ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

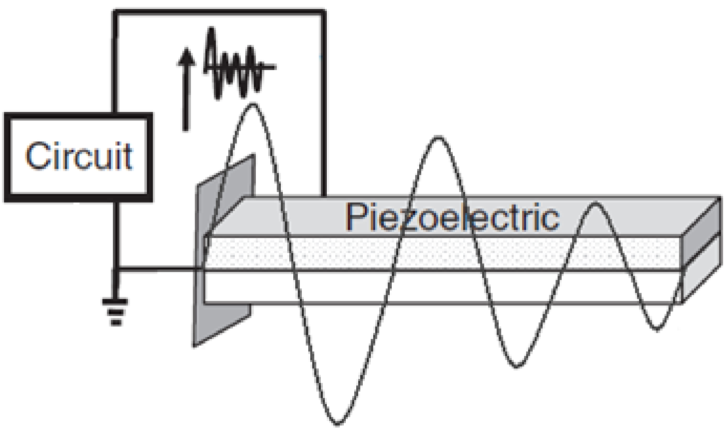
Εργαστήριο Υπολογιστικής Μηχανικής και Βελτιστοποίησης

Προσομοίωση και Έλεγχος Ευφυών Πιεζοηλεκτρικών Κατασκευών με χρήση Σύγχρονων Υπολογιστικών Συστημάτων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΗΛΙΑΣ Κ. ΠΑΠΑΛΑΪΟΣ

ΑΜ: 2009019028   mail: papalaios@gmail.com



ΧΑΝΙΑ 2013

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Εργαστήριο Υπολογιστικής Μηχανικής και Βελτιστοποίησης

Προσομοίωση και Έλεγχος Ευφυών Πιεζοηλεκτρικών Κατασκευών με χρήση Σύγχρονων Υπολογιστικών Συστημάτων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΗΛΙΑΣ Κ. ΠΑΠΑΛΑΪΟΣ

ΑΜ: 2009019028 mail: papalaios@gmail.com

Εξεταστική Επιτροπή:

καθηγητής κος Σταυρουλάκης Γεώργιος (επιβλέπων)

καθηγητής κος Πουλιέζος Αναστάσιος

καθηγητής κος Αντωνιάδης Αριστομένης

ΧΑΝΙΑ 2013

Αφιερώνεται στους γονείς μου
και την αδερφή μου, που με αυταπάρνηση
στηρίζουν κάθε μου βήμα όλα αυτά τα χρόνια.
Εύχομαι να τους μοιάσω.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Παρακάτω θα ήθελα να εκφράσω τις βαθύτερες ευχαριστίες μου σε όλους όσους συνετέλεσαν πρακτικά και ηθικά στην ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών και της συγγραφής της μεταπτυχιακής διατριβής. Είναι μια ανάγκη που δημιουργήθηκε όλα τα χρόνια μελέτης και συνδυασμού εργασίας και συγγραφής.

Καταρχήν, θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα το καθηγητή μου κ. Γεώργιο Σταυρουλάκη για την εμπιστοσύνη του προς το πρόσωπό μου, τη πολύτιμη καθοδήγή του, την αστείρευτη υπομονή του, καθώς και για τις γνώσεις, ευκαιρίες και εμπειρίες που αποκόμισα κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Επίσης, ευχαριστώ τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, καθηγητές κ. Αναστάσιο Πουλιέζο και κ. Αριστομένη Αντωνιάδη, για τη βοήθεια και τη καθοδήγηση που μου προσέφεραν καθώς και για το χρόνο που διέθεσαν, για την ανάγνωση και τη βελτίωση αυτής της διατριβής.

Στη συνέχεια ήθελα να ευχαριστήσω ξεχωριστά το φίλο Ιωάννη Αρβανιτάκη, Υπ. Διδάκτορα του τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχ. & Μηχ. Ηλ. Υπολογιστών του Π.Π., για τις πολύ εποικοδομητικές συζητήσεις μας.

Τέλος, θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στο πατέρα μου Κων/νο τη μητέρα μου Σοφία και την αδερφή μου Ασημένια, για την ανυπολόγιστη στήριξη που μου προσφέρουν καθημερινά.

Οφείλω επίσης να ευχαριστήσω ονομαστικά όλους του καλούς φίλους και συνεργάτες, που η αγάπη τους, η στήριξή τους και η διάθεσή τους, μου έδωσαν δύναμη όταν χρειαζόταν να προχωρήσω και να ολοκληρώσω επιτυχώς τη πορεία που άρχισα το 2009. Δίχως πρόθεση να παραλείψω κανένα, ευχαριστώ τους Μιχάλη Αλ., Γιώργο Παν., Γεώργιο Παν., Αντώνη Τζ., Ταξιάρχη Μπ., Νάντια Μπ., Νικόλαο Λαζ., Βασίλειο Νιτ., Κυριάκο Ορφ., Χαρά Καρ., Μαρίνα Μιχ., Λιλί Λ., Στέλλα Ταμ., Αθηνά Παπ., Σωτήρη Τζ., Μπάμπη Λατ., Ευτυχία Παν., Παναγιώτη Σοφ., Παναγιώτη Μαυ., Δημήτρη Κων., Λάκη Ε., Παναγιώτη Ζ., Νίκο Πατ., Ρίτσα Αντ., Γιώργο Γιαν., Μελίνα Βεκ., Ελευθερία Κ., Γρηγόριο Αλ., Ιωάννη Γιαν..

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στη παρούσα εργασία παρουσιάζεται η χρήση Υπολογιστικών συστημάτων για τη προσομοίωση και τον ενεργό έλεγχο της συμπεριφοράς ευφυών πιεζοηλεκτρικών κατασκευών με σκοπό την εξέταση του φαινομένου και την αυτοματοποίηση των δοκιμών μέσα από το Matlab-SIMULINK

Οι ευφυείς κατασκευές αποτελούνται από έξυπνα υλικά που ενσωματώνουν ιδιότητες αισθητήρων και ενεργοποιητών, καθώς και από ένα σύστημα ενεργού ελέγχου που βοηθάει τη κατασκευή να αντιδράσει αυτόματα και επιθυμητά σε εξωτερικές διεγέρσεις. Εμείς εξετάζουμε τη ταλάντωση πιεζοηλεκτρικής προβόλου δοκού και μέσω ενεργού ελέγχου αποσβένουμε την απόκρισής της σε εξωτερικές φορτίσεις.

Στο πρώτο μέρος αναφερόμαστε συνοπτικά στο θεωρητικό υπόβαθρο των αντικειμένων που πραγματεύεται η εργασία. Κυρίως η μοντελοποίηση πιεζοηλεκτρικής κατασκευής με το λογισμικό COMSOL-Multiphysics και ο ενεργός έλεγχος ευφυών κατασκευών με το λογισμικό MATLAB-SIMULINK.

Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης και του ενεργού ελέγχου σε μοντέλο πιεζοηλεκτρικής προβόλου δοκού.

<u>Προσομοίωση</u>

Αρχικώς έγινε χρήση του λογισμικού πακέτου «COMSOL Multiphysics» (πρώην FEMLAB), για τη μοντελοποίηση, τη προσομοίωση και τη πλήρη ανάλυση παραμορφώσεων και φορτίσεων, σε απλές πιεζοηλεκτρικές κατασκευές.

<u>Έλεγχος</u>

Σε δεύτερο στάδιο, εξάγουμε τα μητρώα μάζας, δυσκαμψίας και απόσβεσης που περιγράφουν μια απλή πιεζοηλεκτρική κατασκευή, μετασχηματίζουμε τις εξισώσεις κίνησης και δημιουργούμε στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab τα μητρώα που περιγράφουν το χώρο κατάστασης αυτής. Στη συνέχεια στο περιβάλλον Matlab/Simulink εξετάζουμε την απόσβεση της ταλάντωσης με χρήση τεσσάρων ειδών ελεγκτών που σχεδιάσαμε. Αναλογικού ολοκληρωτικού διαφορικού ελεγκτή (PID), γραμμικού τετραγωνικού ελεγκτή (LQR), ασαφή ελεγκτή (Fuzzy) και νευροασαφή ελεγκτή (ANFIS). Για τις ανάγκες της εργασίας σχεδιάσαμε αρκετούς ευφυείς (Fuzzy και Anfis) ελεγκτές και τους συγκρίναμε με τους PID και LQR σε καταπονήσεις βηματικής, ημιτονοειδούς και στοχατισκής εισόδου, ενώ στη συνέχεια επιλέξαμε τους καλύτερους και τους παρουσιάζουμε σε καταπόνηση βηματικής εισόδου.

Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης της πιεζοηλεκτρικής δοκού στο COMSOL είναι ενθαρρυντικά διότι σε φόρτιση εξωτερικής μηχανικής δύναμης παράγονται λογικές ηλεκτρικές τάσεις και εμφανίζονται λογικές παραμορφώσεις. Επίσης, η επιβολή ηλεκτρικής τάσης παρήγαγε λογικές παραμορφώσεις και μηχανικές τάσεις αναδεικνύοντας το λογισμικό μια εύχρηστη επιλογή για την εξέταση τέτοιων φαινομένων.

Ύστερα από δοκιμές στο MATLAB-SIMULINK για την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων των PID και LQR ελεγκτών και τον κατάλληλο σχεδιασμό των ευφυών ελεγκτών, τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι αρκετά ικανοποιητικά διότι πετύχαμε ταχεία απόσβεση της ταλάντωσης της δοκού. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των PID και Anfis είναι καλύτερα από αυτά του LQR και του LQR καλύτερα του Fuzzy. Μεταξύ τους είναι όλα τα αποτελέσματα συγκρίσιμα και υπό προϋποθέσεις μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι ευφυείς ελεγκτές μπορούν να αποδώσουν καλύτερα από το κλασικό PID ή τον Βέλτιστου ελέγχου LQR. Βάση των αποτελεσμάτων και συλλογιζόμενοι ότι για το σχεδιασμό των ευφυών ελεγκτών δεν απαιτείται μεγάλη πληροφορία της κατάστασης του συστήματος μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σε ορισμένες εφαρμογές η χρήση των ευφυών ελεγκτών υπερτερεί αυτής των κλασικών. Ιδιαίτερα, αν συνδυαστεί ο σχεδιασμός του ANFIS ή του Fuzzy με βελτιστοποιητικούς αλγορίθμους.

Μελλοντική δουλειά σε μεταγενέστερες εκδόσεις του COMSOL 3.4 μπορεί να αποτελέσει η ένωσή του με το λογισμικό του MATLAB-SIMULINK για αμφίδρομο σχεδιασμό προβλημάτων σύνθετων φυσικών φαινομένων, όπως ο πιεζοηλεκτρισμός και εφαρμογή αυτοματοποιημένης διαδικασίας ενεργού ελέγχου ακόμα και με τη χρήση ευρετικών αλγορίθμων για την επιλογή καλύτερων παραμέτρων ελέγχου και βέλτιστης τοποθέτησης και επιλογής πιεζοηλεκτρικού στοιχείου. Πρώτη προσπάθεια ένωσης θα μπορούσε να αποτελέσει η πλήρης εξαγωγή των μητρών δυσκαμψίας και μάζας από το COMSOL στο περιβάλλον του MATLAB.

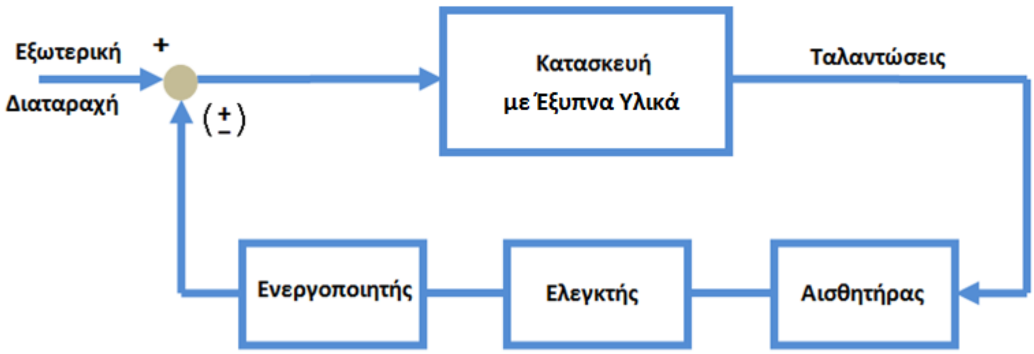
Ο αναγνώστης μπορεί να βρεί αναλυτικά βοηθήματα (tutorial) χρήσης του COMSOL και του Matlab/Simulink για παρόμοια προβλήματα στα παραρτήματα A και D, αντίστοιχα.

1.

Εισαγωγή

Οι κατασκευές που υπόκεινται σε συχνές μικρές εξωτερικές διαταραχές καταπονούνται συνεχώς από μεγάλου εύρους ταλαντώσεις και μεγάλες περιόδους φθίνουσας ταλάντωσης. Στοιχεία που οδηγούν τη κατασκευή σε κόπωση, αστάθεια και κακή λειτουργία.

Η **προσομοίωση** τέτοιων φαινομένων μας βοηθάει να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των κατασκευών μέσα στο χρόνο και η σύνδεση της προσομοίωσης με συστήματα **ενεργού ελέγχου** μας δίνει τη δυνατότητα να **ελαχιστοποιήσουμε αυτές τις δομικές ταλαντώσεις** μέσα από μια διαδικασία αυτοματοποίησης που παρουσιάζεται στο σχήμα:



Μια **έξυπνη κατασκευή** μπορεί να αντιληφθεί τη διέγερση και να παράξει ελεγχόμενη αντίδραση ώστε η διέγερση να ελαχιστοποιηθεί. **Ικανά υλικά** για έξυπνες κατασκευές είναι αυτά που έχουν ενσωματωμένες ιδιότητες ενεργοποιητή και αισθητήρα. Τέτοια υλικά είναι τα υλικά με μνήμη, electrostrictive και magnetostrictive υλικά και τα πιεζοηλεκτρικά. Η ιδιότητα των πιεζοηλεκτρικών υλικών που τα κατατάσσει στα έξυπνα είναι η ικανότητα να εναλλάσσουν την ηλεκτρική και μηχανική ενέργεια. Με τη χρήση τέτοιων υλικών ένα σύστημα ελέγχου επιτρέπει στη κατασκευή να αντιδρά αυτόματα σε εξωτερικές διαταραχές και να καταστέλλει ανεπιθύμητες ή να βελτιώνει επιθυμητές επιδράσεις.

Στόχος της παρούσης εργασίας είναι η διερεύνηση της προσομοίωσης έξυπνων κατασκευών υπό την επίδραση εξωτερικών διαταραχών, δηλαδή η επίλυση προβλημάτων σύνθετων και αλληλεπιδραστικών φυσικών φαινομένων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, καθώς επίσης μας και η δημιουργία αυτοματοποιημένης διαδικασίας δοκιμών ενεργού ελέγχου σε πιεζοηλεκτρικές κατασκευές.

Συγκεκριμένα εξετάστηκε η συμπεριφορά έξυπνης πιεζοηλεκτρικής δοκού λόγω διέγερσης από εξωτερική δύναμη ή ηλεκτρικό δυναμικό και έγινε προσπάθεια απόσβεσης της προκαλούμενης ταλάντωσης μέσω συστημάτων ελέγχου.

Πιεζοηλεκτρικά υλικά με ικανοποιητική σύνδεση ηλεκτρικών και μηχανικών πεδίων είναι τα PZT και τα PVDF. Το PZT έχει μεγαλύτερο συντελεστή σύνδεσης, αλλά το PVDF είναι πιο ανθεκτικό σε καταπονήσεις. Σε αυτή την εργασία χρησιμοποιείται το PZT.

Οι στρατηγικές ελέγχου που εξετάζονται στην εργασία είναι ο PID (Αναλογικός Ολοκληρωτικός Διαφορικός), ο LQ (Γραμμικός Τετραγωνικός) ελεγκτής, ο Ασαφής Ελεγκτής , αλλά και ο πιο μοντέρνος ελεγκτής ο ANFIS (Προσαρμοστικός ΝευροΑσαφής).

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Για τη προσομοίωση και τον έλεγχο της συμπεριφοράς μιας έξυπνης κατασκευής χρειάζεται να επιλυθούν τρία προβλήματα: η Μοντελοποίηση ή παραμετροποίηση της Κατασκευής, η τοποθέτηση των ενεργοποιητών και αισθητήρων και ο σχεδιασμός του ελέγχου. Σε αυτή τη κατεύθυνση έχουν αναπτυχθεί και ορισμένα εμπορικά υπολογιστικά εργαλεία που με τη κατάλληλη (άμεση-έμμεση) σύνδεσή τους εξάγονται σε λίγο χρόνο αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Η τοποθέτηση των ενεργοποιητών και αισθητήρων είναι μια σημαντική παράμετρος σχεδιασμού έξυπνων κατασκευών και έχει απασχολήσει διάφορους ερευνητές, όπως Peng et al. [1], Wang et. al. [2], Kumar et al. [3], Fahroo et al. [4].

Για τον καθορισμό της βέλτιστης τοποθέτησης πιεζοηλεκτρικών ενεργοποιητών και αισθητήρων σε μια έξυπνη κατασκευή μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλά μέτρα ιδιομορφικής ευαισθησίας ή ελέγχου, όπως Igusa et al.[5], Hamidi et al. [6]. Εν γένει, έχει δειχθεί ότι θα πρέπει να τοποθετούνται σε θέσεις όπου η ενεργοποίηση ή η αίσθηση δομικών ταλαντώσεων θα δίνει αμεσότερα αποτελέσματα και αυτό σε μια κατασκευή συμβαίνει εκεί όπου υπάρχει υψηλή εντατική κατάσταση, Clark et al. [7].

Η μοντελοποίηση πιεζοηλεκτρικών κατασκευών με ελάσματα (laminar piezoelectric construction) έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές.

Οι Crawley και de Luis [8] και οι Crawley και Anderson [9] πρότειναν ένα αναλυτικό μοντέλο για τμηματικούς (Segmented) πιεζοηλεκτρικούς ενεργοποιητές (piezoelectric actuators). Το μοντέλο συνίσταται από μια δοκό σύμφωνα με τις εξισώσεις Bernouli-Euler και αποτελείται από επιφανειακούς ή ενσωματωμένους στη κατασκευή πιεζοηλεκτρικούς ενεργοποιητές. Η πρότασή τους είναι ότι ο πιεζοηλεκτρικός ενεργοποιητής μπορεί να αντικατασταθεί από μια ισοδύναμη εφελκυστική δύναμη (tensile force) και μια καμπτική ροπή (bending force). Τα αποτελέσματα επαληθεύθηκαν με μια μονόπακτη δοκό (cantilever beam) ενεργοποιούμενη από ηλεκτρικό δυναμικό δια μέσου του pizoactuator. Το παραπάνω μοντέλο επεκτάθηκε από τους Crawley και Lazarus [67] για ισοτροπικές και ανισοτροπικές πλάκες. Εδώ ο ενεργοποιητής αντικαθίσταται από δυνάμεις και ροπές κάμψης που εξάγονται από τη θεωρία πλακών Kirchhoff-Love. Οι Dimitriadis et al.[10] εργάστηκαν παρόμοια με τους Crawley και Lazarus για τη μοντελοποίηση δισδιάστατων patches συνδεδεμένων στην επιφάνεια των κατασκευών ώστε να εξάγουν τις ισοδύναμες εξισώσεις του ενεργοποιητή και να τις εφαρμόσουν στη δόνηση ορθογώνιας πλάκας. Παρόμοια με τις εξισώσεις των ενεργοποιητών μπορούν να εξαχθούν και οι εξισώσεις των αισθητήρων λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση της επιμήκυνσης και της κύρτωσης του αισθητήρα στη τάση που εμφανίζεται στα άκρα του πιεζοηλεκτρικού μέσου. Οι Lee et al. [11] εξέφρασαν τη γενική διατύπωση για ανισοτροπικές ελασματοποιημένες κατασκευές βάση της Kirchhoff-Love υπόθεσης. Οι Park και Choppa [12] μοντελοποίησαν πιεζοενεργοποιητές σε δοκούς σε στρέψη.

Οι Bandyopadhyay et al. [13] προτυποποιούν πιεζοηλεκτρικές ελασματοποιημένες κατασκευές που περιλαμβάνουν και αλλαγή στις δομικές ιδιότητες της κατασκευής λόγω πιεζοηλεκτρικών κομματιών, σε επέκταση της συνήθους υπόθεσης πως τα λεπτά πιεζοηλεκτρικά επιθέματα δεν αλλάζουν τη μάζα και τις ιδιότητες ακαμψίας της αρχικής κατασκευής. Ο Stavroulakis et al. [14] επικεντρώνεται σε γραμμικές και μη-γραμμικές ταλαντώσεις των πλακών. Όταν οι διαστάσεις των επιθεμάτων είναι αρκετά μικρές σχετικά με αυτές τις κύριας κατασκευής αυτές οι μέθοδοι μοντελοποίησης θα ήταν χρήσιμες για την απόκτηση ενός πιο ακριβούς προτύπου των κατασκευών, Foutsitzi et al. [15], Miara et al. [16], Foutsitzi et al. [17].

Οι εξισώσεις κίνησης των κατασκευών μπορούν να λυθούν με ιδιομορφική ανάλυση, ανάλυση Rayleigh-Ritz, ανάλυση υποθετικών ιδιομορφών και πεπερασμένων στοιχείων Kim et al. [18], Chin et al. [19]. Για μια κατασκευή όμως με μη ομοιόμορφες δομικές ιδιότητες η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων ίσως είναι αναγκαία για την απόκτηση του προτύπου του συστήματος.

Συχνά, η **μελέτη φυσικών συστημάτων** περιγράφεται από μερικές διαφορικές εξισώσεις που δε μπορούν ή είναι αρκετά δύσκολο να επιλυθούν αναλυτικά και έτσι χρησιμοποιούνται **αριθμητικές μέθοδοι**. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (**FEM**) συνήθως αναδεικνύεται ως η πιο επαρκής.

Οι Allik και Hughes [20] πρότειναν ένα τετραεδρικό στοιχείο όγκου βασισμένο στην αρχή του Hamilton και τις κατασταστικές εξισώσεις του πιεζοηλεκτρικού μέσου. Το στοιχείο έχει 4 κόμβους και 4 βαθμούς ελευθερίας (DOFs). O Lerch [21] ανέπτυξε μια γενική διατύπωση τις πιεζοηλεκτρικής σύζευξης (coupling) για δύο και τριών διαστάσεων μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία. Οι Moetakef et al [22] πρότειναν ένα ανώτερης τάξης τετράεδρο στοιχείο αποτελούμενο από 10 linear strain στοιχεία και 20 quadratic strain στοιχεία. Τα Brick στοιχεία που πρότειναν, αποκτώνται συναθροίζοντας τετράεδρα χρησιμοποιώντας πύκνωση Guyan στους εσωτερικούς κόμβους με σκοπό τη μείωση των βαθμών ελευθερίας.

Παρόμοιες δουλειές στη δημιουργία πεπερασμένων στοιχείων έχουν πραγματοποιηθεί από πολλούς ερευνητές όπως είναι οι Ha et al. [23], Rao & Sunar [24], Hwang & Park [68], Tzou & Ye [25], Suleman & Venkayya [26] , Suleman & Goncalves [27], Lee & Saravanos [28], Chattopadhyay et al. [29], Zhou et al. [30] κ.ά.

Οι Chen et al [31] χρησιμοποίησαν ένα ισοπαραμετρικό στοιχείο κάμψης για να μοντελοποιήσουν μια δίμορφη δοκό και να σχεδιάσουν τον έλεγχο της ταλάντωσης.

Οι Stavroulakis Foutsitzi [32] kai Arvantitis [33] ανάπτυξαν ένα μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων με δύο βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο. Εν συνεχεία, με τη βοήθεια τεχνικών ελέγχου, όπως H_2 και $H\infty$, κατέστειλαν τις ταλαντώσεις των έξυπνων κατασκευών με πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών για τη μοντελοποίηση και τον έλεγχο έξυπνων κατασκευών από δοκούς έχει εστιαστεί γύρω από δύο βασικές θεωρίες. Τη θεωρία δοκού **Euler-Bernoulli** (κλασσική θεωρία) και τη θεωρία δοκού **Timoshenko**.

Συνοπτικά, η κλασική θεωρία δέχεται ότι πριν και μετά τη κάμψη, η διατομή της δοκού παραμένει επίπεδη και κάθετη στον ουδέτερο άξονά της. Δηλαδή αμελούνται οι διατμητικές δυνάμεις και η αξονική μετατόπιση. Στη θεωρία Timoshenko οι διατομές παραμένουν επίπεδες αλλά δεν παραμένουν και κάθετες με τον ουδέτερο άξονα. Αποτέλεσμα αυτού είναι η δυνατότητα υπολογισμού της διατμητικής παραμόρφωσης.

Ο Culshaw [34] αναφέρθηκε στην έννοια της έξυπνης κατασκευής, τα οφέλη και τις εφαρμογές τους. Οι Rao και Sunar [35] εξήγησαν τη χρήση των πιεζοϋλικών ως αισθητήρες και ενεργοποιητές στην καταστολή ταλάντωσης των έξυπνων κατασκευών. Οι Hubbard και Baily [36] μελέτησαν την εφαρμογή των πιεζοηλεκτρικών υλικών όπως αισθητήρες /ενεργοποιητές για τις ευέλικτες κατασκευές. Ο Hanagud et al [37], ανέπτυξε ένα μοντέλο πεπερασμένου στοιχείου για μια δοκό με πολλούς κατανεμημένους πιεζοηλεκτρικούς αισθητήρες /ενεργοποιητές. Οι Brennan et al. [38] πειραματίστηκαν με διαφορετικές τεχνολογίες ενεργοποιητών επί δοκού. Οι Yang και Lee [39] μελέτησαν τη βελτιστοποίηση του οφέλους ανατροφοδότησης στο σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου για κατασκευές. Ο Shiang Lee [40] επινόησε μια νέα μορφή ελέγχου για τον έλεγχο των ταλαντώσεων έξυπνων κατασκευών χρησιμοποιώντας νευρωνικά δίκτυα. Μια θεωρία παθητικού ελέγχου για τις έξυπνες κατασκευές αναπτύχθηκε από τους Gosavi και Kelkar [41]. Οι Gabbert et al.[42] , επινόησαν ένα σχέδιο βέλτιστου LQ ελέγχου για την καταστολή των ταλαντώσεων μιας προβόλου (μονοπακτωμένης) δοκού. Οι Liam et al. προσομοίωσαν πεπερασμένο στοιχείο έξυπνων κατασκευών χρησιμοποιώντας ελεγκτή ανατροφοδότησης βέλτιστης εκροής για τον έλεγχο ταλαντώσεων και θορύβου. Οι Aldraihem et al. [43] ανέπτυξαν ένα μοντέλο ελασματοποιημένης δοκού, χρησιμοποιώντας δύο θεωρίες, την Euler-Bernoulli και τη Timoshenko. Χρησιμοποιώντας μια υψηλής ανάλυσης θεωρία παραμόρφωσης, οι Chandrashekara και Varadarajan [44] παρουσίασαν ένα μοντέλο πεπερασμένου στοιχείου μιας σύνθετης κατασκευής για να παρουσιάσουν μια επιθυμητή απόκλιση, σε αμφιέριστες και μονόπακτες δοκούς. Οι Aldraihem και Khedir [45] βασιζόμενοι στη θεωρία δοκού Timoshenko και θεωρία δοκού υψηλότερης ανάλυσης, πρότειναν αναλυτικά μοντέλα και ακριβείς λύσεις για δικούς με απλούς και εκτεταμένους πιεζοηλεκτρικούς ενεργοποιητές. Οι Robin Scott et al. [46] εφήρμοσαν πολυμεταβλητό έλεγχο ευρωστίας μιας έξυπνης αμφίπακτης δοκού. Οι Zhang και Sun [47] διατύπωσαν ένα αναλυτικό μοντέλο μιας δοκού με διατμητικό πιεζοηλεκτρικό ενεργοποιητή σε όλο το μήκος της δοκού. Το αποτέλεσμα του μοντέλου απλοποιήθηκε υποθέτοντας ότι τα επιφανειακά στρώματα ακολουθούν τη θεωρία δοκού Euler-Bernoulli, ενώ το στρώμα πυρήνα ακολουθεί τη θεωρία δοκού Timoshenko. Οι Murali et al. [48] παρουσίασαν μια μέθοδο αναφοράς μοντέλου για τον έλεγχο ταλαντώσεων σε ευέλικτες έξυπνες κατασκευές. Οι Thomas και Abbas [49] εξήγησαν κάποιες τεχνικές εφαρμογής μεθόδων πεπερασμένου στοιχείου για δυναμική ανάλυση των δοκών Timoshenko. Για να προτυποποιήσουν μια έξυπνη δοκό με διατμητικά πιεζοηλεκτρικά στοιχεία οι Benjeddou et al [50] χρησιμοποίησαν μια προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων. Οι Raja et al. [51] επέκτειναν το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων της ερευνητικής ομάδας Benjeddou ώστε να συμπεριλαμβάνει στρατηγικές ελέγχου. Οι Kosmataka και Friedman [52] παρουσίασαν ένα εξελιγμένο μοντέλο Timoshenko δύο κόμβων που ενσωματώνει την αξονική παραμόρφωση και αξονική διάτμηση. Η ακαμψία των έξυπνων σύνθετων πιεζοηλεκτρικών δοκών μελετήθηκε από τους Waisman και Abramovich [53] ενώ οι Abramovich και Lishvits [54] ασχολήθηκαν με τον έλεγχο ταλάντωσης των έξυπνων κατασκευών. Οι ερευνητές Symans και Konstantinou [55] ασχολήθηκαν με τον ενεργό έλεγχο στις αντισεισμικές κατασκευές. Ο ερευνητής Zacharenakis [56, 57, 58] έχει αναπτύξει καινοτομίες στον έλεγχο ταλάντωσης δομικών έργων, ενώ οι ερευνητές Manolis, Bisbos και Baniotopoulos [59,60,61] αποτελούν τους πρώτους Έλληνες που ασχολήθηκαν με τον ενεργό έλεγχο κατασκευών.

Για περισσότερες αναφορές του πιεζοηλεκτρισμού σε εφαρμογές ενεργού ημι-ενεργού και παθητικού ελέγχου, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στους Fisco και Adeli [62], Fisco και Adeli [63] και στον H. Irschik [153].

Αυξανόμενο είναι το ενδιαφέρον για τη χρήση ή τη δημιουργία υπολογιστικών εργαλείων και τη σύνδεση διαφορετικών υπολογιστικών εργαλείων για τη μοντελοποίηση, επίλυση και έλεγχο της απόκρισης ευφυών κατασκευών.

Οι Reaves και Horta [64] εξέτασαν τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης από εμπορικά πακέτα ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, MSC/NASTRAN και ANSYS . Τα αποτελέσματα ήταν αρκετά ικανοποιητικά ειδικά για αυτά της συνολικής μετατόπισης. Οι Gabbert et al [42] μοντελοποίησαν την έξυπνη κατασκευή με το πακέτο πεπερασμένων στοιχείων COSAR και μέσω ταυτόχρονης σύνδεσης με το MATLAB/Simulink επετεύχθη και ο βέλτιστος έλεγχος LQ τη κατασκευής. Οι Vaculin και Heckmann [65] χρησιμοποιούν και εξελίσσουν το προσομοιοτικό εργαλείο SIMPACK των Kortum et al [66] και ταυτόχρονα το συνδέουν με το πακέτο MATLAB/Simulink ώστε να ελέγξουν την απόκριση της διαταραχής ορθογώνιου μεταλλικού φύλλου και να βελτιστοποιήσουν τη θέση του αισθητήρα.

2.

Βασική Θεωρία

2.1 Ελαστικότητα

2.1.1 Βασικές Αρχές Ελαστικότητας

Η θεωρία της ελαστικότητας είναι ο κλάδος της μηχανικής που εκφράζει με μαθηματικές εξισώσεις τα φαινόμενα που πραγματεύεται η μηχανική του απαραμόφωτου σώματος. Στα προβλήματα αυτά τα υλικά παρουσιάζουν ίδια συμπεριφορά σε εφελκυσμό και θλίψη και δεν εμφανίζονται παραμένουσες παραμορφώσεις μετά την απομάκρυνση της διεγείρουσας δύναμης.

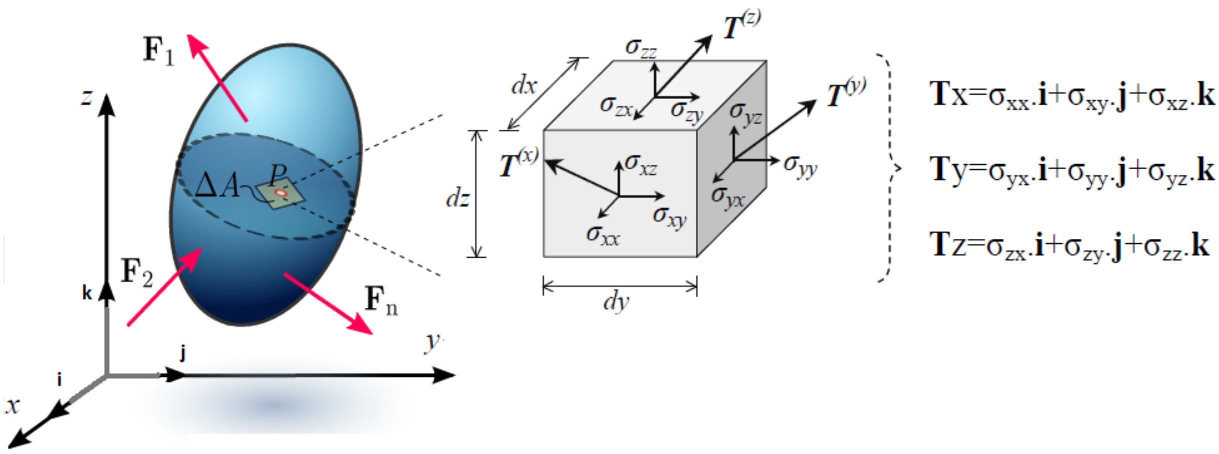
Κλασικά βιβλία της θεωρίας ελαστικότητας αποτελούν των Love A.E.H [69], Timoshenko και Goodier [70], Muskhelishvili, N.I. [71], Sokolnikoff, I.S [72] κ.ά.

2.1.2 Δυνάμεις - Τάσεις

Δύναμη είναι το φυσικό διανυσματικό μέγεθος που εκφράζει το αίτιο που προκαλεί τη μεταβολή της κίνησης ή την παραμόρφωση ενός σώματος συγκεκριμένης μάζας. Εκφράζεται από τη σχέση **F**=m * **a** **,** δηλαδή ισούται με το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την επιτάχυνση του σώματος και στο S.I. μετριέται σε [N=Kg *m /s^2].

Σε σώμα που ισορροπεί με τη βοήθεια εξωτερικών δυνάμεων, υπάρχει εξορισμού μια κατανομή εσωτερικών δυνάμεων στο εσωτερικό του. Αν θεωρήσουμε μια τομή του σώματος, τότε σε στοιχειώδη επιφάνεια dA θα ασκείται στοιχειώδη δύναμη **dF**.

Τάση (stress) ορίζεται ως η ένταση των εσωτερικών δυνάμεων στην τομή, δηλαδή η εσωτερική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας και διαχωρίζεται σε ορθή και διατμητική ανάλογα με τη μορφή της δύναμης στην επιφάνεια. Εκφράζεται από τη σχέση **T**=**dF**/dA και στο S.I. μετριέται σε [Pa = N /m^2]



Εικόνα 2.1.1: Επίπεδη τομή ελαστικού σώματος και τρισδιάστατο στοιχείο τάσης.

Τα μεγέθη σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} ονομάζονται ορθές τάσεις διότι δρουν κάθετα στις έδρες x,y,z που ορίσαμε προηγουμένως. Τα μεγέθη σ_{xy},σ_{yz},σ_{zx},σ_{xz},σ_{yx},σ_{zy} ονομάζονται διατμητικές τάσεις και δρουν στα επίπεδα των εδρών x,y,z.

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$, όπου

$$\sigma_x=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta N_x}{\Delta A}=\frac{dN_x}{dA} \qquad \tau_{xy}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta Q_{xy}}{\Delta A}=\frac{dQ_{xy}}{dA} \qquad \tau_{xz}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta Q_{xz}}{\Delta A}=\frac{dQ_{xz}}{dA}$$

Επίσης, ισχύουν από ισορροπία ροπών στο στοιχείο τάσης οι παρακάτω σχέσεις [73]:

$\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{xz}=\tau_{zx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ που συνεπάγονται ότι πίνακας είναι συμμετρ$[\sigma]-[\sigma]^T$

Εν γένει οι τάσεις θα πρέπει μαζί με τις μαζικές δυνάμεις να ισορροπούν και αν υπάρχει κίνηση να ικανοποιούνται και οι εξισώσεις κίνησης.

$\dfrac{\partial\sigma_{ix}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{iy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_{iz}}{\partial z}+b_i=\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (εξ. ισορροπίας), όπου ρ η πυκνότητα και u η μετατόπιση κατά x,y ή z ανάλογα το i. Επίσης, σε περίπτωση μη επιταχυνόμενης κίνησης ο παράγοντας $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ =0.

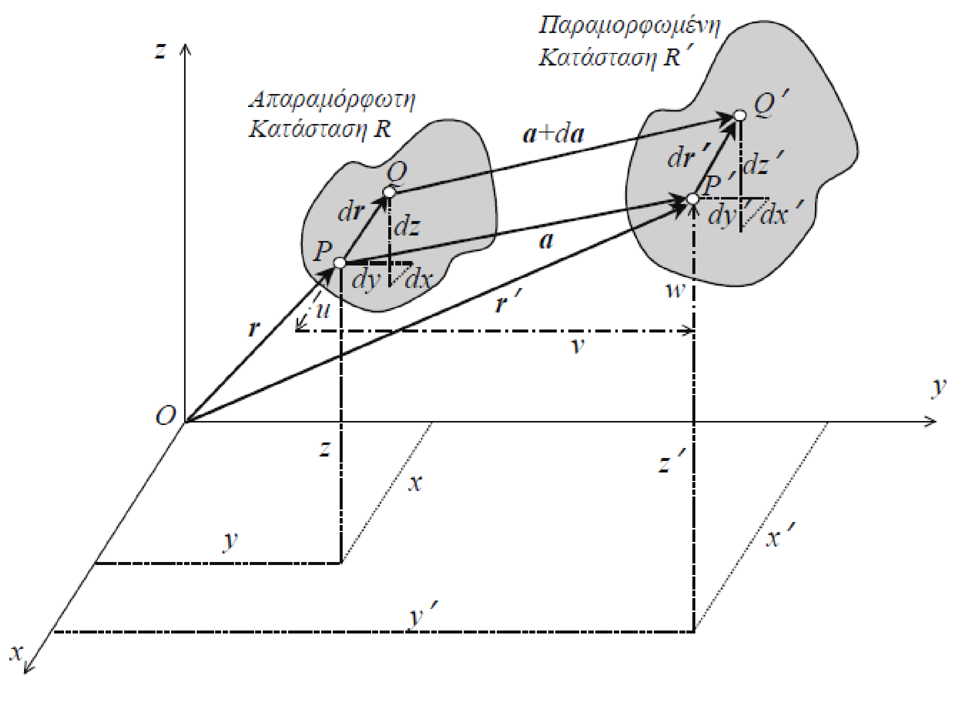
2.1.3 Παραμορφώσεις - Τροπές

Ελαστικό σώμα υποβαλλόμενο σε εξωτερικές φορτίσεις παραμορφώνεται ή μετακινείται. Ως παραμόρφωση ορίζεται η σχετική μετατόπιση μεταξύ γειτονικών υλικών σημείων του σώματος και ευθύνεται για την αναπτυσσόμενη εντατική κατάσταση στο σώμα.

Για να περιγραφεί η παραμορφωσιμότητα ενός σώματος χρειαζόμαστε ένα αδιάστατο μέγεθος ανεξάρτητο της αρχικής διάστασης του σώματος. Το μέγεθος αυτό ονομάζεται **τροπή [ε]** (strain) (ή ανηγμένη παραμόρφωση).

Για να προσδιορίσουμε τη τροπή κάνουμε χρήση της θεωρίας πεπερασμένων μετατοπίσεων και έτσι μπορούμε να περιγράψουμε τη μετατόπιση με δύο διαφορετικές θεωρίες, την Lagrange και Euler, Παπαδάκης [74]. Στη διατύπωση Lagrange οι υλικές συντεταγμένες, δηλαδή οι συντεταγμένες που περιγράφουν τη θέση του σώματος πριν την παραμόρφωση, αποτελούν τις συντεταγμένες αναφοράς. Στη διατύπωση Euler οι χωρικές συντεταγμένες, δηλαδή οι συντεταγμένες που παρακολουθούν την παραμόρφωση του σώματος, αποτελούν τις συντεταγμένες αναφοράς.

Αν το ελαστικό σώμα προ παραμόρφωσης βρίσκεται στο σημείο P(x, y,z), θεωρούμε ότι μετά τη παραμόρφωση θα καταλάβει κάποια θέση P′(x′, y′,z′).



Εικόνα 2.1.2: Παραμόρφωση τρισδιάστατου ελαστικού σώματος

Όπου $x' = x + u$, $y' = y + v$, $z' = z + w$, και μπορούν να βρεθούν και ως u=u_x , v=u_y , w=u_z.

Οι τροπές σε μητρωϊκή μορφή παρουσιάζονται ως:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Τα μεγέθη ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} ονομάζονται ορθές τροπές διότι εκφράζουν παραμόρφωση εφελκυσμού (+) ή θλίψης (-). Γεωμετρική ερμηνεία της ορθής τροπής είναι η ανά μονάδα μέτρου επιμήκυνση ή βράχυνση του σώματος. Τα μεγέθη ε_{xy},ε_{yz},ε_{zx},ε_{xz},ε_{yx},ε_{zy} ονομάζονται διατμητικές τροπές και εκφράζουν παραμόρφωση γωνίας στο επίπεδο που δηλώνουν οι δείκτες , δηλαδή τις μεταβολές της ορθής γωνίας που σχηματίζουν μεταξύ τους τα απειροστά τμήματα (dx,dy) , (dx,dz) , (dy , dz).

Εν κατακλείδι, οι τροπές υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_{\chi} = \frac{\vartheta u}{\vartheta \chi} \quad \varepsilon_{y} = \frac{\vartheta v}{\vartheta y} \quad \varepsilon_{z} = \frac{\vartheta w}{\vartheta z} \quad \gamma_{xy} = \frac{\vartheta u}{\vartheta y} + \frac{\vartheta v}{\vartheta x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\vartheta v}{\vartheta z} + \frac{\vartheta w}{\vartheta y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\vartheta w}{\vartheta x} + \frac{\vartheta u}{\vartheta z}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της διατμητικής τάσης έχουμε: $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, όπου I,j=x,y,z.

Για να καταφέρουμε να μεταβούμε από το πεδίο των τροπών στο πεδίο των παραμορφώσεων θα πρέπει οι τροπές να υπακούουν σε ορισμένες εξισώσεις περιορισμών που αποτελούν τη διατύπωση της συνθήκης συνέχειες του παραμορφώσιμου σώματος. Εκφράζονται από τη σχέση: $\frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_j}{\partial i^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial i \partial j}$ (εξ. συμβιβαστού παραμορφώσεων), όπου i,j είναι xy, yz, zx,

ή αναλυτικότερα:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$$

2.1.4 Καταστατικές Εξισώσεις Ελαστικών Υλικών – Νόμος του HOOKE

Για την επίλυση των προβλημάτων ελαστικότητας, εκτός των παραπάνω εξισώσεων απαιτείται να ληφθεί υπόψη και ο καταστατικός νόμος συμπεριφοράς του υλικού σώματος, ο οποίος συσχετίζει τις τάσεις με τις τροπές. Ο απλούστερος νόμος είναι ο νόμος του Hooke.

Νόμος του Hooke σε μια διάσταση

Η παραμόρφωση ενός σώματος κατά μια διεύθυνση είναι ανάλογη της δύναμης που ασκείται σε αυτή τη διεύθυνση : F=K*Δl, όπου K είναι ο συντελεστής ακαμψίας (δυσκαμψίας). Συγκεκριμένα, για μια πρισματκή ράβδο το K είναι EA/L , όπου E (ή Y) ονομάζεται το μέτρο ελαστικότητας του Young [Pa], A είναι η επιφάνεια της διατομής [m^2] και L το μήκος της ράβδου[m]. Από τα προηγούμενα εξάγουμε τη σχέση σ=E*ε με $E \geq 0$. Αντίστοιχα μπορούμε να εξαγάγουμε τη σχέση μεταξύ διατμητικής τάσης και τροπής στη περιοχή μέχρι το όριο αναλογίας: τ=G*γ , όπου G το μέτρο διάτμησης και αποδεικνύεται ότι $G = E/(2(1+\nu))$. Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι λόγω αλλαγής της θερμοκρασίας παρατηρούνται επίσης τροπές και τάσεις. Η σχέση σε αυτή τη περίπτωση γίνεται :
σ=E*(ε-α*ΔT), όπου α ο συντελεστής θερμικής διαστολής [1/^{o}C].

Λόγος του Poisson

Αν θεωρήσουμε αξονικό εφελκυσμό, η επιμήκυνση του στοιχείου συνοδεύεται από μείωση της διατομής του. Σε στοιχειώδες τμήμα dxdydz ενός στοιχείου σε μονοαξονικό εφελκυσμό, με επιβολή της ορθής τάσης σ_{xx} έχουμε μια επιμήκυνση της πλευράς dx κατά du_x που δίνει την αξονική τροπή $\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx}$, ενώ στις άλλες πλευρές δίνονται οι τροπές $\varepsilon_{yy} = \frac{du_y}{dy}, \varepsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz}$.

Ο αρνητικός λόγος της απολύτου τιμής της πλευρικής προς την αξονική τροπή σε μονοαξονική φόρτιση ονομάζεται **λόγος του Poisson :** $\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$, με $-1 \leq \nu \leq 0.5$. Όταν $\nu \leq 0$, σημαίνει ότι κατά τον εφελκυσμό ενός στοιχείου έχουμε αύξηση στη διατομή του, ενώ ν=0.5 σημαίνει πρακτικά ότι το υλικό είναι ασυμπίεστο, [73].

Εν κατακλείδι, οι τροπές συνδέονται με τις τάσεις ως : $\varepsilon_{\chi\chi} = \frac{\sigma_{\chi\chi}}{\mathrm{E}}, \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu\sigma_{\chi\chi}}{\mathrm{E}}$

Νόμος του Hooke σε τρεις διαστάσεις – Πολυαξονική φόρτιση

Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων πρέπει να συσχετίσουμε, συνήθως με την αρχή τη επαλληλίας όλες τις συνιστώσες των τάσεων και τροπών.

Στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής θεωρίας απειροστών παραμορφώσεων ο γενικευμένος νόμος του Hooke λαμβάνει υπό το συμβολισμό Einstein τη μορφή :

$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \times \varepsilon_{kl} - \alpha \mathrm{E} \Delta \mathrm{T} \delta_{ij}$, με $\varepsilon_{ij} = D_{ijkl} \times \sigma_{kl} + a \Delta \mathrm{T} \delta_{ij}$, όπου I,j = x,y,z και k,l = 1,2,3 ,

Τα D και C δίδονται από τις σχέσεις:

$$D_{ijkl} = \frac{1+v}{2E}\left[-\frac{2v}{1+v}\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right], \quad C_{ijkl} = \frac{E}{2(1+v)}\left[\frac{2v}{1-2v}\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right]$$

ενώ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ \alpha v \ i = j \\ 0 \ \alpha v \ i \neq j \end{cases}$, το δέλτα του Kronecker.

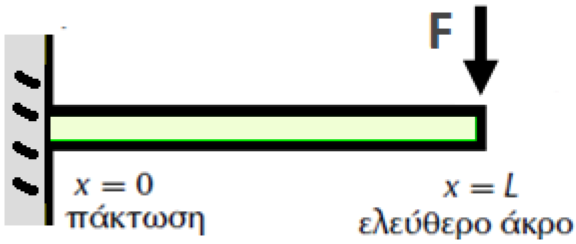
Συμβολισμός Einstein: $C_{ijkl} \times \varepsilon_{kl} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

2.2 Συνοπτική Θεωρία Προβόλου Δοκού (Cantilever Beam)

2.2.1 Εισαγωγή

Η **δοκός** είναι ένας επιμήκης ευθύγραμμος φορέας, δηλαδή ένα στοιχείο με μεγάλο μήκος σε σχέση με το πλάτος και το ύψος του, που μπορεί και παραλαμβάνει ή/και μεταφέρει δυνάμεις. Στη δοκό εφαρμόζονται ροπές και δυνάμεις που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που βρίσκεται και ο διαμήκης άξονάς της. Υπόκειται δηλαδή και/ή μόνο σε κάμψη, επομένως ο άξονάς της παραμορφώνεται σε μια καμπύλη.

Η **δοκός πρόβολος** (cantilever beam) ή μονοπακτωμένη δοκός, έχει το χαρακτηριστικό ότι στηρίζεται μόνο στο ένα άκρο της με τρόπο ώστε ο άξονάς της να μη μπορεί να περιστραφεί γύρω από αυτό το σημείο (πάκτωση), ενώ το άλλο άκρο είναι ελεύθερο να κινηθεί. Η αντίδραση της στήριξης στη δοκό είναι μια κατακόρυφη δύναμη και μια ροπή που δρούν στο επίπεδο των εφαρμοσμένων φορτίων.



Οι δοκοί χρησιμοποιούνται για να αναλύσουν τη δομική συμπεριφορά, υπολογισμός στατικών και δυναμικών χαρακτηριστικών, γραμμικών φορέων. Το κύριο πλεονέκτημά τους είναι ότι μειώνουν τα 3-D προβλήματα σε ένα σετ μεταβλητών που εξαρτώνται μόνο από τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου (x-συντεταγμένη). Τα 1-D δομικά στοιχεία που αποκτώνται έτσι είναι απλούστερα και υπολογιστικά αποδοτικότερα από τα 2-D (πλάκες, κελύφη) και τα 3-D (στερεά) στοιχεία.

Για τη μοντελοποίηση και επίλυση της συμπεριφοράς της δοκού οι βασικές θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί είναι η κλασική Τεχνική Θεωρία και η γενική Θεωρία της Ελαστικότητας, με τις παραλλαγές τους.

2.2.2 Συνοπτική Ιστορική Αναδρομή

Η συνήθως χρησιμοποιούμενη είναι η κλασική θεωρία και ειδικότερα αυτές που αναπτύχθηκαν από τους Euler-Bernoulli [154] , de Saint-Venant [155], [156] και Timoshenko [157], [158]. Οι πρώτες δύο αγνοούν τις διατμητικές παραμορφώσεις, ενώ το μοντέλο του Timoshenko θεωρεί ομοιόμορφη κατανομή διατμητικής παραμόρφωσης κατά μήκος της διατομής της δοκού ενώ δεν ισχύει η παραδοχή Bernoulli (ότι οι επίπεδες αρχικά κάθετες διατομές στο άξονα της δοκού παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο ουδέτερο άξονα της δοκού). Στο μοντέλο του Timoshenko η παραδοχή είναι πως οι αρχικά κάθετες επίπεδες διατομές στο άξονα της δοκού παραμένουν μεν επίπεδες αλλά όχι αναγκαστικά κάθετες στον παραμορφωμένο ουδέτερο άξονα της δοκού. Μια αναλυτική σύγκριση των δύο θεωριών έχει επιμεληθεί ο Mucichescu [159]. Ωστόσο καμία από τις παραπάνω θεωρίες δε μπορεί να εντοπίσει φαινόμενα όπως στρέβλωση, σύζευξη κάμψης και στρέψης ή τοπικές συνοριακές συνθήκες αλλαγής γεωμετρίας ή φορτίου.

Για να ξεπεραστούν οι παραπάνω περιορισμοί και να μπορούν να χρησιμοποιηθούν 1-D μοντέλα σε κάθε γεωμετρία ή/και συνοριακή συνθήκη έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι. Πολλές από αυτές βρίσκονται σε κλασικά βιβλία θεωρία ελαστικότητας όπως π.χ. του Novozhilov V.V. [160].

Πρόσφατες θεωρίες βασίζονται στην εισαγωγή συντελεστών διόρθωσης διάτμησης, στη χρήση συναρτήσεων στρέβλωσης σύμφωνα με τη λύση του de Saint-Venant, σε γενικευμένες θεωρίες δοκού (GBT) και σε υψηλότερης τάξης μοντέλα δοκού. Παρακάτω γίνεται σύντομη αναφορά.

Για τη βελτίωση των κλασσικών μεθόδων με χρήση διορθωτικών διατμητικών παραγόντων έχει γίνει σημαντική δουλειά όπως των Timoshenko και Goodier [70], Krishna Murty [162], Pai και Schulz [163], των Mechab et al.[164] και αρκετών άλλων.

Η λύση του de Saint-Venant που βασίζεται στο χώρο των μετατοπίσεων είναι η αρχή για πιο σύγχρονες δουλειές όπως των Lad´eveze and Simmonds [165], [166], Lad´eveze et al. [167] και Ies¸an [168], όπου για τη τελευταία δόθηκαν λύσεις βάση ημιαναλυτικής θεωρίας πεπερασμένων στοιχείων από τους Dong et al. [169] Kosmatka et al. [170], Lin et al [171] και Lin and Dong [172].

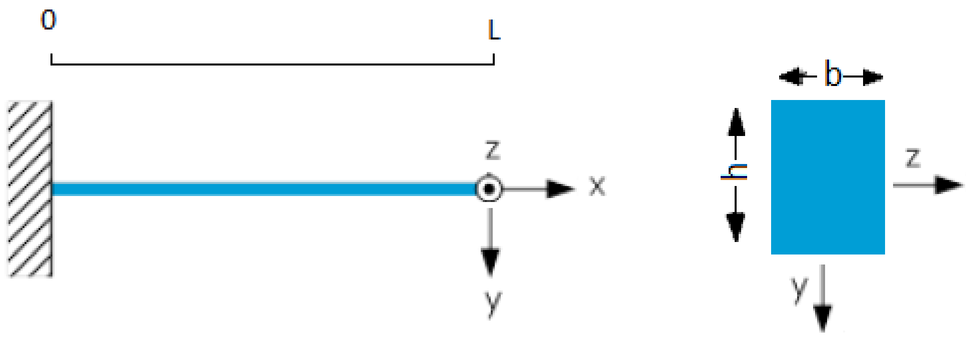
Η Γενικευμένη θεωρία δοκού (GBT) αναπτύχθηκε από τον Schardt [173], [174] και [175]. Σε αντίθεση με την τεχνική θεωρία δοκού (Bernoulli και Timoshenko) και τη θεωρία λεπτότοιχων ράβδων (θεωρία Vlasov), περιγράφει τα προβλήματα ανομοιόμορφης στρέψης και ομοιόμορφης διάτμησης με προβλήματα συνοριακών τιμών τα οποία μοντελοποιούνται με χρήση της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας. Η ΓΘΔ αναφέρεται τόσο σε χοντρότοιχες όσο και σε λεπτότοιχες διατομές, χωρίς να υπόκειται στους περιορισμούς της θεωρίας Vlasov [177], [178], οι οποίοι έχουν ως αποτέλεσμα να μην ικανοποιούν πάντα κινηματικές ή στατικές παραδοχές. Η επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών της ΓΘΔ είναι εφικτή με αναλυτική λύση μόνο σε απλής διατομής δοκούς. Εν γένει τέτοια προβλήματα επιλύονται με αριθμητικές μεθόδους όπως η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (direct Boundary Element Method, BEM, η εξέλιξη αυτής που είναι η Μέθοδος Αναλογικής Εξίσωσης (Analog Equation Method, AEM), η μέθοδος των Πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (FDM), [176]. Σημαντικές δουλειές με τη μέθοδο της ΓΘΔ και επίλυσή της με αναλυτική λύση έχουν γίνει από τους Love [179], Timoshenko and Goodier [70], Sokolnikoff [181], Fung [182], Silvestre [184] ,[185], [186], Armenakas [183]. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις η λύση προσδιορίζεται με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων όπως τη μέθοδο FEM Argyris J. [187], Bathe [161], Παπαδρακάκης Μ. [188] ή τη μέθοδο BEM Katsikadelis 2002a [189].

Επίσης έχουν αναπτυχθεί πολλές άλλες θεωρίες υψηλότερης από τη 1η τάξη του Timoshenko με ορισμένες από αυτές να είναι των Washizu [190], Kanok-Nukulchai και Shik Shin [191], Kapania και Raciti [192], [193], Qin και Librescu [194].

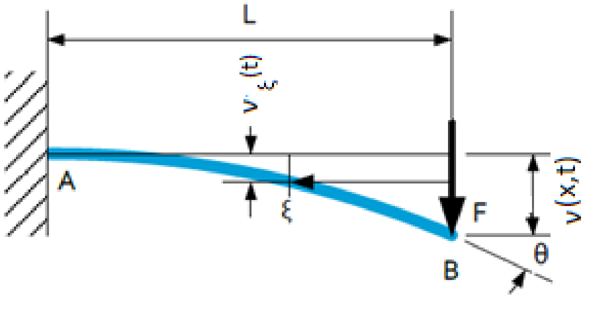
2.2.3 Σύντομη Μαθηματική Περιγραφή βάση Τεχνικής Θεωρίας

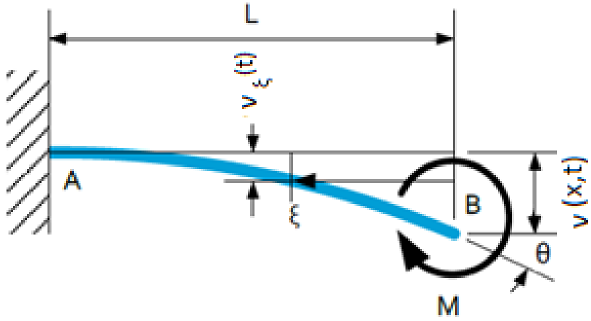
Παρακάτω αναφερόμαστε στις στοιχειώδεις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της συνήθους δοκού στην **Τεχνική Θεωρία** Κάμψεως Δοκών.

Οι βασικές **παραδοχές** είναι ότι το υλικό ακολουθεί το νόμο του Hooke, η αξονική παραμόρφωση είναι αμελητέα σε σχέση με τη παραμόρφωση κάμψης και η περιστροφή του στοιχείου είναι αμελητέα σε σύγκριση με τη κάθετη και πλάγια παραμόρφωση.



Η δοκός μας είναι μια λεπτή, ευθύγραμμη δοκό μήκους L κατά μήκος του άξονα Ox (με $0 \leq x \leq L$) από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό με σταθερή διατομή καθ' όλο το μήκος της. Η δοκός θεωρείται ότι βρίσκεται υπό την επίδραση κάθετης στατικής φορτίσεως f= f(x) . Εν γένει κάθε καταπόνηση μπορεί να εξαρτάται και από το χρόνο π.χ. f= f(x,t).





Η μελέτη των ταλαντώσεων και της κάμψης της δοκού λόγω των επιβαλλόμενων φορτίων ανάγεται στον προσδιορισμό της χρονικής μεταβολής των μετατοπίσεων κάθε σημείου της δοκού. Έστω $v(x,t)$ η εγκάρσια μετατόπιση του σημείου της δοκού στη θέση x και στην χρονική στιγμή t. Η απόκριση $v(x,t)$ προσδιορίζεται από την ανάλυση της δυναμικής ισορροπίας ενός στοιχειώδους απειροελάχιστου τμήματος μήκους dx της δοκού. Η εξάρτηση της $v(x,t)$ από το x και το t δηλώνει ότι οι μετατοπίσεις και κατά συνέπεια ταχύτητες, επιταχύνσεις, τάσεις, κλπ., εξαρτώνται από δύο συντεταγμένες, την χωρική συντεταγμένη x και την χρονική συντεταγμένη t. Όπως θα προκύψει από την ανάλυση, η απόκριση εξαρτάται από τις συνοριακές συνθήκες (στα σύνορα $x=0$ και $x=L$), καθώς επίσης και τις αρχικές συνθήκες μετατόπισης $v(x,0)$ και ταχύτητας $\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} \equiv \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}$ στην χρονική στιγμή $t=0$ κατά μήκος της δοκού.

Τα **βασικά μεγέθη** κατά μήκος της δοκού, έστω για δεδομένο χρόνο t, είναι:

- Πυκνότητα σε κάποιο σημείο: ρ(x),
- Μέτρο ελαστικότητας Young: E ή Y.
- Ροπή αδράνειας σε κάποιο σημείο ξ: Ι(ξ).
- Διατομή της δοκού σε κάποιο σημείο ξ: Α(ξ).
- Το φορτίο: f= f(x) ή q = q(x) ή p = p(x)
- Το βέλος κάμψεως ή μετατόπιση: ν(x) (μετατόπιση κατά y του Ουδ. Άξονα).
- Η κλίση της δοκού ή κλίση της μετατόπισης:
  $M = \int_A dM = \int_A z\sigma_{xx} dA = \int_A E\kappa z^2 dA = E\kappa \int_A z^2 dA = \kappa EII = \int_A z^2 dA \kappa = \frac{M}{\mathrm{EI}}$ (ταχύτητα μετατόπισης)

- Η γωνία στροφής ή γωνία κλίσεως ή στροφή: θ(x).
- Ισχύει: $\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \tan(\theta(x))$ για μικρές μεταβολές του θ, από σειρά Maclaurin έχουμε: $\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \theta(x)$
- Η καμπυλότητα κ(x)= $\frac{\partial^2 v(x)}{\partial^2 x}$ (επιτάχυνση μετατόπισης)
- Η ακτίνα καμπυλότητας: $R(x) = \frac{1}{|\kappa(x)|}$
- Η διατμητική δύναμη Q : όπου q(x)= - $\frac{\partial Q(x)}{\partial x}$ εκφράζει την ισορροπία των κάθετων δυνάμεων: της κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως q(x) και των τεμνουσών δυνάμεων Q(x) στο στοιχειώδες μήκος dx της δοκού. Υποτίθεται βέβαια ότι δεν υπάρχει αξονική φόρτιση N της δοκού ούτε εφελκυστική, αλλ' ούτε και θλιπτική.
- Η ροπή κάμψης Μ: όπου Q(x)= $\frac{\partial M(x)}{\partial x}$ => q(x)= - $\frac{\partial^2 M(x)}{\partial^2 x}$, εκφράζει την ισορροπία των καμπτικών ροπών στο στοιχείο μήκους dx της δοκού. Ο τύπος ισχύει επειδή υποθέτουμε αμελητέα στροφική αδράνεια.

Σύνδεση γεωμετρικών και στατικών μεγεθών: $\kappa = \frac{M}{\mathrm{EI}}$ (ισχύει υπό απλοποιήσεις)

- ➔ Από τη δεύτερη εξίσωση της στατικής για την επιφάνεια Α όλης της τομής (h*b) έχουμε: $M = \int_A dM = \int_A z\sigma_{xx} dA = \int_A E\kappa z^2 dA = E\kappa \int_A z^2 dA = \kappa EI$,

  όπου $I = \int_A z^2 dA$ ονομάζεται ροπή αδράνειας. Παπαμίχος Ε. [73]

- Η δυσκαμψία ή μέτρο δυσκαμψίας : ΕΙ.

Συνεπώς ισχύουν οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial^2 x} = -\frac{\mathrm{M}(x)}{EI}, \quad \frac{\partial^3 v(x)}{\partial^3 x} = -\frac{Q(x)}{EI}, \quad \frac{\partial^4 v(x)}{\partial^4 x} = \frac{q(x)}{EI}$$

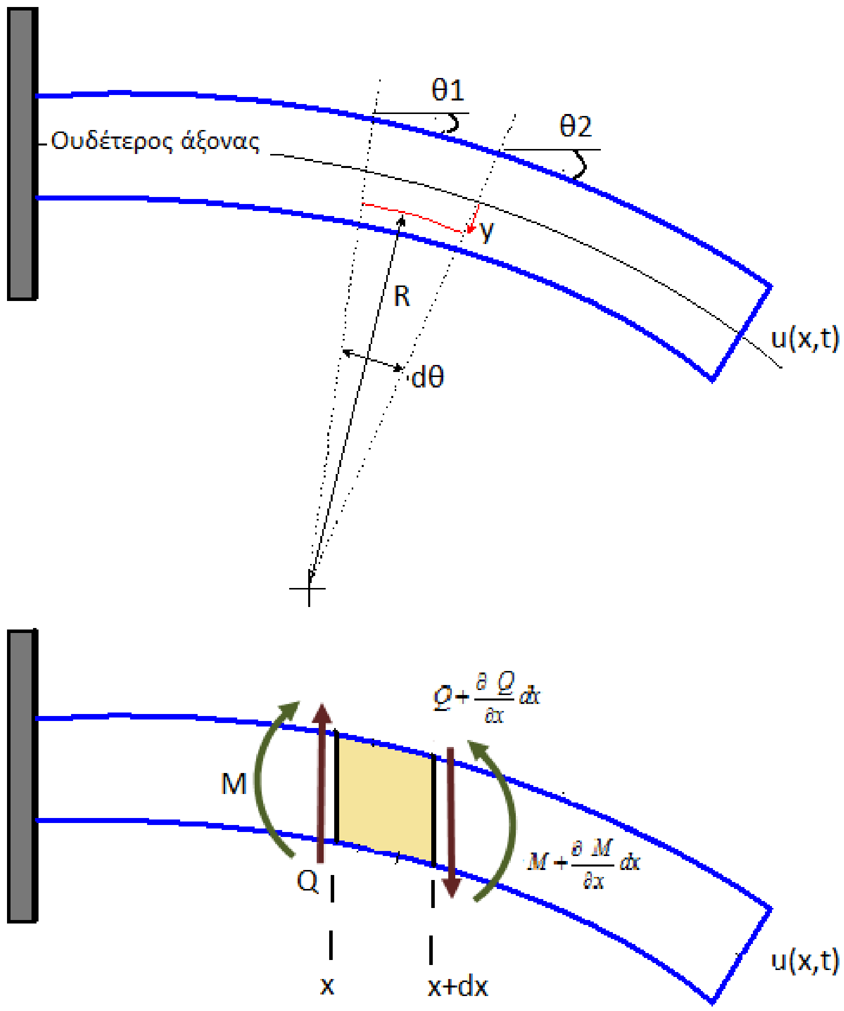
Συνοριακές Συνθήκες Προβόλου Δοκού:

x=0 πάκτωση:

v(*0*) = 0 **και** *θ*(*0*) = 0 ⇔ *v*(*0*) = 0 **και** $\frac{\partial v(0)}{\partial x}$ = 0

x=L ελεύθερο άκρο:

v(*L*) = 0 **και** *θ*(*L*) = 0 ⇔ *v*(*L*) = 0 **και** $\frac{\partial v(L)}{\partial x}$ = 0

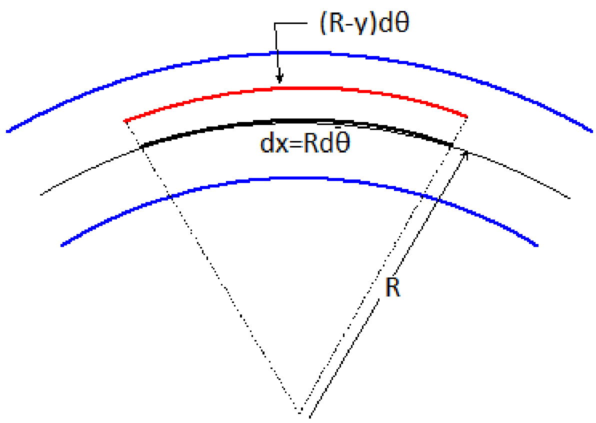


Εικόνα 2.2.1: Πρόβολος δοκός σε κάμψη και ΔΕΣ στοιχείου dx.

, όπου y η απόσταση από τον Ουδέτερο άξονα.

Από τη μηχανική στερεού σώματος γνωρίζουμε:

$$\sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow \sigma = -Ey\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad \varepsilon = -y\frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \varepsilon = -y\kappa = \varepsilon = -y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$



Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από την εφαρμογή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα (ΣF=m*a) ή την εφαρμογή των Νόμων του Euler σε απειροελάχιστο μονοδιάστατο τμήμα του συνεχούς στοιχείου. Η εφαρμογή των εξισώσεων κίνησης και καταστατικών νόμων του υλικού και των σχέσεων παραμόρφωσης μετατόπισης έχει ως αποτέλεσμα οι ταλαντώσεις των συνεχών στοιχείων να δίνονται από την λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης. Για γραμμικό καταστατικό νόμο υλικού και μικρές παραμορφώσεις, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης είναι γραμμικές.

$$\left.\begin{aligned} \sum F &= dm \bullet \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \sum F &= -Q + (Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx) + q \end{aligned}\right\} \quad dm \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + q$$, όπου dm= ρ*A*dx

Αντικαθιστώντας όλες τις γνωστές σχέσεις εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης κατά EULER-BERNOULLI:

$$\rho A\ dx \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} dx + q(x)$$ [2.2.1] (τα A και I μπορούν να εξαρτώνται από το x)

$$\mathrm{M}(x) = -EI \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$$ [2.2.2]

$$\theta(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x}$$ [2.2.3]

Όταν η δοκός έχει σχετικά μεγάλο πάχος, πρέπει να ληφθούν υπόψη οι επιδράσεις της αξονικής παραμόρφωσης και η στροφική αδράνεια και το κατάλληλο μοντέλο δοκού γι αυτή τη περίπτωση είναι του **Timoshenko**.

Η βασική διαφορά της θεωρίας δοκού κατά Mindlin – Timoshenko από την κλασική θεωρία της δοκού κατά Bernoulli είναι η θεώρηση της διατμητικής παραμόρφωσης, Καραμάνος [225]. Εδώ, δεν ισχύει πλέον η παραδοχή Bernoulli (δηλαδή ότι επίπεδες διατομές κάθετες αρχικά στο άξονα της δοκού παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο ουδέτερο άξονα της δοκού). Εδώ η παραδοχή μας είναι πως επίπεδες διατομές κάθετες αρχικά στο άξονα της δοκού παραμένουν μεν επίπεδες αλλά όχι ανακγκαστικά κάθετες στον παραμορφωμένο ουδέτερο άξονα της δοκού. Επομένως, η διατμητική παραμόρφωση εισέρχεται στις κινηματικές σχέσεις ως εξής:

αξονική παραμόρφωση

$$\varepsilon = -y \frac{d\theta}{dx}$$

στροφή διατομής

$$\theta = \frac{d\mathrm{v}}{dx} - \gamma$$

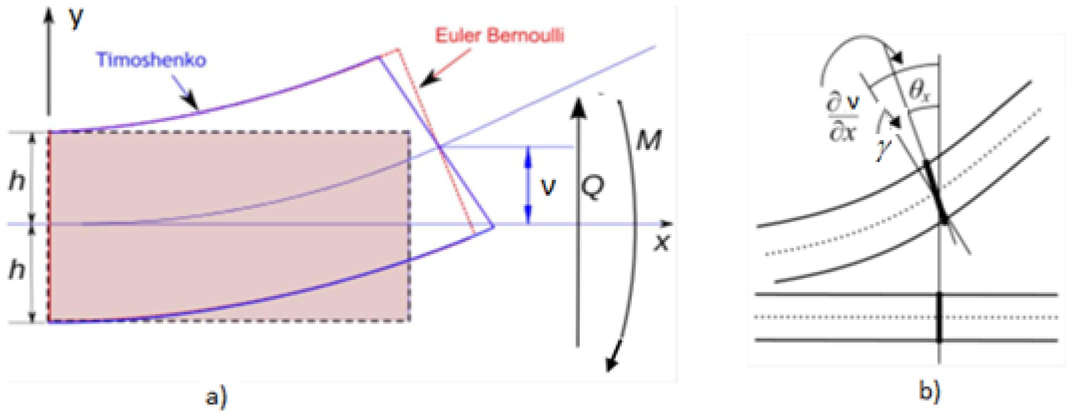
καμπτική ενέργεια

$$U_b = \frac{1}{2}\int_0^L \mathrm{A}\,\sigma\,\varepsilon\,dx = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{E}\,b\,t^3}{12}\int_0^L \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx$$

διατμητική ενέργεια

$$U_s = \frac{1}{2}\int_0^L \kappa\,\mathrm{A}\,\tau\,\gamma\,dx = \frac{1}{2}\kappa\,G\,b\,t\int_0^L \left(\frac{d\mathrm{v}}{dx} - \theta\right)^2 dx$$

, όπου κ είναι ο συντελεστής διόρθωσης λόγω ανομοιόμορφης κατανομής της διατμητικής τάσης. Για ορθογωνική διατομή ισούται με: 5/6 = 1/1.2



Εικόνα 2.2.2: a) Παραμόρφωση δοκού κατά EULER και Timoshenko b) στροφή της κάθετης στον ουδέτερο άξονα διατομής. $\dfrac{\partial v(x)}{\partial x} \neq \theta(x)$

*Με διαφορετική θεώρηση του άξονα y σε z το v γίνεται w.

Η συνολική δυναμική ενέργεια της δοκού δίδεται από $\Pi = U_b + U_s - \int_0^L q(x) v dx$

Οι διαφορικές εξισώσεις w(t) και θ(x) προκύπτουν από την απαίτηση στάσιμη τιμής του συναρτησιακού Π(w,θ), που εξασφαλίζεται θεωρώντας τη μεταβολή ίση με μηδέν δΠ=0.

Οι τελικές εξισώσεις είναι

$$\frac{d}{dx}\left[G\,\mathrm{A}\,\kappa\left(\frac{dw}{dx} - \theta\right)\right] + q = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{EI}\frac{d\theta}{dx}\right) - G\,\mathrm{A}\,\kappa\left(\frac{dw}{dx} - \theta\right) = 0$$

Αποτελούν σύστημα γραμμικών εξισώσεων 2^{ου} βαθμού. Για την επίλυση της δοκού με τη μέθοδο FEM (Rayleigh - Ritz) βασιζόμαστε στη διακριτοποίηση των w(x)και θ(x) με κατάλληλες συναρτήσεις βάσης, [225].

2.3 Εισαγωγή στα Πεπερασμένα Στοιχεία

2.3.1 Εισαγωγή

Η **Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων** (Finite Element Method, FEM) αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο της υπολογιστικής μηχανικής για την αριθμητική επίλυση πολύπλοκων φυσικών προβλημάτων. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου σε πεπερασμένο αριθμό μικρότερων, συνεχών και γεωμετρικά απλών στοιχείων (elements), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με τους λεγόμενους κόμβους (nodes). Τελικός στόχος είναι η επαρκής μοντελοποίηση ενός πολύπλοκου φυσικού συστήματος από γραμμικές και μη γραμμικές μαθηματικές εξισώσεις που είναι ευκολότερο να επιλυθούν.

2.3.2 Ιστορική Αναδρομή

Η μέθοδος επίλυσης προβλημάτων με τη χρήση των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί ιστορικά να θεωρηθεί ότι έχει τις ρίζες της στους Αρχαίους Έλληνες όταν προσπαθούσαν να προσεγγίσουν την τιμή του «π» χρησιμοποιώντας περιγεγραμμένα πολύγωνα (ολοκλήρωση σε βήματα).

Μια από τις πρώτες δημοσιεύσεις, στις οποίες παρουσιάσθηκε η ιδέα αυτή, είναι των Turner, Clough, Martin και Topp (1956) [77]. Ορισμένα όμως χαρακτηριστικά της είχαν ήδη περιγραφεί από το 1941, όταν ο Hrenikoff [78] επινόησε μια μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων ελαστικότητας δύο διαστάσεων, προσεγγίζοντας το πεδίο (κατασκευή) με ισοδύναμες ράβδους και δοκούς. Ανάλογες εργασίες είχαν πραγματοποιηθεί από τον Courant (1943) [79] και τον McHenry (1943) [80] αλλά και άλλους.

Η μέθοδος εδραιώθηκε το 1960 από τους Argyris [81], ενώ ο όρος «μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων» (Finite Element Methode - FEM) χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Clough το 1960 [82].

Στις αρχές της δεκαετίας του 1960 αναγνωρίσθηκε ότι η μέθοδος αποτελεί συγκεκριμένη μορφή της μεθόδου Ritz (1909), και το 1964 οι Zienkiewicz et al. [83] έδειξαν ότι μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλα τα προβλήματα πεδίου, που μπορεί να διατυπωθούν με όρους μεταβολής μιας κατάστασης.

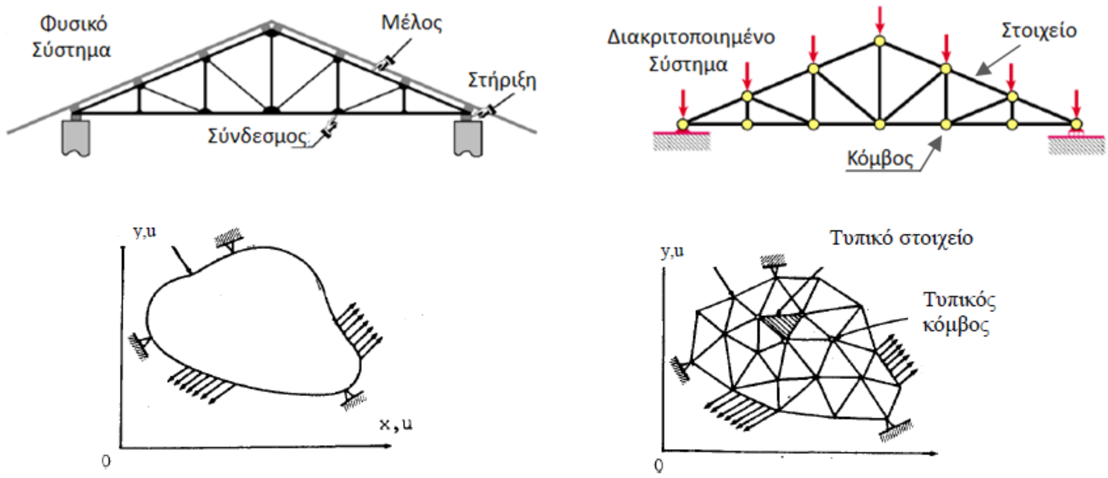
Η αρχική διατύπωση της μεθόδου έγινε με βάση την μητρωική ανάλυση, αργότερα όμως δόθηκε ευρύτερη και πιο θεμελιώδης θεωρητική βάση.

Το 1980 αρχίζει να διαδίδεται και να χρησιμοποιείται ευρέως από τον Πανεπιστημιακό κόσμο και ενώ αναπτύσσονται τα πρώτα λογισμικά, γίνεται χρήση της από τους Μηχανικούς και πολλές επιχειρήσεις. Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1990 η μέθοδος βρίσκει πεδία εφαρμογής σε πολύπλοκα προβλήματα

Ρευστομηχανικής και Ηλεκτρομαγνητισμού ενώ βελτιστοποιείται η μέθοδος μέσω και της ανάπτυξης των υπολογιστών. Από το 2000 τα επαγγελματικά λογισμικά ANSYS, ABAQUS και NASTRAN έχουν ήδη εξελιχθεί αρκετά και διευκολύνουν τις αναλύσεις με πεπερασμένα στοιχεία ακόμα περισσότερο. Σήμερα θεωρείται ως μία από τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις στις επιστήμες του 20ο αιώνα και έχει καθολική εφαρμογή σε πληθώρα προβλημάτων της μηχανικής. Ορισμένοι από τους κλάδους εφαρμογής της είναι η ρευστομηχανική, η θερμοδυναμική, η ακουστική, ο ηλεκτρομαγνητισμός, η εμβιομηχανική και η σεισμολογία. Συνδυαστικά με την μείωση μάλιστα του κόστους των ηλεκτρονικών υπολογιστών και την αύξηση της υπολογιστικής μνήμης και ισχύος, βρίσκει εφαρμογή στην πλειονότητα των προβλημάτων των Μηχανικών επικουρικά με άλλα προγράμματα (CAD, CAM).

2.3.3 Γενική Περιγραφή

Εν γένει, ένα ελαστικό σώμα καταλαμβάνει ορισμένο χώρο Λ, όπου αυτός ο χώρος μπορεί να χωριστεί σε πεπερασμένο ιδεατό αριθμό περιοχών, επιφανειών ή γραμμών, τα πεπερασμένα στοιχεία. Οι διαστάσεις των στοιχείων, συνήθως είναι αντίστοιχες με τις διστάσεις του χώρου.



Εικόνα 2.3.1: Φυσικό και Διακριτοποιημένο Σύστημα

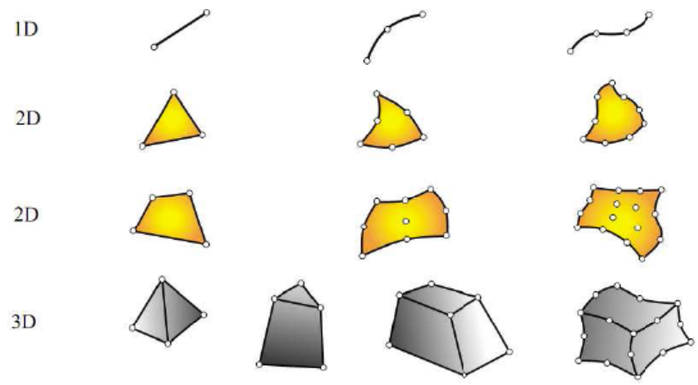
Κάθε **πεπερασμένο στοιχείο** (Finite element) συνδέεται με ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων, τους **κόμβους** (nodes). Κάθε κόμβος, ανάλογα με το είδος της κατασκευής, έχει ορισμένες δυνατότητες μεταβολής (μετατόπισης), οι οποίες ορίζουν τη **κατάσταση του κόμβου** και όλες μαζί ορίζουν τη κατάσταση του συστήματος. Αυτές οι δυνατότητες μεταβολής είναι οι **βαθμοί ελευθερίας** (Degrees Of Freedom, DOF) και συνιστούν τις **μεταβλητές κατάστασης** του συστήματος. Όλοι οι βαθμοί ελευθερίας συλλέγονται σε ένα διάνυσμα **u** που ονομάζεται διάνυσμα κατάστασης ή διάνυσμα «μετατοπίσεων».

Ανάλογα με το τύπο του προβλήματος οι βαθμοί ελευθερίας του κόμβου μπορούν να είναι, μετατόπιση, στροφή, θερμοκρασία, πίεση, ταχύτητα, ηλεκτρικό δυναμικό, μαγνητικό δυναμικό, οι παραγώγους αυτών κ.ά.

Σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι κάθε πεπερασμένο στοιχείο δε παύει να έχει την ίδια ελαστική συμπεριφορά με το αρχικό σώμα. Το κέρδος από αυτή τη διακριτοποίηση είναι η **προσεγγιστική έκφραση της μετατόπισης του σώματος συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων με τη βοήθεια παρεμβολικών τύπων**, συνήθως σχετικά απλών πολυωνύμων. Οι κανόνες που πρέπει να τηρούνται για την επιτυχία της μεθόδου είναι:

- Οι μετατοπίσεις των στοιχείων πρέπει να ορισθούν έτσι ώστε να υπάρχει συνέχεια μετατοπίσεων μεταξύ τους.
- Στη περίπτωση καμπτόμενων κατασκευών δεν μπορούν τα στοιχεία στα σημεία σύνδεσής τους να εμφανίζουν, μετά τη παραμόρφωση, γωνίες διαφορετικές από τις γωνίες που εμφάνιζαν πριν τη παραμόρφωση.
- Οι μετατοπίσεις σε κάθε στοιχείο πρέπει να είναι συνεχείς συναρτήσεις ώστε να δίνουν συνεχείς παραμορφώσεις.
- Το πεδίο των μετατοπίσεων σε κάθε στοιχείο πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να μπορεί να περιγράψει τη μετακίνηση στερεού σώματος καθώς και τη σταθερή παραμόρφωση της κατασκευής.
  Ανδριανάκης [84], Πανταζής [85]

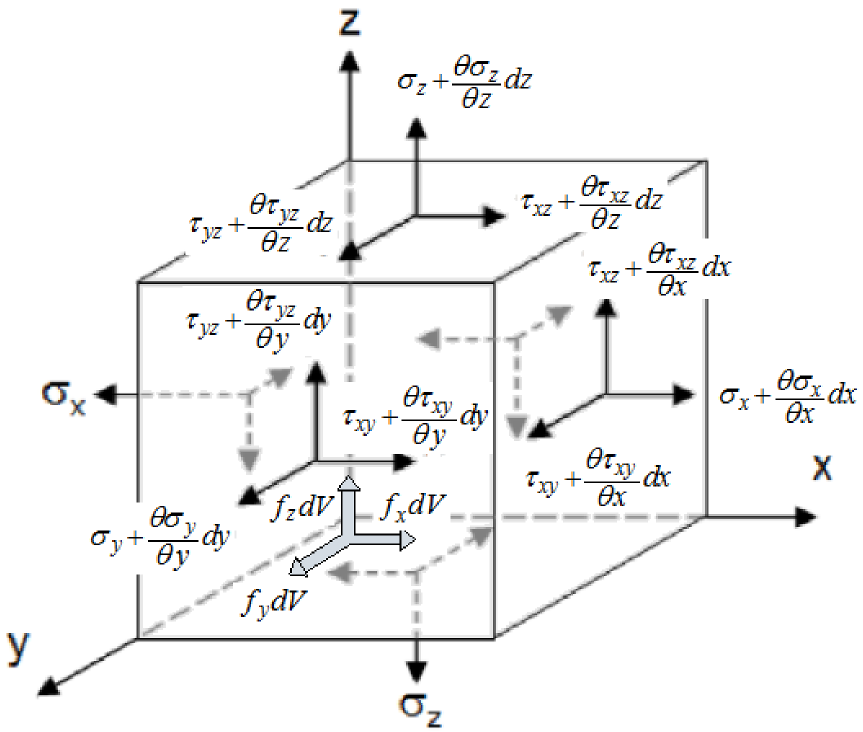
Τα πεπερασμένα στοιχεία διακρίνονται σε μονοδιάστατα, δισδιάστατα και τρισδιάστατα.



Εικόνα 2.3.2: Τύποι Πεπερασμένων Στοιχείων

Εν γένει, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια προσεγγιστική αριθμητική μέθοδος. Μέσω αυτής, γίνεται φυσική προσέγγιση του προβλήματος διαμερίζοντας το χώρο σε επιμέρους διακριτά πεπερασμένα στοιχεία στα οποία ορίζονται εξισώσεις που έχουν ευκολότερη λύση.

Στη μηχανική το βασικό πρόβλημα που καλούμαστε να επιλύσουμε είναι ο προσδιορισμός της μετατόπισης [**u**] σώματος που έχει δεχθεί εξωτερική δύναμη, ικανοποιώντας επαρκώς τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις που αναφέραμε και στο κεφ. 2.1.2 και 2.1.3:



Εικόνα 2.3.3: Εντατική Κατάσταση στοιχειώδους κύβου

Εξισώσεις Ισορροπίας

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

Εξισώσεις γεωμετρικής Συμβιβαστότητας

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}$$

Όπως κάθε πρόβλημα που εκφράζεται με διαφορικές εξισώσεις έχουμε κι εδώ **φυσικές** (φορτίσεις) και **βασικές** (δεσμεύσεις, στηρίξεις κλπ.) **συνοριακές συνθήκες**, οι οποίες ονομάζονται ως **Neumann** και **Dirichlet boundary conditions** αντίστοιχα.

Όπως φαίνεται οι τάσεις συνδέονται με τις παραμορφώσεις, οι οποίες συνδέονται με τις μετατοπίσεις και για η εύρεση των μετατοπίσεων προϋποθέτει την επίλυση διαφορικών εξισώσεων μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης. Για προβλήματα με πολύπλοκες γεωμετρίες η επίλυση αυτών των διαφορικών εξισώσεων είναι αρκετά δύσκολη. Επιπροσθέτως , η κατασκευή συναρτήσεων που ικανοποιούν συνοριακές συνθήκες σωμάτων με πολύπλοκη γεωμετρία και σύνθετες συνθήκες φόρτισης είναι σχεδόν αδύνατη. Για να αποφευχθούν αυτές οι δυσκολίες, αναπτύχθηκαν αρκετές συγγενείς αριθμητικές αναλύσεις, με επικρατέστερη τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Για την **αριθμητική επίλυση** του προβλήματος των πεπρασμένων στοιχείων χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι όπως η Αρχή της Ελάχιστης Δυναμικής Ενέργειας, η μέθοδος Rayleigh-Ritz, η μέθοδος Galerkin, η αρχή Saint Venant κ.ά.. Ειδικότερα για προβλήματα γραμμικής ελαστικότητας χρησιμοποιείται συνήθως η αρχή των Δυνατών Έργων. Επιπλέον, για ελατά υλικά μπορούμε να χρησιμοποιούμε και το βολικό κριτήριο Von Mises (σVM) που ορίζει ότι για να μην υπάρχει αστοχία υλικού θα πρέπει η $\sigma_{VM} \leq \sigma_Y$, δηλαδή μικρότερη ή ίση του ορίου διαρροής του υλικού.

Με χρήση της αρχής των δυνατών έργων, G. Beer, J. O. Watson [86], J. N. Reddy [87], ορίζοντας σ_{ij} και ε_{ij} τους τανυστές των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων και P_i και δ_i τα φορτία και τις δυνατές μετακινήσεις, θα πρέπει το έργο που προκαλείται από τα φορτία να ισούται με το δυνατό έργο των παραμορφώσεων, δηλαδή: $\sum P_i \delta_i = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$.

Όπως αναφέραμε, για να καταστρωθεί το πρόβλημα των πεπερασμένων στοιχείων, πρέπει η κατασκευή του προβλήματος, η οποία καταλαμβάνει συνήθως κάποιο πεπερασμένο όγκο στον χώρο, να χωριστεί σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων απλούστερου σχήματος. Κάθε πεπερασμένο στοιχείο αποτελείται από κάποιον αριθμό κόμβων, όπου κάθε κόμβος έχει κάποιους βαθμούς ελευθερίας. Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στο να δοθούν τιμές σε αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας. Τα διάφορα στοιχεία συναρμολογούνται σε κάποιους κοινούς βαθμούς ελευθερίας (ή κόμβους).

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως **[K].u=F** [86],[87], Fagan M.J [88]. Όπου **u** διάνυσμα διάστασης n ίσης με τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος, όπου κάποιες από αυτές είναι δεσμευμένες (u_i = δέσμευση) και αποτελούν τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Το **F** είναι διάνυσμα διάστασης n και περιέχει τις συνοριακές συνθήκες των φορτίσεων, δηλαδή τις δυνάμεις στους κόμβους, τις πιέσεις πάνω στις πλευρές των στοιχείων καθώς και τις μαζικές δυνάμεις (όπως το ίδιο βάρος). Ο πίνακας [**K**] έχει διαστάσεις nxn και ονομάζεται πίνακας δυσκαμψίας. Στον πίνακα αυτόν περιέχεται η γεωμετρία του προβλήματος καθώς και οι φυσικές ιδιότητες των υλικών. Ονομάζεται δε πίνακας δυσκαμψίας διότι δείχνει τη «δυσκαμψία» του συστήματος να αντιδράσει σε κάποια επιβολή εξωτερικής φόρτισης ή αλλιώς δείχνει την απόκριση του συστήματος στα εξωτερικά αίτια. Για να σχηματιστεί ο πίνακας [**K**] γίνεται μια συναρμολόγηση πολλών επιμέρους πινάκων [K_i] κάθε στοιχείου.

Για να σχηματιστούν οι επιμέρους πίνακες [**K**] χρησιμοποιείται αριθμητική ολοκλήρωση με την μέθοδο απαλοιφής Gauss, όπου για περισσότερες πληροφορίες Ράπτης Α. [89], Χαϊνης Ι. [90].

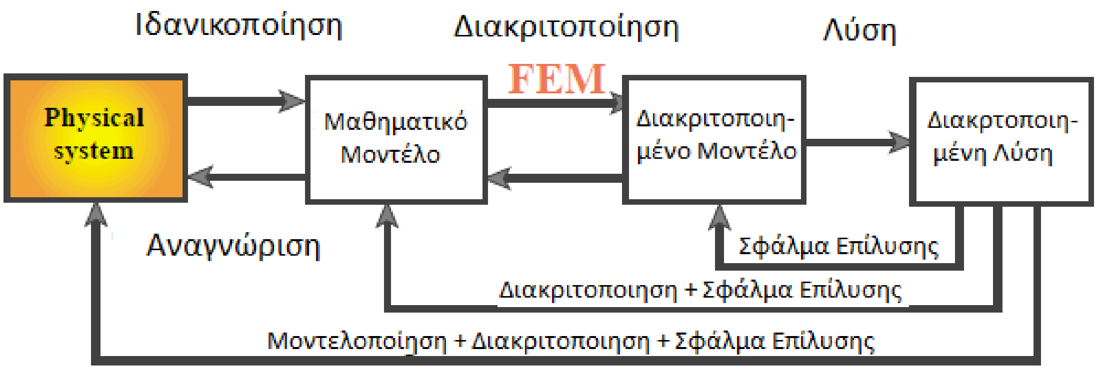
Προκειμένου να σχηματιστεί ο πίνακας δυσκαμψίας [**K**] της συνολικής κατασκευής γίνεται υπολογισμός των επιμέρους τοπικών μητρώων δυσκαμψίας του κάθε πεπερασμένου στοιχείου. Για τον υπολογισμό των μητρώων απαιτείται ο ορισμός των συναρτήσεων μορφής, πολυώνυμα που είναι εύκολα ολοκληρώσιμα και παραγωγήσιμα.

Ανάλογα με τον βαθμό των πολυωνύμων, λαμβάνουμε και ανάλογη τάξη στα στοιχεία. Έτσι χρησιμοποιώντας απλά πολυώνυμα πρώτου βαθμού, στα στερεά προκύπτουν κυβικά στοιχεία 8 κόμβων. Αν χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε το πεδίο του στοιχείου πολυώνυμα β' βαθμού, τότε προκύπτουν στοιχεία ανώτερης τάξης όπως κυβικά στοιχεία 20 κόμβων. Όσο μεγαλύτερης τάξης είναι τα στοιχεία, τόσο καλύτερη ακρίβεια έχουμε στην επίλυση, ακρίβεια που μπορούμε να αυξήσουμε και με την καλύτερη πύκνωση του προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία.

Για να γίνει η επίλυση του προβλήματος επιλύεται το σύστημα εξισώσεων [**K**].**u**=**F** (εξ. ισορροπίας) και έτσι παίρνουμε τις τιμές για τα **u**. Έπειτα με κατάλληλες αναγωγές μπορούμε από τα **u** να εξάγουμε και άλλα παράγωγα μεγέθη όπως οι τάσεις. Η επίλυση του παραπάνω συστήματος προϋποθέτει την αντιστροφή του μητρώου **K** και αυτό γίνεται αφού πρώτα προσδιοριστούν οι συνοριακές συνθήκες, που αποτελούν προκαθορισμένες τιμές της δύναμης ή της μετατόπισης σε κάποιον/ους από τους κόμβους.

