a(s-v)}\, dW(v)\right) - x_0^2 e^{a(t+s)} =$$

$$= \frac{1}{a_0^2}\frac{\sigma^2}{2a}\left(e^{a(t+s)} - e^{-a|t+s|}\right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha_0\alpha_1}\left(-e^{a(t+s)} + e^{-a|t+s|}\right), s,t \geq 0$$

Δηλαδή,

$$r_x(s,t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha_0\alpha_1}\left(-e^{a(t+s)} + e^{-a|t+s|}\right)$$

Η διασπορά

$$V\big(X(t)\big) = \frac{\sigma^2}{2\alpha_0\alpha_1}\left(1 - e^{2at}\right),\ t \geq 0$$

Έστω τώρα ότι $\alpha = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} < 0$. Η στοχαστική διαδικασία

$$X_0(t) = \frac{1}{\alpha_0}\int_{-\infty}^{t} e^{a(t-s)}\, dW(s) \qquad (5)$$

είναι καλά ορισμένη.

Ακόμα, εάν $t \in \mathbb{R}$, τότε

$$X_0(t) = \frac{1}{a_0}\int_{-\infty}^{0} e^{a(t-s)} dW(s) + \frac{1}{a_0}\int_{0}^{t} e^{a(t-s)} dW(s) \Rightarrow$$

$$X_0(t) = X_0(0)e^{at} + \frac{1}{a_0}\int_{0}^{t} e^{a(t-s)} dW(s)$$

που συμφωνεί με την (4) για το $t_0 = 0$.

Δηλαδή η $\{X_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ικανοποιεί την (1) στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 4.2.6
Η $\{X_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι η μοναδική (ασθενώς) στάσιμη διαδικασία που είναι λύση της (1).

Απόδειξη

(α) Από το παράδειγμα 3.4.10, έχουμε ότι $\{X_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μία στάσιμη διαδικασία με μέση τιμή $\mu_0(t) = 0$ και συνάρτηση συνδιασποράς:

$$r_{x_0}(t) = -\frac{\sigma^2}{2aa_0}e^{a|t|} == -\frac{\sigma^2}{2a_2a_0}e^{a|t|}, t \in (-\infty, +\infty)$$

Δηλαδή, η $\{X_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μιά ασθενώς στάσιμη σ.δ. δεύτερης τάξης.

(β) Αποδεικνύεται ότι, η $X_0(t)$ είναι μία Gaussian διαδικασία.

(γ) Εάν $\{X(t)\}_{t\in(-\infty,+\infty)}$ είναι μία λύση της (1), τότε :

$$X(t) = X(0)e^{at} + \frac{1}{a_0}\int_{0}^{t} e^{a(t-s)} dW(s)$$

Αλλά,

$$X_0(t) = X_0(0)e^{at} + \frac{1}{a_0}\int_{0}^{t} e^{a(t-s)} dW(s)$$

και αφαιρώντας τις δύο αυτές εξισώσεις κατά μέλη, έχουμε:

$$X(t) = \big(X(0) - X_0(0)\big)e^{at} + X_0(t)$$

Εάν $C = X(0) - X_0(0)$ τυχαία μεταβλητή, τότε:

$$X(t) = Ce^{at} + X_0(t)$$

Αντίστροφα, εάν C είναι μία τυχαία μεταβλητή, τότε η $X(t) = Ce^{at} + X_0(t)$ είναι μία λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (1) (γιατί οι παραπάνω σχέσεις είναι αντιστρεπτές).

Άρα, η

$$X(t) = Ce^{at} + X_0(t)$$

είναι η γενική λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (1) όπου C, είναι μία τυχαία μεταβλητή.

(δ) Ισχυρισμός : Η στοχαστική διαδιακασία

$$X(t) = Ce^{at} + X_0(t)$$

είναι μία δεύτερης τάξης (ασθενώς) στάσιμη στοχαστική διαδιακασία αν και μόνο αν η $C = 0$ με πιθανότητα 1.

Έτσι, εάν εξαιρέσει κανείς σύνολα πιθανότητας μηδέν, η μοναδική δεύτερης τάξης (ασθενώς) στάσιμη στοχαστική διαδιακασία η οποία είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (1), είναι η στοχαστική διαδικασία της (5).

Απόδειξη (ισχυρισμού)

($\Leftarrow$) Εάν $C = 0$ τότε $X(t) = X_0(t)$ που είναι όπως είδαμε λύση της (1) και είναι ασθενώς στάσιμη σ.δ.