2.3.4 Μεθοδολογία

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζουμε την απλοποιημένη διαδικασία αναπαράστασης και επίλυσης του φυσικού συστήματος σε μαθηματικό μοντέλο μέσω της διακριτοποίησης και της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.



Εικόνα 2.3.4: Απλοποιημένη διαδικασία αναπαράστασης και επίλυσης Φυσικού Συστήματος

Σύμφωνα με τη θεωρία, το ένα μέρος του προβλήματος είναι η διακριτοποίηση του πεδίου, ενώ το άλλο η διακριτή διαδικασία προσέγγισης των μερικών διαφορικών εξισώσεων και η τελική λύση προκύπτει από το συνδυασμό τους. Σε αντίθεση με μια αναλυτική επίλυση, η οποία επιτρέπει τον καθορισμό των μεταβλητών (μετατοπίσεων) σε κάθε σημείο της κατασκευής, μια αριθμητική λύση την καθιστά ικανή μόνο σε συγκεκριμένα σημεία (discrete points-nodes). Η απόρροια του γεγονότος αυτού είναι ότι σε κάθε αριθμητική ανάλυση πρέπει καταρχήν να καθορίζονται αυτά τα σημεία. Αυτό επιτυγχάνεται με τον διαχωρισμό της μελετώμενης περιοχής σε ένα πλήθος μικρότερων περιοχών. Τα σημεία αυτά ονομάζονται κομβικά σημεία (nodal points-nodes) και ο συνδυασμός των αποτελεσμάτων τους, πλέγμα (mesh). Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι κάθε σημείο αντιπροσωπεύει μια συγκεκριμένη περιοχή που το περιβάλλει. Η ακρίβεια των υπολογισμών εξαρτάται κατά πολύ από τον αριθμό των καθορισμένων κομβικών σημείων, τα οποία ελέγχουν τον αριθμό των στοιχείων που δημιουργούνται. Η ακρίβεια προσεγγίζει μία ορθή τιμή όσο το μέγεθος του πλέγματος (mesh size) προσεγγίζει το μηδέν. Για αποτελέσματα με αποδεκτής αριθμητικής ακρίβειας λύσης, είναι απαραίτητη η επιλογή στοιχείου κατάλληλης μορφής και διαστάσεων, Τσαμασφύρος Γ. [91].

Η βασική αρχή για την επιλογή κατάλληλης γεωμετρίας και μεγέθους του κάθε πεπερασμένου στοιχείου είναι το κατά πόσο απότομα μεταβάλλεται η κατανομή των ζητούμενων μεταβλητών σε κάθε περιοχή του διακριτοποιημένου συστήματος. Εν γένει, σε περιοχές με έντονη διαφοροποίηση γεωμετρίας ή φόρτισης αναμένεται απότομη μεταβολή τάσων, οπότε η διακριτοποίηση θα πρέπει να είναι πυκνότερη.

Τα βήματα που ακολουθούνται για την επίλυση ενός προβλήματος συνέχειας με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι τα εξής:

Α. Διαχωρισμός του συνεχούς μέσου - Discretize the continuum.

Διαίρεση της περιοχής επίλυσης σε ορισμένο αριθμό στοιχείων ή υποπεριοχές. Η διακριτοποίηση των πεπερασμένων στοιχείων επιτρέπει μία ελευθερία στην επιλογή του σχήματος των στοιχείων, όπως τρίγωνα ή τετράπλευρα. Κάθε στοιχείο σχηματίζεται με την συνένωση ενός συγκεκριμένου αριθμού κόμβων. Ο αριθμός των κόμβων που χρησιμοποιείται για τον σχηματισμό ενός στοιχειού εξαρτάται από τον τύπο και το σχήμα του στοιχείου.

Β. Επιλογή συναρτήσεων παρεμβολής ή σχήματος - Select interpolation or shape functions

Επόμενο βήμα είναι η επιλογή του τύπου της συνάρτησης παρεμβολής που αναπαριστά την απόκλιση της μεταβλητής περιοχής σε ένα σημείο. Ο αριθμός των κόμβων που σχηματίζουν ένα στοιχείο αλλά και η φύση και ο αριθμός των αγνώστων σε κάθε κόμβο, καθορίζουν την απόκλιση μιας περιοχής μεταβλητής εντός ενός στοιχείου.

Γ. Είδος εξισώσεων των στοιχείων - Form element equations

Εν συνεχεία, καθορίζονται οι θεμελιώδεις εξισώσεις που εκφράζουν τις ιδιότητες κάθε στοιχείου ξεχωριστά και παράγονται οι συνεισφορές στις εξισώσεις ισορροπίας του στοιχείου αυτού.

IV. Συναρμολόγηση των εξισώσεων κάθε στοιχείου - Assemple the element equations

Προκειμένου να βρεθούν οι ιδιότητες για κάθε στοιχείο πρέπει να συναρμολογηθούν όλες οι επιμέρους εξισώσεις, δηλαδή να συνδυαστούν οι εξισώσεις κάθε στοιχείου με τέτοιο τρόπο που το αποτέλεσμα να αναπαριστά την συμπεριφορά ολόκληρης της περιοχής επίλυσης του προβλήματος. Οι οριακές συνθήκες πρέπει να ενσωματωθούν μετά την ενοποίηση των στοιχείων, δηλαδή: $[K]\{u\} = \{F\}$, όπως παραπάνω.

V. Επίλυση του συστήματος των εξισώσεων – Solve the system of equations

Οι προκύπτουσες αλγεβρικές εξισώσεις ([K]{u} = {F}), μπορούν σε αυτή τη φάση να επιλυθούν και να ληφθούν οι κομβικές τιμές για μια μεταβλητή όπως για παράδειγμα η μετατόπιση.

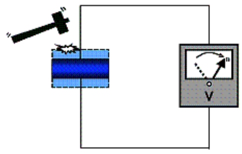
VI. Υπολογισμός των δευτερευόντων ποσοτήτων - Calculate the secondary quantities

Μετά τον υπολογισμό της κύριας μεταβλητής όπως η μετατόπιση, υπολογίζονται οι δευτερεύουσες ποσότητες όπως ταχύτητα και η επιτάχυνση μετατόπισης, Παπαλαζάρου Α. [92].

Για παράδειγμα εφαρμογής πεπερασμένων στοιχείων στην επίλυση προβόλου δοκού, ο αναγνώστης προτρέπεται να μελετήσει τη διδακτορική διατριβή της Α. Μουτσοπούλου [195].

2.4 Πιεζοηλεκτρισμός

Πιεζοηλεκτρισμός (piezoelectricity, προερχόμενο από τις λέξεις πιέζω και ηλεκτρισμός) είναι η ιδιότητα που έχουν ορισμένα υλικά να εμφανίζουν αντίθετα (ετερώνυμα) ηλεκτρικά φορτία στις επιφάνειές τους, όταν σ` αυτές ασκούνται ελκτικές ή πιεστικές δυνάμεις, και αντίστροφα, να εμφανίζονται αντίστοιχες δυνάμεις όταν οι επιφάνειές τους φορτιστούν ετερώνυμα. Μπορούμε έτσι να παράξουμε τάση από ένα υλικό σε αντίδραση μιας εφαρμοσμένης μηχανικής πίεσης και το αντίστροφο.



2.4.1 Ιστορική Αναδρομή

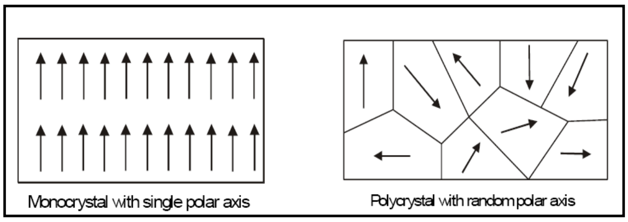
Από πολύ παλιά, σε περιοχές της Ινδίας και της Κεϋλάνης, είχε παρατηρηθεί ότι κάποια υλικά που βρίσκονταν ανάμεσα σε ζεστή στάχτη αρχικά έλκυαν σωματίδια της στάχτης ενώ λίγο αργότερα τα απωθούσαν. Τέτοια υλικά εμφανίστηκαν στην Ευρώπη γύρω στο 1703, όταν Ολλανδοί έμποροι τα έφεραν από τις Ασιατικές χώρες. Πολύ αργότερα, οι αδελφοί Curie θα ανακάλυπταν το ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Η σχετική ανακοίνωση έγινε για πρώτη φορά κατά τη διάρκεια του συνεδρίου της Academie des Sciences στο Παρίσι στις 2 Αυγούστου 1880 [93]. Ένα χρόνο αργότερα ο Lippmann πρόβλεψε την ύπαρξη του ανάστροφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου [94] κάτι που επιβεβαιώθηκε πειραματικά από τους αδερφούς Curie [95] τον ίδιο χρόνο. Ο όρος “πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο” προτάθηκε εκείνη την χρονιά από τον Hankel και έγινε αμέσως αποδεκτός αντί του όρου πυροηλεκτρισμός, που χρησιμοποιείτο εως τότε.

Αν και το φαινόμενο ήταν εντυπωσιακό και ερευνήθηκε από πολλούς σημαντικούς επιστήμονες της εποχής, η πρώτη σημαντική εφαρμογή του τοποθετείται κατά την περίοδο του Α’ Παγκοσμίου Πολέμου, όταν ο Langevin συνέλαβε την ιδέα της χρήσης πιεζοηλεκτρικών πλακών από quartz για την ανίχνευση υποβρυχίων. Μεταγενέστερα, έγινε αντιληπτό ότι τα υλικά που παρουσίαζαν το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως μετατροπείς σε αισθητήρες δύναμης, πίεσης και ταλάντωσης. Η εμπορική αξιοποίηση και εκμετάλλευση του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου έγινε στη δεκαετία του ’50 μετά την ανάπτυξη ενισχυτών πολύ μεγάλης σύνθετης αντίστασης εισόδου, καθιστώντας πλέον δυνατή την ενίσχυση του σήματος των αισθητήρων σε ικανοποιητικό βαθμό. Κατά τη δεκαετία του ’60, όταν πλέον η τεχνολογία κατασκευής κυκλωμάτων με MOSFET είχε αναπτυχθεί και ταυτόχρονα είχαν παραχθεί υλικά που παρουσίαζαν πολύ υψηλές τιμές μόνωσης, όπως το Teflon και το Kapton, η απόδοση των πιεζοηλεκτρικών αισθητήρων βελτιώνεται σημαντικά και το πεδίο των εφαρμογών της καινούριας αυτής τεχνολογικής ανακάλυψης διευρύνεται ραγδαία, καλύπτοντας σχεδόν όλες τις περιοχές της μοντέρνας τεχνολογίας και βιομηχανίας.

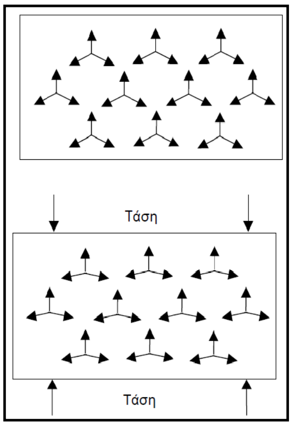
2.4.2 Ανάλυση του Πιεζοηλεκτρικού φαινομένου

Γενικά, το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο είναι ανισοτροπικό, παρουσιάζεται, δηλαδή, σε υλικά με κρυσταλλική δομή χωρίς κέντρο συμμετρίας, και αποτελεί φαινόμενο πρώτης τάξης. Σε έναν πολυκρύσταλλο συγκροτούνται διαφορετικές περιοχές πολικότητας, οι περιοχές Weiss, και η κατανομή της συνολικής πολικότητας είναι αντισυμμετρική. Αυτή ακριβώς η έλλειψη συμμετρίας είναι η βασική αιτία εκπόρευσης του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου. Σε μονοκρυσταλλικά υλικά στα οποία υπάρχει κέντρο συμμετρίας δεν μπορεί να προκύψει το φαινόμενο αυτό.

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζουμε την πολικότητα σε τυχαία κατάσταση για έναν μονοκρύσταλλο και έναν πολυκρύσταλλο αντίστοιχα. [96]



Στην περίπτωση κάποιων κεραμικών υλικών κάτω από μια **κρίσιμη θερμοκρασία**, γνωστή και ως θερμοκρασία Curie, δημιουργούνται μέσα στον κρύσταλλο ηλεκτρικά δίπολα τυχαίου προσανατολισμού, τα οποία μακροσκοπικά είναι μηδενικά. Κατά την διαδικασία πόλωσης, με την **παρουσία ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου**, τα δίπολα αυτά τείνουν να ευθυγραμμιστούν οδηγώντας μακροσκοπικά σε ένα ηλεκτρικό δίπολο. Μετά την διαδικασία ψύξης και την απομάκρυνση του πεδίου πόλωσης, τα ηλεκτρικά δίπολα δεν μπορούν να επιστρέψουν στις αρχικές τους θέσεις και το υλικό γίνεται μόνιμα πιεζοηλεκτρικό, με την δυνατότητα να μετατρέπει την μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική και αντίστροφα. Η ιδιότητα αυτή χάνεται μόνο όταν η θερμοκρασία υπερβεί την θερμοκρασία Curie, ή όταν η διάταξη μετατροπής υποβληθεί σε πολύ ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο. Μια σχηματική αναπαράσταση δομής πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου απεικονίζεται παρακάτω.

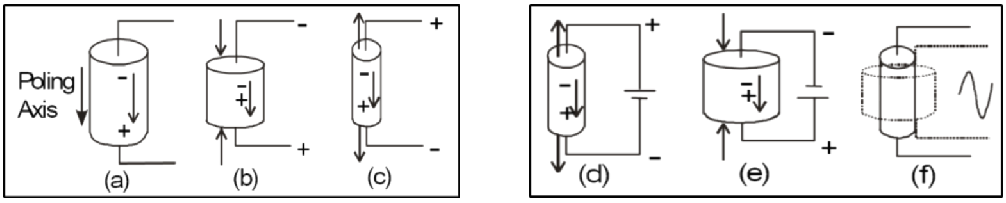


(α) Ο κρύσταλλος που δεν έχει υποστεί μηχανική τάση έχει συνολικά μηδενική διπολική ροπή. Τα βέλη αναπαριστούν διπολικές ροπές, με κάθε σετ τριών βελών να αναπαριστά ένα επίπεδο σύμπλεγμα ιόντων τύπου $A_3^{+}B^{3-}$ με ιόν τύπου B^{3-} σε κάθε κορυφή. Το άθροισμα των τριών διπολικών ροπών είναι μηδέν.

(β) Όταν ο κρύσταλλος υποστεί μηχανική τάση αναπτύσσει πόλωση στην κατεύθυνση που υποδεικνύεται. Το άθροισμα των τριών διπολικών ροπών παύει να είναι μηδέν.

Αναλυτικότερα, προκειμένου να παραχθεί το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο ένα πολυκρυσταλλικό υλικό θερμαίνεται υπό την επίδραση ενός ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Η θερμότητα επιτρέπει την αύξηση της κινητικής ενέργειας των μορίων και επιβάλει σταδιακά ενιαία διεύθυνση για όλα τα δίπολα. Η διαίρεση σε περιοχές με διαφορετική πολικότητα παύει πλέον να υφίσταται και προκύπτει μια ενιαία περιοχή πολικότητας. Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο μπορεί πλέον να παρατηρηθεί μέσα στον κρύσταλλο. C.Kittel [98]

Η σχηματική παράσταση του φαινομένου είναι η παρακάτω:



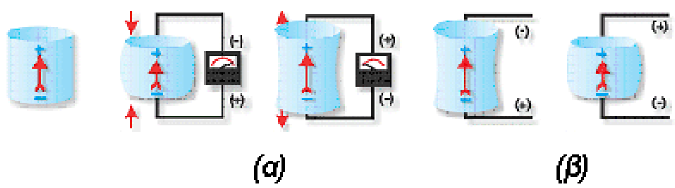
Η εικόνα δείχνει ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό προτού αυτό υποστεί κάποια δύναμη ή εφαρμοστεί ρεύμα. Αν το υλικό συμπιεστεί **(b)**, τότε μια τάση ίδιας πολικότητας με την τάση πόλωσης θα εμφανιστεί μεταξύ των ηλεκτροδίων. Αν το υλικό επιμηκυνθεί **(c)** εμφανίζεται τάση ανάστροφη ως προς την πόλωση. Αντίστροφα αν εφαρμοστεί τάση, το υλικό θα παραμορφωθεί. Μια τάση ανάστροφης πόλωσης ως προς την τάση πόλωσης θα προκαλέσει διαστολή του υλικού **(d)**. Αντίθετα μια τάση ίδιας πολικότητας προκαλεί συστολή-συμπίεση **(e)** του υλικού. Αν εφαρμοστεί ένα εναλλασσόμενο σήμα τότε το υλικό θα δονείται σύμφωνα με την συχνότητα του σήματος **(f)**. Δηλαδή για κάθε χρονική στιγμή το σώμα θα συστέλλεται ή θα διαστέλλεται ανάλογα προς την πολικότητα της τάσης τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Ο πιεζοηλεκτρικός κρύσταλλος αποκρίνεται (συστέλλεται ή διαστέλλεται) με διαφορετικούς τρόπους σε διαφορετικές συχνότητες του σήματος. Προκειμένου να επιτύχουμε διαφορετικούς τρόπους δόνησης του υλικού παράγονται πιεζοκρύσταλλοι σε διάφορα σχήματα. Για την πραγματοποίηση μικρών προϊόντων χαμηλού κόστους και υψηλής απόδοσης έχουν αναπτυχθεί συγκεκριμένοι τύποι δόνησης. Αυτοί λοιπόν προκύπτουν για συγκεκριμένες περιοχές συχνοτήτων. Έτσι υπάρχει δυνατότητα παραγωγής πιεζοηλεκτρικών προϊόντων που λειτουργούν-αποκρίνονται σε συχνότητες της τάξης των kHz μέχρι και την τάξη MHz. Μια σημαντική κατηγορία πιεζοηλεκτρικών υλικών είναι τα κεραμικά. Από αυτά μπορούν κατασκευαστούν με εκμετάλλευση του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου στοιχεία όπως ενεργοποιητές, και ζωνοδιαβατά φίλτρα .

Το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού απαντάται με δύο τρόπους:

1. Όταν το αίτιο είναι η εφαρμογή μηχανικής τάσης στο υλικό και το αποτέλεσμα είναι η πόλωση του υλικού, ονομάζεται ***ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο***. Η επίδραση εξωτερικής δύναμης έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ηλεκτρικών φορτίων στις επιφάνειες του κρυστάλλου, ο οποίος υφίσταται την μηχανική παραμόρφωση. Αυτό συμβαίνει διότι η εφαρμογή μηχανικής τάσης προκαλεί διαχωρισμό του «κέντρου βάρους» των θετικών και αρνητικών ιόντων, με αποτέλεσμα την εμφάνιση ηλεκτρικής διπολικής ροπής. Κρύσταλλοι οι οποίοι εμφανίζουν κέντρο συμμετρίας δεν παρουσιάζουν το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού αφού δεν μπορούν να διαχωρίσουν τα «κέντρα βάρους» των φορτίων. Με βάση την συμμετρία, στη φύση απαντώνται 32 κατηγορίες (τάξεις) κρυστάλλων. Από αυτές οι 20 είναι μη-κεντροσυμμετρικές και εμφανίζουν πιεζοηλεκτρική συμπεριφορά, καθώς χαρακτηρίζονται από χαμηλή συμμετρία Safari A. et.al. [99].
2. Όταν το αίτιο είναι η ηλεκτρική πόλωση του υλικού και το αποτέλεσμα η εμφάνιση μηχανικής τάσης, τότε το φαινόμενο αυτό καλείται ***αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο.***

Το *ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο* αξιοποιείται τεχνολογικά **σε αισθητήρες** (γεννήτριες) δύναμης, πίεσης, ταλάντωσης και επιτάχυνσης, ενώ το *αντίστροφο φαινόμενο* αποτελεί τη βάση **διεγερτών** (κινητήρων) και διατάξεων μετατόπισης. Π. Πίσσης [100]

Στη παρακάτω εικόνα το **(α)** δείχνει το ευθύ και το **(β)** το αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο.



Εικόνα 2.4.1: Ευθύ (α) και αντίστροφο (β) Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο

Για αναλυτικότερη προσέγγιση του φαινομένου μπορούμε να ανατρέξουμε στους V. Piefort [105], D. Charnegie [107], Erturk [207], A. Preumont [208], R.S. Dahiya, M. Valle [196], N.E du Toit [211], A. Kasyap [214].

2.4.3 Τύποι Πιεζοηλεκτρικών υλικών

Φυσικά υλικά	**Τεχνητά κρύσταλλα**
Berlinite ($AlPO_4$): σπάνιο φωσφορικό ορυκτό που είναι δομικά όμοιο με το χαλαζία,	Φωσφορικό γάλλιου (GaPO 4), (La 3 Ga 5 SiO 14),
Cane sugar: Ζαχαροκάλαμο,	**Τεχνητά Κεραμικά**
Quartz Χαλαζία (SiO_2),	Τιτανικό βάριο ($BaTiO_3$),
Αλάτι Rochelle,	Τιτανικό άλας μολύβδου ($PbTiO_3$),
Topaz: Πυριτικό ορυκτό του Αλουμινίου και του φθορίου ($ALPO_4$),	Ζιρκονικό-τιτανικό άλας μολύβδου, γνωστό ως **PZT,** το πιο κοινό πιεζοηλεκτρικό κεραμικό που χρησιμοποιείτε σήμερα,
Τουρμαλίνης: Κυκλοπυριτικά ορυκτά	Νιοβικό Κάλιο ($KNbO_3$),
Ξερά οστά, Τένοντας, Μετάξι , Ξύλο, Σμάλτο, Οδοντίνη	Νιοβικό Λίθιο ($LiNbO_3$),
Πολυμερή	Ταντaλικό λίθιο ($LiTaO_3$)
Φθοριούχο πολυβινυλιδένιο (PVDF)	

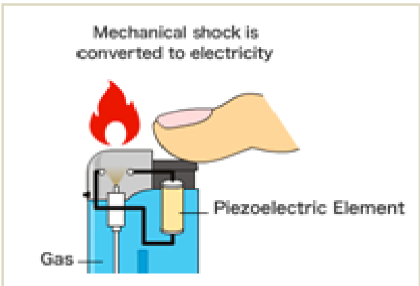
2.4.4 Ενδεικτικές Εφαρμογές

Τα πιεζοηλεκτρικά κρύσταλλα χρησιμοποιούνται σε πολυάριθμες εφαρμογές, παρακάτω θα δώσουμε περιληπτικά ορισμένα παραδείγματα.

Υψηλής τάσεως πηγές

Ο άμεσος πιεζοηλεκτρισμός μερικών ουσιών όπως του χαλαζία μπορεί να παραγάγει ηλεκτρισμό πολλών χιλιάδων βολτ.

- Διαγνωστική ιατρική συσκευή υπερήχων, ultrasonography.
- Πιθανώς η πιό γνωστή εφαρμογή είναι ο ηλεκτρικός αναπτήρας τσιγάρων: η συμπίεση του κουμπιού αναγκάζει ένα συμπιεζόμενο σφυρί να χτυπήσει ένα πιεζοηλεκτρικό κρύσταλλο. Έτσι η υψηλή παραχθείσα τάση δημιουργεί χάσμα σπινθήρων και ανάφλεξη. Τα sparklers που χρησιμοποιούνται στις σχάρες αερίου ή στις σόμπες, λειτουργούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.



Αισθητήρες - Γεννήτριες

Η αρχή της λειτουργίας ενός πιεζοηλεκτρικού αισθητήρα είναι ότι μια φυσική διάσταση, που μετασχηματίζεται σε μια δύναμη, ενεργεί σε δύο αντιτιθέμενα πρόσωπα του αισθητήριου στοιχείου. Ανάλογα με το σχέδιο ενός αισθητήρα, οι διαφορετικοί "τρόποι" που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να φορτώσουν το πιεζοηλεκτρικό στοιχείο είναι ο διαμήκης και ο εγκάρσιος.

Στις μέρες μας τέτοια υλικά χρησιμοποιούνται σε κάθε σχεδόν εφαρμογή η οποία προϋποθέτει ακριβείς μετρήσεις ή παρακολούθηση αλλαγών διαφόρων μηχανικών μεγεθών, όπως η πίεση, η δύναμη και η επιτάχυνση. Τέτοιες εφαρμογές είναι:

- Αεροδιαστημική έρευνα: τεχνολογία κατασκευής πυραύλων, συστήματα εκτίναξης επείγουσας ανάγκης, σχετικές δομικές κατασκευές.
- Βαλλιστικές μελέτες: καύση, έκρηξη, εκπυρσοκρότηση και κατανομή ηχητικής πίεσης
- Βιοϊατρική: μετρήσεις δύναμης για ορθοπεδικό βηματισμό, εργονομία, νευρολογία, καρδιολογία και αποκατάσταση υγείας. Επίσης, πιεζοηλεκτρικά microbalances χρησιμοποιούνται ως πολύ ευαίσθητοι χημικοί και βιολογικοί αισθητήρες.
- Έλεγχος μηχανών: καύση, εναλλαγή αερίων και ψεκασμός, διαγράμματα ενδείξεων.
- Βιομηχανία και εργοστάσια: κοπή μετάλλων, αυτοματοποίηση διαδικασιών συναρμολόγησης, παρακολούθηση λειτουργίας μηχανών.
- Τα πιεζοηλεκτρικά στοιχεία χρησιμοποιούνται επίσης στην παραγωγή κυμάτων sonar.

Διεγέρτες - Κινητήρες

Δεδομένου ότι οι πολύ υψηλές τάσεις αντιστοιχούν μόνο σε μικροσκοπικές αλλαγές στο πλάτος του κρυστάλλου, αυτό το πλάτος μπορεί να αλλάξει με ακρίβεια μικρόμετρου, που κάνει τα πιεζο-κρύσταλλα το σημαντικότερο εργαλείο για εφαρμογές με απαίτηση ακραίας ακρίβειας.

- Μεγάφωνα: Οι τάσεις μετατρέπονται στη μηχανική μετακίνηση μιας πιεζοηλεκτρικής πολυμερούς ταινίας.
- Πιεζοηλεκτρικές μηχανές: τα πιεζοηλεκτρικά στοιχεία εφαρμόζουν μια κατευθυντήρια δύναμη σε έναν άξονα, αναγκάζοντας τον να περιστραφεί. Λόγω των εξαιρετικά μικρών μεταβολών η μηχανή αντιμετωπίζεται ως μεγάλης ακρίβειας και μπορεί να αντικαταστήσει ένα βηματικό κινητήρα.
- Τα πιεζοηλεκτρικά στοιχεία μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ευθυγράμμιση καθρεφτών λέιζερ.
- Μια σχετική εφαρμογή είναι ο οπτικοακουστικός διαμορφωτής, μια συσκευή που δονείται ένας καθρέφτης μεταδίδοντας το φως που απεικονίζεται από μια μετατόπιση Doppler. Αυτό είναι χρήσιμο για μια συχνότητα λέιζερ.

- Τα ατομικά μικροσκόπια δύναμης και τα μικροσκόπια ανίχνευσης υιοθετούν τον αντίστροφο πιεζοηλεκτρισμό για να κρατήσουν την αισθητήρια βελόνα κοντά στον έλεγχο.
- Εκτυπωτές Inkjet: Σε μερικούς high-end εκτυπωτές Inkjet, τα πιεζοηλεκτρικά κρύσταλλα χρησιμοποιούνται για να ελέγξουν τη ροή του μελανιού από την κασέτα στο έγγραφο.
- Μηχανές diesel: η υψηλής απόδοσης κοινές μηχανές diesel χρησιμοποιούν τους πιεζοηλεκτρικούς εγχυτήρες καυσίμων, αντί των πιό κοινών συσκευών σωληνοειδών βαλβίδων.
- Μείωση των δονήσεων: π.χ. Ερευνητές του Πολυτεχνείο του Ντάρμσταντ της Γερμανίας προσπάθησαν να μειώσουν και να σταματήσουν τις δονήσεις μιας κατασκευής, με την ένωση των piezo στοιχείων. Όταν το υλικό κάμπτεται από μια δόνηση σε μια κατεύθυνση, το σύστημα αντιλαμβάνεται την κάμψη και στέλνει την ηλεκτρική ενέργεια στο piezo στοιχείο που κάμπτει στην άλλη κατεύθυνση. Σε αυτό το τομέα έχουν γίνει διάφορα πειράματα.

Καινοτόμες εφαρμογές

- Το Kohei Hayamizu έχει ένα τολμηρό όραμα για το μέλλον: μια πόλη που να είναι η ίδια ένας σταθμός παραγωγής ηλεκτρικού ρεύματος. Στο πείραμά τους ισχυρίζονται ότι στη περιοχή Shibuya όπου καθημερινά περνούν 900.000 άνθρωποι, η 20 ημερών εγκατάσταση, θα παραγάγει αρκετή ηλεκτρική ενέργεια ώστε να δουλέψουν 1.422 τηλεοράσεις για μια ώρα.
- Οι ερευνητές στο Πολυτεχνείο του Ισραήλ «Techion-Israel Institute of Technology» ελπίζουν στο να μετατρέψουν τους αυτοκινητόδρομους σε ανανεώσιμη πηγή ενέργειας, χρησιμοποιώντας τη τεχνολογία του πιεζοηλεκτρισμού. Στο σχέδιο που αναπτύχθηκε από τον Haim Abramovich, στοχεύουν στο να τοποθετήσουν πιεζοηλεκτρικούς κρυστάλλους κάτω από την άσφαλτο, όπου θα μετατρέπονται οι δονήσεις σε ηλεκτρική ενέργεια.

2.4.5 Μαθηματική Περιγραφή

Πιεζοηλεκτρισμός ως αναφέρθη είναι η ιδιότητα του υλικού να εμφανίζει ηλεκτρικό φορτίο όταν δεχθεί μια εξωτερική μηχανική τάση/πίεση. Το **ηλεκτρικό φορτίο** είναι ένα μέγεθος που μετριέται σε [C=A*s] Coulomb και ορίζεται ως η ποσότητα του ηλεκτρικού ρεύματος που μεταφέρεται από ρεύμα τιμής 1 A μέσα σε ένα δευτερόλεπτο. Οι μετρήσεις με πιεζοηλεκτρικούς αισθητήρες δίνουν φορτία της τάξης του pC.

Όσο αφορά τη μηχανική πλευρά, με βάση το νόμο του Hooke που συνδέει τη τάση με τη παραμόρφωση έχουμε: $\underline{T_j = c_{ij} \times S_j}$ ή $\underline{S_j = s_{ij} \times T_j}$

T = Συνολική τάση (stress)[N/m^2]. Δηλώνει το μέσο ποσοστό δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας και εκφράζει την ένταση των εσωτερικών δυνάμεων στη τομή.

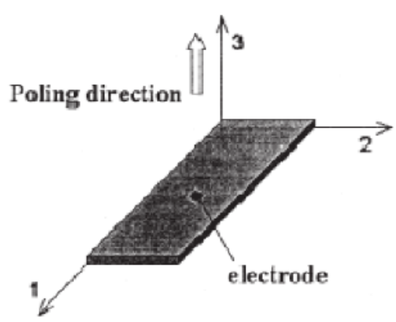
S= τροπή (strain) [m/m]. Εκφράζει την ανηγμένη παραμορφωσιμότητα ενός σώματος.

s = ελαστικότητα ή ενδοτικότητα υλικού (Elastic compliance) [m^2/N] ή ελαστική παραμόρφωση, όσο μεγαλώνει τόσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση για δεδομένο φορτίο. (Όταν Ε=0,Βραχυκύκλωμα, τότε s αντίστροφο του μέτρου Young.)

c= μέτρο ελαστικότητας Young ή ακαμψία [$Pa=N/m^2$], όσο μεγαλώνει τόσο μικρότερη είναι η παραμόρφωση για δεδομένο φορτίο.

Όσο αφορά την ηλεκτρική πλευρά με βάση τη καταστατική εξίσωση του ηλεκτρισμού, η οποία περιγράφει τη κίνηση ενός ηλεκτρικού φορτίου όταν κάποιο διηλεκτρικό υποβάλλεται σε ηλεκτρικό πεδίο, έχουμε: $\underline{D = \varepsilon \times \mathrm{E} = \varepsilon_o \mathrm{E} + P}$

D = ηλεκτρική μετατόπιση ή πυκνότητα ηλεκτρικής ροής. [C/m^2]. Δηλώνει το μέσο ποσοστό ηλεκτρικού φορτίου ανά μονάδα επιφάνειας. Σχετίζεται δε με το παραγόμενο φορτίο μέσω της σχέσης: $q = \iint [D_1 D_2 D_3] \begin{bmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{bmatrix}$, Όπου τα **$dA_1$, dA_2 ,dA_3** είναι τα συστατικά της περιοχής ηλεκτροδίου στα επίπεδα 2-3, 1-3 και 1-2 αντίστοιχα. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι το συλλεγόμενο φορτίο, q, εξαρτάται μόνον από τα συστατικά της απειροστής επιφάνειας ηλεκτροδίου ανάλογα με την ηλ. μετατόπιση **D**. Το φορτίο q και η τάση Vc, που παράγονται κατά μήκος των ηλεκτροδίων του αισθητήρα σχετίζονται μέσω της χωρητικότητας του αισθητήρα **Cp**, ως εξής: **Vc=q/Cp** . Έτσι λοιπόν, με μέτρηση του παραγόμενου φορτίου από το πιεζοηλεκτρικό υλικό από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την πίεση ανά μονάδα επιφάνειας στο υλικό. Από αυτές τις τιμές, γνωρίζοντας την παραμόρφωση του υλικού, υπολογίζεται ή τάνυση. Η ένταση του ρεύματος στην επιφάνεια του αισθητήρα δίδεται: **i(t)** = **dq(t) / dt**



ε = ηλεκτρική διαπερατότητα ή διηλεκτρική σταθερά του μέσου.[$\frac{N}{mV}$] Εκφράζει το πώς ένα ηλεκτρικό πεδίο επηρεάζεται και επηρεάζει ένα διηλεκτρικό μέσο. Ορίζεται από την ικανότητα του υλικού να επιτρέπει ή όχι τη διέλευση του ηλεκτρικού ρεύματος από μέσα του. (ε_o=διηλεκτρική σταθερά του κενού.)

E = ένταση ηλεκτρικού πεδίου [N/C] ή [V/m]. Δείχνει πως μεταβάλλεται το δυναμικό φ [J/C] στον τρισδιάστατο χώρο και ισούται με : $E = -\nabla\varphi$ ή **E = V / h_A**, όπου **h_A** το πάχος στρώματος του διεγέρτη.

P = πόλωση [C/m^2]. Μία παραμόρφωση στο υλικό δημιουργεί πόλωση ίση με **eS**, ενώ η εφαρμογή ενός ηλεκτρικού πεδίου E τείνει να ευθυγραμμίσει τα εσωτερικά δίπολα του υλικού, οπότε προκαλούνται τάσεις **–eE** [12]**.** Η πόλωση ενός πιεζοηλεκτρικού υλικού περιλαμβάνει δύο συνιστώσες. Την πόλωση που φυσιολογικά θα προέκυπτε με την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου σε ένα μονωτή και την πόλωση που θα εμφανιστεί την περίπτωση εφαρμογής μηχανικής τάσης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ηλεκτρικές και μηχανικές καταστατικές εξισώσεις σε ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό είναι συζευγμένες, έχουμε: $\{P\} = [(\varepsilon_{ij} - 1)\varepsilon_0]\{\mathrm{E}\} + [d_{ij}]\{T\}$

, όπου ο **d** πιεζοηλεκτρικός συντελεστής: $d = \left(\dfrac{\theta P}{\theta \mathrm{T}}\right)_{\mathrm{E}} = \left(\dfrac{\theta S}{\theta E}\right)_{T}$

Με βάση τη σχέση της πόλωσης η ηλεκτρική μετατόπιση γίνεται: $\{D\} = [\varepsilon_0 \varepsilon_{ij}]\{\mathrm{E}\} + [d_{ij}]\{T\} = [\varepsilon_0 \varepsilon_{ij}]\{\mathrm{E}\} + [d_{ij}][c_{ij}]\{S\}$

e = πιεζοηλεκτρική σταθερά σύζευξης για τη μορφή εξισώσεων μηχανικής τάσης-φορτίου [C/m^2 ή NV^{-1}/m].

Οι καταστατικές εξισώσεις του πιεζοηλεκτρισμού γράφονται σε διάφορες μορφές, ανάλογα με τη μεταβλητή που κρατάμε σταθερή. Αρχικά δημοσιεύτηκαν από την επιτροπή προτύπων IEEE Ultrasonics [101] οι παρακάτω:

$$S = s_E \cdot T + d^t \cdot E \quad (2.4.3.1)$$
$$D = d \cdot T + \varepsilon_{\mathrm{T}} \cdot E \quad (2.4.3.2)$$

$\mathbf{s_E}$ = ελαστικότητα υπό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο (E) [m^2/N]

$\boldsymbol{\varepsilon_T}$ = ηλεκτρική διαπερατότητα (Permitivity) υπό σταθερή τάση (T)

*εν γένει ο δείκτης δείχνει τη σταθερή μεταβλητή.

d = πίνακας πιεζοηλεκτρικών σταθερών [C/N ή m/V] (Piezoelectric constant)

Από τις παραπάνω εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι η παραμόρφωση και η ηλεκτρική μετατόπιση του υλικού έχουν γραμμική εξάρτηση από τη μηχανική τάση και το ηλεκτρικό πεδίο στο οποίο υποβάλλονται.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τις καταστατικές εξισώσεις σε διαφορετικές μορφές Piefort V. [105], Zhou Y.S et.al. [106], Βουτευτάκη [102], Φελέκης [103].

Α) ΜΟΡΦΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ-ΦΟΡΤΙΟΥ

$$S = s_E \cdot T + d^t \cdot E \quad (\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi o)$$
$$D = d \cdot T + \varepsilon_{\mathrm{T}} \cdot E \quad (\varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon})$$

Β) ΜΟΡΦΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΑΣΗΣ-ΦΟΡΤΙΟΥ

$$T = c_E \cdot S - e^t \cdot E \quad (\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi o)$$
$$D = e \cdot S + \varepsilon_s \cdot E \quad (\varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon})$$

Γ) ΜΟΡΦΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ-ΗΛ. ΤΑΣΗΣ

$$S = s_D \cdot T + g^t \cdot D \quad (\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi o)$$
$$E = -g \cdot T + \beta_{\mathrm{T}} \cdot D \quad (\varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon})$$

Δ) ΜΟΡΦΗ ΜΗΧ. ΤΑΣΗΣ - ΗΛ. ΤΑΣΗΣ

$$T = c_D \cdot S + h^t \cdot D \quad (\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi o)$$
$$E = -h \cdot S + \beta_S \cdot D \quad (\varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon})$$

*ο δείκτης t δηλώνει τη μήτρα της σταθεράς μεταβλητής για το αντίστροφο φαινόμενο.

Όπου,

[c] και [s], πίνακες σταθερών ελαστικότητας

[ε] και [β], πίνακες διηλεκτρικών σταθερών

[d], [e], [g] και [h], πίνακες πιεζοηλεκτρικών σταθερών

Και μεταξύ τους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$[c_D]=[c_E]+[e_T][h] \qquad [e]=[d][c_E]=[d][s_E^{-1}]$$
$$[s_D]=[c_D]-[d_T][g] \qquad [d]=[\varepsilon_{\mathrm{T}}][g]$$
$$[\varepsilon_{\mathrm{T}}]=[\varepsilon_S]-[d_T][e] \qquad [g]=[h][s_D]=[\varepsilon^{-1}{}_{\mathrm{T}}][d]$$
$$[\beta_S]=[\beta_{\mathrm{T}}]-[g_T][h] \qquad [h]=[\beta_S][e]$$

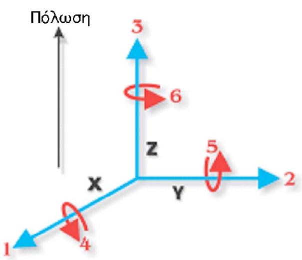
$$d_{ij}=\left(\frac{\theta D_i}{\theta \mathrm{T}_j}\right)_{\mathrm{E}}=\left(\frac{\theta S_i}{\theta E_j}\right)_T \qquad e_{ij}=\left(\frac{\theta D_i}{\theta S_j}\right)_{\mathrm{E}}=\left(\frac{\theta T_i}{\theta E_j}\right)_S$$

$$g_{ij}=-\left(\frac{\theta E_i}{\theta \mathrm{T}_j}\right)_D=\left(\frac{\theta S_i}{\theta D_j}\right)_T \qquad h_{ij}=-\left(\frac{\theta E_i}{\theta S_j}\right)_D=-\left(\frac{\theta T_i}{\theta D_j}\right)_S$$

$$[c_E][s_E]=[c_D][s_D]=I_6$$
$$[\beta_S][\varepsilon_S]=[\beta_T][\varepsilon_T]=I_3$$

Σχέσεις : Πιεζοηλεκτρικές Σταθερές , [104]

Επειδή τα πιεζοηλεκτρικά υλικά είναι ανισοτροπικά, οι φυσικές σταθερές εξαρτώνται τόσο από τη κατεύθυνση της εφαρμοζόμενης μηχανικής ή ηλεκτρικής δύναμης, όσο και από τις κάθετες διευθύνσεις στην εφαρμοζόμενη δύναμη. Συνεπώς, κάθε σταθερά έχει δύο δείκτες που υποδηλώνουν τις κατευθύνσεις των δύο σχετιζόμενων ποσοτήτων, όπως πχ για την ελαστικότητα η τάση και η τροπή.



Η κατεύθυνση θετικής πόλωσης, συνήθως, επιλέγεται η κατεύθυνση του Z άξονα. Οι δείκτες 1,2,3 υποδηλώνουν κατεύθυνση X,Y,Z αντίστοιχα, ενώ οι 4,5,6 υποδηλώνουν διάτμηση κατά X,Y και Z αντίστοιχα.

d_{ij}= πιεζοηλεκτρική σταθερά φόρτισης (-μηχανικής παραμόρφωσης).

Ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο: Εκφράζει τη πόλωση (P) ανά μονάδα εφαρμοζόμενης μηχανικής τάσης (T). Ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στη διεύθυνση πόλωσης όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν και ο δεύτερος στη διεύθυνση της εφαρμοζόμενης δύναμης.

Αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο: Εκφράζει τη μηχανική παραμόρφωση (S) ανά μονάδα εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου (E). Ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στη διεύθυνση του εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου και ο δεύτερος στη διεύθυνση παραμόρφωσης που προκύπτει.

$$d = k\sqrt{\frac{\varepsilon^T}{Y^E}} \quad \left(\frac{m}{V}\right) \quad d_{31} = k_{31}\sqrt{\frac{\varepsilon_{33}^T}{Y_{11}^E}},\ d_{33} = k_{33}\sqrt{\frac{\varepsilon_{33}^T}{Y_{33}^E}},\ d_{15} = k_{15}\sqrt{\frac{\varepsilon_{11}^T}{Y_{44}^E}}$$

g_{ij}= πιεζοηλεκτρική σταθερά ηλεκτρικού πεδίου(-μηχανικής παραμόρφωσης).

Ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο: Εκφράζει το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται ανά μονάδα εφαρμοζόμενης μηχανικής τάσης. Ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου (E) και ο δεύτερος στη διεύθυνση της εφαρμοζόμενης δύναμης (F).

Αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο: Εκφράζει τη μηχανική παραμόρφωση ανά μονάδα εφαρμοζόμενης ηλεκτρικής μετατόπισης. Ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στη διεύθυνση της εφαρμοζόμενης ηλεκτρικής μετατόπισης (D) και ο δεύτερος στη διεύθυνση της παραμόρφωσης που προκύπτει (S).

$$g = \frac{d}{\varepsilon^T} \quad \left(\frac{V \cdot m}{N}\right) \quad g_{31} = \frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^T} \quad , \quad g_{33} = \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \quad , \quad g_{15} = \frac{d_{15}}{\varepsilon_{11}^T}$$

k_{ij}= πιεζοηλεκτρική σταθερά ηλεκτρομηχανικής ζεύξης.

Ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο: Εκφράζει την απόδοση μετατροπής της μηχανικής ενέργειας σε ηλεκτρική.

Αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο: Εκφράζει τη δυνατότητα του υλικού να μετατρέπει την ηλεκτρική ενέργεια σε μηχανική. Ο πρώτος δείκτης συμβολίζει τη διεύθυνση της ηλεκτρικής ενέργειας που παράγεται ή εφαρμόζεται και ο δεύτερος συμβολίζει την αντίστοιχη μηχανική ενέργεια.

$$k^2 = \frac{\text{Μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε ηλεκτρική}}{\text{Προσφερόμενη μηχανική ενέργεια}} \text{ ή } \frac{\text{Ηλεκτρική ενέργεια που μετατρέπεται σε μηχανική}}{\text{Προσφερόμενη ηλεκτρική ενέργεια}}$$

$$k^2 = \frac{d^2}{S^E \varepsilon^T} \text{ ή } \frac{k^2}{1-k^2} = \frac{g^2 \varepsilon^T}{S^D}$$

Για γραμμικά πιεζοηλεκτρικά υλικά η αλληλεπίδραση μεταξύ μηχανικών και ηλεκτρικών μεταβλητών μπορεί να περιγραφεί από τις παρακάτω γραμμικές σχέσεις σε μορφή πίνακα [105], Giurgiutiu V.[108].

<u>Διεγέρτης</u>

$$\begin{matrix}\text{ορθή τάση}\left\{\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right.\\ \text{διατμητική τάση}\left\{\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right.\end{matrix}\begin{bmatrix}S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\\ S_5\\ S_6\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0\\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0\\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E=2(s_{11}^E-s_{12}^E)\end{bmatrix}}_{\text{ελαστικότητα-ενδοτικότητα}}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\\ T_4\\ T_5\\ T_6\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}d_{11} & d_{21} & d_{31}\\ d_{12} & d_{22} & d_{32}\\ d_{13} & d_{23} & d_{33}\\ d_{14} & d_{24} & d_{34}\\ d_{15} & d_{25} & d_{35}\\ d_{16} & d_{26} & d_{36}\end{bmatrix}}_{\text{σύζευξη}}\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix}$$

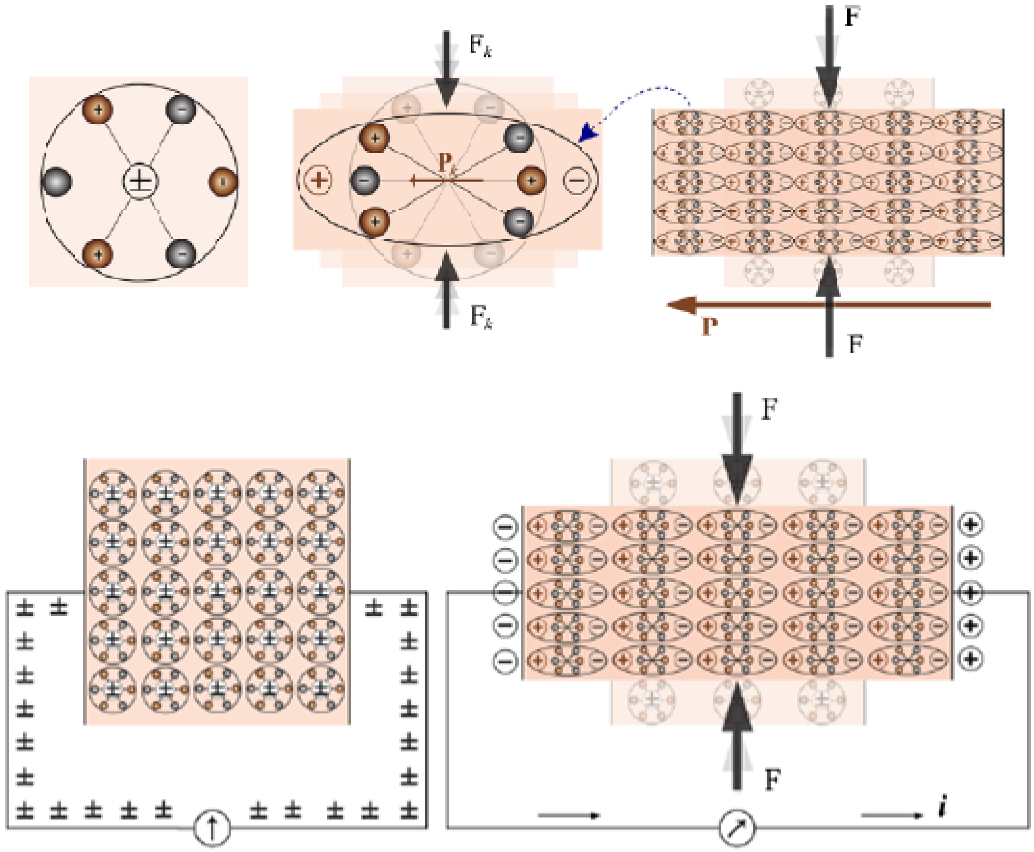
<u>Αισθητήρας</u>

$$\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\\ D_3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26}\\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36}\end{bmatrix}}_{\text{σύζευξη}}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\\ T_4\\ T_5\\ T_6\end{bmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\text{ορθή τροπή}\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\text{διατμητική τροπή}\end{matrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}}_{\text{διηλεκτρική σταθερά}}\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix}$$

Όπου για υλικό PZT:

$$[d]_{PZT}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0\\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0\\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$,Piefort V. [105]

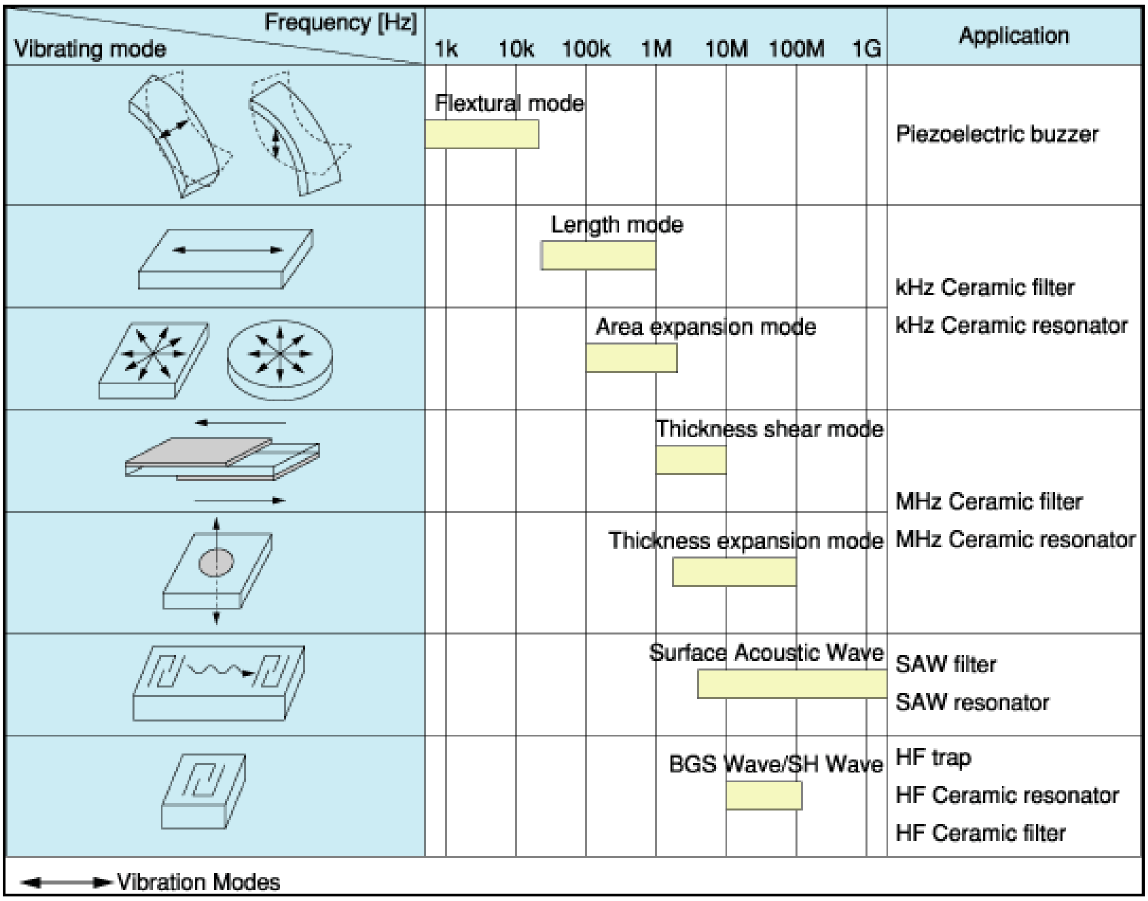
Ανασκόπηση πιεζοηλεκτρικού φαινομένου με απλές εικόνες:



Εικόνα 2.4.3: Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο, από το ατάραχο μόριο χωρίς πιεζοηλεκτρική πολικότητα έως το βραχυκυκλωμένο πιεζοηλεκτρικό υλικό υπό την εφαρμογή εξωτερικής δύναμης [196]

Τυποποιημένοι τρόποι απόκρισης πιεζοηλεκτρικού υλικού.

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τους τυποποιημένους τρόπους απόκρισης ενός πιεζοηλεκτρικού υλικού και την περιοχή συχνοτήτων στην οποία αυτό συμβαίνει. Επίσης δίνει και την αξιοποίηση σε εφαρμογές για κάθε περίπτωση.

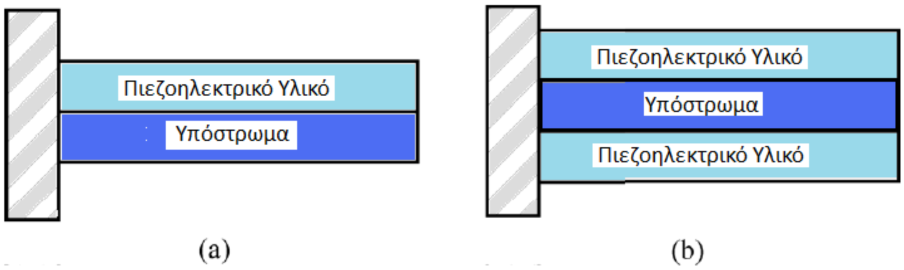


Εικόνα 2.4.4: Πίνακας τρόπων απόκρισης πιεζοηλεκτρικού υλικού [109]

2.4.6 Πιεζοηλεκτρική πρόβολος δοκός

Εισαγωγή

Τα πιεζοηλεκτρικά στοιχεία κάμψης όπως η Bimorph και Unimorph πρόβολοι δοκοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως διεγέρτες ή αισθητήρες για μεγάλο εύρος εφαρμογών, όπως σε ηλεκτρονόμους (relays), συστήματα MEMS, μεγάφωνα, μικροαντλίες, αισθητήρες ήχου, εκτυπωτές, ελεγκτές βαλβίδων, μικρορομποτικές εφαρμογές κ.ά.. Ως διεγέρτες-actuators (ή κινητήρες-motors) μετατρέπουν την εισαγόμενη ηλεκτρική ενέργεια σε μηχανική και ως αισθητήρες-sensors (ή γεννήτριες -generators) μετατρέπουν την εξωτερική μηχανική «διέγερση» σε ηλεκτρικό φορτίο ή ηλεκτρικό δυναμικό. Επειδή τα πιεζοηλεκτρικά στοιχεία είναι εύθραυστα δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μοναδικό φέρον στοιχείο, οπότε τα υποστρώματα που χρησιμοποιούνται προσδίδουν στη κατασκευή ακαμψία και αντοχή.



Εικόνα 2.4.5: Πιεζοηλεκτρικοί πρόβολοι δοκοί, a) Unimorpf , b) Bimorph
*Το υλικό του υποστρώματος είναι συνήθως ελαστικό υλικό-μεταλλικό.

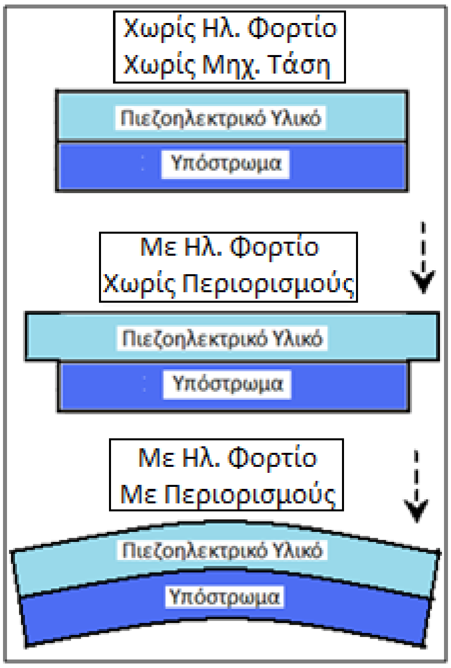
Οι βασικότεροι ρόλοι αυτών των πιεζοηλεκτρικών συσκευών συνήθως είναι οι παρακάτω:

1. Η συλλογή ενέργειας από το περιβάλλον και αξιοποίησή της για μια μικρή αυτόνομη συσκευή (energy harvesting), όπως στις αναφορές των Anton & Sodano [198], Adhikari, Friswell & Inman [199], Priya & Inman [200], Friswell & Adhikari [204].
2. Η εξάλειψη κραδασμών και ταλαντώσεων σε μικρές ή μεγαλύτερες συσκευές όπως αναλύονται στους Baile & Hubbard [201], Garcia et al. [202] , Fuller et al. [203] και Zhang & Sun [47].
3. Γενικά ως διεγέρτες όπως αναλύονται στους Todals [205], Yoseph Bar-Cohen & Zensheu Chang [206]

Παρακάτω γίνεται μια σύντομη αναφορά στη πιεζοηλεκτρική πρόβολο και στη μοντελοποίηση έξυπνων κατασκευών, ενώ για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στους Bandyopadhyay B., Manjunath T. C. & Unapathy M. [215], D. Charnegie [107] Μουτσοπούλου Α. [195], A. Erturk [207], Ballas R. G. [216], S. Priya & D. Inman [200], A. Preumont [208], S. Gross [209] , N.E. du Toit [211], A. Kasyap [214], Weinberg [217], Sunghwan [220].

Οι πιεζοηλεκτρικές πρόβολοι δοκοί αποτελούνται από στρώσεις πιεζοηλεκτρικών υλικών και υποστρωμάτων, συνήθως από ελαστικά υλικά. Τα ηλεκτρόδια των πιεζοηλεκτρικών υλικών, ανάλογα με τη λειτουργία που θέλουμε να πετύχουμε μπορούν να συνδέονται εν σειρά ή εν παραλλήλω, να έχουν διάφορα σχήματα και να επενεργούν σε διάφορα μέρη της δοκού.

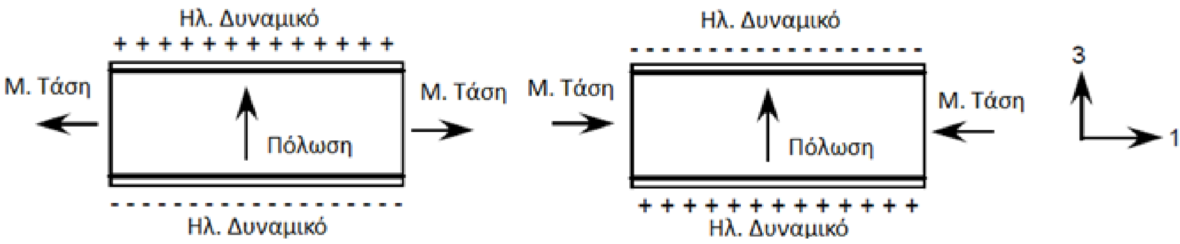
Η βασική ιδέα της λειτουργίας αυτών των δοκών έγκειται στο ότι η τάση στο ένα στρώμα επηρεάζει τη τάση στο άλλο στρώμα και έτσι όταν το ένα στρώμα βρίσκεται υπό θλίψη το άλλο βρίσκεται υπό εφελκυσμό. Για παράδειγμα σε μια Unimorph πιεζοηλεκτρική δοκό, όταν εφαρμόζεται στη πιεζοηλεκτρική στρώση ηλεκτρικό πεδίο, αυτή επεκτείνεται ή συστέλλεται και καθώς το μη πιεζοηλεκτρικό στοιχείο δεν επηρεάζεται από το ηλεκτρικό πεδίο όλη η δοκός κάμπτεται. Αυτή η κάμψη παράγει ηλεκτρικό φορτίο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναλόγως.



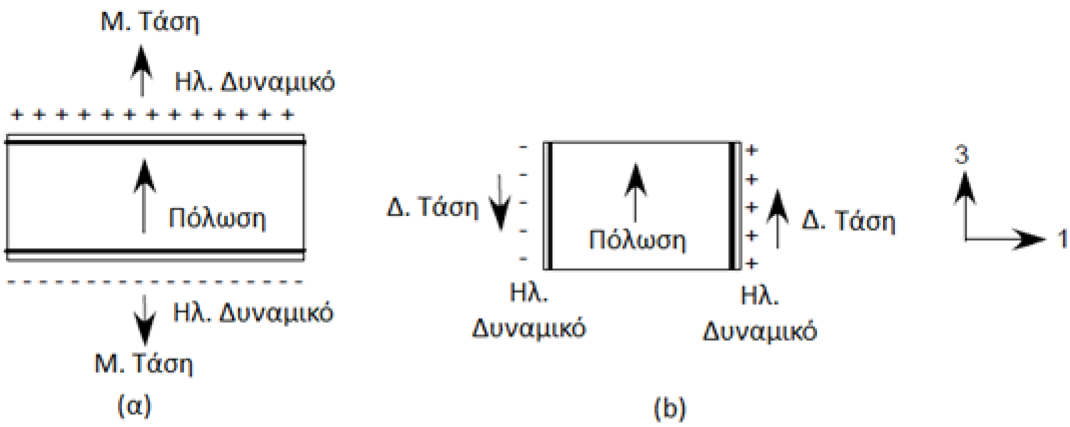
Παρά τον υψηλό πιεζοηλεκτρικό συντελεστή που έχουν τα PZT που μελετάμε εδώ, το πραγματικό μέγεθος της παραμόρφωσης είναι σχετικά χαμηλό, συνήθως 0,1%, ωστόσο για πολλές εφαρμογές το μέτρο ελαστικότητας (70 – 100GPa) και οι δυνάμεις που παράγονται είναι αρκετά μεγάλες.

Οι συντελεστές που ορίζουν πόσο αποδοτικό είναι το πιεζοϋλικό είναι οι d και g, όπου όσο μεγαλύτεροι είναι, τόσο περισσότερη ενέργεια μπορεί να παραχθεί υπό συγκεκριμένη τάση και τόσο περισσότερο θα παραμορφωθεί η συσκευή υπό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, αντίστοιχα.

Εν γένει, ένα Μολύβδου Ζιρκονίου Τιτανίου (PZT) υλικό κλάσης κρυστάλλου 4mm έχει 5 πιεζοηλεκτρικές σταθερές (d ή g) τις d_{31}, d_{33}, d_{32}, d_{15}, και d_{24} ενώ όλες οι άλλες είναι μηδέν [107]. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η σταθερά d_{31} είναι ίση με τη d_{32} εφόσον οι διευθύνσεις 1 και 2 είναι κάθετες στη 3 και το υλικό είναι ισοτροπικό στο επίπεδο 1-2. Επίσης η d_{15} και η d_{24} είναι ίσες λόγω ισοτροπικού υλικού. Οπότε οι πιεζοηλεκτρικές σταθερές που μας ενδιαφέρουν είναι οι d_{31}, d_{33} και η d_{15} όπου $d_{33} \cong 2x\ d_{31}$ και $d_{15} \cong 2x\ d_{31}$. Αν και οι d_{31}, d_{33} είναι μικρότερες από την d_{15} μας διευκολύνουν στους υπολογισμούς μας και στη κατανόηση της εφαρμογής τους σε πραγματικές κατασκευές. Ανάλογα με τις σταθερές που επιλέγουμε έχουμε και μια διαφορετική κατάσταση φόρτισης, όπως παρουσιάζεται παρακάτω. Η γενική μαθηματική περιγραφή του πιεζοηλεκτρισμού έχει προηγηθεί στο *2.4.5* κεφάλαιο, ενώ θα αναφερθούμε και στο *2.4.7*.

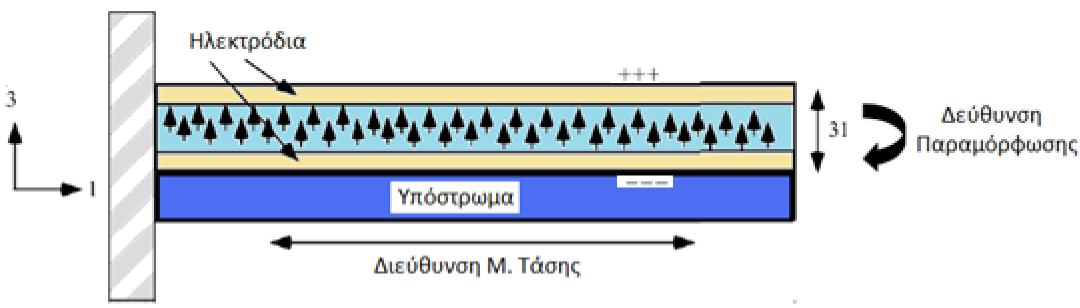


Εικόνα 2.4.6: Τμήμα πιεζοηλεκτρικής δοκού. [107]
Κατάσταση 31. Ηλ. Δυναμικό στη 3 και εμφάνιση Μηχανικής τάσης στην 1

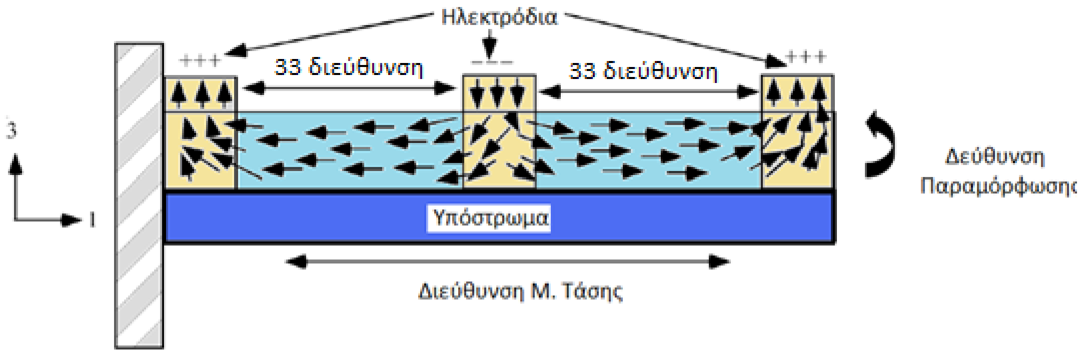


Εικόνα 2.4.7: Τμήματα πιεζοηλεκτρικής δοκού. [107]
(α): Κατάσταση 33. Ηλ. Δυναμικό στη 3 και εμφάνιση Μηχανικής τάσης στην 3
(b): Κατάσταση 15. Ηλ. Δυναμικό στη 1 και εμφάνιση Διατμητικής τάσης στην 5

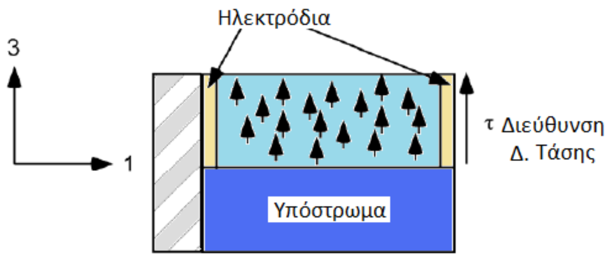
Παραδείγματα καταστάσεων σε πιεζοηλεκτρικές Unimorph προβόλους δοκούς



Εικόνα 2.4.8: Κατάσταση 31 [107]



Εικόνα 2.4.9: Κατάσταση 33 [107]

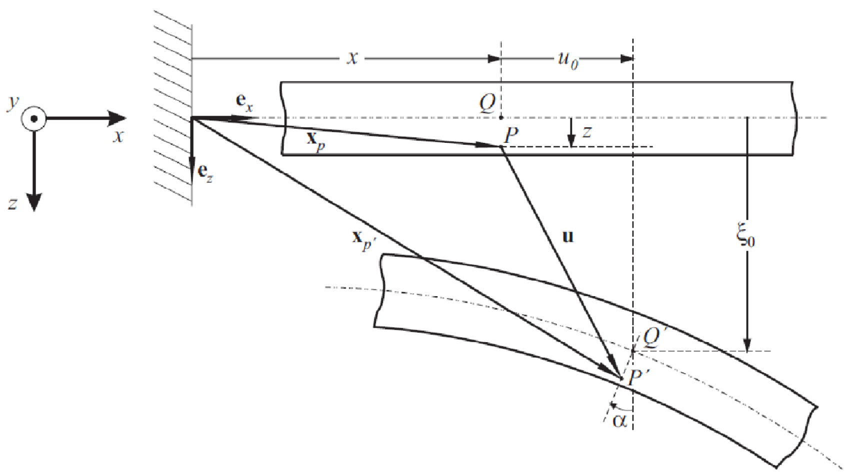


Εικόνα 2.4.10: Κατάσταση 15 (δύσκολη κατασκευή) [107]

Γενική Μαθηματική Μοντελοποίηση πιεζοηλεκτρικής δοκού Διεγέρτη n-στρώσεων

Υπόθεση Euler-Bernouli

Παρακάτω αναλύουμε τη κινηματική της παραμόρφωσης της πιεζοηλεκτρικής δοκού σύμφωνα με τη θεωρία Bernoulli-Euler, όπως πραγματοποιήθηκε και παραπάνω.



Εικόνα 2.4.11: Παραμορφωμένο τμήμα δοκού [216]

Η συνολική παραμόρφωση u από το P στο P' δίδεται: **u**=$X_{P'}$ -X_P , όπου X_P=χ**e**$_x$+ z**e**$_z$ και $X_{P'}$=(x+ u_0-z sinα) **e**$_x$+(ξ+ z cosα) **e**$_z$. Για μικρές παραμορφώσεις sin a≅a και cos a≅1, οπότε **u**=(u_0-z*α) **e**$_x$+ ξ. Συνεπώς: u=u_0-z*α, υ=0 και ξ=w

Οι παραμορφώσει που αναπτύσονται έχουν τη μορφή:

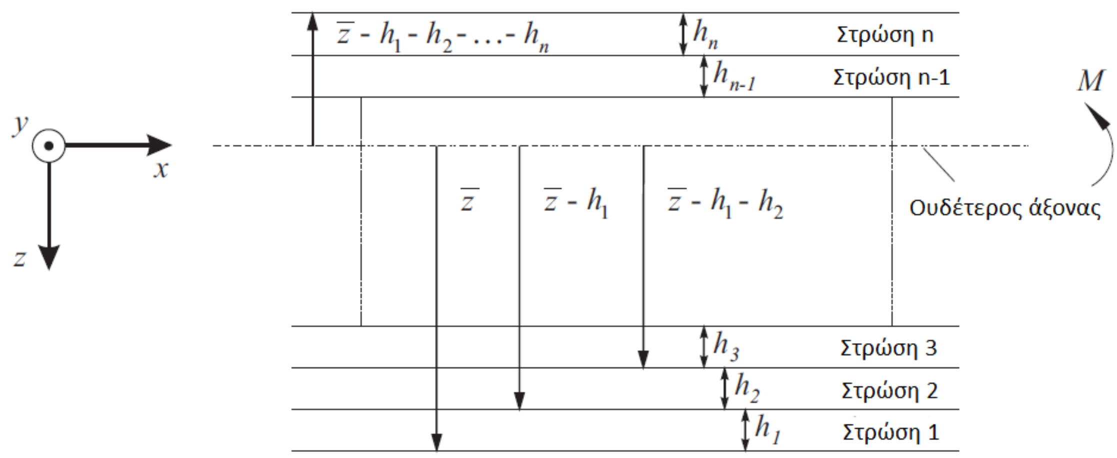
$$S_{xx} = \frac{\partial\, u_0}{\partial x} - z\frac{\partial\, a}{\partial x} \quad ,S_{yy} = \frac{\partial\, \upsilon}{\partial z} - z\frac{\partial\, a}{\partial x} \quad ,2S_{xz} = \frac{\partial\, w}{\partial x} + \frac{\partial\, u}{\partial z} = \frac{\partial\, \xi}{\partial x} - a$$

Όπου λόγω θεώρησης Euler-Bernoulli $S_{xz} = 0$ => $a = \frac{\partial\, \xi}{\partial x}$ => $S_{xx} = \frac{\partial\, u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$.

Επίσης ορίζουμε τη παραμόρφωση του ουδέτερου άξονα ως $\varepsilon^0 = \frac{\partial\, u_0}{\partial x}$ και τη καμπυλότητα του ουδέτερου άξονα ως $\kappa^0 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ => $S_{xx} = S_1 = \varepsilon^0 - z\kappa^0$. Αν δεν εφαρμοστεί κάποια αξονική δύναμη F_N , σημαίνει ότι ε^0=0, οπότε $S_1 = -z\kappa^0$ και δε μπορεί να υπολογισθεί αν δεν είναι γνωστός ο ουδέτερος άξονας.

Υπολογισμός Ουδέτερου Άξονα

Εν γένει ένα πιεζοηλεκτρικό στοιχείο κάμψης όπως αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω μπορεί να αποτελείται από n στρώσεις διαφορετικού υλικού και πάχους, πιεζοηλεκτρικές ή μη.



Εικόνα 2.4.12: Ουδέτερος άξονας πολυστρωματικού τμήματος δοκού [216]

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς:

1) Αν εφαρμόζεται εξωτερική καμπτική ροπή M, το άθροισμα όλων των δυνάμεων στη x-διεύθυνση είναι μηδέν : $\sum_{i=1}^{n} F_{1,i} = 0$.

2) $S_1 = -z\kappa^0$.

3) Για ελαστικά υλικά εφαρμόζεται ο νόμος του Hook, οπότε η μηχανική τάση στη x-διεύθυνση, $T_{1,i}$, μπορεί να υπολογισθεί από : $T_{1,i}(x,z) = -\frac{z\kappa^0}{s_{11,i}}$.

Οπότε η μηχανική τάση στη i-οστή στρώση μπορούμε να πούμε ότι υπολογίζεται από $T_{1,i} = \frac{dF_{1,i}}{dA_i}$, όπου dA_i στοιχειώδης επιφάνεια στο επίπεδο y-z.

$T_{1,i} = \frac{dF_{1,i}}{dA_i}$ => $F_{1,i} = -\int_{h_{i,u}}^{h_{i,o}} \frac{w_i\kappa^0}{s_{11,i}} zdz$ => $\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{s_{11,i}} \int_{h_{i,u}}^{h_{i,o}} zdz = 0$, όπου $\mathbf{w_i}$ είναι το πλάτος της στρώσης i, και τα $h_{i,u}$, $h_{i,o}$ είναι τα κάτω και άνω όρια της στρώσης και υπολογίζονται ως: $h_{i,u} = \bar{z} - \sum_{j=1}^{i} h_j \quad \kappa\alpha\iota \quad h_{i,o} = \bar{z} - \sum_{j=1}^{i-1} h_j$

Επιλύοντας το $\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{s_{11,i}} \int_{h_{i,u}}^{h_{i,o}} zdz = 0$ ως προς z βρίσκουμε τη θέση του ουδέτερου άξονα ως [216]:

$$\bar{z} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i \sum_{j=1}^{i} h_j}{2\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i}$$

Υπολογισμός Δυνάμεων, Ροπών και Ενέργειας

Παρακάτω εισάγουμε στις εξισώσεις και την ηλεκτρομηχανική σύζευξη βάση των πιεζοηλεκτρικών καταστατικών εξισώσεων που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 2.4.5. και παρουσιάζουμε την ανάλυση που έχει δοθεί από τον R.G. Ballas [216].

Οι αρχικές μας υποθέσεις είναι οι ακόλουθες:

1) Το διάνυσμα ηλ. δυναμικού αναπτύσσεται μόνο στη z-κατεύθυνση

2) Κατά μήκος της χ κατεύθυνσης αναπτύσσονται μόνο μηχανικές τάσεις: $T_2=\ldots=T_6=0$

3) Οι καταστατικές εξισώσεις που χρησιμοποιούμε είναι: $\begin{aligned} S_1 &= s^{11}{}_E \cdot T_1 + d_{31} \cdot E_3 \\ D_3 &= d_{31} \cdot T_1 + \varepsilon^{33}{}_T \cdot E_3 \end{aligned}$

Οπότε, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\varepsilon^0=0$ και $S_1 = -z\kappa^0$ έχουμε:

Μηχανική τάση: $T_{1,i} = \dfrac{1}{s_{11,i}}[-z\kappa^0 - d_{31,i}E_{3,i}]$

Καμπτική Ροπή: $M = \sum_{i=1}^{n} w_i \int_{h_{i,u}}^{h_{i,o}} T_{1,i} z dz$, όπου από αντικατάσταση, σύμφωνα με το [216]

έχουμε: $M = -\kappa^0 \underbrace{\dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{w_i}{s^E_{11,i}}\left[h^3_{i,o} - h^3_{i,u}\right]}_{\equiv C} - \underbrace{\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{w_i}{s^E_{11,i}} d_{31,i}E_{3,i}\left[h^2_{i,o} - h^2_{i,u}\right]}_{\equiv M\ \ piezo}$ =>

=> $M = -C\kappa^0 - M_{Piezo}$ => $\kappa^0 = -\dfrac{M + M_{Piezo}}{C}$

Οι ποσότητες C και M_{Piezo} , σύμφωνα με [206], αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα την αντίσταση σε κάμψη και τη καμπτική ροπή από το πιεζοηλεκτρικό σύστημα.

Η μαθηματική τους έκφραση είναι:

$$C = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{s^E_{11,i}}\left[3h_i\left(\bar{z} - \sum_{j=1}^{i} h_j\right)\left(\bar{z} - \sum_{j=1}^{i-1} h_j\right) + h_i^3\right]$$

$$M_{Piezo} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{s^E_{11,i}} d_{31,i}E_{3,i}\left[2\bar{z}h_i - 2h_i\sum_{j=1}^{i} h_j + h_i^2\right]$$

Συνολική αποθηκευμένη ενέργεια εντός κατασκευής

Η συνολική ενεργειακή πυκνότητα w_{tot} αποτελείται από δύο μέρη, το ελαστικό και το ηλεκτροστατικό. Εν γένει ορίζεται ως:

$$\text{Ενέργεια} = \frac{1}{2}\text{Παραμόρφωση} * \text{Τάση} + \frac{1}{2}\text{Ηλεκτρική Πυκνότητα} * \text{Ηλεκτρικό Φορτίο}$$

Συνεπώς, για τις παραδοχές του παραδείγματος έχουμε:

$w_{tot} = \dfrac{1}{2}T_{ij}S_{ij} + \dfrac{1}{2}E_iD_i$ => $w_{tot} = \dfrac{1}{2}T_{11}S_{11} + \dfrac{1}{2}E_3D_3$ => $w_{tot} = \dfrac{1}{2}s^{E}_{11}T_1^2 + d_{31}E_3T_1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon^{T}_{33}E^2_3$

Για την στρώση i η προηγούμενη γίνεται: $w_{tot,i} = \dfrac{1}{2}s^{E}_{11,i}T_{1,i}^{\ 2} + d_{31,i}E_{3,i}T_{1,i} + \dfrac{1}{2}\varepsilon^{T}_{33,i}E^2_{3,i}$

Η κατ'όγκο ολοκλήρωση για μια στρώση δίνει τη συνολική αποθηκευμένη ενέργεια $W_{tot,i}$

$$W_{tot,i} = \int_{h_{i,u}}^{h_{i,o}} \int_0^{w_i} \int_0^{l} w_{tot,i} dxdydz \Rightarrow$$

$$W_{tot,i} = \int_{h_{i,u}}^{h_{i,o}} \int_0^{w_i} \int_0^{l} \left[\frac{1}{2} s^{\mathrm{E}}{}_{11,i} T_{1,i}{}^{2} + d_{31,i} E_{3,i} T_{1,i} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mathrm{T}}{}_{33,i} E^{2}{}_{3,i} \right] dxdydz$$

,όπου σύμφωνα με [206] παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} W_{tot,i} = \; & \frac{1}{6} \int_0^{l} \left[\frac{w_i}{s^{\mathrm{E}}{}_{11,i}} \left(h^{3}{}_{i,o} - h^{3}{}_{i,u} \right) \left(\kappa^{0} \right)^{2} \right] dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{l} \left[\frac{w_i}{s^{\mathrm{E}}{}_{11,i}} d^{2}{}_{31,i} E^{2}{}_{3,i} \left(h_{\,i,o} - h_{\,i,u} \right) \right] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{l} \left[\varepsilon^{\mathrm{T}}{}_{33,i} E^{2}{}_{3,i} w_i \left(h^{3}{}_{i,o} - h^{3}{}_{i,u} \right) \right] dx \end{aligned}$$

Μετά από αριθμητικές πράξεις και αντικαταστάσεις η συνολική ενέργεια για τη κατασκευή δίδεται από :

$$\begin{aligned} W_{tot} = \; & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l} \left[\varepsilon_{33,i}^{T} E_{3,i}^{2} w_i h_i \right] dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l} \left[\frac{w_i h_i}{s_{11,i}^{E}} d_{31,i}^{2} E_{3,i}^{2} \right] dx \\ & + \int_0^{l} \left[\frac{M^2}{2C} + \frac{M M_{Piezo}}{C} + \frac{M_{Piezo}^{2}}{2C} \right]^{2} dx \end{aligned}$$

<u>Εκτατικά και Εντατικά μεγέθη</u>

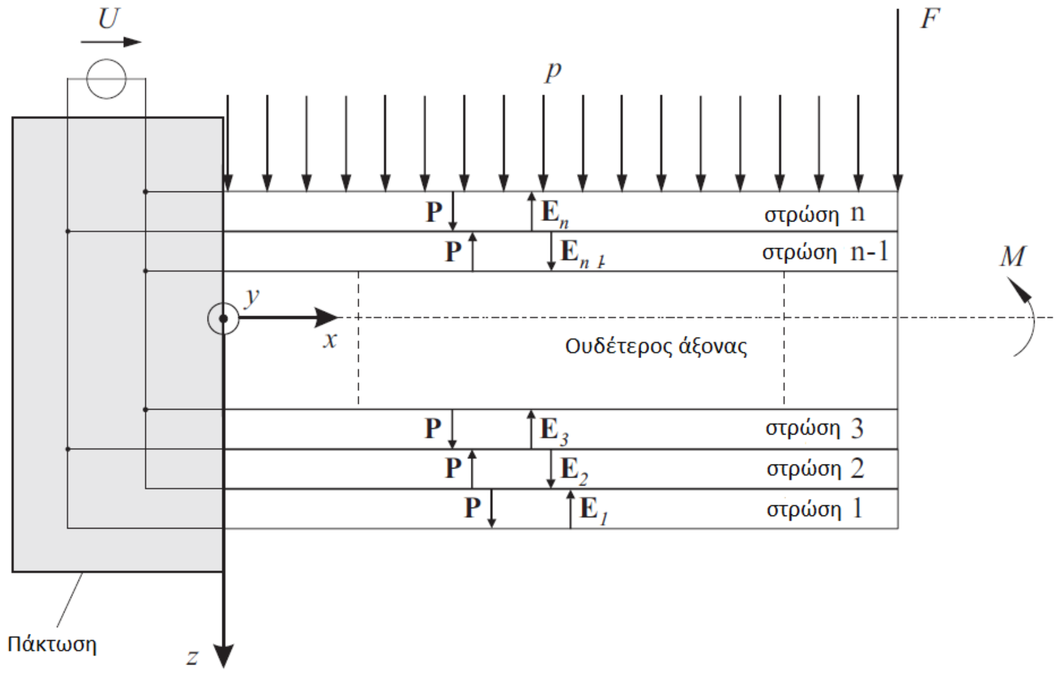
Στα παρακάτω θεωρούμε ότι τα εκτατικά μεγέθη του προβλήματος όπως η ροπή κάμψης M, η δύναμη F, το φορτίο πίεσης p (κατανεμημένη δύναμη) και η διαφορά δυναμικού U, επιρεάζουν τη συμπεριφορά ενός clamped-free διεγέρτη κάμψης, υπό τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

1) Η κατασευή υποβάλεται σε εξωτερική στατική ροπή M στο ελεύθερο άκρο.

2) Η κατασευή υποβάλεται σε εξωτερική στατική δύναμη F που εφαρμόζεται κάθετα στο ελεύθερο άκρο.

3) Η κατασευή υποβάλεται σε εξωτερικό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο πίεσης p, που εφαρμόζεται σε όλο το μήκος l και πλάτος w της δοκού.

4) Στις πιεζοηλεκτρικές στρώσεις εφαρμόζουμε ίδια διαφορά δυναμικού U σε όλο το μήκος και πλάτος (παράλληλη σύνδεση).

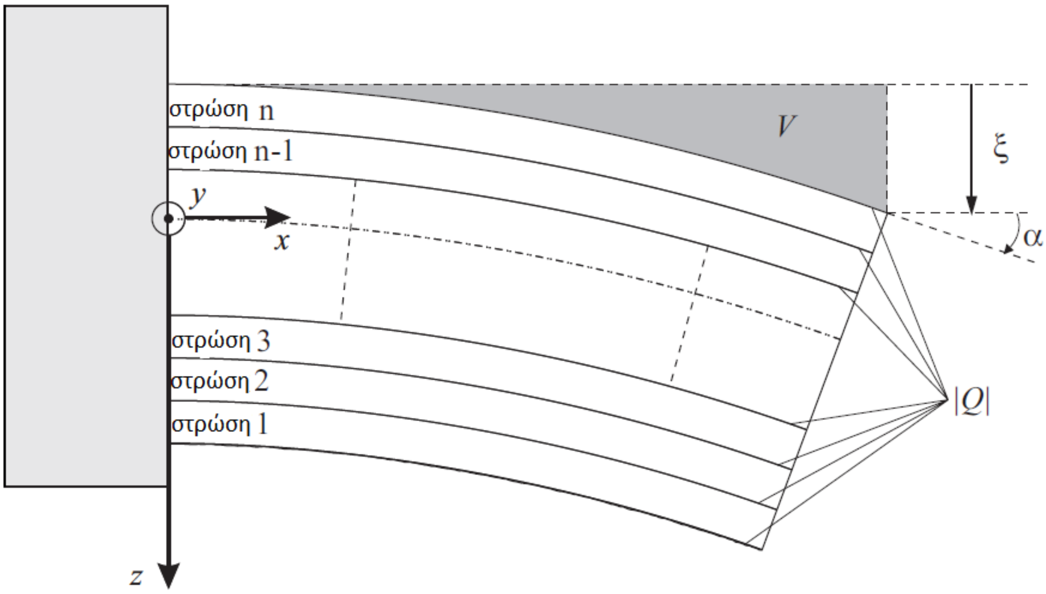


Εικόνα 2.4.13: Απεικόνιση Εκτατικών Μεγεθών

Τα εκτατικά και τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη παρουσιάζονται στο πίνακα:

Εκτατικά Μεγέθη				**Εντατικά Μεγέθη**
Ροπή Κάμψης	M	⟷	α	Γωνία Κάμψης
Δύναμη	F	⟷	ξ	Εκτροπή
Φορτίο Πίεσης	P	⟷	V	Εκτόπισμα Όγκου
Ηλεκτρικό Δυναμικό	U	⟷	Q	Ηλεκτρικό Φορτίο

Σε κάθε ένα πολλαπλασιασμό από τα αντίστοιχα συζυγή μεγέθη (canonical conjugates) το αποτέλεσμα έχει μονάδες δύναμης.



Εικόνα 2.4.14: Απεικόνιση Εντατικών Μεγεθών

Το χαρακτηριστικό των εντατικών μεγεθών είναι ότι μπορούν να υπολογισθούν μόνο σε συγκεκριμένα σημεία x_0 και όχι σε αυθαίρετα σημεία x. Για να εξαχθεί μια γενική θεώρηση θα πρέπει να ορισθεί ο πίνακας σύζευξης m που συνδέει τα εντατικά με τα εκτατικά μεγέθη.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \xi(x) \\ V(x) \\ Q(x) \end{pmatrix}}_{\text{Εντατικά Μεγέθη}} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11}(x) & m_{12}(x) & m_{13}(x) & m_{14}(x) \\ m_{21}(x) & m_{22}(x) & m_{23}(x) & m_{24}(x) \\ m_{31}(x) & m_{32}(x) & m_{33}(x) & m_{34}(x) \\ m_{41}(x) & m_{42}(x) & m_{43}(x) & m_{44}(x) \end{pmatrix}}_{\text{Πίνακας σύζευξης m}} \underbrace{\begin{pmatrix} M \\ F \\ p \\ U \end{pmatrix}}_{\text{Εκτατικά Μεγέθη}}$$

, όπου παρακάτω θα γίνει σταδιακά ο υπολογισμός τους με τη θεώρηση των διάφορων εξωτερικών φορτίσεων (καμπτική ροπή, εξωτερική δύναμη, πίεση, ηλεκτρικό δυναμικό)

Αρχή Δυνατών Έργων

Στο στατικό πρόβλημα για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το δυνατό έργο, υποθέτουμε μια απειροστή μετατόπιση δx υπό τις ακόλουθες συνθήκες:

1) Η μετατόπιση και η περιστροφή είναι απειροστά μικρές.

2) Οι μετατοπίσεις πρέπει να είναι συμβατές με τις συνοριακές συνθήκες

Το δυνατό έργο λόγω εφαρμοζόμενης δύναμης δίδεται: $\delta W = F \bullet \delta x$

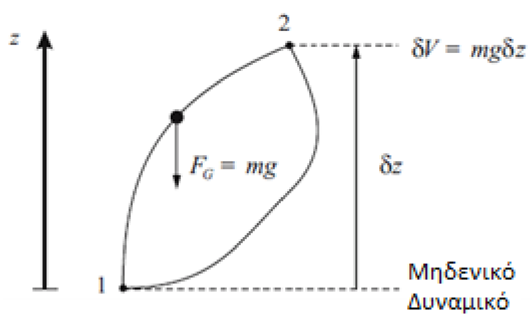
Το δυνατό έργο λόγω εφαρμοζόμενης ροπής δίδεται: $\delta W = M \bullet \delta \varphi$

Σύμφωνα με την ΑΔΕ ένα σύστημα θα βρίσκεται σε ισορροπία όταν οι εφαρμοζόμενες δυνάμεις και οι δυνάμεις περιορισμού ισορροπούν ώστε η κατασκευή να μη κινείται. Αυτό σημαίνει ότι το δυνατό έργο όλων των εφαρμοζόμενων δυνάμεων είναι μηδέν για κάθε δυνατή μετατόπιση.

$$\delta W = \sum_j \mathbf{F}_{j,ex} \cdot \delta \mathbf{x}_j + \sum_j \mathbf{M}_{j,ex} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_j = 0$$

Αρχή Ελάχιστης Ενέργειας

Οι συντηρητικές δυνάμεις (π.χ. βάρος, δύναμη ελατηρίου) παράγουν έργο ανεξάρτητο από τη πορεία που ακολούθησε το σώμα, αλλά εξαρτώμενο μόνο από την αρχική και τελική θέση. Επίσης, το έργο που παράγει το βάρος συνδέεται με την αύξηση της δυναμικής ενέργειας με το γνωστό: $\delta V = mg\ \delta z$, όπου $\delta W = -mg\ \delta z$.



Όταν μια κατασκευή καταπονείται αποκλειστικά από συντηρητικές δυνάμεις ισχύει ότι η δυναμική ενέργεια ισούται με μηδέν, δV=0.

Στη περίπτωση κάμψης πιεζοηλεκτρικής προβόλου δοκού δε μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές και διαχωρίζουμε το έργο των εξωτερικών δυνάμεων W_α ώστε να υπολογισθεί η συνολική ενέργεια της παραμόρφωσης W_{tot} ως συνάρτηση της δυναμική ενέργειας. Οι προηγούμενες εξισώσεις γράφονται: $\delta(V-W)=0$ και $\delta(W_{tot}-W_{\alpha})=0$.

Η συνολική δυναμική ενέργεια ορίζεται ως Π και ισούται με τη διαφορά W_{tot}-W_{α}, όπου από φυσικής άποψης στη σταθερή μόνιμη κατάσταση παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

$$\delta(W_{tot}-W_{\alpha})=\delta\Pi=0 \quad ή$$
$$\Pi=W_{tot}-W_{\alpha} => ελάχιστη$$

Αντικαθιστώντας το W_{tot} όπως υπολογίσθηκε παραπάνω, η συνολική δυναμική ενέργεια γίνεται:

$$\begin{aligned}\Pi = &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{l}\left[\varepsilon_{33,i}^{T}E_{3,i}^{2}w_i h_i\right]dx - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{l}\left[\frac{w_i h_i}{s_{11,i}^{E}}d_{31,i}^{2}E_{3,i}^{2}\right]dx \\ &+\int_{0}^{l}\left[\frac{M^2}{2C}+\frac{MM_{Piezo}}{C}+\frac{M_{Piezo}^{2}}{2C}\right]dx - W_{a}.\end{aligned}$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε τη παραπάνω ποσότητα ακολουθείται η μέθοδος Ritz. Σύμφωνα με αυτή η συνάρτηση μετατόπισης ξ(x) μπορεί να προσεγγιστεί από κ συναρτήσεις $\xi_j(x)$ και άγνωστες μεταβλητές α_j : $\xi(x)=\sum_{j=1}^{k}a_j\xi_j(x)$, όπου οι $\xi_j(x)$ να ικανοποιούν τα γεωμετρικά όρια του συστήματος και οι α_j να ελαχιστοποιούν την Π, δηλαδή: $\frac{\partial\,\Pi}{\partial\alpha_i}=0, \quad j\le i\le k$.