($\Rightarrow$) Αντίστροφα, έστω ότι η

$$X(t) = Ce^{at} + X_0(t)$$

είναι μία δεύτερης τάξης στάσιμη στοχαστική διαδικασία. Τότε, $C = \left(X(t) - X_0(t)\right)e^{-at}$

Αλλά,

$$EC^2 \leq 2e^{-2at}E\left(\left(X(t)\right)^2 + \left(X_0(t)\right)^2\right)$$

Επίσης, λόγω της στασιμότητας

$$E\left(X(t)\right)^2 = E\left(X(0)\right)^2 \text{ και } E\left(X_0(t)\right)^2 = E\left(X_0(0)\right)^2$$

Οπότε,

$$EC^2 \leq 2e^{-2at}\left(E\big(X(0)\big)^2+E\big(X_0(0)\big)^2\right) \Rightarrow \lim_{t\to-\infty} EC^2 = 0 \Rightarrow EC^2 = 0 \Rightarrow C = 0 \text{ σ.β}$$

Παρατήρηση 4.2.7

Εάν τώρα $X(t)$, είναι μία διαδικασία δεύτερης τάξης που είναι λύση της (1) στο $[0,+\infty)$.

Τότε,

$$X(t) = Ce^{at} + X_0(t),\ t \geq 0$$

και $EC^2 < \infty$, οπότε

$$E\big(X(t)-X_0(t)\big)^2 = E(Ce^{at})^2 = e^{2at}EC^2$$

και

$$\lim_{t\to\infty} E\big(X(t)-X_0(t)\big)^2 = 0 \qquad (*)$$

Αλλά,

$$E\big(X(t)-X_0(t)\big)^2 = \big(EX(t)-EX_0(t)\big)^2 + (V(X(t)) - V(X_0(t)))$$

$$= \big(EX(t)\big)^2 + V\big(X(t)-X_0(t)\big) \geq \big(EX(t)\big)^2 \qquad (**)$$

Οπότε, από την (**), έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \mu_x(t) = 0$$

Ακόμα, από την (*) και την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\lim_{s,t\to\infty}\left(r_x(s,t) - r_{x_0}(s,t)\right) = 0$$

Δηλαδή, εάν $X(t)$ είναι μία δεύτερης τάξης στοχαστική διαδικασία που ικανόποιεί την (1) στο $[0,+\infty)$, τότε είναι ασυμπτωτικά ίση με μιας δεύτερης τάξης (ασθενώς) στάσιμη στοχαστική διαδικασία, με μέση τιμή 0 και συνάρτηση συνδιασποράς όπως παραπάνω.

Παράδειγμα 4.2.8

Έστω $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (1) στο διάστημα $[0,+\infty)$, με $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}$.

Τότε,

$$\mu_x(t) = X_0 e^{at} \overset{a<0}{\Longrightarrow} \lim_{t\to\infty}(X_0 e^{at}) = 0$$

και

$$\left(r_x(s,t)-r_{x_0}(s,t)\right)=\frac{\sigma^2}{2\alpha_0\alpha_1}\left(e^{a|t-s|}+e^{a(t+s)}\right)-\frac{\sigma^2}{2\alpha_0\alpha_1}e^{a|t-s|}=-\frac{\sigma^2}{2\alpha_0\alpha_1}e^{a(t+s)}\Longrightarrow$$

$$\lim_{s,t\to\infty}\left(r_x(s,t)-r_{x_0}(s,t)\right)=0$$

?

4.3 Συνήθεις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις n-οστής τάξης

Έστω ότι έχουμε την (συνήθη) ομογενή διαφορική εξίσωση n -οστής τάξης, με σταθερούς συντε-λεστές:

$$\alpha_0 x^{(n)}(t)+\alpha_1 x^{(n-1)}(t)+\cdots\alpha_n x(t)=0 \qquad \text{(I)}$$

με $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ και $\alpha_0\neq 0$.