Σε **κάθε είδους εξωτερική φόρτιση** που θα δούμε παρακάτω το στοιχείο που αλλάζει από τη παραπάνω εξίσωση είναι το εξωτερικό έργο $\mathbf{W_{\alpha}}$

Εξωτερικές Φορτίσεις

Στατική Ροπή

Το έργο από μια εξωτερική ροπή που εφαρμόζεται στο ελεύθερο άκρο της δοκού (x=l) ισούται με: $W_\alpha = Ma(l) = M \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=l}$

, όπου η M ισούται με [216]: $M = -C\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ και με αντικατάσταση έχουμε:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l \left[\varepsilon_{33,i}^T E_{3,i}^2 w_i h_i\right] dx - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l \left[\frac{w_i h_i}{s_{11,i}^E} d_{31,i}^2 E_{3,i}^2\right] dx + \int_0^l \left[\frac{C}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) M_{Piezo} + \frac{M_{Piezo}^2}{2C}\right] dx - M\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=l}$$

Σύμφωνα με τον Ritz επιλέγεται η προσεγγιστική συνάρτηση $\xi_j(x) = x^j$ και οι παράγωγοι της ξ ως προς x γίνονται:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sum_{j=2}^{k} j a_j x^{j-1}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \sum_{j=2}^{k} j(j-1) a_j x^{j-2}$$

και οι παράγωγοι αυτών σε σχέση με τις μεταβλητές α_j γίνονται:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\left.\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = i l^{i-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) = i(i-1)x^{i-2}$$

Η παράγωγος της Π ως προς τις α_j μας δίνει:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = \int_0^l \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\left[C\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) - M_{Piezo}\right] dx - M\frac{\partial}{\partial a_i}\left.\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = 0$$

,όπου με αντικατάσταση και υπολογισμούς η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$(i-1)\sum_{j=2}^{k}\frac{j(j-1)}{j+i-3}a_j l^{j-2}=\frac{M}{C}+\frac{M_{Piezo}}{C}$, που αντιπροσωπεύει ένα γραμμικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων από όπου μπορούμε να εξάγουμε τους συντελεστές a_j αφού πρώτα επιλεγεί ο k, όπου εδώ λαμβάνεται ίσος με 4.

Ο υπολογισμός του συστήματος μας δίνει το συντελεστή $a_2=\frac{1}{2}\left[\frac{M}{C}+\frac{M_{Piezo}}{C}\right]$

Η συνολική ροπή κάμψης από το πιεζοηλεκτρικό: $M_{Piezo}=U\bullet m_{piezo}$, όπου U το ηλεκτρικό δυναμικό και m_{piezo} όπως παραπάνω:

$$m_{Piezo}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i d_{31,i}}{s^E{}_{11,i}h_{3,i}}\left[2\bar{z}h_i-2h_i\sum_{j=1}^{i}h_j+h_i^2\right]$$

Αντικαθιστώντας τον α_2 στη συνάρτηση μετατόπισης ξ(x) λαμβάνουμε:

$$\xi(x)=M\underbrace{\frac{l^2}{2C}\left(\frac{x}{l}\right)^2}_{=m_{21}(x)}+U\underbrace{\frac{m_{piezo}l^2}{2C}\left(\frac{x}{l}\right)^2}_{=m_{24}(x)}$$

,όπου για μικρές γωνίες ισχύει tan α(x) ≅ a = $\frac{d\xi(x)}{dx}$ οπότε η γωνία κάμψης δίδεται από:

$$\frac{d\xi(x)}{dx}=a=M\underbrace{\frac{l}{C}\left(\frac{x}{l}\right)}_{=m_{11}(x)}+U\underbrace{\frac{m_{piezo}l}{C}\left(\frac{x}{l}\right)}_{=m14(x)}$$

Το εκτόπισμα όγκου V(x) προκύπτει από ολοκλήρωση της ξ(x).

$V(x)=\int_0^x\int_0^w\xi(x')dx'dy$ με w = max{$w_i \forall i | 1 \le i \le n$} και επιλύοντας έχουμε:

$$V(x)=M\underbrace{\frac{wl^3}{6C}\left(\frac{x}{l}\right)^3}_{=m_{31}(x)}+U\underbrace{\frac{m_{piezo}wl^3}{6C}\left(\frac{x}{l}\right)^3}_{=m_{34}(x)}$$

Έως αυτή τη στιγμή έχουν υπολογισθεί τα m_{11}, m_{14}, m_{21}, m_{24}, m_{31} και m_{34}, στοιχεία του πίνακα σύζευξης.

Στατική Δύναμη

Το έργο από μια εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται στο ελεύθερο άκρο της δοκού (x=l) ισούται με: $W_\alpha = F\xi(l)$.

Η παράγωγος της δυναμική ενέργειας ως προς τις α_j μας δίνει:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = \int_0^l \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\left[C\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - M_{Piezo}\right]dx - F\left.\frac{\partial \xi}{\partial a_i}\right|_{x=l} = 0$$

, όπου όπως προηγουμένως έχουμε: $\left.\frac{\partial \xi}{\partial a_i}\right|_{x=l} = l^i$, $\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) = i(i-1)x^{i-2}$

και αντικαθιστώντας στη παραπάνω εξάγουμε:

$$i(i-1)\sum_{j=2}^{k}\frac{j(j-1)}{j+i-3}a_j l^{j-2} = \frac{Fl}{C} + i\frac{M_{Piezo}}{C}$$

από το παραπάνω γραμμικό σύστημα εξισώσεων εξάγουμε ύστερα από υπολογισμούς τους συντελεστές α_j ενώ έχει επιλεγεί ο k ίσος με 4.

$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Fl}{C} + \frac{M_{Piezo}}{C}\right)$, $a_3 = -\frac{1}{6}\frac{F}{C}$ και αντικαθιστώντας αυτές στη συνάρτηση μετατόπισης ξ(x) λαμβάνουμε: $\xi(x) = F\underbrace{\frac{l^3}{6C}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]}_{=m_{22}(x)} + U\underbrace{\frac{m_{piezo}l^2}{2C}\left(\frac{x}{l}\right)^2}_{=m_{24}(x)}$

, όπου για μικρές γωνίες ισχύει tan α(x) ≅ a = $\frac{d\xi(x)}{dx}$ οπότε η γωνία κάμψης δίδεται από:

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = a(x) = F\underbrace{\frac{l^2}{2C}\left[2\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]}_{=m_{12}(x)} + U\underbrace{\frac{m_{piezo}l}{C}\left(\frac{x}{l}\right)}_{=m14(x)}$$

Το εκτόπισμα όγκου V(x) προκύπτει από ολοκλήρωση της ξ(x) και δίδεται:

$$V(x) = F\underbrace{\frac{l^3}{6C}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]}_{=m_{32}(x)} + U\underbrace{\frac{m_{piezo}wl^3}{6C}\left(\frac{x}{l}\right)^3}_{=m_{34}(x)}$$

Οπότε υπολογίσθηκαν και τα m_{12}, m_{22} και m_{32} στοιχεία του πίνακα σύζευξης.

Εξωτερικά ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο πίεση

Το έργο από ένα εξωτερικό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο πίεσης p που εφαρμόζεται σε όλο το μήκος l και πλάτος w της δοκού ισούται με: $W_a = pw\int_0^l \xi dx$

Η παράγωγος της δυναμική ενέργειας ως προς τις α_j μας δίνει:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = \int_0^l \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\left[C\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - M_{Piezo}\right]dx - pw\int_0^l \frac{\partial \xi}{\partial a_i}dx = 0$$

, όπου όπως προηγουμένως έχουμε: $\frac{\partial \xi}{\partial a_i} = x^i$, $\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) = i(i-1)x^{i-2}$

και αντικαθιστώντας στη παραπάνω εξάγουμε:

$$i(i^2-1)\sum_{j=2}^{k}\frac{j(j-1)}{j+i-3}a_j l^{j-2} = \frac{pwl^2}{C} + i(i+1)\frac{M_{Piezo}}{C}$$

όπου ύστερα από υπολογισμούς εξάγουμε τους συντελεστές α_j και ο k έχει επιλεγεί κλασικά ίσος με 4.

$a_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{pwl^2}{C} + \frac{2M_{Piezo}}{C}\right)$, $a_3 = -\frac{1}{6}\frac{pwl}{C}$, $a_4 = \frac{1}{24}\frac{pw}{C}$ και αντικαθιστώντας αυτές στη συνάρτηση μετατόπισης ξ(x) λαμβάνουμε:

$$\xi(x) = p\underbrace{\frac{wl^4}{24C}\left[6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]}_{=m_{23}(x)} + U\underbrace{\frac{m_{piezo}l^2}{2C}\left(\frac{x}{l}\right)^2}_{=m_{24}(x)}$$

, όπου για μικρές γωνίες ισχύει tan α(x) ≅ a = $\frac{d\xi(x)}{dx}$ οπότε η γωνία κάμψης δίδεται από:

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = a(x) = p\underbrace{\frac{wl^3}{6C}\left[3\left(\frac{x}{l}\right) - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]}_{=m_{13}(x)} + U\underbrace{\frac{m_{piezo}l}{C}\left(\frac{x}{l}\right)}_{=m14(x)}$$

Το εκτόπισμα όγκου V(x) προκύπτει από ολοκλήρωση της ξ(x) και δίδεται:

$$V(x) = \underbrace{p\frac{w^2 l^5}{120C}\left[10\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 5\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \left(\frac{x}{l}\right)^5\right]}_{=m_{33}(x)} + U\underbrace{\frac{m_{piezo} w l^3}{6C}\left(\frac{x}{l}\right)^3}_{=m_{34}(x)}$$

Οπότε υπολογίσθηκαν και τα m_{13}, m_{23} και m_{33} στοιχεία του πίνακα σύζευξης.

Παραγωγή Ηλεκτρικού Φορτίου

Για να υπολογισθεί το ηλεκτρικό φορτίο Q που παράγεται από τις διάφορες φορτίσεις (M, F, p, U) θα πρέπει να εκφράσουμε τη συνολική δυναμική ενέργεια Π συναρτήσει του Q. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς του [216] ισχύουν τα παρακάτω.

Για τη γενική μοντελοποίηση θεωρούμε ότι σε όλα τα στρώματα υπάρχει το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό $U_{3,i}$=U, οπότε η συνολική ενέργεια γράφεται:

$$W_{tot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l \left[\frac{\varepsilon_{33,i}^T w_i}{h_i}\right]dx - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l \left[\frac{d^2{}_{31,i} w_i}{s_{11,i}^{\mathrm{E}} h_i}\right]dx$$

$$+\int_0^l \frac{M_{Piezo}^2}{2C}dx + \int_0^l \left[\frac{M^2}{2C} + \frac{MM_{Piezo}}{C}\right]dx$$

Επίσης γνωρίζουμε $\frac{M_{Piezo}^2}{2C} = U^2\frac{m_{Piezo}^2}{2C}$, όπου από φυσικής πλευράς ο συντελεστής $\frac{m_{Piezo}^2}{2C}$ εκφράζει τη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους [F/m].

Το W_{tot} γράφεται:

$$W_{tot}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^x \left[\frac{\varepsilon_{33,i}^T w_i}{h_i}U^2\right]dx' - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^x \left[\frac{d^2{}_{31,i} w_i}{s_{11,i}^{\mathrm{E}} h_i}U^2\right]dx'$$

$$+U^2\int_0^x \frac{m_{Piezo}^2}{2C}dx' + \int_0^x \left[\frac{M^2}{2C} + \frac{MM_{Piezo}}{C}\right]dx$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό κάποιας στρώσης μπορεί να εκφραστεί ως ο λόγος του ηλεκτρικού φορτίου Q_i και της χωρητικότητας C_i της i στρώσης του πιεζοηλεκτρικού. $U = \frac{Q_i}{C_i}$

και συνολικά έχουμε: $U = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i} = \frac{Q_{tot}}{C_{tot}}$, όπου $C_{tot} = \frac{\partial Q_{tot}}{\partial U}$ και $Q_{tot} = \frac{\partial W_{tot}}{\partial U}$

Συνεπώς η συνολική χωρητικότητα εκφράζεται ως: $C_{tot} = \frac{\partial^2 W_{tot}}{\partial U^2}$

Με διπλή παραγώγιση του συνολικού έργου ως προς U εξάγεται η συνολική χωρητικότητα ανά μονάδα μέτρου

$$\frac{\partial^2 W_{tot}(x)}{\partial U^2} = x \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_{33,i}^{T} w_i}{h_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2{}_{31,i} w_i}{s_{11,i}^{\mathrm{E}} h_i} + \frac{m_{Piezo}^2}{2C} \right]}_{C'_{Piezo}}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω : $\frac{\partial^2 W_{tot}(x)}{\partial U^2} = xC'_{Piezo} = C_{tot}$

Οπότε και το Ηλεκ. Δυναμικό μπορεί να γραφεί: $U = \frac{1}{C'_{Piezo}} \frac{\partial Q}{\partial x}$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το συνολικό αποθηκευμένο έργο W_{tot} και το συνολικό έργο εξωτερικών δυνάμεων γράφονται αντιστοίχως ως ακολούθως:

$$W_{tot}(x) = \int_0^l \frac{1}{2C'_{Piezo}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{M^2}{2C} dx + \int_0^l \frac{M}{C} \frac{m_{Piezo}}{C'_{Piezo}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

$$W_a = \int_0^{Q_{tot}} U dQ \quad => \quad W_a = U \int_0^l \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx$$

Με αποτέλεσμα η συνολική δυναμική ενέργεια Π να γράφεται:

$$\Pi = \frac{1}{2C'_{Piezo}} \int_0^l \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{M^2}{2C} dx + \frac{M}{C} \frac{m_{Piezo}}{C'_{Piezo}} \int_0^l \frac{\partial Q}{\partial x} dx - U \int_0^l \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

Όπως κινηθήκαμε προηγουμένως με τη μέθοδο Ritz έτσι κι εδώ θεωρούμε τη συνάρτηση $Q(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j x^j$ => $\frac{\partial Q(x)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{k} j a_j x^{j-1}$ => $\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right) = i x^{i-1}$

Παραγωγίζοντας τη Π ως προς α_j και θέλοντας να την ελαχιστοποιήσουμε έχουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{C'_{Piezo}} \int_0^l \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{M}{C} m_{Piezo} \right] dx - U \int_0^l \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx = 0$$

Εξωτερική Στατική Ροπή

Με αντικατάσταση των $\frac{\partial Q(x)}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right)$ στη $\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i}$ λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = i \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{j+i-1} a_j l^{j-1} + \frac{M m_{Piezo}}{C} - U C'_{Piezo} = 0$$

Ύστερα από υπολογισμούς εξάγονται οι συντελεστές α_j, ενώ ο k επιλέγεται ίσος με 3.

$$a_1 = U C'_{Piezo} - \frac{M m_{Piezo}}{C}$$

Με αντικατάσταση του α_1 το ηλεκτρικό φορτίο γίνεται:

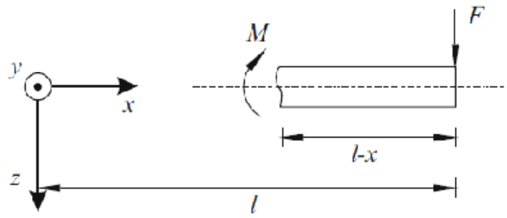
$$Q(x) = -M \underbrace{\frac{m_{Piezo} l}{C} \left(\frac{x}{l} \right)}_{m_{41}(x)} + U \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i l}{h_i} \left(\varepsilon_{33,i}^{T} - \frac{d^2_{31,i} w_i}{s_{11,i}^{\mathrm{E}}} \right) + \frac{m_{Piezo}^2}{C} l \right] \left(\frac{x}{l} \right)}_{m_{44}(x)}$$

όπου μπορούμε να πούμε [216] ότι ο όρος $\varepsilon_{33,i}^{T} - \frac{d^2_{31,i} w_i}{s_{11,i}^{\mathrm{E}}}$ ισούται με: $\varepsilon_{33,i}^{S}$.

Οπότε υπολογίσθηκαν και τα m_{41} και m_{44} στοιχεία του πίνακα σύζευξης.

Εξωτερική Στατική Δύναμη

Εφαρμόζοντας μια εξωτερική στατική δύναμη F στη δοκό αναπτύσεται μια εσωτερική καμπτική ροπή.



Εικόνα 2.4.15: Εξωτερική Δύναμη και Εσωτερική ροπή.

Εφόσον το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία έχομε: $\Sigma_i M_i=0 \Rightarrow M=-F(l-x)$

Και με αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i}=\frac{1}{C'_{Piezo}}\int_0^l \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\frac{F(l-x)}{C}m_{Piezo}\right]dx-U\int_0^l \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=0$$

Με αντικατάσταση των $\frac{\partial Q(x)}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x}\right)$ στη $\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i}$ λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i}=i\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{j+i-1}a_j l^{j-1}-\frac{1}{i+1}\frac{Fm_{Piezo}l}{C}-UC'_{Piezo}=0$$

Ύστερα από υπολογισμούς εξάγονται οι συντελεστές α_j, ενώ ο k επιλέγεται ίσος με 3.

$$a_1=UC'_{Piezo}+\frac{Fm_{Piezo}l}{C} \quad \text{και} \quad a_2=-\frac{1}{2}\frac{Fm_{Piezo}}{C}$$

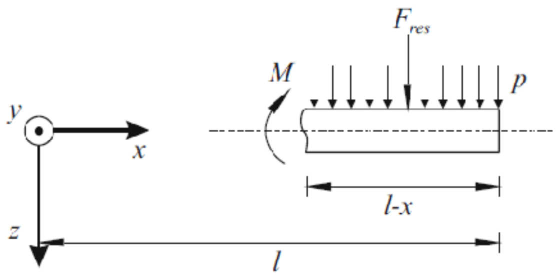
Με αντικατάσταση των α_1 και α_2 το ηλεκτρικό φορτίο γίνεται:

$$Q(x)=\underbrace{F\frac{m_{Piezo}l^2}{C}\left[2\frac{x}{l}-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]}_{m_{42}(x)}+\underbrace{U\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i l}{h_i}\left(\varepsilon_{33,i}^{T}-\frac{d^2{}_{31,i}w_i}{s_{11,i}^{\mathrm{E}}}\right)+\frac{m_{Piezo}^2}{C}l\right]\left(\frac{x}{l}\right)}_{m_{44}(x)}$$

Οπότε υπολογίσθηκε και το m_{42} στοιχείο του πίνακα σύζευξης.

Εξωτερική Ομοιόμορφα κατανεμημένη πίεση

Εφαρμόζοντας ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο πίεσης p σε όλο το μήκος l και πλάτος w της δοκού, αναπτύσσεται μια εσωτερική καμπτική ροπή.



Εικόνα 2.4.16: Εξωτερική κατανεμημένη Πίεση και Εσωτερική ροπή.

Η συνισταμένη δύναμη λόγω ομοιόμορφης πίεσης μπορεί να εκφραστεί ως F_{res}=pw(l-x) και λαμβάνοντας υπόψη $\Sigma_i M_i=0$ => $M=-pw\frac{(l-x)^2}{2}$

Και με αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i}=\frac{1}{C'_{Piezo}}\int_0^l \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)-\frac{pwm_{Piezo}}{2C}(l-x)^2\right]dx-U\int_0^l \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=0$$

Με αντικατάσταση των $\frac{\partial Q(x)}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x}\right)$ στη $\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i}$ λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i}=i\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{j+i-1}a_j l^{j-1}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\underbrace{\frac{pwm_{Piezo}l^2}{C}}_{\equiv \tau}-\underbrace{UC'_{Piezo}}_{\equiv v}=0$$

Ύστερα από υπολογισμούς εξάγονται οι συντελεστές α_j, ενώ ο k επιλέγεται ίσος με 3.

$$a_1=UC'_{Piezo}+\frac{pwm_{Piezo}l^2}{C}\quad ,\quad a_2=-\frac{1}{2}\frac{pwm_{Piezo}l}{C}\quad \text{και}\quad a_3=\frac{pwm_{Piezo}}{6C}$$

Με αντικατάσταση των α_1, α_2 και α_3 το ηλεκτρικό φορτίο γίνεται:

$$Q(x)=p\underbrace{\frac{wm_{Piezo}l^3}{6C}\left[3\frac{x}{l}-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]}_{m_{43}(x)}+U\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i l}{h_i}\left(\varepsilon_{33,i}^{T}-\frac{d_{31,i}^2 w_i}{s_{11,i}^{E}}\right)+\frac{m_{Piezo}^2}{C}l\right]\left(\frac{x}{l}\right)}_{m_{44}(x)}$$

Οπότε υπολογίσθηκε και το τελευταίο στοιχείο του πίνακα σύζευξης m_{43}.

Με τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τη στατική συμπεριφορά κάθε πιεζοηλεκτρικής δοκού με n- στρώσεις, που έχει τα χαρακτηριστικά διεγέρτη [216].

Μοντελοποίηση Unimorph Πιεζοηλεκτρικής Δοκού σε κάμψη

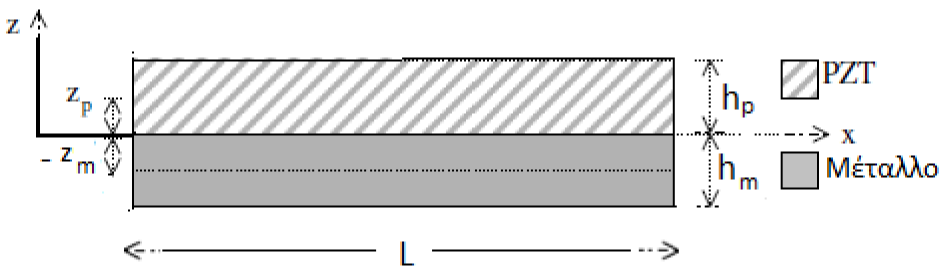
Παρακάτω μοντελοποιούμε μια Unimorph πιεζοηλεκτρική δοκό σε κάμψη (BP-δοκός) με χαρακτηριστικά αισθητήρα. Για τις εξισώσεις που διέπουν μια Unimorph πιεζοηλεκτρική δοκό σε κάμψη με χαρακτηριστικά διεγέρτη εκτός της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να ανατρέξουμε και στους: Steel et al. [218] και Smits & Choi [219].

Για απλοποίηση θεωρούμε ότι η BP-δοκός υπόκειται μόνο σε εξωτερική δύναμη και εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό και παρουσιάζουμε αναλυτικά τις καταστάσεις 31 και 33, Sunghwan [220].

Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη δουλειά των Wang et al. [221] ώστε να μελετήσει τις εξισώσεις BP-δοκού για τη κατάσταση 31 η οποία υπόκειται σε εξωτερική δύναμη, εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, εξωτερική ροπή και εξωτερικά ομοιόμορφη κατανεμημένη πίεση, ενώ με άνεση τροποποιούνται και οι εξισώσεις τις προηγούμενη παραγράφου.

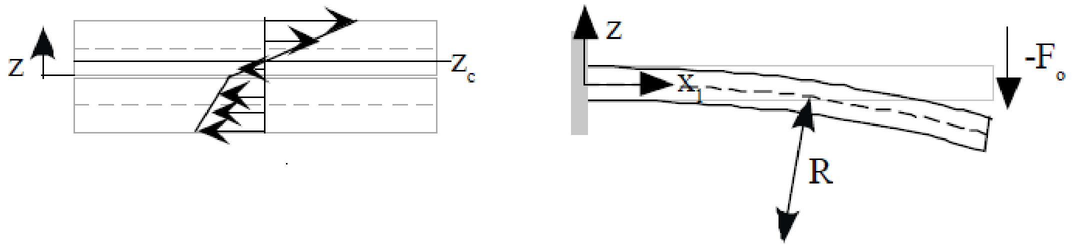
Κατάσταση 31- Unimorph πρόβολος δοκός

Δοκός – Ουδέτερος Άξονας



Εικόνα 2.4.17: Απεικόνιση *BP*-δοκού

Για τη δοκό του σχήματος υποθέτουμε ότι είναι μεγάλου μήκους, μικρού πάχους, ομοιόμορφη κατά τον x- άξονα και η μοναδική ανομοιομορφία βρίσκεται στο υλικό κατά μήκος του z- άξονα.



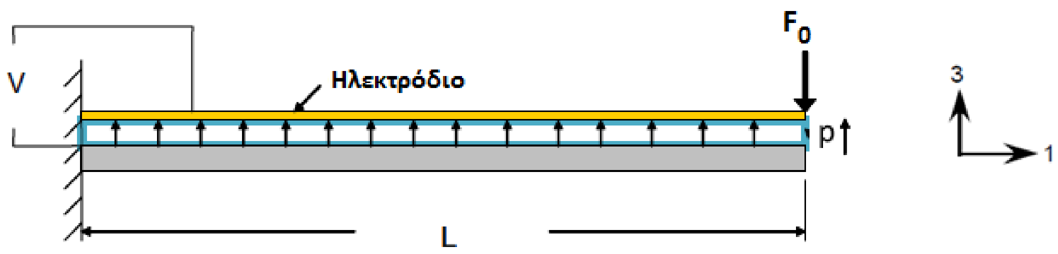
Εικόνα 2.4.18: a) Κατανομή τάσεων και ουδέτερος άξονας BP-Δοκού b) Δύναμη και ακτίνα καμπυλότητας

Ο ουδέτερος άξονας όπως είδαμε, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$z_c = \frac{z_p Y_p A_p - z_m Y_m A_m}{Y_p A_p + Y_m A_m} = \frac{h_p^2 s_m - h_m^2 s_{11}^E}{2(h_m s_{11}^E + h_p s_m)}$$

, όπου κατά τα γνωστά οι δείκτες p και m υποδηλώνουν το πιεζοηλεκτρικό και ελαστικό στοιχείο αντίστοιχα, το A εκφράζει το εμβαδό διατομής κάθε στρώματος, το Y εκφράζει το μέτρο ελαστικότητας του Young, και τα s εκφράζουν το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας Young.

Η παραμόρφωση μπορεί να εκφραστεί ως: $\varepsilon_1 = -\frac{z - z_c}{R} = -\kappa(z - z_c)$, όπου κ η καμπυλότητα.



Εικόνα 2.4.19: Απεικόνιση Unimorph Πιεζοηλεκτρικής Προβόλου Δοκού σε κατάσταση 31

Γνωρίζουμε από τις σχέσεις του πιεζοηλεκτρικού υλικού $\begin{matrix} S = s_D \cdot T + g^t \cdot D \\ E = -g \cdot T + \beta_T \cdot D \end{matrix}$ ότι θετικές τάσεις (**εφελκυσμός**) δημιουργούν **αρνητική** διαφορά ηλ. δυναμικού και αρνητικές τάσης (**θλίψη**) δημιουργούν **θετική** διαφορά ηλ. δυναμικού.

Για αρνητικό ηλεκτρικό πεδίο **οι καταστατικές εξισώσεις για το πιεζοηλεκτρικό** γίνονται: $\begin{aligned} \varepsilon_1 &= s^{E}_{11} \cdot \sigma_1 - d_{31} \cdot E_3 \\ D_3 &= -d_{31} \cdot \sigma_1 + \varepsilon^{T}_{33} \cdot E_3 \end{aligned}$, όπου χρησιμοποιούμε για το συμβολισμό της τάσης το σ και όχι το Τ.

Η **σχέση τάσης – παραμόρφωσης για το μη πιεζοηλεκτρικό** υλικό, αν θεωρήσουμε το $s_m = 1/Y_m$ δίδεται: $\varepsilon_1 = s_m \sigma_1$, Y_m= μέτρο Young ελαστικού μέρους.

Η συνολική ενέργεια του πιεζοηλεκτρικού δίδεται από:

$$dU_p = \frac{1}{2}\left(s^{E}_{11}\sigma_1 - d_{31}E_3\right)\sigma_1 + \frac{1}{2}\left(-d_{31}\sigma_1 + \varepsilon^{T}_{33}E_3\right)E_3 = \frac{1}{2}s^{E}_{11}\sigma^2_1 - d_{31}\sigma_1 E_3 + \frac{1}{2}\varepsilon^{T}_{33}E^2_3$$

Η συνολική ενέργεια του μή πιεζοηλεκτρικού δίδεται από:

$$dU_m = s^{E}_{m}\sigma^2_1$$

Τις τάσεις σ_1 για το πιεζοηλεκτρικό και μη πιεζοηλεκτρικό μπορούμε να τις υπολογίσουμε από την εξίσωση της καμπτικής ροπής για τη Unimorph δοκό πλάτους W.

$$M = \int_{Area} \sigma_1 \left(z - z_c\right) dydz = \int_z \sigma_1 \left(z - z_c\right) W dz,$$ όπου αντικαθιστούμε:

$$\sigma_{1,p} = \frac{1}{s^{E}_{11}}(\varepsilon_1 + d_{31} \cdot E_3) \quad ,\pi\iota\varepsilon\zeta o\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta} \quad \sigma\tau\rho\acute{\omega}\sigma\eta$$

$$\sigma_{1,m} = \frac{1}{s_m}\varepsilon_1 \quad ,\mu\eta \quad \pi\iota\varepsilon\zeta o\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta} \quad \sigma\tau\rho\acute{\omega}\sigma\eta$$

και $\varepsilon_1 = -\kappa(z - z_c)$

Συνεπώς έχουμε:

$$M = \int_0^{h_p} \frac{1}{s^{E}_{11}}\left(-\kappa(z - z_c) + d_{31} \cdot E_3\right) W(z - z_c) dz \int_{-h_m}^{0} -\frac{1}{s_m} W\kappa(z - z_c)^2 dz$$

και ύστερα από υπολογισμούς αφού κ≠z η ροπή γίνεται:

$$M = -\frac{\kappa W B_{11}}{12 s_m s^{E}_{11}\left(s^{E}_{11}h_m + s_m h_p\right)} + \frac{d_{31}h_p h_m\left(h_m + h_p\right)W}{2\left(s^{E}_{11}h_m + s_m h_p\right)}E_3 \ ,$$

όπου $B_{11} = s^2_m h^4_p + 4s^{E}_{11}s_m h_m h^3_p + 6s_m s^{E}_{11}s_m h^2_p h^2_p + 4s^{E}_{11}s_m h_p h^3_m + s^{E^2}_{11} h^4_p$

Από την εφαρμογή της δύναμης F_0 είναι γνωστό ότι $M(x_1) = F_0(L- x_1)$, οπότε μπορούμε να πούμε:

$$F_0\left(L-x_1\right) = -\frac{\kappa W B_{11}}{12 s_m s_{11}^E\left(s_{11}^E h_m + s_m h_p\right)} + \frac{d_{31} h_p h_m\left(h_m+h_p\right)W}{2\left(s_{11}^E h_m + s_m h_p\right)} E_3$$

Λύνοντας ως προς τη καμπυλότητα έχουμε:

$$\kappa = -\frac{12 s_m s_{11}^E\left(s_{11}^E h_m + s_m h_p\right)}{W B_{11}} F_0 + \frac{6 d_{31} s_m s_{11}^E h_p h_m\left(h_m+h_p\right)}{B_{11}} E_3$$

Γνωρίζοντας τη καμπυλότητα μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις τάσεις:

$$\sigma_{1,p} = \frac{1}{s_{11}^{\mathrm{E}}}(-\kappa(z-z_c) + d_{31}\cdot E_3) \quad ,\pi\iota\varepsilon\zeta o\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta} \quad \sigma\tau\rho\acute{\omega}\sigma\eta$$

$$\sigma_{1,m} = -\frac{1}{s_m}\kappa(z-z_c) \quad ,\mu\eta \quad \pi\iota\varepsilon\zeta o\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta} \quad \sigma\tau\rho\acute{\omega}\sigma\eta$$

Η ενέργεια σε ένα απειροστό κομμάτι της δοκού δίδεται:

$$dU_p = \frac{1}{2}s_{11}^E\left(\frac{-\kappa(z-z_c)+d_{31}E_3}{s_{11}^E}\right)^2 - d_{31}\left(\frac{1}{s_{11}^E}\left(-\kappa(z-z_c)+d_{31}E_3\right)\right)E_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_{31}^{\mathrm{T}}E_3^2$$

$$dU_m = \frac{1}{2}\left(s_m\sigma_{1m}\right) = \frac{1}{2}s_m(-\kappa(z-z_c))^2$$

Ολοκληρώνοντας για όλη τη κατασκευή εξάγουμε την συνολική ενέργεια:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L \int_0^W \left(\int_0^{h_p} dU_p dz + \int_{-h_m}^0 dU_m dz + \right) dy dx = \\ &= \frac{2 s_m s_{11}^E s_m s_h L^3}{W B_{11}} F_0^2 - \frac{3 d_{31} s_{11}^E s_m h_p h_m\left(h_m+h_p\right)L^2}{B_{11}} E_3 F_0 \ + \\ &\quad + \frac{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} W L h_p}{2}\left(1+\left(\frac{3 s_{11}^E s_m h_m{}^2 h_p\left(h_m+h_p\right)^2}{s_h B_{11}} - 1\right)K_{31}{}^2\right)E_3^2 \end{aligned}$$

όπου $s_h = s_{11}^{\mathrm{E}}\cdot h_m + s_m\cdot h_p$ και $K_{31} = \dfrac{d_{31}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}} s_{11}^E}$

Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό φορτίο Q θα πρέπει να παραγωγίσουμε την ενέργεια U ως προς το ηλεκτρικό δυναμικό V. Για να αντικαταστήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο E στην εξίσωση της ενέργειας U, θεωρούμε από θεωρία πιεζοηλεκτρισμού ότι $E_3 = V/h_p$.

$$\boxed{\text{Electric field } (E) = \frac{\text{Voltage across electrode } (V)}{\text{PZT thickness between electrode}}}$$

Οπότε $Q = \dfrac{\partial U}{\partial V}$ =

$$= \underbrace{-\frac{3d_{31}s_m s_{11}^E h_m \left(h_m + h_p\right) L^2}{B_{11}} F_0}_{Q_{Gen}} + \underbrace{\frac{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} WL}{h_p} \left(1 + \left(\frac{3s_{11}^E s_m s_{11}^E h_p {h_m}^2 \left(h_m + h_p\right)^2}{s_h B_{11}} - 1\right) K_{31}^2\right) V}_{C_{Free}}$$

όπου Q_{Gen} είναι η ποσότητα του ηλεκτρικού φορτίου που παράγεται μόνο από την επίδραση της δύναμης και C_{Free} είναι η χωρητικότητα ανοιχτού κυκλώματος.

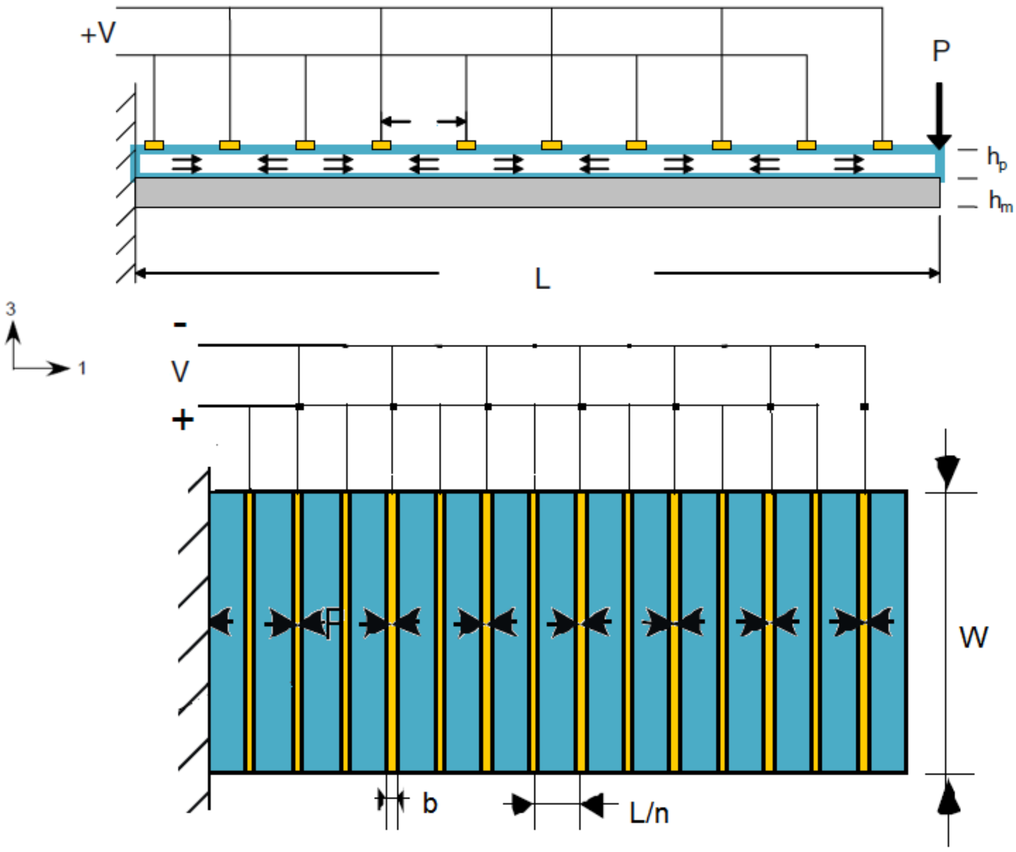
Επίσης είναι γνωστό ότι Q=CV => $V_{Gen} = \dfrac{Q_{Gen}}{C_{Free}}$ που είναι το ηλεκτρικό δυναμικό που εμφανίζεται στο ηλεκτρόδιο.

$$V_{Gen} = \frac{Q_{Gen}}{C_{Free}} = -\frac{3d_{31}s_m s_{11}^E h_m h_p \left(h_m + h_p\right) L}{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} W B_{11} \left(1 + \left(\dfrac{3s_{11}^E s_m s_{11}^E h_p {h_m}^2 \left(h_m + h_p\right)^2}{s_h B_{11}} - 1\right) K_{31}^2\right)} F_0$$

Η συνολική ενέργεια που παράγεται μόνο από την επιβολή της δύναμης F_0 είναι:

$$U_{Gen} = Q_{Gen} V_{Gen} = \frac{9{d_{31}}^2 {s_m}^2 s_{11}^{E2} {h_m}^2 h_p \left(h_m + h_p\right)^2 L^2}{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} W {B_{11}}^2 \left(1 + \left(\dfrac{3s_{11}^{E2} s_m h_p {h_m}^2 \left(h_m + h_p\right)^2}{s_h B_{11}} - 1\right) K_{31}^2\right)} {F_0}^2$$

Κατάσταση 33- Unimorph πρόβολος δοκός.



Εικόνα 2.4.20: Απεικόνιση Unimorph Πιεζοηλεκτρικής Προβόλου Δοκού σε κατάσταση 33

Οι καταστατικές εξισώσεις αυτής της κατάστασης διαφέρουν ελαφρώς από εκείνες της 31 και ως βάση για το πιεζοηλεκτρικό μέρος χρησιμοποιούμε άλλο σετ εξισώσεων.

$$\begin{aligned} S &= s_E \cdot T + d^t \cdot E \\ D &= d \cdot T + \varepsilon_{\mathrm{T}} \cdot E \end{aligned} \quad => \quad \begin{aligned} S_1 &= s_{33}^{\mathrm{E}} \cdot \sigma_1 - d_{33} \cdot E_3 \\ D_3 &= -d_{33} \cdot \sigma_1 + \varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} \cdot E_3 \end{aligned}$$

Για το μη πιεζοηλεκτρικό υλικό ισχύει όπως συνήθως: $s_m = 1/Y_m$ => $\varepsilon_1 = s_m \sigma_1$

Η συνολική ενέργεια του πιεζοηλεκτρικού δίδεται από:

$$dU_p = \frac{1}{2}\left(s_{33}^E \sigma_{1p} - d_{33} E_3\right)\sigma_{1p} + \frac{1}{2}\left(-d_{33}\sigma_{1p} + \varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} E_3\right)\mathrm{E}_3 = \frac{1}{2} s_{33}^E \sigma_{1p}^2 - d_{33}\sigma_{1p} E_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} E_3^2$$

Η συνολική ενέργεια του μή πιεζοηλεκτρικού δίδεται από:

$$dU_m = s_m^E \sigma_1^2$$

Ο ουδέτερος άξονας της δοκού στη κατάσταση 33 δεν είναι ίδιος με αυτή της 31, με αποτέλεσμα να διαφοροποιούνται και οι ιδιότητες του ελαστικού υλικού όταν αλλάζει ο πολικός άξονας.

Ο ουδέτερος άξονας δίδεται: $z_{c3} = \dfrac{z_p Y_p A_p - z_m Y_m A_m}{Y_p A_p + Y_m A_m} = \dfrac{h_p^2 s_m - h_m^2 s_{33}^E}{2(h_m s_{33}^E + h_p s_m)}$

Συνεπώς η ροπή της 33 είναι σχεδόν όμοια με της 31 κατάστασης και έχουμε:

$$M = \int_0^{h_p} \frac{1}{s_{33}^{\mathrm{E}}}\left(-\kappa(z - z_{c3}) + d_{33}\cdot E_3\right)W(z - z_{c3})dz \int_{-h_m}^{0} -\frac{1}{s_m}W\kappa(z - z_{c3})^2 dz$$

Από την εφαρμογή της δύναμης F_0 είναι γνωστό ότι $M(x_1) = F_0(L - x_1)$, οπότε μπορούμε να πούμε:

$$F_0\left(L - x_1\right) = -\frac{\kappa W B_{33}}{12 s_m s_{33}^E\left(s_{33}^E h_m + s_m h_p\right)} + \frac{d_{33} h_p h_m\left(h_m + h_p\right)W}{2\left(s_{33}^E h_m + s_m h_p\right)}E_3$$

Λύνοντας ως προς τη καμπυλότητα έχουμε:

$$\kappa = -\frac{12 s_m s_{33}^E\left(s_{33}^E h_m + s_m h_p\right)}{W B_{33}}F_0 + \frac{6 d_{33} s_m s_{33}^E h_p h_m\left(h_m + h_p\right)}{B_{33}}E_3$$

όπου $B_{33} = s_m^2 h_p^4 + 4 s_{33}^E s_m h_m h_p^3 + 6 s_m s_{33}^E s_m h_p^2 h_p^2 + 4 s_{33}^E s_m h_p h_m^3 + s_{33}^{E^2} h_p^4$

Γνωρίζοντας τη καμπυλότητα μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις τάσεις:

$$\sigma_{1,p} = \frac{1}{s_{33}^{\mathrm{E}}}(-\kappa(z - z_{c3}) + d_{33}\cdot E_3) \quad ,\pi\iota\varepsilon\zeta o\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta} \quad \sigma\tau\rho\acute{\omega}\sigma\eta$$

$$\sigma_{1,m} = -\frac{1}{s_m}\kappa(z - z_{c3}) \quad ,\mu\eta \quad \pi\iota\varepsilon\zeta o\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta} \quad \sigma\tau\rho\acute{\omega}\sigma\eta$$

Η ενέργεια σε ένα απειροστό κομμάτι της δοκού δίδεται:

$$dU_p = \frac{1}{2}s_{33}^E\left(\frac{-\kappa(z - z_{c3}) + d_{33}E_3}{s_{33}^E}\right)^2 - d_{33}\left(\frac{1}{s_{33}^E}\left(-\kappa(z - z_{c3}) + d_{33}E_3\right)\right)E_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}E_3^{\,2}$$

$$dU_m = \frac{1}{2}\left(s_m\sigma_{1m}\right) = \frac{1}{2}s_m(-\kappa(z - z_{c3}))^2$$

Η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα κάθε τμήματος μεταξύ των ηλεκτροδίων. Αν υπάρχουν n+1 ηλεκτρόδια πάχους b στην επιφάνεια του πιεζοηλεκτρικού η ενέργεια δίδεται:

$$U=\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{(i-1)L}{n}+\frac{b}{2}}^{\frac{iL}{n}-\frac{b}{2}}\int_{0}^{W}\left(\int_{0}^{h_p}dU_p dz+\int_{-h_m}^{h_p}dU_m dz\right)dydx=$$

$$=\frac{s_m s_{33}^E s_m s_{h3}\left(L-nb\right)\left(4nL^2+nb^2-2bL\right)}{2nWB_{33}}F_0^{\,2}-\frac{3d_{33}s_{33}^E s_m h_p h_m\left(h_m+h_p\right)\left(L-nb\right)L}{B_{11}}E_3F_0\;+$$

$$+\frac{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}W(L-nb)h_p}{2}\left(1+\left(\frac{3s_{33}^{E\,2}s_m h_m^{\,2}h_p\left(h_m+h_p\right)^2}{s_{h3}B_{11}}-1\right)K_{33}^{\;2}\right)E_3^2$$

όπου $s_{h3}=s_{33}^{\mathrm{E}}\cdot h_m+s_m\cdot h_p$ και $K_{33}^{\;2}=\dfrac{d_{33}^{\;3}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}}s_{33}^E}$

Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό φορτίο Q θα πρέπει να παραγωγίσουμε την ενέργεια U ως προς το ηλεκτρικό δυναμικό V. Για να αντικαταστήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο E στην εξίσωση της ενέργειας U, θεωρούμε από θεωρία πιεζοηλεκτρισμού ότι E_3 = V/h => E_3 = V/(L/n), όπου h το πάχος μεταξύ των ηλεκτροδίων.

Οπότε $Q=\dfrac{\partial U}{\partial V}$ =

$$=\underbrace{-\frac{3nd_{33}s_m s_{33}^E h_m h_p\left(h_m+h_p\right)(L-nb)}{B_{33}}F_0}_{Q_{Gen}}$$

$$\underbrace{+\frac{n^2\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}h_pW(L-nb)}{L}\left(1+\left(\frac{3s_{33}^E s_m s_{33}^E h_p h_m^{\,2}\left(h_m+h_p\right)^2}{s_{h3}B_{33}}-1\right)K_{33}^2\right)V}_{C_{Free}}$$

όπου Q_{Gen} είναι η ποσότητα του ηλεκτρικού φορτίου που παράγεται μόνο από την επίδραση της δύναμης και C_{Free} είναι η χωρητικότητα ανοιχτού κυκλώματος.

Επίσης είναι γνωστό ότι Q=CV => $V_{Gen} = \dfrac{Q_{Gen}}{C_{Free}}$ που είναι το ηλεκτρικό δυναμικό που εμφανίζεται στο ηλεκτρόδιο.

$$V_{Gen} = \frac{Q_{Gen}}{C_{Free}} = -\frac{3d_{33}s_m s_{33}^E h_m h_p \left(h_m + h_p\right) L^2}{n\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} W B_{33}\left(1+\left(\dfrac{3s_{33}^E s_m s_{33}^E h_p {h_m}^2 \left(h_m + h_p\right)^2}{s_{h3}B_{33}} - 1\right)K_{33}^2\right)} F_0$$

Η συνολική ενέργεια που παράγεται μόνο από την επιβολή της δύναμης F_0 είναι:

$$U_{Gen} = Q_{Gen}V_{Gen} = \frac{9{d_{33}}^2 {s_m}^2 s_{33}^{E\,2} {h_m}^2 h_p \left(h_m + h_p\right)^2 \left(L - nb\right) L^2}{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} W {B_{33}}^2 \left(1+\left(\dfrac{3s_{33}^{E\,2} s_m h_p {h_m}^2 \left(h_m + h_p\right)^2}{s_{h3}B_{33}} - 1\right)K_{33}^2\right)} {F_0}^2$$

2.4.7 Πεπερασμένα στοιχεία στον Πιεζοηλεκτρισμό.

Οι δυναμικές εξισώσεις ενός ομογενούς πιεζοηλεκτρικού μέσου μπορούν να εξαχθούν από την αρχή του Hamilton,[20],[21], Tzou, H. S. & Tseng, C. I [110] ,όπου εφαρμόζονται κατάλληλα η αρχή των δυνατών έργων (virtual work principle) και το μοντέλο Lagrange για να συμπεριληφθεί η συμβολή των ηλεκτρικών και των μηχανικών ιδιοτήτων. Η ενεργειακή πυκνότητα ενός πιεζοηλεκτρικού υλικού περιλαμβάνει ταυτόχρονα συνεισφορές από την ενέργεια παραμόρφωσης και την ηλεκτροστατική ενέργεια, [111]

Στο γραμμικό πιεζοηλεκτρισμό η πυκνότητα ηλεκτρικής ενθαλπίας (electrical enthalpy density) παίρνει τη μορφή (IEEE std.) :

$H = U - ED \Rightarrow \ldots \Rightarrow H = \frac{1}{2}\left[\{S^T\}\{T\} - \{E^T\}\{D\}\right]$ [111], όπου U η εσωτερική ενέργεια.

**ΕΝΘΑΛΠΙΑ:* Η λέξη προέρχεται από το ρήμα ενθάλπω = ζεσταίνω, κρύβω μέσα μου, περιθάλπω. Εκφράζει το ολικό ποσό θερμότητας που περιέχει ένα θερμοδυναμικό σύστημα. Ειδικότερα αποτελεί το άθροισμα της εσωτερικής ενέργειας ενός σώματος και του γινομένου της εξωτερικής πίεσης επί του όγκου που καταλαμβάνει μια ουσία. [112]

Αν θεωρήσουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες ορίζουν ένα σύνολο S_1 για τις δυνατές χωρικές μετατοπίσεις (u) και ένα σύνολο S_2 για τις δυνατές μεταβολές του ηλεκτρικού πεδίου (φ) τότε:

Το δυνατό έργο (virtual work) που προέρχεται από μια εξωτερική μηχανική δύναμη και ένα ηλεκτρικό φορτίο για μια αυθαίρετη χωρική μεταβολή **{δu}** και μια μια μεταβολή ηλεκτρικού δυναμικού **δφ** όπου και οι δύο είναι συμβατές με τις συνοριακές συνθήκες είναι: $\delta W = \{\delta u^T\}\{F\} - \delta\varphi q$, όπου **{F}** η εξωτερική δύναμη και **q** το ηλεκτρικό φορτίο.

Ή αναλυτικότερα:

$$\delta W = \int_V \{\delta u^T\}\{F_V\}dV + \int_{S_1} \{\delta u^T\}\{F_S\}dS + \{\delta u^T\}\{F_P\} - \int_{S_2} \delta\varphi\, q dS - \delta\varphi Q$$

, όπου $\{F_V\}$ οι μαζικές δυνάμεις (body applied forces),

$\{F_S\}$ οι επιφανειακές δυνάμεις (ορισμένες στον S_1),

$\{F_P\}$ οι σημειακές (συγκεντρωμένες) δυνάμεις,

φ το ηλεκτρικό δυναμικό,

q το επιφανειακό ηλεκτρικό φορτίο (ορισμένο στον S_2)

Q το συγκεντρωμένο (σημειακό) ηλεκτρικό φορτίο

Η ηλεκτρομηχανική αναλογία μεταξύ των βασικών ηλεκτρομηχανικών παραμέτρων παρουσιάζεται στο παρακάτω πίνακα, όπου οι ηλεκτρικοί τανυστές είναι ενός βαθμού χαμηλότεροι, [105]:

Μηχανική		Ηλεκτρική	
Δύναμη	{F}	Ηλεκτρικό Φορτίο	{q}
Μετατόπιση	{u}	Ηλεκτρικό Δυναμικό – Ηλ. Τάση	{φ}
Τάση	{T}	Ηλεκτρική Μετατόπιση	{D}
Παραμόρφωση	{S}	Ηλεκτρικό Πεδίο	{E}

Η αρχή που διέπει τα πιεζοηλεκτρικά υλικά προέρχεται από την αντικατάσταση της σχέσης του H και δW στην αρχή του Hamilton, Allik και Hughes [20].

$$0=-\int_V [\ \rho\{\delta u\ \}^{\mathrm{T}}\{\ddot{u}\}-\{\delta S\}^T[c^E]\{S\}+\{\delta S\}^T[e^T]\{E\}+\{\delta E\}^T[e\ ]\{S\}+\{\delta E\}^T[\varepsilon^S]\{E\}+$$

$$+\{\delta u\}^T\{F_V\}\ ]\ +\ \int_{S_1}\{\delta u\}^T\{F_S\}dS\ +\ \{\delta u\}^T\{F_P\}\ -\ \int_{S_2}\delta\varphi q dS-\delta\varphi Q \qquad (2.4.7.1)$$

Διαμόρφωση Πεπερασμένων Στοιχείων
Piefort V. [105] και Piefort V. & Preumont A. [113]

Η μετατόπιση {u} και το ηλεκτρικό δυναμικό φ σε ένα στοιχείο σχετίζονται με τις αντίστοιχες κομβικές τιμές των $\{u_i\}$ και $\{\varphi_i\}$ συναρτήσει των $[N_u]$, $[N_\varphi]$.

$$\begin{aligned}\{u\}&=[N_u]\{u_i\}\\ \varphi&=[N_\varphi]\{\varphi_i\}\end{aligned} \qquad (2.4.7.2)$$

, όπου N_u και N_φ είναι οι συναρτήσεις μορφής της παρεμβολής για τα u, φ και ο δείκτης i δηλώνει το κόμβο. Επομένως το πεδίο παραμορφώσεων S και το ηλεκτρικό πεδίο E σχετίζονται με τις κομβικές μετατοπίσεις και το δυναμικό από τις παραγώγους $[B_u]$, $[B_\varphi]$ των $[N_u]$ και $[N_\varphi]$ αντίστοιχα.

Συνεπώς,
$$\begin{aligned}\{S\}&=[\mathrm{Der}][N_u]\{u_i\}= [B_u]\{u_i\}\\ \{E\}&=-\nabla[N_\varphi]\{\varphi_i\} =-[B_\varphi]\{\varphi_i\}\end{aligned} \qquad (2.4.7.3)$$

, όπου [Der] ο τελεστής παραγώγισης. $[\mathrm{Der}]=\begin{bmatrix}\partial_x & 0 & 0\\ 0 & \partial_y & 0\\ 0 & 0 & \partial_z\\ 0 & \partial_z & \partial_y\\ \partial_z & 0 & \partial_x\\ \partial_y & \partial_x & 0\end{bmatrix}$

Αντικαθιστώντας τις *2.4.7.2* και *2.4.7.3* στην *2.4.7.1* έχουμε:

$$
\begin{aligned}
0 = &-\{\delta u_i\}^T \int_V \rho[\mathrm{N}_u]^T[\mathrm{N}_u]dV \;\; \{\ddot{u}_i\} \;\; -\{\delta u_i\}^T \int_V [B_u]^T[c^E][B_u]dV \;\; \{u_i\} - \\
&-\{\delta u_i\}^T \int_V [B_u]^T[e][B_\varphi]dV \;\; \{\varphi_i\} \;\; -\{\delta\varphi_i\}^T \int_V [B_\varphi]^T[e^E][B_u]dV \;\; \{u_i\} + \\
&+\{\delta\varphi_i\}^T \int_V [B_\varphi]^T[\varepsilon^S][B_\varphi]dV \;\; \{\varphi_i\} + \{\delta u_i\}^T \int_V [N_u]^T\{F_V\}dV \qquad + \\
&+\{\delta u_i\}^T \int_{S_1} [N_u]^T\{F_S\}dS \qquad +\{\delta u_i\}^T[N_u]^T\{F_P\} \qquad + \\
&-\{\delta\varphi_i\}^T \int_{S_2} [N_\varphi]^T q dS \qquad -\{\delta\varphi_i\}^T[N_\varphi]^T Q
\end{aligned}
$$

,όπου **ρ** η πυκνότητα του υλικού.

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να επαληθευτεί για οποιαδήποτε αλλαγή των μετατοπίσεων $\{\delta u_i\}$ και του ηλεκτρικού δυναμικού $\{\delta\varphi_i\}$ και να είναι συμβατή με τις θεμελιώδεις συνοριακές συνθήκες.

Για ένα πεπερασμένο στοιχείο η προηγούμενη εξίσωση παίρνει τη παρακάτω μορφή:

$$
\begin{aligned}
[M]\{\ddot{u}_i\} + [K_{uu}]\{u_i\} + [K_{u\varphi}]\{\varphi_i\} &= \{f_i\} \\
+[K_{\varphi u}]\{u_i\} + [K_{\varphi\varphi}]\{\varphi_i\} &= \{g_i\}
\end{aligned}
$$

όπου : $[M] = \int_V \rho[\mathrm{N}_u]^T[\mathrm{N}_u]dV$, πίνακας κινηματικής σταθεράς μάζας

$[K_{uu}] = \int_V [B_u]^T[c^E][B_u]dV$, πίνακας δυσκαμψίας

$[K_{u\varphi}] = \int_V [B_u]^T[e\;]^T[B_\varphi]dV$, πίνακας πιεζοηλεκτρικής σύζευξης

$[K_{\varphi\varphi}] = \int_V [B_\varphi]^T[\varepsilon\;]^T[B_\varphi]dV$, πίνακας διηλεκτρικής δυσκαμψίας

$[K_{\varphi u}] = [K_{u\varphi}]^{\mathrm{T}}$

$\{f_i\} = \int_V [N_u]^T\{F_V\}dV + \int_{S_1} [N_u]^T\{F_S\}dS + [N_u]^T\{F_P\}$, μηχανικό φορτίο

$\{g_i\} = -\int_{S_2} [N_\varphi]^T q dS - [N_\varphi]^T Q$, ηλεκτρικό φορτίο

Κάθε στοιχείο (έστω k) του πλέγματος συνδέεται με τα γειτονικά στοιχεία στους γενικούς κόμβους και η μετατόπιση θεωρείται συνεχής από το ένα στοιχείο στο επόμενο. Οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου ($\{u_i\}^{(k)}$,$\{\phi_i\}^{(k)}$) συνδέονται με τους γενικούς βαθμούς ελευθερίας ({U},{Φ}) συναρτήσει των τοπικών μητρώων $[L_u]^{(k)}$ και $[L_\phi]^{(k)}$:

$$\{u_i\}^{(k)} = [L_u]^{(k)}\{U\}$$
$$\{\varphi_i\}^{(k)} = [L_\varphi]^{(k)}\{\Phi\}$$

Το στοιχείο ij του $[L_u]$(k) ισούται με 1 αν ο i μηχανικός βαθμός ελευθερίας του στοιχείου k αντιστοιχεί στον j γενικό μηχανικό βαθμό ελευθερίας, διαφορετικά είναι 0.

Το στοιχείο ij του $[L_\phi]$(k) ισούται με 1 αν ο i ηλεκτρικός βαθμός ελευθερίας του στοιχείου k αντιστοιχεί στον j γενικό ηλεκτρικό βαθμό ελευθερίας, διαφορετικά είναι 0.

Ομοίως με παραπάνω εξάγονται οι γενικοί πίνακες της κατασκευής και ορίζονται οι γενικές εξισώσεις

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K_{UU}]\{U\} + [K_{U\Phi}]\{\Phi\} = \{F\}$$
$$+[K_{\Phi U}]\{U\} + [K_{\Phi\Phi}]\{\Phi\} = \{G\}$$

όπου : $[M] = \sum_i [L_{ui}]^T [M^{(i)}][L_{ui}]$

$$[K_{UU}] = \sum_i [L_{ui}]^T [K_{uu}{}^{(i)}][L_{ui}]$$
$$[K_{U\Phi}] = \sum_i [L_{ui}]^T [K_{u\varphi}{}^{(i)}][L_{\varphi i}]$$
$$[K_{\Phi\Phi}] = \sum_i [L_{\varphi i}]^T [K_{\varphi\varphi}{}^{(i)}][L_{\varphi i}]$$
$$[K_{\Phi U}] = \sum_i [L_{\varphi i}]^T [K_{\varphi u}{}^{(i)}][L_{ui}]$$
$$\{F\} = [K_{\Phi\Phi}] = \sum_i [L_{ui}]^T [f_i]$$
$$\{G\} = \sum_i [L_{\varphi i}]^T [g_i]$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για όλες τις κατασκευές που περιέχουν πιεζοηλεκτρικά στοιχεία.

3.

Έλεγχος & Χώρος Κατάστασης

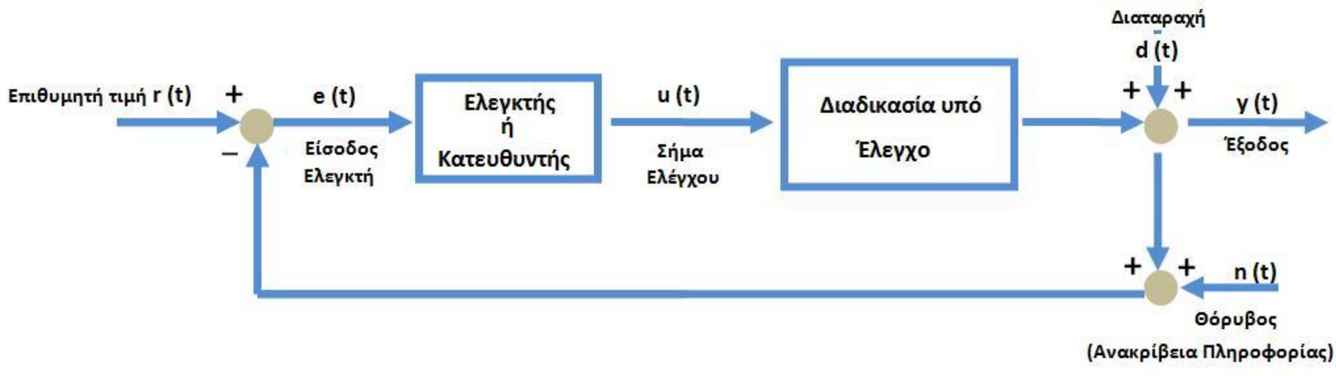
3.1 Εισαγωγή

Κατά την εξέλιξη της ζωής του ο άνθρωπος προσπαθούσε συνεχώς να συστηματοποιήσει τις καθημερινές του διαδικασίες και στη συνέχεια να τις αυτοματοποιήσει κατευθύνοντας κάθε φορά την έκβαση της διαδικασίας προς το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ένα Σύστημα Αυτόματου Ελέγχου αποτελείται από διάφορα στοιχεία συνδεδεμένα μεταξύ τους κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εξυπηρετεί συγκεκριμένο σκοπό.

Το Βασικό πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε είναι η εύρεση του κατάλληλου σήματος ελέγχου (**u(t)**), ώστε η έκβαση του συστήματος (έξοδος **y(t)**) να συμβαδίζει με την επιθυμητή τιμή (είσοδο αναφοράς **r(t)),** παρά τις εξωτερικές διαταραχές **d(t)** και της ανακρίβειας της πληροφορίας, που προέρχεται από τον θόρυβο **n(t)**, περί της πραγματικής κατάστασης εξόδου. Πουλιέζος Α. [114]

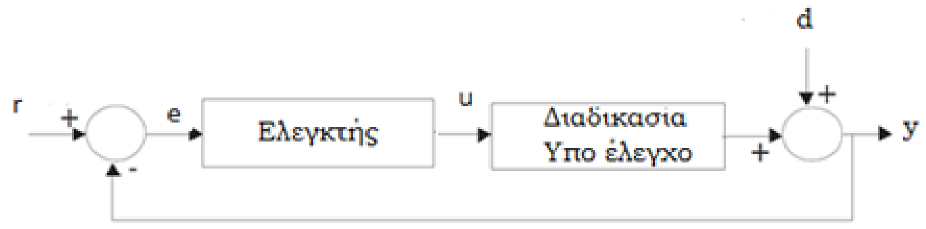
Τα Σ.Α.Ε. χωρίζονται σε κλειστού (closed loop) και ανοιχτού βρόγχου (open loop). Η διαφορά τους έγκειται στην ανατροφοδότηση ή όχι πληροφοριών από την έξοδο στην είσοδο του συστήματος, δηλαδή τη συνεχή πληροφόρηση του ελεγκτή για τη κατάσταση του συστήματος.



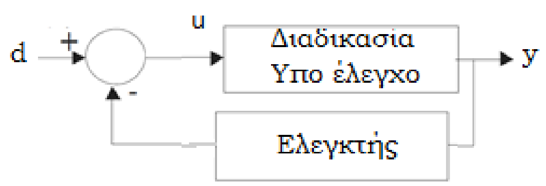
Εικόνα 3.1: Τυπικό διάγραμμα Συστήματος Αυτόματου Ελέγχου

Εν γένει επικρατούν δύο τύποι ελεγκτών κλειστού βρόγχου:

Α) Το σύστημα προσπαθεί να ακολουθεί την είσοδο αναφοράς.



Β) Το σύστημα προσπαθεί να απορρίπτει τις διαταραχές.



Στην ιδανική περίπτωση, θα θέλαμε το σύστημα κλειστού βρόχου να ικανοποιεί τα ακόλουθα κριτήρια απόδοσης: [115]

Α. Ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου.

Β. Ελαχιστοποίηση των συνεπειών των διαταραχών (απόρριψη διαταραχών).

Γ. Επίτευξη γρήγορων και ομαλών αποκρίσεων στις αλλαγές της επιθυμητής τιμής της ρυθμιζόμενης μεταβλητής (παρακολούθηση της επιθυμητής τιμής).

Δ. Μηδενικό σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση.

Ε. Αποφυγή υπερβολικών και απότομων ρυθμιστικών κινήσεων

ΣΤ. Ευρωστία, δηλαδή το σύστημα κλειστού βρόχου δεν πρέπει να είναι ευαίσθητο σε αλλαγές των συνθηκών της διεργασίας και σε σφάλματα του μοντέλου της διεργασίας.

Ανάλογα με το τύπο του ελεγκτή διαχωρίζουμε τον έλεγχο σε κλασικό, βέλτιστο και ευφυή.

Στον **Κλασικό Έλεγχο** προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα σε καθορισμένα χρονικά σημεία, π.χ. σφάλμα μόνιμης κατάστασης και εργαζόμαστε κυρίως στο πεδίο συχνοτήτων. (Παπαλάμπρου [116], Παπαλάμπρου [117]).

Ο στόχος του **Βέλτιστου Ελέγχου** είναι να υπολογίσει μια στρατηγική ελέγχου, που θα ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί κάποια συνάρτηση απόδοσης, για ένα σύστημα που ικανοποιεί δεδομένες μαθηματικές σχέσεις. Για παράδειγμα, την ελαχιστοποίηση του σφάλματος του συστήματος σε όλη τη διάρκεια της διαδικασίας. Στον Βέλτιστο Έλεγχο (ΒΕ) εργαζόμαστε κυρίως στον χώρο κατάστασης. Μειονέκτημα είναι ότι χρειαζόμαστε πλήρη γνώση όλου του διανύσματος κατάστασης σε κάθε χρονική στιγμή.

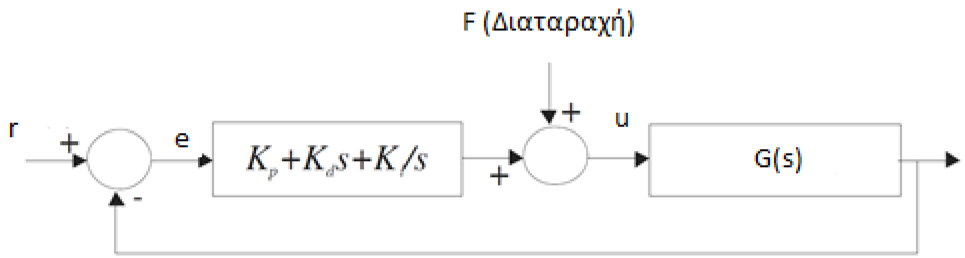
Προϋπόθεση, άλλοτε πλεονέκτημα και άλλοτε μειονέκτημα, για την εφαρμογή τεχνικών συμβατικών θεωριών ελέγχου είναι η ύπαρξη αναλυτικού μαθηματικού μοντέλου του ελεγχόμενου συστήματος.

Ο μη συμβατικός έλεγχος (**Ευφυής Έλεγχος)**, χωρίς να χρειάζεται την ύπαρξη ενός πλήρους αναλυτικού μοντέλου του ελεγχόμενου συστήματος, δημιουργεί ένα σύνολο λεκτικών λογικών κανόνων (μη γραμμικοί κανόνες ελέγχου) που περιγράφουν την επιτυχημένη έκβαση του συστήματος, όπως θα τη προκαλούσε ένας έμπειρος χειριστής. Επίσης στο συμβατικό έλεγχο η διεργασία και ο ελεγκτής θεωρείται ότι περιγράφονται από γραμμικά μαθηματικά μοντέλα διαφορικών εξισώσεων τα οποία εκ φύσεως είναι λιγότερο ευέλικτα από τα μη γραμμικά.

Παρακάτω αναφερόμαστε επιγραμματικά στους ελεγκτές που σχεδιάσαμε. Για εκτενέστερη θεωρητική ανάλυση, τεχνικές λεπτομέρειες και αποτελέσματα άλλων μεθόδων κλασικού, βέλτιστου και ευφυούς ελέγχου, ο αναγνώστης παραπέμπεται σε σχετικές εργασίες και βιβλιογραφία Driankov et al. [118], S. Pourzeynali et. al [119], Wang & Li [120], Reigles & Symans [121] , Marinova et al. [122], Maxwell, J.C. [123], Donald M Wiberg [124], Liu, Jie, Wang et. al. [125], Levine, William S. [126], Karl J. Aström et. al. [127], Franklin et al. [128], Hinrichsen D. [129], Sontag E. [130], Luyben W. [131].

3.2 PID Ελεγκτής

Ο Αναλογικός Ολοκληρωτικός Διαφορικός ελεγκτής (PID -Proportional Integral Derivative) είναι ένας αντισταθμιστής σειράς που επεμβαίνει στον απ' ευθείας κλάδο του κλειστού συστήματος και ρυθμίζει το σήμα που οδηγεί τον ενεργοποιητή σε ένα σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη την απόκλιση (σφάλμα) της εισόδου από την έξοδο.



Η τιμή του σφάλματος θα σταλεί στον PID controller , ο οποίος θα υπολογίσει τη παράγωγο και το ολοκλήρωμα αυτού του σήματος. Το σήμα που δίνει ο ελεγκτής σαν είσοδο στο σύστημα, θα είναι ίσο με το αναλογικό κέρδος Kp επί τη τιμή του σφάλματος συν το ολοκληρωτικό κέρδος Ki επί το ολοκλήρωμα του σφάλματος, συν το διαφορικό κέρδος Kd επί τη παράγωγο του σφάλματος.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t)dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \text{ , όπου } e(t) = (r(t) - y(t)) \qquad (3.2.1)$$

Το σήμα αυτό θα σταλεί στο σύστημα προς έλεγχο και στη συνέχεια θα λάβουμε ένα νέο σήμα εξόδου. Η νέα έξοδος θα σταλεί ξανά πίσω στο αισθητήριο για να ανιχνεύσει και αυτό με τη σειρά του το νέο σήμα σφάλματος. Ο ελεγκτής θα πάρει αυτό το νέο σήμα σφάλματος και θα υπολογίσει ξανά τη παράγωγο και το ολοκλήρωμα και η ίδια διαδικασία θα επαναλαμβάνεται συνέχεια.

Οι διάφορες σταθερές ορίζονται ως:

Kp: Σταθερά δράσης αναλόγου ελέγχου, έχει σχέση με την απολαβή του ανοικτού βρόγχου και ελέγχει το σφάλμα στο **παρόν.**

Ki: Σταθερά δράσης ελέγχου ολοκληρώματος, έχει σχέση με τη κλίση που δημιουργεί η ολοκλήρωση και ελέγχει το σφάλμα στο **παρελθόν.**

Kd: Σταθερά δράσης ελέγχου παραγώγου και ελέγχει το σφάλμα στο **μέλλον.**

Η χρήση **αναλογικού ελέγχου Kp** έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση του χρόνου ανύψωσης. Επίσης ρυθμίζει το μόνιμο σφάλμα και τείνει να το μηδενίσει, αν και παραμένει πάντα ένα μόνιμο σφάλμα.

Ο έλεγχος **ολοκληρώματος Ki** αυξάνει το τύπο του συστήματος με συνέπεια να μηδενίζει το μόνιμο σφάλμα, αλλά μεταβάλλει προς το χειρότερο τη μεταβατική συμπεριφορά καθώς προκαλεί ταλαντώσεις.

Ο έλεγχος **παραγώγου Kd** βελτιώνει τη μεταβατική συμπεριφορά απομακρύνοντας τους επικρατούντες πόλους από το φανταστικό άξονα, όμως χειροτερεύει τη μόνιμη συμπεριφορά και καταστρέφει τη ποιότητα του σήματος εισόδου που εισάγεται στο σύστημα (λόγω της παραγώγισης του θορύβου που υπάρχει στην έξοδο). Η δύναμή του βασίζεται στη πληροφορία που δίνει η κλίση μιας συνεχούς καμύλης για τη μελλοντική της κατάσταση. Χρησιμοποιείται για την αύξηση της απόσβεσης του κλειστού συστήματος. Μαρακάκης, Μάνεσης Α. Σταμάτης [132]

3.3 LQR Ελεγκτής

Σε αιτιοκρατικά συστήματα το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου είναι να βρεθεί ο έλεγχος,

$$u^*(t) \in U \tag{3.3.1}$$

που να αναγκάζει το σύστημα,

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t), x(t_0) = x_0 \tag{3.3.2}$$

να ακολουθήσει μια αποδεκτή τροχιά,

$$x^*(t) \in X \tag{3.3.3}$$

που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί το κριτήριο απόδοσης,

$$J[u(t)] = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt \tag{3.3.4}$$

Ο τελικός χρόνος $\mathbf{t_f}$ και η τελική θέση $\mathbf{x(t_f)}$ μπορεί να είναι δεδομένα ή ελεύθερα.

Όπου:

(3.3.2): Εξίσωση κατάστασης της διαδικασίας.

(3.3.1) και (3.3.3): Φυσικοί περιορισμοί του συστήματος για το διάνυσμα ελέγχου και κατάστασης αντίστοιχα.

(3.3.4): Κριτήριο απόδοσης.

Για γραμμικό μοντέλο συστήματος και τετραγωνική συνάρτηση σφάλματος, το πρόβλημα είναι γνωστό ως Γραμμικό Τετραγωνικό (Linear-Quadrtatic-LQ).

Η συνάρτηση κόστους ορίζεται ως:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru)dt \qquad (3.3.5)$$

Το **J** είναι το σταθμισμένο άθροισμα της ενέργειας κατάστασης και ελέγχου. Οι πίνακες βαρών **Q** και **R** αποτελούν επιλογή του μηχανικού και καθορίζουν τη συμμετοχή των μεταβλητών κατάστασης **(x)** και των εισόδων ελέγχου **(u)** στη συνάρτηση κόστους.

Ο παράγοντας $\mathbf{x^TQx}$ σχετίζεται με την ενέργεια του συστήματος. Κατά τη μεταβατική κατάσταση η ενέργεια πρέπει να πέφτει γρήγορα στο μηδέν. Η μέγιστη τιμή της σχετίζεται με την υπερακόντιση, ενώ ο χρόνος μείωσης της ενέργειας στο μηδέν σχετίζεται με το χρόνο αποκατάστασης. Ο παράγοντας $\mathbf{u^TRu}$ σχετίζεται με την ενέργεια ελέγχου, Παπαλάμπρου Γ. [117].

Ο βέλτιστος νόμος ελέγχου (Linear Quadratic Regulator-LQR) προκύπτει με ανατροφοδότηση κατάστασης,

$$u = Kx(t) \qquad (3.3.6)$$

Το κέρδος του ελεγκτή δίνεται από,

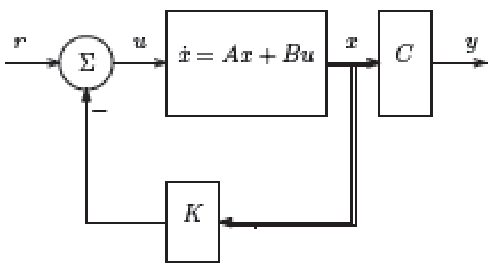
$$K = -R^{-1}B^T P \qquad (3.3.7)$$

όπου **P** είναι συμμετρική θετικά ημιορισμένη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \qquad (3.3.8)$$

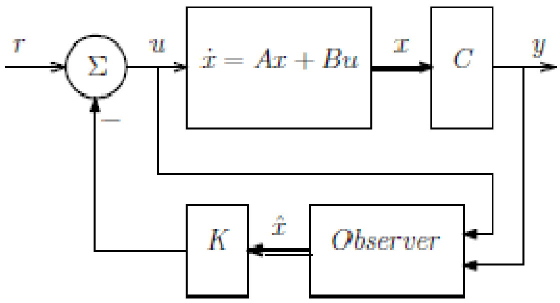
Ο νόμος ελέγχου (3.3.6), έχει ως αποτέλεσμα ένα σύστημα κλειστού βρόγχου της μορφής:

$$\dot{x} = (A - BK)x \qquad (3.3.9)$$



Εικόνα 3.2: Δομικό Διάγραμμα για σύστημα κλειστού βρόγχου, πλήρους ανατροφοδότησης κατάστασης με Ελεγκτή LQR

Η εφαρμογή του LQR όπως προαναφέραμε προϋποθέτει πλήρη γνώση του συνόλου του διανύσματος κατάστασης κάθε χρονική στιγμή. Σε διαφορετική περίπτωση η αποδοτικότητα του LQR μειώνεται και το σύστημα αναδομείται με τεχνικές φιλτραρίσματος (π.χ. φίτλτρο Kalman) ώστε να εκτιμηθούν οι άγνωστες, κατακερματισμένες ή απροσπέλαστες για λόγους κόστους καταστάσεις.



Εικόνα 3.3: Δομικό Διάγραμμα για σύστημα κλειστού βρόγχου, πλήρους ανατροφοδότησης με παρατηρητή (πχ φίλτρο Kalman)

Η παραπάνω μορφή και τα μητρώα A,B είναι μέρος της θεωρίας χώρου κατάστασης που θα αναλύσουμε στο υποκεφάλαιο 3.6.

3.4 Ασαφής Έλεγχος

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύουμε εκτενέστερα τη θεωρία πίσω από τον Ασαφή Έλεγχο, Βολογιαννίδης [139], Βουμβουλάκης [138], Ατσαλάκης [135], Νικολάου [140] Κάρλοβιτς [136], Σαρρή [137], Kartalopoulos [144], R. Jang & N. Gulley [227].

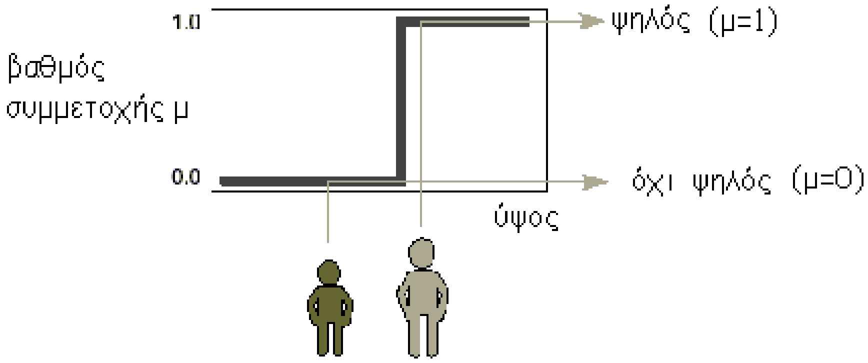
3.4.1 Ασαφής Λογική-Βασικοί Ορισμοί

Τον όρο «ασαφή λογική» (fuzzy logic) εισήγαγε το 1965 με άρθρο του ο L.A. Zadeh [134], ο οποίος αναφέρθηκε στην αναγκαιότητα δημιουργίας μίας μαθηματικής θεωρίας που θα επεξεργάζεται ασαφείς-ανακριβείς έννοιες, οι οποίες δεν είναι δυνατό να μοντελοποιηθούν με τη θεωρία των πιθανοτήτων (Zadeh, 1965). Η ανακρίβεια, ή η ασάφεια είναι ο πυρήνας των ασαφών συνόλων και της ασαφούς λογικής. Τα **ασαφή σύνολα** ουσιαστικά αποτελούν μια γενίκευση των κλασσικών συνόλων. Από τις αρχές της δεκαετίας του 1980 τα ασαφή σύνολα βρήκαν πολλές εφαρμογές, ιδίως σε συστήματα ελέγχου. Ένα ασαφές σύνολο (fuzzy set) A ορίζεται ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x,\mu_A(x)$ όπου $x \in X$ και $\mu_A(x) \in [0,1])$. Το σύνολο X αποτελεί ένα ευρύτερο σύνολο αναφοράς (universe of discourse) που περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα στα οποία μπορεί να γίνει αναφορά. Η τιμή $\mu_A(x)$ λέγεται βαθμός αλήθειας, συμβολίζει το βαθμό συγγένειας του x στο A και παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1]. Τέλος η συνάρτηση μ_A ονομάζεται **συνάρτηση συμμετοχής** (membership function). Στην πράξη η συνάρτηση συμμετοχής μπορεί να προέρχεται από:

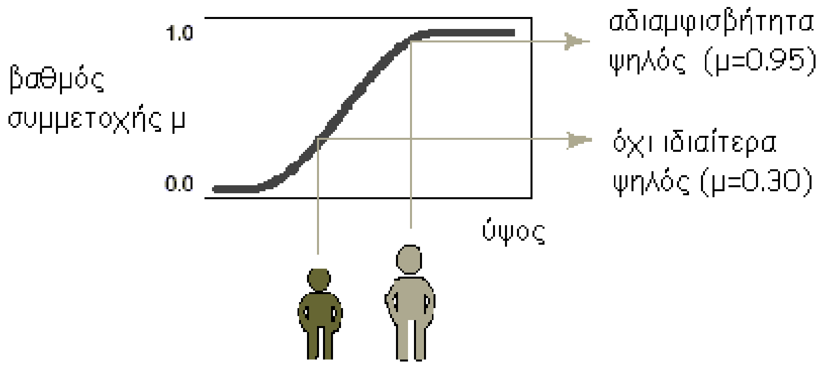
- Υποκειμενικές εκτιμήσεις
- Προκαθορισμένες (ad hoc) και απλοποιημένες μορφές
- Συχνότητες εμφανίσεων και πιθανότητες
- Φυσικές μετρήσεις
- Διαδικασίες μάθησης και προσαρμογής (π.χ. με νευρωνικά δίκτυα)

Η διαφορά των ασαφών συνόλων συγκριτικά με την κλασσική θεωρία συνόλων είναι ότι στην κλασσική θεωρία συνόλων ισχύει $\mu_A(x) \in \{0,1\}$, δηλαδή το x είτε ανήκει στο A ($\mu_A(x)=1$) ή δεν ανήκει ($\mu_A(x)=0$). Άρα η ασαφής θεωρία συνόλων μεταπίπτει στην αντίστοιχη κλασσική , όταν οι δυνατές τιμές της συνάρτησης συμμετοχής είναι 0 ή 1.

π.χ.: Ας υποθέσουμε ότι ο χώρος αναφοράς X είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων. Ένα ασαφές υποσύνολο του χώρου αυτού είναι οι ψηλοί άνθρωποι. Τα πιθανά ύψη έστω ότι κυμαίνονται από 1.20 μέχρι 2.50 . Η λέξη ψηλός μπορεί να συσχετισθεί με μια καμπύλη η οποία δείχνει κατά πόσο ένας άνθρωπος είναι ψηλός ή όχι. Αν χρησιμοποιήσουμε τις αρχές των κλασσικών συνόλων τότε για να ορίσουμε το σύνολο των ψηλών ανθρώπων θα πρέπει να ορίσουμε μια συγκεκριμένη τιμή ύψους , η οποία θα διαχωρίζει τους ανθρώπους σε ψηλούς και κοντούς. Π.χ. ας υποθέσουμε ότι η τιμή αυτού του ύψους είναι 1.75m. τότε ένας άνθρωπος με ύψος 1.74 θα χαρακτηρίζεται κοντός ενώ ένας άνθρωπος με ύψος 1.76 θα χαρακτηρίζεται ψηλός. Ο παραπάνω διαχωρισμός φαίνεται παράλογος αφού έχουμε αντιστοιχήσει σε δύο ανθρώπους με αμελητέα διαφορά ύψους δύο αντίθετες μεταξύ τους έννοιες.

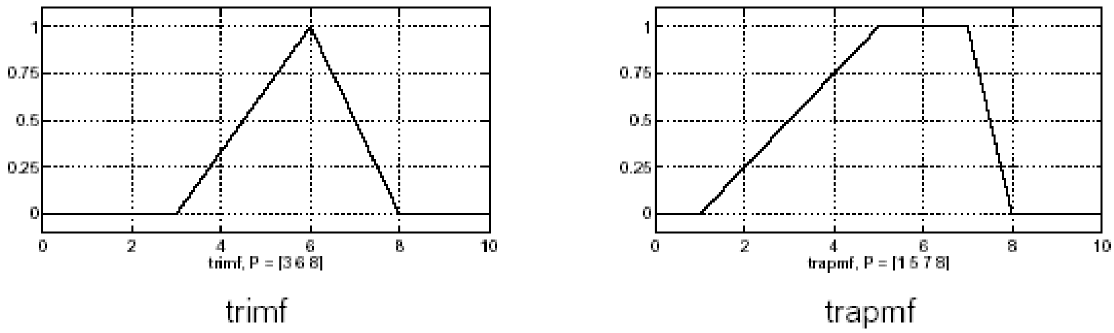


Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε την έννοια ψηλός είναι μέσω μιας καμπύλης που έχει ομαλή διακύμανση και μεταβαίνει από την έννοια ψηλός στην έννοια κοντός. Αυτή η καμπύλη είναι η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου των ψηλών ανθρώπων. Με άλλα λόγια δεχόμαστε ότι όλοι οι άνθρωποι είναι σε κάποιο βαθμό ψηλοί άλλα δεν είναι όλοι στον ίδιο βαθμό ψηλοί.



Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υποκειμενικοί παράγοντες ενυπάρχουν στα χαρακτηριστικά της δομής ενός ασαφούς συνόλου. Η μορφή δηλαδή της καμπύλης δεν μπορεί να είναι η ίδια όταν αναφερόμαστε σε ενήλικες και ανήλικες, σε γυναίκες και άντρες κλπ. Η μορφή επίσης της καμπύλης επιλέγεται αυθαίρετα σύμφωνα με την αντίληψη που έχει κάθε άνθρωπος για την έννοια ψηλός. Η μόνη προϋπόθεση που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση συμμετοχής είναι να βρίσκεται στο διάστημα τιμών [0 1]. Το σχήμα της επιλέγεται μεν αυθαίρετα αλλά και με τρόπο που να διασφαλίζει όσο είναι δυνατό την απλότητα.

Οι απλούστερες συναρτήσεις συμμετοχής είναι αυτές που σχηματίζονται από ευθείες γραμμές. Η απλούστερη από αυτές είναι η τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής, που δεν είναι τίποτα άλλο από ένα τρίγωνο. Στην ίδια κατηγορία ανήκει και η τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής. Αυτές οι δύο συναρτήσεις εξασφαλίζουν την απαίτηση για απλότητα.



Σχήμα 3.4.1.1 :Τριγωνική και τραπεζοειδής συνάρτηση

Η μαθηματική έκφραση της τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής είναι η εξής:

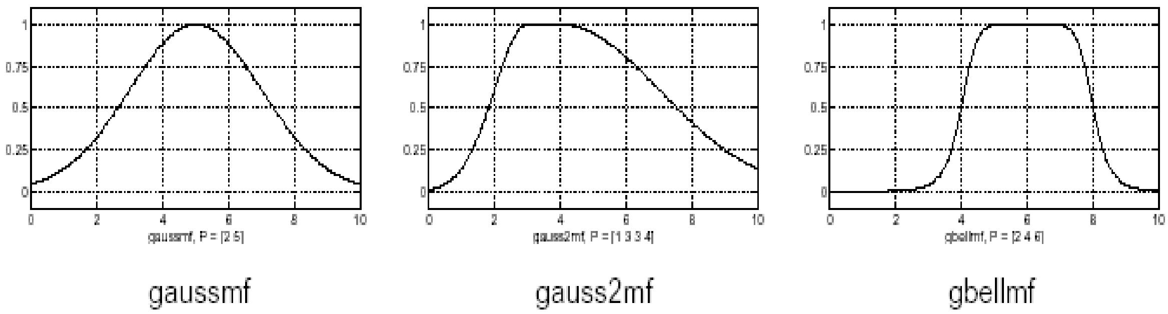
$$A = \begin{cases} 0, x \leq a \\ (x-a)/(b-a), x \in (a,b) \\ (c-x)/c-b), x \in (b,c) \\ 0, x \geq c \end{cases}$$

Παρακάτω δίδεται η μαθηματική έκφραση της τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής:

$$A = \begin{cases} 0, x \leq a \\ (x-a)/(b-a), x \in (a,b) \\ 1, x \in (b,c) \\ (d-x)/d-c), x \in (c,d) \end{cases}$$

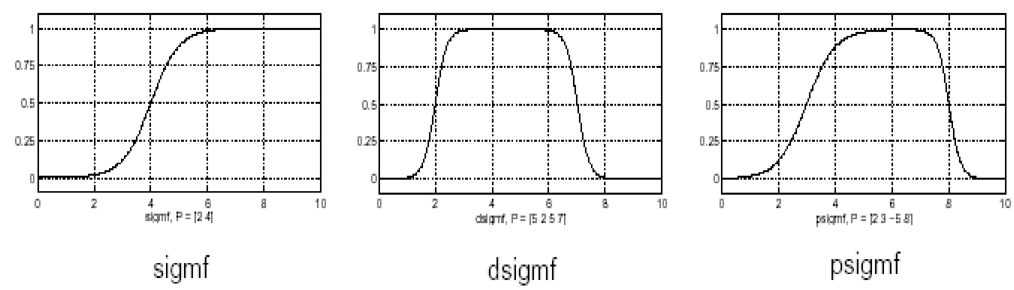
Δύο συναρτήσεις συμμετοχής, που είναι δομημένες πάνω στη μορφή της κατανομής Gauss, είναι μια απλή γκαουσιανή και μια σύνθεση δύο διαφορετικών γκαουσιανών.

Η γενικευμένη συνάρτηση συμμετοχής με μορφή καμπάνας έχει τρεις παραμέτρους, μια παραπάνω από την γκαουσιανή. Η γκαουσιανή και η καμπάνα μπορούν να χρησιμοποιούνται συχνά στα ασαφή σύνολα λόγο της ομαλότητάς τους. Έχουν δε το πλεονέκτημα να διατηρούν μη μηδενικές τιμές σε όλα τα σημεία.



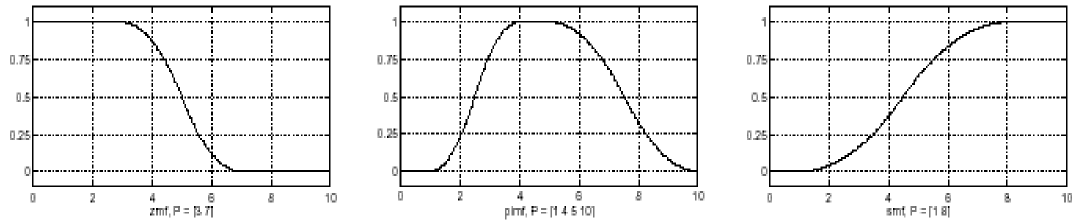
Σχήμα 3.4.1.2: Γκαουσιανή, Γκαουσιανή 2 και καμπανοειδής συνάρτηση

Παρά το γεγονός ότι η γκαουσιανή συνάρτηση συμμετοχής και η συνάρτηση καμπάνας επιτυγχάνουν ομαλή διακύμανση, δεν μπορούν ωστόσο να ορίσουν ασύμμετρες συναρτήσεις συμμετοχής, που είναι χρήσιμες σε πολλά πρακτικά προβλήματα. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται η σιγμοειδής συνάρτηση συμμετοχής. η οποία είναι ασύμμετρη και ανοικτή είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά. Κλειστές συναρτήσεις συμμετοχής αυτού του τύπου μπορούν να παραχθούν αν συνθέσουμε δύο σιγμοειδείς. Έτσι προκύπτει η διαφορά μεταξύ δύο σιγμοειδών και το άθροισμα τους.



Σχήμα 3.4.1.3: Σιγμοειδής, Διαφορά σιγμοειδών και Άθροισμα σιγμοειδών

Επίσης υπάρχουν πολλές πολυωνυμικές καμπύλες που τις χρησιμοποιούμε σαν συναρτήσεις συμμετοχής. Τρεις από αυτές είναι η Z η S και η Π, οι οποίες έχουν ονομασθεί έτσι εξαιτίας του σχήματός τους. Η Z είναι μια ασύμμετρη πολυωνυμική καμπύλη που είναι ανοικτή στα αριστερά, η S είναι η κατοπτρική της Z και η Π είναι μια ασύμμετρη κλειστή καμπύλη σχήματος Π.



zmf pimf smf

Σχήμα 3.4.1.4: Πολυωνυμικές καμπύλες

3.4.2 Ιδιότητες των Ασαφών Συνόλων

Έστω **X** ένα σύνολο αντικειμένων , του οποίου τα στοιχεία συμβολίζονται με το γράμμα **x**. Η συμμετοχή σε ένα υποσύνολο A του συνόλου X είναι μια συνάρτηση συμμετοχής $\boldsymbol{\mu_A}$ από το X στο διάστημα **[0 1].** Το **A** είναι ένα ασαφές υποσύνολο του X , το οποίο όμως δεν έχει αυστηρά καθορισμένα σύνορα. $\boldsymbol{\mu_A}$ είναι ο βαθμός συμμετοχής του στοιχείου x στο A. Όσο πιο κοντά στο 1 είναι το μ_A τόσο πιο πολύ ανήκει το x στο A.

Το σύνολο A μπορεί να προσδιοριστεί επομένως από το σύνολο των παρακάτω ζευγών: $\mathbf{A=\{(x,\mu_A(x)),x\in X\}}$, όπου Κάθε ζευγάρι $(x,\mu_A(x))$ ονομάζεται **μονοσύνολο.**

Χώρος αναφοράς του ασαφούς συνόλου A είναι το σύνολο των στοιχείων του X που έχουν μη μηδενικό βαθμό συμμετοχής στο A.

$\mathbf{Supp\ A=\{x\in X \mid \mu_A(x)>0\}}$.

Το σύνολο A μπορεί να γραφεί και ως: $\mathbf{A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \ldots}$ ή $\mathbf{A = \Sigma\mu_i/x_i}$

Στο συνεχή χώρο αναφοράς : $A = \int_x \mu_A(x)/x$

Ασαφές δυναμοσύνολο: Ασαφές δυναμοσύνολο F(x) του υπερσυνόλου αναφοράς X, ονομάζεται το σύνολο όλων των ασαφών υποσυνόλων του X.

Υποσύνολο: Το σύνολο A είναι υποσύνολο του B, A⊆B αν και μόνο αν $\mu_{\mathrm{A}}(x) \le \mu_B(x), \forall x \in X$

Αν ταυτόχρονα τα A και B δεν είναι ίσα, τότε το A θα ονομάζεται γνήσιο υποσύνολο του B

Ασαφής διαμέριση: Μια οικογένεια ασαφών υποσυνόλων του X , θα λέγεται ασαφής διαμέριση **P^{n}(X)** του X τάξης n (n∈N) και θα συμβολίζεται με $A^n = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, αν και μόνο αν:

$$A_j \ne A_i, \forall i, j \in N_n (i \ne j)$$

$$0 < \sum_{k=i}^{m} A_i(x_k) < m, \forall i \in N_n$$

Τα στοιχεία A_i $i \in N_n$ της A_n θα λέγονται **κλάσεις** της ασαφούς διαμέρισης.

Κενό ασαφές σύνολο: Ένα ασαφές σύνολο με χώρο αναφοράς τον X , λέγεται κενό αν για κάθε στοιχείο x που ανήκει στον X , η συνάρτηση συμμετοχής του A είναι μηδέν.

$$A \equiv 0 \quad \text{αν} \quad \mu_{\mathrm{A}}(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

Κανονικό ασαφές σύνολο: Ένα ασαφές σύνολο A, που ορίζεται στο χώρο αναφοράς X , λέγεται κανονικό αν υπάρχει τουλάχιστο ένα στοιχείο x του X για το οποίο η συνάρτηση συμμετοχής να παίρνει τιμή ίση με τη μονάδα.

$$A = \text{κανονικό} \quad \text{αν} \ \exists \ \chi_1 : \mu_A(\chi_1) = 1$$

Ισότητα ασαφών συνόλων: Δύο ασαφή σύνολα A και B που ορίζονται στο χώρο αναφοράς X , λέγονται ίσα αν για κάθε στοιχείο x του X οι συναρτήσεις συμμετοχής των A και B είναι ίσες. Δηλαδή:

$$A = B \ \text{αν} \ \mu_{\mathrm{A}}(x) = \mu_{\mathrm{B}}(x) \quad \forall x \in X$$

Συστολή ασαφών συνόλων: Έστω ασαφές σύνολο A που ορίζεται στο χώρο αναφοράς X. Η συστολή, CON(A) του συνόλου αυτού είναι ένα νέο ασαφές σύνολο με συνάρτηση συμμετοχής που ορίζεται ως εξής

$$\mu_{CON(\mathrm{A})}(x) = (\mu_{\mathrm{A}}(x))^2$$

Η συστολή του ασαφούς συνόλου αντιστοιχεί στην προσθήκη του όρου πολύ , μπροστά από τη λεκτική μεταβλητή που περιγράφει το ασαφές σύνολο. Δηλαδή η συστολή του ασαφούς συνόλου ψηλός είναι ένα νέο ασαφές σύνολο που αντιστοιχεί στην έννοια πολύ ψηλός.

Διαστολή ασαφών συνόλων: Αντιστοίχως η διαστολή ενός ασαφούς συνόλου A , είναι ένα νέο ασαφές σύνολο που συμβολίζεται με DIL(A) και έχει συνάρτηση συμμετοχής που περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mu_{DIL(A)}(x) = \sqrt{\mu_{\mathrm{A}}(x)}$$

Η διαστολή του ασαφούς συνόλου αντιστοιχεί στην προσθήκη του όρου λίγο, μπροστά από τη λεκτική μεταβλητή που περιγράφει το ασαφές σύνολο. Δηλαδή η διαστολή του ασαφούς συνόλου ψηλός είναι ένα νέο ασαφές σύνολο που αντιστοιχεί στην έννοια λίγο ψηλός

3.4.3 Λογικές Πράξεις στα Ασαφή Σύνολα

Μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί στα ασαφή σύνολα και καθόλου στην ασαφή λογική. Η ασαφής λογική δεν είναι παρά ένα υπερσύνολο της λογικής Boolean. Αν δηλαδή απομονώσουμε τους ακραίους βαθμούς συμμετοχής 0 (πλήρως ψευδές) και 1 (πλήρως αληθές) τότε οι κλασσικοί λογικοί τελεστές μπορούν να εφαρμοσθούν. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα αληθείας:

A	B	A and B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

A	B	A or B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

A	not A
0	1
1	0

NOT

Πίνακας 3.4.3.1: Πίνακας Αλήθειας

Μεταβαίνοντας στον χώρο της ασαφούς λογικής πρέπει να έχουμε υπόψη, ότι οι έννοιες αληθές και ψευδές είναι θέμα βαθμού συμμετοχής. Επομένως ο πίνακας αυτός πρέπει να μετατραπεί με τρόπο που να συμπεριλαμβάνει αυτήν την αρχή. Οι τιμές των εισόδων Α και Β είναι τώρα πραγματικοί αριθμοί από το 0 μέχρι το 1. Πρέπει λοιπόν να ευρεθεί μια συνάρτηση που να διατηρεί τις ιδιότητες της συνάρτησης AND και ταυτόχρονα να μπορεί να επεκτείνεται για πραγματικούς αριθμούς.

Μια πιθανή απάντηση μπορεί να είναι ο τελεστής **min(A,B)** , η ελάχιστη δηλαδή τιμή των εισόδων Α και Β. Με βάση το ίδιο σκεπτικό μια συνάρτηση που μπορεί να αντικαταστήσει τον τελεστή **OR** της Boolean λογικής είναι ο τελεστής **max(A,B)**. Τέλος ο τελεστής **NOT** A μπορεί να αντικατασταθεί με την πράξη **1-A**.

Παρακάτω βλέπουμε ότι ο πίνακας αληθείας παραμένει αμετάβλητος αν εφαρμόσουμε τις παραπάνω υποκαταστάσεις.

A	B	min(A,B)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

A	B	max(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

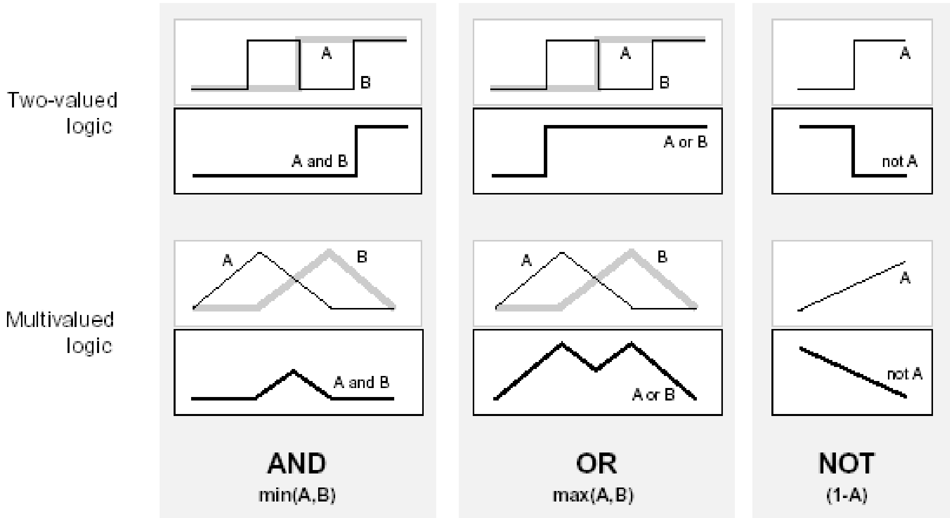
OR

A	1 - A
0	1
1	0

NOT

Πίνακας 3.4.3.2: Πίνακας αλήθειας 3. 4.3.1 με τις υποκαταστάσεις

Αφού έχουμε ορίσει συναρτήσεις, που μπορούν ορίσουν τον πίνακα αληθείας, μπορούμε πλέον να επεκταθούμε και στην περίπτωση πραγματικών αριθμών. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε αντικαταστήσει τον πίνακα αληθείας με ένα γράφημα δύο ασαφών συνόλων. Στο πάνω μέρος έχουμε την περίπτωση συνόλων με δύο τιμές. Στο κάτω μέρος εμφανίζεται ο τρόπος που φαίνεται πως λειτουργούν οι τελεστές στην περίπτωση που οι τιμές αληθείας A και B μεταβάλλονται συνεχώς από το 0 στο 1.



Σχήμα 3.4.3.3: Αντικατάσταση πίνακα αλήθειας με γράφημα δύο ασαφών συνόλων

Δεδομένων των παραπάνω συναρτήσεων μπορούμε να κατασκευάσουμε δομές με βάση ασαφή σύνολα και τους λογικούς κανόνες AND OR και NOT. Βέβαια το γεγονός ότι βρήκαμε συναρτήσεις που να επεκτείνουν τους τελεστές αυτούς από το χώρο της Boolean λογικής στο χώρο της ασαφούς λογικής δε σημαίνει σε καμία περίπτωση ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι και οι μοναδικές.

Έχουμε ορίσει την τομή, την ένωση και το συμπλήρωμα ενός ασαφούς συνόλου με τους τελεστές min max 1-A οι όποιοι είναι οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενοι. Ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες συναρτήσεις για τον ίδιο σκοπό.

Γενικά η τομή δύο ασαφών συνόλων μπορεί να παρασταθεί με μια δυαδική απεικόνιση T που αθροίζει (aggregates) τις δύο συναρτήσεις συμμετοχής ως ακολούθως: $\mu_{A \cap B} = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

Για παράδειγμα ο δυαδικός τελεστής T μπορεί να αντιπροσωπεύει τον πολλαπλασιασμό των $\mu_A(x)$και $\mu_B(x)$.

Αυτού του είδους οι τελεστές τομής αναφέρονται συνήθως ως τ-νόρμες (τριγωνική νόρμα , triangular norm) και πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- Οριακές συνθήκες: $T(0, 0) = 0$, $T(a, 1) = T(1, a) = a$
- Μονοτονία: $T(a, b) <= T(c, d)$ *αν* $a <= c$ *και* $b <= d$
- Αντιμεταθετικότητα: $T(a, b) = T(b, a)$
- Προσεταιριστικότητα: $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$

***Η* πρώτη απαίτηση** επιβάλει τη γενίκευση σε σύνολα διακριτών τιμών (crisp sets)

***Η* δεύτερη** υπονοεί ότι μια μείωση του βαθμού συμμετοχής στο Α ή στο Β δεν μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση του βαθμού συμμετοχής στην τομή των Α και Β.

***Η* τρίτη απαίτηση** δείχνει ότι ο τελεστής είναι αδιάφορος στον τρόπο διάταξης με τον οποίο τέμνονται τα δύο σύνολα Α και Β.

Τέλος **η τέταρτη απαίτηση** μας επιτρέπει να παίρνουμε την τομή οποιουδήποτε αριθμού συνόλων σε οποιαδήποτε διάταξη ζευγών.

Παραδείγματα τ-νορμών είναι:

Συνήθης τομή: T(a,b)=min(a,b)

Αλγεβρικό γινόμενο: T(a,b)=ab

Φραγμένη διαφορά: T(a,b)=max(0,a+b-1)

Συνάρτηση Hamacher: Η συνάρτηση Hamacher δίνεται από τη σχέση:

$$t(a,b) = \frac{ab}{r + (1-r)(a+b-ab)}$$

Όπως η ασαφής τομή έτσι και η ασαφής ένωση προσδιορίζεται με μια δυαδική απεικόνιση **S**. $\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Για παράδειγμα ο τελεστής S μπορεί να είναι το άθροισμα των $\mu_A(x)$ και $\mu_B(x)$.

Οι ασαφείς τελεστές ένωσης αναφέρονται συνήθως ως σ-νόρμες και πρέπει να πληρούν τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- Οριακές συνθήκες: $S(1, 1) = 1$, $S(a, 0) = S(0, a) = a$
- Μονοτονία: $S(a, b) <= S(c, d)$ αν $a <= c$ *καιb* $<= d$
- Αντιμεταθετικότητα: $S(a, b) = S(b, a)$
- Προσεταιριστικότητα: $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$

Παραδείγματα σ-νορμών είναι τα εξής:

Συνήθης ένωση s(a,b)=max(a,b)

Αλγεβρικό άθροισμα s(a,b)=a+b-ab

Φραγμένο άθροισμα s(a,b)=min(1,a+b)

Συμπλήρωμα: Το συμπλήρωμα **A’** ενός ασαφούς συνόλου A δίνεται από τη σχέση: $\mu_{\bar{A}}(x) = c(\mu_{\mathrm{A}}(x))$, όπου η συνάρτηση c πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- Οριακές συνθήκες: c(0)=1 και c(1)=0
- Μονοτονία: $\forall a, b \in [0,1]$, αν $a \le b \Rightarrow c(a) \ge c(b)$
- Συνέχεια: c συνεχής στο [0,1].
- Εναγωγή $\forall a \in [0,1]$ είναι c(c(a))=a

Το σύνηθες συμπλήρωμα δίνεται από τη σχέση: $\mu_{\bar{\mathrm{A}}}(x) = 1 - \mu_{\mathrm{A}}(x)$

3.4.4 Ασαφείς Σχέσεις

Οι ασαφείς σχέσεις (fuzzy relations) είναι ασαφή σύνολα ορισμένα σε πεδία αναφοράς ανώτερης διάστασης (π.χ. X x X ,X x Y x Z κλπ). Ποιοτικά , μια ασαφής σχέση **R** θα μπορούσε να είναι μια έκφραση της μορφής «είναι βαρύτερο από» και η οποία θα συνδέει τα στοιχεία δύο άλλων συνόλων:

R= «x είναι βαρύτερο από y» x∈X, y∈Y και R∈X x Y

Οι ασαφείς σχέσεις μπορεί να εκφραστούν με αναφορά όλων των ζευγών (τιμή, βαθμός συμμετοχής) , δηλαδή ζευγών της μορφής ((x,y),μ_R(x,y)). Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης , ιδιαίτερα χρήσιμος σε υπολογισμούς, είναι σε μορφή πίνακα:

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \cdots & \mu_R(x_1, y_n) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \cdots & \mu_R(x_2, y_n) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \mu_R(x_m, y_1) & \mu_R(x_m, y_2) & \cdots & \mu_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

Οι ασαφείς σχέσεις μπορούν να συνδυαστούν μεταξύ τους μέσω της διαδικασίας της σύνθεσης (composition). Αν για παράδειγμα συνδυαστεί η ασαφής σχέση $R_1(x,y)$ ορισμένη στο X x Y με την ασαφή σχέση $R_2(y,z)$ ορισμένη στο Y x Z τότε θα προκύψει μία ασαφής σχέση R(x,z) η οποία θα ορίζεται στο σύνολο X x Z και θα συσχετίζει άμεσα στοιχεία των συνόλων X και Z. Βέβαια είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί επακριβώς η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_R(x,z)$ της R με χρήση των συναρτήσεων συμμετοχής των R_1 και R_2.

Οι βασικές πράξεις που ορίζονται μεταξύ των ασαφών σχέσεων είναι η αντιστροφή και η σύνθεση.

- ***Αντιστροφή***

Αντίστροφη σχέση της R(X,Y) είναι η ασαφής σχέση $R^{-1}(Y,X)$ με τύπο: $R^{-1}(y,x)=R(x,y)$ για κάθε x που ανήκει στον X και κάθε y που ανήκει στον Y. Ο πίνακας συμμετοχής που παριστάνει την R^{-1} είναι ο ανάστροφος του R.

- ***Σύνθεση***

Η σύνθεση είναι πολύ σημαντική διαδικασία καθώς οι κανόνες της μορφής **if-then**, που θα αναλύσουμε παρακάτω, αντιστοιχούν σε ασαφείς σχέσεις και το πρόβλημα της ασαφούς συλλογιστικής είναι μαθηματικά ισοδύναμο με τη σύνθεση. Αν $R_1(x,y)$ και $R_2(y,z)$ είναι δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στα σύνολα X x Y και Y x Z αντίστοιχα, τότε η σύνθεση τους δίνει μια νέα σχέση $R_1 \circ R_2$

Η sup-t σύνθεση R:X x Y→[0,1] δύο ασαφών σχέσεων R_1:X x Y→[0,1] και R_2: X x Y → [0,1] ορίζεται από την εξίσωση:

$$R(x,y) = \left[R_1 \circ^t R_2\right](x,y) = \sup_{y\in Y} t\left[R_1(x,y), R_2(y,z)\right]$$

Οι περισσότερο γνωστές μέθοδοι σύνθεσης ασαφών συνόλων είναι η σύνθεση max-min και η σύνθεση max-product.

Η συνάρτηση συμμετοχής για την περίπτωση της max-min σύνθεση δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{R_1\circ R_2}(x,z) = \vee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)\right]$$

Στην περίπτωση της σύνθεσης max-product έχομε την παρακάτω σχέση:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \vee_y \left\lfloor \mu_{R_1}(x,y) \bullet \mu_{R_2}(y,z) \right\rfloor$$

Οι υπολογισμοί στο δεξιό μέρος των παραπάνω σχέσεων είναι παρόμοιοι με του πολλαπλασιασμού των πινάκων.

3.4.5 Ασαφής Συμπερασμός

Η βάση στην οποία στηρίζεται η λήψη αποφάσεων (συμπέρασμα) είναι η παραγωγή συλλογιστικής. Η ασαφής λογική ασχολείται με την παραγωγή συλλογιστικής σε περιβάλλον αβεβαιότητας. Για το σκοπό αυτό , θεμελιώνεται η δομή και η μαθηματική αναπαράσταση ενός ασαφούς γεγονότος με τον ορισμό των ασαφών συνόλων και καθορίζεται ο τρόπος με τον οποίο συνδυάζουμε τα γεγονότα για να παράγουμε λογικές προτάσεις ή σχέσεις και συνεπώς συμπεράσματα.

Οι συλλογιστικοί τρόποι που κυρίως χρησιμοποιούνται είναι τρεις:

- Ο modus ponens (MP)
- Ο modus tolens (MT)
- Ο υποθετικός συλλογισμός (HS)

Ο **modus ponens** παράγει συμπεράσματα από ένα σύνολο υποθέσεων σύμφωνα με το σχήμα:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

όπου A και B συγκεκριμένα γεγονότα.

Ο παραπάνω κανόνας ερμηνεύεται ως εξής: Αν το γεγονός Α συνεπάγεται το γεγονός Β και επιπλέον έχουμε ως υπόθεση ότι ισχύει το Α, τότε το συμπέρασμα που παίρνουμε είναι ότι ισχύει και το Β. Όμως σε περιβάλλον ασάφειας τα γεγονότα ισχύουν σε κάποιο βαθμό. Έτσι ο παραπάνω κανόνας πρέπει να τροποποιηθεί για να συμπεριλάβει και την ασάφεια. Καταλήγουμε με αυτό τον τρόπο στο γενικευμένο κανόνα modus ponens (generalized modus ponens) ο οποίος έχει την παρακάτω μορφή:

$(A \Rightarrow B) \wedge A' \Rightarrow B'$

Αντίστοιχα ο γενικευμένος κανόνας **modus tolens** (generalized modus tolens) διατυπώνεται ως εξής:

$(A \Rightarrow B) \wedge B' \Rightarrow A'$

Ας εξετάσουμε τώρα την ερμηνεία των παραπάνω κανόνων. Για παράδειγμα ο γενικευμένος κανόνας modus ponens ερμηνεύεται ως εξής: Αν το γεγονός Α συνεπάγεται το γεγονός Β και έχουμε ως υπόθεση ότι ισχύει το Α σε κάποιο βαθμό, τότε θα ισχύει και το Β σε κάποιο βαθμό.

Πρέπει, λοιπόν να προσδιοριστεί ο βαθμός στον οποίο πληρείται το γεγονός Β. Αυτός εξαρτάται από το βαθμό στον οποίο πληρείται το γεγονός Α και από το είδος της συνεπαγωγής που εφαρμόζουμε. Η πράξη της ασαφούς συνεπαγωγής υλοποιεί τη μαθηματική σχέση Α ==> Β, όταν τα Α και Β είναι ασαφή γεγονότα..

Το σχήμα που προτείνεται από τη θεωρία των ασαφών συνόλων για την εξαγωγή του γεγονότος Β’ από τα γεγονότα Α ,Α’,Β περιγράφεται από την παρακάτω σχέση που αποτελεί το συνθετικό κανόνα του Zadeh:

$$B'(y) = \sup_{x \in X} t[A'(x), \sigma(A(x), B(y))]$$

όπου **σ** είναι μια συνάρτηση που υλοποιεί την πράξη της ασαφούς συνεπαγωγής.

Επομένως η επιλογή της συνάρτησης που υλοποιεί την ασαφή συνεπαγωγή έχει ουσιαστικό ρόλο για την ασαφή συλλογιστική που παράγεται με βάση το παραπάνω σχήμα. Ένα από τα κριτήρια που χρησιμοποιείται γι’ αυτή την επιλογή είναι το κριτήριο της ανάκλησης (recall) , το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

$$B(y) = \sup_{x \in X} t[A(x), \sigma(A(x), B(y))]$$

Το κριτήριο αυτό έχει την εξής ερμηνεία: η ασαφής συνεπαγωγή πρέπει να είναι τέτοια ώστε όταν η υπόθεση πληρείται ακριβώς , τότε να λαμβάνουμε το συμπέρασμα του κανόνα Α=>Β , δηλαδή το γεγονός Β. η απαίτηση αυτή είναι εύλογη αφού όταν δεν υπάρχει αβεβαιότητα η ασαφής συλλογιστική οφείλει να ταυτίζεται με την κλασσική συλλογιστική.

3.4.6 Συστήματα Ασαφούς Συμπερασμού

Εισαγωγή

Προηγουμένως αναφερθήκαμε στα ασαφή σύνολα και στις πράξεις που γίνονται σ' αυτά. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφέρουμε τον τρόπο που μπορούν να εφαρμοσθούν τα προηγούμενα σε ένα σύστημα λήψης αποφάσεων.

Θα εξετάσουμε ένα απλοϊκό παράδειγμα λήψης αποφάσεων και θα δούμε πως μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια της ασαφούς λογικής. Εξετάζουμε το πρόβλημα του φιλοδωρήματος, πόσο δηλαδή είναι το φιλοδώρημα που πρέπει να δώσει ένας πελάτης σε ένα εστιατόριο. Οι παράμετροι του προβλήματος είναι η ποιότητα του φαγητού και η εξυπηρέτηση. Είναι προφανές για παράδειγμα ότι αν το φαγητό είναι άριστης ποιότητας και η εξυπηρέτηση καλή τότε το φιλοδώρημα θα είναι υψηλό. Αντίστοιχα αν η ποιότητα της εξυπηρέτησης είναι χαμηλή και το φαγητό κακό τότε το φιλοδώρημα θα είναι χαμηλό.

Τι γίνεται όμως αν έχουμε μια ενδιάμεση κατάσταση, π.χ. μέτριο φαγητό και καλή εξυπηρέτηση. Επιπλέον παραπάνω έχουμε αναφέρει προσδιορισμούς όπως καλό , καλό , μέτριο που εμπεριέχουν κάποια ασάφεια.

Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα γραμμικά θα πρέπει να δώσουμε καθορισμένους κανόνες για κάθε μια περίπτωση. Μέσω όμως της ασαφούς λογικής το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί ευκολότερα. Πριν προχωρήσουμε στη λύση του προβλήματος θα δούμε πως μπορούμε να υλοποιήσουμε τους κανόνες **αν-τότε** (if-then rules) που προαναφέραμε (αν το φαγητό είναι κακό κτλ).

Κανόνες αν-τότε (if-then rules)

Τα ασαφή σύνολα και οι ασαφείς τελεστές είναι τα υποκείμενα και τα ρήματα του ασαφούς λογισμού. Οι προτάσεις if-then χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν τις συνθήκες εκείνες που συνιστούν την ασαφή λογική. Ένας απλός κανόνας if-then έχει τη μορφή:

if x is A then y is B

, όπου A και B είναι οι γλωσσικές μεταβλητές που προσδιορίζονται από ασαφή σύνολα με χώρο αναφοράς X και Y αντίστοιχα. Το πρώτο κομμάτι του κανόνα ‘if *x* is *A’* ονομάζεται υπόθεση (*antecedent ή* premise) ενώ το δεύτερο κομμάτι ‘then *y* is *B’* ονομάζεται συνέπεια ή συμπέρασμα (*consequent* ή conclusion). Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου κανόνα μπορεί να είναι το εξής:

if service is good then tip is average

Η λέξη ***good*** αντιπροσωπεύεται από έναν αριθμό που κυμαίνεται ανάμεσα στο 0 και το 1. Έτσι η υπόθεση είναι μια μετάφραση που επιστρέφει μια τιμή από το 0 έως το 1. Από την άλλη μεριά η λέξη ***average*** αποτελεί ένα ασαφές σύνολο και έτσι η συνέπεια του κανόνα είναι μια συσχέτιση της εξόδου y στο ασαφές σύνολο B.

Στους κανόνες if-then η λέξη **‘is’** έχει διαφορετική έννοια, ανάλογα με το αν εμφανίζεται στο πρώτο ή στο δεύτερο μέρος του κανόνα. Έτσι όταν εμφανίζεται στο πρώτο μέρος του κανόνα έχει την έννοια του ελέγχου ισότητας (δηλαδή την ίδια έννοια που δίνουμε στο σύμβολο = =). Αντίθετα όταν εμφανίζεται στο δεύτερο μέρος του κανόνα έχει την έννοια της καταχώρησης (δηλαδή την έννοια που δίνουμε στο σύμβολο =). Ο παραπάνω κανόνας λοιπόν θα μπορούσε να γραφεί συμβολικά και ως εξής:

if service == good then tip = average

Γενικά η είσοδος σε έναν κανόνα if-then είναι η τρέχουσα τιμή της μεταβλητής εισόδου, ενώ η έξοδος του κανόνα είναι ολόκληρο το ασαφές σύνολο. Από αυτό όμως το ασαφές σύνολο θα πρέπει να κρατήσουμε μια τιμή, έτσι ώστε να μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα. Γι’ αυτό πρέπει να γίνει μια διαδικασία που ονομάζεται αποασαφοποίηση (defuzzyfication). Για την αποασαφοποίηση αναφερόμαστε εκτενέστερα παρακάτω. Για να διερμηνεύσουμε έναν κανόνα If-then πρέπει να ακολουθήσουμε κάποια στάδια:

1. Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε την είσοδο. Για να γίνει αυτό όμως πρέπει να γίνει ασαφοποίηση της εισόδου και να εφαρμοσθούν οι κατάλληλοι ασαφείς τελεστές
2. Να εφαρμόσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στο δεύτερο μέρος του κανόνα

Αν πάρουμε την απλή περίπτωση των δυαδικών τιμών οι κανόνες if-then είναι αρκετά εύκολο να εφαρμοσθούν. Αν η προϋπόθεση είναι αληθής τότε και η συνέπεια θα είναι αληθής. Πώς όμως επεκτείνεται η παραπάνω συλλογιστική για να συμπεριλάβει και ασαφείς τιμές; Όταν η προϋπόθεση είναι αληθής σε κάποιο βαθμό τότε και η συνέπεια είναι αληθής στον ίδιο βαθμό. Με άλλα λόγια:

Στη δυαδική λογική: $p \rightarrow q$ *(Τα p και q είναι και τα δύο είτε πλήρως αληθή ή πλήρως ψευδή)*

Στην ασαφή λογική: $0.5\ p \rightarrow 0.5\ q$ *(Τα p και q είναι μερικώς αληθή και μερικώς ψευδή)*

Η προϋπόθεση ενός κανόνα μπορεί να αποτελείται από περισσότερα του ενός μέρη. Όπως για παράδειγμα ο παρακάτω κανόνας:

if sky is gray and wind is strong and barometer is falling, then …

Σ’ αυτή την περίπτωση όλα τα μέρη της προϋπόθεσης υπολογίζονται ταυτόχρονα και καταλήγουμε σε ένα μοναδικό νούμερο ανάλογα με τους λογικούς τελεστές που χρησιμοποιούμε.

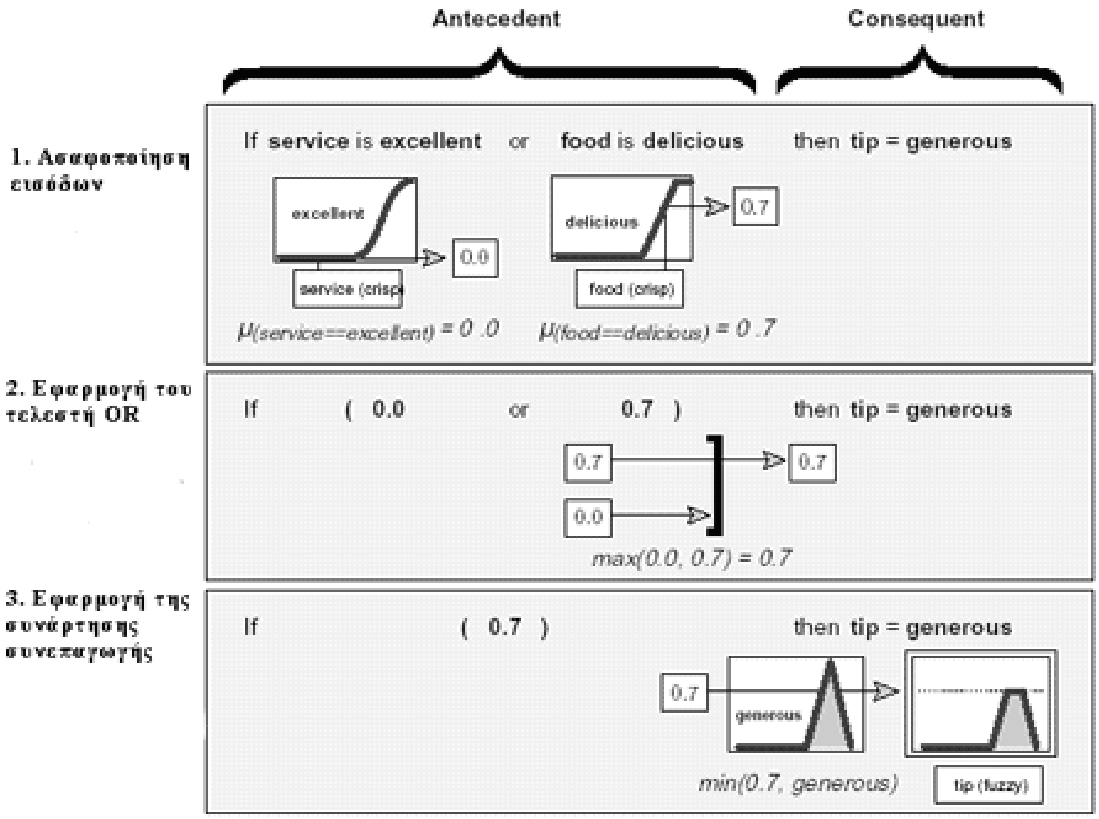
Αλλά και η συνέπεια ενός κανόνα μπορεί να αποτελείται από περισσότερα του ενός μέρη. Για παράδειγμα ο παρακάτω κανόνας:

if temperature is cold then hot water valve is open and cold water valve is shut

Όλα τα μέρη της συνέπειας του κανόνα επηρεάζονται το ίδιο από το αποτέλεσμα της προϋπόθεσης. Η συνέπεια του κανόνα προσδιορίζει ένα ασαφές σύνολο το οποίο συσχετίζεται με την έξοδο. Η συνάρτηση συνεπαγωγής (*implication function*) στη συνέχεια τροποποιεί το ασαφές σύνολο στο βαθμό που προσδιορίζεται από την προϋπόθεση του κανόνα.

Μια πολύ συνηθισμένη συνάρτηση για να γίνει αυτό είναι η αποκοπή με τη χρήση του τελεστή **min.**

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζονται οι κανόνες if-then.



Συστήματα ασαφούς συμπερασμού (fuzzy inference systems)

Γενικά ένας κανόνας από μόνος του δεν επαρκεί για τα περισσότερα πρακτικά προβλήματα. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι περισσότεροι του ενός κανόνες οι οποίοι να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η έξοδος κάθε κανόνα θα είναι ένα ασαφές σύνολο. Τα ασαφή σύνολα που προκύπτουν σα συνέπεια των κανόνων συγκεντρώνονται για να σχηματίσουν ένα ασαφές σύνολο εξόδου από το οποίο μέσω της διαδικασίας της αποασαφοποίησης θα πάρουμε μια μοναδική τιμή.

Οι δύο κυριότερες μέθοδοι ασαφούς συλλογιστικής είναι η μέθοδος Mamdami και η μέθοδος Sugeno, όπου η κύρια διαφορά τους εντοπίζεται στο είδος των συναρτήσεων συμμετοχής των εξόδων τους. Στη μέθοδο Mamdami οι συναρτήσεις συμμετοχής είναι ασαφή σύνολα, ενώ στη μέθοδο Sugeno είναι γραμμικές ή σταθερές.

Τα κυριότερα πλεονεκτήματά τους συνοψίζονται στα εξής:

Mamdami:

- Είναι διαισθητική μέθοδος
- Χαίρει ευρείας αποδοχής
- Προσαρμόζεται με επιτυχία σε πραγματικά προβλήματα
- Είναι σχετική απλή
- Αποδίδει ικανοποιητικά σε σύνθετα μοντέλα, χωρίς απώλεια ακρίβειας

Sugeno:

- Είναι υπολογιστικά ακριβής
- Λειτουργεί αποτελεσματικά σε συνδυασμό με γραμμικές τεχνικές
- Λειτουργεί αποτελεσματικά σε συνδυασμό με τεχνικές βελτιστοποίησης
- Επιδέχεται μαθηματικής ανάλυσης
- Έχει επιφάνεια εξόδου εγυημένα συνεχή

Παρακάτω αναπτύσσεται ο τρόπος με τον οποίο εξελίσσεται η παραπάνω διαδικασία μέσα από το ύστημα ασαφούς συλλογιστικής (fuzzy inference system, FIS) , Mamdani.

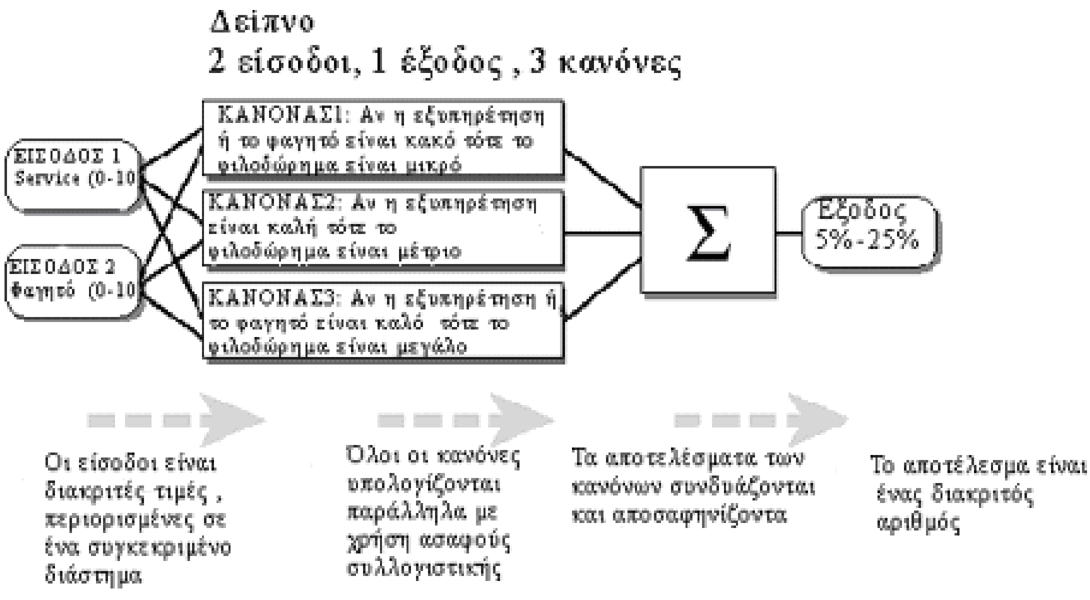
Συστήματα τύπου Mamdani

Η ασαφής συλλογιστική είναι η διαδικασία κατά την οποία σχηματίζεται η απεικόνιση από μια δεδομένη είσοδο σε μια έξοδο χρησιμοποιώντας τις αρχές της ασαφούς λογικής. Η απεικόνιση αυτή θέτει τις βάσεις με τις οποίες μπορεί να ληφθεί μια απόφαση ή να διακριθούν πρότυπα (patterns). Η διαδικασία αυτή της ασαφούς συλλογιστικής περιλαμβάνει όλα εκείνα τα κομμάτια στα οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως. Δηλαδή τις συναρτήσεις συμμετοχής, τους ασαφείς λογικούς τελεστές και τους κανόνες if-then. Υπάρχουν δύο είδη ασαφών συστημάτων παρεμβολής τα τύπου-Mamdani και τα τύπου Sugeno. Οι διαφορές ανάμεσα στα δύο αυτά συστήματα έγκεινται κυρίως στον τρόπο με τον οποίο σχηματίζεται η έξοδος του συστήματος. Τα συστήματα Mamdani είναι αυτά που συναντώνται συχνότερα. Η μεθοδολογία των συστημάτων Mamdani εισήχθει το 1975 από τον Ebrahim Mamdani

Θα εξετάσουμε τώρα πως λειτουργεί ένα FIS τύπου Mamdani μέσα από το πρόβλημα του φιλοδωρήματος που αναφέραμε παραπάνω .

Το σύστημα έχει δύο εισόδους και τρεις κανόνες. Οι είσοδοι του συστήματος είναι η ποιότητα του φαγητού και η εξυπηρέτηση. Θεωρούμε ότι ο πελάτης βαθμολογεί την ποιότητα του φαγητού και την εξυπηρέτηση με μια κλίμακα από το 0 έως το 10. η έξοδος του συστήματος είναι το φιλοδώρημα που θα δώσει ο πελάτης και το οποίο κυμαίνεται από 5% έως 25% της τιμής του λογαριασμού.

Η βασική δομή του συστήματος φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 3.4.6.1: Βασική δομή FIS τύπου Mamdani.

Η πληροφορία οδεύει από τα αριστερά προς τα δεξιά και καταλήγει σε μία μοναδική έξοδο. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των συστημάτων ασαφούς λογικής είναι η παράλληλη εφαρμογή των κανόνων. Στα κλασσικά συστήματα δυαδικής λογικής έχουμε χρήση διακοπτών που ανοίγουν και κλείνουν ανάλογα με τις τιμές των εισόδων. Στα ασαφή συστήματα μεταβαίνουμε ομαλά από περιοχή σε περιοχή ανάλογα με τις συνέπειες των κανόνων.

Η διαδικασία της απεικόνισης των εισόδων στις εξόδου μέσα από ένα σύστημα ασαφούς λογικής ακολουθεί πέντε βήματα:

1. Ασαφοποίηση των εισόδων.
2. Εφαρμογή των ασαφών λογικών τελεστών στις προϋπόθεσης των κανόνων.
3. Καθορισμός των συνεπαγωγών των κανόνων. (Implication)
4. Συνάθροιση όλων των συνεπαγωγών όλων των κανόνων. (Aggregation)
5. Αποασαφοποίηση (deffuzification).

Μηχανισμός Συμπερασμού

ΒΗΜΑ 1^{o} Ασαφοποίηση εισόδων

Το πρώτο βήμα έχει να κάνει με την ασαφοποίηση των εισόδων δηλαδή αυτό που κάνουμε είναι να πάρουμε τις εισόδους και να καθορίσουμε σε ποιο βαθμό κάθε είσοδος ανήκει σε ένα ασαφές σύνολο μέσα από τις συναρτήσεις συμμετοχής. Οι είσοδοι είναι αριθμητικές τιμές μέσα στα όρια του χώρου αναφοράς (στην περίπτωση του προβλήματος που εξετάζουμε από 0 μέχρι 10) και οι έξοδοι είναι βαθμοί συμμετοχής στο προσδιορισμένο ασαφές σύνολο.

Η ασαφοποίηση των εισόδων μπορεί να γίνει είτε με χρήση πίνακα τιμών είτε μέσα από μια συνάρτηση. Το παράδειγμα μας είναι δομημένο σε τρεις κανόνες κάθε ένας από τους οποίους προϋποθέτει την κατάταξη των εισόδων σε διαφορετικές λεκτικές μεταβλητές service is poor, service is good, food is rancid, food is delicious.

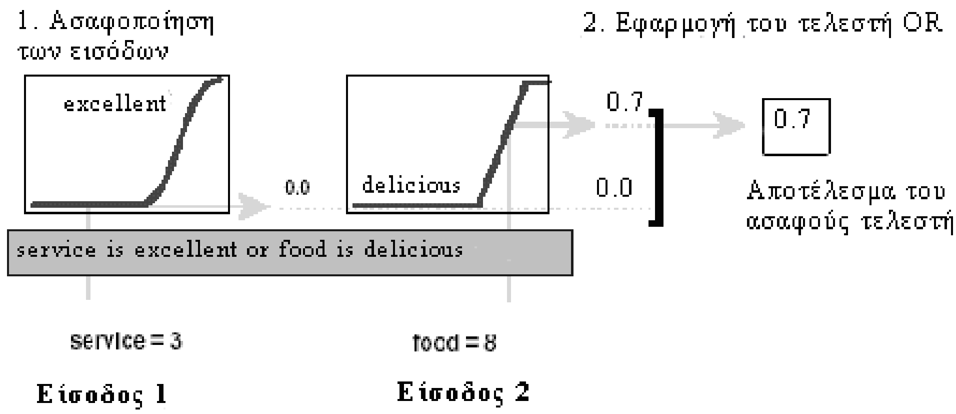
Πριν να εφαρμοσθούν οι κανόνες θα πρέπει να ασαφοποιηθούν οι είσοδοι σύμφωνα με τις λεκτικές μεταβλητές. Για παράδειγμα σε ποιο βαθμό το φαγητό είναι νόστιμο. Αν υποθέσουμε ότι το φαγητό έχει αξιολογηθεί με μια συγκεκριμένη βαθμολογία από το 0 εως το 10 (π.χ. 8) τότε πως μπορούμε να συμπεράνουμε σε ποιο βαθμό είναι νόστιμο. Για το
λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια γραφική απεικόνιση που ουσιαστικά αποτελεί τη συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου νόστιμο.

Σχήμα 3.4.6.2: Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης συμμετοχής του ασαφούς συνόλου ‘νόστιμο’.

ΒΗΜΑ 2°. Εφαρμογή των ασαφών τελεστών

Αφού έχουμε ασαφοποιήσει στις εισόδους μπορούμε να γνωρίζουμε σε ποιο βαθμό ικανοποιείται κάθε μέρος των προϋποθέσεων των if-then κανόνων. Αν ένας κανόνας if-then έχει στο σκέλος if περισσότερα του ενός μέρη τότε πρέπει να εφαρμοσθούν οι ασαφείς τελεστές ώστε να καθορισθεί ένα νούμερο που αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα της προϋπόθεσης του κανόνα. Το νούμερο αυτό θα εφαρμοσθεί έπειτα στη συνάρτηση εξόδου. Οι είσοδοι ενός λογικού τελεστή είναι δύο ή περισσότεροι βαθμοί συμμετοχής που έχουν προκύψει από τις ασαφοποιημένες μεταβλητές εισόδου. Η έξοδος του τελεστή είναι απλά ένας βαθμός αλήθειας.

Όπως είδαμε κατά την αναφορά στους ασαφείς τελεστές υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός συναρτήσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουν τους τελεστές AND και OR. Συνήθως χρησιμοποιούνται ο τελεστής max για το OR και min για το AND. Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε πως εφαρμόζονται οι τελεστές.

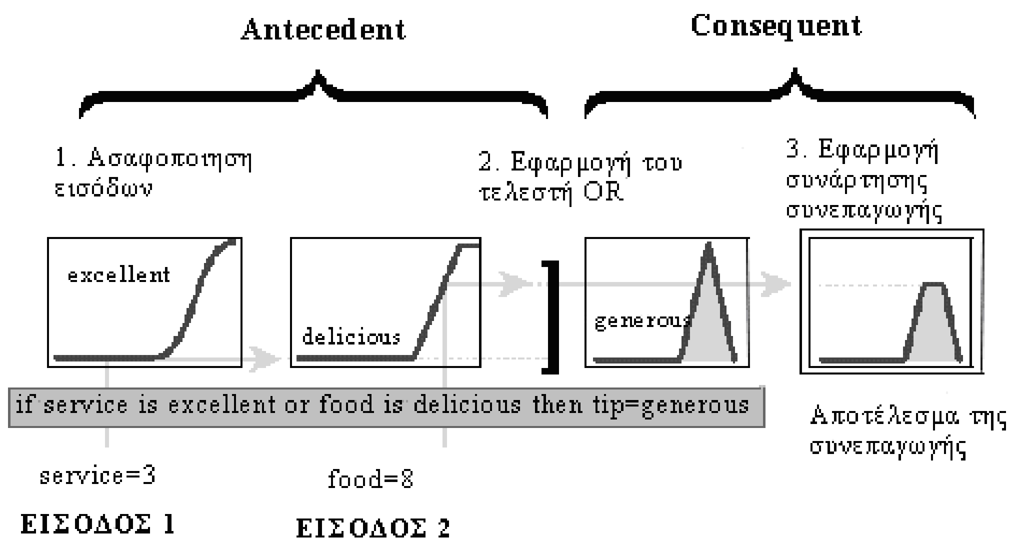


Σχήμα 3.4.6.3: Εφαρμογή του τελεστή OR.

ΒΗΜΑ 3ο Μέθοδος εφαρμογής της συνεπαγωγής (Apply Implication Method)

Για να εφαρμόσουμε την συνάρτηση συνεπαγωγής πρέπει να γνωρίζουμε το βάρος του κάθε κανόνα. Οι κανόνες if-then έχουν βάρη τα οποία εφαρμόζονται στο νούμερο που δίνει το κομμάτι της υπόθεσης και που μπορούν να κυμαίνονται από 0 έως 1. Συνήθως τα βάρη αυτά είναι ίσα με 1, ωστόσο μπορούμε να δώσουμε σε αυτά μια οποιαδήποτε τιμή από 0 έως 1. Για παράδειγμα αν θέλουμε να δώσουμε μικρότερη έμφαση σε έναν κανόνα σε σχέση με κάποιον άλλο, αυτό μπορούμε να το κάνουμε μέσω των τιμών των βαρών τους.

Αφού έχουμε αναθέσει στους κανόνες τα βάρη μπορούμε να εφαρμόσουμε την συνάρτηση συνεπαγωγής. Το αποτέλεσμα ενός κανόνα if-then είναι ένα ασαφές σύνολο που αντιπροσωπεύεται από μια συνάρτηση συμμετοχής που σταθμίζει κατάλληλα τα λεκτικά χαρακτηριστικά που έχουν ανατεθεί σε αυτόν. Το αποτέλεσμα αυτό αναδιαμορφώνεται με τη χρήση μιας συνάρτησης που είναι συνδεδεμένη με το μέρος της υπόθεσης. Η είσοδος για τη διαδικασία συνεπαγωγής είναι ένας αριθμός που δίδεται από την υπόθεση και η έξοδος είναι ένα ασαφές σύνολο. Αυτή η διαδικασία εφαρμόζεται για κάθε κανόνα.

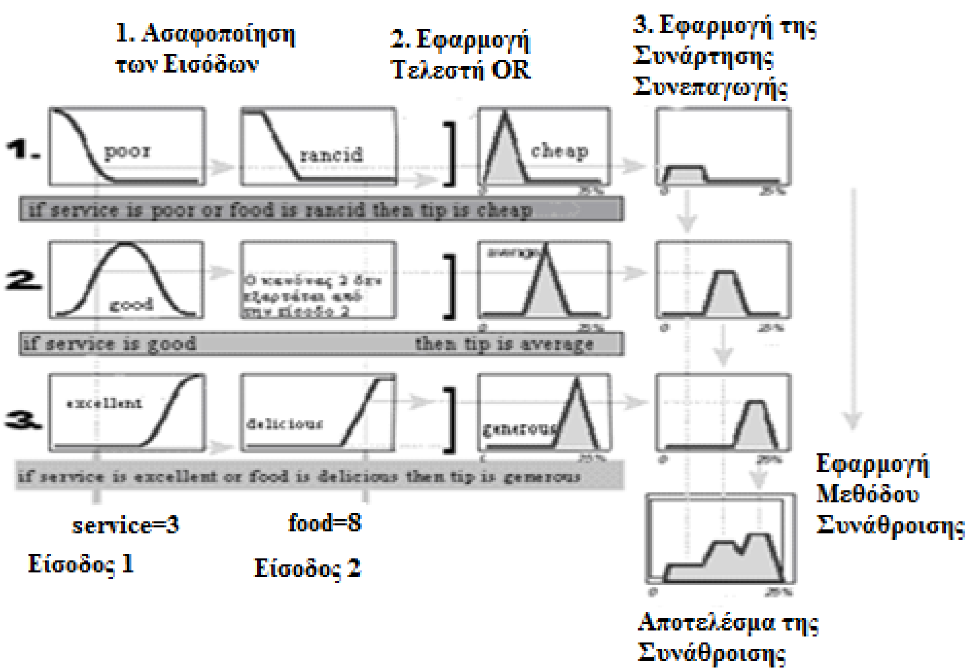


Σχήμα 3.4.6.4: Αναπαράσταση Αποτελέσματος της συνεπαγωγής.

ΒΗΜΑ 4ο Συνάθροιση όλων των εξόδων (Aggregation Method)

Σε ένα FIS οι αποφάσεις βασίζονται στον έλεγχο όλων των κανόνων. Επομένως όλοι οι κανόνες πρέπει να συνδυαστούν προκειμένου να καταλήξουμε σε μια απόφαση. Η συνάθροιση των κανόνων είναι μια διαδικασία κατά την οποία όλα τα ασαφή σύνολα που προκύπτουν ως έξοδοι των κανόνων συνδυάζονται ώστε να σχηματίσουν ένα μοναδικό ασαφές σύνολο. Η συνάθροιση είναι η διαδικασία που προηγείται της αποασαφοποίησης και δέχεται ως είσοδο τις αποκομμένες συναρτήσεις εξόδου του προηγούμενου βήματος. Η διαδικασία της συναθροιση των εξόδων είναι αντιμεταθετική και έτσι η σειρά με την οποία εκτελούνται οι κανόνες δεν έχει σημασία στην έκβαση του αποτελέσματος.

Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε τους τρεις κανόνες του προβλήματος και τον τρόπο που συνδυάζονται τα αποτελέσματά τους σε ένα ασαφές σύνολο.



Σχήμα 3.4.6.5: Συνδυασμός κανόνων και αποτέλεσμα ως ασαφές σύνολο.

ΒΗΜΑ 5ο Αποασαφοποίηση

Η είσοδος για τη διαδικασία της απόασαφοποίησης είναι το ασαφές σύνολο που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα. Η έξοδος είναι ένας αριθμός. Η αποασαφοποίηση είναι αναγκαία γιατί επιθυμούμε να έχουμε ως αποτέλεσμα έναν αριθμό που θα μας επιτρέψει να πάρουμε συγκεκριμένες αποφάσεις. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να εξαχθεί η τιμή αυτή. Ένας ιδιαίτερα δημοφιλής είναι ο υπολογισμός του κέντρου βάρους της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης συμμετοχής του ασαφούς συνόλου. Άλλες επίσης δημοφιλείς μέθοδοι είναι η μέθοδος μέσου μεγίστου, η μέθοδος σταθμισμένου μέσου, η μέθοδος του υπολογισμού της διχοτόμου της επιφάνειας, η μέθοδος κέντρου βάρους.μέση τιμή , η μέγιστη θέση του μεγίστου και η ελάχιστη θέση του μεγίστου.

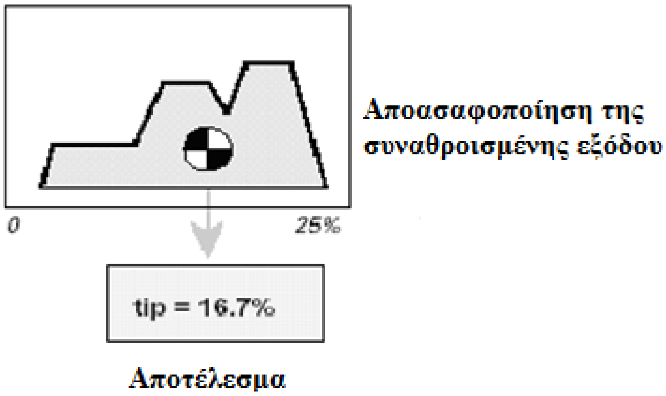
Μέθοδος Αποασαφοποίησης MAXIMUM

Σύμφωνα με τη μέθοδο maximum, η διακριτή τιμή είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή συγγένειας του τελικού αποτελέσματος. Αν υπάρχουν περισσότερες από μία τέτοιες τιμές, τότε λαμβάνεται ανάλογα με την περίπτωση είτε ο μέσος όρος τους (mean-of-maximum) ή η μέγιστη τιμή τους (maximum-of-maximum) ή η ελάχιστη τιμή τους (minimum-of-maximum).

Μέθοδος Cendroid

Σύμφωνα με τη μέθοδο κέντρου βάρους (cendroid), η διακριτή τιμή είναι αυτή που προκύπτει από το κέντρο βάρους της τελικής συνάρτησης συμμετοχής για την ασαφή παράμετρο εξόδου. Το κέντρο βάρους μιας επιφάνειας που ορίζεται από μια συνάρτηση f(t) και τους καρτεσιανούς άξονες, βρίσκεται στη θέση t που ορίζεται από τη σχέση:

$$t_{\kappa\beta} = \frac{\int t \cdot f(t)dt}{\int f(t)dt}$$



Σχήμα 3.4.6.6: Σχηματική απεικόνιση Centroid Από-ασαφοποίηση.

Στην περίπτωση διακριτού συνόλου αναφοράς, τα ολοκληρώματα στην παραπάνω σχέση αντικαθίστανται με διακριτό άθροισμα και γίνεται δειγματοληψία N σημείων στο σύνολο αναφοράς.

Ένα χαρακτηριστικό της μεθόδου αποασαφοποίησης κέντρου βάρους είναι ότι στην περίπτωση που έχει γίνει σύνθεση αποτελεσμάτων από επιμέρους κανόνες και υπάρχουν τυχόν αλληλοεπικαλυπτόμενες περιοχές, αυτές λαμβάνονται υπόψη μία μόνο φορά. Επίσης στην περίπτωση που η συνάρτηση συμμετοχής είναι παντού 0, το αποτέλεσμα της αποασαφοποίησης ορίζεται κατά σύμβαση.

Διαγραμματική μέθοδος επίλυσης

Μία εναλλακτική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων ασαφούς συλλογιστικής είναι η διαγραμματική επίλυση. Αυτή επιτρέπει τη γρήγορη, αλλά προσεγγιστική εκτίμηση της τελικής λύσης χωρίς να απαιτεί όλους τους αριθμητικούς υπολογισμούς που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της μεθόδου είναι οι συναρτήσεις συμμετοχής των παραμέτρων του προβλήματος να είναι συνεχείς καμπύλες και όχι σύνολο ζευγών.

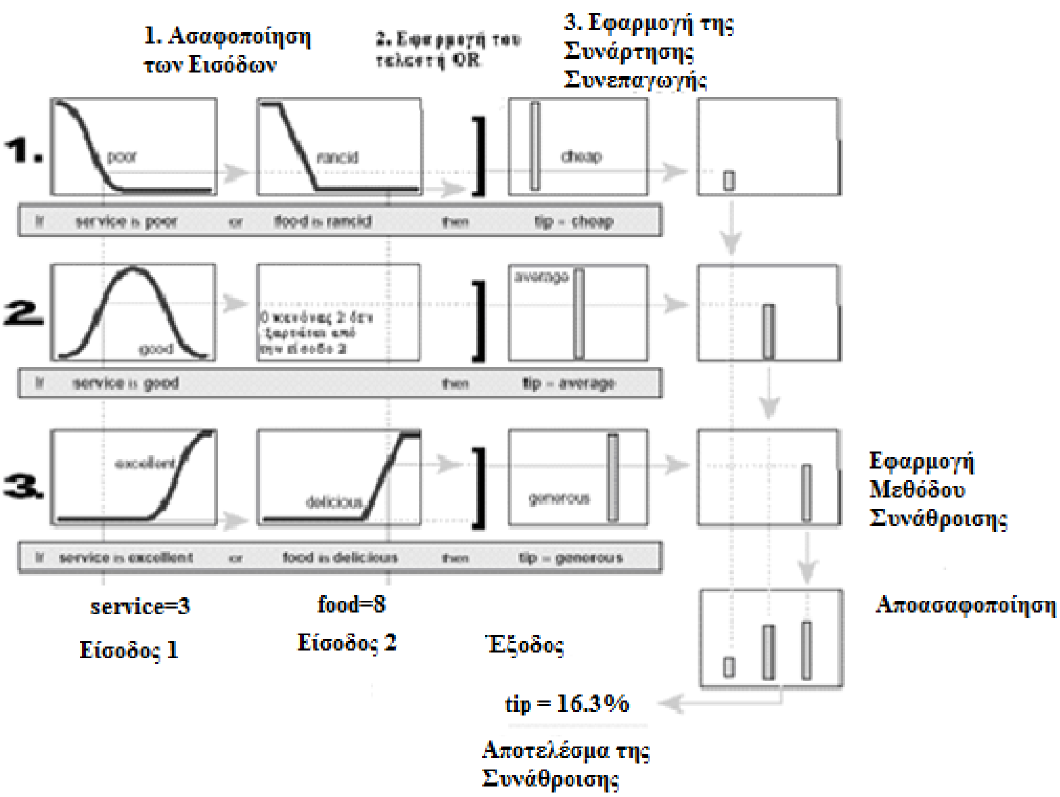
Συστήματα τύπου Sugeno

Παραπάνω αναφερθήκαμε στα συστήματα Mamdani που είναι και τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα. Ωστόσο υπάρχει και η μέθοδος Sugeno που εισήχθηκε το 1985 και ομοιάζει σε συγκεκριμένα σημεία με τη μέθοδο των συστημάτων Mamdani. Για παράδειγμα τα 2 πρώτα βήματά της (ασαφοποίηση των εισόδων και εφαρμογή των τελεστών) είναι ακριβώς τα ίδια. Η κύρια διαφορά ανάμεσα στα δύο συστήματα έγκειται στο ότι οι συναρτήσεις συμμετοχής στην έξοδο των συστημάτων Sugeno είναι μόνο γραμμικές ή σταθερές.

Ένας τυπικός ασαφής κανόνας σε συστήματα sugeno μηδενικής τάξης έχει την μορφή:

if x is A and y is B then z = k,

όπου A και B είναι τα ασαφή σύνολα της προϋπόθεσης ενώ κ είναι μια αριθμητική τιμή. Αφού η συνέπεια του κανόνα είναι μια σταθερά τότε αυτό σημαίνει ότι το βήμα 3 εκφυλίζεται σε ένα απλό πολλαπλασιασμό ενώ το βήμα 4 καταλήγει να είναι η συνάθροιση όλων των σταθερών.



Σχήμα 3.4.6.7

Ένα σύστημα sugeno πρώτης τάξης θα έχει κανόνες με τη γενική μορφή

if x is A and y is B then z = p*x + q*y + r,

όπου A και B είναι τα ασαφή σύνολα της προϋπόθεσης ενώ τα p,q,r είναι σταθερές.

Ένας τρόπος για να δούμε τα συστήματα πρώτης τάξης είναι να θεωρήσουμε ότι κάθε κανόνας προσδιορίζει τη θέση ενός κινούμενου singleton. Το singleton αυτό μπορεί να κινείται στο χώρο της εξόδου, με γραμμικό τρόπο και η θέση του εξαρτάται από τις τιμές των εισόδων.

Συστήματα sugeno ανώτερης τάξης είναι εφικτά, όμως δεν προσφέρουν σημαντικές βελτιώσεις και ταυτόχρονα εισαγάγουν σημαντική πολυπλοκότητα.

Ασαφείς ελεγκτές

Ένα σύστημα αυτόματου ελέγχου αντιστοιχεί στη διασύνδεση διαφόρων στοιχείων που συνθέτουν μια συγκεκριμένη διάταξη που μας παρέχει μια γνωστή εκ των προτέρων επιθυμητή απόκριση. Συνήθως η επιθυμητή απόκριση είναι διαφορετική από τη πραγματική και έτσι παράγεται ένα σήμα ελέγχου που αντιστοιχεί στο σφάλμα απόκλισης μεταξύ των δύο αποκρίσεων. Η χρήση του σήματος αυτού για τον έλεγχο μιας συγκεκριμένης διεργασίας, έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μια ακολουθίας λειτουργιών μέσα σε ένα κλειστό βρόγχο που καλείται σύστημα ελέγχου με ανάδραση. Στη θέση του ελεγκτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας ασαφής ελεγκτής με τα ακόλουθα βασικά στοιχεία, τα οποία έχουν αναλυθεί παραπάνω:

- Βάση Γνώσης. Σε αυτή είναι αποθηκευμένοι οι κανόνες ελέγχου για τον έλεγχο της διαδικασίας.
- Ασαφή Σύνολα. Έχοντας ορίσει τα ασαφή σύνολα είναι δυνατή η μετάφραση των λεκτικών κανόνων της βάσης γνώσης σε μαθηματικούς κανόνες.
- Ασαφοποιητής. Αναλαμβάνει την μετατροπή των πραγματικών τιμών των μεταβλητών εισόδου του ελεγκτη σε ασαφή σύνολα.

- Μηχανισμός Συμπερασμού. Παράγονται μέσω συνεπαγωγών τα ασαφή σύνολα των συμπερασμάτων.
- Αποσαφοποιητής. Τα ασαφή σύνολα των συμπερασμάτων μετατρέπονται σε πραγματικούς αριθμός ώστε να είναι δυνατή η μετάδοση της δράσης ελέγχου στη διαδικασία.

Η δυσκολία σχεδίασης ενός ασαφούς ελεγκτή έγκειται κυρίως στην εύρεση κατάλληλων κανόνων, ώστε το κλειστό σύστημα να ικανοποιεί δεδομένες προϋποθέσεις, διότι είναι πολύ δύσκολη η μαθηματική περιγραφή της σχέσης εισόδου-εξόδου του ελεγκτή. Για να τον έλεγχο της καταλληλότητας των κανόνων λοιπόν δημιουργήθηκαν τα εξής κριτήρια:

- Πληρότητα – Εϊναι αρκετοί οι κανόνες που δημιουργήθηκαν;
- Συνέπεια – Μήπως οι κανόνες αλληλοσυγκρούονται;
- Πλεονασμός – Μήπως υπάρχουν στη βάση κανόνων κάποιοι περιττοί κανόνες;
- Αλληλεπίδραση – Υπάρχουν κάποιοι κανόνες που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους;

Πληρότητα:

Σε μια πλήρη βάση κανόνων οποιαδήποτε τιμή εισόδου παράγει κάποιο μη μηδενικό ασαφές σύνολο ως έξοδο. Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι για κάθε συνδυασμό εισόδων πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας κανόνας με τιμή ενεργοποίησης $\alpha > \varepsilon$ όπου $\varepsilon \in (0,1)$.

Συνέπεια:

Αν το ασαφές σύνολο που προκύπτει πριν την αποστασιοποίηση έχει πολλές κορυφές τότε η βάση κανόνων είναι ασυνεπής. Αυτό σημαίνει ότι οι κανόνες δείχνουν σε διαφορετικές "πλευρές" του σήματος εξόδου ταυτόχρονα. Τέτοιες αντιφάσεις συμβαίνουν στον έλεγχο γιατί μερικές φορές οι περιορισμοί στην σχεδίαση είναι οι ίδιοι αντιφατικοί. Ένα θετικό σημείο του ασαφούς ελέγχου είναι ότι μπορεί να αντιμετωπίσει επιτυχώς τέτοιες καταστάσεις, αλλά γενικά είναι επιθυμητό αν υπάρχει τέτοια ασυνέπεια στους κανόνες είναι καλό να ανακαλύπτεται. Δύο κανόνες θα λέμε ότι είναι σε αντίφαση αν οι αριστερές τους πλευρές μοιάζουν και ταυτόχρονα οι δεξιές τους πλευρές διαφέρουν. Ή ισοδύναμα δυο κανόνες είναι συνεπείς μεταξύ τους αν μια μικρή διαφορά ανάμεσα στα δεξιά μέρη των κανόνων υποδηλώνει μικρή διαφορά μεταξύ των αριστερών τους πλευρών.

Πλεονασμός:

Ένας κανόνας θα λέμε ότι είναι πλεονάζων αν η πληροφορία που περιέχει συμπεριλαμβάνεται στους άλλους κανόνες της βάσης. Π.χ. πλεονασμός στη βάση των κανόνων υπάρχει αν βάλεις τον ίδιο κανόνα δύο φορές, ή αν τα ασαφή σύνολα ενός κανόνα, είναι υποσύνολα των ασαφών συνόλων ενός άλλου κανόνα. Γενικά θέλουμε να μην υπάρχει πλεονασμός, πρώτα για λόγους οικονομίας μνήμης και υπολογιστικής ισχύς όσο και για λόγους συνοχής. Αν Ri είναι οι πίνακες αλήθειας των κανόνων τότε ο i κανόνας είναι πλεονάζων αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία του Ri είναι μικρότερα από αυτά του πίνακα που προκύπτει από την ένωση των πινάκων αλήθειας όλων των υπόλοιπων κανόνων.

Αλληλεπίδραση

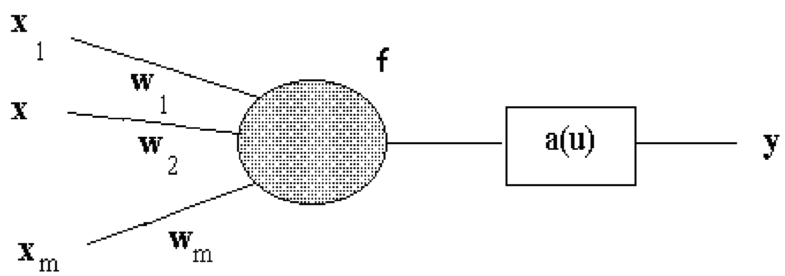
Η ουσία της αλληλεπίδρασης είναι όταν ο βαθμός ενεργοποίησης ενός κανόνα είναι 1 αλλά το ασαφές σύνολο που προκύπτει είναι διαφορετικό από αυτό της εξόδου του κανόνα εξαιτίας της επίδρασης των άλλων κανόνων στο αποτέλεσμα. Η αλληλεπίδραση όπως αυτή ορίστηκε πιο πάνω, συμβαίνει εξαιτίας της επικάλυψης των ασαφών συνόλων στην αριστερή πλευρά των κανόνων. Αν όλα τα ασαφή σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους τότε δεν υπάρχει καθόλου αλληλεπίδραση μεταξύ των κανόνων.

3.4.7 Νευροασαφή Συστήματα (NeuroFuzzy Systems)

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τα νευροασαφή συστήματα. Η δομική μονάδα των συστημάτων αυτών είναι οι ασαφείς νευρώνες. [139], [138], [141], [142], [143], [144], [145]

ΑΣΑΦΕΙΣ ΝΕΥΡΩΝΕΣ

Οι ασαφείς νευρώνες έχουν τη μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.4.7.1: Ασαφής νευρώνας

Όπου :

$x_1, x_2, .., x_m$ οι είσοδοι του νευρώνα

$w_1, w_2, .., w_m$ τα βάρη των συνάψεων

f η συνάρτηση συμμετοχής του νευρώνα

a η συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα

y η έξοδος του νευρώνα

Οι ασαφείς νευρώνες διακρίνονται σε νευρώνες συμμετοχής και σε λειτουργικούς νευρώνες. Παρακάτω γίνεται αναφορά στα χαρακτηριστικά κάθε κατηγορίας ασαφών νευρώνων.

ΝΕΥΡΩΝΕΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ

Οι συνηθέστερες μορφές συναρτήσεων συμμετοχής είναι η τριγωνική, η γκαουσιανή, η τραπεζοειδής , η κανονική κ.ο.κ.. Οι παραπάνω συναρτήσεις συμμετοχής μπορούν να υλοποιηθούν με τη χρήση ενός νευρώνα. Η συνάρτηση συμμετοχής μπορεί να υλοποιηθεί θεωρώντας ότι ο νευρώνας δέχεται ως είσοδο το x και δίνει έξοδο A(x) απαιτώντας η συνάρτηση συμμετοχής του να έχει τη μορφή A. αν δηλαδή υποθέσουμε ότι η συνάρτηση συμμετοχής είναι η κανονική , τότε για να υλοποιηθεί πρέπει η συνάρτηση ενεργοποίησης να είναι $a(u) = \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{\sigma^2}\right)$, όπου m το κέντρο της συνάρτησης συμμετοχής και σ το εύρος της.

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΙ ΝΕΥΡΩΝΕΣ

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να υλοποιηθούν οι βασικές πράξεις των ασαφών συνόλων. Οι πράξεις αυτές στηρίζονται σε λειτουργίες όπως η τ- νόρμα η σ-νόρμα, το ασαφές συμπλήρωμα κλπ. Οι παραπάνω λειτουργίες μπορούν να αντικαταστήσουν τη συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα αν θεωρήσουμε ότι οι είσοδοι δεν αθροίζονται πολλαπλασιασμένοι με βάρη, όπως στους κλασσικούς νευρώνες. Για να μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε τους αλγορίθμους μάθησης (πχ τον backpropagation, αλγόριθμος αντίστροφης διάδοσης) θα πρέπει οι λειτουργίες να είναι παραγωγίσιμες.

Για την υλοποίηση των ασαφών λειτουργιών μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της συνάρτησης μεταφοράς του νευρώνα. Στην περίπτωση αυτή ο νευρώνας δεν υλοποιεί το αναλυτικό γινόμενο της εισόδου με το διάνυσμα των βαρών αλλά την πράξη της συγκεκριμένης ασαφούς λειτουργίας θεωρώντας ότι όλα τα βάρη είναι 1. Ως συνάρτηση συμμετοχής λαμβάνεται η :

$$a(u) = \begin{cases} 1, u > 1 \\ u, 0 \le u \le 1 \\ 0, u < 0 \end{cases}$$

ΣΥΝΘΕΤΙΚΟΙ ΝΕΥΡΩΝΕΣ

Παραπάνω αναφερθήκαμε στη σύνθεση των ασαφών σχέσεων. Η πράξη της σύνθεσης αποτελεί μια γενίκευση της πράξης του αναλυτικού γινομένου των διανυσμάτων και υλοποιείται από τη συνάρτηση μεταφοράς f των νευρώνων. Η μορφή του νευρώνα είναι η ίδια και ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$f = \underset{i \in N_m}{union}\, t(x_t, w_t)$$
$$y = a(u)$$

Όπου union είναι μια σ-νόρμα και t είναι μια τ-νόρμα. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης θεωρείται η συνάρτηση αναρρίχησης. Παρατηρούμε ότι ο συνθετικός νευρώνας είναι μια γενίκευση του κλασσικού νευρώνα, αφού η πράξη της φραγμένης άθροισης, η οποία εξασφαλίζεται από τη συνάρτηση ενεργοποίησης είναι μια ειδική περίπτωση της φραγμένης ένωσης, ενώ το γινόμενο είναι μια ειδική περίπτωση της ασαφούς τομής.

3.4.8 Προσαρμοστικά Δίκτυα (Adaptive Networks)

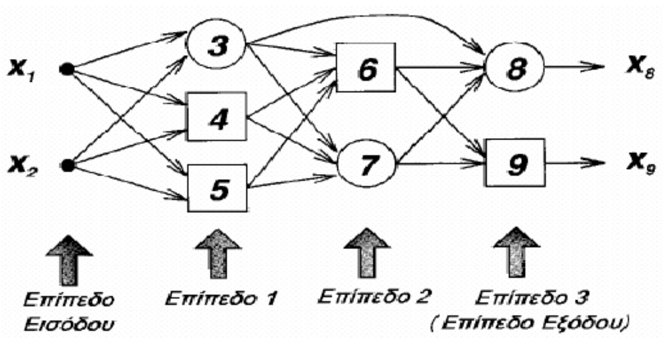
Ένα προσαρμοστικό δίκτυο είναι αυτό που στη δομή του περιέχει έναν αριθμό κόμβων συνδεδεμένων μέσω κατευθυντικών συνδέσμων. Κάθε κόμβος αναπαριστά μια μονάδα επεξεργασίας και οι σύνδεσμοι μεταξύ κόμβων προσδιορίζουν την αιτιολογική σχέση (causal relationship) μεταξύ των συνδεδεμένων κόμβων. Προσαρμοστικός είναι ο κόμβος, όλος ή μέρος του, που σημαίνει ότι οι έξοδοι αυτών των κόμβων εξαρτώνται από προσαρμοζόμενες – τροποποιήσιμες παραμέτρους που ανήκουν σε αυτούς τους κόμβους. Οι κανόνες εκπαίδευσης προσδιορίζουν πως αυτές οι παράμετροι θα πρέπει να αλλάζουν ώστε να ελαχιστοποιείται το προκαθορισμένο μέτρο σφάλματος (error measure), το οποίο είναι μια μαθηματική έκφραση που μετράει την ασυμφωνία μεταξύ της πραγματικής εξόδου του δικτύου και της επιθυμητής εξόδου. Τα προσαρμοστικά δίκτυα χρησιμοποιούνται στην ταυτοποίηση συστήματος. Εμείς θα πρέπει να βρούμε μια κατάλληλη αρχιτεκτονική για το δίκτυο και να θέσουμε ένα σύνολο παραμέτρων που μπορούν να μοντελοποιήσουν καλύτερα ένα σύστημα-στόχο, το οποίο περιγράφεται από ένα σύνολο ζευγών δεδομένων εισόδου-εξόδου. Ο βασικός κανόνας ενός προσαρμοστικού δικτύου είναι η απότομη φθίνουσα μέθοδος, στην οποία το βαθμωτό διάνυσμα προκύπτει από επιτυχείς επικλήσεις του κανόνα της αλυσίδας. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται και για την εύρεση του βαθμωτού σε ένα νευρωνικό δίκτυο πολλών επιπέδων. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται κανόνας οπισθοδρόμησης διάδοσης (back propagation learning rule).

Παράγωγοι Παραμετροποιήσιμων Συναρτήσεων Συμμετοχής

Για να κάνουμε ένα ασαφές σύστημα, προσαρμοστικό, θα πρέπει να ξέρουμε τις παραγώγους μιας Συνάρτησης Συμμετοχής ως προς το όρισμα εισόδου και τις παραμέτρους. Αυτές οι πληροφορίες από τις παραγώγους παίζουν σημαντικό ρόλο στην μάθηση ή την προσαρμογή ενός ασαφούς συστήματος.

Αρχιτεκτονική Προσαρμοστικών Δικτύων

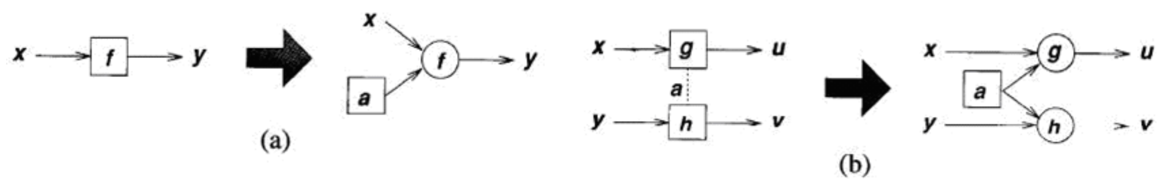
Όπως λέει και η ονομασία, ένα προσαρμοστικό δίκτυο είναι μια δομή δικτύου που η συνολική συμπεριφορά εισόδου-εξόδου διαμορφώνεται από ένα σύνολο τροποποιήσιμων παραμέτρων. Συγκεκριμένα η σύνθεση ενός προσαρμοστικού δικτύου πραγματοποιείται από ένα σύνολο κόμβων συνδεδεμένων με κατευθυνθείς συνδέσμους, όπου κάθε κόμβος εκτελεί μια συγκεκριμένη λειτουργία κόμβου στα εισερχόμενα σήματα για να παράξει μια μονήρη έξοδο κόμβου και κάθε σύνδεσμος καθορίζει την κατεύθυνσης ροής σήματος από τον ένα κόμβο στον άλλο. Συνήθως μια συνάρτηση κόμβου είναι μια παραμετρική συνάρτηση με τροποποιήσιμες παραμέτρους. Αλλάζοντας τις τελευταίες, μπορούμε να αλλάξουμε την λειτουργία κόμβου όπως στην συνολική συμπεριφορά του προσαρμοστικού δικτύου.



Σχήμα 3.4.8.1: Ένα εμπροσθόδρομο προσαρμοστικό δίκτυο.

Οι σύνδεσμοι σε ένα προσαρμοστικό δίκτυο χρησιμοποιούνται απλώς για να προσδιορίσουν την κατεύθυνση διάδοσης των εξόδων κόμβου. Γενικά δεν υπάρχουν βάρη ή παράμετροι σχετιζόμενοι με συνδέσμους.

Οι παράμετροι ενός προσαρμοστικού δικτύου είναι κατανεμημένοι μέσα στους κόμβους, ώστε κάθε κόμβος να έχει ένα τοπικό σύνολο παραμέτρων. Η ένωση αυτών των τοπικών παραμέτρων είναι το ολικό σύνολο παραμέτρων του δικτύου. Αν το σύνολο παραμέτρων ενός κόμβου δεν είναι κενό, τότε η λειτουργία του κόμβου εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων. Στα σχήματα, αναπαριστούμε τον προσαρμοστικό κόμβο αυτού του είδους με ένα τετράγωνο. Από την άλλη αν ο κόμβος έχει κενό σύνολο παραμέτρων, τότε η λειτουργία του είναι καθορισμένη. Ακόμα αναπαριστούμε τον τύπο προκαθορισμένου κόμβο με ένα κύκλο. Κάθε προσαρμοστικός κόμβος μπορεί να διασπαστεί σε ένα προκαθορισμένο κόμβο συν ένα ή περισσότερους κόμβους παραμέτρων.



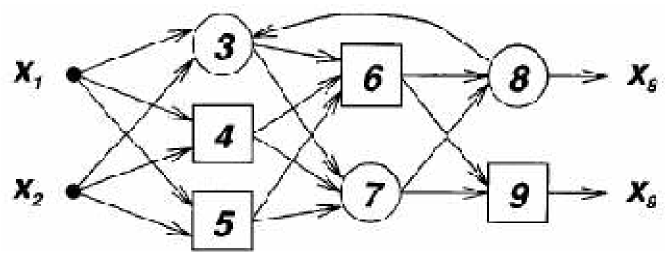
Σχήμα 3.4.8.2: Ανάλυση προσαρμοστικών κόμβων: (α) ένας μονός κόμβος (β) ένα πρόβλημα με κοινές παραμέτρους.

Καταμερισμός Παραμέτρων σε Προσαρμοστικά Δίκτυα

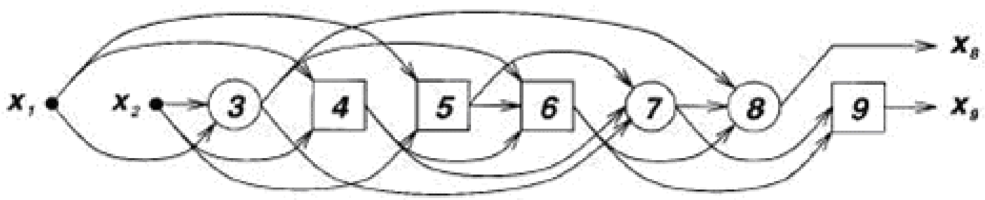
Το σχήμα 3.4.8.2 δείχνει ένα προσαρμοστικό δίκτυο με έναν μόνο κόμβο, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί σαν y=f(x, a) όπου x, y είναι η είσοδος και έξοδος αντιστοίχως και α είναι η παράμετρος του κόμβου. Μια ισοδύναμη απεικόνιση είναι να μετακινήσουμε την παράμετρο έξω από τον κόμβο και να την τοποθετήσουμε σε έναν κόμβο παράμετρο όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4.8.2α.

Αυτός ο κόμβος παράμετρος είναι μια ειδική περίπτωση ενός προσαρμοστικού κόμβου στο οποίο δεν υπάρχουν είσοδοι και η έξοδος είναι η ίδια η παράμετρος. Ο κόμβος παράμετρος είναι χρήσιμος στην επίλυση συγκεκριμένων αντιπροσωπευτικών προβλημάτων, όπως στο παράδειγμα καταμερισμού παραμέτρων στο σχήμα 3.4.8.2α όπου δυο προσαρμοστικοί κόμβοι u=g(x, a) και u=h(y, a) μοιράζονται την ίδια παράμετρο a, όπως δηλώνεται και από την διάστικτη γραμμή που ενώνει αυτούς τους δύο κόμβους. Βγάζοντας έξω την παράμετρο και βάζοντας την μέσα σε έναν κόμβο παράμετρο, μπορούμε να ενσωματώσουμε τις απαιτήσεις του καταμερισμού παραμέτρων μέσα στην αρχιτεκτονική σχεδίαση του δικτύου. Αυτό απλοποιεί την αναπαράσταση του δικτύου όπως και την εφαρμογή του σε λογισμικό.

Τα προσαρμοστικά δίκτυα είναι γενικώς κατηγοριοποιημένα σε δύο κατηγορίες με βάση τον τύπο των διασυνδέσεων που έχουν: εμπροσθόδρομα δίκτυα (feedward) και επαναληπτικά. Το προσαρμοστικό δίκτυο που φαίνεται στο σχήμα 3.4.8.4 είναι εμπροσθόδρομο, μιας και η έξοδος κάθε κόμβου διαδίδεται από την πλευρά της εισόδου (αριστερά) προς την πλευρά της εξόδου (δεξιά) πάντα. Αν υπάρχει σύνδεσμος ανάδρασης που σχηματίζει ένα κυκλικό μονοπάτι στο δίκτυο, τότε το δίκτυο είναι επαναληπτικό. Το σχήμα 3.4.8.3 είναι ένα παράδειγμα. Στα γραφήματα, ένα εμπροσθόδρομο δίκτυο αναπαριστάται από ένα κυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα που δεν περιέχει κατευθυνόμενους κύκλους, ενώ ένα επαναληπτικό δίκτυο περιέχει πάντα τουλάχιστον ένα κατευθυνόμενο κύκλο.



Σχήμα 3.4.8.3: Ένα επαναλαμβανόμενο προσαρμοστικό δίκτυο.



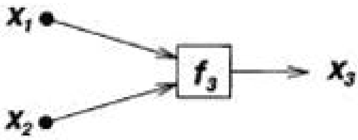
Σχήμα 3.4.8.4 Εμπροσθόδρομο προσαρμοστικό δίκτυο σε αναπαράσταση τυπολογικής διάταξης.

Στην αναπαράσταση με επίπεδα του εμπροσθόδρομου προσαρμοστικού δικτύου στο σχήμα 3.4.8.1 υπάρχουν σύνδεσμοι μεταξύ κόμβων στο ίδιο επίπεδο, και οι έξοδοι των κόμβων σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο είναι πάντα συνδεδεμένοι με κόμβους σε διαδοχικά επίπεδα. Αυτή η αναπαράσταση είναι συνήθως προτιμητέα εξαιτίας της εύκολης διαμόρφωσής της, επειδή οι κόμβοι στο ίδιο επίπεδο έχουν την ίδια λειτουργία ή γεννούν το ίδιο επίπεδο αφαίρεσης όσων αφορά τα διανύσματα εισόδου.

Μια άλλη αναπαράσταση εμπροσθόδρομου δικτύου είναι η αναπαράσταση τοπολογικής ταξινόμησης η οποία ετικετοποιεί τους κόμβους σε μια διατεταγμένη ακολουθία 1,2,3, ..., τέτοια που να μην υπάρχουν σύνδεσμοι από τον κόμβο i στον κόμβο j, οποτεδήποτε i≥ j. Το σχήμα 3.4.8.4 είναι η αναπαράσταση τοπολογικής ταξινόμηση (topological ordering representation) του δικτύου στο σχήμα 3.4.8.1. Αυτή η αναπαράσταση είναι λιγότερο διαμορφώσιμη από ότι η αναπαράσταση με επίπεδα, όμως διευκολύνει τον σχηματισμό κανόνων εκπαίδευσης. Η αναπαράσταση τοπολογικής ταξινόμησης είναι στην πραγματικότητα μια ειδική περίπτωση της αναπαράστασης με επίπεδα, με έναν κόμβο ανά επίπεδο. Ένα εμπροσθόδρομο προσαρμοστικό δίκτυο είναι στην πραγματικότητα μια στατική αντιστοίχηση μεταξύ των χωρών εισόδου και εξόδου. Αυτή η αντιστοιχία μπορεί να είναι μια απλή γραμμική σχέση ή μη γραμμική, εξαρτώμενη από την δομή του δικτύου (διάταξη κόμβων και συνδέσεων) και την λειτουργία κάθε κόμβου. Για να κατασκευάσουμε ένα προσαρμοστικό δίκτυο χρησιμοποιούμε ένα σύνολο δεδομένων προς εκπαίδευση και κάποιες διαδικασίες όπως οι κανόνες εκπαίδευσης ή οι προσαρμοστικοί αλγόριθμοι για την τροποποίηση των παραμέτρων για να βελτιώσουμε την απόδοση του δικτύου. Συνήθως η απόδοση ενός δικτύου μετριέται ως η διαφορά μεταξύ της επιθυμητής εξόδου και της πραγματικής κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Αυτή η διαφορά ονομάζεται μέτρηση σφάλματος. Γενικότερα, ένας κανόνας εκπαίδευσης εξάγεται από την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης τεχνικής βελτιστοποίησης για μια δεδομένη μέτρηση σφάλματος.

Παραδείγματα Προσαρμοστικών Δικτύων

Προσαρμοστικό Δίκτυο με έναν Γραμμικό Κόμβο (LINEAR NODE)



Σχήμα 3.4.8.5: Ένα γραμμικό προσαρμοστικό δίκτυο με ένα κόμβο.

Στο παραπάνω σχήμα 3.4.8.5 απεικονίζεται ένα προσαρμοστικό δίκτυο με ένα κόμβο.

Ορίζεται: **x3=ƒ3 (x1, x2 ; a1, a2, a3)= a1 x1 +a2 x2 + a3**, όπου x1, x2 είναι οι είσοδοι, και a1, a2, a3 είναι οι τροποποιήσιμες παράμετροι. Η συνάρτηση προσδιορίζει ένα επίπεδο σε έναν χώρο x1-x2 και βάζοντας διάφορες τιμές για τις παραμέτρους, μπορούμε να τοποθετήσουμε αυτό το επίπεδο αυθαίρετα όπως εμείς θέλουμε. Χρησιμοποιώντας το τετραγωνικό σφάλμα ως το σφάλμα μέτρησης για το δίκτυο, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τις βέλτιστες παραμέτρους μέσω της μεθόδου εκτίμηση των γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων.

Δίκτυο Percepton

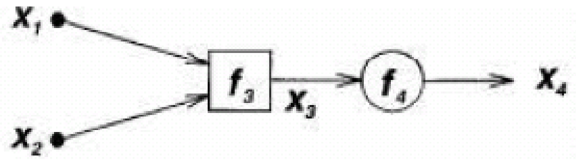
Εάν προσθέσουμε και έναν άλλο κόμβο ώστε να επιτρέψουμε στην έξοδο του δικτύου στο σχήμα 3.4.8.1.1 να παίρνει μόνο δυο τιμές 0 και 1, τότε παίρνουμε το μη γραμμικό δίκτυο σχήμα 3.4.8.1.2.

Οι κόμβοι εκφράζονται: **x3 =ƒ3 (x1, x2 ; a1, a2, a3)= a1 x1 +a2 x2 + a3** και

$$x_4 = f_4(x_3) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x_3 \geq 0 \\ 0 & \text{if} \quad x_3 < 0 \end{cases}$$

Όπου ƒ3 είναι μια γραμμική συνάρτηση και ƒ4 είναι μια βηματική συνάρτηση που αντιστοιχεί το x3 είτε στο 0 είτε στο 1.

Την ολική συνάρτηση του δικτύου μπορούμε να την δούμε σαν ένα γραμμικό ταξινομητή. Ο πρώτος κόμβος σχηματίζει ένα όριο απόφασης σαν μια ευθεία γραμμή στον χώρο των x1-x2, και ο δεύτερος κόμβος δείχνει σε ποιο ημιεπίπεδο ανήκει το διάνυσμα εισόδου(x1, x2). Μπορεί να σχηματιστεί ένα ισοδύναμο ημιεπίπεδο με ένα μόνο κόμβο όπου η συνάρτηση των $f3$ και $f4$. Ο κόμβος που προκύπτει είναι ένα δομικό υλικό.



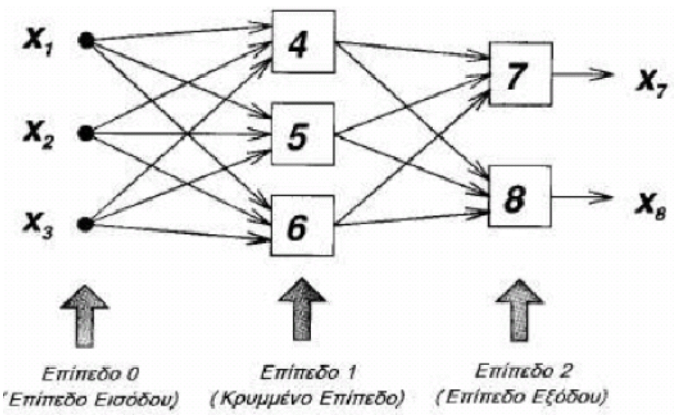
Σχήμα 3.4.8.6 Ένα μη γραμμικό προσαρμοστικό δίκτυο με έναν κόμβο.

Μιας και η βηματική συνάρτηση είναι ασυνεχής σε ένα σημείο και επίπεδη σε όλα τα άλλα σημεία. Μια εναλλακτική λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε της σιγμοειδή συνάρτηση σαν μια θλιπτική συνάρτηση που παίρνει τιμές από 0 έως 1.

$$x_4 = f_4(x_3) = \frac{1}{1 + e^{-x_3}}$$

Ένα πολυεπίπεδο Percepton

Στο σχήμα 3.4.8.7 βλέπουμε την αρχιτεκτονική για ένα πολυεπίπεδο percepton με τρεις εισόδους, δυο εξόδους και τρεις κρυμμένους κόμβους που δεν συνδέονται απευθείας ούτε σε είσοδο ούτε σε έξοδο.



Σχήμα 3.4.8.7: Ένα νευρωνικό δίκτυο 3-3-2

Κάθε κόμβος σε ένα δίκτυο αυτού του τύπου έχει την ίδια συνάρτηση κόμβου, που είναι σύνθεση μιας γραμμικής $f3$ και μιας σιγμοειδούς $f4$. Δηλαδή η συνάρτηση κόμβου στον κόμβο 7 στο παραπάνω σχήμα είναι:

$$x_7 = \frac{1}{1 + \exp[\;-(w_{4,7}x_4 + w_{5,7}x_5 + w_{6,7}x_6 + t_7)]}$$

, όπου x_4 x_5 και x_6 είναι οι έξοδοι από τους κόμβους 4,5 και 6 αντίστοιχα και το σύνολο των παραμέτρων του κόμβου 7 δηλώνεται με το $\{ w_{4,7}, w_{5,7}, w_{6,7}, t_7\}$.

Συνήθως το $w_{i,j}$, είναι το βάρος που σχετίζεται με τον σύνδεσμο που ενώνει τον ι-οστό κόμβο και τον j-οστό κόμβο, και το t_j σαν το κατώφλι (threshold) που συνδέεται με τον κόμβο j. Γενικά, ένας σύνδεσμος δείχνει μόνο την κατεύθυνση της ροής σήματος μεταξύ των συνδεδεμένων κόμβων.

3.5 Προσαρμοστικό Νευρο-Ασαφές Σύστημα Εξαγωγής Συμπεράσματος (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System-ANFIS)

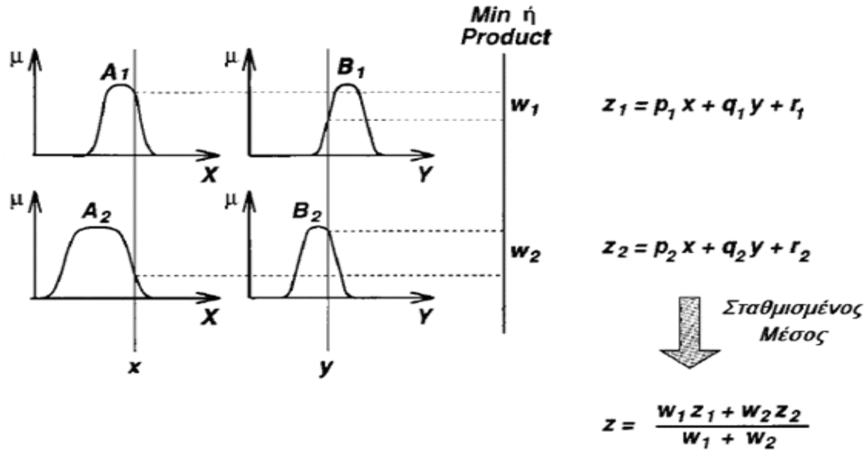
3.5.1 Η Αρχιτεκτονική του ANFIS

Ο αλγόριθμος ANFIS είναι από τους κυριότερους αλλά και ταυτόχρονα από τους πρώτους που εφαρμόστηκαν στο πεδίο της νεύρο-ασαφούς προσέγγισης προβλημάτων. Παρακάτω περιγράφεται το δίκτυο, υποθέτοντας ότι το πρόβλημα το οποίο θα αναλυθεί έχει δύο εισόδους x και y και μία έξοδο z. Υποθέτοντας ότι για ένα πρώτης τάξης μοντέλο Sugeno, μία τυπική βάση κανόνων (rule base) θα μπορούσε να είναι και η εξής:

Κανόνας 1: **Εάν** x **είναι** A_1 **και** y **είναι** B_1 **τότε** $f_1 = p_1 \times x + q_1 \times y + r_1$

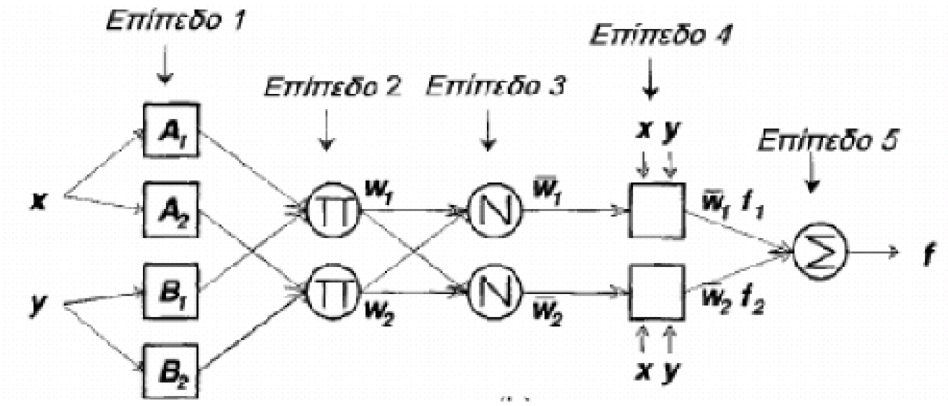
Κανόνας 2: **Εάν** x **είναι** A_2 **και** y **είναι** B_2 **τότε** $f_2 = p_2 \times x + q_2 \times y + r_2$

Το παρακάτω Σχήμα 3.5.1.1 δείχνει με απλό τρόπο τη διαδικασία συμπερασμού (inference procedure) του μοντέλου Sugeno, στην περίπτωση όπου για t-operator έχει επιλεγεί η τομή των δύο ασαφών συνόλων (A,B), οπότε μA∩B(x) = min[μA(x), μB(x)].



Σχήμα 3.5.1.1: Ασαφής Συλλογιστική (fuzzy reasoning)

Όπως γίνεται φανερό, η έξοδος z του πρωτοβάθμιου μοντέλου Sugeno είναι ένας σταθμικός μέσος όρος. Η αντίστοιχη αναπαράσταση του δικτύου ANFIS παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 3.5.1.2.