Ορισμός 4.3.1
Λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι μια συνάρτηση $\varphi(t)$, n -φορές διαφορίσιμη, τέτοια ώστε:

$$\alpha_0\varphi^{(n)}(t)+\alpha_1\varphi(t)+\cdots\alpha_n\varphi(t)=0$$

Παρατήρηση 4.3.2
Μπορεί να δειχθεί ότι, $\forall j, 1\leq j\leq n$, $\exists\varphi_j$ λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ τέτοια ώστε:

$$\varphi_j^{\kappa}(0)=\begin{cases}1, & \kappa=j-1\\ 0, & 1\leq\kappa\leq n-1 \;\kappa\alpha\iota\; \kappa\neq j-1\end{cases}$$

Για κάθε επιλογή των $C_1, C_2, \dots C_n$ η συνάρτηση

$$\varphi(t)=C_1\varphi_1(t-t_0)+\cdots C_n\varphi_n(t-t_0)$$

είναι η μοναδική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις:

$$\varphi(t_0)=C_1,\qquad \varphi'(t_0)=C_2,\qquad \varphi^{(n-1)}(t_0)=C_n$$

Η

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)\varphi_1(t-t_0)+\cdots\varphi^{(n-1)}(t_0)\varphi_n(t-t_0)$$

Ορισμός 4.3.3

Το δεξί μέλος της (I) είναι **ευσταθές,** εάν κάθε λύση της μηδενίζεται στο ∞. Από την ειδική περίπτωση των λύσεων παραπάνω βλέπουμε ότι, η (I) είναι **ευσταθής** αν και μόνο αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου έχουν (όλες) αρνητικά πραγματικά μέρη.

Έστω τώρα, η μη-ομογενής διαφορική εξίσωση n-οστής τάξης

$$\alpha_0 x^{(n)}(t) + \cdots + \alpha_n x(t) = g(t), \qquad \text{(II)}$$

όπου $g(t)$ μία συνεχής συνάρτηση.

Η γενική λύση της (II) είναι της μορφής

$$y(t) = y_p(t) + y_0(t),$$

όπου $y_0(t)$, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς και $y_p(t)$ μία λύση της (II).

Ένας τρόπος για τον υπολογισμό μιας $y_p(t)$ είναι με τη βοήθεια των συναρτήσεων παλμού $h(t), t \geq 0$ που είναι λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και ικανο-ποιούν τις αρχικές συνθήκες

$$h(0) = \cdots = h^{(n-2)}(0) = 0 \quad \text{και} \quad h^{(n-1)}(0) = \frac{1}{\alpha_0}$$

Εάν ορίσουμε την $h(t) = 0,\ t < 0$, τότε:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_n(t)}{\alpha_0}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση $x(t)$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-s)g(s)ds$$

είναι μία ειδική λύση της (II), σ'ένα διάστημα που περιέχει το t_0 σαν αριστερό άκρο σημείο και ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$.

4.4 Στοχαστικές Διαφορικές εξισώσεις n-οστής τάξης

Έστω ότι έχουμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση n-οστής τάξης

$$\alpha_0 X^{(n)}(t) + \alpha_1 X^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_n X(t) = W'(t), \qquad (i)$$

όπου $W'(t)$ ο λευκός θόρυβος ("white noise") με παράμετρο σ^2.

Η $X(t)$ είναι λύση της (i), εάν είναι $(n-1)$ φορές παραγωγίσιμη (σ' ένα διάστημα που περιέχει το t_0) και ικανοποιεί την:

$$\alpha_0\left(X^{(n-1)}(t) - X^{(n-1)}(t_0)\right) + \cdots \alpha_{n-1}(X(t) - X(t_0)) + \alpha_n \int_{t_0}^{t} X(s)ds = W(t) - W(t_0)$$

στο διάστημα αυτό.

Θεώρημα 4.4.1
Η στοχαστική διαδικασία $X(t)$, $t \geq t_0$ που ορίζεται από

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-s)dW(s), \;\; t \geq t_0$$

είναι λύση της (i) στο διάστημα $[t_0, +\infty)$ και ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$X(t_0) = \cdots = X^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Η γενική λύση της (i), στο $[t_0, +\infty)$, δίνεται από τη σχέση:

$$X(t) = X(t_0)\varphi_1(t-t_0) + \cdots + X^{(n-1)}(t_0)\,\varphi_n(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} h(t-s)dW(s)\,, \;\; t \geq t_0 \;\; (ii)$$

Γενικότερα, εάν $C_1, \ldots, C_n$ τυχαίες μεταβλητές, τότε η στοχαστική διαδικασία $X(t)$, $t \geq t_0$ που ορίζεται από την

$$X(t) = C_1\varphi_1(t-t_0) + \cdots + C_n\varphi_n(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} h(t-s)dW(s)$$

είναι τέτοια ώστε

$$X(t_0) = C_1, \ldots, X^{(n-1)}(t_0) = C_n \qquad (iii)$$

οπότε ισχύει η (ii). Αυτή είναι η μοναδική λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (i) που ικανοποιεί τις (iii).