Σχήμα 3.5.1.2: Η αρχιτεκτονική του ANFIS

Το παραπάνω σχήμα απεικονίζει τον συλλογιστικό μηχανισμό (reasoning) για αυτό το μοντέλο Sugeno και η αντίστοιχη ισοδύναμη αρχιτεκτονική του ANFIS όπου οι κόμβοι του ίδιου επιπέδου έχουν παρόμοιες συναρτήσεις. Παρακάτω παρουσιάζεται πιο αναλυτικά η διεργασία που εκτελείται σε κάθε επίπεδο.

Επίπεδο 1: Κάθε κόμβος i σε αυτό το επίπεδο είναι ένας προσαρμόσιμος (adaptive) κόμβος με μια συνάρτηση κόμβου:

$O_{1,i} = \mu_{A_i}(x)$ για i = 1,2 ή

$O_{1,i} = \mu_{B_{i-2}}(y)$ για i = 3,4 ή

$O_{1,i} = \mu_{C_j}(y)$ για i = j+4 και j = 1,2,

, όπου x (ή y ή z) – η είσοδος στον κόμβο i , A_i (ή B i-2 ή C j)- η γλωσσική μεταβλητή (small, large, κλπ.) που σχετίζεται με αυτή τη συνάρτηση του κόμβου. Με άλλα λόγια, το $O_{1,i}$ είναι ο βαθμός συμμετοχής του A (= A_1 , A_2 ,B_1 ,B_2 ,C_1 ή C_2) και καθορίζει το βαθμό στον οποίο η είσοδος x (ή y ή z) ικανοποιεί τον ποσοτικοποίηση A. Εδώ η συνάρτηση συμμετοχής για το A μπορεί να είναι οποιαδήποτε κατάλληλη παραμετρική συνάρτηση συμμετοχής όπως η καμπανοειδής για παράδειγμα :

$$\mu_{A_i}(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c_i}{a_i}\right)^2}$$

όπου a_i ,c_i είναι το σύνολο των παραμέτρων. Καθώς οι τιμές αυτών των παραμέτρων αλλάζουν, οι συναρτήσεις ποικίλλουν ανάλογα, παρουσιάζοντας έτσι διάφορες μορφές της συνάρτησης συμμετοχής για το ασαφές σύνολο A. Οι παράμετροι σε αυτό το επίπεδο αναφέρονται ως αρχικοί παράμετροι (premise parameters).

Επίπεδο 2: Κάθε κόμβος σε αυτό το επίπεδο είναι ένας σταθερός (fixed) κόμβος Π, του οποίου η έξοδος είναι το γινόμενο όλων των εισερχόμενων σημάτων:

$$O_{2,i} - w_i - \mu_{A_i}(x) * \mu_{B_i}(y) * \mu_{C_1}(z), \text{ για i} - 1{,}2$$
$$O_{2,i} = w_i = \mu_{A_i}(x) * \mu_{B_{i-2}}(y) * \mu_{C_2}(z), \text{ για i} - 3{,}4$$
$$O_{2,j} = w_r = \mu_{A_2}(x) * \mu_{B_1}(y) * \mu_{C_j}(z), \text{ για i} - \text{j+4, j}-1{,}2$$
$$O_{2,i} - w_i - \mu_{A_2}(x) * \mu_{B_2}(y) * \mu_{C_{j-2}}(z), \text{ για i} - \text{j+4, j}-3{,}4$$

Επίπεδο 3: Κάθε κόμβος σε αυτό το επίπεδο είναι ένας σταθερός κόμβος N. O i-ιστός κόμβος υπολογίζει το λόγο της βαθμού ενεργοποίησης (firing strength) του i-οστού κανόνα στο άθροισμα των βαθμών ενεργοποίησης όλων των κανόνων:

$$O_{3,i} = \overline{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8}, \qquad \text{i=1,2,3,4,5,6,7,8.}$$

Για ευκολία, οι έξοδοι αυτού του επιπέδου ονομάζονται κανονικοποιημένοι βαθμοί ενεργοποίησης (normalized firing strengths).

Επίπεδο 4: Κάθε κόμβος i σε αυτό το επίπεδο είναι ένας προσαρμόσιμος κόμβος με μία συνάρτηση κόμβου.

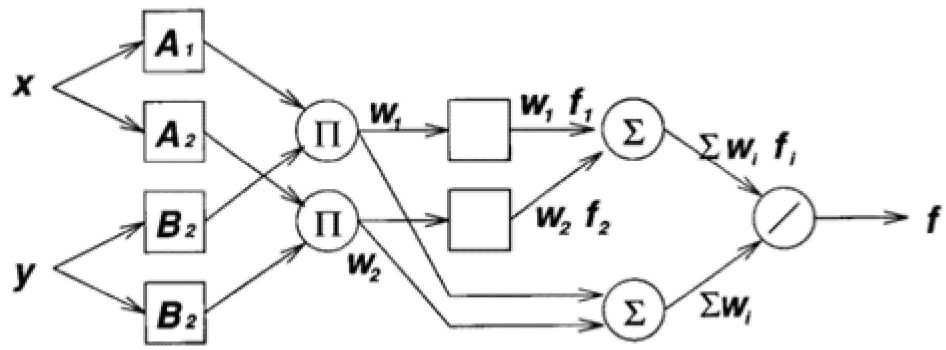
$$O_{4,i} = \overline{w}_i * f_i = \overline{w}_i * (p_i * x + q_i * y + s_i * z + r_i)$$

όπου: w_i - η έξοδος του επιπέδου 3, $\{p_i, q_i, s_i, r_i\}$ - το σύνολο των παραμέτρων. Οι παράμετροι σε αυτό το επίπεδο αναφέρονται ως επακόλουθοι (consequent parameters).

Επίπεδο 5: Ο μοναδικός κόμβος σε αυτό το επίπεδο είναι ένας σταθερός κόμβος Σ που υπολογίζει τη συνολική έξοδο σαν το ολικό άθροισμα όλων των εισερχόμενων σημάτων:

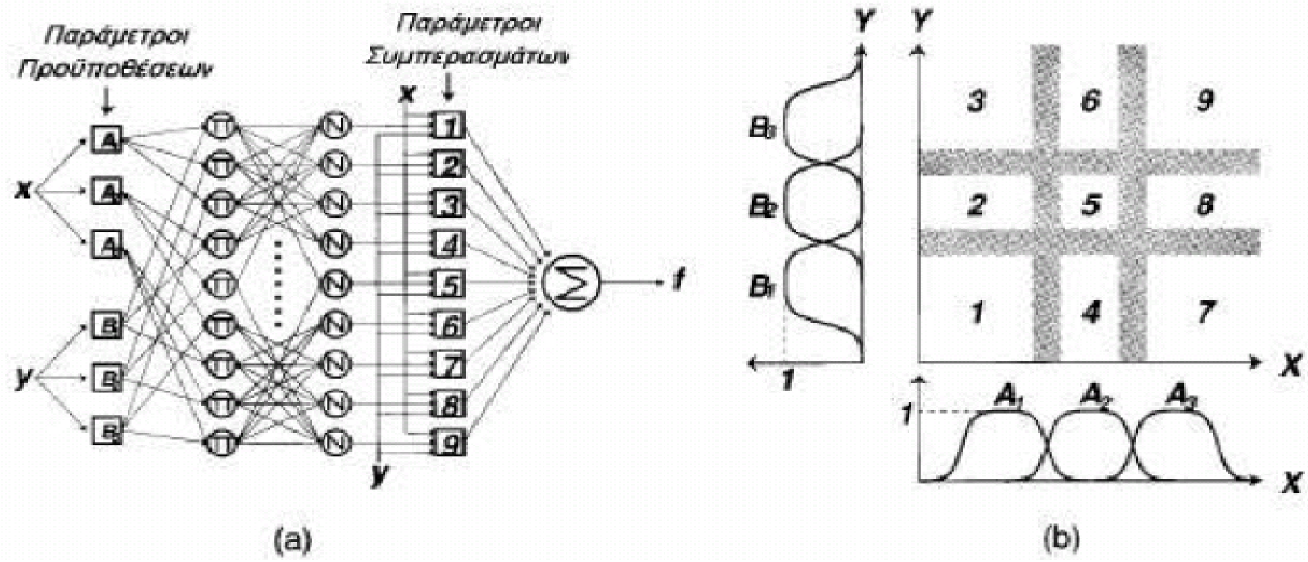
$$overall\ output = O_{5,i} = \sum_i \overline{w}_i * f_i = \frac{\sum_i w_i * f_i}{\sum_i w_i}$$

Αυτό το προσαρμοστικό δίκτυο είναι λειτουργικά ισοδύναμο με το ασαφές μοντέλο Sugeno. Μπορούμε να συνδυάσουμε τα επίπεδα 3 και 4 για να αποκτήσουμε ένα ισοδύναμο δίκτυο με τέσσερα μόνο επίπεδα. Με το ίδιο δείγμα μπορούμε να πραγματοποιήσουμε την κανονικοποίηση των βαρών στο τελευταίο επίπεδο. Το σχήμα 3.5.1.3 απεικονίζει ένα ANFIS αυτού του τύπου. Στην ακραία περίπτωση μπορούμε να συρρικνώσουμε ακόμα και όλο το δίκτυο, σε έναν μόνο προσαρμοστικό κόμβο με το ίδιο σύνολο παραμέτρων. Η ανάθεση συναρτήσεων κόμβων και η σύνθεση του δικτύου είναι αυθαίρετες, εφόσον κάθε κόμβος και κάθε επίπεδο πραγματοποιούν λειτουργίες που είναι σημαντικές και έχουν δυνατότητα να αποτελούνται από επιμέρους τμήματα.



Σχήμα 3.5.1.3: Η αρχιτεκτονική του ANFIS για το ασαφές σύνολο Sugeno, όπου η κανονικοποίηση βαρών πραγματοποιείται στο τελευταίο επίπεδο.

Στο σχήμα 3.5.1.4 (α) βλέπουμε μια αρχιτεκτονική ANFIS που είναι ισοδύναμη με ένα ασαφές μοντέλο Sugeno πρώτου βαθμού δυο εισόδων και εννέα κανόνων, σε κάθε είσοδο θεωρούμε ότι αντιστοιχούν τρεις συναρτήσεις συμμετοχής. Το σχήμα 3.5.1.4 (β) απεικονίζει πως δύο διαστάσεων χώρος εισόδου είναι χωρισμένος σε εννέα υπέρθετες (overlapping) ασαφείς περιοχές όπου κάθε μια ελέγχεται από ένα ασαφή κανόνα if-then. Αυτό σημαίνει ότι το μέρος των προϋποθέσεων ενός κανόνα προσδιορίζει μια ασαφή περιοχή, ενώ το μέρος των συμπερασμάτων προσδιορίζει την έξοδο μέσα στην περιοχή.



Σχήμα 3.5.1.4 (α) Η αρχιτεκτονική του ANFIS για το ασαφές μοντέλο Sugeno
με δύο εισόδους και εννέα κανόνες (β) ο χώρος εισόδου,
χωρισμένος σε εννέα ασαφείς περιοχές.

3.5.2 Υβριδικός Αλγόριθμος Εκπαίδευσης

Το ANFIS χρησιμοποιεί έναν υβριδικό αλγόριθμο εκμάθησης για να προσδιορίσει τις παραμέτρους του ασαφούς συστήματος τύπου Sugeno. Εφαρμόζει έναν συνδυασμό της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (least squares) και της μεθόδου οπισθόδρομης βαθμωτής ελαχιστοποίησης (backpropagation gradient descent) για την εκπαίδευση παραμέτρων των συναρτήσεων συμμετοχής του FIS ώστε να μιμηθεί ένα δοσμένο σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης.

Εκτιμητής Ελαχίστων Τετραγώνων (Least-squares estimator)

Στο γενικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, η έξοδος του γραμμικού μοντέλου y δίνεται από τη γραμμικά παραμετρικοποιημένη έκφραση:

$$y = \theta_1 f_1(\mathbf{u}) + \theta_2 f_2(\mathbf{u}) + \ldots + \theta_n f_n(\mathbf{u}) \quad (3.5.2.1)$$

, όπου $u = [u_1, \ldots, u_p]^T$ είναι το διάνυσμα εισόδου του μοντέλου, $f_1, \ldots, f_n$ είναι γνωστές συναρτήσεις του u και $\theta_1 \ldots \theta_n$ είναι άγνωστες παράμετροι που θα υπολογιστούν. Η εξίσωση (3.5.2.1) καλείται συνάρτηση παλινδρόμησης, και τα θi ονομάζονται συντελεστές παλινδρόμησης. Για να προσδιοριστούν οι άγνωστες παράμετροι θi, συνήθως πρέπει να εκτελεστούν πειράματα για να βρεθεί ένα σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης που αποτελείται από τα ζευγάρια δεδομένων $\{(u_i, y_i), i = 1,\ldots,m\}$ τα οποία αντιπροσωπεύουν τα επιθυμητά ζευγάρια εισόδου-εξόδου του συστήματος στόχου που θα μοντελοποιηθεί. Η αντικατάσταση κάθε ζευγαριού στοιχείων στην εξίσωση (3.5.2.1) παράγει ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων m:

$$\begin{aligned}
&f_1(u_1)\theta_1 + f_2(u_1)\theta_2 + \ldots + f_n(u_1)\vartheta_n = y_1 \\
&f_1(u_2)\theta_1 + f_2(u_2)\theta_2 + \ldots + f_n(u_2)\theta_n = y_2 \\
&\ldots \\
&f_1(u_n)\theta_1 + f_2(u_n)\theta_2 + \ldots + f_n(u_n)\theta_n = y_n
\end{aligned} \quad (3.5.2.2)$$

Σε μορφή πινάκων, οι προηγούμενες εξισώσεις μπορούν να γραφτούν σε συνοπτική μορφή: $A\theta = y$ (3.5.2.3), όπου A είναι ένας $m \times n$ πίνακας (πίνακας σχεδιασμού):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{u}_1) & \cdots & f_n(\mathbf{u}_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(\mathbf{u}_m) & \cdots & f_n(\mathbf{u}_m) \end{bmatrix}$$

θ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων: $\theta = [\theta_1 \ldots \theta_n]^T$

και y είναι ένα $m \times 1$ διάνυσμα εξόδου: $y = [y_1 \ldots y_m]^T$

Η i-οστή σειρά του ενωμένου πίνακα δεδομένων [A|y], που δηλώνεται με $[a_i^T \mid y_i]$, σχετίζεται με το i-οστό ζευγάρι δεδομένων ($u_i; y_i$) μέσω της $a_i^T = [f_1(u_1),\ldots, f_n(u_n)]$.

Το μεγαλύτερο μέρος των υπολογισμών βασίζεται στους πίνακες Α και y , μερικές φορές γίνεται αναφορά στο $(a_i^T; y_i)$ σαν το i-οστό ζευγάρι δεδομένων του συνόλου δεδομένων εκπαίδευσης. Για να προσδιοριστεί μεμονωμένα το άγνωστο διάνυσμα θ , είναι απαραίτητο να ισχύει m ≥n . Αν ο Α είναι τετραγωνικός (m×n) και αντιστρέψιμος, τότε η εξίσωση (3.5.2.3) μπορεί να λυθεί ως προς τον άγνωστο x και γίνεται: $\theta = A^{-1} y$ (3.5.2.4)

Ο m είναι συνήθως μεγαλύτερος από τον n, που σημαίνει ότι υπάρχουν περισσότερα ζευγάρια στοιχείων από τις παραμέτρους. Σε αυτήν την περίπτωση, μια ακριβής λύση που να ικανοποιεί όλες τις m εξισώσεις δεν είναι πάντα δυνατή, δεδομένου ότι τα στοιχεία μπορεί να μολυνθούν από θόρυβο, ή το μοντέλο μπορεί να μην είναι κατάλληλο για την περιγραφή του συστήματος στόχου. Κατά συνέπεια η εξίσωση (3.5.2.3) πρέπει να τροποποιηθεί με την ενσωμάτωση ενός διανύσματος λάθους e για να αποτελέσει το τυχαίο λάθος θορύβου ή το τυχαίο λάθος διαμόρφωσης ως εξής: Αθ+e=y (3.5.2.5)

Τώρα, αντί της εύρεσης της ακριβούς λύσης στην εξίσωση (6.3), πρέπει να βρεθεί το $\theta = \hat{\theta}$ που ελαχιστοποιεί το άθροισμα του τετραγωνικού σφάλματος και ορίζεται ως

$$E(\theta) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_i^T \theta)^2 = e^T e = (y - A\theta)^T (y - A\theta)$$

όπου e =y-Αθ είναι το διάνυσμα λάθους που παράγεται από μια συγκεκριμένη επιλογή του θ. Πρέπει να σημειωθεί ότι το Ε(θ) είναι σε τετραγωνική μορφή και έχει ένα μοναδικό ελάχιστο $\theta = \hat{\theta}$. Το ακόλουθο θεώρημα δηλώνει έναν απαραίτητο όρο που ικανοποιείται από τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\theta}$.

Θεώρημα 3.5.2.1: Εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων Το τετραγωνικό σφάλμα στην εξίσωση (3.5.2.6) ελαχιστοποιείται όταν $\theta = \hat{\theta}$, ο οποίος καλείται εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων (LSE) και ο οποίος ικανοποιεί την κανονική εξίσωση

$A^T A\hat{\theta} = A^T y$ (3.5.2.7). Αν ο $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος, ο $\hat{\theta}$ είναι μοναδικός και δίνεται από την $\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^{-T} y$ (3.5.2.8).

Οπισθοδρόμηση για Πρωσοτροφοδοτούμενα Δίκτυα

Η ενότητα αυτή παρουσιάζει ένα βασικό κανόνα εκμάθησης για προσαρμόσιμα δίκτυα, που είναι στην ουσία η πιο απλή μέθοδος βαθμωτής ελαχιστοποίησης. Το κεντρικό μέρος αυτού του κανόνα εκμάθησης αφορά στο πως να επιλεγεί επαναληπτικά ένα διάνυσμα κλίσης στο οποίο κάθε στοιχείο ορίζεται ως την παράγωγο ενός μέτρου σφάλματος ως προς μια παράμετρο. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του κανόνα αλυσίδας, ενός βασικού τύπου για το διαφορισμό σύνθετων συναρτήσεων ο οποίος αναλύεται σε κάθε εγχειρίδιο μαθηματικών. Η διαδικασία εύρεσης ενός διανύσματος κλίσης σε ένα δίκτυο αναφέρεται γενικά σαν οπισθοδρόμηση (backpropagation) επειδή το διάνυσμα κλίσης υπολογίζεται σε κατεύθυνση αντίθετη από τη ροή της εξόδου κάθε κόμβου. Μόλις επιλεγεί η κλίση, διάφορες τεχνικές βελτιστοποίησης και παλινδρόμησης βασισμένες στις παραγώγους είναι διαθέσιμες για την ενημέρωση των παραμέτρων. Ειδικότερα, εάν χρησιμοποιούμε το διάνυσμα κλίσης σε μια απλή μέθοδο βαθμωτής ελαχιστοποίησης, το προκύπτον παράδειγμα εκμάθησης αναφέρεται συχνά ως κανόνας οπισθόδρομης εκμάθησης.

Έστω ότι δεδομένο πρωσοτροφοδοτούμενο προσαρμόσιμο δίκτυο στην αναπαράστασή του σε επίπεδα έχει L επίπεδα και το επίπεδο l (όπου l=0,1,..., L; l=0 αντιπροσωπεύει το επίπεδο εισαγωγής) έχει N(l) κόμβους. Τότε η έξοδος και η συνάρτηση του κόμβου i [i =1,..., N(l)] στο επίπεδο l μπορούν να αναπαρασταθούν σαν $x_{l,i}$ και $f_{l,i}$, αντίστοιχα. Ας υποτεθεί ότι δεν υπάρχει καμία σύνδεση μεταξύ μη συνεχόμενων στρωμάτων. Δεδομένου ότι η έξοδος ενός κόμβου εξαρτάται από τα εισερχόμενα σήματα και το σύνολο παραμέτρων του κόμβου, προκύπτει η ακόλουθη γενική έκφραση για τη συνάρτηση των κόμβων $f_{l,i}$:

$x_{l,i} = f_{l,i}(x_{l-1,1},\ldots x_{l-1,N(l-1)}, a, \beta, \gamma, \ldots)$ (3.5.2.9)

, όπου α, β, γ κλπ. είναι οι παράμετροι αυτού του κόμβου.

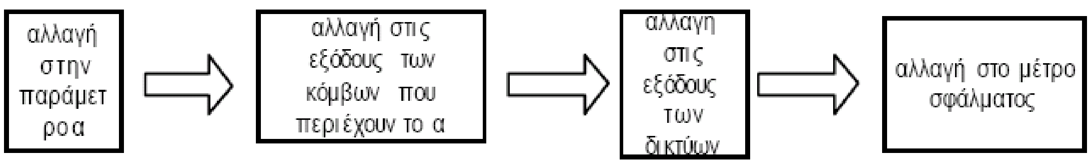
Υποθέτοντας ότι το δοσμένο σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης έχει P καταχωρήσεις, μπορεί να οριστεί ένα μέτρο σφάλματος για την p-οστή ($1 \leq p \leq P$) καταχώρηση των δεδομένων εκπαίδευσης σαν το άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων:

$$E_p = \sum_{k=1}^{N(l)} (d_k - x_{L,k})^2 \qquad (3.5.2.10)$$

, όπου d k είναι το k-οστό συστατικό του p-οστού επιθυμητού διανύσματος εξόδου και $x_{L,k}$ είναι το k-οστό συστατικό του πραγματικού διανύσματος εξόδου που παράγεται με την παρουσίαση του p-οστού διανύσματος εισόδου στο δίκτυο. (Για σημειογραφική απλότητα, παραλείπεται ο δείκτης p και από το d_k και από το $x_{L,k}$). Προφανώς, όταν το E_p είναι ίσο με το μηδέν, το δίκτυο είναι ικανό να αναπαράγει ακριβώς το επιθυμητό διάνυσμα εξόδου στο p-οστό ζευγάρι δεδομένων εκπαίδευσης. Ο στόχος εδώ είναι να ελαχιστοποιηθεί ένα συνολικό μέτρο σφάλματος, που ορίζεται ως:

$$E = \sum_{p=1}^{P} E_p$$

Επιπλέον, ας υποτεθεί ότι το E_P εξαρτάται μόνο από τους κόμβους εξόδου. Για να χρησιμοποιηθεί η βαθμωτή ελαχιστοποίηση ώστε να ελαχιστοποιηθεί το μέτρο σφάλματος, πρέπει πρώτα να βρεθεί το διάνυσμα κλίσης. Πριν υπολογιστεί το διάνυσμα κλίσης, πρέπει να παρατηρηθούν οι ακόλουθες αιτιώδεις σχέσεις:



όπου τα βέλη $\Rightarrow$δείχνουν τις αιτιώδεις σχέσεις. Δηλαδή, μια μικρή αλλαγή σε μια παράμετρο a θα επηρεάσει την έξοδο του κόμβου που περιέχει το a. Αυτό με τη σειρά του θα επηρεάσει την έξοδο του τελευταίου επιπέδου και συνεπώς το μέτρο σφάλματος.

Η βασική αρχή στον υπολογισμό του διανύσματος κλίσης είναι να περαστούν μια σειρά από πληροφορίες παραγώγων ξεκινώντας από το επίπεδο εξόδου και πηγαίνοντας ανάποδα από επίπεδο σε επίπεδο έως ότου καταλήξει η διαδικασία στο επίπεδο εισόδου.

Το σήμα σφάλματος $\in_{l,i}$ ορίζεται σαν τη παράγωγο του μέτρου σφάλματος E_P ως προς την έξοδο του κόμβου i στο επίπεδο l , λαμβάνοντας υπόψη και τις άμεσες και τις έμμεσες πορείες.

$$\in_{l,i} = \frac{\partial^+ E_P}{\partial x_{l,i}} \quad (3.5.2.11)$$

Η έκφραση αυτή ονομάστηκε διατεταγμένη παράγωγος από τον Werbos.
Το σήμα σφάλματος για τον i-οστό κόμβο εξόδου (στο επίπεδο L) μπορεί να υπολογιστεί απευθείας:

$$\in_{L,i} = \frac{\partial^+ E_P}{\partial x_{L,i}} = \frac{\partial E_p}{\partial x_{L,i}} \quad (3.5.2.12)$$

Αυτό ισούται με $\in_{l.i}$ =-2(d_i-$x_{L,i}$) αν το E_p ορίζεται όπως στην εξίσωση (6.10).
Για τον εσωτερικό κόμβο στην i-οστή θέση του επιπέδου l, το σήμα σφάλματος μπορεί να βρεθεί από τον κανόνα αλυσίδας:

$$\in_{l,i} - \underbrace{\frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}}}_{\substack{error\ signal \\ at\ layer\ l}} - \sum_{m=1}^{N(l+1)} \underbrace{\frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l+1,m}}}_{\substack{error\ signal \\ at\ layer\ l+1}} \frac{\partial f_{l+1,m}}{\partial x_{l,i}} - \sum_{m=1}^{N(l+1)} \in_{l+1,m} \frac{\partial f_{l+1,m}}{\partial x_{l,i}} \quad (3.5.2.13)$$

όπου 0 ≤ l ≤L -1. Δηλαδή το σήμα σφάλματος ενός εσωτερικού κόμβου στο στρώμα l μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των κόμβων στο στρώμα l ×1. Επομένως, για οποιαδήποτε l και i [και1≤i≤ N(l)], μπορούν να βρεθούν τα:

$$\in_{l,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}}$$

Εφαρμόζοντας πρώτα την εξίσωση (3.5.2.12) μία φορά για να υπολογιστούν τα σήματα σφάλματος στο επίπεδο εξόδου, και έπειτα εφαρμόζοντας την εξίσωση (3.5.2.13) επαναληπτικά μέχρι να καταλήξει η διαδικασία στο επιθυμητό επίπεδο l .
Η διαδικασία αυτή καλείται οπισθοδρόμηση δεδομένου ότι τα σήματα σφάλματος λαμβάνονται διαδοχικά από το επίπεδο εξόδου προς το επίπεδο εισόδου.

Το διάνυσμα κλίσης ορίζεται ως την παράγωγο του μέτρου σφάλματος ως προς κάθε παράμετρο, έτσι πρέπει να εφαρμοστεί ο κανόνας αλυσίδας ξανά για να βρεθεί το διάνυσμα κλίσης. Εάν a είναι μια παράμετρος του i-οστού κόμβου στο επίπεδο l , τότε ισχύει:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial a} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}} \frac{\partial f_{l,i}}{\partial a} = \epsilon_{l,i} \frac{\partial f_{l,i}}{\partial a} \quad (3.5.2.14)$$

Ας σημειωθεί ότι αν επιτραπεί στην παράμετρο α να μοιράζεται μεταξύ διαφορετικών κόμβων, τότε η εξίσωση (3.5.2.14) πρέπει να αλλαχθεί σε μια πιο γενική μορφή:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial a} = \sum_{x^* \in S} \frac{\partial^+ E_p}{\partial x^*} \frac{\partial f^*}{\partial a} \quad (3.5.2.15)$$

όπου S είναι το σύνολο των κόμβων που περιέχουν το α σαν παράμετρο ενώ x^* και f^* είναι η έξοδος και η συνάρτηση, αντίστοιχα, ενός γενικού κόμβου στο S. Η παράγωγος του γενικού μέτρου σφάλματος Ε ως προς το α είναι

$$\frac{\partial^+ E_P}{\partial a} = \sum_{p=1}^{P} \frac{\partial^+ E_p}{\partial a} \quad (3.5.2.16)$$

Συνεπώς, για την απλούστερη βαθμωτή ελαχιστοποίηση χωρίς ελαχιστοποίηση γραμμών, ο τύπος για τη γενική παράμετρο a είναι

$$\Delta a = -\eta \frac{\partial^+ E_p}{\partial a} \quad (3.5.2.17)$$

όπου το η είναι ο ρυθμός εκμάθησης, το οποίο μπορεί να εκφραστεί περαιτέρω ως

$$\eta = \frac{\kappa}{\sqrt{\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)^2}} \quad (3.5.2.18)$$

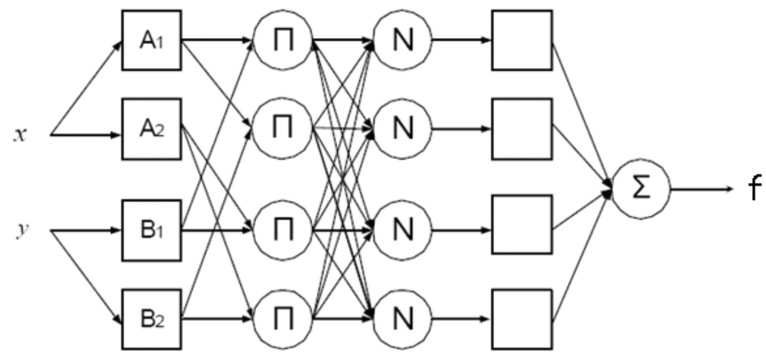
, όπου το k είναι το μέγεθος βήματος, το μήκος δηλαδή κάθε μετάβασης κατά μήκος της κατεύθυνσης κλίσης στο διάστημα παραμέτρου. Συνήθως το μέγεθος βήματος μπορεί να αλλαχθεί για να μεταβληθεί η ταχύτητα της σύγκλισης. Όταν ένα πρωσοτροφοδοτούμενο δίκτυο n-κόμβων αναπαριστάται στην τοπολογική του διάταξη, μπορεί να υπολογιστεί το μέτρο σφάλματος E_p σαν την έξοδο ενός επιπλέον κόμβου με ένδειξη n×1, του οποίου η συνάρτηση κόμβου f n×1 μπορεί να οριστεί από τις εξόδους κάθε κόμβου με μικρότερη ένδειξη.

(Επομένως, το E_P μπορεί να εξαρτάται άμεσα από οποιουσδήποτε κόμβους.) Εφαρμόζοντας πάλι τον κανόνα αλυσίδας, ισχύει ο ακόλουθος συνοπτικός τύπος για τον υπολογισμό του σήματος σφάλματος $\in = \theta E_p / \theta x_i$.

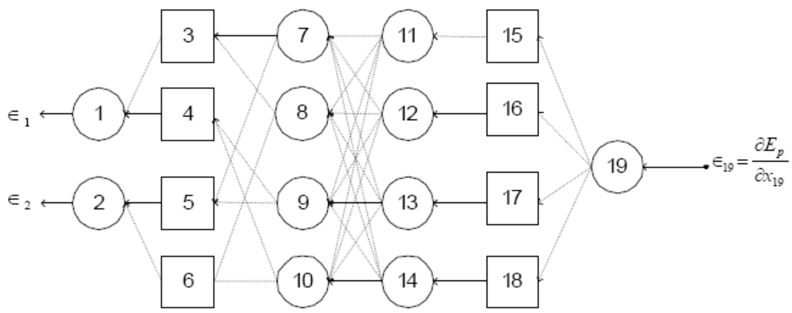
$$\in_i = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} + \sum_{i<j\leq n} \in_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad (3.5.2.19)$$

, όπου ο πρώτος όρος δείχνει μια άμεση επίδραση του x_i στο E_P μέσω της άμεσης διαδρομής από τον κόμβο i στον κόμβο n×1 και κάθε όρος παραγώγου στο άθροισμα δείχνει την έμμεση επίδραση του x_i στο E_P . Μόλις βρεθεί το σήμα σφάλματος για κάθε κόμβο, τότε το διάνυσμα κλίσης για τις παραμέτρους παράγεται όπως πριν.

Ένας άλλος συστηματικός τρόπος να υπολογιστούν τα σήματα σφάλματος είναι μέσω της αναπαράστασης του δικτύου διάδοσης σφάλματος (ή του μοντέλου ευαισθησίας), το οποίο λαμβάνεται από το αρχικό προσαρμόσιμο δίκτυο με την αντιστροφή των συνδέσεων και την παροχή των σημάτων σφάλματος στο επίπεδο εξόδου ως είσοδοι στο νέο δίκτυο. Το ακόλουθο σχήμα δείχνει το μοντέλο ANFIS και το δίκτυο διάδοσης σφάλματος του:



Σχήμα 3.5.2.1(α): Το προσαρμόσιμο δίκτυο.



Σχήμα 3.5.2.1 (β): Το δίκτυο διάδοσης σφάλματος

Τώρα θα υπολογιστούν τα σήματα σφάλματος στους εσωτερικούς κόμβους. Χρησιμοποιούνται τα f_i και x_i για το συμβολισμό της συνάρτησης και της εξόδου του κόμβου i . Η έξοδος του κόμβου i είναι το σήμα σφάλματος αυτού του κόμβου στο πραγματικό προσαρμόσιμο δίκτυο. Σε σύμβολα, αν επιλεχθεί το τετραγωνικό μέτρο σφάλματος για E_P , τότε ισχύει το ακόλουθο: $\in_{19} = -2(d_{19} - x_{19})$.

Αυτό είναι επειδή ο κόμβος 19 είναι μόνο ένας κόμβος προσωρινής αποθήκευσης στο δίκτυο διάδοσης σφάλματος. Για τους κόμβους 15, 16, 17 και 18 ισχύουν:

$$\in_{18} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{18}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{18}} = \in_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{18}}$$
$$\in_{17} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{17}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{17}} = \in_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{17}}$$
$$\in_{16} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{16}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{16}} = \in_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{16}}$$
$$\in_{15} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{15}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{15}} = \in_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{15}}$$

Αυτό είναι επειδή όλοι αυτοί οι κόμβοι εξαρτώνται από τον κόμβο 19. Αυτό ισχύει και για τους κόμβους 11, 12, 13 και 14 με τη διαφορά ότι κάθε ένας από αυτούς εξαρτάται από διαφορετικό κόμβο:

$$\in_{14} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{14}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{18}} \frac{\partial f_{18}}{\partial x_{14}} = \in_{18} \frac{\partial f_{18}}{\partial x_{14}}$$

$$\in_{13} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{13}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{17}} \frac{\partial f_{17}}{\partial x_{13}} = \in_{17} \frac{\partial f_{17}}{\partial x_{13}}$$

$$\in_{12} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{12}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{16}} \frac{\partial f_{16}}{\partial x_{12}} = \in_{16} \frac{\partial f_{16}}{\partial x_{12}}$$

$$\in_{11} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{11}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{15}} \frac{\partial f_{15}}{\partial x_{11}} = \in_{15} \frac{\partial f_{15}}{\partial x_{11}}$$

Αντιθέτως, οι κόμβοι 7, 8, 9 και 10 εξαρτώνται από τέσσερις διαφορετικούς κόμβους όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5. Έτσι, ισχύει:

$$\in_{10} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{10}} = \in_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_{10}} + \in_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_{10}} - \in_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_{10}} + \in_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_{10}}$$

$$\in_{9} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{9}} = \in_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_{9}} + \in_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_{9}} + \in_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_{9}} - \in_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_{9}}$$

$$\in_{8} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{8}} = \in_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_{8}} + \in_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_{8}} + \in_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_{8}} + \in_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_{8}}$$

$$\in_{7} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{7}} = \in_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_{7}} + \in_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_{7}} + \in_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_{7}} + \in_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_{7}}$$

Τέλος, οι κόμβοι 1 και 2 εξαρτώνται από δύο κόμβους και έτσι ισχύει:

$$\in_{2} - \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{2}} - \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{6}} \frac{\partial f_{6}}{\partial x_{2}} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{5}} \frac{\partial f_{5}}{\partial x_{2}} - \in_{6} \frac{\partial f_{2}}{\partial x_{2}} + \in_{5} \frac{\partial f_{5}}{\partial x_{2}}$$

$$\in_{1} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{1}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{4}} \frac{\partial f_{4}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{3}} \frac{\partial f_{3}}{\partial x_{1}} = \in_{4} \frac{\partial f_{4}}{\partial x_{1}} + \in_{3} \frac{\partial f_{3}}{\partial x_{1}}$$

Συνδυασμός Βαθμωτής Ελαχιστοποίησης και Εκτιμητή Ελαχίστων Τετραγώνων

Η έξοδος ενός προσαρμόσιμου δικτύου είναι γραμμική σε μερικές από τις παραμέτρους του δικτύου. Έτσι μπορούν να προσδιοριστούν αυτές οι γραμμικές παράμετροι με τη γραμμική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων που περιγράφτικε παραπάνω. Αυτή η προσέγγιση οδηγεί σε ένα υβριδικό κανόνα εκμάθησης που συνδυάζει τη βαθμωτή ελαχιστοποίηση (SD) και τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων (LSE) για γρήγορο προσδιορισμό των παραμέτρων.

Από την αρχιτεκτονική δομή του ANFIS παρατηρούμε ότι οι τιμές των παραμέτρων από τις προϋποθέσεις είναι προκαθορισμένες (αμετάβλητες), η ολική έξοδος μπορεί να εκφραστεί σαν ο γραμμικός συνδυασμός των παραμέτρων από τα συμπεράσματα. Σε σύμβολα, η έξοδος *f* στο σχήμα 5.4 (β) ξαναγράφεται:

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{w_1}{w_1+w_2} f_1 + \frac{w_2}{w_1+w_2} f_2 \\
&= \overline{w}_1(p_1x+q_1y+r_1)+\overline{w}_2(p_2x+q_2y+r_2) \\
&= (\overline{w}_1x)p_1+(\overline{w}_1y)q_1+(\overline{w}_1)r_1+(\overline{w}_2x)p_2+(\overline{w}_2y)q_2+(\overline{w}_2)r_2
\end{aligned}
$$

Η οποία είναι γραμμική στις παραμέτρους των συμπερασμάτων p1, q1, r1, p2, q2 και r2.

Έστω ότι:

S=σύνολο όλων των παραμέτρων

S1= σύνολο των (μη γραμμικών) παραμέτρων από τις προϋποθέσεις.

S2 =σύνολο των (γραμμικών) παραμέτρων από τα συμπεράσματα.

Το προσαρμόσιμο δίκτυο έχει μία έξοδο που αναπαριστάται ως:

$o = F(i, S)$ (3.5.2.20), όπου i είναι το διάνυσμα των μεταβλητών εισόδου, S είναι το σύνολο των παραμέτρων, και F είναι η συνολική συνάρτηση που εφαρμόζεται από το προσαρμόσιμο δίκτυο στην εξίσωση S =S1⊕ S2 (3.5.2.21)

και H(.) και F(.) είναι η ταυτοτική συνάρτηση και η συνάρτηση του FIS αντιστοίχως στην εξίσωση η H o F είναι γραμμική στα στοιχεία του S2 , τότε εφαρμόζοντας την H στην εξίσωση (6.20), προκύπτει ότι H(o)=H o F(Bi, S).

Το ⊕ αντιπροσωπεύει την άμεση άθροιση (direct sum). Η H(.) είναι η ταυτοτική συνάρτηση και η F(.,.) είναι η συνάρτηση του συστήματος ασαφούς συμπερασμού αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, ο υβριδικός αλγόριθμος μάθησης που αναπτύχθηκε παραπάνω μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα.

Αναλυτικότερα, όπως συμβαίνει και στα νευρωνικά δίκτυα, θα ξεχωρίσουν δύο φάσεις στη διαδικασία εκπαίδευσης: 1. Πέρασμα προς τα εμπρός (forward pass): Στη φάση αυτή το σήμα εισόδου διαδίδεται από το επίπεδο 1 μέχρι το επίπεδο 4 και οι παράμετροι (pi, qi, ri) i = 1,2 εκτιμώνται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. 2. Πέρασμα προς τα πίσω (backward pass): Στη φάση αυτή έχοντας μία ένδειξη του λάθους πραγματοποιείται μία διόρθωση κατά μία ποσότητα που ορίζεται από τη μέθοδο της βαθμωτής κατάβασης (Gradient Descent), των μεταβλητών αi, bi, ci.

Το ANFIS διασπά το σύνολο των παραμέτρων του σε δύο υποσύνολα, εκ των οποίων το ένα αποτελεί γραμμικό σύνολο παραμέτρων και, επομένως, είναι δυνατόν να εκπαιδευτεί με γραμμικούς αλγόριθμους, όπως η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (least squared). Οι γραμμικοί αλγόριθμοι μάθησης επιτυγχάνουν συνολικά ελάχιστα (global minimums) της συνάρτησης κόστους στο χώρο των παραμέτρων τους και είναι αποδοτικοί από πλευράς απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου. Το δεύτερο υποσύνολο παραμέτρων εκπαιδεύεται με αλγόριθμους που μπορούν να δημιουργήσουν μη γραμμικές απεικονίσεις, όπως η βαθμωτή κατάβαση (gradient descent). Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι απαιτητικοί από πλευράς απαιτούμενου χρόνου εκπαίδευσης και δεν υπάρχει εγγύηση για την πραγματοποίηση του συνολικού ελαχίστου της συνάρτησης κόστους στον χώρο των παραμέτρων τους. Ο αλγόριθμος μάθησης του ANFIS συνδυάζει περάσματα προς τα εμπρός και προς τα πίσω. Στο πέρασμα εμπρός γίνεται η μάθηση του συνόλου των γραμμικών παραμέτρων και στο πέρασμα προς τα πίσω γίνεται η προσαρμογή των μη-γραμμικών αντίστοιχα. Στον παρακάτω πίνακα 3.5.2.1 συνοψίζονται οι δραστηριότητες του κάθε περάσματος.

	εμπροσθόδρομο πέρασμα	οπισθόδρομο πέρασμα
παράμετροι των προϋποθέσεων	Προκαθορισμένες (αμετάβλητες)	βαθμωτή φθίνουσα μέθοδος
παράμετροι των συμπερασμάτων	εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων	προκαθορισμένες (αμετάβλητες)
σήματα	έξοδοι των κόμβων	σήματα σφάλματος

Πίνακας 3.5.2.1: Δραστηριότητες κατά την εκπαίδευση

Το πλεονέκτημα της μεθόδου έγκειται στο γεγονός της ύπαρξης τόσο γραμμικών όσο και μη γραμμικών μεθόδων, που την καθιστά ταχύτερη από τα κλασικά νευρωνικά δίκτυα. Οι παράμετροι των συμπερασμάτων που ευρίσκονται με αυτόν τον τρόπο, είναι βέλτιστες υπό την προϋπόθεση ότι οι παράμετροι των προϋποθέσεων είναι προκαθορισμένες (αμετάβλητες). Αναλόγως, η υβριδική προσέγγιση συγκλίνει πολύ γρηγορότερα μιας και μειώνει τις διαστάσεις του διαστήματος αναζήτησης της αρχικής καθαρής μεθόδου οπισθόδρομης διάδοσης.

Μέχρι τώρα χρησιμοποιούσαμε προκαθορισμένες και αυθαίρετα επιλεγμένες συναρτήσεις συμμετοχής. Πολλές φορές έχουμε μια συλλογή από δεδομένα εισόδου/εξόδου και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα προκαθορισμένο μοντέλο βασισμένο στα στοιχεία αυτά ώστε να ξέρουμε ποιες συναρτήσεις συμμετοχής και με ποιες παραμέτρους να χρησιμοποιήσουμε. Τότε μπορούμε να βοηθηθούμε από το ANFIS, ώστε να βρούμε τις καταλληλότερες συναρτήσεις συμμετοχής.

Οι νεύρο-προσαρμοστικές τεχνικές είναι αρκετά απλές. Έτσι παρέχεται μια μέθοδος ώστε το ασαφές μοντέλο να εκπαιδευτεί με τις πληροφορίες που του δίνει το σύνολο των δεδομένων, ώστε να υπολογιστούν οι παράμετροι των συναρτήσεων συμμετοχής με σκοπό την εύρεση του καλύτερου τρόπου ώστε να επιτρέπει στο σύστημα εξαγωγής συμπερασμάτων να ανιχνεύει τα δεδομένα εισόδου/εξόδου. Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με αυτή των νευρωτικών δικτύων.

Η προσαρμογή των παραμέτρων των συναρτήσεων συμμετοχής από ένα ANFIS γίνεται με αλγόριθμους εκμάθησης είτε μόνο back propagation είτε με έναν υβριδικό αλγόριθμο, συνδυασμό back propagation και μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων.

Ο υπολογισμός των παραμέτρων αυτών, που αλλάζουν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εκμάθησης, διευκολύνεται από ένα βαθμωτό διάνυσμα που μας δείχνει πόσο καλά το FIS μοντελοποιεί τα δεδομένα εισόδου/ εξόδου για το εν λόγο σύνολο παραμέτρων. Μόλις αποκτήσουμε το βαθμωτό διάνυσμα μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποιον από τους πολλούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης, για να βελτιώσουμε αυτές τις παραμέτρους, ούτως ώστε να μειώσουμε το μέγεθος του σφάλματος (συνήθως το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ πραγματικών και επιθυμητών τιμών).

3.5.3 Περιορισμοί του ANFIS

Οι κυριότεροι περιορισμοί του ANFIS που αναφέρονται στην διεθνή βιβλιογραφία είναι:

- Βασίζεται σε ένα FIS τύπου Sugeno.
- Έχει μια έξοδο, που λαμβάνεται με τη μέθοδο αποασαφοποίησης σταθμισμένου μέσου.
- Όλες οι συναρτήσεις συμμετοχής εξόδου πρέπει να είναι ίδιου τύπου, είτε γραμμικές είτε σταθερές.
- Δεν μπορεί να γίνεται κοινή χρήση κανόνων. Διαφορετικοί κανόνες δεν μπορούν να έχουν την ίδια συνάρτηση συμμετοχής εξόδου.
- Πρέπει να υπάρχουν βάρη σε κάθε κανόνα.
- Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε συνάρτηση συμμετοχής, παρά μόνο προκαθορισμένες που επιβάλλουν οι περιορισμοί του ANFIS.

3.6 Χώρος Κατάστασης

3.6.1 Εισαγωγή

Αφού έχουμε περιγράψει τις εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος με προσδιορισμένους βαθμούς ελευθερίας (DOFs) οι δύο σημαντικότεροι (και πιο διαδεδομένοι) τρόποι για να μελετήσουμε την απόκριση ενός συστήματος είναι η μορφή συνάρτησης μεταφοράς και η μορφή χώρου κατάστασης.

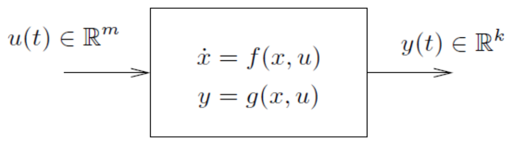
Υπάρχει η δυνατότητα μετασχηματισμού από τη μία στην άλλη μορφή στην άλλη, με ευκολότερη τη μετάβαση από τη χώρου κατάστασης στη συνάρτησης μεταφοράς, μιας και η συνάρτηση μεταφοράς είναι μοναδική για κάθε σύστημα.

Εν γένει, η μορφή συνάρτησης μεταφοράς μελετάει την απόκριση ενός συστήματος στη σταθερή κατάσταση (steady state) ενώ η μορφή χώρου κατάστασης μελετάει την απόκριση των συστημάτων στο πεδίου του χρόνου.

Παρακάτω αναφερόμαστε στη μορφή χώρου κατάστασης την οποία υλοποιούμε στο περιβάλλον του Simulink για τον έλεγχο της απόκριση μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού υπό την επίδραση διάφορων εξωτερικών φορτίσεων.

3.6.2 Θεωρία

Θεωρούμε το σύστημα της παρακάτω εικόνας με m εισόδους και k εξόδους.



Εικόνα 3.6.1: Σύστημα m εισόδων k εξόδων.

Κατάσταση (state) ενός δυναμικού συστήματος ονομάζεται το μικρότερο δυνατό σύνολο μεταβλητών των οποίων η γνώση της τιμής κατά τη χρονική περίοδο $t=t_0$ σε συνδυασμό με τη γνώση της εισόδου για $t \geq t_0$, καθορίζει πλήρως τη συμπεριφορά του συστήματος $t \geq t_0$.

Στην παράσταση συστήματος στο χώρο κατάστασης (state space), το σύστημα χαρακτηρίζεται από σύνολο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (**ΓΔΕ**) πρώτης τάξης που συνδέουν τις μεταβλητές κατάστασης.

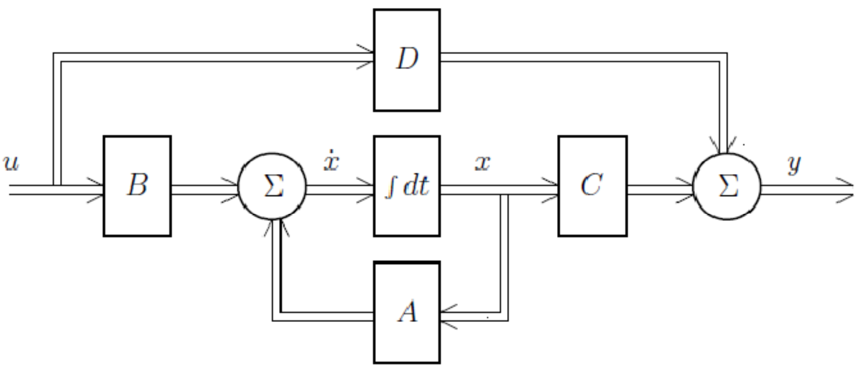
Οι εξισώσεις κατάστασης για γραμμικά χρονικά ανεξάρτητα συστήματα (LTI) έχουν τη μορφή:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (3.6.\ 1)$$

$$y = Cx + Du \qquad (3.6.2)$$

Όπου:

x: διάνυσμα καταστάσεων χώρου, **x**$\in$**R**$^{\mathbf{n}}$, π.χ. γνωρίζουμε ο κάθε βαθμός ελευθερίας (DOF) τι τιμή έχει σε κάποια χρονική στιγμή.
y: μετρούμενη έξοδος, η πραγματική απόκριση του συστήματος, **y**$\in$**R**$^{\mathbf{m}}$
u: είσοδοι/ διαταραχές, **u**$\in$**R**$^{\mathbf{r}}$
A: πίνακας βαρών διανύσματος κατάστασης «state matrix», **A**$\in$**R**$^{\mathbf{n*n}}$
B: πίνακας βαρών εισόδων ή μητρώο κατανομής διαταραχών, **B**$\in$**R**$^{\mathbf{n*r}}$
C: πίνακας βαρών που σχετίζει τις μετρήσιμες εξόδους με το διάνυσμα κατάστασης, **C**$\in$**R**$^{\mathbf{m*n}}$
D: πίνακας βαρών που σχετίζει τις μετρήσιμες εξόδους με το διάνυσμα διαταραχών (εισόδων) «feedforward matrix», **D**$\in$**R**$^{\mathbf{m*r}}$

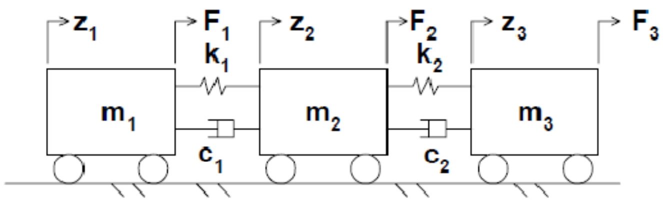


Εικόνα 3.6.2: Γραφική παράσταση των εξισώσεων κατάστασης.

Οι πίνακες A και B αποτελούν ιδιότητες του συστήματος και προσδιορίζονται από τη δομή και τα στοιχεία του συστήματος. Οι πίνακες C Και D προσδιορίζονται από την ιδιαίτερη επιλογή των μεταβλητών εξόδου. Συχνά ο D επιλέγεται μηδενικός, Hespanha [133].

3.6.3 Παράδειγμα Μοντελοποίησης και Σύνθεσης Μητρώων

Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα απλό παράδειγμα μηχανικού συστήματος με τρείς βαθμούς ελευθερίας, όπου η μετακίνηση ορίζεται ως z_i λόγω ονομασίας των παραπάνω μεταβλητών [222].



Εικόνα 3.6.3: Μοντέλο τριών DOF συστήματος

Όπου τα k_i είναι τα τοπικά στοιχεία δυσκαμψίας, τα m_i είναι τα τοπικά στοιχεία μάζας και c_i τα τοπικά στοιχεία απόσβεσης.

Γράφοντας τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος σε μητρωϊκή μορφή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & (c_1+c_2) & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Οι παραπάνω αποτελούν 3 διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού που για να επιλυθούν απαιτούν γνώση αρχικής κατάστασης όσο αφορά τη θέση και τη ταχύτητα και στους 3 βαθμούς ελευθερίας. Στη μορφή χώρου κατάστασης οι παραπάνω μετασχηματίζονται σε 6 (2x3) διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού.

$$\ddot{z}_1 = \left(F_1 - c_1\dot{z}_1 + c_1\dot{z}_2 - k_1 z_1 + k_1 z_2\right)/m_1$$
$$\ddot{z}_2 = \left(F_2 + c_1\dot{z}_1 - \left(c_1 + c_2\right)\dot{z}_2 + c_2\dot{z}_3 + k_1 z_1 - \left(k_1 + k_2\right)z_2 + k_2 z_2\right)/m_2$$
$$\ddot{z}_3 = \left(F_3 + c_2\dot{z}_2 - c_2\dot{z}_3 + k_2 z_2 - k_2 z_3\right)/m_3$$

Για να δημιουργήσουμε τις 6 εξισώσεις αλλάζουμε τη σημειογραφία ώστε να ορίσουμε με x_i τις έξι καταστάσεις: 3 θέσεις και 3 ταχύτητες.

Ορίζουμε ως:

$x_1 = z_1$ => Θέση μάζας 1

$x_2 = \dot{z}_1$ => Ταχύτητα μάζας 1

$x_3 = z_2$ => Θέση μάζας 2

$x_4 = \dot{z}_2$ => Ταχύτητα μάζας 2

$x_5 = z_3$ => Θέση μάζας 3

$x_6 = \dot{z}_3$ => Ταχύτητα μάζας 3

Όπου αυτή η σήμανση είναι τελείως αυθαίρετη και θα μπορούσε πχ να ήταν και $x_2 = z_2$ με $x_5 = \dot{z}_2$ και απλά στη μητρωϊκή γραφή θα άλλαζαν θέση τα στοιχεία των πινάκων A και B που θα δούμε στη συνέχεια.

Βάση των παραπάνω παρατηρούμε τις εξής σχέσεις:

$$\dot{z}_1 = x_2 = \dot{x}_1\,,\quad \ddot{z}_1 = \dot{x}_2\,,\quad \dot{x}_2 = \left(F_1 - c_1\dot{z}_1 + c_1\dot{z}_2 - k_1 z_1 + k_1 z_2\right)/\,m_1$$

$$\dot{z}_2 = x_4 = \dot{x}_3\,,\quad \ddot{z}_1 = \dot{x}_4\,,\quad \dot{x}_4 = \left(F_2 + c_1\dot{z}_1 - \left(c_1 + c_2\right)\dot{z}_2 + c_2\dot{z}_3 + k_1 z_1 - \left(k_1 + k_2\right) z_2 + k_2 z_2\right)/\,m_2$$

$$\dot{z}_3 = x_6 = \dot{x}_5\,,\quad \ddot{z}_1 = \dot{x}_6\,,\quad \dot{x}_6 = \left(F_3 + c_2\dot{z}_2 - c_2\dot{z}_3 + k_2 z_2 - k_2 z_3\right)/\,m_3$$

όπου σε μητρωϊκή μορφή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{m_1} & \frac{-c_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & \frac{-(k_1+k_2)}{m_2} & \frac{-(c_1+c_2)}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} & \frac{c_2}{m_3} & \frac{-k_2}{m_3} & \frac{-c_2}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{F_2}{m_2} \\ 0 \\ \frac{F_3}{m_3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,u}$$

*Με άλλη επιλογή σήμανσης οι πίνακες A και B παίρνουν την ανάλογη μορφή.

Ο πίνακας B εξαρτάται επίσης από την επιλογή του u, δηλαδή ανάλογα με το είδος της εισόδου. Ο παραπάνω αναφερόμενος πίνακας δείχνει ότι εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις ταυτόχρονα και εξαρτώμενα στο σύστημα, μία σε κάθε μάζα. Αν πχ το σύστημα είναι πάλι μιας εξόδου (SI=single input), αλλά εφαρμόζουμε μόνο μία δύναμη στη μάζα 1 ο πίνακας B γίνεται: $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{F_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Για ένα σύστημα με πολλαπλές εισόδους (MI), οι οποίες εφαρμόζονται ανεξάρτητα, πχ στις μάζες 1 και 2 ο πίνακας B γίνεται:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F_1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{m_2} \\ 0 & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}$$

Αν οι επιθυμητές έξοδοι δεν είναι μόνο οι καταστάσεις, αλλά ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών (προβλήματα ελέγχου) ή αν δεν επιθυμούμε να μετρήσουμε όλες τις καταστάσεις, εισάγουμε το πίνακα C. Επίσης αν θέλουμε οι μετρήσεις μας να εξαρτώνται και από τις εισόδους, εισάγουμε και τον πίνακα D.

Για παράδειγμα, αν μας ενδιέφεραν μόνο οι δύο πρώτες μετατοπίσεις (x_1,x_3) και η τρίτη ταχύτητα (x_6), ενώ επίσης αν δε συσχετίσουμε τις εισόδους με τις μετρήσεις, οι πίνακες C και D γίνονται αντίστοιχα:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + (0)(u)$$

Στη γενική τους μορφή οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως:

Γενική εξίσωση κίνησης:

$$M\ddot{z} + \Lambda\dot{z} + \mathrm{K}z = F_m + F_e\,,$$

όπου M το γενικευμένο διάνυσμα μάζας, Λ (=αM+βK) το μητρώο απόσβεσης , K ο γενικευμένος πίνακας δυσκαμψίας και οι F είναι αντίστοιχα γενικευμένα διανύσματα εξωτερικών φορτίσεων.

Γενική μορφή χώρου κατάστασης:

$\dot{x} = Ax + B_1 f_m + B_2 u$, *μετασχηματίστηκε όπως στο παράδειγμα

, με $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}\Lambda \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}F_e \end{bmatrix}$

, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας, x το διάνυσμα κατάστασης, A το μητρώο καταστάσεων, B_1 και B_2 τα μητρώα κατανομής διαταραχών f_m (σε σχέση με τις εξωτερικές δυνάμεις F_m) και ελέγχου u (σε σχέση με άλλες δυνάμεις F_e π.χ. ηλεκτρομηχανικές).

Ή αλλιώς $\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} B_2 & B_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ f_m \end{bmatrix}$ και μπορούμε να πούμε ότι $B = [B_2 \quad B_1]$.

4.

Προσομοίωση & Έλεγχος Πιεζοηλεκτρικής Προβόλου Δοκού.

4.1 Εισαγωγή

Η σύνθετη μηχανική ανάλυση πολλών φυσικών πεδίων σε κατασκευές από ευφυή υλικά, είναι ένα νέο αντικείμενο θεμελιώδους σημασίας για πολλούς κλάδους της επιστήμης των μηχανικών.

Ο σύγχρονος μηχανικός έχει την δυνατότητα επίλυσης τέτοιων προβλημάτων είτε με αναλυτικές είτε με αριθμητικές μεθόδους. Το κυριότερο πλεονέκτημα των αναλυτικών μεθόδων είναι η μοναδική και ακριβής έκφραση για ολόκληρο το πεδίο ορισμού της ανάλυσης. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις μια ακριβής αναλυτική επίλυση είναι εξαιρετικά δύσκολο να προσδιοριστεί, λόγω της πολυπλοκότητας της γεωμετρίας και των οριακών συνθηκών της κατασκευής. Σε αυτές τις περιπτώσεις προκύπτουν αρκετά αξιόπιστες λύσεις χρησιμοποιώντας κάποια αριθμητική μέθοδο με τη βοήθεια λογισμικών Η/Υ.

Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες αριθμητικές μέθοδοι είναι αυτές των Πεπερασμένων Διαφορών - Finite Difference , των Πεπερασμένων Όγκων - Finite Volume, του Οριακού Στοιχείου - Finite Element and Boundary Elements και η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων - Finite Element Method (FEM).

Στη παρούσα εργασία για τον σκοπό της μοντελοποίησης του εξεταζόμενου προβλήματος πιεζοηλεκτρικής προβόλου δοκού υπό φόρτιση μηχανικής τάσης και ηλεκτρικού δυναμικού, επιλέχθηκε η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων που έχει αποδειχθεί ισχυρή και ευπροσάρμοστη για τέτοιου είδους προβλήματα, Providakis et al. [146], [147], [148], [149].

Για τη διακριτοποίηση και την αριθμητική επίλυση του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό COMSOL MULTIPHYSICS 3.4.

Το **Comsol Multiphysics** (πρώην Femlab) είναι ένα υπολογιστικό πακέτο το οποίο, βασιζόμενο στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και συνδυάζοντας καταστάσεις από διάφορους τομείς της φυσικής, επιλύει προβλήματα που περιγράφονται μαθηματικά από διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (PDEs).

Έχοντας ορίσει το πρόβλημα, τα στάδια που ακολουθούνται για τον υπολογισμό της λύσης είναι :

- Σχεδιασμός του χωρίου επίλυσης (**Draw mode**)
- Προσδιορισμός των συνοριακών συνθηκών και των παραμέτρων του προβλήματος (**Physics mode**)
- Κατασκευή του πλέγματος διακριτοποίησης (**Mesh mode**)
- Υπολογισμός της λύσης (**Solvers**)
- Γραφική επεξεργασία των αποτελεσμάτων (**Post-processing mode**)

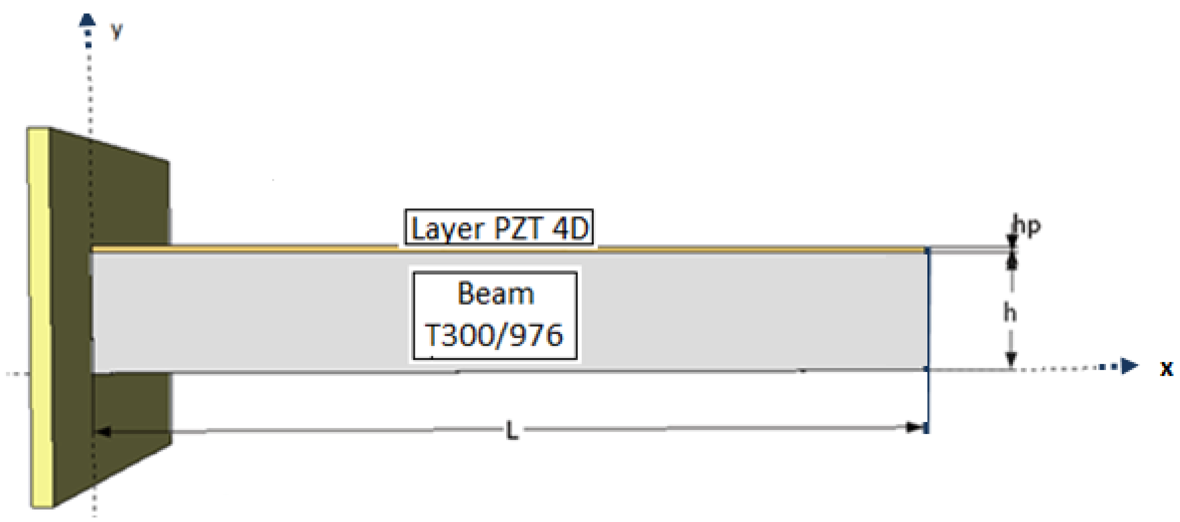
4.2 Μοντελοποίηση και Προσομοίωση με το COMSOL

Στο **Παράρτημα A:** “ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ-ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ COMSOL”, παρουσιάζεται αναλυτικά ο σχεδιασμός και η μοντελοποίηση στο COMSOL της υπό μελέτη εφαρμογής.

Στο **Παράρτημα B:** “ΕΙΚΟΝΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ & ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ”, παρουσιάζονται με μεγάλη ευκρίνεια οι παρακάτω εικόνες μοντελοποιήσης και αποτελεσμάτων με ακριβώς την ίδια αρίθμηση.

4.2.1 Σχεδιασμός –Παραμετροποίηση

Θεωρούμε την ευφυή πρόβολο 2D του παρακάτω σχήματος, όπου στην άνω επιφάνεια της προβόλου έχει τοποθετηθεί στρώση πιεζοηλεκτρικού υλικού. Το δοκάρι αποτελείται από εποξικό γραφίτη T300/976 και ο αισθητήρας ή/και ενεργοποιητής από πιεζοηλεκτρικό υλικό PZT-4D.



Εικόνα 4.2.1: *Φυσικός Σχεδιασμό Κατασκευής*

Όπου L= 30cm , h=0,98cm , hp=0,02cm

Υποθέτουμε ότι:

- **a)** τα πιεζοηλεκτρικά επιθέματα (στρώσεις) τοποθετούνται με ακριβώς τις ίδιες πολικές διευθύνσεις και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως διεγέρτες και ως αισθητήρες.
- **b)** ισχύει γραμμική θεωρία πιεζοηλεκτρισμού.
- **c)** τα στρώματα των πιεζοηλεκτρικών στρώσεων είναι πολύ λεπτά σε σχέση με το πάχος της δοκού.
- **d)** Το πιεζοηλεκτρικό υλικό είναι ομοιογενές, εγκάρσια ισοτροπικό και ελαστικό

Ιδιότητες Υλικών:

		Δοκός	
	Μονάδες	Γραφίτης / Εποξικό T300/976	
Μέτρο Ελαστικότητηας Young	N/m^2	E	1,5e11
Πυκνότητα	Kg/m^3	ρ	1600
Λόγος Poisson		ν	0,29

Πιεζοηλεκτρικά
PZT-4d

ρ: πυκνότητα [Kg/m^3] : 7600

$\mathbf{c_E}$ **:** Πίνακας Ελαστικότητας. Ordering x,y,z,yz,xz,xy

1.53827e+011[Pa]	9.84558e+010[Pa]	9.31043e+010[Pa]	0[Pa]	0[Pa]	0[Pa]
9.84558e+010[Pa]	1.53827e+011[Pa]	9.31043e+010[Pa]	0[Pa]	0[Pa]	0[Pa]
9.31043e+010[Pa]	9.31043e+010[Pa]	1.28244e+011[Pa]	0[Pa]	0[Pa]	0[Pa]
0[Pa]	0[Pa]	0[Pa]	2.38095e+010[Pa]	0[Pa]	0[Pa]
0[Pa]	0[Pa]	0[Pa]	0[Pa]	2.38095e+010[Pa]	0[Pa]
0[Pa]	0[Pa]	0[Pa]	0[Pa]	0[Pa]	2.77008e+010[Pa]

e: Πίνακας σύζευξης (Coupling Matrix)

0[C/m^2]	0[C/m^2]	0[C/m^2]	0[C/m^2]	13.0952[C/m^2]	0[C/m^2]
0[C/m^2]	0[C/m^2]	0[C/m^2]	13.0952[C/m^2]	0[C/m^2]	0[C/m^2]
-4.7303[C/m^2]	-4.7303[C/m^2]	15.2586[C/m^2]	0[C/m^2]	0[C/m^2]	0[C/m^2]

$\boldsymbol{\varepsilon_{rS}}$: relative permittivity – σχετική διαπερατότητα

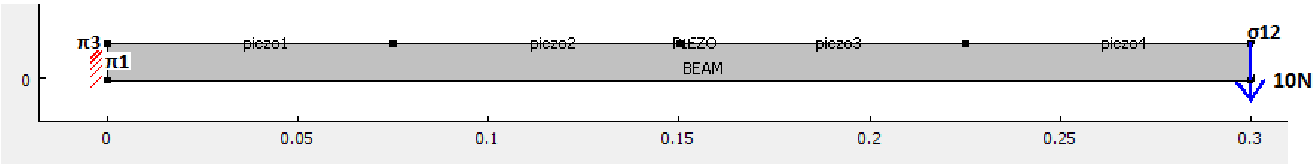
796.5	0	0
0	796.5	0
0	0	762.9

4.2.2 Συνοριακές Συνθήκες

Α) Εφαρμογή μηχανικής δύναμης.

Η πρόβολος είναι πακτωμένη στις πλευρές 1 και 3 ενώ στις υπόλοιπες πλευρές έχει πλήρη ελευθερία κινήσεων.

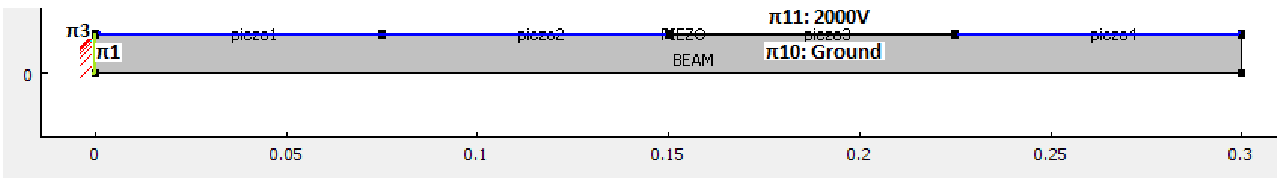
Στο σημείο 12 εφαρμόζουμε μια δύναμη ίση με 10Ν με διεύθυνση προς τον –y και οι ηλεκτρικές συνοριακές συνθήκες έχουν ορισθεί ως μηδενικής φόρτισης (Zero Charge / Symmetry). Πρακτικά **Zero Charge / symmetry** σημαίνει ότι το κάθετο διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης είναι μηδενικό. **n • D** = 0, δηλαδή δεν έχουμε επιβάλει σε κανένα όριο ηλεκτρικό φορτίο.



Β) Εφαρμογή ηλεκτρικού δυναμικού

Η πρόβολος είναι πακτωμένη στις πλευρές 1 και 3, ενώ στις υπόλοιπες πλευρές έχει πλήρη ελευθερία κινήσεων.

Στις απέναντι πλευρές 10 και 11 εφαρμόζουμε μια διαφορά δυναμικού 200 V, ενώ οι ηλεκτρικές συνοριακές συνθήκες σε όλες τις υπόλοιπες πλευρές έχουν ορισθεί ως μηδενικής φόρτισης (Zero Charge / Symmetry).



4.2.3 Διακριτοποίηση – Mesh Mode

Για τη διακριτοποίηση του μοντέλου χρησιμοποιούνται 2D τετραεδρικά στοιχεία Lagrange –Quadratic, COMSOL UG [150], Flaherty [151]

Τα στοιχεία διαθέτουν (3) τρεις εξαρτημένες μεταβλητές (u v V), μετακίνηση κατά x , μετακίνηση κατά y και ηλεκτρικό δυναμικό αντίστοιχα. Η προσέγγιση των εξαρτημένων μεταβλητών στους κόμβους γίνεται από πολυώνυμα με πεπερασμένο αριθμό παραμέτρων (τους βαθμούς ελευθερίας, DOF). Οι μεταβλητές που ορίζει το στοιχείο Lagrange όταν οι διαστάσεις του χώρου είναι ίδιες με τις διαστάσεις του στοιχείου είναι οι παραπάνω σύν τις πρώτες και δεύτερες παραγώγους αυτών.

Σε δισδιάστατα προβλήματα τα πολυώνυμα έχουν τη μορφή: $U(x,y)=\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j(x,y)$, όπου ϕ_j είναι οι συναρτήσεις βάσης (base function)*, c_j οι βαθμοί ελευθερίας και j ο αριθμός που δηλώνει το κόμβο. Με $\phi_j \neq 0$ μόνο στα στοιχεία που περιέχουν το κόμβο j.

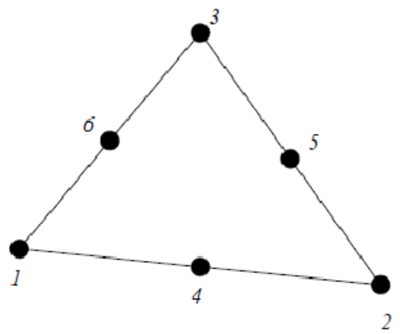
Τα στοιχεία Lagrange χαρακτηρίζονται από τη τάξη (k) που έχουν. Τα Quadratic είναι $2^{ης}$ τάξης, που πρακτικά σημαίνει ότι η πολυωνυμική προσέγγιση του κάθε στοιχείου θα είναι $2^{ου}$ βαθμού.

Για $2^{ης}$ τάξης στοιχεία ο αριθμός των κόμβων κάθε στοιχείου προσδιορίζεται από τη σχέση: $n_d=\left(\frac{(\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma+1)(\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma+2)}{2}\right)$, όπου για d=2, n_d=6.

Οι συναρτήσεις μορφής είναι όσες ακριβώς και ο αριθμός των κόμβων και δίδονται : $N_j(x,y)=\sum_{i=1}^{n_d} a_i q_i(x,y)=a^T q(x,y)$, όπου $q^T(x,y)=[1,x,y,x^2,xy,y^2,...,y^d]$

Οι συναρτήσεις βάσης (base functions) προέρχονται από το συνδυασμό των συναρτήσεων μορφής (shape functions) για γειτονικά στοιχεία. Περισσότερα στοιχεία Flaherty [152].

Κατά συνέπεια ένα στοιχείο Lagrange –Quadratic $2^{ης}$ τάξης έχει τη παρακάτω μορφή:

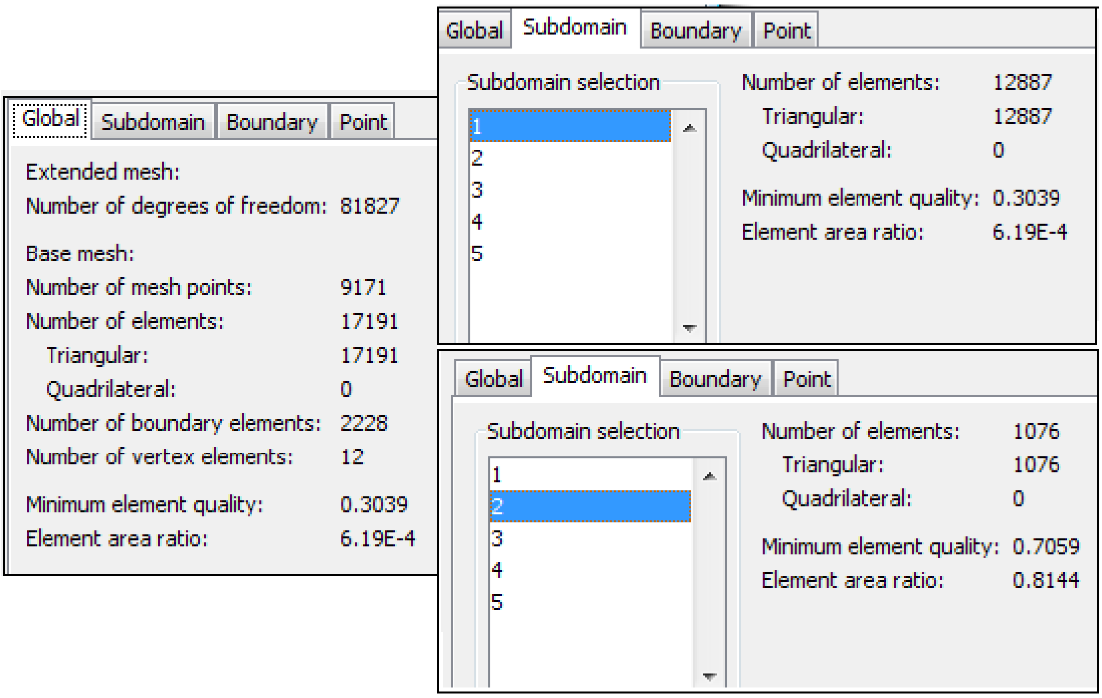


***Εικόνα 4.2.2**: Στοιχείο Lagrange-Quadratic $2^{ης}$ τάξης.*

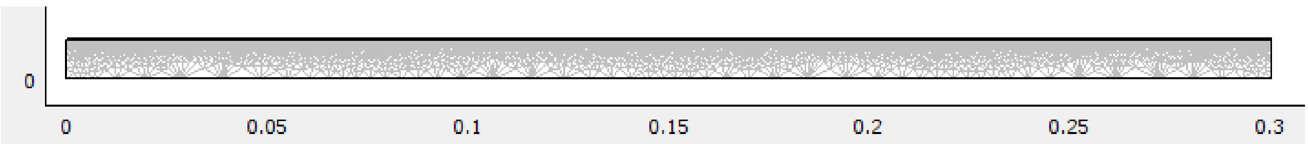
Δημιουργία πλέγματος διακριτοποίησης στο COMSOL

Το πλέγμα της διακριτοποίησης στο Comsol δημιουργείτε είτε με τις προεπιλογές του προγράμματος είτε με τρόπο που εισάγει ο χρήστης.

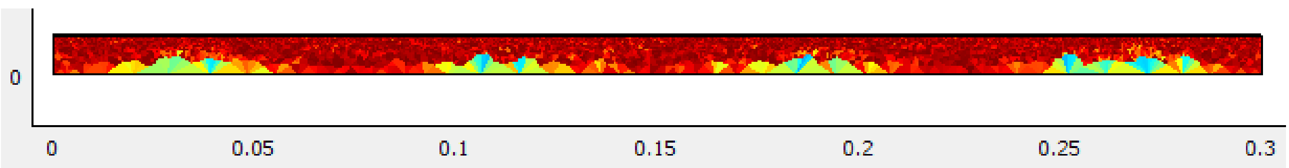
Η κατασκευή διακριτοποιείται σε 17.191 τριγωνικά στοιχεία και συνολικά ορίζονται 81.827 βαθμοί ελευθερίας (DOF). Σε κάθε κόμβο έχουμε 3 βαθμούς ελευθερίας. Το ηλεκτρικό δυναμικό: V, τη μετακίνηση κατά x: u και τη μετακίνηση κατά y :v



Εικόνα 4.2.3*: Στατιστικά Στοιχεία Διακριτοποίηση.*



Εικόνα 4.2.4*: Τριγωνικά στοιχεία διακριτοποίησης.*



Εικόνα 4.2.5*: Ποιότητα στοιχείων διακριτοποίησης.*

4.2.4 Επίλυση

Το COMSOL Multiphysics περιέχει ένα μεγάλο αριθμό από διαφορετικούς επιλύτες Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (PDE). Στο παρακάτω πίνακα φαίνονται επιγραμματικά, [150]:

Τύπος Επιλύτη	Χρήση
Stationary	Στατικά PDE προβλήματα (Γραμμικά ή μη).
Time-dependent	Χρονικώς εξαρτημένα PDE προβλήματα (Γραμμικά ή μη).
Eigenvalue	Για PDE προβλήματα ιδιοτιμών
Parametric	Για παραμετροποιημένα σετ στατικών PDE προβλημάτων.
Stationary segregated	Στατικά PDE multiphysics προβλήματα (Γραμμικά ή μη).
Parametric segregated	Για παραμετροποιημένα σετ στατικών PDE multiphysics προβλημάτων (Γραμμικά ή μη).
Adaptive	Για στατικά (γραμμικά ή μή) ή ιδιοτιμών PDE προβλήματα χρησιμοποιώντας προσαρμοστική διαμέριση πλέγματος (adaptive mesh refinement).

Το λογισμικό διαθέτει πληθώρα επιλογών, ωστόσο ο χρήστης δεν είναι απαραίτητο να επιλέξει μόνος του τον ειδικό επιλύτη που θα χρειαστεί για το πρόβλημά του. Στα περισσότερα προβλήματα αρκεί να επιλεγεί ο τύπος της επιθυμητής ανάλυσης, π.χ. στατική ανάλυση, ιδιομορφική κλπ, και το λογισμικό επιλέγει μόνο του.

Όσο αφορά τη γραμμικότητα η μη του προβλήματος το λογισμικό την ανιχνεύει από μόνο του.

Στη περίπτωση που κάποιος επιλύτης αργεί ή δε δουλεύει δοκιμάζουμε άλλους και ύστερα ελέγχουμε τον ορισμό του προβλήματος.

Επιλύτες Γραμμικών Συστημάτων	Χρήση
Άμεσοι Επιλύτες (Direct Solvers)	
Direct (UMFPACK)	Υψηλής απόδοσης για μη συμμετρικά συστήματα.
Direct (SPOOLES)	Υψηλής απόδοσης για συμμετρικά και μη συστήματα. Χρησιμοποιεί λιγότερη μνήμη από UMFPACK.

Direct (PARDISO)	Πολύ υψηλής απόδοσης για συμμετρικά και μη συστήματα. Συνήθως χρησιμοποιεί λιγότερη μνήμη από UMFPACK
Direct Cholesky (TAUCS)	Αποδοτικός επιλύτης για συμμετρικά θετικά ορισμένα συστήματα.
Επαναληπτικοί Επιλύτες (Iterative Solvers)	
GMRES	Για μη συμμετρικά προβλήματα.
FGMRES	Για μη συμμετρικά προβλήματα. Χειρίζεται περισσότερους προρυθμιστές (preconditioners), αλλά χρησιμοποιεί περισσότερη μνήμη από τον GMRES.
Conjugate gradients	Για συμμετρικά θετικά ορισμένα προβλήματα.
Geometric multigrid	Για ελληπτικά ή παραβολικά προβλήματα.

Για τα γραμμικά μοντέλα μίας, δύο και τριών διαστάσεων οι άμεσοι επιλύτες είναι ικανοποιητικοί συνήθως για συστήματα με βαθμούς ελευθερίας όχι περισσότερους από 100.000.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους επιλύτες του λογισμικού ο αναγνώστης παραπέμπεται στο COMSOL Multiphysics User's Guide [150].

Έχοντας επιλέξει στατική ανάλυση για το πρόβλημά μας, το COMSOL το αντιμετωπίζει ως γραμμικό, συμμετρικό ηλεκτροστατικό πρόβλημα. Ως αρχικό επιλύτη επιλέγει αυτόματα τον UMFPACK από τους Stationary και πετυχαίνει λύση αρκετά γρήγορα και με μεγάλη ακρίβεια, ενώ τα αποτελέσματα είναι φυσιολογικά.

Επιλέγοντας χειροκίνητα διαφορετικό κατάλληλο επιλύτη από τους stationary π.χ. τον SPOOLS, εξάγουμε την ίδια λύση και στον ίδιο χρόνο.

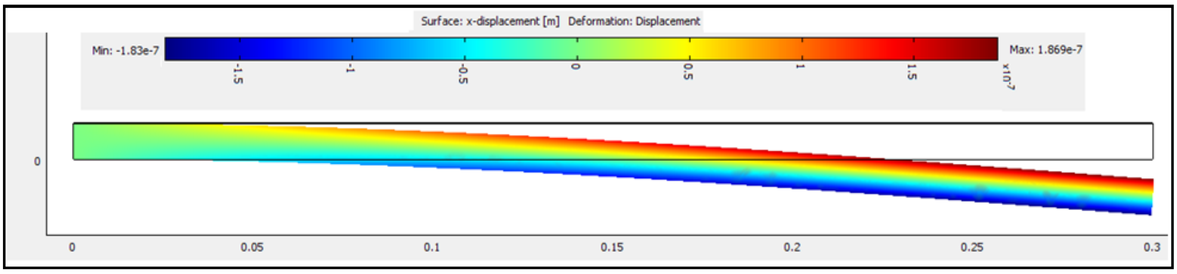
Επιλέγοντας όμως χειροκίνητα έναν Stationary Segregated επιλύτη που είναι καταλληλότερος για multiphysics προβλήματα και προσεγγίζει τη λύση με μια επαναληπτική διαδικασία εξάγουμε πιο ακριβή αποτελέσματα, σε μεγαλύτερο, όμως, υπολογιστικό χρόνο.

Χάριν ευκολίας και μικρής επιθυμίας για αποτελέσματα με μεγάλη ακρίβεια, επιλέγουμε να εργαστούμε με τη προεπιλογή του λογισμικού και τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε παρακάτω προέρχονται ύστερα από επίλυση με τον UMFPACK επιλύτη.

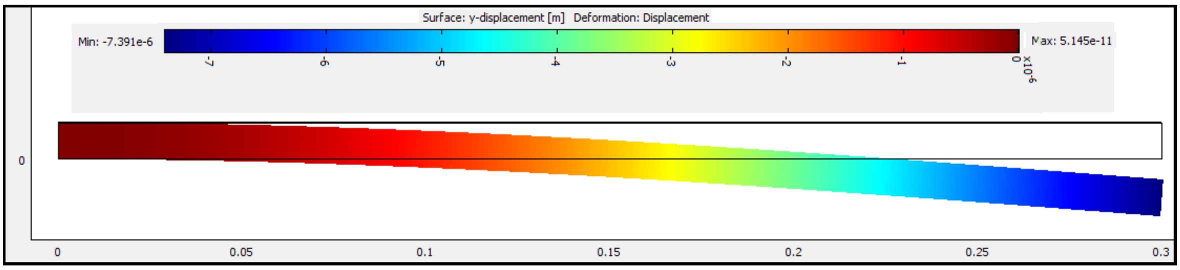
Παρακάτω παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα από τη μοντελοποίηση και επίλυση με COMSOL, της μελετώμενης πιεζοηλεκτρικής Unimorph προβόλου δοκού.

Α) *Αποτελέσματα Εφαρμογής Μηχανικής Δύναμης.*

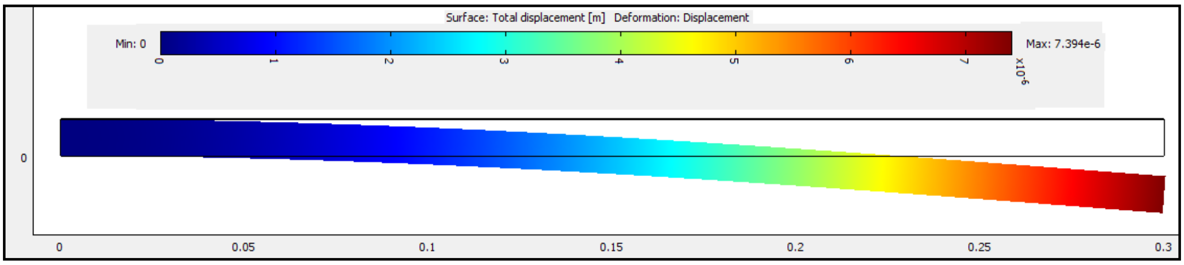
Έχοντας δημιουργήσει το μοντέλο στο λογισμικό εξάγουμε τα παρακάτω αποτελέσματα**:**



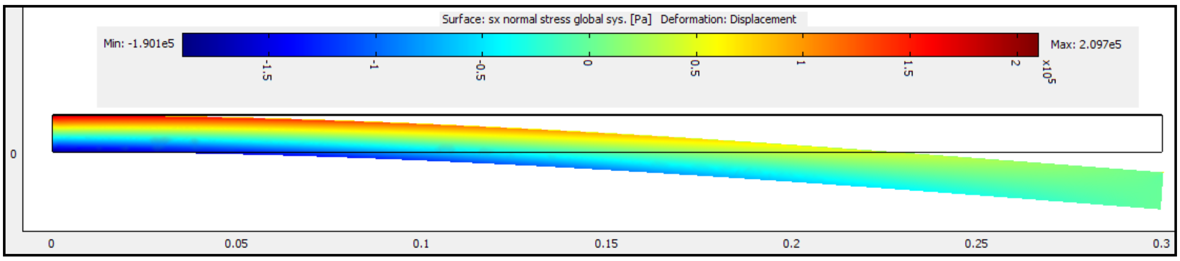
Εικόνα 4.2.6*: Μετατόπιση [m] κατά τον άξονα x*



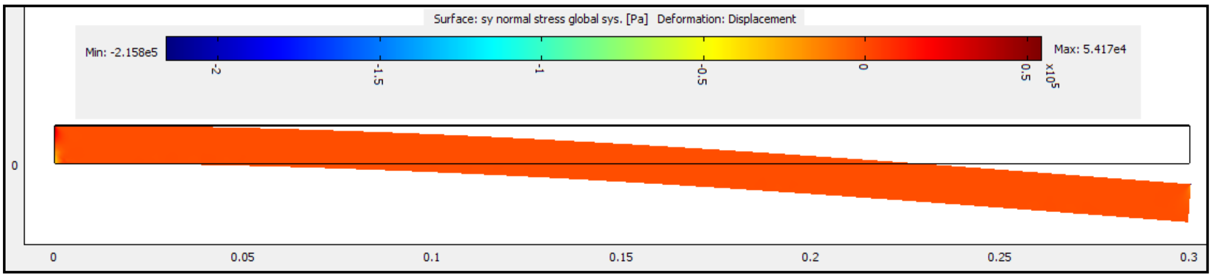
Εικόνα 4.2.7*: Μετατόπιση [m] κατά τον άξονα y*



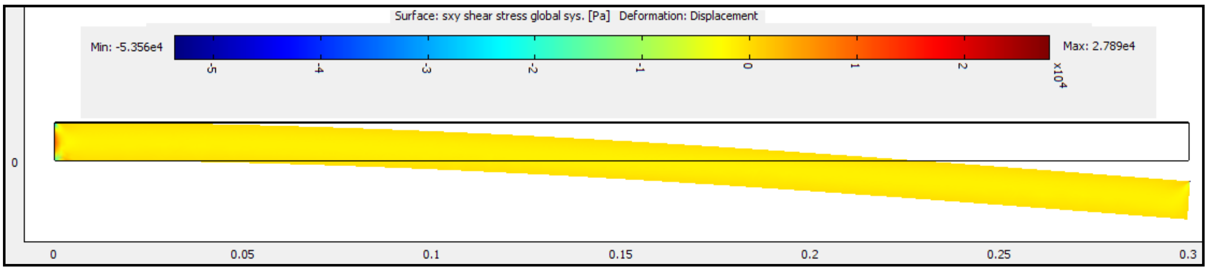
Εικόνα 4.2.8*: Συνολική Μετατόπιση [m]*



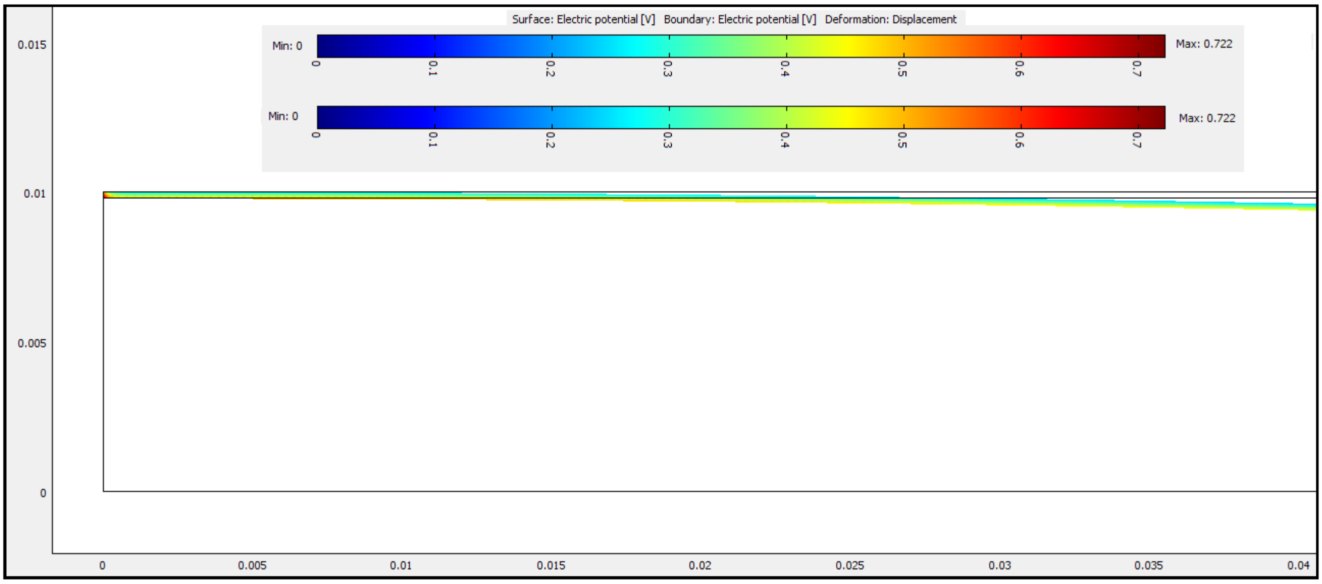
Εικόνα 4.2.9*: Δημιουργία ορθών τάσεων [Pa] κατά τον άξονα x*



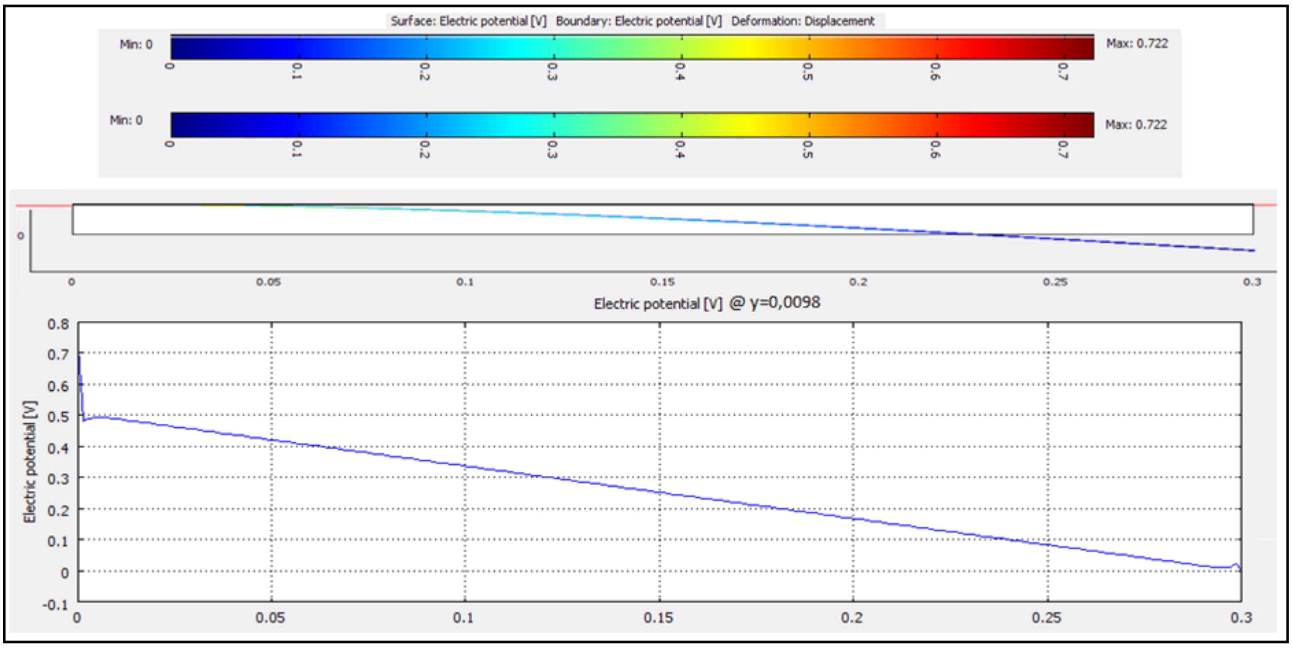
Εικόνα 4.2.10*: Δημιουργία ορθών τάσεων [Pa] κατά τον άξονα y.*



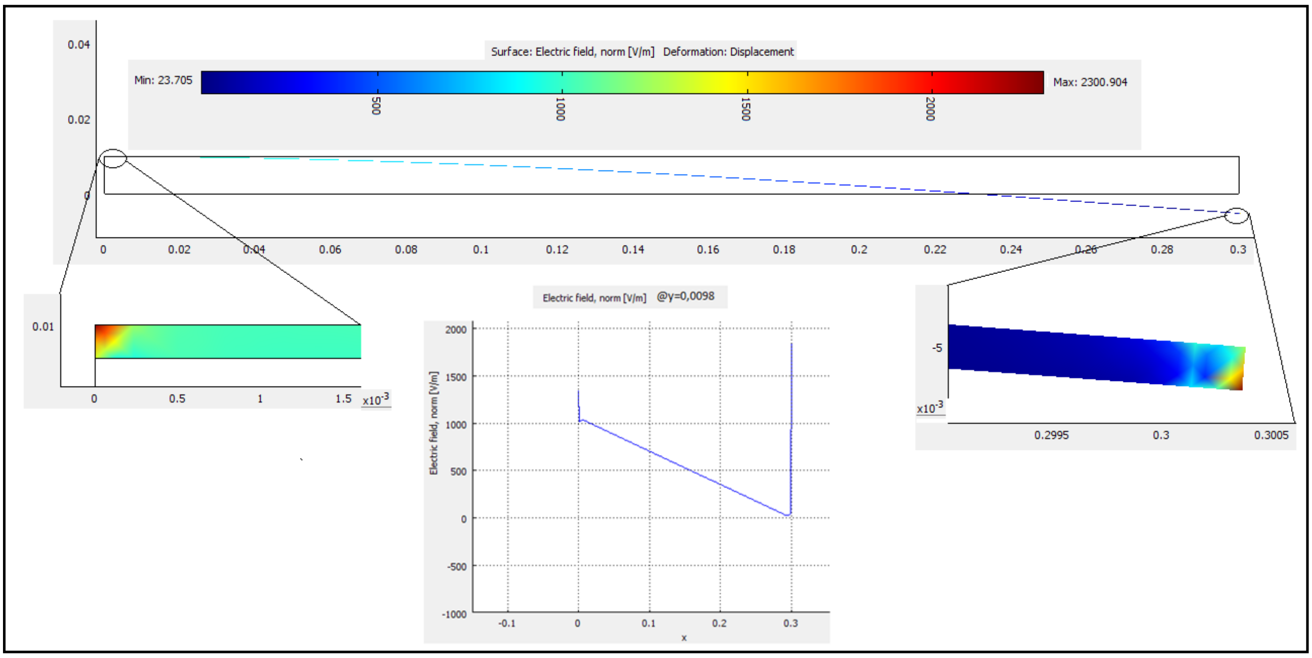
Εικόνα 4.2.11*: Δημιουργία διατμητικών τάσεων [Pa] κατά το επίπεδο xy.*



Εικόνα 4.2.12*: Ηλεκτρικό Δυναμικό [V] που εμφανίστηκε στο κομμάτι του πιεζοηλεκτρικού υλικού για x=0 έως x=0.04.*



Εικόνα 4.2.13: *Ηλεκτρικό Δυναμικό [V] που εμφανίστηκε σε όλη τη πιεζοηλεκτρική στρώση και μεταβολή του κατά τον x για y=0,0098*



Εικόνα 4.2.14: *Ηλεκτρικό πεδίο ($|E_\varphi|$ [V/m]) στη πιεζοηλεκτρική στρώση και $|E_\varphi|$ $\forall x$ και y=0,0098*

Ως ήταν αναμενόμενο από τη θεωρία μηχανικής και του πιεζοηλεκτρισμού, η εφαρμοζόμενη δύναμη στο άκρο της προβόλου κάμπτει τη δοκό με αποτέλεσμα τη δημιουργία ορθών τάσεων κυρίως κατά τον x-άξονα, εφελκυστικών στη πάνω πλευρά και θλιπτικών στη κάτω με τον ουδέτερο άξονα τον y=0,05. Το φαινόμενο παρατηρείται έντονα κυρίως κοντά στη πάκτωση ενώ όσο απομακρυνόμαστε προς το ελεύθερο άκρο (Ε.Α.) οι τάσεις τείνουν στο μηδέν, με τη διαφοροποίηση στα σημεία που βρίσκονται πολύ κοντά στην εφαρμοζόμενη δύναμη, όπου και εκεί παρατηρούνται τοπικές εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις. Το πιεζοηλεκτρικό στρώμα εμφανίζει διαφορετική τάση από το ελαστικό στρώμα για κάθε xi λόγω των διαφορετικών του ιδιοτήτων, όμως σε κάθε xi η τάση του είναι σταθερή.

Οι ορθές τάσεις κατά τον y-άξονα είναι μηδενικές ενώ αμελητέες είναι και οι διατμητικές κατά το xy επίπεδο.

Η παραμόρφωση της δοκού κατά x, κατά y και γενικώς απεικονίζεται με λεπτομέρεια στις εικόνες.

Επίσης παρατηρούμε ότι στο πιεζοηλεκτρικό στοιχείο αναπτύσσεται ηλεκτρικό δυναμικό που το μέγιστο για κάποιο yi συναντάται στο x=0 Και τείνει στο 0 καθώς πλησιάζουμε στο x=0,3 (Ε.Α.), ενώ κοντά στα σημεία εφαρμογής της δύναμη παρατηρούμε μια αρκετά μικρή αύξηση. Δηλαδή έχουμε μεγάλη ηλεκτρική τάση στα σημεία που αναπτύχθηκε μεγάλη μηχανική τάση. Μια άλλη παρατήρηση είναι η κατανομή της ηλεκτρικής τάσης (ηλεκτρικό δυναμικό) κατά μήκος του άξονα y, όπου βλέπουμε πως ελαφρώς μεγαλύτερες ηλ. τάσεις αναπτύσσονται στη κάτω πλευρά του πιεζοηλεκτρικού, ίσως λόγω συνθηκών ένωσης του πιεζοηλκετρικού με το στρώμα του ελαστικού.

Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα είναι φυσιολογικά και αναμενόμενα.

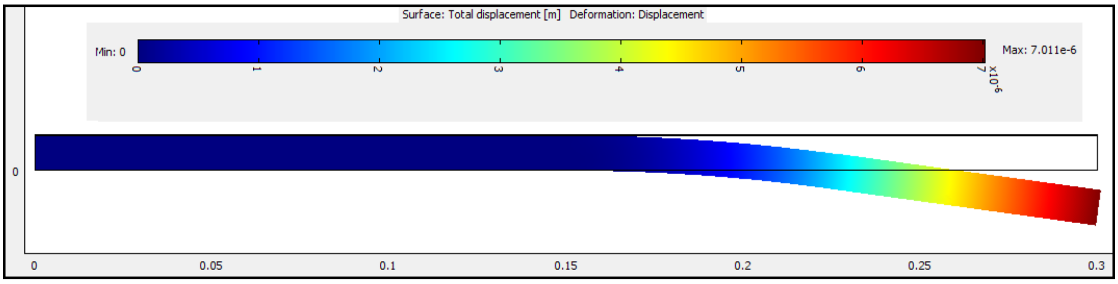
__Β__) Αποτελέσματα Εφαρμογής Ηλεκτρικού Δυναμικού.

Για να υπάρχει μια κοινή εικόνα για τις δύο περιπτώσεις φόρτισης, επιλέγουμε να φορτίσουμε τη κατασκευή μας με 200V ηλεκτρικό δυναμικό ώστε η συνολική παραμόρφωση να είναι σχεδόν ίδια με αυτή της προηγούμενης παραγράφου.

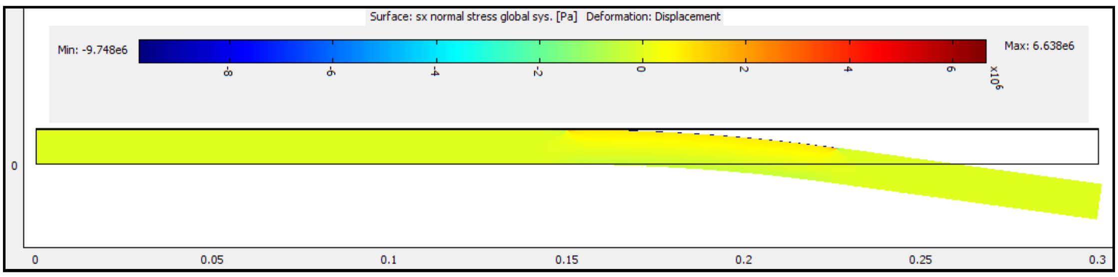
Για την εφαρμογή της ηλεκτρικής τάσης στη πιεζοηλεκτρική Unimorph πρόβολο δοκό ενεργούμε σε κατάσταση 31 και μπορούμε να υποθέσουμε πολύ λεπτά ηλεκτρόδια στο πάνω και κάτω μέρος της πιεζοηλεκτρικής στρώσης. Στην ουσία τα ηλεκτρόδια είναι τόσο λεπτά που μπορούμε στη μοντελοποίηση να τα αγνοήσουμε και να εφαρμόσουμε τη διαφορά δυναμικού κατευθείαν στις πλευρές του πιεζοηλεκτρικού υλικού.

Έχουμε χωρίσει τη δοκό σε 4 ίσα μέρη ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε την ηλεκτρική τάση σε ολόκληρη τη δοκό ή σε μέρη αυτής. Στη παρούσα επίλυση εφαρμόσαμε τη τάση μεταξύ του x=0,15 και x=0,225 της δοκού δηλαδή στο 3^{o} μέρος της. Μελλοντική δουλειά μπορεί να αποτελέσει η βελτιστοποίηση της επιλογής για την εφαρμογή της τάσης ώστε να ελαχιστοποιείται κάποια σύνθετη συνάρτηση.

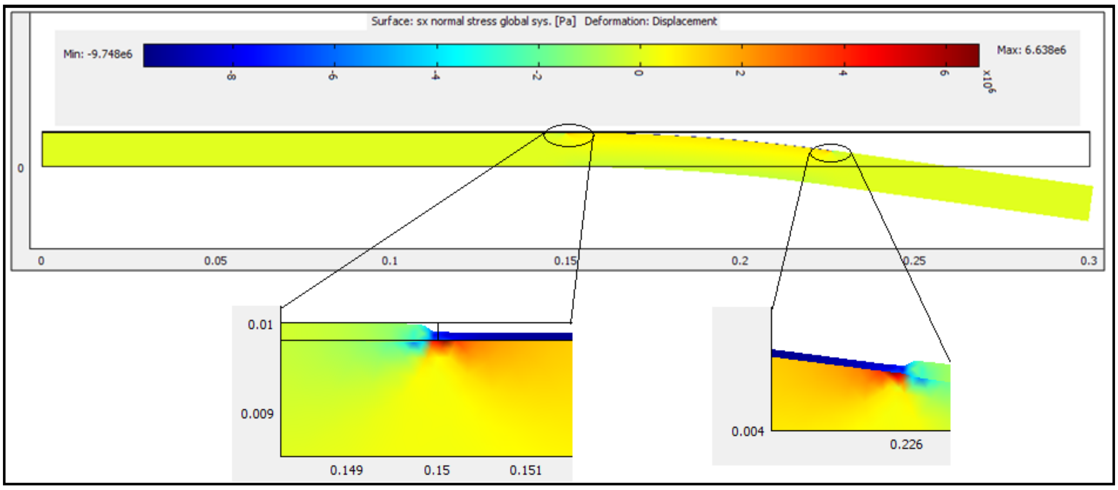
Παρακάτω παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της επίλυσης:



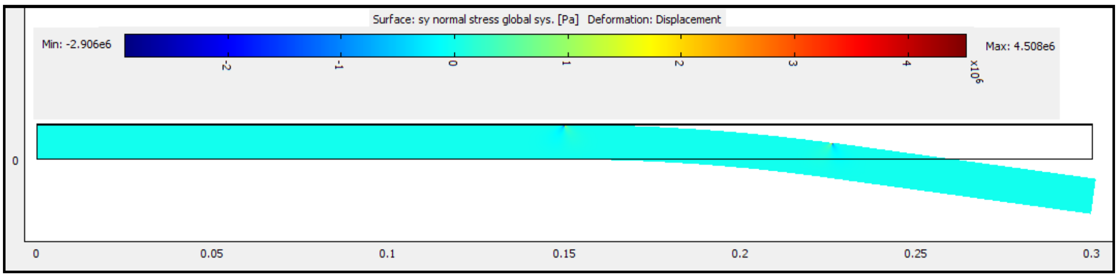
***Εικόνα 4.2.17**: Συνολική Μετατόπιση [m]*



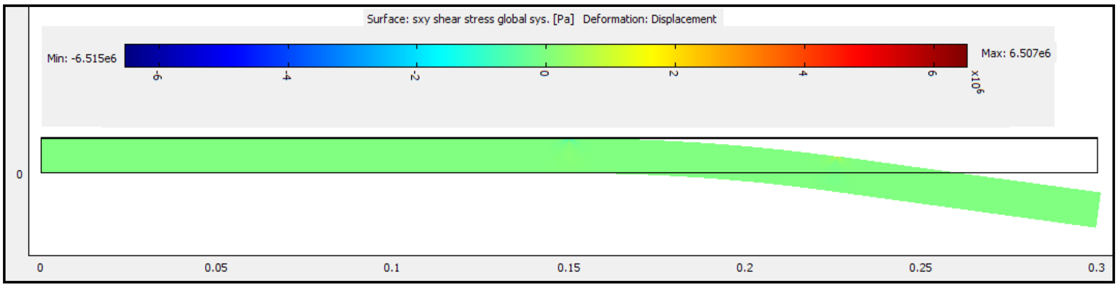
***Εικόνα 4.2.18**: Δημιουργία ορθών τάσεων [Pa] κατά τον άξονα x*



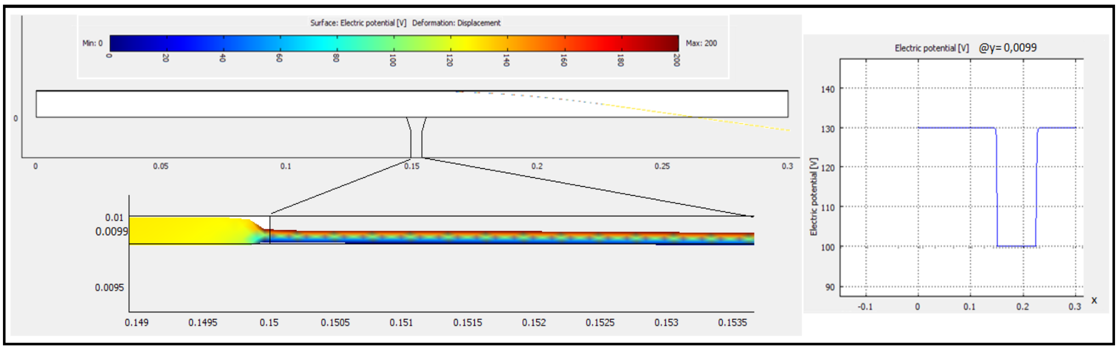
Εικόνα 4.2.19*: Απεικόνιση ορθών τάσεων κατά x κοντά στα σημεία x=0,15 και x=0,225*



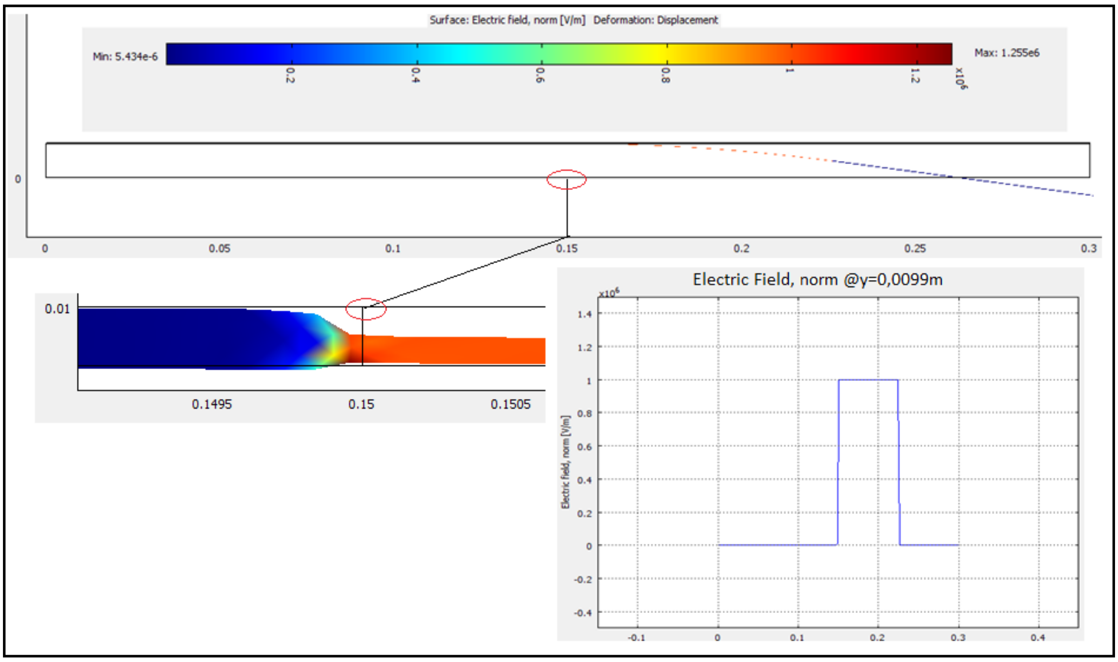
Εικόνα 4.2.20*: Δημιουργία ορθών τάσεων [Pa] κατά τον άξονα y.*



Εικόνα 4.2.21*: Δημιουργία διατμητικών τάσεων [Pa] κατά το επίπεδο xy.*



Εικόνα 4.2.22: *Ηλεκτρικό Δυναμικό [V]στη πιεζοηλεκτρική στρώση.*



Εικόνα 4.2.23: *Ηλεκτρικό πεδίο ($|E_φ|$ [V/m]) στη πιεζοηλεκτρική στρώση.*

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα των παραμορφώσεων επιβεβαιώνουμε τη διαίσθησή μας ότι η παραμόρφωση αρχίζει εκεί ακριβώς που αρχίζει και η εφαρμογή της ηλεκτρικής τάσης, δηλαδή από το σημείο x=0,15 έως το πέρας της δοκού. Το τμήμα από x=0 έως x=0,15 παραμένει ανέπαφο.

Λόγω της πολικότητας και της ηλεκτρικής τάσης που δημιουργήσαμε η δοκός κάμπτεται προς τον –y, όπως ακριβώς επιβάλει και ένα φορτίο δύναμης όπως προηγουμένως. Αν επίσης παρατηρήσουμε τη γενική παραμόρφωση διαπιστώνουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση δίνει περίπου όμοια αποτελέσματα μέγιστης μετατόπισης όπως έδωσε και στη προηγούμενη παράγραφο η στατική δύναμη που εφαρμόσαμε.

Παρατηρώντας τις τάσεις στο ελαστικό στρώμα, διαπιστώνουμε ότι εκτός ορισμένων εφελκυστικών και θλιπτικών κατά x που εμφανίζονται κοντά στα σημεία εφαρμογής ηλεκτρικής τάσης οι άλλες μηδενίζονται.

Το πιεζοηλεκτρικό στρώμα είναι σε μόνιμη θλιπτική τάση σε όλο το μήκος του τμήματος που έχουμε εφαρμόσει την ηλεκτρική τάση, ενώ στα υπόλοιπα 3 κομμάτια οι τάσεις μηδενίζονται.

Εκτός της ηλεκτρικής τάσης που εφαρμόσαμε εμείς στο 3^o τμήμα της πιεζοηλεκτρικής στρώσης και έχει τη μορφή που δώσαμε, στο υπόλοιπο μέρος της πιεζοηλεκτρικής στρώσης υπάρχει μια σταθερή τιμή ηλεκτρικής τάσης ίση με 130V.

Τέλος το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείτε έχει σταθερή τιμή ίση με $1x10^6$[V/m] σε όλο το μήκος του 3^o τμήματος της πιεζοηλεκτρικής στρώσης, ενώ κοντά στα σημεία x=0,15 και x=0,225 έχουμε διάφορες μικροαλλαγές ηλεκτρικού πεδίου, σχεδόν ομοιόμορφης κατανομής, προτού μεταφερθούμε στη περιοχή με μηδενικό.

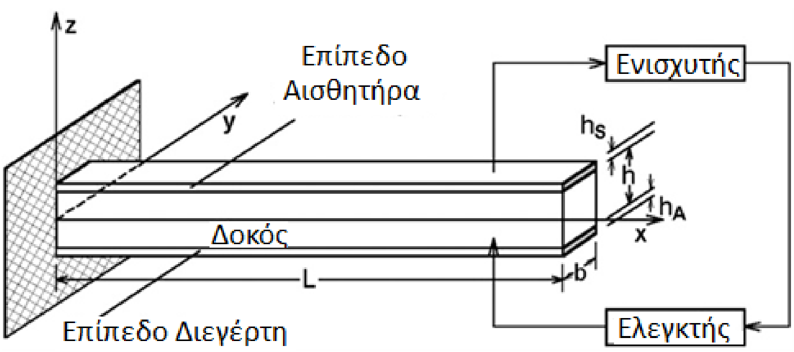
4.3 Έλεγχος Ταλάντωσης Ευφυούς κατασκευής στο Matlab-Simulink

Εφόσον μοντελοποιήσουμε μια έξυπνη κατασκευή σε κάποιο λογισμικό και μας δοθεί η δυνατότητα να εξάγουμε τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας ή τα μητρώα χώρου κατάστασης της κατασκευής, μπορούμε να συνδέσουμε τα αποτελέσματα αυτά με το υπολογιστικό πακέτο Matlab - Simulink για τον έλεγχο της απόκρισης της κατασκευής, όπως επίσης και για τη βελτιστοποίηση του ελέγχου ή της γεωμετρίας της κατασκευής ως προς κατάλληλο κριτήριο. Φυσικά το πόσο γρήγορη θα είναι η διαδικασία σύνδεσης και επίλυσης εξαρτάται κυρίως από το μέγεθος αυτών των μητρώων, δηλαδή, εξαρτάται κυρίως από το συνολικό πλήθος των βαθμών ελευθερίας.

Για περισσότερες εφαρμογές του πιεζοηλεκτρισμού σε προβλήματα ελέγχου, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη βιβλιογραφία Irschik [153].

Στην έξυπνη δοκό του παρακάτω σχήματος, οι διεγέρτες και οι αισθητήρες ελέγχου είναι πιεζοηλεκτρικά επιθέματα (στρώσεις), τοποθετημένα συμμετρικά στην άνω και στην κάτω επιφάνεια της δοκού. Οι πιεζοηλεκτρικές στρώσεις τοποθετούνται με τις ίδιες ακριβώς πολικές διευθύνσεις και μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε ως αισθητήρες είτε ως διεγέρτες.

Για την ανάλυση του συστήματος υιοθετείται η Timosenko θεωρία δοκού και η γραμμική θεωρία πιεζοηλεκτρισμού. Επιπρόσθετα, θεωρείται ότι η κίνηση είναι οιονεί στατική, δηλαδή τα μηχανικά και τα ηλεκτρικά φορτία εξισορροπούνται σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή και η αριθμητική λύση βασίζεται στην ανάπτυξη πεπερασμένων στοιχείων ταχείας σύγκλισης (superconvergent finite elements) χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση της θεωρία του Timoshenko και της αρχής του Hamilton. Η διατριβή στηρίχθηκε στις δουλειές των Aldraihem [43], Foutsitzi et al. [15], Stavroulakis et al. [223], Tairidis et al. [224], Marinaki [226], Hadjigeorgiou [228].



Εικόνα 4.3.1: Δοκός με πιεζοηλεκτρικά επιθέματα διεγέρτη και αισθητήρα. [224]

Με $L=0,8m$, $A=0,002x0,002m^2$, $E=73x10^9\ N/m^2$, $G=40x10^9\ N/m^2$, $\rho=2700Kg/m^3$

Οι γραμμικές εξισώσεις του πιεζοηλεκτρισμού που περιγράφουν το σύστημά μας είναι:

$T = c_E \cdot S - e^t \cdot E \quad (\delta\iota\varepsilon\gamma\acute{\varepsilon}\rho\tau\eta)$ $D = e \cdot S + \varepsilon_s \cdot E \quad (\alpha\iota\sigma\theta\eta\tau\acute{\eta}\rho\alpha)$	IEEE Ultrasonics [101]

Χάριν ευκολίας, συμφωνίας με τη σημειογραφία κλασικής μηχανικής και βάση των σχέσεων πιεζοηλεκτρικών σταθερών, [104] (βλ. κεφ.2.4.5), οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται:

$$\begin{aligned}\{\sigma\} &= [Q](\{\varepsilon\} - [d]^T\{E\}) \\ \{D\} &= [d][Q]\{\varepsilon\} + [\xi]\{E\}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}&\begin{Bmatrix}\sigma_x \\ \tau_{xz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{55}\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} - \begin{bmatrix}d_{31} \\ 0\end{bmatrix}E_z\right) \\ &\{D\} = d_{31}Q_{11}\varepsilon_x + \xi_{33}E_z\end{aligned}$$

Όπως στο Tairidis [224] που είναι το μοντέλο αναφοράς και όπως Hadjigeorgiou [228] και Μουτσοπούλου [195].

Το $\{\sigma\}_{6x1}$ είναι το διάνυσμα τάσεων (T), το $\{\varepsilon\}_{6x1}$ είναι το διάνυσμα παραμορφώσεων (S), το $\{D\}_{3x1}$ είναι το διάνυσμα ηλεκτρικών μετατοπίσεων, $\{E\}_{3x1}$ είναι το διάνυσμα ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του πιεζοηλεκτρικού επιθέματος, ο $[Q]_{6x6}$ είναι ο πίνακας ελαστικής δυσκαμψίας, ο $[d]_{3x6}$ είναι ο πίνακας πιεζοηλεκτρικής σταθεράς και ο $[\xi]_{3x3}$ είναι ο πίνακας διηλεκτρικής σταθεράς.

Η παραπάνω συνεπαγωγή προέρχεται από τις υποθέσεις:

1) Τα στρώματα του αισθητήρα και του διεγέρτη είναι πολύ λεπτά σε σχέση με το πάχος της δοκού.
2) Η κατεύθυνση των πόλων του αισθητήρα και του διεγέρτη είναι η κατεύθυνση του πάχους της δοκού (άξονας z), οπότε λαμβάνουμε υπόψη μόνο τη D_z.
3) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομοιόμορφο και ομοαξονικό στη κατεύθυνση x.
4) Το πιεζοηλεκτρικό υλικό είναι ομοιογενές, εγκάρσια ισοτροπικό και ελαστικό.
5) Κατά πλάτος -y- της δοκού έχουμε μηδενική φόρτιση και το πρόβλημα είναι επίπεδης εντατικής κατάστασης, οπότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\sigma_{yy}= \sigma_{yz}= \sigma_{xy}= \sigma_{yz}= \sigma_{xy}=0$ και $\varepsilon_{yy}\neq0$.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου δίδεται: $E_z = \dfrac{V}{h_A}$, όπου V η τάση που εφαρμόζεται κατά μήκος της διεύθυνσης του πάχους του διεγέρτη και h_A το πάχος του στρώματος του **διεγέρτη**. Ενώ λαμβάνουμε υπόψη τη κατάσταση φόρτισης 31 (βλ. 2.4.6) και υποθέτουμε όλα τα άλλα στοιχεία του Ηλ.Πεδίου με μηδέν ενώ αγνοούμε και τους συντελεστές d_{15} και ε_{11}

Στο επίθεμα του αισθητήρα δρούν μόνο οι εντάσεις της δοκού. Δεν εφαρμόζουμε ηλεκτρικό πεδίο. Έτσι η εξωτερική φόρτιση (q [C]) από τον αισθητήρα υπολογίζεται:

$$q=\iint\left[D_1 D_2 D_3\right]\begin{bmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{bmatrix}=\ldots=\frac{1}{2}\left\{\left(\int_{A_{ef}} D_z dA_3\right)_{z=h/2}+\left(\int_{A_{ef}} D_z dA_3\right)_{z=h/2+hs}\right\}$$

Με A_{ef} να είναι η ενεργός επιφάνεια του ηλεκτροδίου στο στρώμα του αισθητήρα.

Η αναπτυσσόμενη ένταση ρεύματος στην επιφάνεια του αισθητήρα δίδεται: i(t) = dq(t) / dt , η οποία μετατρέπεται σε τάση αισθητήρα ανοιχτού κυκλώματος σύμφωνα με $V^S = G_S\, i(t)$, όπου G_S το κέρδος του ενισχυτή.

Επίσης, υποθέτουμε ότι η ροπή κάμψης και οι αξονικές δονήσεις του κεντρικού άξονα της δοκού είναι αμελητέες καθώς και ότι τα στοιχεία του πεδίου μετακινήσεων {u} της δοκού βασίζονται στη θεωρία του Timoshenko. Σύμφωνα με την θεωρία αυτή, οι αξονικές μετακινήσεις είναι ανάλογες του z και οι περιστροφές ψ(x,t) είναι ανάλογες του εμβαδού διατομής της δοκού στον θετικό y-ημιάξονα. Επιπλέον, οι κάθετες μετακινήσεις είναι ίσες με τις κάθετες μετακινήσεις w(x,t) στο σημείο όπου y = z = 0.

Η σχέση μεταξύ της έντασης και των μετακινήσεων δίδεται ως:

$$\varepsilon_x = z\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad ,\varepsilon_{xz}=\psi+\frac{\partial w}{\partial x}$$

Η κινητική ενέργεια όλης της δοκού δίδεται ως:

$$T=\frac{1}{2}\int_{Vol.}\rho\{\dot{u}\}^T\{\dot{u}\}dVol=\frac{b}{2}\int_0^L\int_{-\frac{h}{2}-h_A}^{\frac{h}{2}+h_S}\rho[(z\dot{\psi})^2+\dot{w}^2]dzdx$$

Η δυναμική ενέργεια του απλοποιημένου συστήματος (υποθέτοντας ότι η πυκνότητα της δοκού είναι παντού ίδια) δίδεται ως:

$$U=\frac{1}{2}\int_{Vol.}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dVol=\frac{b}{2}\int_0^L\int_{-\frac{h}{2}-h_A}^{\frac{h}{2}+h_S}\left[Q_{11}\left(z\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+Q_{55}\left(\psi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dzdx$$

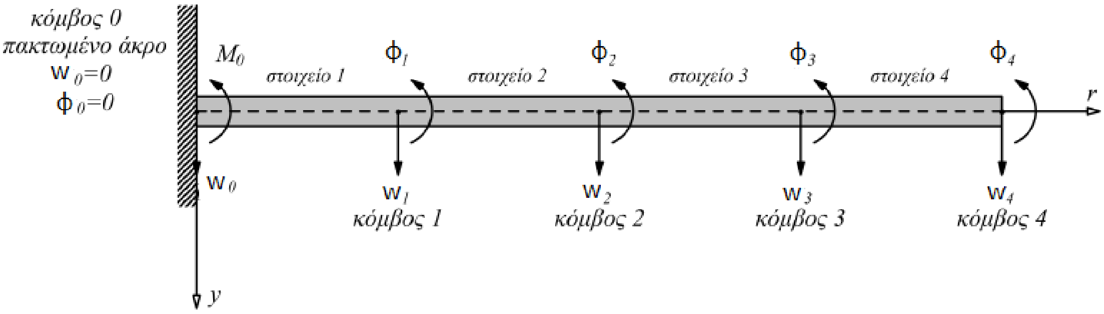
Αν η μοναδική φόρτιση είναι οι ροπές που αναπτύσσονται από το πιεζοηλεκτρικό διεγέρτη η πρώτης τάξης μεταβολή του έργου είναι:

$$\delta W=b\int_0^L M^A\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx$$

Η ροπή ανά μονάδα μήκους που επιβάλλεται από το διεγέρτη είναι:

$$M^A = \int_{-\frac{h}{2}-h_A}^{-\frac{h}{2}} z\sigma_x^A dz = \int_{-\frac{h}{2}-h_A}^{-\frac{h}{2}} zQ_{11}d_{31}E_z^A dz, \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad E_z^A = \frac{V_A}{h_A}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή του Hamilton εξάγονται οι βασικές εξισώσεις κίνησης της δοκού. Για την διακριτοποίηση της δοκού χρησιμοποιήθηκαν πεπερασμένα στοιχεία δύο βαθμών ελευθερίας ανά κόμβο, ενώ γενικά δημιουργήθηκαν 5 κόμβοι με το πρώτο κόμβο να είναι περιορισμένος σε πάκτωση. Οι βαθμοί ελευθερίας κάθε κόμβου είναι η κάθετη παραμόρφωση w_i και η στροφή ψ_i. Τα μεγέθη αυτά συνθέτουν το ολικό διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας (DOF) $X_i=[w_i\ \psi_i]^T$, [226] .



$$M\ddot{X} + \Lambda\dot{X} + \mathrm{K}X = F_m + F_e$$

, όπου όπως αναλύεται στο κεφάλαιο 3.6, τα **M, K** είναι τα γενικευμένα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας, $\mathbf{F_e}$ το γενικευμένο διάνυσμα δύναμης ελέγχου που παράγεται από την ηλεκτρομηχανική σύζευξη του πιεζοηλεκτρισμού, ηλεκτρομηχανικών δυνάμεων, $\mathbf{F_m}$ το γενικευμένο διάνυσμα εξωτερικών φορτίσεων και **Λ** ο γενικευμένος πίνακας απόσβεσης.

Στόχος μας είναι να μελετήσουμε και να ελέγξουμε την απόκριση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Για το λόγο αυτό μετατρέπουμε τις εξισώσεις κίνησης σε διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού που περιγράφουν τη μορφή κατάσταση χώρου (State Space) :

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \ \text{ με } \ x = [X \quad \dot{X}]^T, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}\Lambda \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}F_m \end{bmatrix} \ \kappa\alpha\iota \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}F_e \end{bmatrix}$$

Έχοντας το σύστημα στη συγκεκριμένη μορφή, μέσω του υπολογιστικού πακέτου Matlab-Simulink ελέγχουμε την απόκριση του συστήματος και γίνεται προσπάθεια καταστολής των ταλαντώσεων μέσω μοντέλων κλασικού και ευφυούς ελέγχου που μοντελοποιήθηκαν στο Simulink. Σκοπός μας είναι ο προσδιορισμός του διανύσματος ενεργών δυνάμεων ελέγχου u(t) υπό κάποια κριτήρια ώστε να μειωθούν οι εξωτερικές διεγέρσεις

Οι ελεγκτές που σχεδιάσαμε και συγκρίναμε τη λειτουργία τους είναι ο PID, ο LQR, ο ασαφούς λογικής - FUZZY και ο νευροασαφής - ANFIS.

Ο κάθε ελεγκτής δέχεται διαφορετικό αριθμό εισόδων, δηλαδή μετρήσεις της κατάστασης του συστήματος **y**.

Οι μετρήσεις του συστήματος δίδονται από τη σχέση: $y = Cx$, όπου ο πίνακας C έχει στοιχεία 0 και 1 ανάλογα με τις καταστάσεις που ενδιαφέρει να μετρηθούν. Για παράδειγμα ο LQR είναι ελεγκτής που χρειάζεται πλήρη ανατροφοδότηση κατάστασης οπότε ο **C** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων όσο και το **x** με μονάδες στα στοιχεία της διαγωνίου.

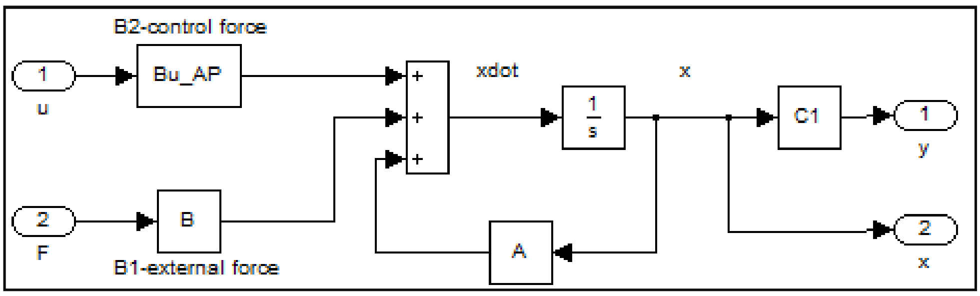
Παρακάτω αναλύουμε τις παραμέτρους των ελεγκτών που μοντελοποιήσαμε και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα που είχαν στη καταστολή της απόκρισης του συστήματος σε βηματική είσοδο.

Άμεση μελλοντική δουλειά μπορεί να αποτελέσει η βελτιστοποίηση των παραμέτρων και των κανόνων των ευφυών ελεγκτών μέσω ευρετικών αλγορίθμων.

Οι παράμετροι των εισόδων που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

Γενικές Παράμετροι:	***Παράμετροι Βηματικής Εισόδου:***
Χρόνος Προσομοίωσης: 0 -> 3 sec *Βήμα χρονικής μεταβολής*: Μεταβαλλόμενο *Επιλύτης Simulink:* ode 23tb (stiff/TR-BDF 2)	$x = \begin{cases} 0, & t \in [0,1) \\ 10, & t \in [1,3] \end{cases}$

Πίνακας 4.3.1: Πίνακας παραμέτρων επίλυσης και εισόδων.



Εικόνα 4.3.2: *State Space Μοντέλο Δοκού.*

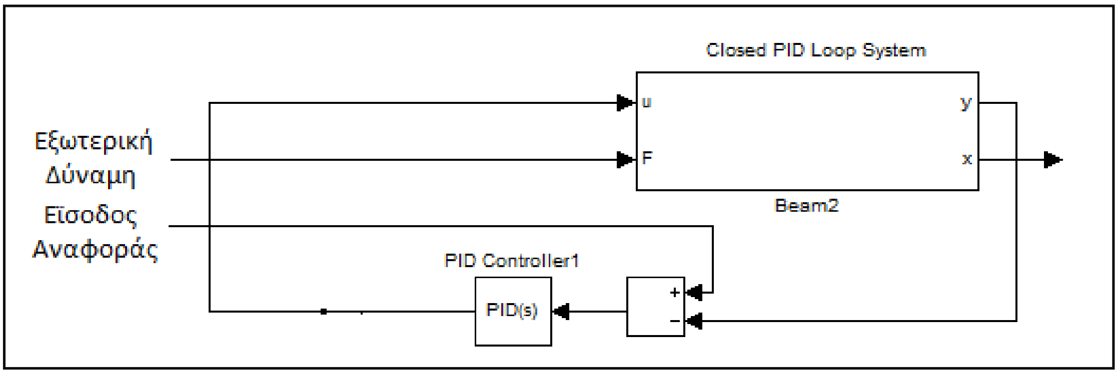
Οι πίνακες A,B,C,D δίδονται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε και έχουν εξαχθεί από τη μοντελοποίηση της δοκού στο Matlab βάση των Tairidis [224] και Μουτσοπούλου [195], ενώ μπορούν να εξαχθούν και με υπολογιστικά πακέτα όπως το ANSYS, το Comsol Multiphysics κ.ά.

4.3.1 PID Ελεγκτής

Οι παράμετροι του PID ελεγκτή για τη κατασκευή μας παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα και προέκυψαν βάση εμπειρίας μέσω σχεδιασμού με το πακέτο PIDTUNE.

Παράμετροι PID	
Αναλογικός:	2428122.10358166
Ολοκληρωτικός:	121976746.691577
Διαφορικός:	-6000.07232575767
Συντελεστής φίλτρου:	241.55099215257

Ο PID τροφοδοτείται με μοναδική είσοδο τη μετατόπιση του κόμβου 4 και ως έξοδο έχουμε τη δύναμη ελέγχου εκφρασμένη σε τάση. Λόγω του πίνακα ελέγχου B2 που χρησιμοποιούμε επιβάλουμε στον ελεγκτή να υπολογίσει μια δύναμη ελέγχου δεδομένου ότι ενεργοποιούνται και οι 4 διεγέρτες.



Εικόνα 4.3.3: Δομικό Διάγραμμα κλειστού βρόγχου με ανατροφοδότηση μέτρησης.

4.3.2 LQR Ελεγκτής

Η εφαρμογή του LQR όπως προαναφέραμε προϋποθέτει πλήρη γνώση του συνόλου του διανύσματος κατάστασης κάθε χρονική στιγμή.

Για το σχεδιασμό του LQR θα πρέπει να προσδιοριστούν οι ελεύθερες παράμετροι Q και R που αναπαριστούν τα βάρη που υπεισέρχονται στις διαφορετικές καταστάσεις και στον έλεγχο. Αυτές είναι επιλογή του σχεδιαστή και βάση εμπειρίας και μέσω της μεθόδου δοκιμής και σφάλματος καταλήξαμε ότι εξάγουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα με χρήση των:

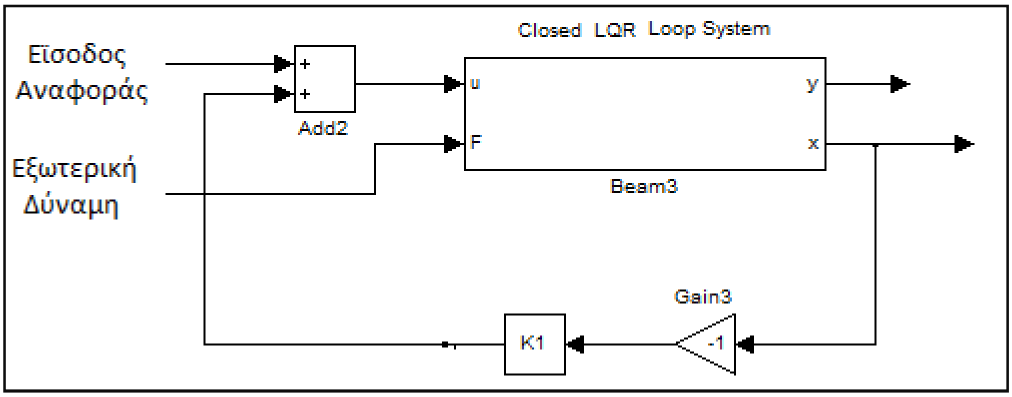
$$\sqrt{q_i} = \frac{1}{\max(x_i)}, i = 1, 2, \ldots \quad = \quad 100.000$$

$$\sqrt{r_i} = \frac{1}{\max(u_i)}, i = 1, 2, \ldots \quad = \quad 0,0001$$

Οπότε: Q = 100.000 *I_{16x16} και R = 0,0001*I_{4x4} που μας δίνουν το κέρδος του ελεγκτή (K) μέσω χρήσης της MATLAB ως:

>> [K,S,E] = LQR (A,B,Q,R)

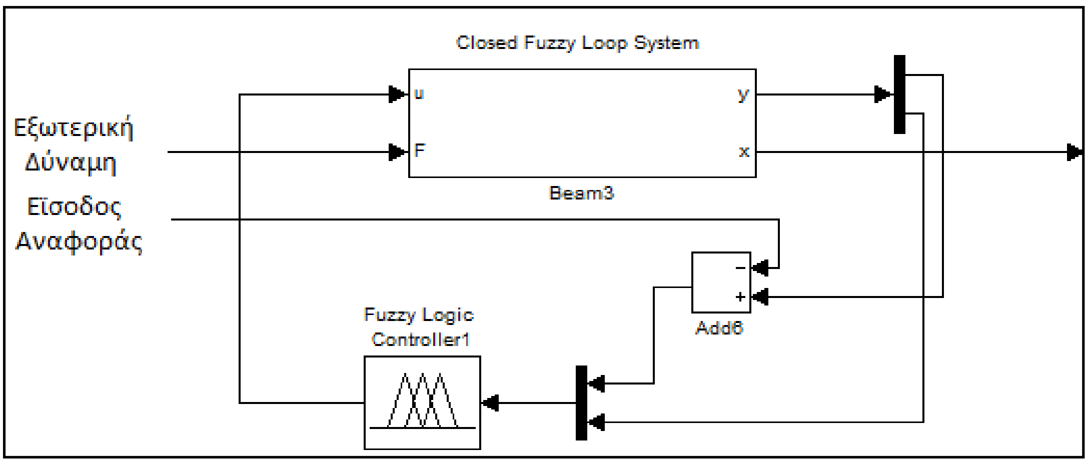
όπου S η λύση της εξίσωσης Riccati για το ισοδύναμο μοντέλο χώρου κατάστασης: $\frac{dx}{dt} = E^{-1}Ax + E^{-1}Bu$ και E η ιδιοτιμή του κλειστού συστήματος ανατροφοδότησης E=EIG(A-B*K) .



Εικόνα 4.3.4: Δομικό Διάγραμμα κλειστού βρόγχου με ανατροφοδότηση κατάστασης.

4.3.3 Ελεγκτής Ασαφούς Συμπερασμού (Fuzzy Controller)

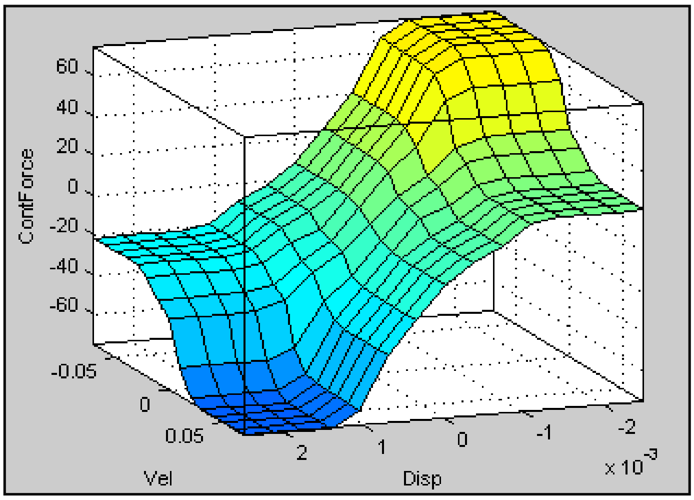
Ο ελεγκτής που δημιουργήσαμε μέσω του fuzzy toolbox του υπολογιστικού πακέτου της Matlab είναι ένας ασαφής ελεγκτής MISO τύπου Mamdani, ο οποίος λαμβάνει δύο εισόδους, τη μετατόπιση (u) και τη ταχύτητα (u’) του κόμβου 4 και δίδει μια έξοδο, τη δύναμη ελέγχου, τάση διεγέρτη [V], στο σύστημα.



Στοιχεία Ελεγκτή	
Τύπος:	Mamdani
Συναρτήσεις Συμμετοχής	
Εισόδου Μετακίνησης:	2 Τραπεζοειδούς και 5 τριγωνικής μορφής
Εισόδου Ταχύτητας:	2 Τραπεζοειδούς και 1 τριγωνικής μορφής
Εξόδου Δύναμης:	2 Τραπεζοειδούς και 7 τριγωνικής μορφής
Εφαρμογή Ασαφών Τελεστών:	AND
Βάρη Κανόνων:	1
Μέθοδος Εμπλοκής (implication):	Ελάχιστο - min
Μέθοδος Συσσώρευσης (aggregation)	Μέγιστο - max
Μέθοδος Αποασαφοποίησης (defuzzification):	Κέντρου Βάρους - CENTROID

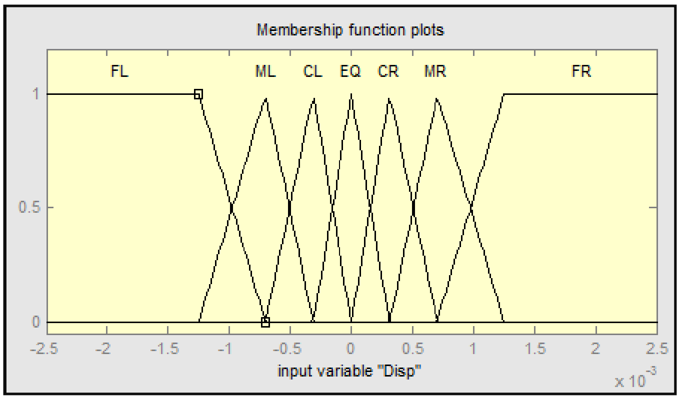
Για τη περιγραφή του συστήματος του ελεγκτή χρησιμοποιήθηκαν εικοσιένα (21) κανόνες (Fuzzy Rules) που παρουσιάζονται στο πίνακα.

Ταχύτητα	**Μετατόπιση**						
	FL	**ML**	**CL**	**EQ**	**CR**	**MR**	**FR**
LEFT	MAX	HIGH+	MED+	LOW+	NULL	LOW-	MED-
NULL	HIGH+	MED+	LOW+	NULL	LOW-	MED-	HIGH-
RIGHT	MED+	LOW+	NULL	LOW-	MED-	HIGH-	MIN

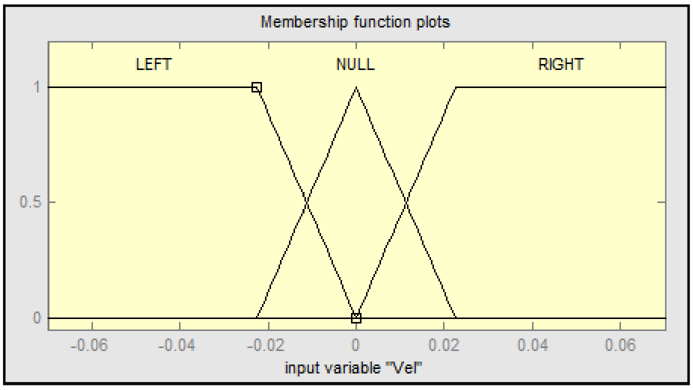


4.3.1 Σχήμα: Επιφάνεια Απεικόνισης Κανόνων Ασαφούς Συστήματος

Οι Συναρτήσεις συμμετοχής για τις εισόδους και εξόδους παρουσιάζονται στα παρακάτω:

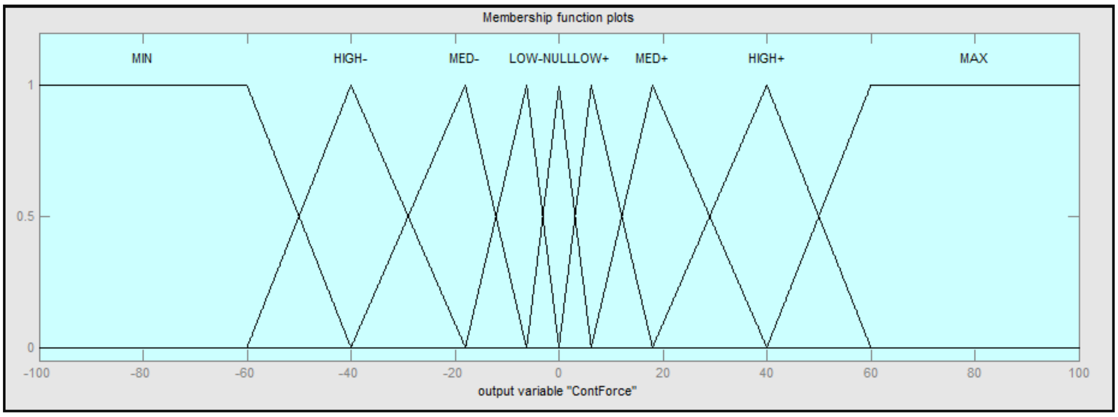


α)



β)

4.3.2 Σχήμα: Συναρτήσεις συμμετοχής α) για είσοδο Μετατόπισης, β) για είσοδο Ταχύτητας

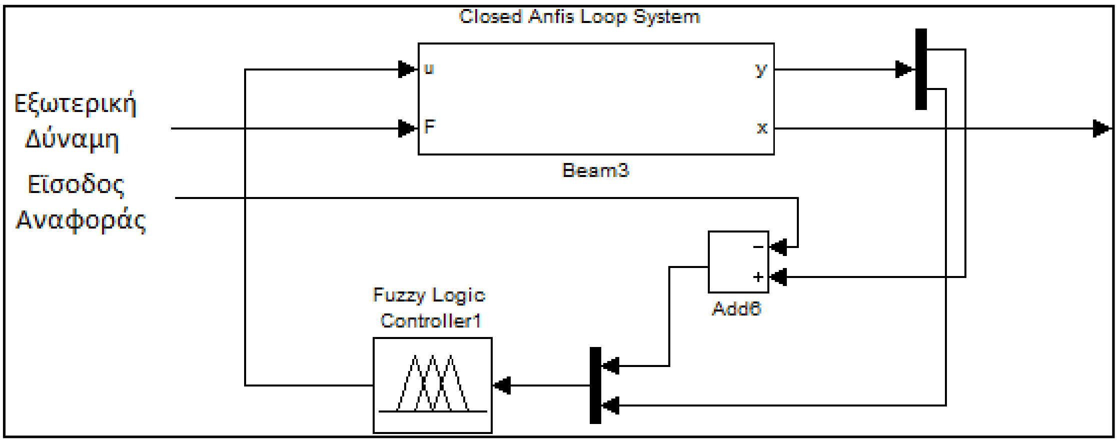


4.3.3 Σχήμα: Συναρτήσεις συμμετοχής για την έξοδο, Δύναμη.

Για τη κατασκευή του βέλτιστου ασαφούς συστήματος είναι πάρα πολλές οι παράμετροι που θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και να δοκιμαστούν, με αποτέλεσμα η μοναδική πραγματικά αποδοτική μέθοδος σχεδιασμού να είναι η αυτοματοποιημένη διαδικασία βελτιστοποίησης μέσω ευρετικών αλγορίθμων.

4.3.4 Ελεγκτής Νευροασαφούς Συμπερασμού (ANFIS Controller)

Ο ελεγκτής που δημιουργήσαμε μέσω του fuzzy toolbox του υπολογιστικού πακέτου της Matlab είναι ένας νευροασαφής ελεγκτής (ANFIS) MISO τύπου Sugeno, ως μόνης επιλογής του SIMULINK, ο οποίος λαμβάνει δύο εισόδους, τη μετατόπιση (u) και τη ταχύτητα (u’) κάποιου κόμβου και δίδει μια έξοδο, τη δύναμη ελέγχου στο σύστημα.



Οι παράμετροι του ANFIS είναι τα δεδομένα εκπαίδευσης και το πλήθος των συναρτήσεων συμμετοχής, ενώ δημιουργεί τους κανόνες μόνος του μέσω της διαδικασίας της εκπαίδευσης. Οι επιλογές σε συναρτήσεις συμμετοχής περιορίζονται αρκετά από τον ελεγκτή, οπότε η ουσιαστική επιλογή μας είναι το διάνυσμα εκπαίδευσης που θα τροφοδοτήσουμε τον ελεγκτή.

Ο σχεδιασμός αυτού του ελεγκτή, αν και δεν απασχολεί τόσο πολύ τη λογική του μηχανικού, όπως ο Fuzzy, είναι χρονοβόρα διαδικασία και απαιτεί ικανό πλήθος κατάλληλων δεδομένων εκπαίδευσης που συχνά είναι δύσκολο να βρεθούν.

Επιθυμία μας ήταν να μπορεί ο ελεγκτής να αποσβέσει ικανοποιητικά τη ταλάντωση του συστήματος για κάθε είσοδο βηματική, ημιτονοειδή και λευκού θορύβου. Αυτό απετέλεσε το μεγαλύτερο πρόβλημα στην επιλογή των δεδομένων εκπαίδευσης μιας και ο ελεγκτής με μικρές διαφορές στο πλήθος των διαφορετικών δεδομένων έδινε πολύ διαφορετικά αποτελέσματα.

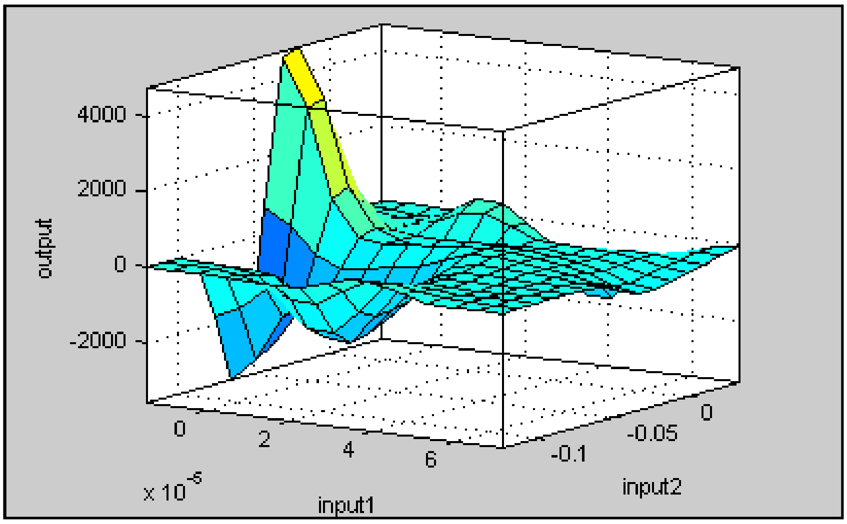
Τα δεδομένα εκπαίδευσης προέκυψαν από τα αποτελέσματα που έδωσε το σύστημα χωρίς ελεγκτή και με PID ελεγκτή για όμοιες φορτίσεις.

Το διάνυσμα εκπαίδευσης αποτελείται από τρείς στήλες, όπου οι δύο πρώτες είναι οι είσοδοι (μετατόπιση και ταχύτητα) και η Τρίτη είναι η έξοδος (δύναμη). Το δικό μας μέλημα είναι να εφαρμόσουμε μέσω των διεγερτών κατάλληλες αντίρροπες δυνάμεις ώστε να ελαττώσουμε τη ταλάντωση που δημιουργήθηκε.

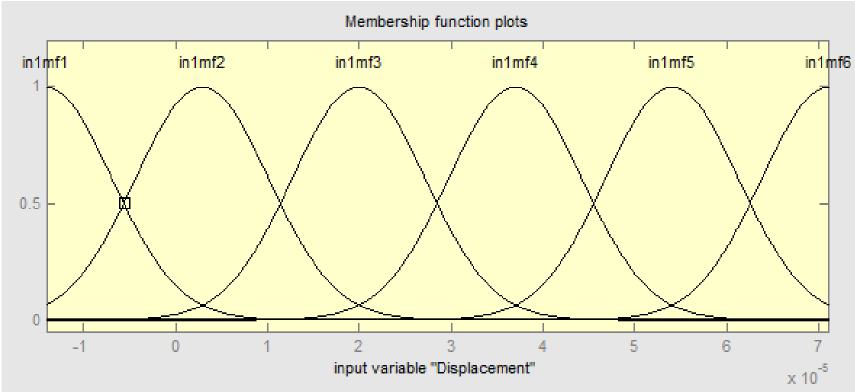
Παρακάτω παρουσιάζουμε τα χαρακτηριστικά για τα τέσσερα καλύτερα ANFIS που δημιουργήσαμε.

Γενικά Στοιχεία Ελεγκτή **ANFIS**	
Τύπος:	SUGENO
Συναρτήσεις Συμμετοχής:	6 Gaussmf / είσοδο
Εφαρμογή Μεθόδου AND:	prod
Εφαρμογή Μεθόδου OR:	probor
Συναρτήσεις Συμμετοχής	Γκαουσιανής μορφής
Τελεστής Σύνθεσης Κανόνων	AND
Μέθοδος Εμπλοκής (implication):	Ελάχιστο - min
Μέθοδος Συσσώρευσης (aggregation)	Μέγιστο - max
Μέθοδος Αποασαφοποίησης (defuzzification):	Whatever - Οποιαδήποτε
Epochs Εκπαίδευσης	40

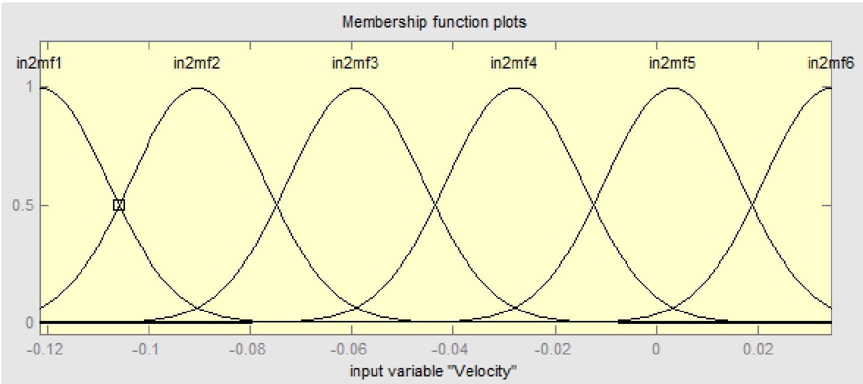
* Στη συνέχεια, διάφορες εικόνες που χρειάζονται μεγαλύτερη ανάλυση απεικονίζονται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ C



4.3.4 Σχήμα: Επιφάνεια Απεικόνισης Κανόνων Νευροασαφούς Συστήματος

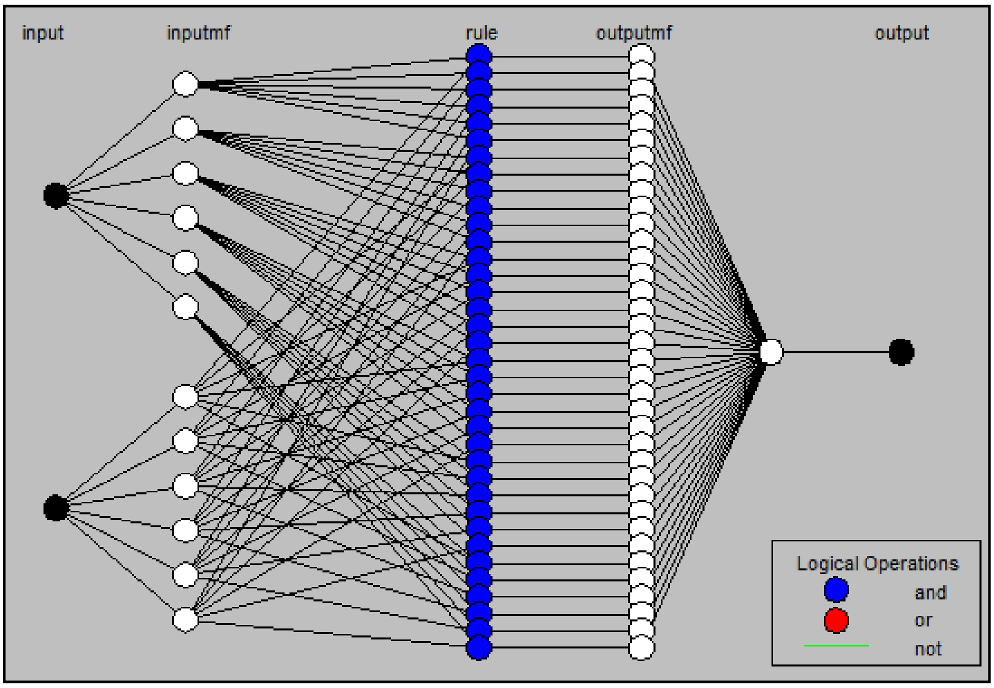


α)

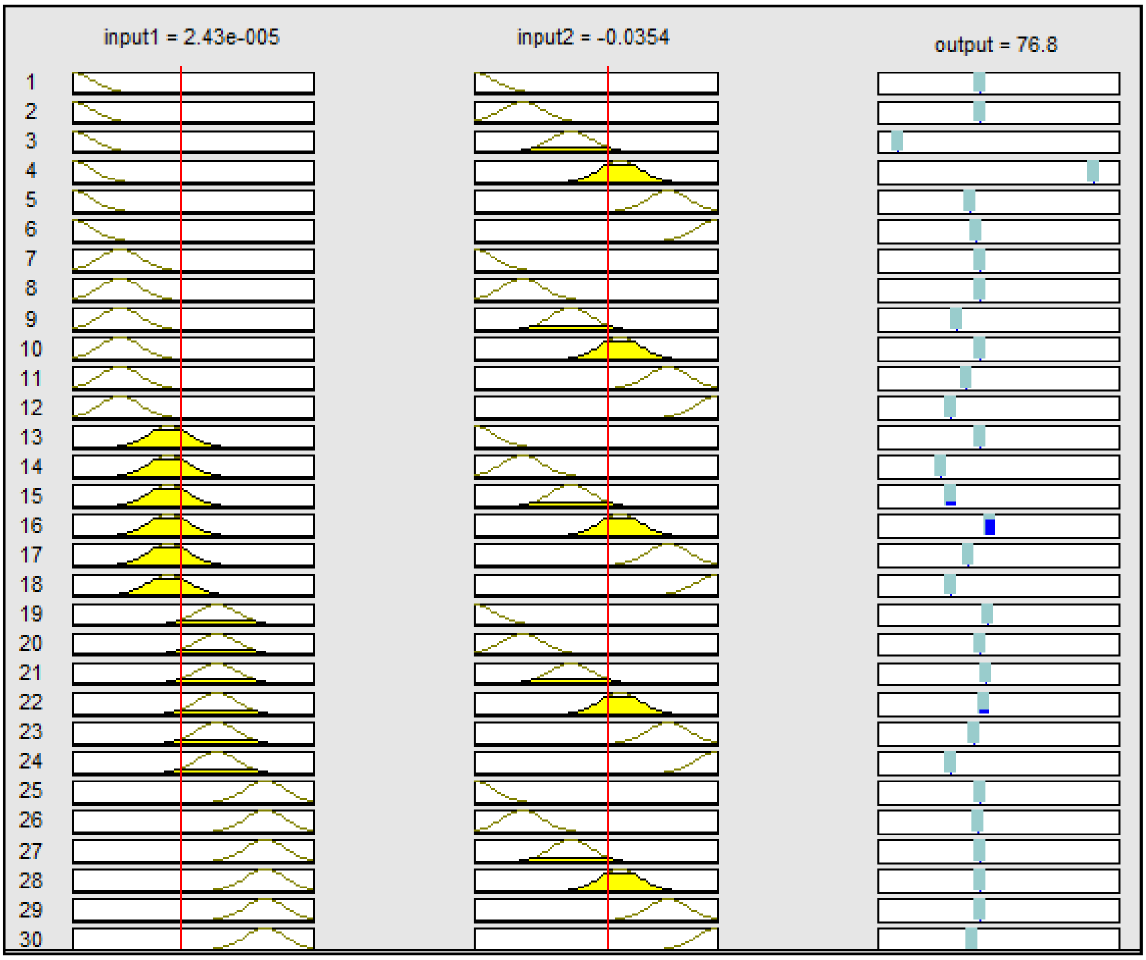


β)

4.3.5 Σχήμα: Συναρτήσεις συμμετοχής α) για είσοδο Μετατόπισης, β) για είσοδο Ταχύτητας



4.3.6 Σχήμα: Δομή Νευροασαφούς Συστήματος

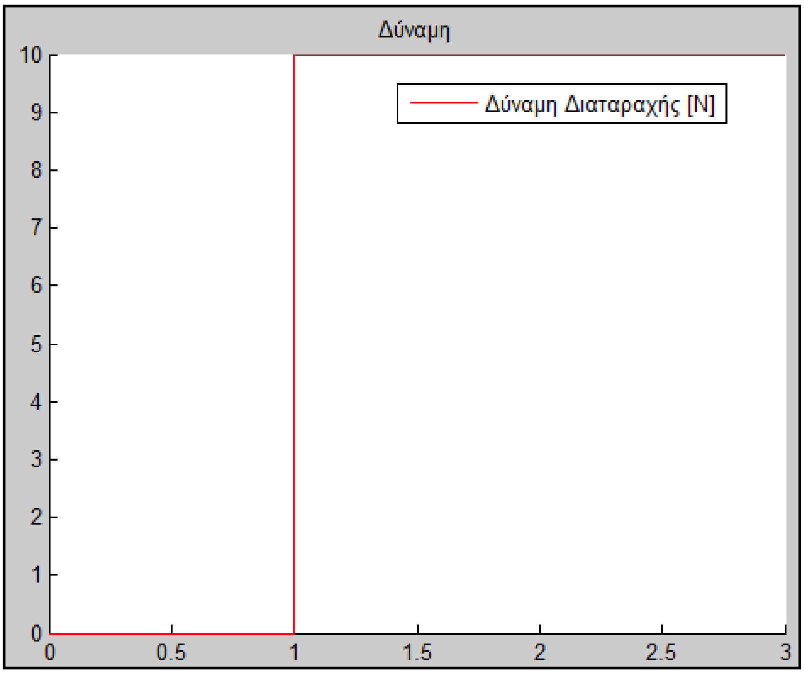


4.3.7 Σχήμα: Κανόνες Νευροασαφούς συστήματος.

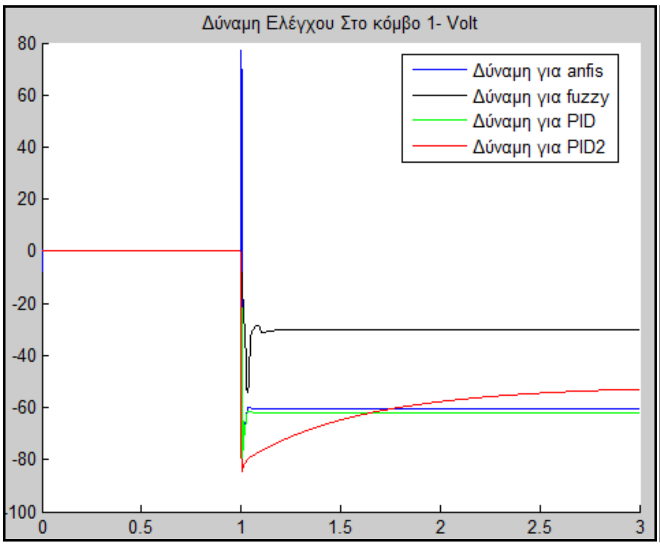
4.3.5 Αποτελέσματα Ελέγχου

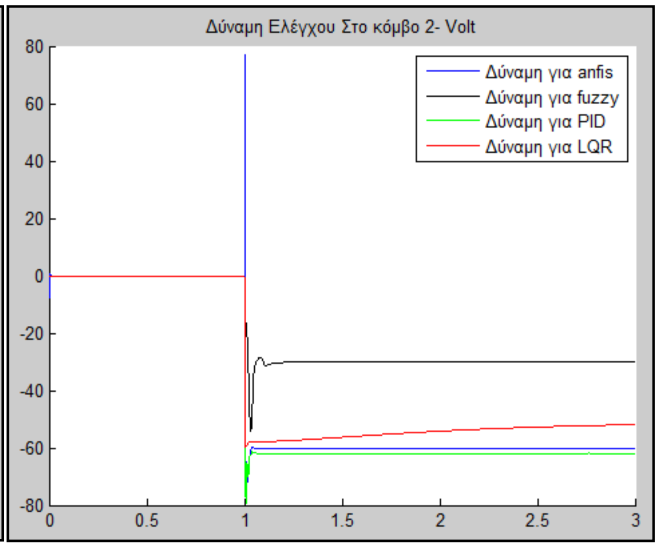
4.3.5.1 Βηματική Συνάρτηση Εισόδου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της απόσβεσης της ταλάντωσης λόγω βηματικής εισόδου για τους τέσσερις ελεγκτές LQR, PID, FUZZY και ANFIS που σχεδιάσαμε όπως παραπάνω.

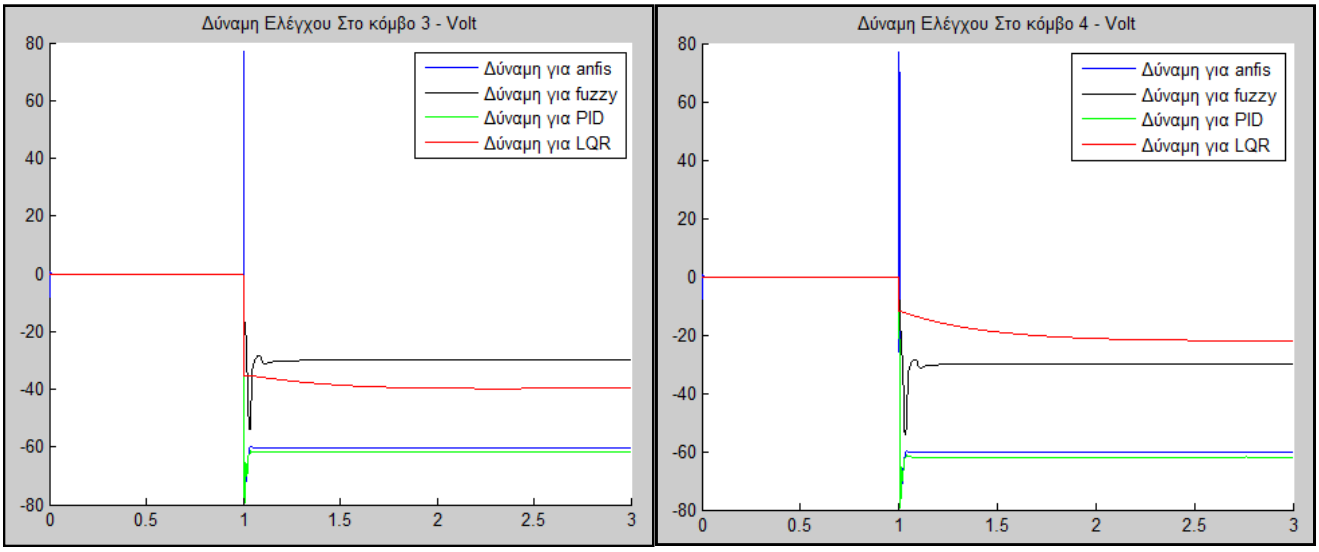


Εικόνα 4.3.8: Δύναμη Διαταραχής





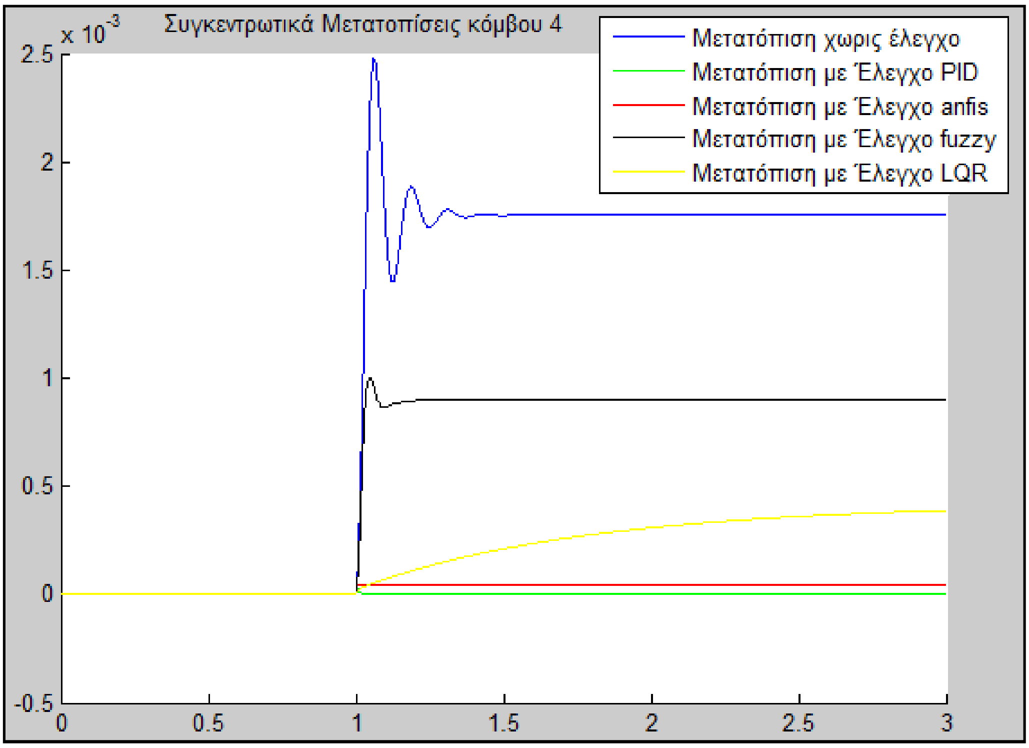
α) **β)**



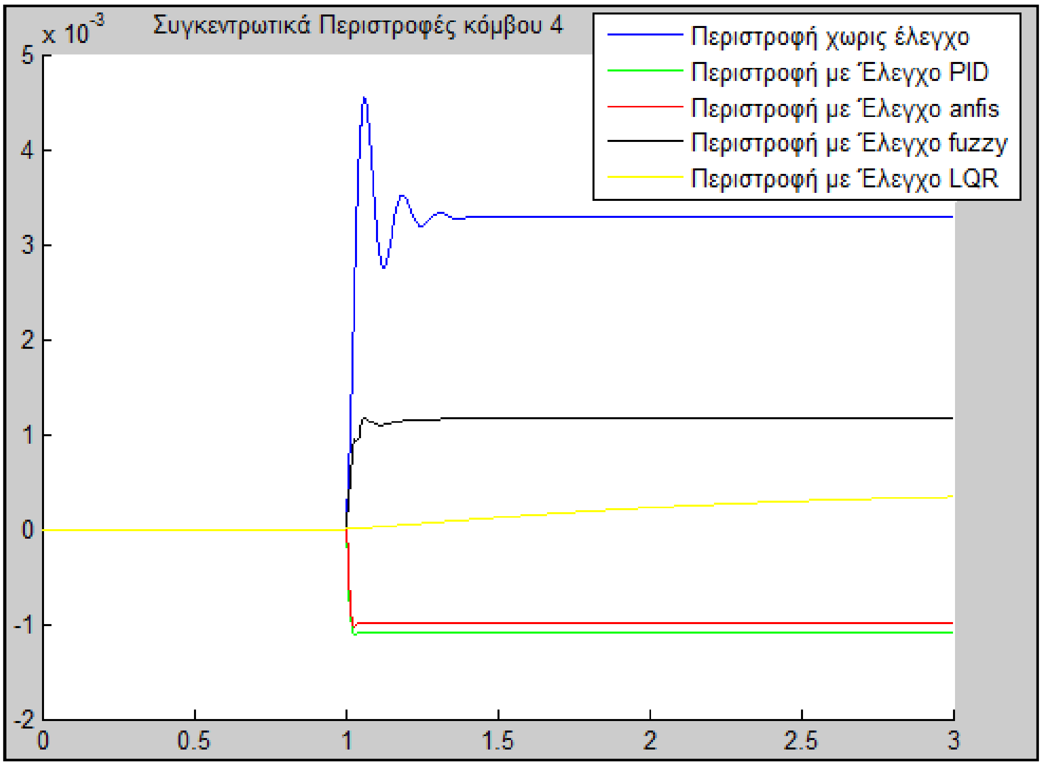
γ) δ)

Εικόνα 4.3.9: Συγκεντρωτικά Διαγράμματα Δυνάμεων Ελέγχου [v] σε κάθε κόμβο.

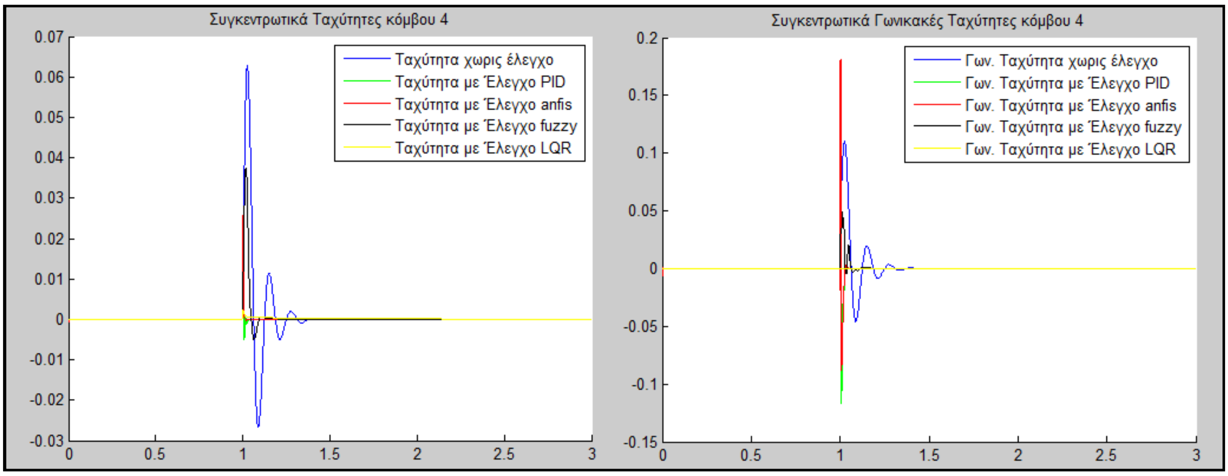
Οι δυνάμεις σε κάθε κόμβο έχουν εξαχθεί ανάλογα με το είδος του ελεγκτή και τη πληροφορία ανατροφοδότησης. Ελεγκτές όπως ο LQR λαμβάνουν ως είσοδο πληροφορία από κάθε κόμβο, ενώ οι υπόλοιποι ελεγκτές λαμβάνουν πληροφορία μόνο από το κόμβο 4, σύμφωνα με το σχεδιασμό.



Εικόνα 4.3.10: Συγκεντρωτικά Διαγράμματα Μετατόπισης κόμβου 4

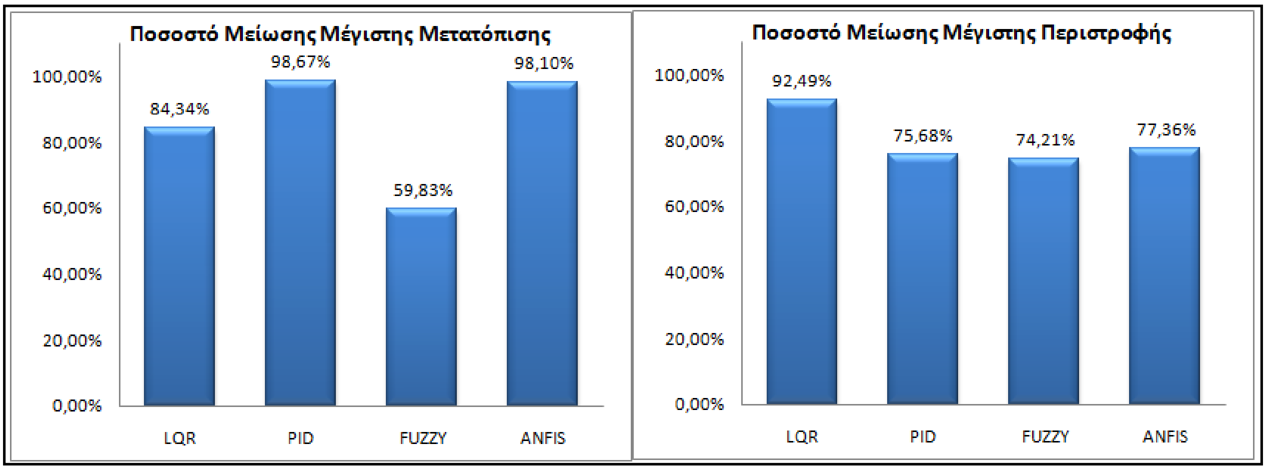


Εικόνα 4.3.11: Συγκεντρωτικά Διαγράμματα περιστροφής κόμβου 4

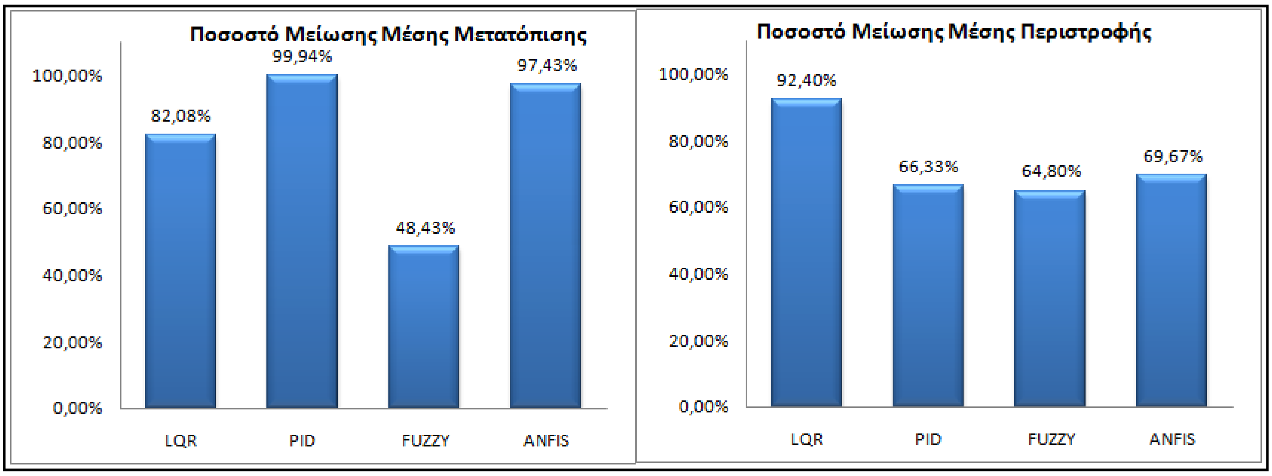


α) **β)**

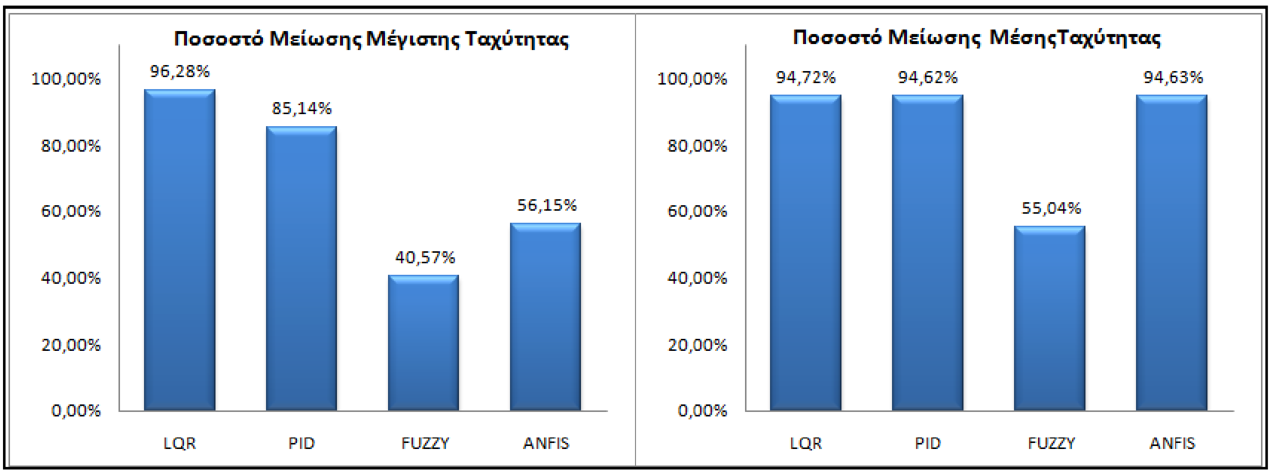
Εικόνα 4.3.12: Συγκεντρωτικά Διαγράμματα α) Ταχύτητας, β) Γωνιακής ταχύτητας κόμβου 4



Εικόνα 4.3.13: Ποσοστιαίο συγκριτικό αποτελέσματα μεταβολής μέγιστης μετατόπισης και μέγιστης περιστροφής κόμβου 4.



Εικόνα 4.3.14: Ποσοστιαίο συγκριτικό αποτελέσματα μεταβολής μέσης μετατόπισης και μέσης περιστροφής κόμβου 4.



Εικόνα 4.3.15: Ποσοστιαίο συγκριτικό αποτελέσματα μεταβολής μέγιστης και μέσης Ταχύτητας Μετατόπισης κόμβου 4.

Τα βασικά μεγέθη που θέλαμε να αποσβέσουμε είναι το εύρος και ο χρόνος ταλάντωσης της ράβδου λόγω συγκεκριμένης εξωτερικής διαταραχής.

Οι ελεγκτές που χρησιμοποιήσαμε σχεδιάστηκαν κατάλληλα για να μπορούν να ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις μας σε πολύ μεγάλο βαθμό. Ο LQR θα μπορούσε να ανταποκρίνεται καλύτερα όσο αφορά το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, αλλά χρειάζεται την εφαρμογή ολοκληρωτή μετά την εντολή εισόδου, στοιχείο που υπερβαίνει το σκοπό της συγκεκριμένης διατριβής. Εν γένει, αν ένα σύστημα ελέγχου με LQR επιθυμούμε να ακολουθεί κάποιο σήμα αναφοράς, μετά την εντολή εισόδου χρειάζεται να τοποθετηθεί ολοκληρωτής.

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι ο PID καταστέλλει πολύ γρήγορα και με μεγάλη επιτυχία τη μετατόπιση της δοκού, ενώ ακολουθούν με σειρά επιτυχίας ο anfis, ο LQR και ο fuzzy. Είναι εμφανές ότι ο anfis και ο pid φθάνουν πολύ γρήγορα σε σημείο μόνιμης κατάστασης 0,05 sec αντίστοιχα, ακολουθεί ο fuzzy με 0,2 sec.

Ο LQR ως ελεγκτής ανατροφοδότησης πλήρους κατάστασης παρατηρούμε ότι δίδει πολύ καλύτερα αποτελέσματα έναντι όλων των άλλων όσο αφορά την απόσβεση των μεγεθών της περιστροφής και της μέγιστης ταχύτητας μετατόπισης του κόμβου 4. Αν δε λάβουμε υπόψη μας το αρχικό μέγιστο στην απόκριση του anfis δηλαδή το διάστημα από 1,002 έως 1,0027 sec, παρατηρούμε ότι ο anfis έχει πολύ καλύτερη συμπεριφορά ακόμα και από τον LQR.

Αν και fuzzy ελεγκτής κατάφερε να ελαττώσει το εύρος ταλάντωσης πάνω από 50% και ο χρόνος απόκρισής του είναι ικανοποιητικά γρήγορος, αναδείχθηκε ο χειρότερος ελεγκτής, μιας και οι πρωτοπόροι PID και anfis, σχεδόν εξάλειψαν τη ταλάντωση εν τη γενέσει της. Το γεγονός αυτό δε σημαίνει ότι με διαφορετική επιλογή συναρτήσεων συμμετοχής δε μπορεί να δώσει καλύτερα αποτελέσματα.

Η δύναμη ελέγχου εκφράζει την ηλεκτρική τάση σε [V] που εφαρμόζουμε στον διεγέρτη για να αποσβεστεί η ταλάντωση της δοκού λόγω της συνεχούς δύναμης 10N που εφαρμόζεται στο ελεύθερο άκρο της. Από τα διαγράμματα της δύναμης ελέγχου παρατηρούμε ότι τα σταθερά volt που χρειάζεται να δώσουμε στο διεγέρτη είναι κοντά στα 62. Οι ελεγκτές PID και anfis σε πολύ μικρό διάστημα καταφέρνουν και βρίσκονται πολύ κοντά σε αυτή τη τιμή, με την ουσιαστική διαφορά ότι ο anfis για 0,0007sec είναι πολύ ασταθής. Ο LQR, ως ελεγκτής που δέχεται στην ανατροφοδότηση όλη τη κατάσταση μας δίνει διαφορετική δύναμη ελέγχου για κάθε κόμβο. Ανταποκρίνεται εξίσου γρήγορα με τους προηγούμενους δύο, αλλά λόγω ιδιοτήτων καταφέρνει μικρότερο εύρος απόσβεσης της μετατόπισης. Ο fuzzy, αν και έχει σχεδιαστεί με ιδιαίτερη προσοχή δε καταφέρνει τόσο εντυπωσιακά αποτελέσματα σε σχέση με τους προηγούμενους, αλλά χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η απόδοσή του δεν είναι ικανοποιητική.

Μελετώντας τα αποτελέσματα κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού του ασαφή ελεγκτή συμπεράναμε ότι όταν η λογική που τον σχεδιάζουμε πλησιάζει το βέλτιστο, το σημαντικότερο ρόλο στη συνέχεια θα διαδραματίσουν η επιλογή του εύρους των συναρτήσεων μεταφοράς και ο αριθμός των συναρτήσεων μεταφοράς.

Στους νευροασαφής ελεγκτές δε χρειάζεται να αναπτύξουμε κάποια λογική για να τους σχεδιάσουμε, αλλά είναι απαραίτητα τα σωστά δεδομένα που θα τους τροφοδοτήσουμε κατά το διάστημα της εκπαίδευσης. Στην ουσία ο κάθε anfis μιμείται τη συμπεριφορά που θα του τροφοδοτήσουμε. Η επιλογή των συναρτήσεων μεταφοράς έρχεται στην ιεραρχία σημαντικότητας και είναι αρκετά περιορισμένη σε σχέση με το ασαφή ελεγκτή. Συμπαιράναμε ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα έξι γκαουσιανής μορφής συναρτήσεις σε κάθε είσοδο και γραμμικής μορφής συνάρτηση στην έξοδο παράγουν εντυπωσιακά αποτελέσματα.

4.3.6 Συμπεράσματα

COMSOL

Η μοντελοποίηση, ο σχεδιασμός και η επίλυση στο COMSOL προβλημάτων πολλών φυσικών ιδιοτήτων αποδείχθηκε μια ευχάριστη, σχετικά απλή και ιδιαίτερα χρήσιμη διαδικασία.

Στη παρούσα εργασία μοντελοποιήθηκε και αναλύθηκε η απόκριση πιεζοηλεκτρικής Unimorph προβόλου δοκού με αρκετά μεγάλη επιτυχία και αρκετά ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Με τις δυνατότητες που προσφέρει το λογισμικό ο μηχανικός μπορεί να σχεδιάσει ή να εισάγει οποιαδήποτε γεωμετρία και ύστερα με χρήση κατάλληλων μαθηματικών μοντέλων ενσωματωμένων ή όχι στο πρόγραμμα, να αναλύσει σύνθετα φυσικά προβλήματα.

Επίσης, νεώτερες εκδόσεις από την 3.4 δίνουν τη δυνατότητα στο μηχανικό να εξάγει τα μητρώα που περιγράφουν τη κατασκευή του (όπως M, K, Λ, A, B, C, D) στο Matlab δίνοντάς του έτσι η δυνατότητα να ενώσει τη κατασκευή του με οποιοδήποτε πακέτο ελέγχου ή άλλης διαδικασίας, όπως θα μπορούσε να γίνει στη παρούσα εργασία. Στην έκδοση 3.4 αυτή η διαδικασία είχε επιτυχία σε κλασικά μηχανικά προβλήματα.

Μελλοντική εργασία μπορεί να αποτελέσει η σύνδεση νεώτερης έκδοσης του COMSOL 4.3b με το Matlab για τη βελτιστοποίηση κατασκευών ή τον έλεγχο της ταλάντωσης της σχεδιασθείσας κατασκευής.