Παράδειγμα 4.4.2

Έστω $C_1, \ldots, C_n$ πραγματικές σταθερές. Η λύση της (i) που ικανοποιεί τις συνθήκες $X(0) = C_1, \ldots, X^{(n-1)}(0) = C_n$ είναι ίση με

$$X(t) = C_1\varphi_1(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t) + \int_0^t h(t-s)\,dW(s)$$

Τότε (α) η $X(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με:

i. Μέση τιμή $EX(t) = C_1\varphi_1(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t)$

ii. Διασπορά $V(t) = \sigma^2 \int_0^t h^2(t-s)ds = \sigma^2 \int_0^t h^2(s)ds$

Παράδειγμα 4.4.3

Εάν $m, f \in \mathbb{R}^+$ και έστω $V_0(t)$ η (ασθενώς) στάσιμη λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$mV'(t) + fV(t) = W'(t)$$

(α) Εκφράστε την $V_0(t)$ αναφορικά με τον λευκό θόρυβο.

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη συνάρτηση συνδιασποράς της $V_0(t)$.

(γ) Δείξτε άμεσα ότι $\lim_{s,t\to+\infty}\left(r_V(s,t) - r_{V_0}(s,t)\right) = 0$, όπου

$$V(t) = v_0 e^{at} + \frac{1}{m}\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\,dW(s)$$

(δείτε και παράδειγμα 4.5.1).

(δ) Εάν $X_0(t) = \int_0^t V_0(s)ds$, δείξτε ότι η $X_0(t)$ ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$mX''(t) + fX'(t) = W'(t), \qquad t \geq 0$$

(ε) Εκφράστε την $X_0(t)$ αναφορικά με τον λευκό θόρυβο.

(στ) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη συνάρτηση συνδιασποράς της $X_0(t)$.

Λύση

(α) Επειδή η $V_0(t)$ είναι η (ασθενώς) στάσιμη λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:

$$V_0(t) = \frac{1}{\alpha_0}\int_{-\infty}^{t} e^{a(t-s)} dW(s) = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{t} e^{a(t-s)} dW(s)$$

(β) $EV_0(t) = 0$ και $r_{V_0}(t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha_0\alpha_1} e^{\alpha|t|} = \frac{\sigma^2}{2mf} e^{\alpha|t|}, \; t \in \mathbb{R}, \; a = -\frac{f}{m}$

(γ) Έχουμε:

$$r_V(s,t) = \frac{\sigma^2}{2mf}\left(e^{\alpha|t-s|} - e^{\alpha(s+t)}\right)$$

και

$$r_{V_0}(s,t) = \frac{\sigma^2}{2mf} e^{\alpha|t-s|}$$

Οπότε:

$$r_V(s,t) - r_{V_0}(s,t) = -\frac{\sigma^2}{2mf} e^{\alpha(s+t)} \xrightarrow[s,t\to\infty]{} 0 \quad (\alpha < 0)$$

(δ) Έχουμε $X_0'(t) = V_0(t)$ και έτσι $X_0''(t) = V_0'(t)$.

Αλλά $mV_0'(t) + fV_0(t) = W'(t)$

$mX_0''(t) + fX_0'(t) = W(t)$ δηλαδή η $X_0(t)$ είναι λύση της.

(ε) Η

$$V_0(t) = \frac{1}{\alpha_0}\int_{-\infty}^{t} e^{a(t-s)} dW(s) = \frac{1}{\alpha_0}\int_{-\infty}^{0} e^{a(t-s)} dW(s) + \frac{1}{\alpha_0}\int_{0}^{t} e^{a(t-s)} dW(s)$$

Αλλά $X_0'(t) = V_0(t)$, οπότε:

$$X_0(t) = \int_0^t V_0(u)\,du = \frac{1}{\alpha_0}\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{t} e^{a(t-s)}\,du\,dW(s) + \frac{1}{\alpha_0}\int_0^t\int_0^u e^{a(u-s)}\,dW(s)\,du =$$

$$= \frac{e^{at}-1}{m\alpha}\int_{-\infty}^{0} e^{-as} dW(s) + \frac{1}{m\alpha}\int_0^t \left(e^{a(t-s)} - 1\right) dW(s)$$

(στ) Η μέση τιμή της $X_0(t)$ είναι ίση με:

$$\mu_0(t) = EX_0(t) = \frac{e^{at}-1}{m\alpha} E \int_{-\infty}^{0} e^{-as} dW(s) + \frac{1}{m\alpha} E \int_{0}^{t} \left(e^{a(t-s)} - 1\right) dW(s) = 0$$

Η διασπορά:

$$V\big(X_0(t)\big) = E\left(\frac{e^{at}-1}{m\alpha} \int_{-\infty}^{0} e^{-as} dW(s) + \frac{1}{m\alpha} \int_{0}^{t} \left(e^{a(t-s)} - 1\right) dW(s)\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^{at}-1)^2}{m^2\alpha^2} E\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-as} dW(s)\right)^2 + \frac{1}{m^2\alpha^2} E\left(\int_{0}^{t} \left(e^{a(t-s)} - 1\right) dW(s)\right)^2$$

$$+2\frac{e^{at}-1}{m\alpha}\frac{1}{m\alpha} E\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-as} dW(s) * \int_{0}^{t} \left(e^{a(t-s)} - 1\right) dW(s)\right) \underbrace{=}_{\alpha\nu\varepsilon\xi\alpha\rho\tau\eta\sigma\acute{\iota}\alpha}$$

$$= \underbrace{\frac{\sigma^2(e^{at}-1)^2}{m^2\alpha^2} \int_{-\infty}^{0} e^{-2as} ds}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{\sigma^2}{m^2\alpha^2} \int_{0}^{t} \left(e^{a(t-s)} - 1\right)^2 ds}_{\mathrm{II}}$$

Αλλά

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-2as} ds = -\frac{1}{2\alpha}$$

Οπότε

$$I = -\frac{\sigma^2(e^{at}-1)^2}{m^2\alpha^3}$$

Ακόμα το ολοκλήρωμα:

$$\int_{0}^{t} \left(e^{a(t-s)} - 1\right)^2 ds = \int_{0}^{t} e^{2a(t-s)} ds + \int_{0}^{t} ds - 2\int_{0}^{t} e^{a(t-s)} ds =$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} e^{2a(t-s)}\Big|_0^t + t + \frac{2}{\alpha} e^{a(t-s)}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} e^{2at} + t + \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} e^{at}$$

Τελικά

$$V\big(X_0(t)\big) = \mathrm{I} + \mathrm{II} = \frac{\sigma^2 m}{f^3}\{e^{at} - 1 - \alpha t\}$$

⍰

Παρατήρηση 4.4.4

Έστω τώρα ότι το αριστερό μέλος της (i) είναι ευσταθές. Τότε η

$$X_0(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-s)dW(s), \quad (iv)$$

είναι καλά ορισμένη (εκτός ίσως από ένα σύνολο μέτρου μηδενός).

Ακόμα, η (iv): (α) είναι Gaussian διαδικασία

(β) $\mu_{x_0}(t) = 0$

(γ) η συνάρτηση συνδιασποράς

$$r_{x_0}(s,t) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{min(t,s)} h(s-u)h(t-u)du = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(s-u)h(t-u)du$$

δηλαδή είναι μία δεύτερης τάξης ασθενώς στάσιμη στοχαστική διαδικασία με

$$r_{x_0}(t) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(-u)h(t-u)du, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Η γενική λύση της (i), σ'ένα διάστημα, είναι της μορφής

$$X(t) = c_1\Phi_1(t) + \dots + c_n\Phi_n(t) + X_0(t), \quad (v)$$

όπου $c_1, \dots, c_n$ τυχαίες μεταβλητές. Αφού οι $\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t)$ όλες τείνουν στο μηδέν καθώς το $t \to \infty$, έχουμε από την προηγούμενη σχέση

$$\lim_{t\to\infty}\big(X(t) - X_0(t)\big) = 0.$$

(με πιθανότητα 1).

Έστω η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)/t \geq 0\}$ της μορφής (v). Αυτή είναι μία δεύτερης τάξης στάσιμη στοχαστική διαδικασία αν και μόνο αν $c_j = 0, j = 1, \dots, n$. Άρα $X_0(t)$ είναι η μοναδική δεύτερης τάξης ασθενώς στάσιμη στοχαστική διαδικασία που είναι λύση της (i).