Έλεγχος

Από τη παραπάνω παρουσίαση συμπεραίνουμε ότι με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων, ένας ευφυής ελεγκτής, ασαφής ή νευροασαφής, μπορεί να επιτύχει συγκρίσιμη και υπό προϋποθέσεις, μεγαλύτερη μείωση των ταλαντώσεων από αυτή κλασικών ή βέλτιστων ελεγκτών. Το σημαντικό πλεονέκτημα των ευφυών ελεγκτών είναι ότι με λίγα δεδομένα εκπαίδευσης που μπορούν να προέλθουν από παρατήρηση και πειραματισμούς ή/και με ορισμένους σωστά επιλεγμένους κανόνες λογικής, μπορούν να αποσβέσουν την απόκριση του συστήματος για οποιαδήποτε είσοδο, χωρίς να υπάρχει γνώση του ακριβούς μαθηματικού μοντέλου της κατασκευής και κάνοντας χρήση πολύ λιγότερων μετρήσεων από το διάνυσμα κατάστασης. Φυσικά είναι αναμενόμενο ότι με περισσότερες μετρήσεις (σε διαφορετικά σημεία) ή με συγκεκριμένα δεδομένα εισόδου, οι ευφυείς ελεγκτές ανταποκρίνονται ακόμα καλύτερα.

Επειδή ο σχεδιασμός των ευφυών ελεγκτών μπορεί να αποδειχθεί πολύ επίπονη και πολλές φορές ατελέσφορη διαδικασία, εκτός της εμπειρίας, σημαντική είναι η διερεύνηση των βέλτιστων παραμέτρων μέσω αυτοματοποιημένης διαδικασίας με τη χρήση ευρετικών αλγορίθμων, όπως είναι οι γενετικοί (GA). Μελλοντική δουλειά μπορεί να αποτελέσει η βέλτιστη σχεδίαση ενός νευροασαφούς ελεγκτή για την ικανοποιητική απόσβεση της ταλάντωσης πιεζοηλεκτρικής προβόλου δοκού, καθώς επίσης και η μοντελοποίηση και έλεγχος τρισδιάστατων πιεζοηλεκτρικών κατασκευών, που σε αυτή τη κατεύθυνση θα βοηθούσε πολύ η διασύνδεση με το COMSOL MULTIPHSICS 4.3b.

5.

Βιβλιογραφία – Αναφορές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

[1] Peng X. Q., Lamk X & Liu G. R. (1998). Active Vibration Control of Composite Beams with Piezoelectrics: A finite Element Model with Third Order Theory. Journal of Sound and Vibrations, 209(4), 635–650.

[2] Wang B. T., Burdisso R. A. & Fuller C. R. (1994). Optimal placement of piezoelectric actuators for active structural acoustic control. J. Intell. Mater. Syst. Struct., 5, 67–77.

[3] K. Ramesh Kumar, S Narayanan. (2007). The optimal location of piezoelectric actuators and sensors for vibration control of plates S. Smart Materials and Structures vol. 16 issue 6 December 01, 2007. p. 2680-2691

[4] Fariba Fahroo, Michael, A. Demetriou. (2000). Optimal Actuator/sensor Location for Active Noise Regulator and Tracking Control Problems , Journal of Computational and Applied Mathematics - control of partial differential equations archive Volume 114 Issue 1, Jan 15 2000 Pages 137 – 158

[5] Igusa T., Xu K. & Warnitchai P. Optimal locations and gains of sensors and actuators for feedback control. AIAA-93-1660-CP.

[6] Hamidi M. & Juang J. N. (1981). Optimal control and controller location for distributed parameter elastic systems. Proc. 20th IEEE Conf. on Decision and Control 502–506.

[7] Clark R. L. & Fuller C. R. (1992). Optimal placement of piezoelectric actuators and polyvinylidene fluoride error sensors in active structural acoustic control approaches. J. Acoust. Soc. Am. 92, 1521–33.

[8] Crawley, E. F. & de Luis, J., 1987, 'Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures', AIAA Journal, 25(10):1373–1385.

[9] Crawley, E. F. & Anderson, E. H., 1989, 'Detailed models of piezoceramic actuation of beams', AIAA 89-1388-CP.

[10] Dimitriadis, E. K., Fuller, C. R. & Rogers, C. A., 1991, 'Piezoelectric actuators for distributed vibration excitation of thin plates', Transactions of the ASME, Journal of Vibrations and Acoustics, 113:100–107.

[11] Lee, C.-K., 1990, 'Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. Part I: Governing equations and reciprocal relationships', Journal of the Acoustical Society of America, 87(3):1144–1158.

[12] Park, C. & Chopra, I., 1996, 'Modeling piezoceramic actuation of beams in torsion', AIAA Journal , 34(12):2582–2589.

[13] Chakravithini M. S., Bandyopadhyay B. & Unbehauen H. (2002). A new algorithm for discrete time sliding mode control using FOS feedback. IEEE Trans. Ind. Electron., 49(3), 518–523.

[14] Betti M., Drosopoulos G. A. & Stavroulakis G. E. (2008). Two non-linear finite element models developed for the assessment of failure of masonry arches. Comptes Rendus Mecanique, Special Issue on Duality, inverse problems and nonlinear problems in solid mechanics, dedicated to Prof. H. Bui, 336/1-2, 42–53, DOI : 10.1016/j.crme,2007.10.014.

[15] Foutsitzi G., Marinova D., Hadjigeorgiou E. & Stavroulakis G. (2003). Robust H2 vibration control of beams with piezoelectric sensors and actuators. Proceedings of Physics and Control Conference (PhyCon03), I 158–163. St. Petersburg, Russia.

[16] Miara B., Stavroulakis G. & Valente V. (Eds.) (2007). Topics on mathematics for smart systems. Proceedings of the European Conference Rome, Italy, 26–28 October 2006, World Scientific Publishers, Singapore, International.

[17] Foutsitzi G., Hadjigeorgiou E., Marinova D. & Stavroulakis G. (2005). Analysis and control of smart viscoelastic beams. 5th GRACM International Congress on Computational Mechanics Limassol.

[18] Kim J., Varadan V. V. & Varadan V. K. (1997). Finite element modeling of structures including piezoelectric active devices. Int. J. Numer. Methods Eng., 40, 817–32.

[19] Chin L. C., Varadan V. V. & Varadan V. K. (1991). Finite element methods for numerical simulation of the actuator performance of a composite transducer array. Proc. 1991 Int. Symp. on Active Materials and Adaptive Structures, 633–7.

[20] Allik, H. & Hughes, T. J. R., 1970, 'Finite element method for piezoelectric vibration', International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2:151–157.

[21] Lerch, R., 1990, ‘Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements’, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control , 37 (3):233– 24

[22] Moetakef, M. A., Lawrence, K. L., Joshi, S. P. & Shiakolas, P. S., 1995, ‘Closed-form expressions for higher order electroelastic tetrahedral elements’, AIAA Journal, 33(1):136–142.

[23] Ha, S. K., Keilers, C. & Chang, F. K., 1992, ‘Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators’, AIAA Journal, 30(3):772–780.

[24] Rao, S. S. & Sunar, M., 1993, ‘Analysis of distributed thermopiezoelectric sensors and actuators in advanced intelligent structures’, AIAA Journal, 31(7):1280–1286.

[25] Tzou, H. S. & Ye, R., 1996, ‘Analysis of piezoelastic structures with laminated piezoelectric triangle shell elements’, AIAA Journal, 34(1):110–115.

[26] Suleman, A. & Venkayya, V. B., 1995a, ‘Flutter control of an adaptive laminated composite panel with piezoelectric layers’, IDMEC-Instituto Superior Tecnico, Departamento de Engenharia Mecanica, 1096 Codex, Portugal.

[27] Suleman, A. & Goncalves, M. A., 1995, ‘Optimization issues in application of piezoelectric actuators in panel flutter control’, IDMEC-Instituto Superior Tecnico, Departamento de Engenharia Mecanica, 1096 Codex, Portugal.

[28] Lee, H.-J. & Saravanos, D. A., 1996, ‘Coupled layerwise analysis of thermopiezoelectric composite beams’, AIAA Journal, 34(6):1231–1237.

[29] Chattopadhyay, A., Li, J. & Haozhong, G., 1999, ‘Coupled thermo-piezoelectric-mechanical model for smart composite laminate’, AIAA Journal, 37(12).

[30] Zhou, X., Chattopadhyay, A. & Haozhong, G., 2000, ‘Dynamic responses of smart composites using a coupled thermo-piezoelectric-mechanical model’, AIAA Journal, 38(10).

[31] Chen, S.-H., Wang, Z.-D. & Liu, X.-H., 1997, ‘Active vibration control and suppression for intelligent structures’, Journal of Sound and Vibration, 200(2):167–177.

[32] Foutsitzi G., Marinova D., Hadjigeorgiou E. & Stavroulakis G. (2002). Finite element modelling of optimally controlled smart beams. 28Ih Summer School: Applications of Mathematics in Engineering and Economics, Sozopol, Bulgaria.

[33] Arvanitis K. G., Zacharenakis E. C., Soldatos A. G. & Stavroulakis G. E. (2003). New trends in optimal structural control. Selected Topics in Structronic and Mechatronic System. World Scientific Publishers 321–415 {chapter 8}, Belyaev A, Guran A., Singapore.

[34] Culshaw B. (1992). Smart structures: A concept or a reality. Journal of Systems and Control Engg. 26(206), 1–8.

[35] Rao S. & Sunar M. (1994). Piezoelectricity and its uses in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey. Applied Mechanics Rev. 17(2), 113–119.

[36] Baily T. & Hubbard J. E. Jr. (1985). Distributed piezoelectric polymer active vibration control of a cantilever beam. Journal of Guidance, Dynamics and Control 8(5), 605–611.

[37] Hanagud S., Obal M. W. & Callise A. J. (1992). Optimal vibration control by the use of piezoelectric sensors and actuators. J. Contr. Guidance 15(5), 1199–1206.

[38] Brennan M. J., Bonito J. G., Elliot S. J., David A. & Pinnington R. J. (1999). Experimental investigation of different actuator technologies for active vibration control. Smart Materials and Structures 8(3), 145–153.

[39] Yang S. M. & Lee Y. J. (1993). Optimization of non-collocated sensor / actuator location and feedback gain in control systems Smart Materials and Structures J. 8, 96–102.

[40] Shiang Lee W. (1996). System identification and control of smart structures using neural networks. Automatica 38(4-8), 269–276.

[41] Gosavi S. V. & Kelkar A. V. (2004). Modeling, identification, and passivitybased robust control of piezo-actuated flexible beam. Journal of Vibration and Acoustics 129, 260–271.

[42] Gabbert U., Nestorovic Trajkov T. & Kppel H. (2002). Modeling, control and simulation of piezoelectric smart structures using finite element method and optimal lq control. Facta Universitatis Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics 12(3), 417–430.

[43] Aldraihem O. J., Wetherhold T. & Singh T. (1997). Distributed control of laminated beams: Timoshenko vs. Euler-Bernoulli theory. Journal of Intelligent Materials Systems and Structures 8(5), 149–157.

[44] Chandrashekara K. & Varadarajan S. (1997). Adaptive shape control of composite beams with piezoelectric actuators. Intelligent Materials Systems and Structures 8, 112–124.

[45] Aldraihem O. J. & Khedir Ahmend A. (2000). Smart beams with extension and thickness-shear piezoelectric actuators. J. Smart Materials and Structures 9(1), 1–9.

[46] Scott R., Brown M. & Levesley M. (2203). Robust multivariable control of a double beam cantilever smart structure. J. Smart Materials and Structures 13, 731–743.

[47] Zhang X. D. & Sun C. T. (1996). Formulation of an adaptive sandwich beam. Smart Materials and Structures Journal 5(6), 814–823.

[48] Murali G. & Pajunen G. A. (1995). Model reference control of vibrations in flexible smart structures. 34th IEEE Conference of Decision and Control 3551–3556. New Orleans, USA.

[49] Thomas J. & Abbas B. A. H. (1975). Finite element methods for dynamic analysis of Timoshenko beam. J. of Sound and Vibration 41, 291–299.

[50] Benjeddou A., Trindade M. A. & Ohayon R. (1999). New shear actuated smart structure beam finite element Journal of Guidance, Dynamics and Control 37, 378–383.

[51] Raja S., Prathap G. & Sinha P. K. (2002). Active vibration control of composite sandwich beams with piezoelectric extension-bending and shear actuators. J. Smart Materials and Structures 11, 62–71.

[52] Friedman Z. & Kosmataka J. B. (1993). An improved two-node Timoshenko beam finite element. Computers and Structures 47(3), 473–481.

[53] Waisman H. & Abramovich H. (2002), Active stiffening of laminated composite beams using piezoelectric actuators. Composite Structures 58(3), 109– 120.

[54] Abramovich H. & Lishvits A. (1994). Free vibrations of non-symmatric crossplylaminated composite beams Journal of Sound and Vibration 176(5), 597–612.

[55] Symans M. D. & Konstantinou M. C. (1999). Semi-Active Control system for seismic protection of structure: e state- of- the- art review. Engineerings Structures. 21(6), 469–487.

[56] Zacharenakis E. C. (1996). On the input - output decoupling with simultaneous disturbance attenuation and H-infinity optimization in structural analysis. Computers and structures. Vol. 60, 627–633.

[57] Zacharenakis E. C. (1997). On the disturbance attenuation and H-infinity optimization in structural analysis. ZAMM. Vol. 77, 189–195.

[58] Zacharenakis E. C. & Stavroulakis G. E. (2000). On the seismic disturbance rejection of structures. Journal of Global Optimization. 17(1-4), 403–410.

[59] Baniotopoulos (1995). Optimal control of abovegrounds under dynamic excitation. International Journal of Pressure Vesels and Pirings. 63(2), 211– 212.

[60] Reinhorn A. M. & Manolis G. D. (1987). Avtive Control of Inelastic Structures. Journal of Engineering Mechanics- ASCE. 113(3), 315–333.

[61] Soong T. T. & Manolis G. D. (1987). Avtive Structures. Journal of Structural Engineering - ASCE. 113(11), 2290–2302

[62] Fisco, N.R. and Adeli, H. ''Smart structures: part I — active and semiactive ontrol'', Scientia Iranica, Transaction A: Civil Engineering, 18(3), pp. 275–284 (2011).

[63] Fisco, N.R. and Adeli, H. ''Smart structures: part II—hybrid control systems and control strategies'', Scientia Iranica, Transaction A: Civil Engineering, 18(3), pp. 285–295 (2011).

[64] Reaves, Mercedes C. & Horta, Lucas G., 2001, NASA_TECHDOC_20010059241

[65] Vaculin, O. und Heckmann, A. (2004) Simulation and Control of Smart Strutures in Multibody Systems. In: Proceedings of MECH2K4 . 3rd International Congress on Mechatronics , 2004-07-07 - 2004-07-09 , Prague, CZ.

[66] W. Kortum, W. Schiehlen, and M. Arnold. Software tools: From multibody system analysis to vehicle system dynamics. In Proc. of International Congress on Theoretical and Applied Mechanics, ICTAM 2000, pages 225 – 238, Chicago, 2000

[67] Crawley, E. F. & Lazarus, K. B., 1991, 'Induced strain actuation of isotropic and anisotropic plates', AIAA Journal, 29(6):944–951.

[68] Hwang, W. S. & Park, H. C., 1993, 'Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators', AIAA Journal, 31(5):930–937.

[153] H. Irschik, A review of static and dynamic shape control of structures using piezoelectric actuation. Engineering Structures, 24(1), 5-11, 2002

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

[69] Love, A.E.H., 1944. Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, Inc., New York.

[70] Timoshenko, S. and Goodier, J.N., 1951. Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York.

[71] Muskhelishvili, N.I., 1953. Some Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P. Noordhoff, N. V., Groningen, Netherlands.

[72] Sokolnikoff, I.S., 1956. Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill book company, New York.

[73] Παπαμίχος Ε. και Χαραλαμπάκης Ν.Χ.,(2004), Αντοχή των Υλικών, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, ISBN 960-418-048-7

[74] Παπαδρακάκης, Μ., 2002. Μη Γραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία, Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα.

[75] Στέφανος Κοζάνης, 1996, Διπλωματική εργασία, ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ, Αθήνα-ΕΜΠ- 1996

[76] Βασίλειος Γ. Μώκος, 2007, Διδακτορική Διατριβή, ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ, Αθήνα-ΕΜΠ- 2007

[77] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. C. Topp: Stifness and deflection analysis of complex structures, J. Aeronaut. Sci. 23 (1956), 805{823, 854}

[78] Hrenikof A.:"Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method,"J. Appl. Mech., Trans ASME, vol. 8, pp. 169-175,1941

[79] Courant, R.: "Variational Methods fot the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration,"Bull.Am.Math.Sac., vol.49, pp. 1-43,1943

[80] McHenry, D., “A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems”, J. Inst. Civil Eng. 21 (2), 1943.

[81] Argyris,J., “Energy Theorems and Structural Analysis”, Aircraft Engineering, 1954 and 1955. In 1960 these papers were consolidated in a book by Butterworths Scientific Publications titled Energy Theorems and Structural Analysis

[82] Clough RW. The finite element method in plane stress analysis. Proceedings of the Second ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA, 1960.

[83] O.C. Zienkiewicz και Y.K.Cheung. Finite Element methods of analysis for arch dam shells and comparison with finite differenceprocedures. In Proc.Symp. on Theory of Arch Dams, Southampton University, 1964; Pergamon Press, Oxford

[84] Ανδριανάκης Ε., 2008, Διπλωματική εργασία, Εντοπισμός Ατελειών Σε Επίπεδη Πλάκα Ομογενούς και Σύνθετου Υλικού Με Χρήση Νευρωνικών Δικτύων και Πεπερασμένων Στοιχείων Αθήνα-ΕΜΠ.1996.

[85] Πανταζής Ε.,2011, Διπλωματική εργασία, Στατική και Δυναμική Επίλυση Πρανών με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, Αθήνα-ΕΜΠ.

[86] G. Beer, J. O. Watson, " Introduction to Finite and Boundary Element methods for Engineers", John Wiley & Sons, Chichester / New York / Brisbane / Toronto / Singapore, 1992

[87] J. N. Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill Education (2005). ISBN 0-07-124473-5

[88] Fagan M.J., Finite element analysis theory and practice, Publisher: Longman Scientific & Technical ; 1992, ISBN: 0470218177 (USA)

[89] Ράπτης Α., Βασική Αριθμητική Ανάλυση με Μικροϋπολογιστές, Ε.Μ.Π., 1988

[90] Χαϊνης Ι., Μαθήματα Μαθηματικής Ανάλυσης ΙΙ, Ε.Μ.Π.,1991

[91] Τσαμασφύρος Γ., Θεοτόκογλου Ε., 1994, 'Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.

[92] Παπαλαζάρου Α. ,2010, Διπλωματική εργασία, Μοντελοποίηση και έλεγχος απόδοσης πλακοειδούς εναλλάκτη θερμότητας με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, ΔΠΘ

[93] Curie J. and Curie P. (1880), C. R. Acad. Sci. Paris, 91, 294-295, Developpement, par pression, de l'electricite polaire dans les cristaux hemiedres a faces inclinees.

[94] Lippmann G. (1881), Ann. Chim. Phy. 24, 145-178, Principe de conservation de l'electricite

[95] Curie J. and P. (1881), C. R. Acad. Sci. Paris, 93, 1137-1140, Contractions et dilatations produites par des tensions electriques dans les cristaux hemiedres a faces inclines

[96] http://www.aurelienr.com/ - 22/11/2012

[97] Σουλιντζής Α.,2008, Μεταπτυχική Διπλωματική Εργασία, Διηλεκτρική απόκριση σύνθετων υλικών εποξειδικής ρητίνης-ZnO, ΠΠ

[98] C. Kittel. Introduction to Solid State Physics. 5th edition. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1976

[99] Safari A., Jadidian B., Akdogan E.K.: Piezoelctric Composites for Transducer Applications, Rutgers University, Piscataway, USA, 553-561, 2000.

[100] Π. Πίσσης, Φυσική των Διηλεκτρικών Υλικών (Αθήνα 1992).

[101] IEEE Standard on Piezoelectricity, ANSI/IEEE 176, 1987.

[102] Βουτευτάκη Μ-Σ., 2009, Διδακτορική Διατριβή, ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΙΟΡΘΩΣΗ ΒΛΑΒΗΣ ΣΕ ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ «ΕΥΦΥΩΝ ΥΛΙΚΩΝ»,ΠΚ

[103] Φελέκης Δ.,2007, Μεταπτυχική Διπλωματική Εργασία, ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΥΜΒΟΛΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ λ/2 ΓΙΑ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΕΠΕΝΕΡΓΗΤΩΝ, ΕΜΠ

[104] http://www.americanpiezo.com/knowledge-center/piezo-theory/piezoelectric-constants.html "27/11/2012"

[105] Piefort V., 2001, 'Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structure', Thesis submitted in candidature for the degree of Doctor in Applied Sciences, Active Structures Laboratory, Department of Mechanical Engineering and Robotics, Universite Libre de Bruxelles.

[106] Zhou Y.S. and Tiersten H.F., 1994, 'Elastic analysis of laminated composite plates in cylindrical bending due to piezoelectric actuators', Smart Mater. Struct., Vol. 3, 225-265.

[107] David Charnegie, Master Thesis, 2007, FREQUENCY TUNING CONCEPTS FOR PIEZOELECTRIC CANTILEVER BEAMS AND PLATES FOR ENERGY HARVESTING, University of Pittsburgh

[108] Giurgiutiu V., 2007, 'Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors', Academic press.

[109] http://www.murata.com/products/resonator/basic/ceralock/vibration.html

[110] Tzou, H. S. & Tseng, C. I., 1990, 'Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach', Journal of Sound and Vibration, 138(1):17–34.

[111] Tiersten, H. F., 1967, 'Hamilton's principle for linear piezoelectric media', in Proceedings of the IEEE, pp. 1523–1524.

[112] Ebbing, Darrell D.; Steven D. Gammon. Γενική Χημεία. Νικόλαος Δ. Κλούρας (μετάφραση) (έκτη έκδοση). Αθήνα: Τραυλός. σελ. 144-145. ISBN 960-7990-66-8. Ανακτήθηκε την 9-1-2010.

[113] Piefort, V. & Preumont, A., 2001, 'Finite element modeling of piezoelectric structures', Samtech User's Conference, Paris, France.

[154] Euler L, 1744, De curvis elasticis. In: Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes, Sive Solutio Problematis Isoperimetrici Lattissimo Sensu Accepti. Bousquet

[155] de Saint-Venant A, 1856a, M´emoire sur la flexion des prismes. Journal de Math´ematiques pures et appliqu´es, 1, 89–189.

[156] de Saint-Venant A, 1856b, M´emoire sur la torsion des prismes. Acad´emie des Sciences de l'Institut Imp´erial de Frances, 14, 233–560.

[157] Timoshenko SP, 1921, On the corrections for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Philosophical Magazine, 41, 744–746. Timoshenko SP 1922 On the transverse vibrations of bars of uniform cross section. Philosophical Magazine, 43, 125–131.

[158] Timoshenko SP, 1922, On the transverse vibrations of bars of uniform cross section. Philosophical Magazine, 43, 125–131.

[159] Mucichescu DT, 1984, Bounds for stiffness of prismatic beams. Journal of Structural Engineering, 110, 1410–1414.

[160] Novozhilov, V. V., 1961, Theory of Nonlinear Elasticity. New York: Pergamon Press,.

[161] Bathe, K.J., 1990. Finite–Elemente–Methoden, Springer, Berlin.

[162] Krishna Murty AV 1985 On the shear deformation theory for dynamic analysis of beams. Journal of Sound and Vibration, 101(1), 1–12.

[163] Pai PF and Schulz MJ 1999 Shear correction factors and an energy consistent beam theory. International Journal of Solids and Structures, 36, 1523–1540.

[164] Mechab I, Tounsi A, Benatta MA, and Bedia EA 2008 Deformation of short composite beam using refined theories. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 346, 468–479.

[165] Lad´eveze P and Simmonds J 1996 De nouveaux concepts en th´eorie des poutres pour des charges et des g´eom´etries quelconques. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Paris, 332, 445–462.

[166] Lad´eveze P and Simmonds J 1998 New concepts for linear beam theory with arbitrary geometry and loading. European Journal of Mechanics–A/Solids, 17(3), 377–402.

[167] Lad´eveze P, Sanchez P, and Simmonds J, 2004, Beamlike (Saint-Venant) solutions for fully anisotropic elastic tubes of arbitrary closed cross section. International Journal of Solids and Structures, 41(7), 1925–1944.

[168] Iesan, 1986, On Saint-Venant's problem. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 91, 363–373.

[169] Dong SB, Kosmatka JB, and Lin HC, 2001, On Saint-Venant's problem for an inhomogeneous, anisotropic cylinder-Part I: Methodology for Saint-Venant solutions. Journal of Applied Mechanics, 68(3), 376–381.

[170] Kosmatka JB, Lin HC, and Dong SB, 2001, On Saint-Venant's problem for an inhomogeneous, anisotropic cylinder-Part II: Cross-sectional properties. Journal of Applied Mechanics, 68(3), 382–391.

[171] Lin HC, Dong SB, and Kosmatka JB, 2001, On Saint-Venant's problem for an inhomogeneous, anisotropic cylinder-Part III: End effects. Journal of Applied Mechanics, 68(3), 392–398.

[172] Lin HC and Dong SB 2006 On the Almansi-Michell problems for an inhomogeneous, anisotropic cylinder. Journal of Mechanics, 22(1), 51–57.

[173] Schardt R 1966 Eine Erweiterung der technischen Biegetheorie zur berechnung prismatischer Faltwerke. Der Stahlbau, 35, 161–171.

[174] Schardt R 1989 Verallgemeinerte technische Biegetheorie. Springer.

[175] Schardt R 1994 Generalized beam theory–an adequate method for coupled stability problems. Thin-Walled Structures, 19, 161–180.

[176] Μώκος Γ, 2007, Διδακτορική διτριβή: ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ, ΕΜΠ

[177] Vlasov, W.S., 1964. Dünnwandige elastische Stäbe, VEB Verlag für Bauwesen, Band 1, Berlin.

[178] Vlasov, W.S., 1965. Dünnwandige elastische Stäbe, VEB Verlag für Bauwesen, Band 2, Berlin

[179] Love, A.E.H., 1944. Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, Inc., New York.

[180] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., 1951. Theory of Elasticity, 2nd ed., McGrawHill Book Company, New York.

[181] Sokolnikoff, I.S., 1956. Mathematical Theory of Elasticity, McGraw–Hill, New York.

[182] Fung, Y.C., 1965. Foundations of Solid Mechanics, Englewood Cliff, Prentice–Hall, New Jersey.

[183] Armenakas, A., 2003. Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity, NTUA, Athens.

[184] Silvestre N 2002 Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. Thin-Walled Structures, 40(9), 791–820.

[185] Silvestre N 2003 GBT buckling analysis of pultruded FRP lipped channel members. Computers & Structures, 81(18-19), 1889–1904.

[186] Silvestre N 2007 Generalised beam theory to analyse the buckling behaviour of circular cylindrical shells and tubes. Thin-Walled Structures, 45(2), 185–198.

[187] Argyris, J., 1988. Die Methode der Finiten Elemente, Band III, North–Holland.

[188] Παπαδρακάκης, Μ., 2000. Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα.

[189] Katsikadelis, J.T, 2002a. Boundary Elements: Theory and Application, Elsevier, Amsterdam-London.

[190] Washizu, K ,1968, Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon.

[191] Kanok-Nukulchai W and Shik Shin Y, 1984, Versatile and improved higher-order beam elements. Journal of Structural Engineering, 110, 2234–2249.

[192] Kapania K and Raciti S 1989a Recent advances in analysis of laminated beams and plates, part I: Shear effects and buckling. AIAA Journal, 27(7), 923–935.

[193] Kapania K and Raciti S 1989b Recent advances in analysis of laminated beams and plates, part II: Vibrations and wave propagation. AIAA Journal, 27(7), 935–946.

[194] Qin Z and Librescu L 2002 On a shear-deformable theory of anisotropic thin-walled beams: further contribution and validations. Composite Structures, 56, 345–358.

[195] Μουτσοπούλου Α. ,2009 , Διδακτορική Διατριβή, ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΞΥΠΝΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

[196] Ravinder S. Dahiya, Maurizio Valle, 2013, Robotic Tacticle Sensing Technologies and System, DOI 10.1007/978-94-007-0579-1, © Springer Science + Business Media Dordrecht – APPENDIX A Fundamentals of Piezoelectricity

[197] Michael I. Friswell and Sondipon Adhikari, Sensor shape design for piezoelectric cantilever beams to harvest vibration energy J. Appl. Phys. 108, 014901 (2010), doi: 10.1063/1.3457330

[198] S. R. Anton and H. A. Sodano, A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006), Smart Mater. Struct. 16, doi:10.1088/0964-1726/16/3/R01

[199] S. Adhikari, M. I. Friswell, and D. J. Inman, Piezoelectric energy harvesting from broadband random vibrations, Smart Mater. Struct. 18, 115005 _2009_ doi:10.1088/0964-1726/18/11/115005

[200] Shashank Priya and Daniel J. Inman, Energy Harvesting Technologies, SPRINGER, DOI 10.1007/978-0-387-76464-1

[201] Bailey, T. and Hubbard, Jr., J.E. 1985. ‘‘Distributed Piezoelectric Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam,’’ AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, 8:605–611.

[202] Garcia, E., Dosch, J. and Inman, D.J. 1992. ‘‘The Application of Smart Structures to the Vibration Suppression Problem,’’ Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 3:659–667.

[203] Fuller, C.R., Elliott, S.J. and Nelson, P.A. 1996. Active Control of Vibration, Academic Press, San Diego

[204] Michael I. Friswella and Sondipon Adhikari, Sensor shape design for piezoelectric cantilever beams to harvest vibration energy, JOURNAL OF APPLIED PHYSICS 108, 014901 _2010_, doi:10.1063/1.3457330

[205] Todals, M, S.O., 1979, "A new electromotional device.", RCA Engineer, V0l. 25, No.1, 24-27

[206] Bar-Cohen Yoseph & Zensheu Chang, 2000, "Piezoelectrically Actuated Miniature Peristaltic Pump", Proceeding of SPIE's 7th Annual international Symposium on Smart Structures and Materials.

[207] Alper Erturk, 2009, PhD Thesis, Electromechanical Modeling of Piezoelectric Energy Harvesters, Virginia Polytechnic Institute and State University.

[208] A. Preumont, 2006, Mechatronics Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems, Solid Mechanics and its applications V. 136 2006, Springer, ISBN-10 1-4020-4696-0

[209] Steven J. Gross, 2004, PhD Thesis, MICROMACHINED SWITCHES AND CANTILEVER ACTUATORS BASED ON PIEZOELECTRIC LEAD ZIRCONATE TITANATE (PZT), Pennsylvania State University.

[210] Shahab Mehraeen, S. Jagannathan, and Keith Corzine, 2008, Energy Harvesting Using Piezoelectric Materials and High Voltage Scavenging Circuitry, Proceeding of: Industrial Technology, 2008. ICIT 2008. IEEE International Conference, DOI:10.1109/ICIT.2008.4608554

[211] Noel Eduard du Toit, 2005, Master Thesis, Modeling and Design of a MEMS Piezoelectric Vibration Energy Harvester, MIT

[212] Flynn A M and Sanders S R 2002 Fundamental limits on energy transfer and circuit considerations for piezoelectric transformers IEEE Trans. Power Electron. 17 8–14

[213] Roundy S and Wright P K 2004 A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics Smart Mater. Struct. 13 1131–42

[214] ANURAG KASYAP V. S., 2007, PhD Thesis, DEVELOPMENT OF MEMS-BASED PIEZOELECTRIC CANTILEVER ARRAYS FOR VIBRATIONAL ENERGY HARVESTING, UNIVERSITY OF FLORIDA

[215] Bandyopadhyay B., Manjunath T. C. & Unapathy M. (2007). Modeling, Control, and Implementation of Smart Structures. Springer ISBN-10 3-540- 48393-4.

[216] Ballas Rüdiger G., 2007, Piezoelectric Multilayer Beam Bending Actuators Static and Dynamic Behavior and Aspects of Sensor Integration , ISBN 978-3-540-32642-7

[217] M. Weinberg, 1999, Working equations for piezoelectric actuators and sensors," Journal of Microelectromechanical Systems, vol. 8, pp. 529-533, Dec. 1999.

[218] M R Steel, F Harrison and P G Harper, 1978 , The piezoelectric bimorph: An experimental and theoretical study of its quasistatic response, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 11 979 doi:10.1088/0022-3727/11/6/017

[219] J. G. Smits and W.-s. Choi, 1991, The constituent equations of piezoelectric heterogeneous bimorphs, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control 38, 265-279

[220] Kim Sunghwan, (2002), *Low Power Energy Harvesting with Piezoelectric Generator.* Doctoral Dissertation, University of Pittsburgh.

[221] Qing-Ming Wang, Xiao-hong Du, Baomin Xu, and L. Eric Cross ,1999, Theoretical analysis of the sensor effect of cantilever piezoelectric benders, JOURNAL OF APPLIED PHYSICS VOLUME 85, NUMBER 3

[225] Σπύρος Α. Καραμάνος, Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων – Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12: ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ "ΑΣΤΑΘΟΥΣ" ΜΟΡΦΗΣ ΚΑΙ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

[114] Πουλιέζος Α. , Σημειώσεις μεταπτυχιακού Μαθήματος, Βέλτιστος Έλεγχος εκδοχή 1.15, Χανιά, 2010

[115] Process Control & Informatics Unit, NTUA Chemical Enineering, http://www.chemeng.ntua.gr/labs/control_lab/zipfiles/Bathmonomhsh_PID_rythmistwn.pdf 29/11/2012

[116] Παπαλάμπρου Γ., 2012, Ειδικά Συστήματα Ελέγχου Πλοίων (8.3.45.8) – Ανασκόπηση Συστημάτων Ελέγχου, Εργαστήριο Ναυτικής Μηχανολογίας, ΝΜΜ, ΕΜΠ

[117] Παπαλάμπρου Γ., 2012, Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο(8.3.01.5) , Σημειώσεις Μαθήματος 2011-2012, Εργαστήριο Ναυτικής Μηχανολογίας, ΝΜΜ, ΕΜΠ

[118] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrak, An introduction to fuzzy control. 2nd edition, Springer Verlag, 1996

[119] S. Pourzeynali, H.H. Lavasani, A.H. Modarayi, Active control of high rise building structures using fuzzy logic and genetic algorithms. Engineering Structures, 29, 346-357, 2007

[120] A.-P. Wang, Y.-H. Lin, Vibration control of a tall building subjected to earthquake excitation. Journal of Sound and Vibration, 299, 757-773, 2007

[121] D.G. Reigles, M.D. Symans, Supervisory fuzzy control of a base isolated benchmark building utilizing a neuro-fuzzy model of controllable fluid viscous dampers. Journal of Structural Control and Health Monitoring, 13, 724-747, 2006

[122] D.G. Marinova, G.E. Stavroulakis, E.C. Zacharenakis, Robust control of smart beams in the presence of damage-induced structural uncertainties. International Conference PhysCon 2005 August 24-26, 2005, Saint Petersburg, Russia

[123] Maxwell, J.C. (1867). "On Governors". Proceedings of the Royal Society of London 16: 270–283. doi:10.1098/rspl.1867.0055. JSTOR 112510.

[124] Donald M Wiberg. State space & linear systems. Schaum's outline series. McGraw Hill. ISBN 0-07-070096-6.

[125] Liu, Jie, Wang, Golnaraghi, Kubica (2010). "A novel fuzzy framework for nonlinear system control". Fuzzy Sets and Systems 161 (21): 2746–2759

[126] Levine, William S., ed. (1996). The Control Handbook. New York: CRC Press. ISBN 978-0-8493-8570-4.

[127] Karl J. Aström and Richard M. Murray (2008). Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers.. Princeton University Press. ISBN 0-691-13576-2.

[128] Franklin et al. (2002). Feedback Control of Dynamic Systems (4 ed.). New Jersey: Prentice Hall. ISBN 0-13-032393-4.

[129] Diederich Hinrichsen and Anthony J. Pritchard (2005). Mathematical Systems Theory I - Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness. Springer. ISBN 3-540-44125-5.

[130] Sontag Eduardo (1998). Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems. Second Edition. Springer. ISBN 0-387-98489-5.

[131] Luyben William (1989). Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineers. Mc Graw Hill. ISBN 0-07-039159-9.

[132] Μαρακάκης, Μάνεσης Α. Σταμάτης, «Συστήματα Βιομηχανικών Αυτοματισμών», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

[133] Joao P. Hespanha, LQG/LQR controller design, Undergraduate Lecture Notes, 2007

[134] Zadeh, L.A., Fuzzy Sets. Information and Control, 8, 338-353, (1965).

[135] Ατσαλάκης Γ., (2006) , Διδακτορική Διατριβή, Σύστημα πρόβλεψης τη βραχυχρόνιας τάσης της τιμής των μετοχών με χρήση νευρο-ασαφών μεθόδων, ΠΚ

[136] Κάλροβιτς Ν., (2005), Διπλωματική Εργασία, Μοντελοποίηση του προβλήματος της επιπροσθετικότητας ενεργειακών έργων του Πρωτοκόλλου του Κιότο με βάση κανόνες IF-THEN ασαφούς λογικής, ΕΜΠ

[137] Σαρρή Μ.-Ε., (2006), Διπλωματική Εργασία, Αξιοποίηση Ασαφούς Λογικής στη Διαμόρφωση Πλάνου Παραγωγής, ΕΜΠ

[138] Βουμβουλάκης Ε. (2003), Διπλωματική Εργασία, Βραχυπρόθεσμη Πρόβλεψη Φορτίου με χρήση Νευρωνικών Δικτύων και Ασαφούς Λογικής, ΕΜΠ.

[139] Βολογιαννίδης Σ., Διδακτικές Σημειώσεις, Ευφυής Έλεγχος, Θεωρία και Εφαρμογές, ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ.

[140] Νικολάου Ε. (2007), Διπλωματική Εργασία, Συγκριτική Ανάλυση και Εφαρμογή Γραμμικών, Μη-Γραμμικών και Νευρο-Ασαφών Μεθόδων, για τη Βραχυπρόθεσμη Πρόβλεψη Παραγωγής Ενέργειας από Αιολικά Πάρκα, Π.Κ.

[141] Neuro-Fuzzy And Soft Computing - J Jang C Sun (Ptc 1997)

[142] Ι. Βλαχάβας, Π. Κεφαλάς, Ν. Βασιλειάδης, Φ. Κόκκορας, Η. Σακελλαρίου. Τεχνητή Νοημοσύνη - Γ' Έκδοση, ISBN: 978-960-8396-64-7 , Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, 2011

[143] Κωνσταντίνος Διαμαντάρας, Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN : 978-960-461-080-8

[144] Kartalopoulos V. S., Understanding Neural Networks and Fuzzy Logic, IEEE Press. New York, (1996).

[145] Jang, J-S.R., C-T.E. Sun and E. Mizutani, Neuro-fuzzy and soft computing : a computational approach to learning and machine intelligence, Prentice Hall, (1997).

[222] Michael Hatch, 2000, Vibration Simulation Using Matlab and Ansys, CHAPMAN & HALL/CRC ISBN-10: 1584882050 | ISBN-13: 978-1584882053 |

[227] J.-S. Roger Jang & Ned Gulley, 1995, MATLAB® Fuzzy Logic Toolbox User's Guide Version 1

Κεφάλαιο 4

[146] Providakis C.P., Voutetaki M.E., 2005a, "Stability and Integrity of Thermal Actuators Using Local and Global Density", in Proceedings of 'the 1st International Conference on Experiments/Process/System Modelling/Simulation/Optimization (1st IC-EpsMsO)', Athens, 6-9 July, 2005

[147] Providakis C. P., Voutetaki M. E., Kontoni D.- P. N. & Stauroulaki M. E., 2005b, 'A Comparison of active constrained layer damping treatments using FEM modeling of electromechanical impedance', in 'Advances in Computational & Experimental Engineering and Sciences - Proceedings of the 'International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences', (ICCES'05), 1-6 Dec. 2005, Chennai, India.

[148] Providakis C. P., Voutetaki M. E., Stauroulaki M. E. & Kontoni D.- P. N., 2005c, 'FEM Modeling of Electromechanical Impedance for the Analysis of Smart Damping Treatments', in Proceedings of the 'International Conference on Industrial Electronics, Technology & Automation 2005 (IETA 05) – International Joint Conferences on Computer, Information, and Systems Sciences, and Engineering 2005 (CISSE 2005)', 12-18 Dec. 2005, and also in Hardcover Proceedings 'Advances in Computer, Information, and Systems Sciences, and Engineering – Proceedings of IETA 2005, TeNe 2005 and EIAE 2005', Elleithy K., Sobh T., Mahmood A., Iskander M. & Karim M. (Eds.), 2006, Hardcover, Springer, pp. 129-133.

[149] Providakis C.P., Voutetaki M.E., 2006, 'Seismic Damage Detection Using Smart Piezo-Transducers and Electromechanical Impedance Signatures', in Proceedings of 'First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology 1st ECEES', Geneva, Switzerland, 3-8 September, Paper Number: 307.

[150] COMSOL Multiphysics User's Guide, October 2007

[151] Flaherty Joseph E., Course Notes - Finite Element Analysis CSCI-6860 / MATH-6860, Rensselaer Polytechnic Institute, http://www.cs.rpi.edu//~flaherje/pdf/fea4.pdf (22/12/2012)

[152] Flaherty Joseph E., Course Notes - Finite Element Analysis CSCI-6860 / MATH-6860, Rensselaer Polytechnic Institute, http://www.cs.rpi.edu//~flaherje/pdf/fea2.pdf (22/12/2012)

[223] Stavroulakis G.E., Foutsitzi G., Hadjigeorgiou E., Marinova D.G. & Baniotopoulos C. C.(2005). Design and robust optimal control of smart beams with application on vibrations suppression. Advances in Engineering Software, 36, 806–813.

[224] Tairidis G.K., Stavroulakis G.E., Marinova D.G. & Zacharenakis E.C., (2007), Classical and soft robust active control of smart beams. In M.Papadrakakis, D. C. Charmpis, N.D. Lagaros & Y.Tsompanakis (Eds.), ECCOMAS thematic conference on computational methods instructural dynamics and earthquake engineering, Rethymno, Crete, Greece.

[226] Marinaki, M., et al. Fuzzy control optimized by PSO for vibration suppression of beams. Control Engineering Practice (2010), doi:10.1016/j.conengprac.2010.03.001

[228] E.P. Hadjigeorgiou, G.E. Stavroulakis, Massalas, 2006, Shape control and damage identification of beams using piezoelectric actuation and genetic optimization, International Journal of Engineering Science 44 (2006) 409–421

Ιστότοποι

http://www.physikinstrumente.com/en/products/piezo_tutorial_features.php 15/6/2013

http://ecee.colorado.edu/~bart/book/book/chapter3/ch3_3.htm 15/6/2013

http://www-personal.umich.edu/~weilu/me574/7/group1/generatefield.html 15/6/2013

http://www.piezo.com/tech2intropiezotrans.html 15/6/2013

http://www.piezo.com/tech1terms.html 15/6/2013

http://www.mathworks.com/help/fuzzy/index.html 15/6/2013

http://enpub.fulton.asu.edu/powerzone/fuzzylogic/index.htm 15/6/2013

6.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

«ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ-ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

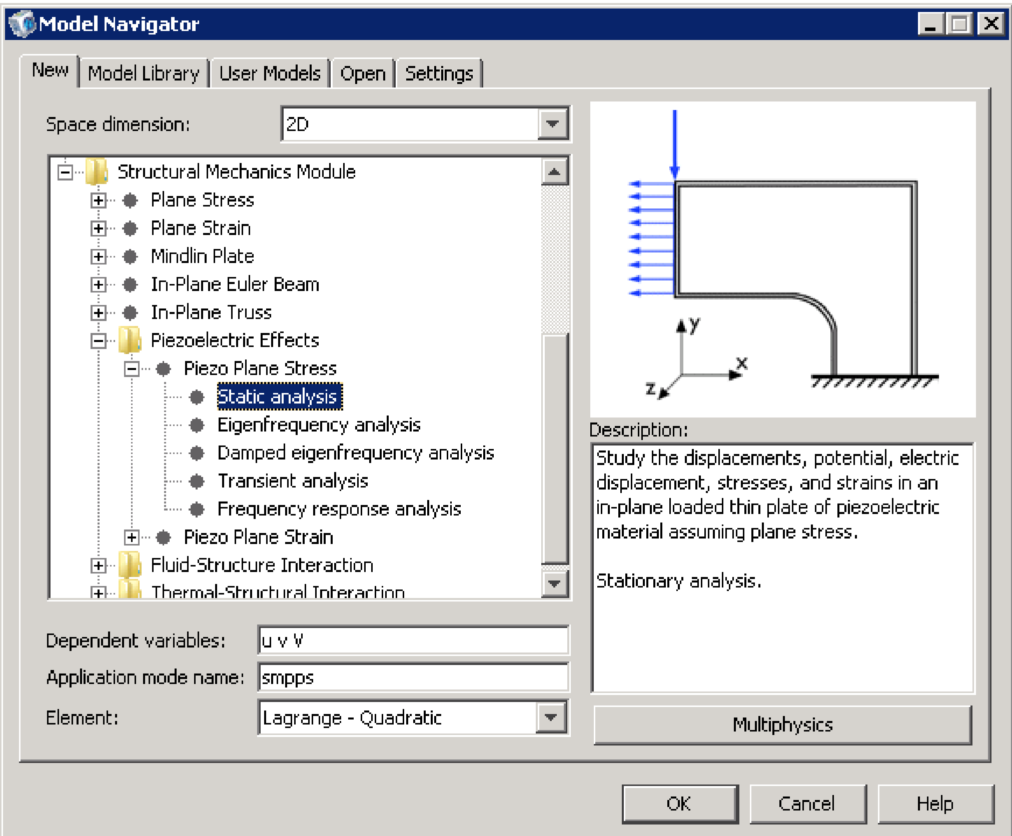
ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΔΟΚΟΥ

ΣΤΟ COMSOL»

Το παρακάτω κείμενο μοντελοποιεί το πρόβλημα στατικής ανάλυση μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού η οποία μπορεί να φορτιστεί ηλεκτρικά και μηχανικά

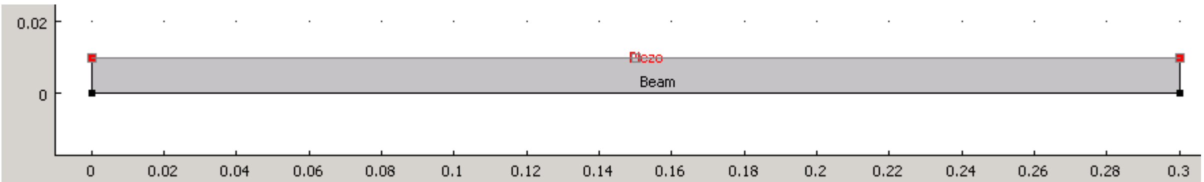
Σχεδιασμός

1. Αρχίζουμε το Comsol : **start-> Comsol Multiphysics 3.4**
2. Επιλέγουμε **new->space dimension->2D**
3. Στο application modes επιλέγουμε **Structural Mechanics Module->Piezoelectric Effects->Piezo Plane Stress->Static Analysis**

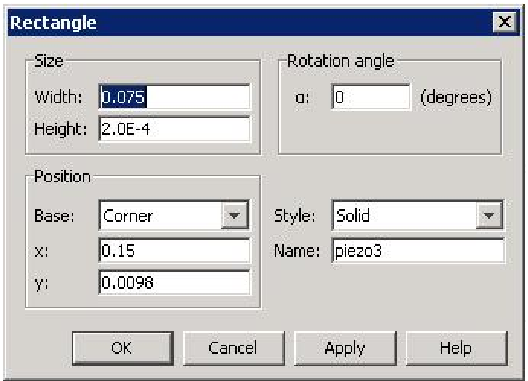


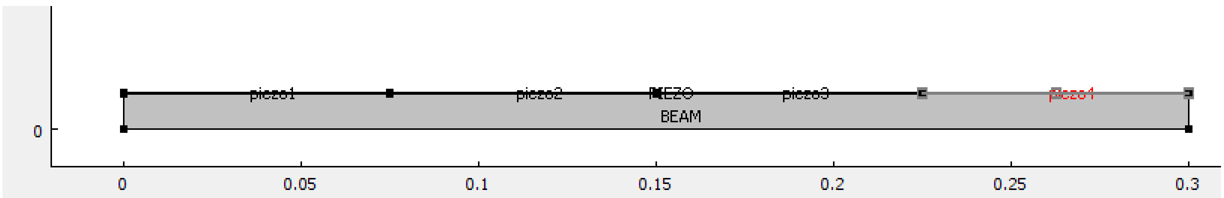
4. Σχεδιάζουμε το βασικό ορθ. Παρ/μο με παραμέτρους : Width 0.3m=30cm και Height 0.01m= 1cm (Δηλαδή έχουμε σχεδιάσει το περιέχον ορθ. Παρ/μο).

5. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε ακόμα ένα , αυτό του pzt. , με παραμέτρους : Width 0.3m=30cm και Height 0,0002m=0,02cm και το τοποθετούμε στο άνω άκρο του περιέχοντος ορθ. Παρ/εδου (4). Οπότε συμπληρώνουμε και τις παραμέτρους στο **Axis Base Point** όπου το ορθ. Παρ/εδο (5) ξεκινάει από το τέλους της κάτω (ή πάνω) πλάκας αλουμινίου που έχει πάχος 0,2mm. Ως εκ τούτου στο **Base Point** x=0 y=0.0098 .



6. Τέλος ακολουθούμε τη παρακάτω διαδικασία για να σχεδιάσουμε ακόμα 4 που θα χωρίζουν το βασικό ορθ. Παρ/μο PIEZO σε 4 ίσα μέρη. Τα στοιχεία κάθε ορθ. Παρ/μου έχει στοιχεία : w=0.075, h: 2.0E-4 , x=0/0,075/0,15/0,225 , y=0,0098





Ιδιότητες υλικών

Αν και υπάρχει μεγάλη ποικιλία υλικών στη βιβλιοθήκη του COMSOL θα εισάγουμε το υλικό carbon/epoxy T300/976:

1. **Options -> Materials/Coefficients Library**
2. **New**
3. Αλλάζουμε το Name “Material 1” σε **T300/976 carbon/epoxy** και ορίζουμε τις παρακάτω παραμέτρους του υλικού.
4. **Ιδιότητες Υλικών:**

	Μονάδες	**Δοκός** Γραφίτης / Εποξικό T300/976	
Μέτρο Ελαστικότητηας Young	N/m^2	E	1,5e11
Πυκνότητα	Kg/m^3	ρ	1600
Λόγος Poisson		v	0,29

5. **Apply**
6. **Ok**

Φυσικές Συνθήκες

Γενικές Ρυθμίσεις

1. Ανοίγουμε **Physics -> Subdomain Settings** και επιλέγουμε το tab s**tructural**
2. Επιλέγουμε το **subdomain 1** που είναι η κάτω παχιά στρώση της προβόλου.
3. Επιλέγουμε πως είναι υλικό **Decoupled isotropic**, από το **Material Model**
4. Από το **library material** επιλέγουμε το υλικό που εισαγάγαμε T300/976 carbon/epoxy.
5. Πατάμε **Apply**.
6. Επιλέγουμε **subdomain 2,3,4 και 5**
7. Το **material orientation** το αφήνουμε σε **xz plane.**
8. Από **Library material** ->**Load** επιλέγουμε το **PZT-4D**

Α) Φόρτιση Μηχανικής Δύναμης

Συνοριακές Συνθήκες

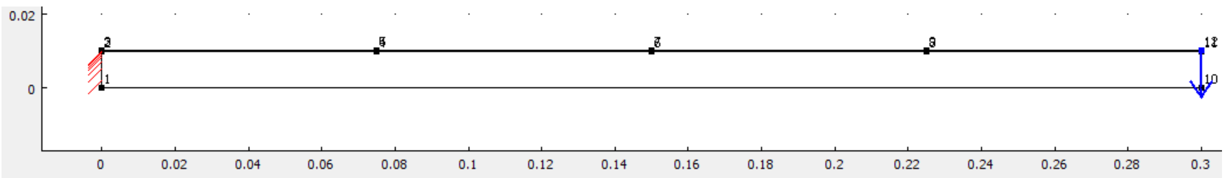
1. Επιλέγουμε **Physics->Boundary Settings** και επιλέγουμε το **interior boundaries**. Επεξήγηση: Το interior boundary σημαίνει ότι βρισκόμαστε εντός του φυσικού πεδίου της κατασκευής και συνήθως η συνθήκη που το εκφράζει είναι η συνέχεια (continuity). Για προσδιορισμό ειδικής συνθήκης το επιλέγουμε ώστε να μπορέσουμε να το τροποποιήσουμε.
2. Επιλέγουμε τα όρια **1 και 3** ως **fixed** (πάκτωση)
3. Όλα τα υπόλοιπα όρια τα επιλέγουμε **ως Free** και με **Zero Charge / symmetry**
4. και πατάμε ΟΚ.

-Επεξήγηση

Zero Charge / symmetry: Το κάθετο διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης είναι μηδενικό. **n • D** = 0. Δεν έχουμε επιβάλει σε κανένα όριο ηλεκτρικό φορτίο.

Σημειακές Συνθήκες

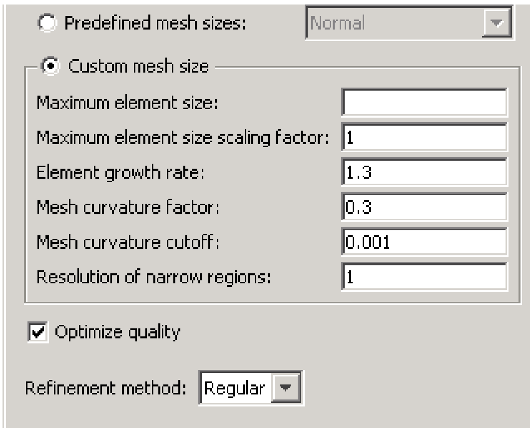
1. Επιλέγουμε **Physics->Point Settings**.
2. Επιλέγουμε το σημείο **12** και εφαρμόζουμε δύναμη **10 N** προς τον y'
3. και πατάμε ΟΚ.



Διακριτοποίηση

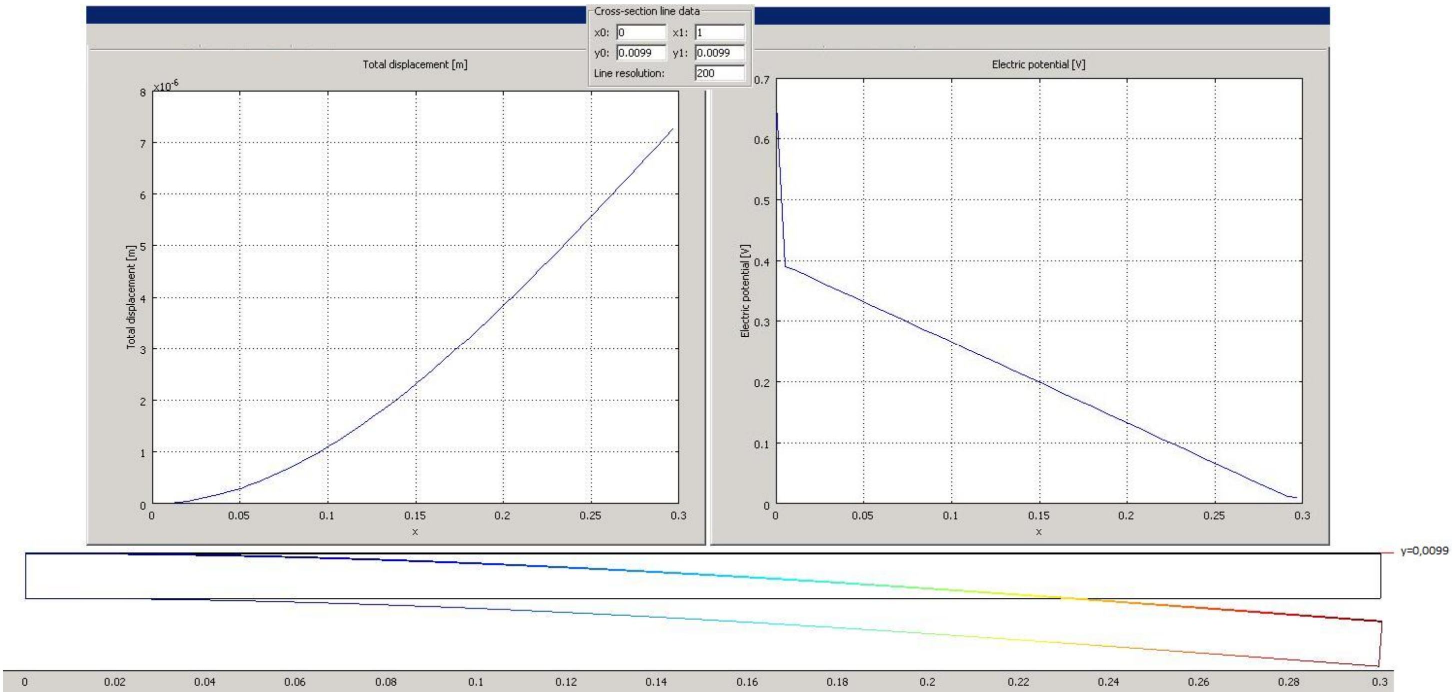
1. Επιλέγουμε **Mesh**
2. Κλικ **remesh, ok** (Στο συγκεκριμένο παράδειγμα με refine mesh δεν έχουμε καλύτερα αποτελέσματα.)

Οι προεπιλογές είναι:



Επίλυση

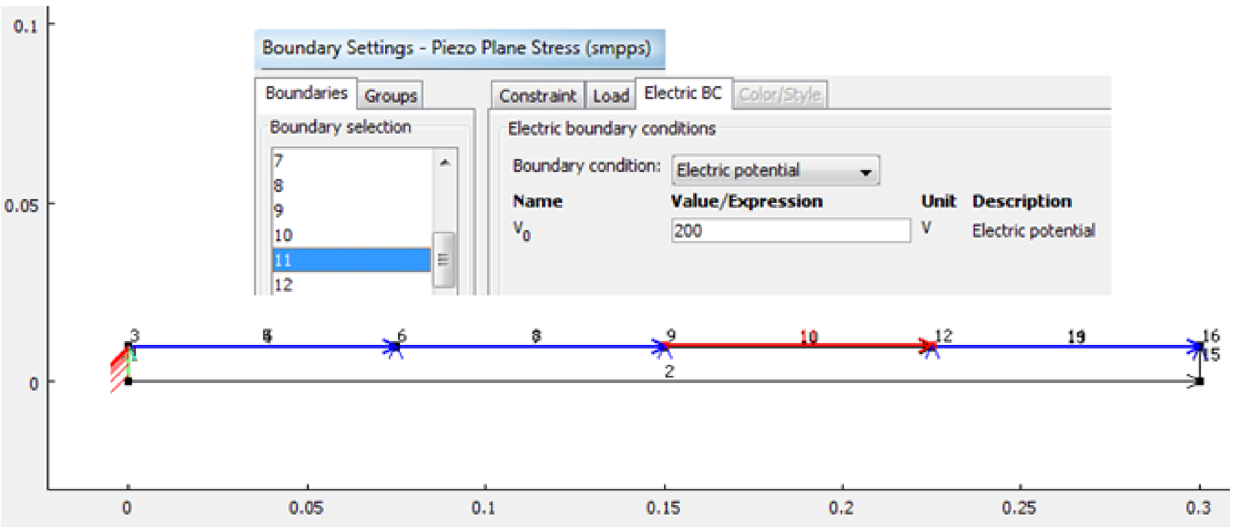
1. Πριν πατήσουμε Solve αλλάζουμε τη προεπιλογή για το plot ώστε να παρουσιάσει μια οριακή εικόνα χρησιμοποιώντας τη παραμορφωμένη δοκό.
2. **Postprocessing->Plot Parametres**
3. Στο General -> **επιλέγουμε το Boundary , το Surface και το Deformed shape**
4. Στο **Boundary** tab και **Surface** tab μπορούμε να επιλέξουμε το μέγεθος που θέλουμε να απεικονίσουμε. (Αφού επιλυθεί το πρόβλημα μπορούμε να επιλέξουμε διαφορετικό μέγεθος προς απεικόνιση)
5. **Οκ**
6. **SOLVE**



Β) Φόρτιση Ηλεκτρικής Τάσης

Συνοριακές Συνθήκες

1. Επιλέγουμε **Physics->Boundary Settings** και κλικαρουμε το **interior boundaries**. Επεξήγηση: Το interior boundary σημαίνει ότι βρισκόμαστε εντός του φυσικού πεδίου της κατασκευής και συνήθως η συνθήκη που το εκφράζει είναι η συνέχεια. Για προσδιορισμό ειδικής συνθήκης το επιλέγουμε ώστε να μπορέσουμε να το τροποποιήσουμε.
2. Επιλέγουμε τα όρια **1 και 3** ως **fixed** (πάκτωση)
3. Όλα τα υπόλοιπα όρια τα επιλέγουμε **ως Free** και με **Zero Charge / symmetry**
4. Επιλέγουμε το όριο 10 ως γειωμένο (**Ground**) και στο όριο 11 εφαρμόζουμε τάση(**Electric Potential**.) Vo=200 V. Ως εκ τούτου υπάρχει μια διαφορά δυναμικού μεταξύ ορίων 11 και 10 της τάξης των 2000V.
5. και πατάμε ΟΚ.



Επεξήγηση

Zero Charge / symmetry: Το κάθετο διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης είναι μηδενικό. **n • D** = 0. Δεν έχουμε επιβάλει σε κανένα όριο ηλεκτρικό φορτίο.

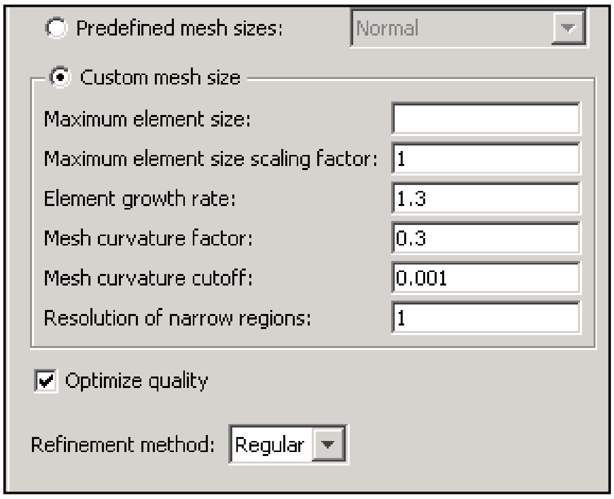
Σημειακές Συνθήκες

1. Δε κάνουμε κάποια επιλογή.

Διακριτοποίηση

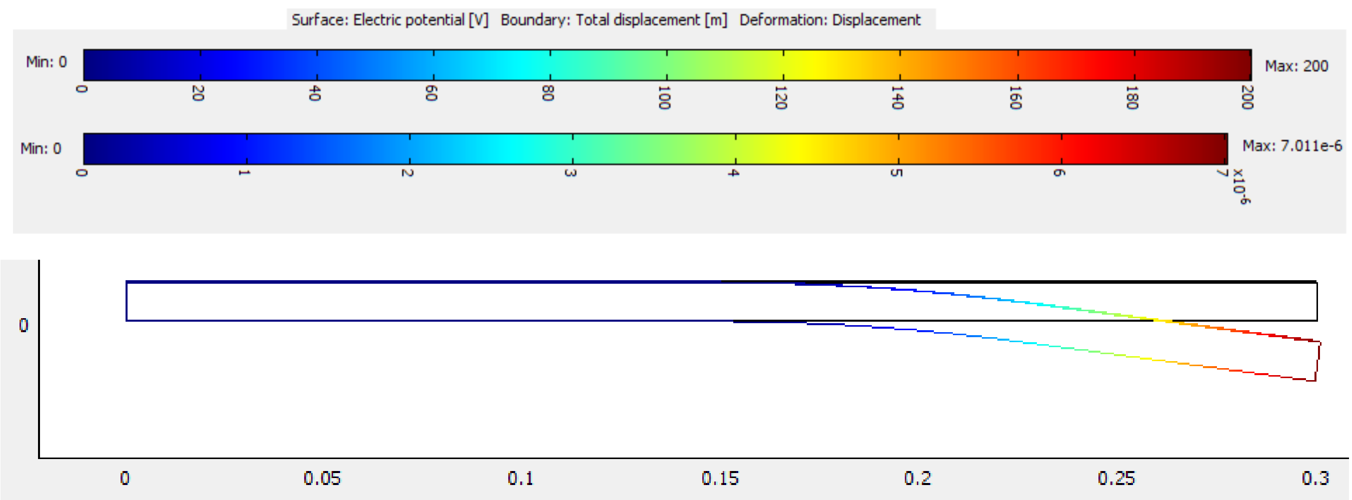
3. Επιλέγουμε **Mesh**
4. Κλικ **remesh, ok** (Στο συγκεκριμένο παράδειγμα με refine mesh δεν έχουμε καλύτερα αποτελέσματα.)

Οι προεπιλογές είναι:



Επίλυση

7. Πριν πατήσουμε Solve αλλάζουμε τη προεπιλογή για το plot ώστε να παρουσιάσει μια οριακή εικόνα χρησιμοποιώντας τη παραμορφωμένη δοκό.
8. **Postprocessing->Plot Parametres**
9. Στο General -> **επιλέγουμε το Boundary , το Surface και το Deformed shape**
10. Στο **Boundary** tab και **Surface** tab μπορούμε να επιλέξουμε το μέγεθος που θέλουμε να απεικονίσουμε. (Αφού επιλυθεί το πρόβλημα μπορούμε να επιλέξουμε διαφορετικό μέγεθος προς απεικόνιση)
11. **Οκ**
12. **SOLVE**



Εξαγωγή Μοντέλου και Αποτελεσμάτων στο Matlab

File -> Export -> FEM structrure as "fem" ή **Ctrl+F**

Απεικόνιση κύριων κόμβων στο MATLAB:

```
>>meshplot(fem,'Nodelabels','on' )
```

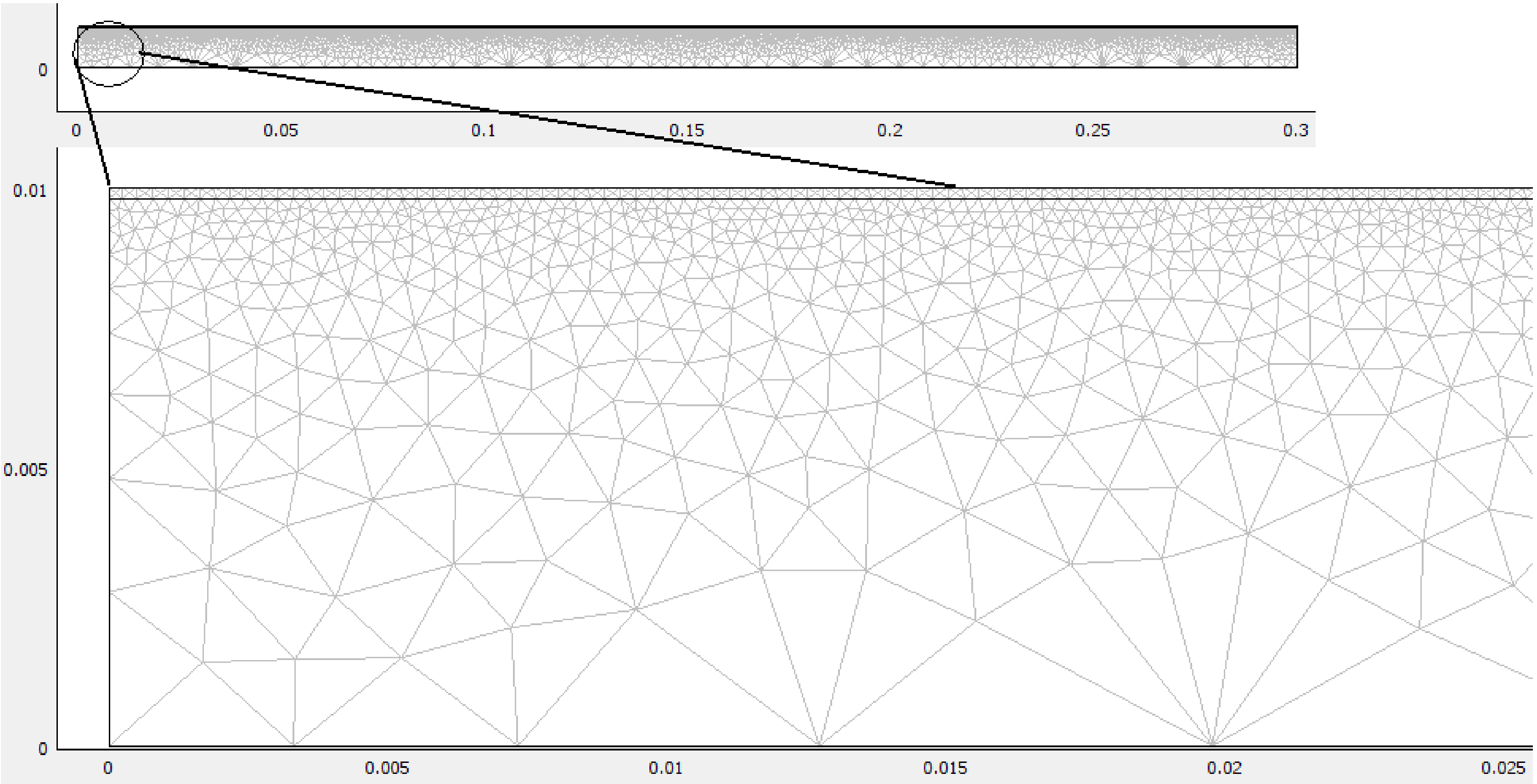
Απεικόνιση Βαθμών Ελευθερίας στο MATLAB:

```
>> DOFS = XMESHINFO(fem,'out','dofs')
>> scatter(DOFS.coords(1,:), DOFS.coords (2,:),'filled')
```

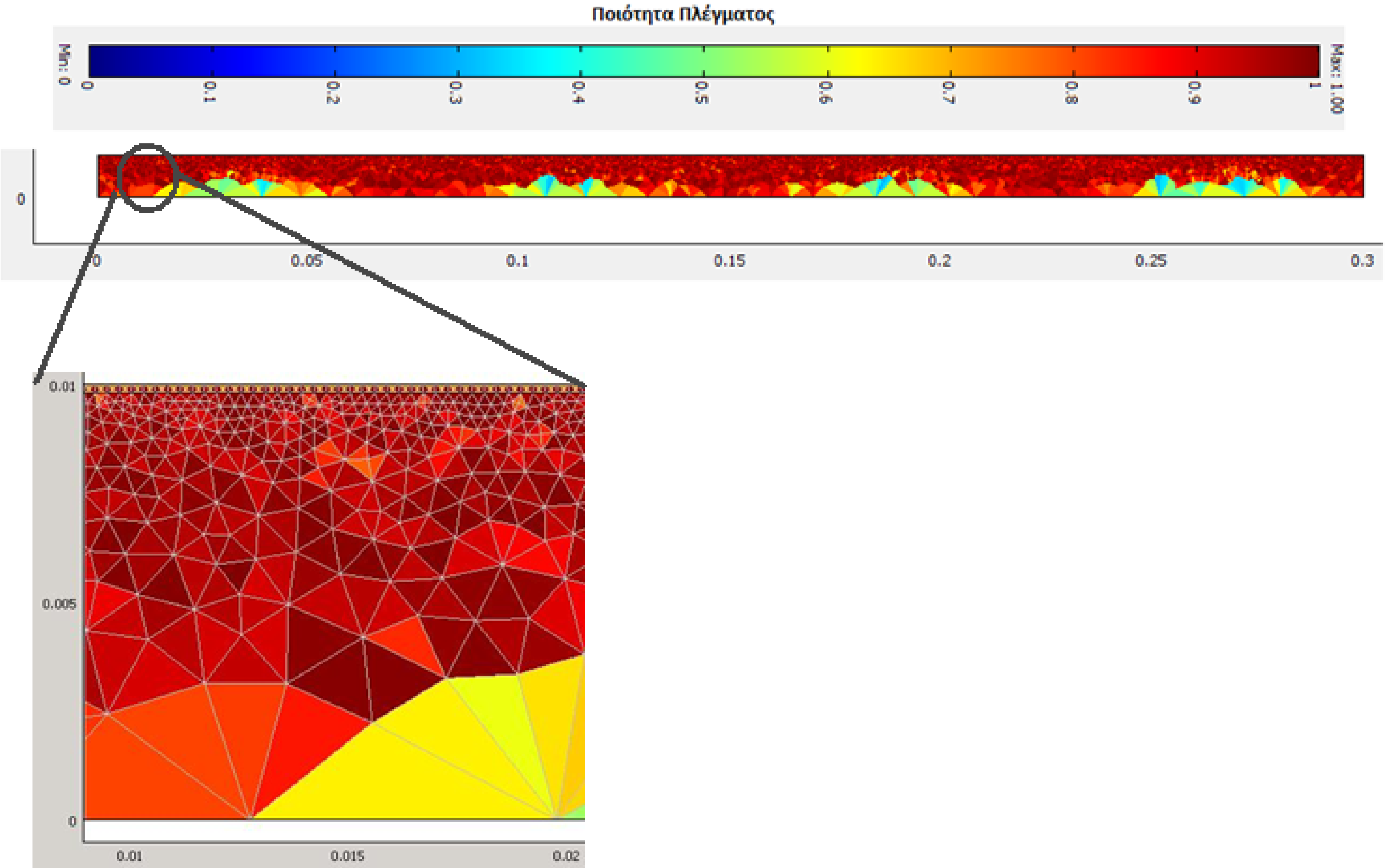
7.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

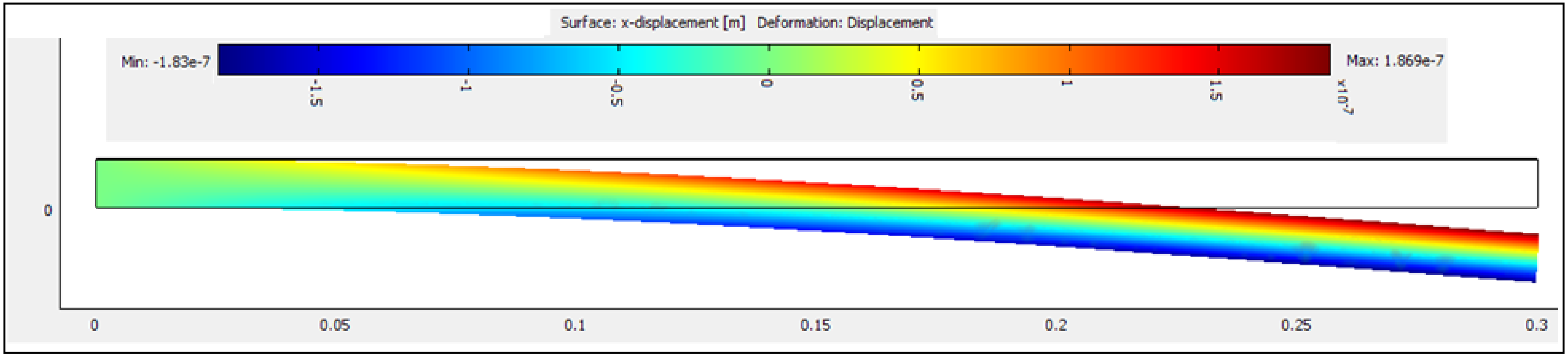
«ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β - ΕΙΚΟΝΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ & ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ COMSOL**»**



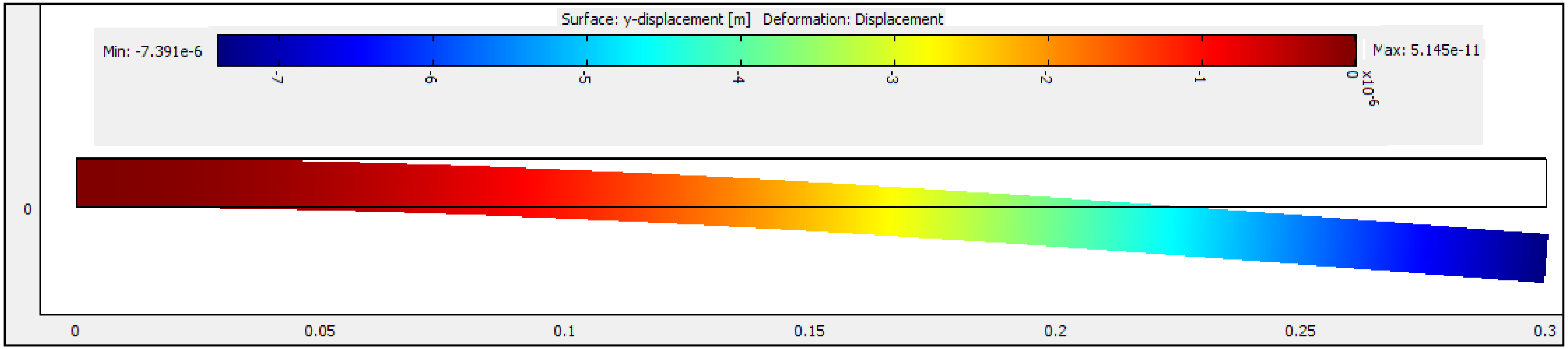
Εικόνα 4.2.4: *Τριγωνικά στοιχεία διακριτοποίησης.*



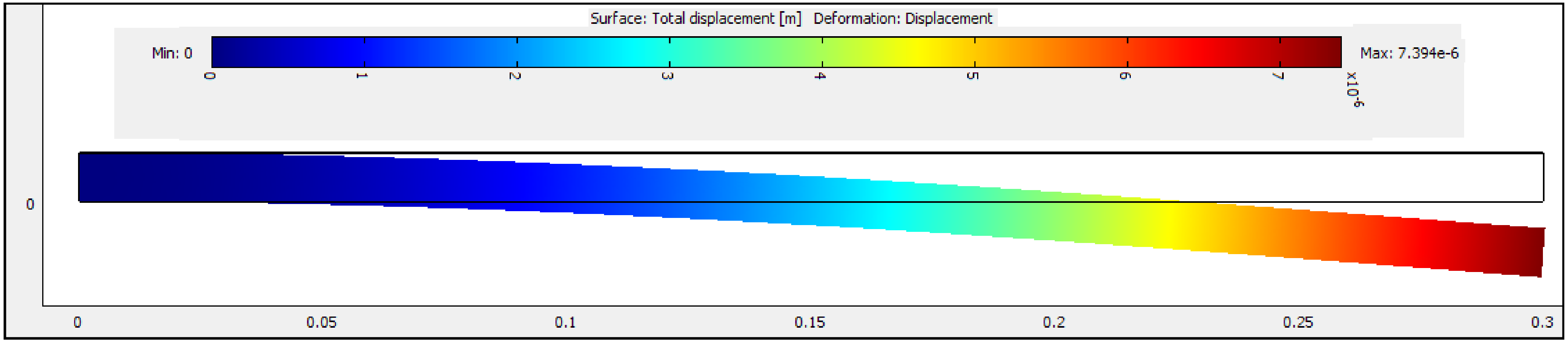
Εικόνα 4.2.5: *Ποιότητα στοιχείων διακριτοποίησης.*



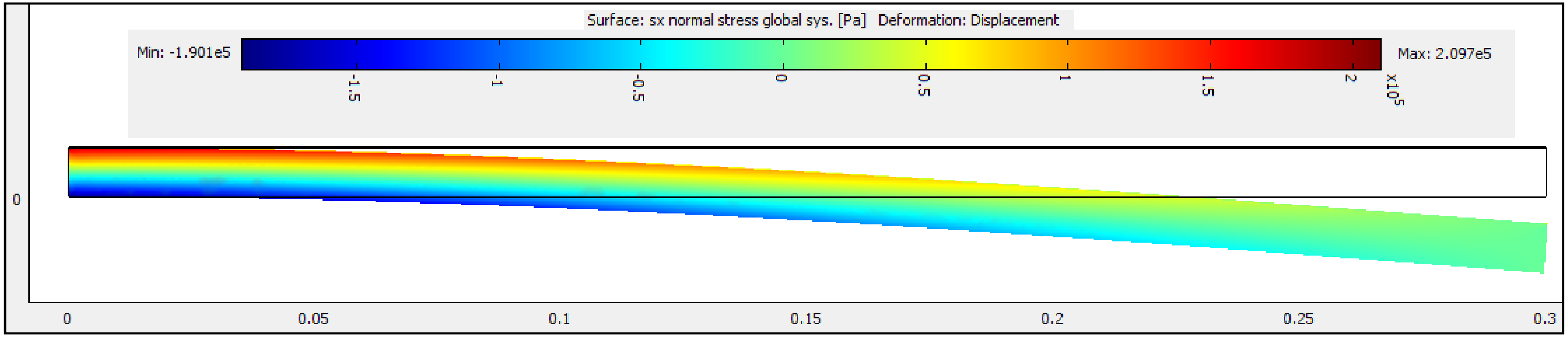
Εικόνα 4.2.6: *Μετατόπιση [m] κατά τον άξονα x*



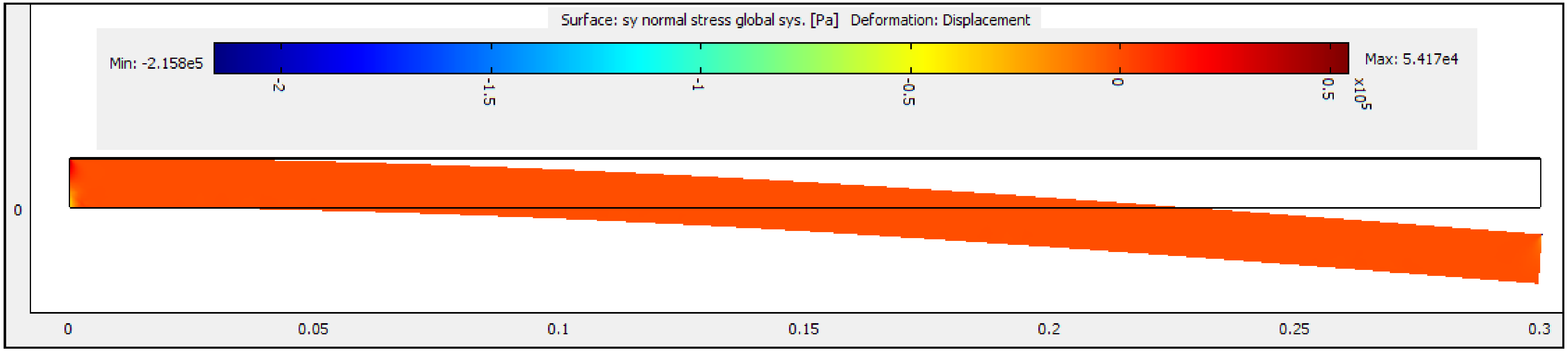
Εικόνα 4.2.7: *Μετατόπιση [m] κατά τον άξονα y*



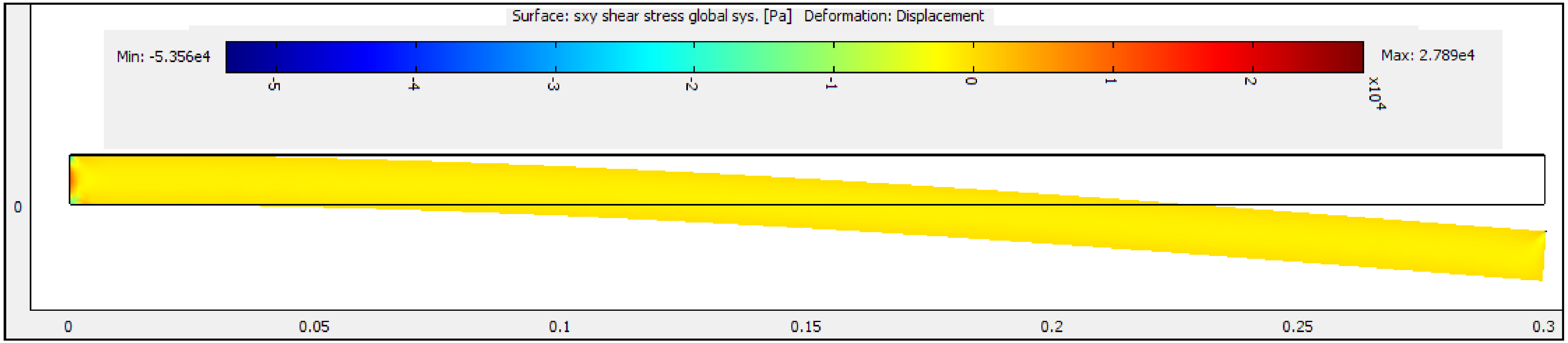
Εικόνα 4.2.8*: Συνολική Μετατόπιση [m]*



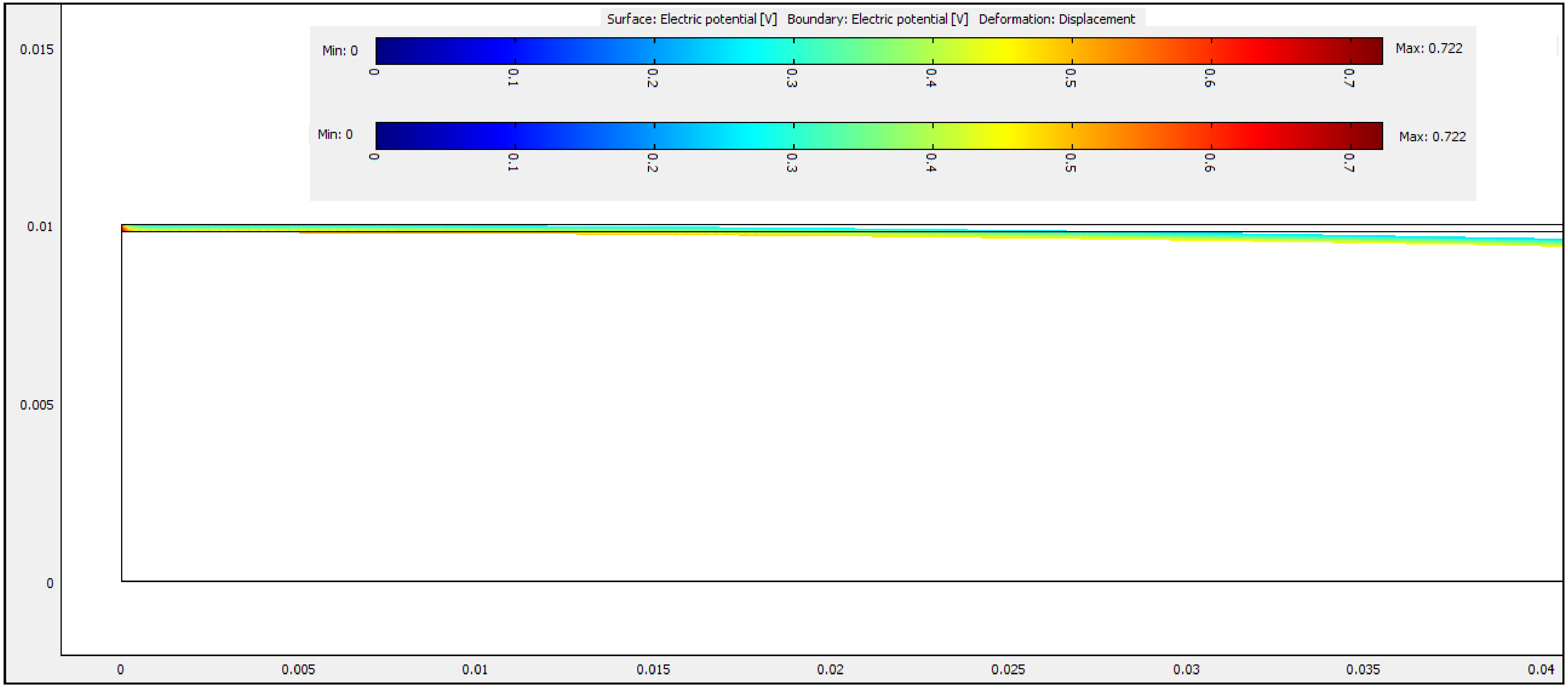
Εικόνα 4.2.9*: Δημιουργία ορθών τάσεων [Pa] κατά τον άξονα x*



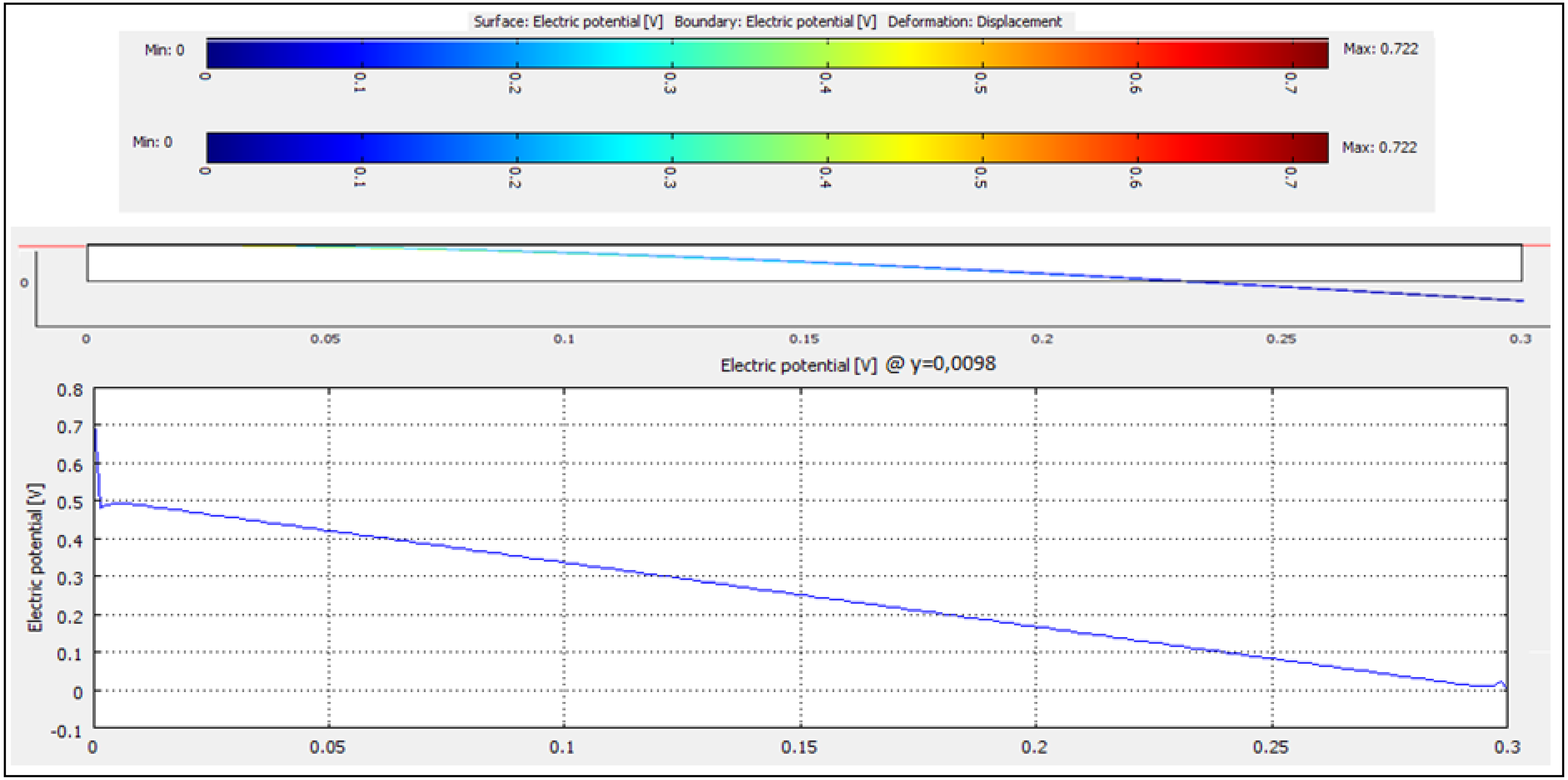
Εικόνα 4.2.10*: Δημιουργία ορθών τάσεων [Pa] κατά τον άξονα y.*



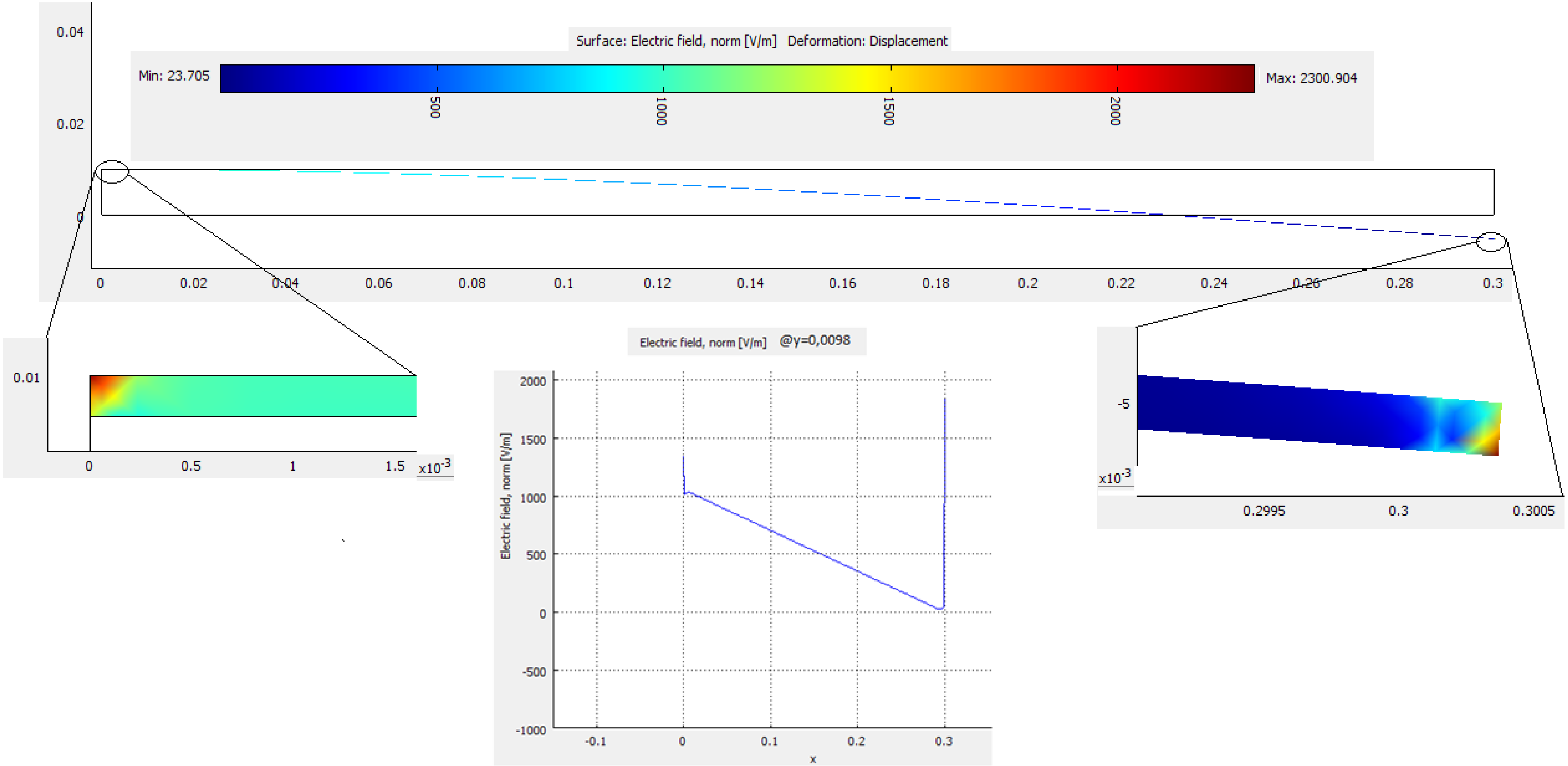
Εικόνα 4.2.11*: Δημιουργία διατμητικών τάσεων [Pa] κατά το επίπεδο xy.*



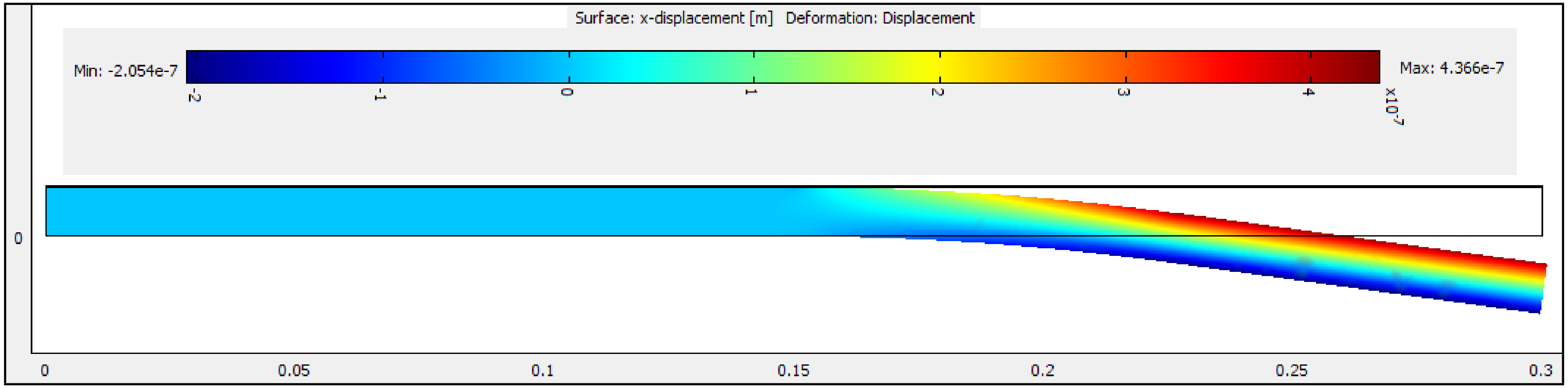
***Εικόνα 4.2.12**: Ηλεκτρικό Δυναμικό [V] που εμφανίστηκε στο κομμάτι του πιεζοηλεκτρικού υλικού για x=0 έως x=0.04.*



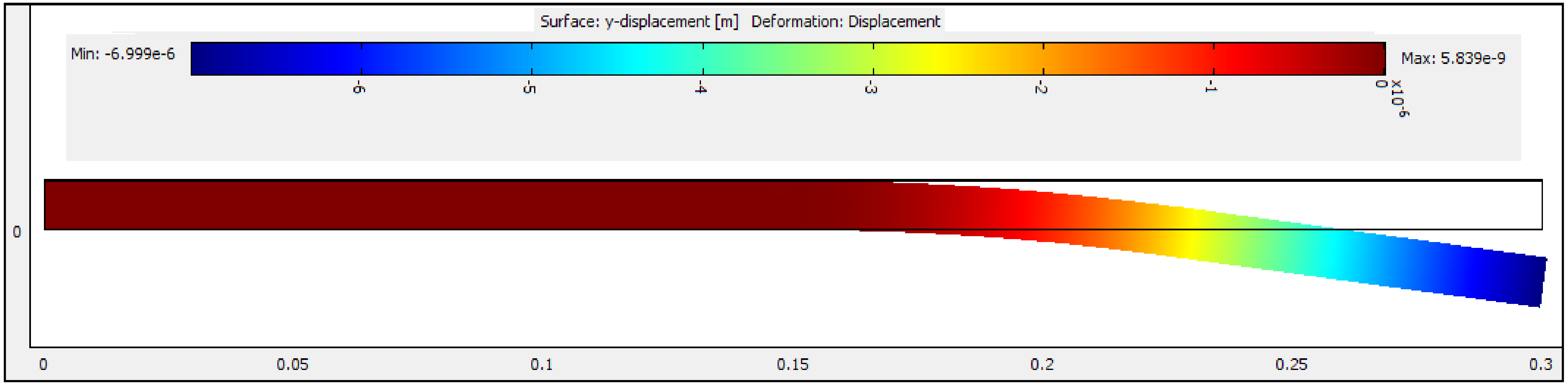
Εικόνα 4.2.13: *Ηλεκτρικό Δυναμικό [V] που εμφανίστηκε σε όλη τη πιεζοηλεκτρική στρώση και μεταβολή του κατά τον x για y=0,0098*



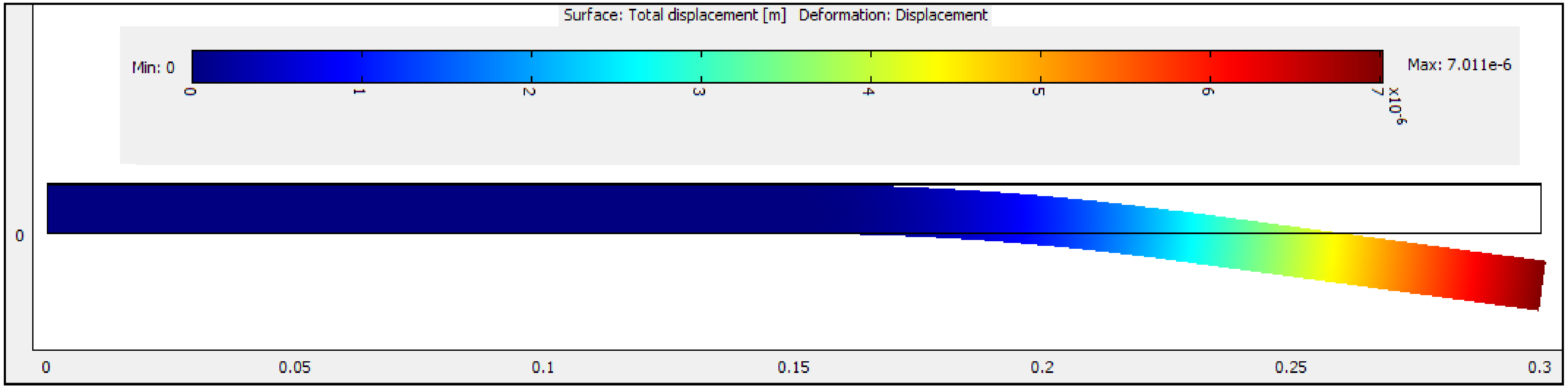
Εικόνα 4.2.14: *Ηλεκτρικό πεδίο ($|E_\varphi|$ [V/m]) στη πιεζοηλεκτρική στρώση και $|E_\varphi|$ $\forall x$ και y=0,0098*



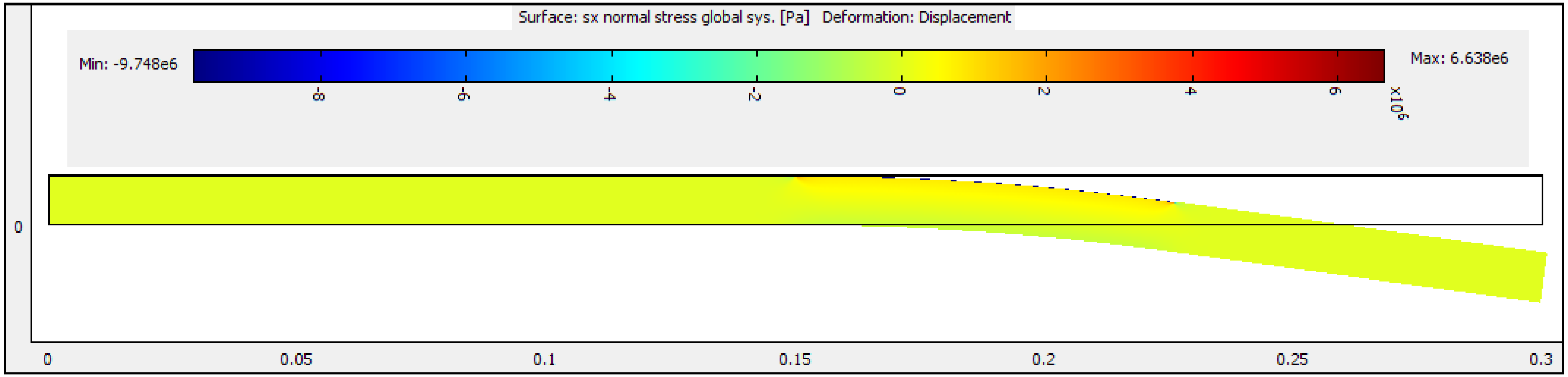
Εικόνα 4.2.15: *Μετατόπιση [m] κατά τον άξονα x*



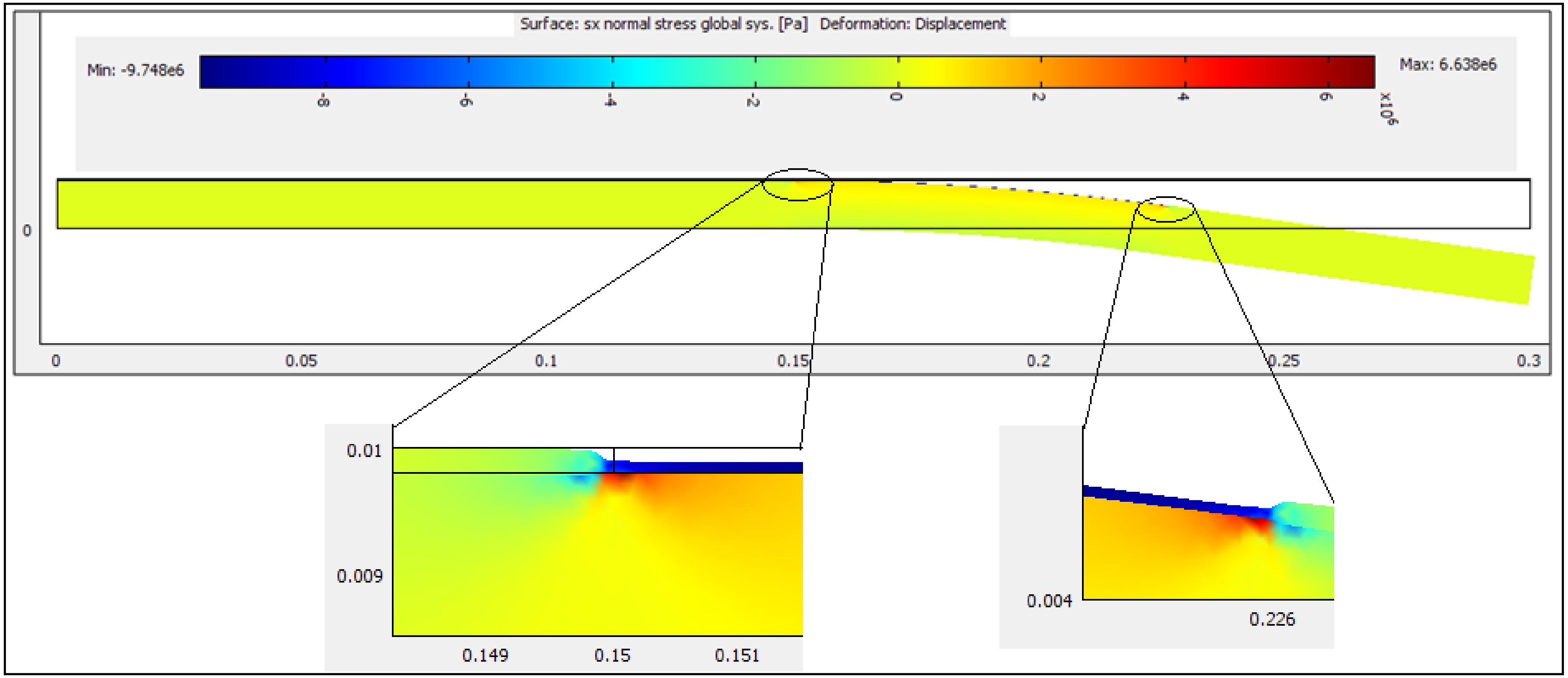
Εικόνα 4.2.16: *Μετατόπιση [m] κατά τον άξονα y*



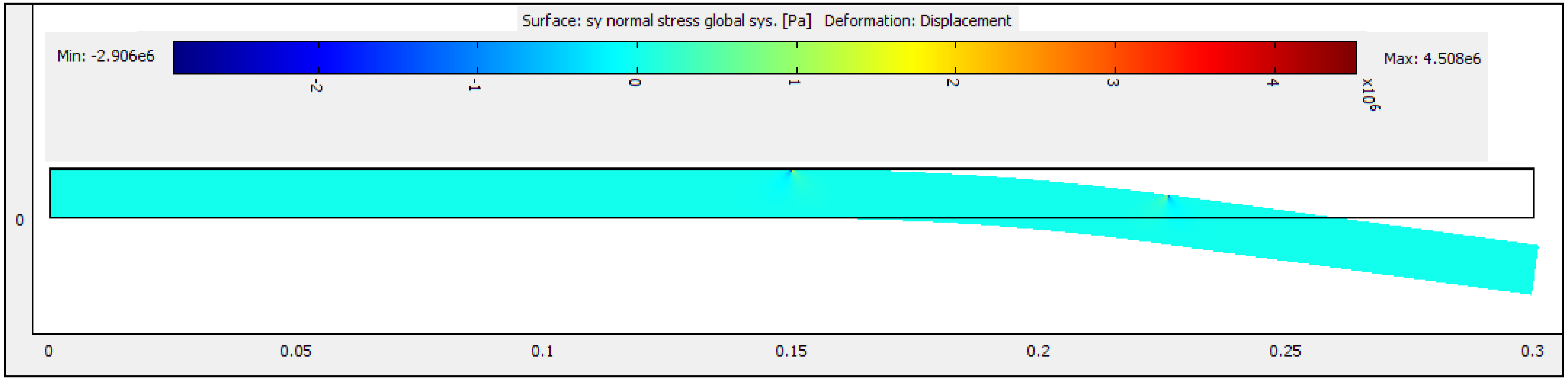
Εικόνα 4.2.17: *Συνολική Μετατόπιση [m]*



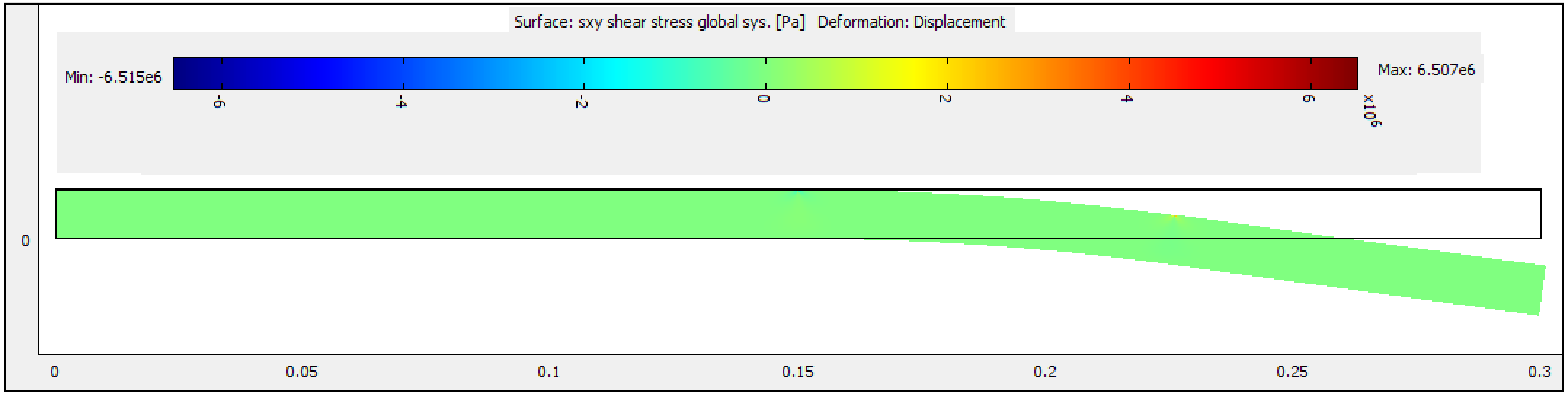
Εικόνα 4.2.18: *Δημιουργία ορθών τάσεων [Pa] κατά τον άξονα x*



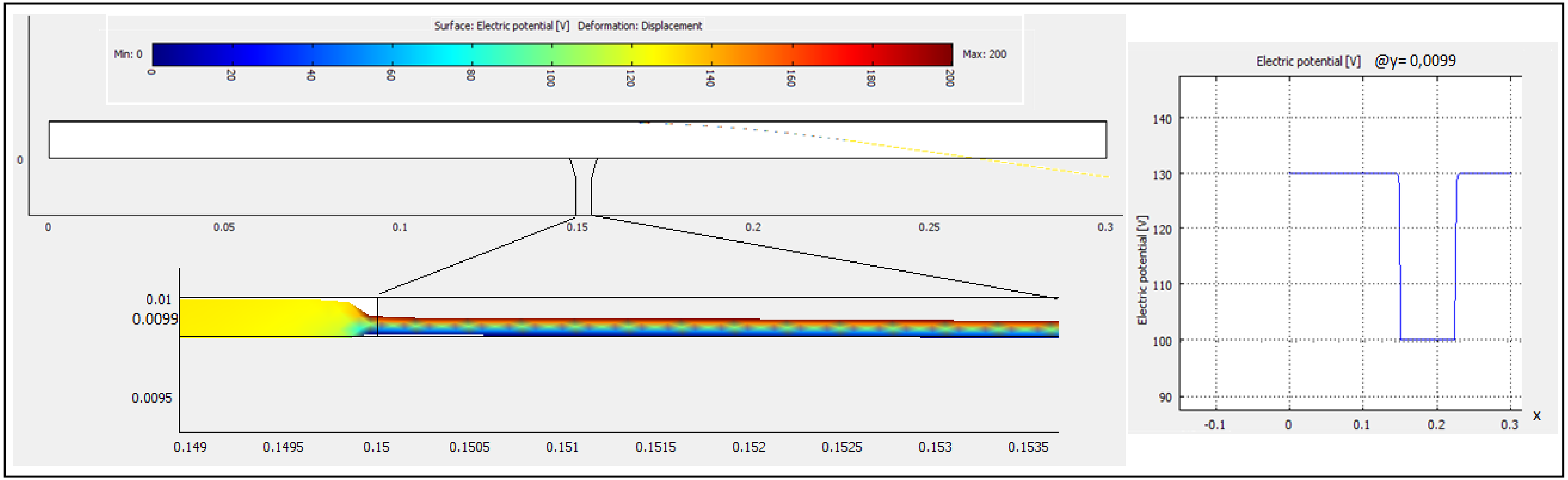
Εικόνα 4.2.19: *Απεικόνιση ορθών τάσεων κατά x κοντά στα σημεία x=0,15 και x=0,225*



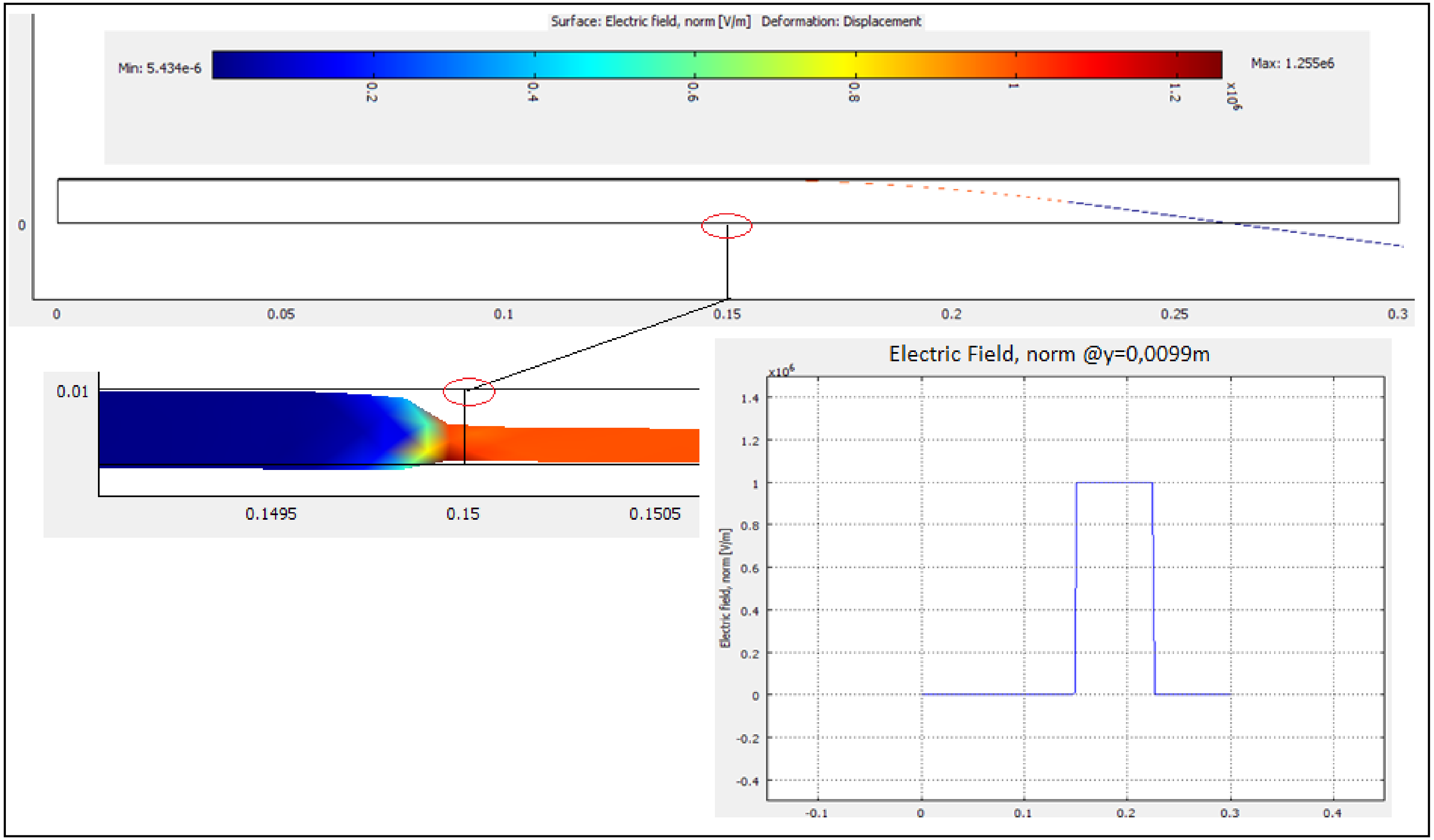
Εικόνα 4.2.20: *Δημιουργία ορθών τάσεων [Pa] κατά τον άξονα y.*



Εικόνα 4.2.21: *Δημιουργία διατμητικών τάσεων [Pa] κατά το επίπεδο xy.*



Εικόνα 4.2.22: *Ηλεκτρικό Δυναμικό [V]στη πιεζοηλεκτρική στρώση.*

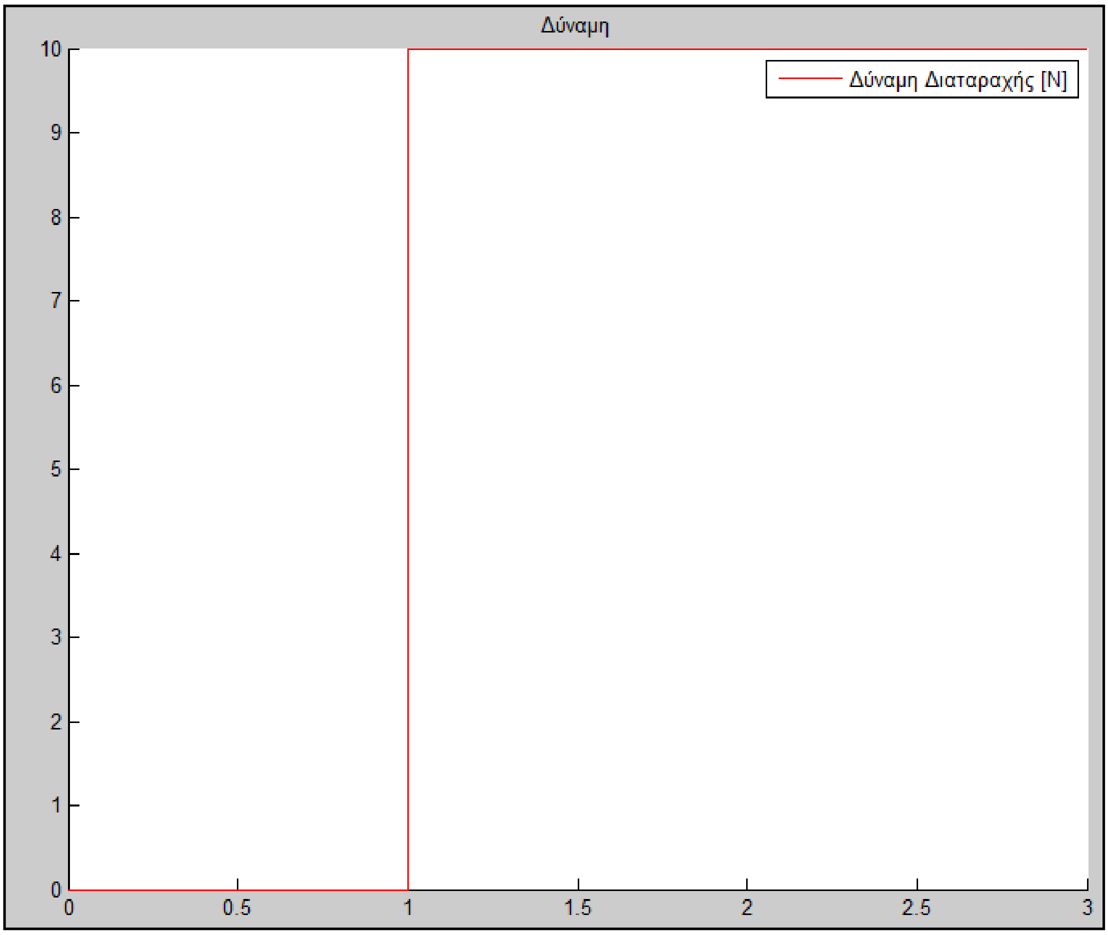


Εικόνα 4.2.23: *Ηλεκτρικό πεδίο ($|E_{\varphi}|$ [V/m]) στη πιεζοηλεκτρική στρώση.*

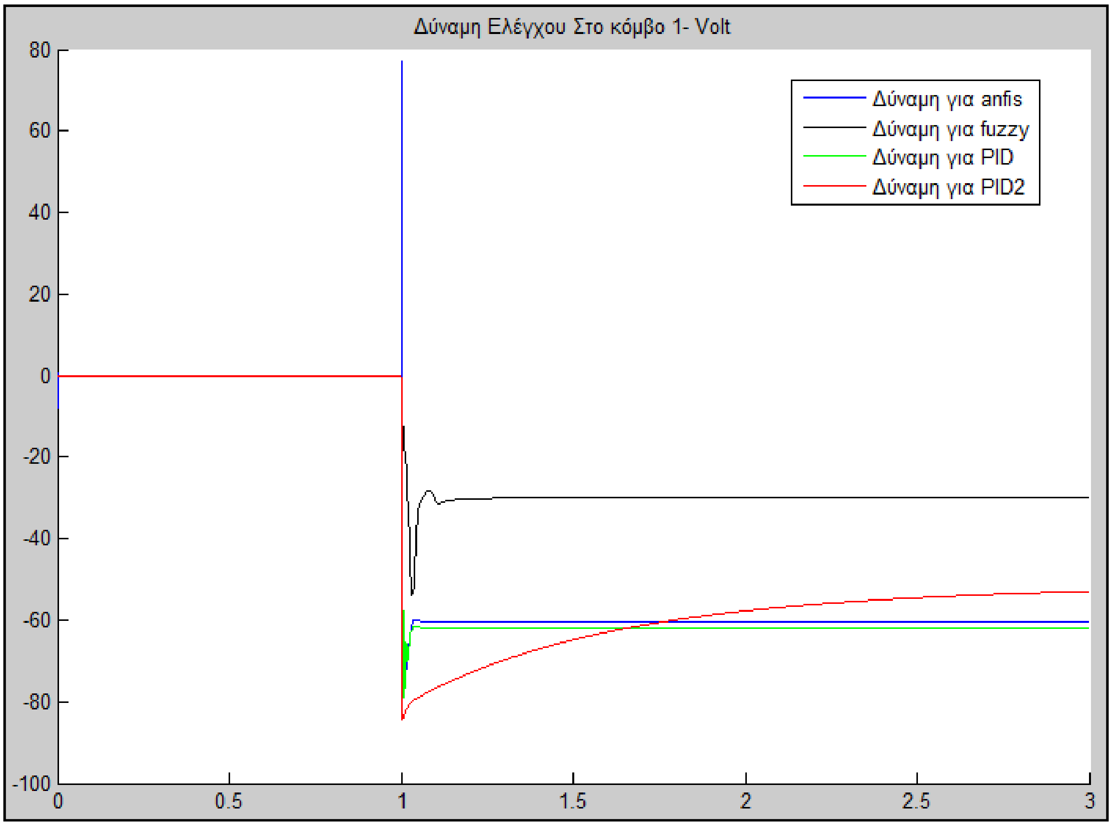
8.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ C

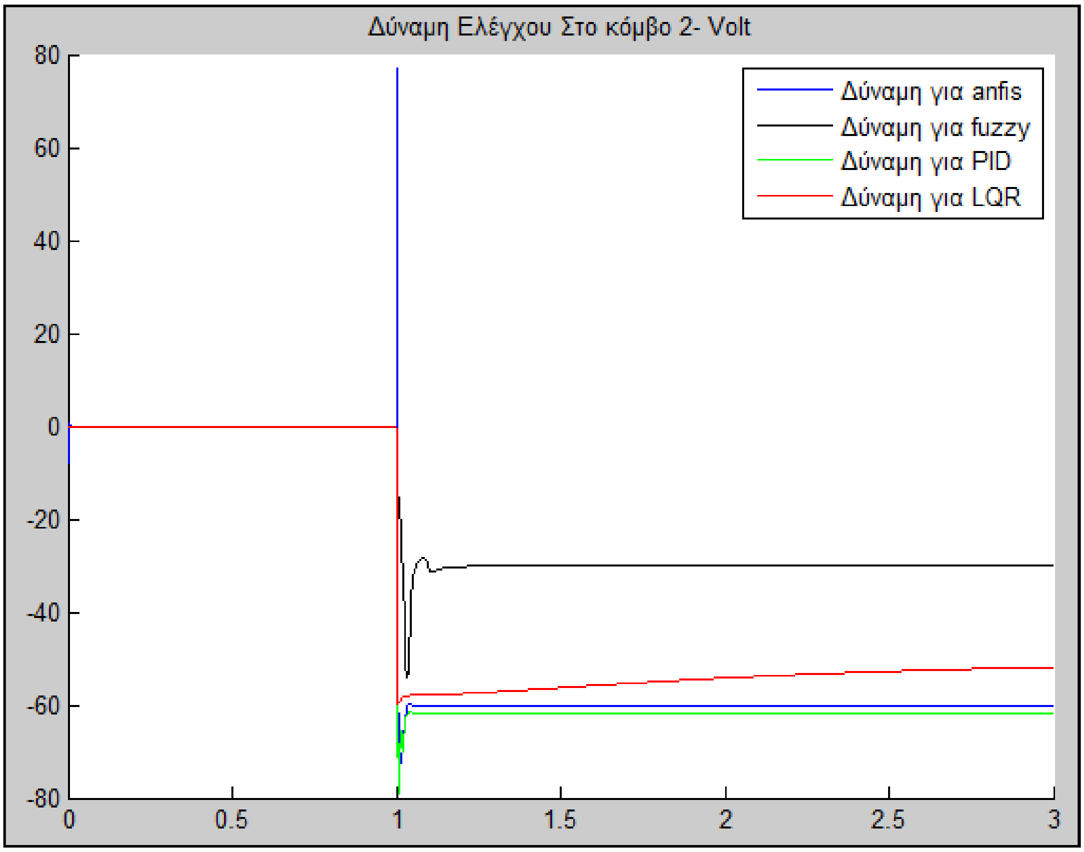
«ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ C - ΕΙΚΟΝΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ & ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ MATALB-SIMULINK**»**



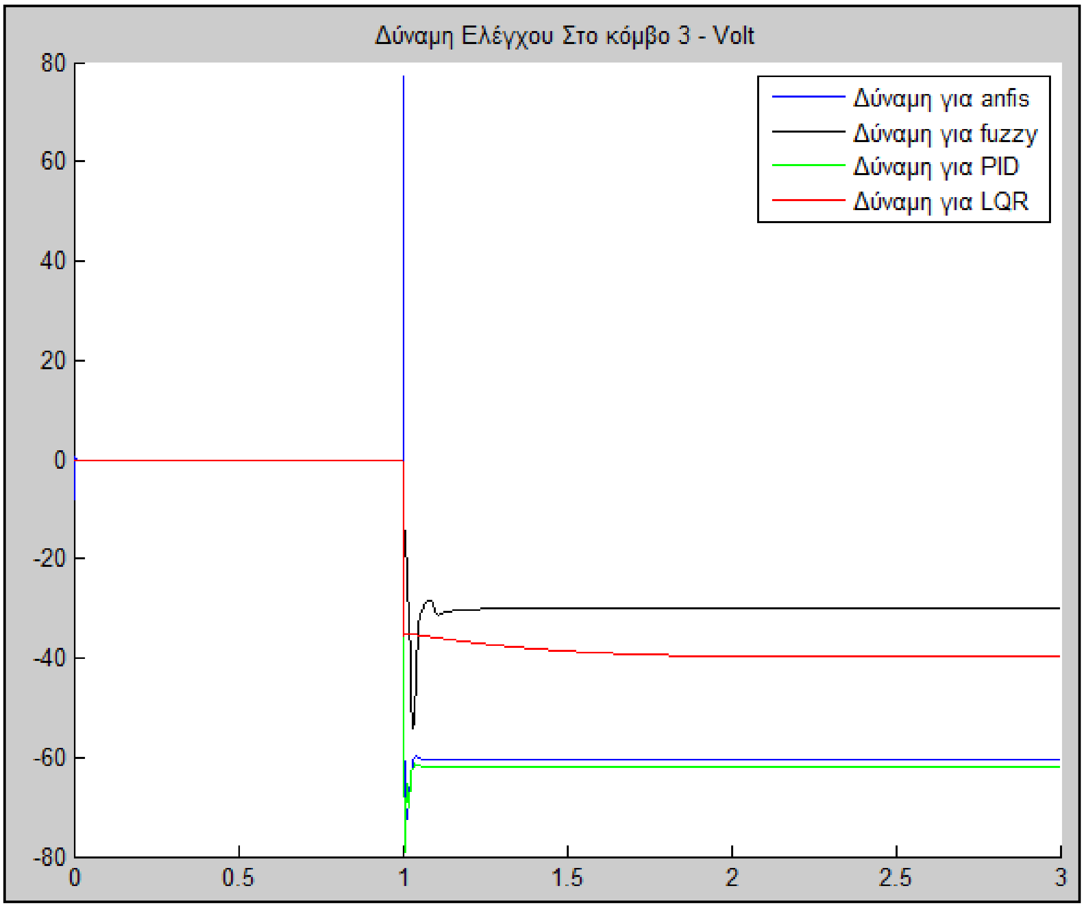
Εικόνα 4.3.8: Δύναμη Διαταραχής



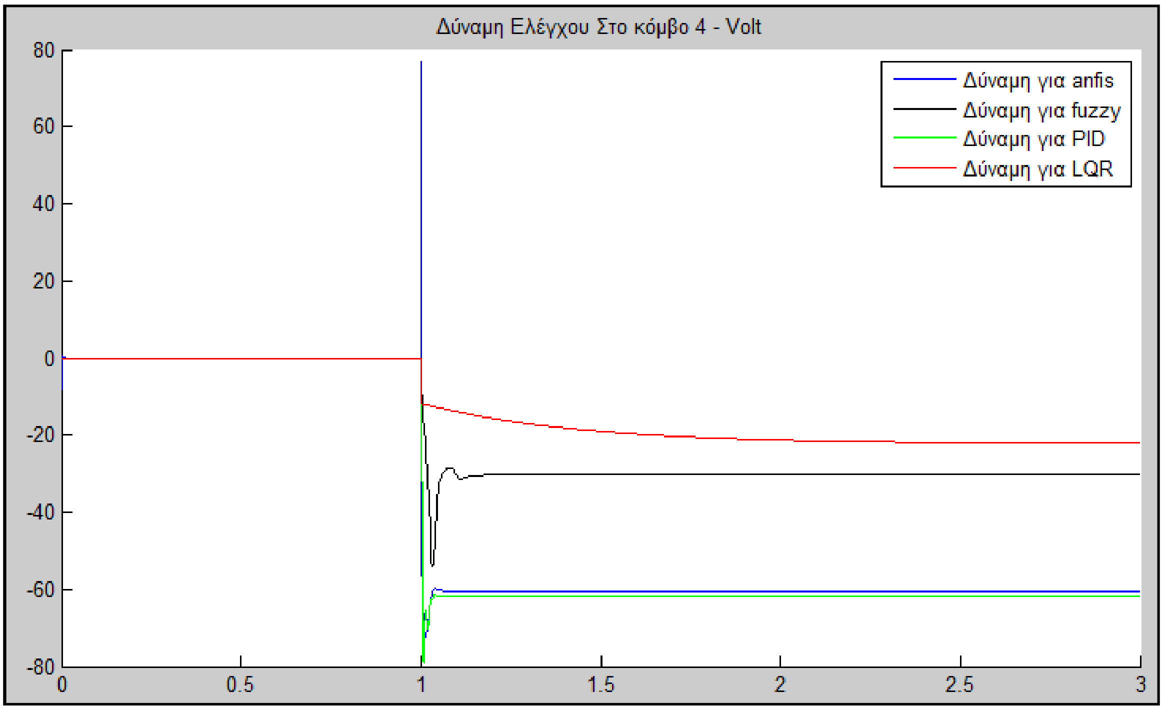
a)


Δύναμη Ελέγχου Στο κόμβο 2- Volt
Δύναμη για anfis
Δύναμη για fuzzy
Δύναμη για PID
Δύναμη για LQR
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

β)

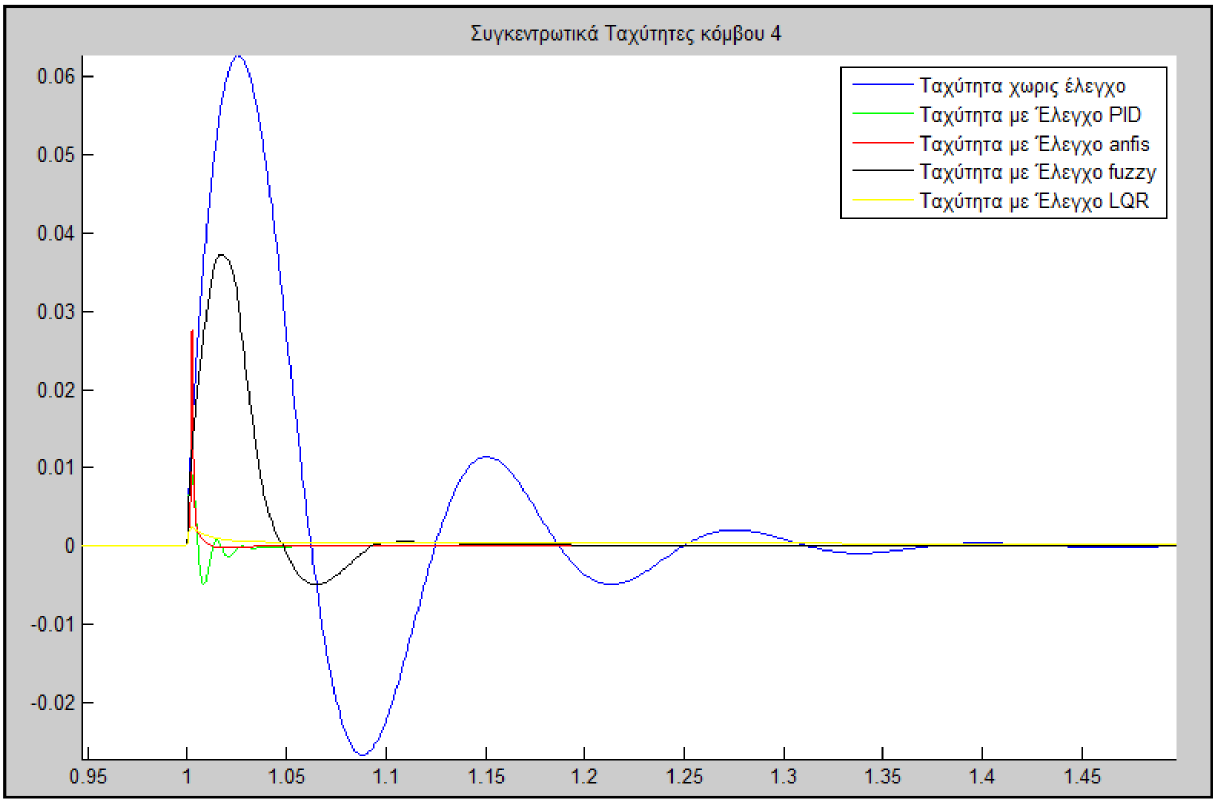

Δύναμη Ελέγχου Στο κόμβο 3 - Volt
Δύναμη για anfis
Δύναμη για fuzzy
Δύναμη για PID
Δύναμη για LQR
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

γ)

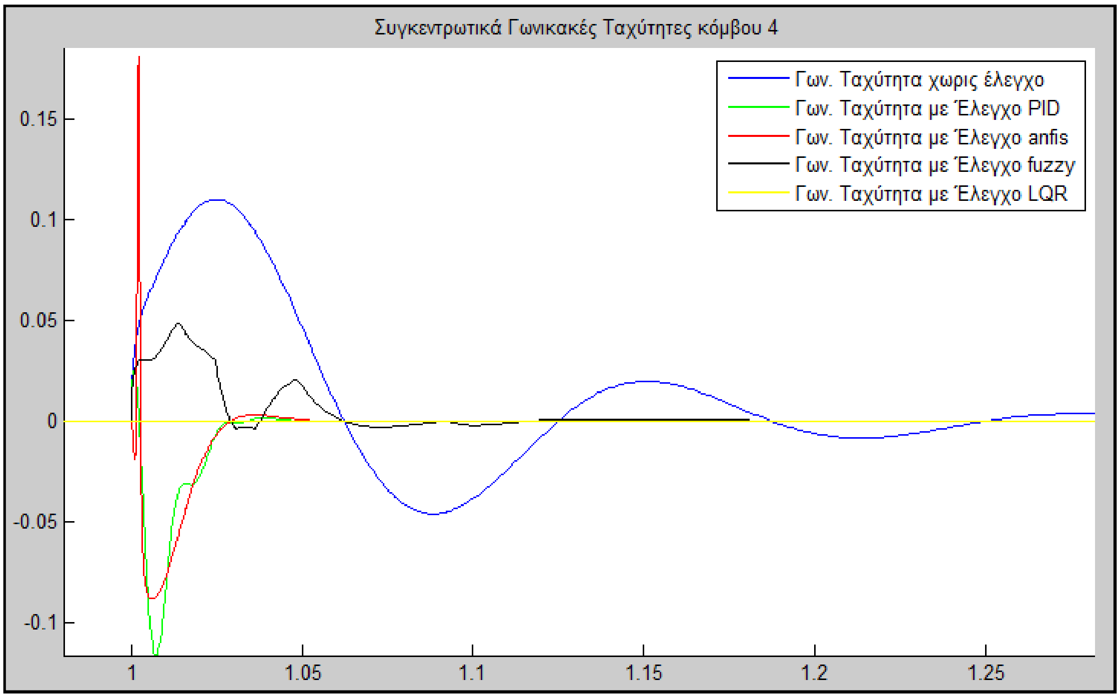


δ)

Εικόνα 4.3.9: Συγκεντρωτικά Διαγράμματα Δυνάμεων Ελέγχου [v] σε κάθε κόμβο.



α)



β)

Εικόνα 4.3.12: Συγκεντρωτικά Διαγράμματα α) Ταχύτητας, β) Γωνιακής ταχύτητας κόμβου 4

9.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ D

«ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ D -

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΥΦΥΟΥΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΤΟ MATLAB-SIMULINK

Το παρακάτω κείμενο παρουσιάζει τις βασικές έννοιες και ενέργειες για το σχεδιασμό ενός συστήματος ελέγχου με χρήση του Matlab Simulink.

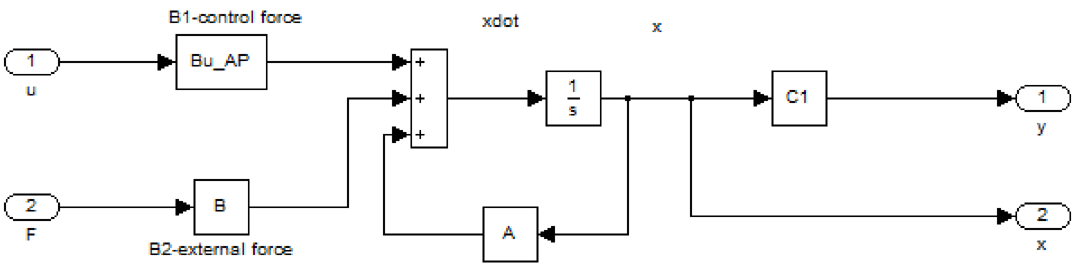
Εφόσον έχουμε εξάγει τα μητρώα που περιγράφουν το σύστημά μας δηλαδή, το μητρώο δυσκαμψίας K, το μητρώο μάζας M και τους πίνακες χώρου κατάστασης A,B,C, D θα παρουσιάσουμε πώς μπορούμε να εργαστούμε στο Matlab-Simulink για τη δημιουργία μοντέλων ελέγχου της κατασκευής μας που περιγράφεται από τους παραπάνω πίνακες.

Σχεδιασμός στο περιβάλλον του SIMULINK

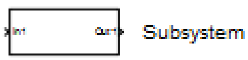
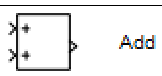
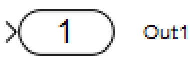
Απεικόνιση του μοντέλου χώρου κατάστασης με τα blocks του Simulink.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

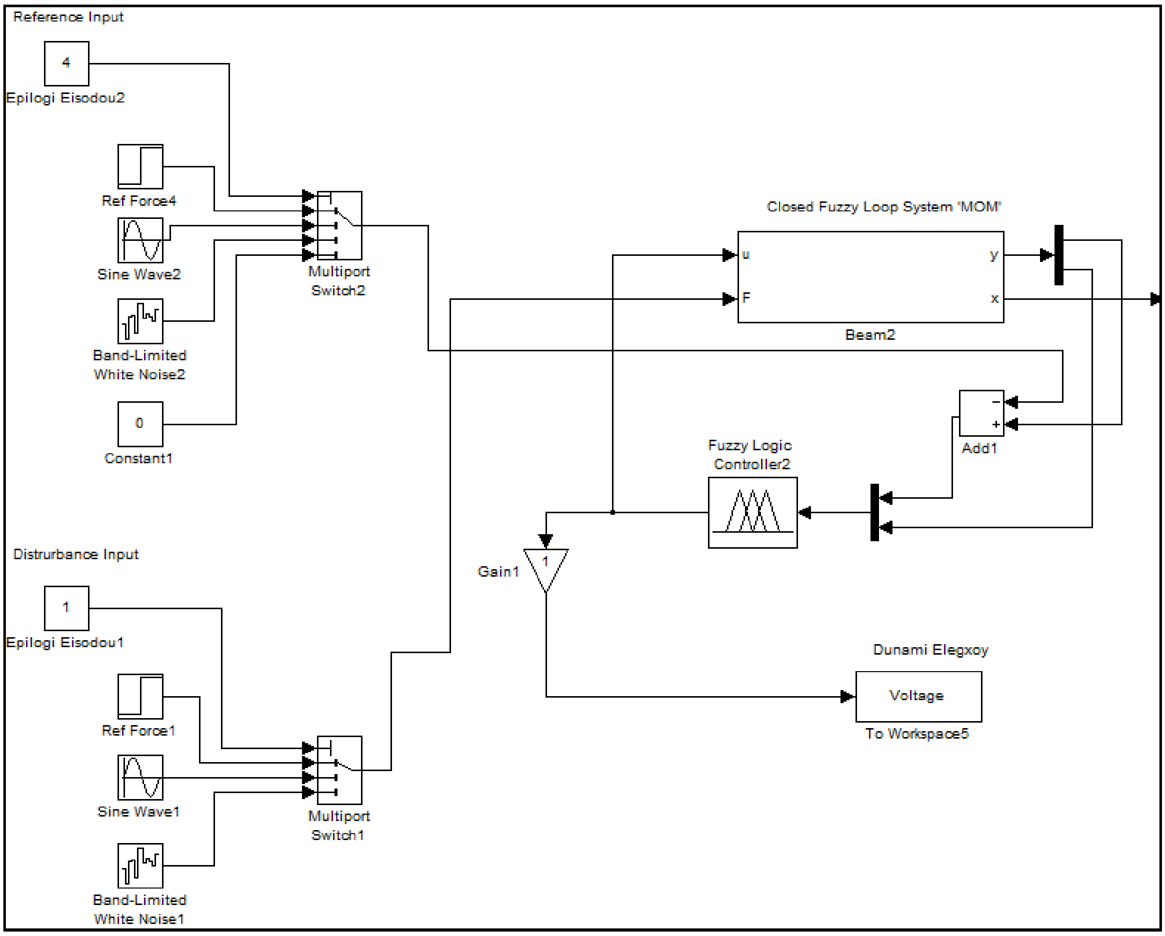
$$y = Cx$$



Επεξηγήσεις Block:

	Υποσύστημα.
	Χρονική ολοκλήρωση της εισόδου.
	Αθροίζει ή αφαιρεί εισόδους.
	Είσοδος.
	Έξοδος.

Αφού δημιουργήσουμε το μοντέλο χώρου κατάστασης εντός του υποσυστήματος, σχεδιάζουμε το υποσύστημα στο διάγραμμα ελέγχου και παρακολούθησης.



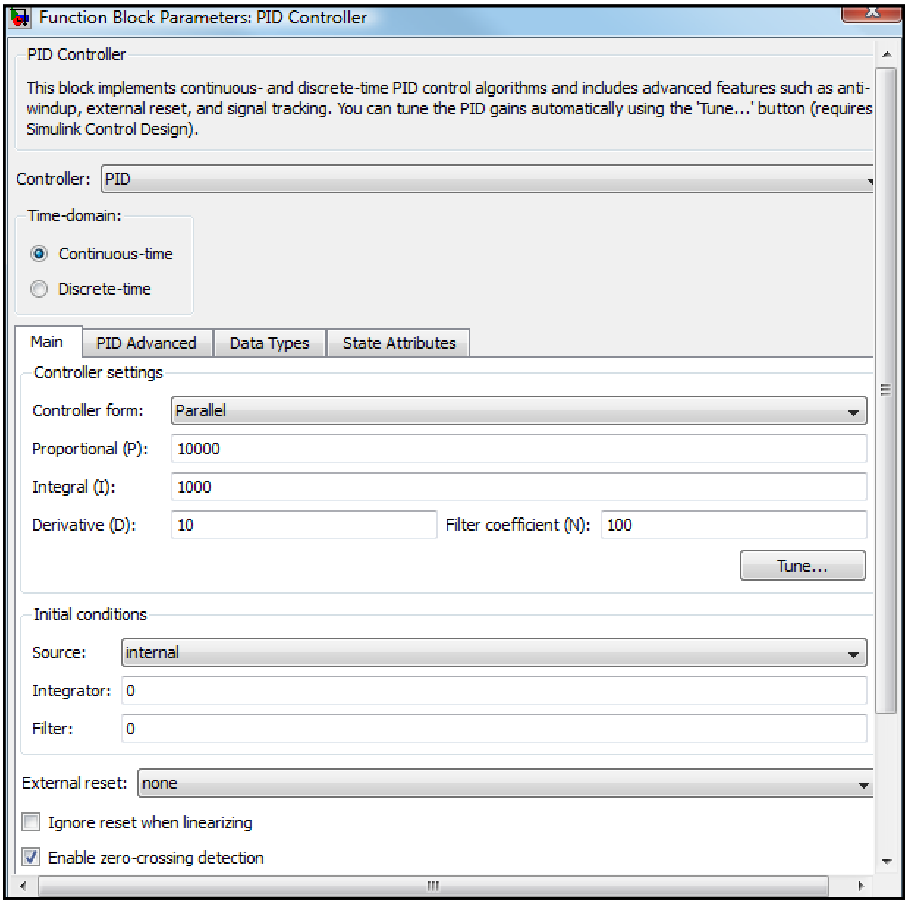
Επεξηγήσεις Block:

BLOCK	ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ
A Gain Matrix	Όμοιο με 1 Gain Matrix(K*u) (u vector)
1 Gain	Πολλαπλασιαστής.
PID(s) PID Controller	Block PID ελεγκτή.
Mux	Πολλαπλασιάζει βαθμωτά ή διανυσματικά σήματα.
Demux	Χωρίζει το διάνυσμα σε βαθμωτά μεγέθη ή μικρότερα διανύσματα.

Fuzzy Logic Controller	Ασαφής ή Νευροασαφής ελεγκτής. Δημιουργείτε από το Toolbox Fuzzy.
Multiport Switch	Διακόπτης επιλογής εισόδου.
simout To Workspace	Αποθηκεύει τα δεδομένα που δέχεται στο Workspace.
Sine Wave	Ημιτονοειδής είσοδος.
Step	Βηματική Είσοδος.
Band-Limited White Noise	Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κανονικής κατανομής.

* Μοναδική προσοχή στην εφαρμογή των παραπάνω αποτελεί η επιλογή κατάλληλων διαστάσεων μητρώων.

Ο **PID** ελεγκτής είναι πολύ εύκολος στη χρήση του αλλά δύσκολος στην επιλογή των παραμέτρων του για να δουλέψει ικανοποιητικά.



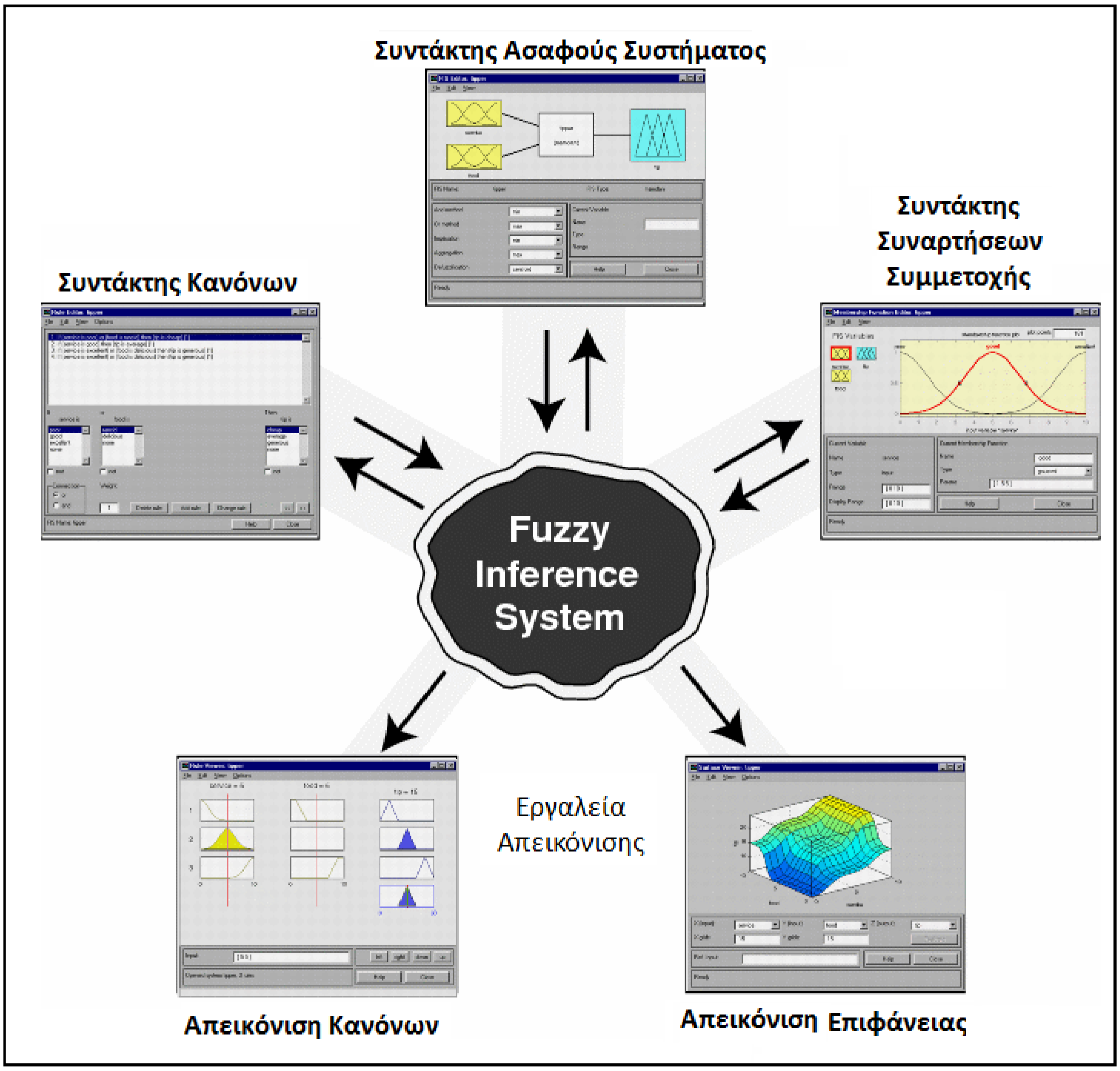
Οι παράμετροι P, I,D και N είναι επιλογή του μηχανικού και μπορούν να διερευνηθούν βάση θεωρίας με δύο εργαλεία του Matlab, το SISOTOOL και το PIDTUNE.

Σχεδιασμός του Ασαφούς ελεγκτή μέσω του Fuzzy Logic Toolbox

Η δημιουργία του ασαφούς μοντέλου θα γίνει μέσω του fuzzylogic Toolbox.

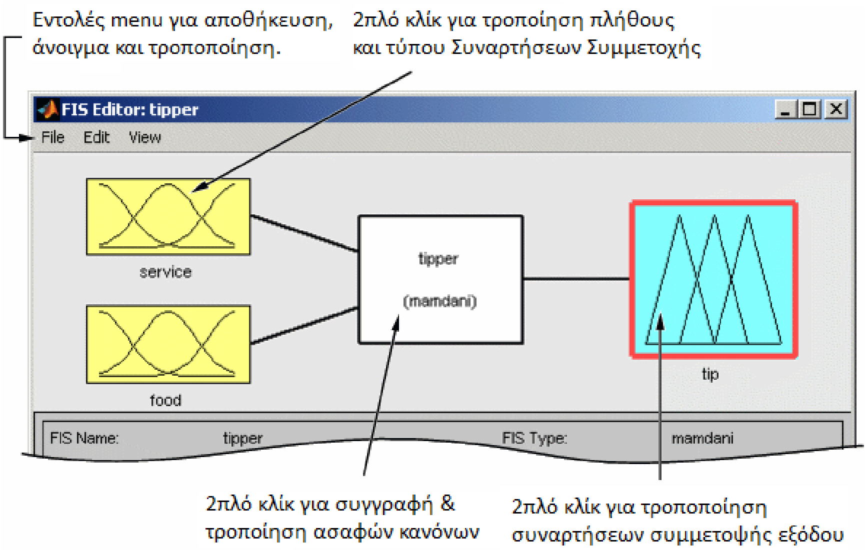
Start-> Toolboxes->Fuzzy Logic->Fis Editor GUI.

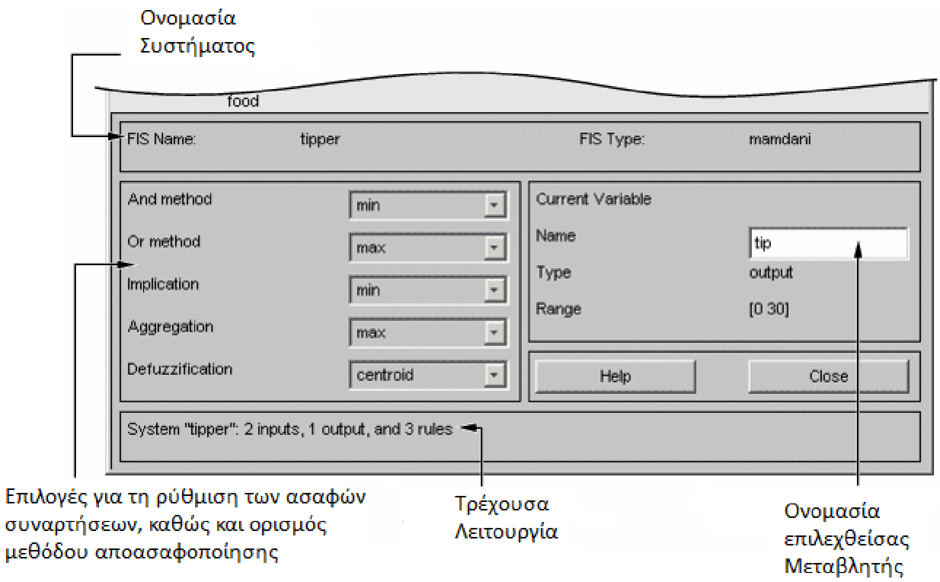
Παρακάτω απεικονίζονται σε διάγραμμα όλες οι λειτουργίες του περιβάλλοντος σχεδιασμού. Τα βέλη δείχνουν τις αλληλεπιδράσεις, όπου τα μονά βέλη δείχνουν δυνατότητα μόνο παρουσίασης και όχι επιλογής.

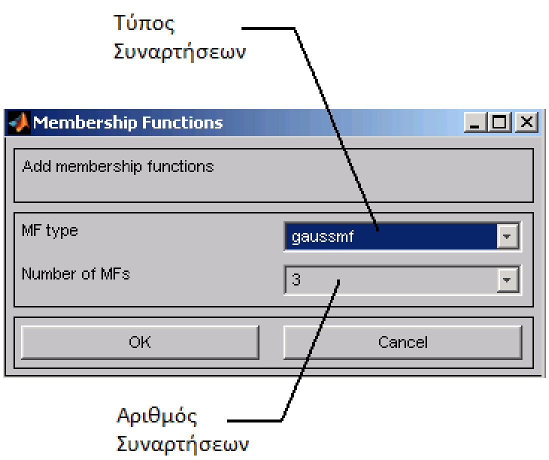


Το πρώτο βήμα σχεδιασμού είναι να ορίσουμε τις εισόδους, τις εξόδους και τις επιλογές ρύθμισης των ασαφών συναρτήσεων. Στη συνέχεια ορίζουμε το πλήθος και το τύπο των συναρτήσεων συμμετοχής. Το τελευταίο και σημαντικότερο βήμα είναι ο ορισμός των κανόνων ελέγχου. Παρακάτω παρουσιάζουμε συνοπτικά κάθε εργαλείο.

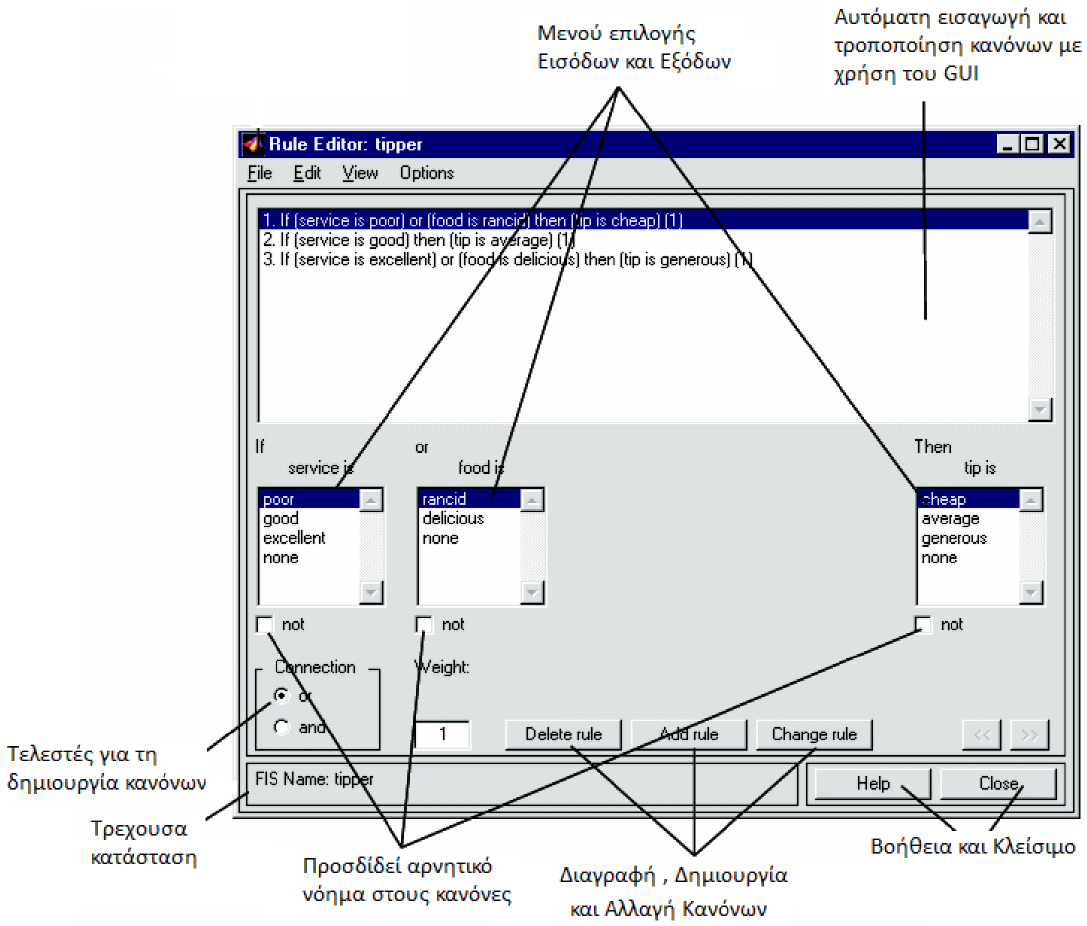
Συντάκτης Συναρτήσεων Συμμετοχής



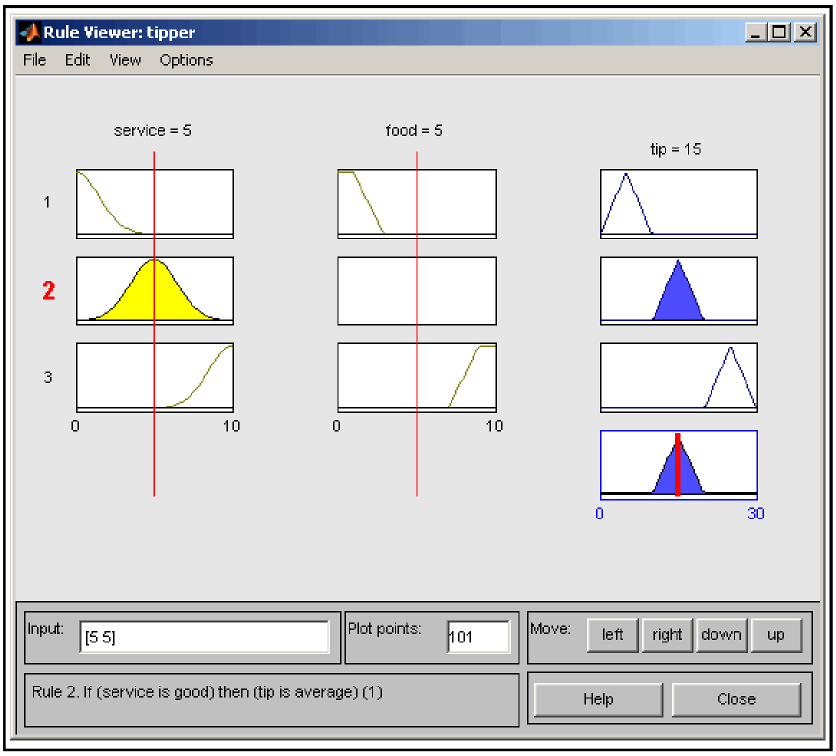




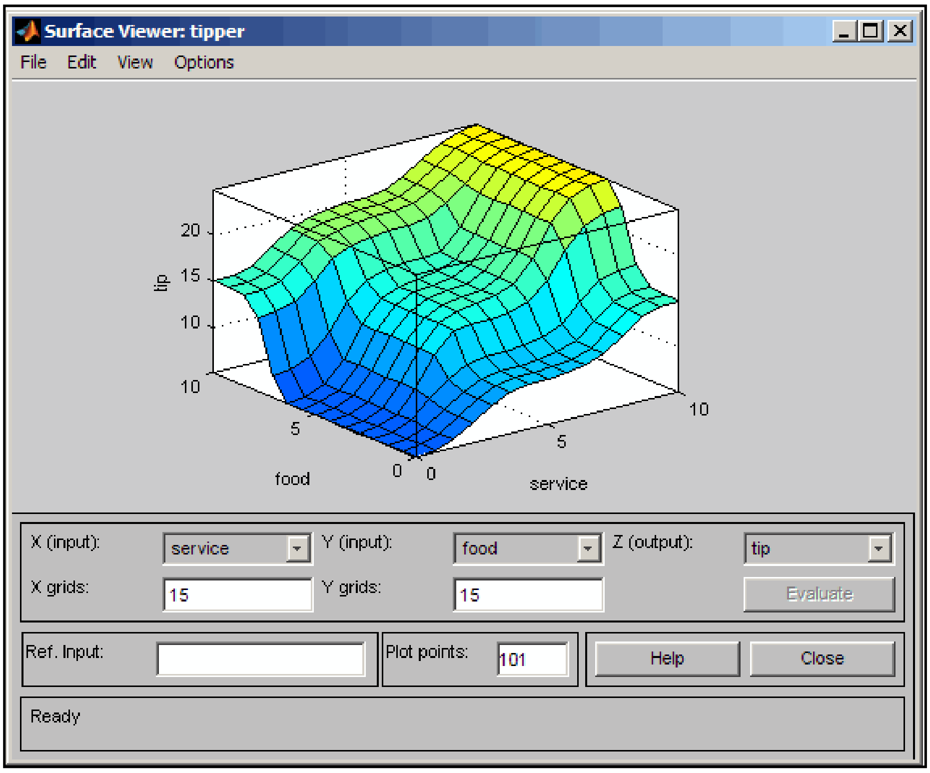
Συντάκτης Ασαφών Κανόνων



Απεικόνιση Κανόνων:



Απεικόνιση Επιφάνειας

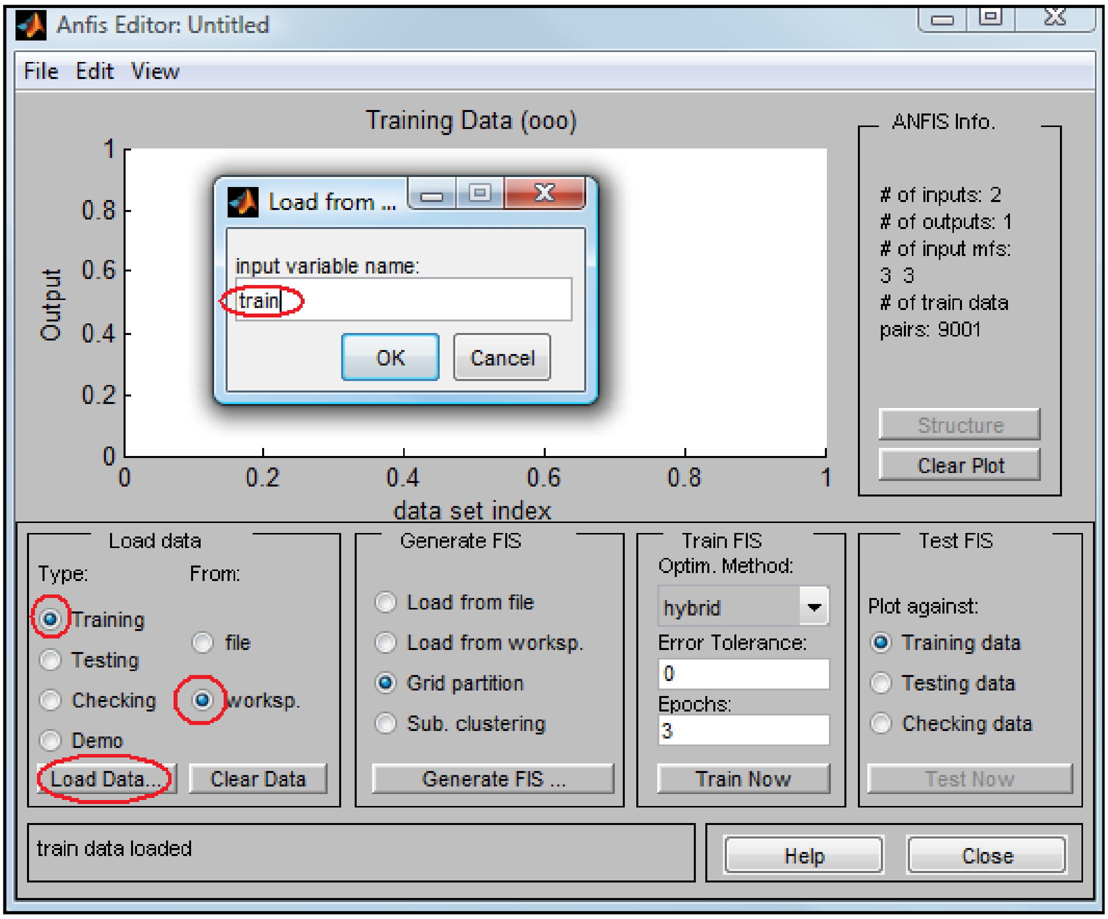


Σχεδιασμός του Ασαφούς ελεγκτή μέσω του Fuzzy Logic Toolbox

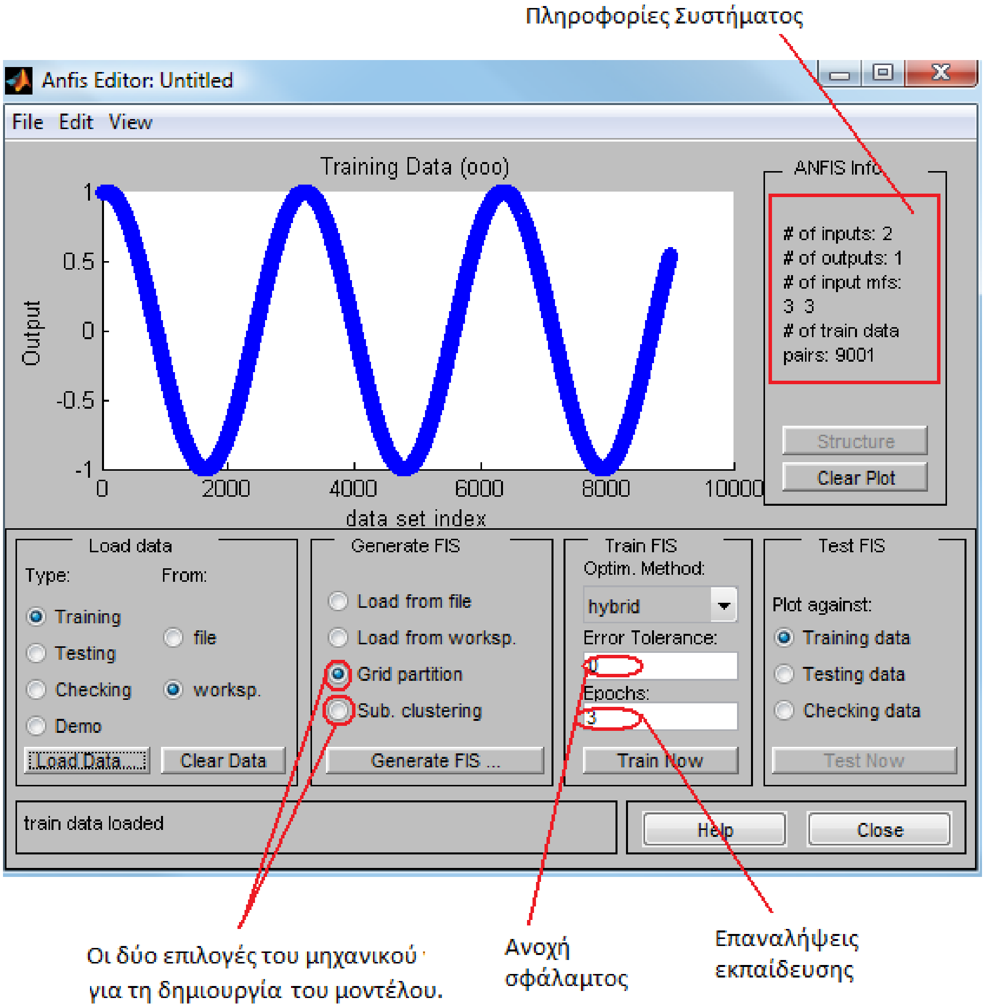
Start-> Toolboxes->Fuzzy Logic->Anfis Editor GUI.

Το πρώτο βήμα σχεδιασμού είναι να ορίσουμε τις εισόδους edit->Fis properties-> π.χ. add variable. Μέσω της διαδρομής FIS Properties ανοίγει ο συντάκτη του FIS και μπορούμε να εργαστούμε όπως παραπάνω. Στη συνέχεια έχουμε δημιουργήσει το διάνυσμα των δεδομένων εκπαίδευσης και ο εισάγουμε στο σύστημα μέσω του συντάκτη του ANFIS.

Συντάκτης ANFIS



Έστω ότι φορτώσαμε 9000 δεδομένα ημιτονοειδής μορφής:

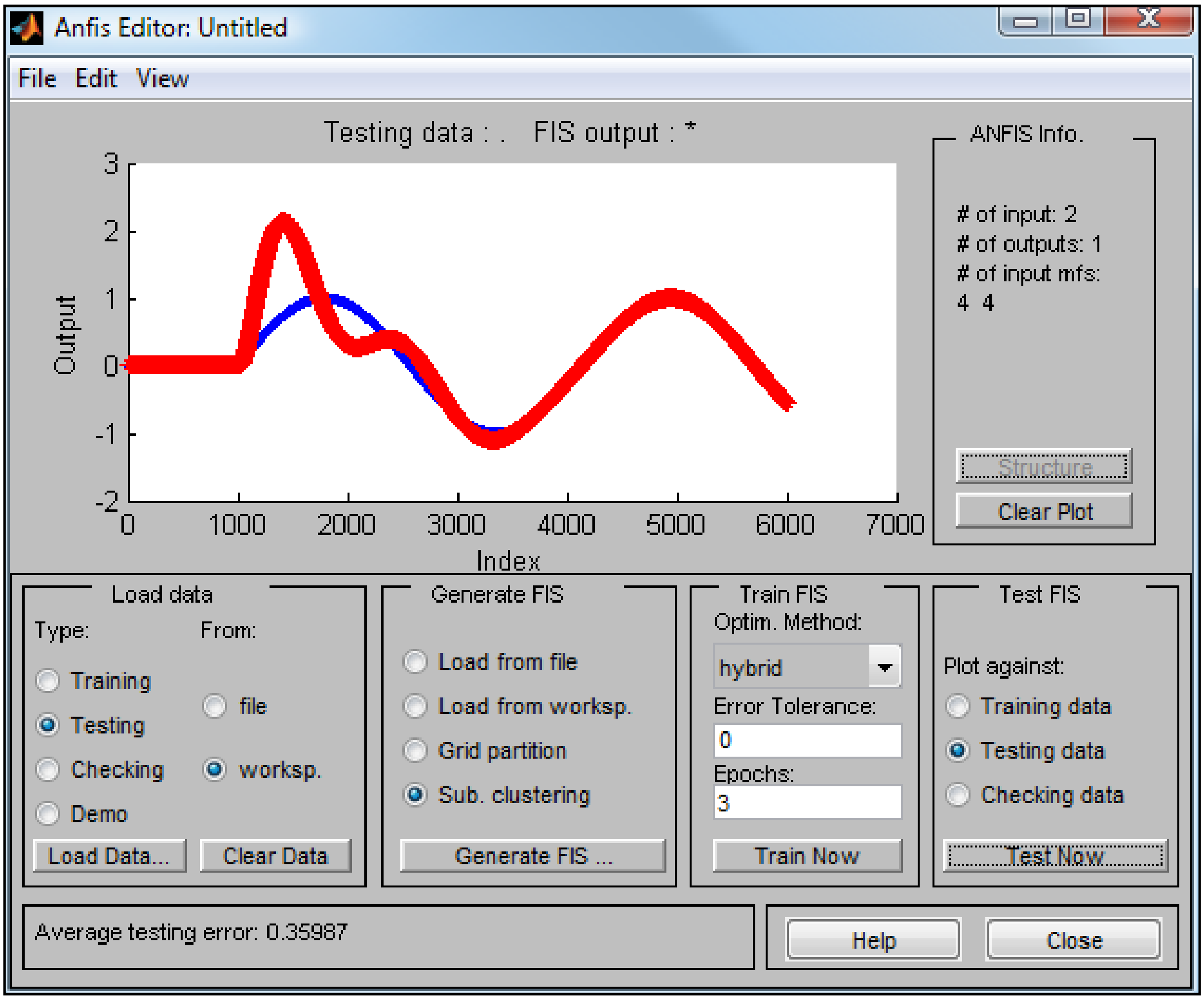


Οι επιλογές για να δημιουργήσουμε το μοντέλο μας είναι η προεπιλεγμένη Grid partision και η Sub. clustering. Η πρώτη μας δίνει την ευχέρεια να ορίσουμε εμείς το πλήθος και το τύπο των συναρτήσεων συμμετοχής, ενώ η δεύτερη χωρίζει τα δεδομένα εκπαίδευσης σε ομάδες και ορίζει μόνη της τον ελάχιστο αριθμό συναρτήσεων συμμετοχής που χρειάζονται για να ξεχωρίσουν τις ασαφείς ποσότητες. Αφού βέβαια ενημερωθούμε από αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε και στο Grid partision.

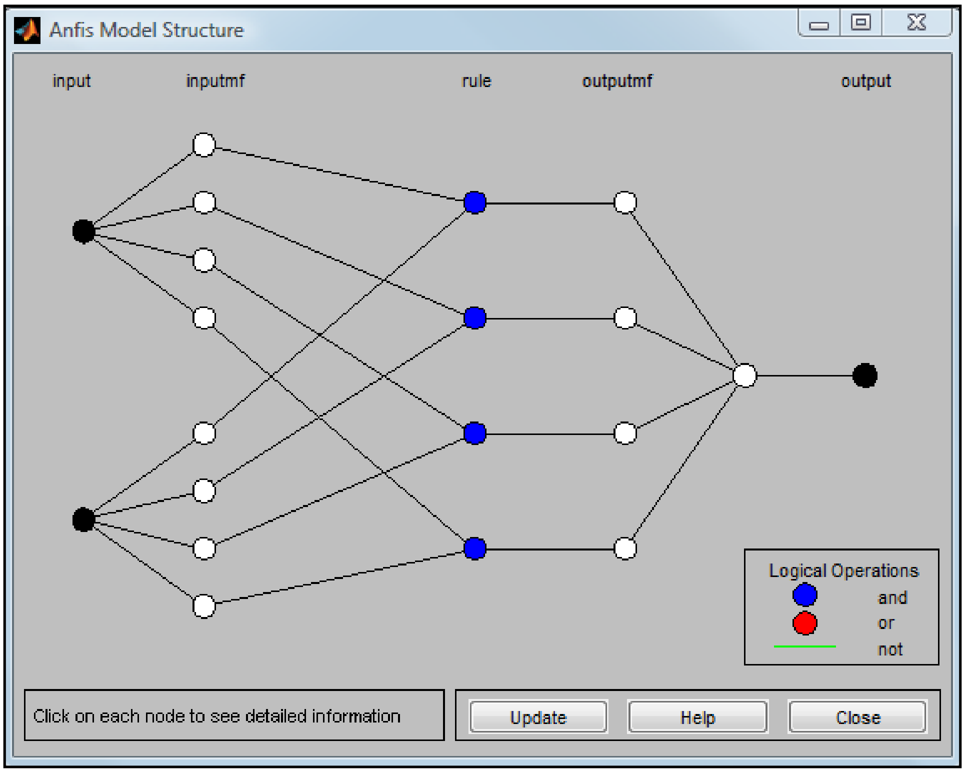
Οι υπόλοιπες επιλογές που έχουμε είναι η ανοχή σφάλματος και ο αριθμός των επαναλήψεων εκπαίδευσης. Ένας τυπικός αριθμός επαναλήψεων είναι οι 45, αλλά κατά τη διαδικασία ενημερωνόμαστε από τον editor για το πώς και πόσο μεταβάλλεται το σφάλμα σε κάθε επανάληψη, οπότε διακρίνουμε αν υπάρχει μεταβολή στο σφάλμα με την αύξηση των επαναλήψεων και δρούμε καταλλήλως.

Για το τεστ της απόκρισης χρησιμοποιούμε τα δεδομένα ελέγχου (Testing Data).

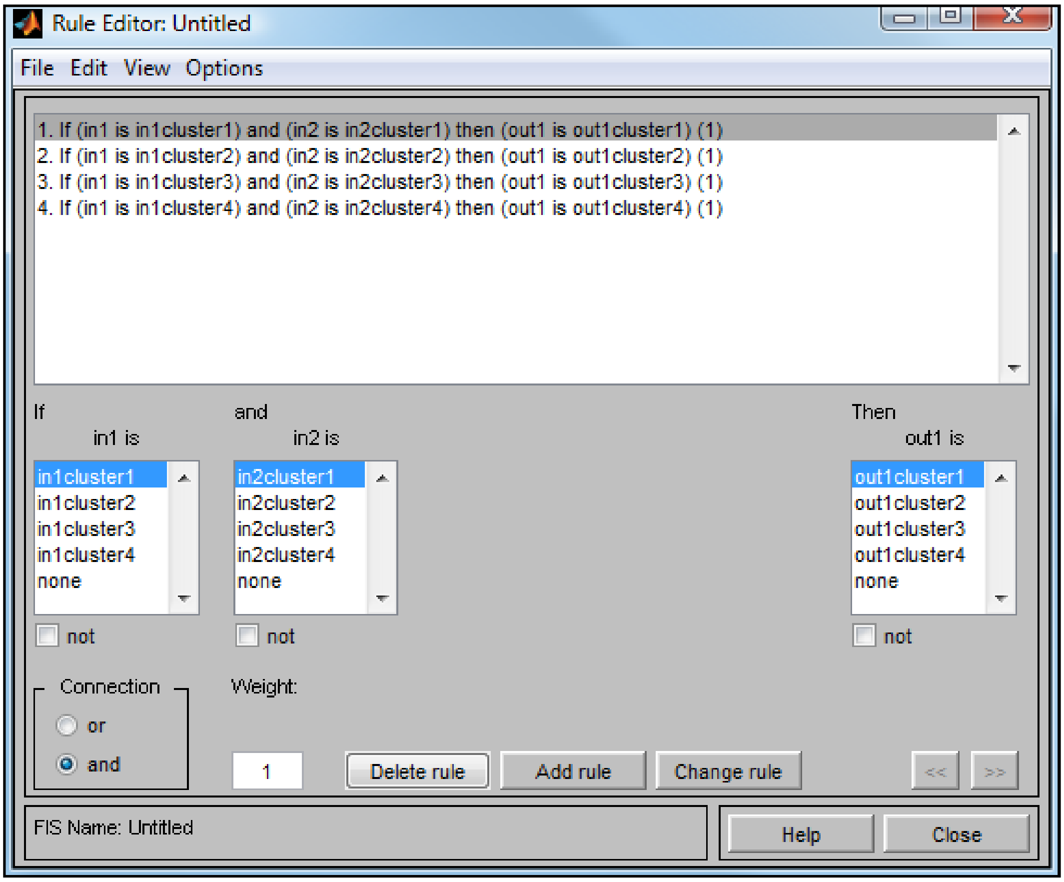
Έστω πως για testing data χρησιμοποιούμε δεδομένα βηματικής εισόδου και ημιτονοειδούς. Το παρακάτω δείχνει πόσο κατάφερε το μπλέ (μοντέλο) να προσεγγίσει το κόκκινο (test)



Επιλέγοντας την επιλογή Structure μπορούμε να δούμε τη δομή του μοντέλου που δημιουργήθηκε:



και εντέλει μπορούμε να δούμε και να επεξεργαστούμε τους κανόνες όπως και στο σχεδιασμό του ασαφούς ελεγκτή μέσω του GUI στη σελίδα:



10.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

«ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε -

ΤΙΜΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ»

$$
M=\begin{bmatrix}
1{,}604571 & 0 & 0{,}277714 & -0{,}01337 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}001646 & 0{,}013371 & -0{,}00062 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}277714 & 0{,}013371 & 1{,}604571 & 0 & 0{,}277714 & -0{,}01337 & 0 & 0 \\
-0{,}01337 & -0{,}00062 & 0 & 0{,}001646 & 0{,}013371 & -0{,}00062 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}277714 & 0{,}013371 & 1{,}604571 & 0 & 0{,}277714 & -0{,}01337 \\
0 & 0 & -0{,}01337 & -0{,}00062 & 0 & 0{,}001646 & 0{,}013371 & -0{,}00062 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}277714 & 0{,}013371 & 0{,}802286 & -0{,}02263 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}01337 & -0{,}00062 & -0{,}02263 & 0{,}000823
\end{bmatrix}
$$

,όπου M ο πίνακας μάζας.

$$
K=\begin{bmatrix}
2920000 & 0 & -1460000 & 146000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 38933{,}33 & -146000 & 9733{,}333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1460000 & -146000 & 2920000 & 0 & -1460000 & 146000 & 0 & 0 \\
146000 & 9733{,}333 & 0 & 38933{,}33 & -146000 & 9733{,}333 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1460000 & -146000 & 2920000 & 0 & -1460000 & 146000 \\
0 & 0 & 146000 & 9733{,}333 & 0 & 38933{,}33 & -146000 & 9733{,}333 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1460000 & -146000 & 1460000 & -146000 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 146000 & 9733{,}333 & -146000 & 19466{,}67
\end{bmatrix}
$$

,όπου K ο πίνακας δυσκαμψίας.

$$
\Lambda=\begin{bmatrix}
29200{,}02 & 0 & -14600 & 1460 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 389{,}3333 & -1460 & 97{,}33333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-14600 & -1460 & 29200{,}02 & 0 & -14600 & 1460 & 0 & 0 \\
1460 & 97{,}33333 & 0 & 389{,}3333 & -1460 & 97{,}33333 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -14600 & -1460 & 29200{,}02 & 0 & -14600 & 1460 \\
0 & 0 & 1460 & 97{,}33333 & 0 & 389{,}3333 & -1460 & 97{,}33333 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -14600 & -1460 & 14600{,}01 & -1460 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1460 & 97{,}33333 & -1460 & 194{,}6667
\end{bmatrix}
$$

,όπου Λ ο πίνακας απόσβεσης.

O A είναι ο πίνακας κατάστασης και ισούται με A= [A1 A2]

A1=

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-3594420	-277134	1582261	-529636	860833,9	-206630	742601,1	-73491,5
-8E+07	-3,6E+07	1,21E+08	-2,6E+07	38593523	-9118289	32656227	-3231164
1421756	345953	-4813724	-49925,5	427896,5	-535075	2260725	-225690
-1,8E+08	-2,6E+07	-1,9E+07	-5,4E+07	1,12E+08	-3,6E+07	1,36E+08	-1,4E+07
867264,7	107259,6	565656,8	340450,1	-7482220	-345807	5872999	-720717
-7,6E+07	-9177491	-1,9E+08	-3,6E+07	-1,6E+08	-7,4E+07	4,41E+08	-4,7E+07
-1077460	-129920	-3598546	-540913	-2,1E+07	-2326474	25957826	-3459503
-7,2E+07	-8712950	-2,4E+08	-3,6E+07	-1E+09	-1,4E+08	1,32E+09	-1,7E+08

A2=

1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1
-35944,2	-2771,34	15822,61	-5296,36	8608,339	-2066,3	7426,011	-734,915
-803364	-362449	1205915	-256366	385935,2	-91182,9	326562,3	-32311,6
14217,56	3459,53	-48137,3	-499,255	4278,965	-5350,75	22607,25	-2256,9
-1834256	-260709	-192940	-536744	1121872	-359087	1360656	-135064
8672,647	1072,596	5656,568	3404,501	-74822,2	-3458,07	58729,99	-7207,17
-755546	-91774,9	-1940687	-355569	-1567680	-738822	4413441	-468091
-10774,6	-1299,2	-35985,5	-5409,13	-210709	-23264,7	259578,2	-34595
-722031	-87129,5	-2353197	-360105	-9960428	-1368378	13177151	-1656122

$$B1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}01361 \\ -0{,}61009 \\ -0{,}00676 \\ -1{,}77346 \\ 2{,}36215 \\ 47{,}35561 \\ 15{,}29223 \\ 599{,}1518 \end{bmatrix} \quad B2= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}379209 & 0{,}389175 & -0{,}50888 & -0{,}01361 \\ 69{,}59879 & -35{,}0427 & -23{,}1364 & -0{,}61009 \\ -0{,}52717 & 0{,}590155 & 0{,}703933 & -0{,}00676 \\ 34{,}55608 & 58{,}95807 & -46{,}4452 & -1{,}77346 \\ -0{,}13453 & -0{,}39527 & 0{,}935644 & 2{,}36215 \\ 11{,}41969 & 35{,}64929 & 70{,}19915 & 47{,}35561 \\ 0{,}161127 & 0{,}51535 & 1{,}871805 & 15{,}29223 \\ 10{,}8096 & 34{,}48592 & 119{,}3282 & 599{,}1518 \end{bmatrix}$$

, όπου B1 και B2 οι πίνακες δύναμης διαταραχής και δύναμης ελέγχου, αντίστοιχα.

$$Fm= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad F_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0862 & -0,0862 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0862 & -0,0862 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0862 & -0,0862 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0862 \end{bmatrix}$$

, όπου Fm ο πίνακας πολλαπλασιαστών της δύναμης διαταραχής και Fe ο πίνακας πιεζοηλεκτρικών σταθερών.