4.5 Στοχαστικές Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

Εξετάζουμε τώρα λεπτομερειακά τη στοχαστική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης $(n = 2)$

$$\alpha_0 X''(t) + \alpha_1 X'(t) + \alpha_2 X(t) = W'(t)$$

(β) Εάν $\Delta(r) = a_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 < 0$

Το χαρακστηριστικό πολυώνυμο έχει δύο διαφορετικές μιγαδικές ρίζες:

$$r_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm i\sqrt{\Delta(r)}}{2\alpha_0} = \frac{-\alpha_1 \pm i\sqrt{4\alpha_0\alpha_2 - a_1^2}}{2\alpha_0} = a \pm \beta i.$$

Σ'αυτή τη περίπτωση (χρησιμοποιώντας το (α) και ότι $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)

$$\Phi_1(t) = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t - \frac{a}{\beta}\sin\beta t\right)$$

και

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

(πραγματικές συναρτήσεις, όπου $a = \frac{-\alpha_1}{2\alpha_0}$ και $\beta = \frac{\sqrt{4\alpha_0\alpha_2 - a_1^2}}{2\alpha_0}$).

(γ) Εάν $\Delta(r) = a_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 = 0$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μία πραγματική διπλή ρίζα : $r_1 = \frac{-\alpha_1}{2\alpha_0}$.

Δύο ρίζες της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι οι : $e^{r_1 t}, te^{r_1 t}$.

Εάν $\Phi_1(t) = c_1e^{r_1 t} + c_2te^{r_1 t}$ και $\Phi_1(0) = 1, \Phi_1'(0) = 0$ βρίσκουμε

$$\Phi_1(t) = e^{r_1 t}(1 - r_1 t).$$

Ανάλογα, εάν η λύση $\Phi_2(t)$ ικανοποιεί τις συνθήκες : $\Phi_2(0) = 0, \Phi_2'(0) = 1$, τότε

$\Phi_2(t) = te^{r_1 t}$

Παράδειγμα 4.5.1

Εάν m, f θετικές σταθερές και $V_0, X_0 \in \mathbb{R}$. Η διαδικασία $\{V(t), t \geq 0\}$ που είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$mV'(t) + fV(t) = W'(t), \qquad V(0) = v_0$$

είναι γνωστή σαν **διαδικασία ταχύτητας του Langevin** (Langevin's velocity process).

(α) Εκφράστε την $V(t)$ αναφορικά με τον λευκό θόρυβο $W'(t)$.

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη συνδιασπορά της σ.δ. $V(t)$.

(γ) Η σ.δ. $\{X(t)/t \geq 0\}$, με $X(0) = X_0$, $X'(0) = V_0$ που είναι λύση της σ.δ.ε.

$$mX''(t) + fX'(t) = W'(t), \qquad t \geq 0$$

καλείται **διαδικασία των *Ornstein-Uhlenbeck***. Εκφράστε την *Ornstein-Uhlenbeck* διαδικασία αναφορικά με τον λευκό θόρυβο.

(δ) Εκφράστε την *Ornstein-Uhlenbeck* διαδικασία αναφορικά με την διαδικασία ταχύτητας του *Langevin*.

(ε) Υπολογίστε τη μέση τιμή και διασπορά της διαδικασίας *Ornstein-Uhlenbeck*.

Λύση

(α) Έχουμε :

$$m\big(V(t) - V(0)\big)e^{at} + f\int_0^t V(s)ds = W(t) \Rightarrow V(t) = V(0)e^{at} + \frac{1}{m}\int_0^t e^{a(t-s)}\, dW(s)$$

ή

$$V(t) = v_0 e^{at} + \frac{1}{m}\int_0^t e^{a(t-s)}\, dW(s)$$

όπου $a = -\frac{f}{m}$

(β) Η μέση τιμή είναι ίση με $EV(t) = V_0 e^{at}$ και η συνάρτηση συνδιασποράς:

$$r_V(s,t) = \frac{\sigma^2}{2fm}\left(e^{a|t-s|} - e^{a(s+t)}\right), \; s,t \geq 0$$

(γ) Το χαραστηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης $mX''(t) + fX(t) = 0$ είναι $mr^2 + fr = 0$ με ρίζες $r_1 = 0$ και $r_2 = -\frac{f}{m} = a$

Άρα

$$\Phi_1(t) = \frac{r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}}{r_1 - r_2} = \frac{-a}{-a} = 1$$

και

$$\Phi_2(t) = \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_1 - r_2} = \frac{1 - e^{at}}{-a} = \frac{e^{at} - 1}{a}$$

Η λύση της ομογενούς στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης $mX''(t) + fX(t) = 0$ είναι

$$X_{o\mu.}(t) = c_1\Phi_1(t) + c_2\Phi_2(t) = c_1 + c_2\frac{e^{at}-1}{a} \Rightarrow$$

Εάν $X(0) = c_1 = X_0$ και $X'(t) = c_2 \frac{ae^{at}}{a} \Rightarrow X'(0) = V_0 = c_2$, τότε:

$$X_{o\mu.}(t) = X_0 + V_0 \frac{e^{at} - 1}{a}$$

Η ειδική λύση της μη ομογενούς

$$mX''(t) + fX(t) = W'(t)$$

είναι

$$X_s(t) = \int_0^t h(t-s)dW(s)$$

όπου

$$h(t) = \frac{\Phi_2(t)}{\alpha_0} = \frac{e^{at} - 1}{am}$$

οπότε,

$$X_s(t) = \frac{1}{am}\int_0^t e^{a(t-s)}\, dW(s)$$

Τελικά, η γενική λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης *Ornstein-Uhlenbeck* είναι

$$X(t) = X_0 + V_0 \frac{e^{at} - 1}{a} + \frac{1}{am}\int_0^t e^{a(t-s)} dW(s)$$

(δ) Είναι φανερό ότι

$$X'(t) = V(t)$$

Ολοκληρώνοντας από το μηδέν μέχρι το t παίρνουμε

$$X(t) = X(0) + \int_0^t V(s)ds = X_0 + \int_0^t V(s)ds$$

(ε) Η μέση τιμή της *Ornstein-Uhlenbeck* διαδικασίας είναι

$$\mu_X(t) = X_0 + V_0 \frac{e^{at} - 1}{a}$$

ενώ η διασπορά

$$V\big(X(t)\big) = \sigma^2 \int_0^t h^2(s)ds$$

όπου,

$$h(t) = \frac{\Phi_2(t)}{\alpha_0} = \frac{e^{at} - 1}{am}$$

άρα

$$V\big(X(t)\big) = \frac{\sigma^2}{a^2m^2}\int_0^t (e^{at} - 1)^2 ds = \frac{\sigma^2 m}{2f^3}(4e^{at} - e^{2at} - 2at - 3)$$

Παρατήρηση 4.5.2
Εάν το δεξί μέλος της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:

$$\alpha_0 X''(t) + \alpha_1 X'(t) + \alpha_2 X(t) = W'(t)$$

είναι ευσταθές, τότε η (ασθενώς) στάσιμη στοχαστική διαδικασία $\{X_0(t)\}_{t\in\bar{R}}$ που είναι λύση της, έχει συνάρτηση συνδιασποράς:

$$r_{X_0}(t) = \sigma^2 \int_{t_0}^{t} h(-u)h(t-u)du, \quad t \in R$$

Επειδή όμως

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_2(t)}{\alpha_0}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

έχουμε (και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις), ότι:

$$r_{X_0}(t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha_2\alpha_1}\varphi_2(|t|)$$

Ειδικότερα, η διασπορά της είναι ίση με:

$$V(X_0(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha_2\alpha_1}, \quad t \in R$$

Παράδειγμα 4.5.3
Έστω ότι έχουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$X''(t) + 2X'(t) + 2X(t) = W'(t)$$

(α) Έστω ότι η $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης στο $[0,+\infty)$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $X(0)=0$, $X'(0)=1$. Βρείτε την κατανομή της $X(t)$, όπου t ο πρώτος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $EX(t)=0$.

(β) Έστω $\{X_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ η (ασθενώς) στάσιμη λύση της εξίσωσης στο $(-\infty,+\infty)$. Βρείτε (το πρώτο) t τέτοιο ώστε $X_0(0)$ και $X_0(t)$ είναι ασυσχέτιστες.

Λύση

(α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι ίσο με $r^2+2r+2=0$ με διακρίνουσα $\Delta=4-4*2=-4<0$.

Άρα οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι: $\alpha\pm\beta i=-1\pm i$

Τώρα,

$$\Phi_1(t)=e^{-t}(\cos t+\sin t)$$

$$\Phi_2(t)=e^{-t}\sin t$$

Ακόμα, $h(t)=\Phi_2(t)=e^{-t}\sin t$, $t\geq 0$.

Η μέση τιμή της λύσης $\left(X(t)=\Phi_2(t)+\int_0^t h(t-s)dW(s)\right)$ είναι:

$$EX(t)=\Phi_2(t)=e^{-t}\sin t$$

και η διασπορά της

$$V(t)=\sigma^2\int_0^t h^2(s)ds=\sigma^2\int_0^t e^{-2s}\sin^2 s\,ds=\frac{\sigma^2}{8}\{1+e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t-2)\}$$

Το πρώτο θετικό t τέτοιο ώστε $EX(t)=0$ είναι $t=\pi$.

Άρα, η $X(\pi)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 0 και διασπορά $\frac{\sigma^2}{8}(1-e^{-2\pi})$.

(β) Η συνάρτηση συνδιαποράς της στάσιμης λύσης της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι ίση με

$$r_{X_0}(t)=\frac{\sigma^2}{8}e^{-|t|}(\cos|t|+\sin|t|)$$

Το πρώτο θετικό t για το οποίο οι $X_0(0)$ και $X_0(t)$ είναι ασυσχέτιστες είναι $t=\frac{3\pi}{4}$

γιατί $\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

Βιβλιογραφία

(Α) Ελληνική

1. **Θ. Αρτίκης**, *"Μαθήματα Στοχαστικών Διαδικασιών"*, τεύχος 3, Εκδόσεις Σταμούλης 1991.
2. **Π.-Χ. Γ. Βασιλείου**, *"Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες"*, Εκδόσεις Ζήτη, 1999.
3. **Π.-Χ. Γ. Βασιλείου**, *"Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά"*, Εκδόσεις Ζήτη, 2001.
4. **Δ. Βούκαλη**, *"Ανάλυση Στοχαστικών σημάτων"*, Εκδόσεις Ίων, 1993.
5. **Τ.Ι. Δάρας - Π.Θ. Σύψας**, *"Στοχαστικές Ανελίξεις* – Θεωρία και εφαρμογές", Εκδόσεις Ζήτη, 2003.
6. **Τ.Ι. Δάρας-Π.Θ. Σύψας**, *"Πιθανότητες & Στατιστική – Θεωρία και εφαρμογές"*, Εκδόσεις Ζήτη, 2010.
7. **Θ.Ν. Κάκκουλος**, *"Στοχαστικές Ανελίξεις"*, Β? έκδοση, 1978.
8. **Σ. Καλπαζίδου**, *"Στοιχεία θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων"*, εκδόσεις Ζήτη, 1991.
9. **Σ. Κουνιάς, Χ. Μωυσιάδης**, *"Θεωρία Πιθανοτήτων Ι: Κλασική Πιθανότητα, Μονοδιάστατες κατανομές"*, Εκδόσεις Ζήτη, 1999.
10. **Δ. Κωνσταντινίδης**, *"Θεωρία Στοχαστικών Διαδικασιών, Μέρος Β"*, Εκδόσεις Σταμούλης, 2010.
11. **Ι. Σπηλιώτης**, *"Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά"*, Εκδόσεις Συμεών, 2004.
12. **Ο. Χρυσαφίνου**, "Εισαγωγή στις *Στοχαστικές Ανελίξεις"*, Εκδόσεις Σοφία, 2004.

(Β) Ξενόγλωσση

1. **U.N. Bhat**, *"Elements of Applied Stochastic Processes"* , 2nd ed. (1984), J. Willey.
2. **Z. Brzezniak – T. Zastawniak**, "Basic *Stochastic Processes"*, Springer, 1998.
3. **R. Durett**, *"Essentials of Stochastic Processes"*, Srpinger, 1999.
4. **Hoel, P.- Port, S.- Stone, C.**, *"Introduction to Stochastic Processes"*, Universal book stall, New Delhi,1972.

5. **Hwei Hsu**, *"Probability, random variables and random processes"*, Mc Graw Hill, Schaum's outline series, 1996.

6. **S. Karlin, H.M.Taylor**, *"A first course in Stochastic Processes"*, Academic Press, New York, 1975

7. **M. Lefebvre,** *"Applied Probability and Statistics"*, Springer2006.

8. **T. Mikosch**, *"Elementary Stochastic Calculus"*, World scientific, 1998.

9. **B. Oksendal**, *"Stochastic differential equations"*, Springer-Verlag, 1985.

10. **S. Ross,** *"Probability Models"*, Eighth Edition, Academic Press, an imprint of Elsevier, 2003.

11. **S. Ross,** *"An introduction to the Mathematics of Finance. Options and other topics"*, Cambridge 1999.

12. **U. Wiersema**, "Brownian Motion Calculus", Wiey, 2008.

Δυκτιακοί τόποι

1. http://fem.um.es/Ejs/Ejs_en/Download.html
2. http://cnx.org/content/m14354/1.3/
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_motion
4. http://www.riskglossary.com/link/brownian_motion.htm