ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ
ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΙΞΩΔΟΠΛΑΣΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

ΣΤΕΛΙΟΣ Γ. ΚΟΥΡΤΑΚΗΣ

ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ Α.Π.Θ.

Μ.Δ.Ε. ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ Ε.Μ.Π.

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΧΑΝΙΑ 2004

ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΙΞΩΔΟΠΛΑΣΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής ξεκίνησε το Δεκέμβριο του 1999 και ολοκληρώθηκε το Νοέμβριο του 2004 στο Εργαστήριο Εφαρμοσμένης Μηχανικής του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης.

Καταρχήν θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντα Αναπληρωτή Καθηγητή στο Πολυτεχνείο Κρήτης κ. Προβιδάκη Κωνσταντίνο για την επιστημονική του στήριξη, καθώς και για τη βοήθεια και καθοδήγηση του στην εκπόνηση και συγγραφή της παρούσας εργασίας.

Επίσης ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές στο Πολυτεχνείο Κρήτης, κ. Αγιουτάντη Ζαχαρία, Καθηγητή και κ. Τσομπανάκη Ιωάννη, Επίκουρο Καθηγητή, για την υποστήριξη και τις χρήσιμες συμβουλές που μου παρείχαν κατά την διάρκεια της εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές, κ. Σαριδάκη Ιωάννη, Καθηγητή στο Πολυτεχνείο Κρήτης, κ. Παναγιωτουνάκο Δημήτριο, Καθηγητή στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, κ. Λιώλιο Αστέριο, Καθηγητή στο Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης και κ. Θεοτόκογλου Ευστάθιο, Αναπληρωτή Καθηγητή στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, για την υποστήριξη και τις υποδείξεις τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τη Δρ Πολιτικό Μηχανικό κ. Σταυρουλάκη Μαρία, για την πολύτιμη βοήθεια της.

Χανιά, Νοέμβριος 2004

Στέλιος Γ. Κουρτάκης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος της παρούσας διδακτορικής εργασίας είναι η επίλυση προβλημάτων συγκέντρωσης τάσεων σε ιξωδοπλαστικά (viscoplastic) υλικά κάτω από μεταβαλλόμενα θερμομηχανικά φορτία με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων. Επίσης η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην καλύτερη αποτίμηση των πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων στην κορυφή ρωγμών και στην ανάπτυξη ενός κριτηρίου θραύσης βασισμένου στην έννοια του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας για τα ιξωδοπλαστικά υλικά.

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει γίνει σημαντική πρόοδος στις τεχνολογικές εφαρμογές των μετάλλων και κραμάτων σε αυξημένες θερμοκρασίες και η έρευνα έχει αναπτυχθεί αρκετά στην περιοχή της ανελαστικής συμπεριφοράς σε υψηλές θερμοκρασίες. Αυτή η ανελαστική συμπεριφορά των μετάλλων είναι μη γραμμικό και χρονικά εξαρτώμενο φαινόμενο. Οι κλασσικές θεωρίες δεν είναι δυνατόν να εξηγήσουν αυτά τα φαινόμενα που αναπτύσσονται στα μέταλλα και τα κράματα σε υψηλές θερμοκρασίες όπως η εξάρτηση από την πορεία της θερμομηχανικής φόρτισης, η χρονικά εξαρτώμενη επανάταξη, η αποσκλήρυνση με την αποφόρτιση και η αλληλεπίδραση ερπυσμού πλαστικότητας. Έτσι η ανάπτυξη μερικών ρεαλιστικών ιξωδοπλαστικών μοντέλων με τις κατάλληλες καταστατικές εξισώσεις ήταν κρίσιμη για το σχεδιασμό στοιχείων ενεργειακών συστημάτων σε υψηλές θερμοκρασίες.

Το κύριο μαθηματικό χαρακτηριστικό αυτών των νέων ιξωδοπλαστικών μοντέλων είναι ότι οι μη ελαστικοί ρυθμοί παραμόρφωσης εκφράζονται σαν συναρτήσεις των τρεχουσών τιμών τάσης, θερμοκρασίας και ορισμένων εσωτερικών μεταβλητών. Τα περισσότερα ιξωδοπλαστικά μοντέλα χρησιμοποιούν τον ίδιο βασικό σκελετό με δύο εσωτερικές μεταβλητές μια για την ισότροπη και μια για την κινηματική κράτυνση. Πολλά πρακτικά προβλήματα που περιλαμβάνουν σύνθετες μορφές και πολύπλοκη θερμομηχανική φόρτιση, πρέπει να λυθούν με αριθμητικές μεθοδολογίες που θα κάνουν αυτά τα ιξωδοπλαστικά μοντέλα εφαρμόσιμα για ανάλυση αυτού του είδους των δομικών στοιχείων.

Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (ΜΣΣ) είναι μια πολύ αποτελεσματική μέθοδος με πλεονεκτήματα έναντι της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ)

στην επίλυση μη γραμμικών χρονικά εξαρτώμενων προβλημάτων ανελαστικής παραμόρφωσης. Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα είναι ότι ο αριθμός των αγνώστων στο τελικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων είναι ανάλογος του αριθμού των συνοριακών στοιχείων στη ΜΣΣ σε αντίθεση με τον συνολικό αριθμό των κόμβων στην ΜΠΣ.

Όμως ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα στη ΜΣΣ ήταν η αριθμητική αποτίμηση των επιρροών περιοχής (αδρανειακές, καθολικής φόρτισης, ανελαστικής και θερμικής παραμόρφωσης επιδράσεις). Οι υπολογισμοί σε γενικά προβλήματα χρονικά εξαρτώμενης ανελαστικής παραμόρφωσης σε υψηλές θερμοκρασίες είναι αρκετά ικανοποιητικοί με τη χρήση της εσωτερικής διακριτοποίησης. Ακόμη και αν πρέπει να εφαρμόζεται η διακριτοποίηση του εσωτερικού σε αυτού του είδους τα μη γραμμικά προβλήματα, αυτό είναι αναγκαίο μόνο για την αποτίμηση ορισμένων ολοκληρωμάτων με γνωστές προς ολοκλήρωση συναρτήσεις.

Σε αυτή την εργασία η ΜΣΣ χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των μη γραμμικών χρονικά εξαρτώμενων ανελαστικών παραμορφώσεων μεταλλικών δομικών στοιχείων περιλαμβανομένων πλαστικότητας και ερπυσμού και υποβαλλόμενων σε χρονικά μεταβαλλόμενες φορτίσεις σε υψηλές θερμοκρασιακές βαθμίδες. Επίλυση προβλημάτων ανελαστικής παραμόρφωσης με θερμοκρασιακή βαθμίδα δεν υπάρχει στη διεθνή βιβλιογραφία με τη ΜΣΣ. Η διατύπωση του ρυθμού των διεπουσών διαφορικών εξισώσεων έγινε κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή η χρησιμοποίηση οποιουδήποτε ιξωδοπλαστικού μοντέλου.

Στη διερεύνηση για μια ακριβή αλλά γενική υπολογιστική μέθοδο για την αποτίμηση ιδιόμορφων πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων στην κορυφή της ρωγμής, η μεθοδολογία των ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων σε συνδυασμό με την ΜΣΣ έχει χρησιμοποιηθεί κατάλληλα σε ποικίλες εφαρμογές στη μηχανική των θραύσεων. Τα ιδιόμορφα συνοριακά στοιχεία απεικονίζουν σωστά τη χρονικά εξαρτώμενη ιδιόμορφη συμπεριφορά των πεδίων των τάσεων και των παραμορφώσεων στην κορυφή της ρωγμής σε υλικά τα οποία ακολουθούν εκθετικούς νόμους.

Σε αυτή την εργασία αναπτύσσεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία ένα ιδιόμορφο συνοριακό στοιχείο παραμόρφωσης ερπυσμού (ΙΣΣΠΕ) με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων για να αποτιμήσει τη χρονικά εξαρτώμενη ιδιομορφία της κατανομής του πεδίου των ανελαστικών τάσεων και παραμορφώσεων ερπυσμού σε ρηγματωμένα υλικά σε προβλήματα δύο διαστάσεων. Τα αποτελέσματα των τάσεων και παραμορφώσεων που βρίσκονται με την εφαρμογή των στοιχείων ΙΣΣΠΕ με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν τη χρονική εξάρτηση του ολοκληρώματος του ρυθμού ενέργειας $C(t)$ και την ανάπτυξη της ζώνης ερπυσμού. Τα ερευνούμενα δομικά στοιχεία θεωρείται ότι υφίστανται παραμόρφωση ερπυσμού δύο διαστάσεων και υποβάλλονται σε συνθήκες απομακρυσμένης φόρτισης. Η παραμόρφωση υποτίθεται ότι περιγράφεται από τον εκθετικό νόμο ερπυσμού του ελαστικού μοντέλου.

Παραδείγματα από ποικίλα προβλήματα ρωγμών διερευνώνται για να επιβεβαιώσουν την επάρκεια των προτεινόμενων ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων για την ανάλυση προβλημάτων κατανομής των τάσεων και παραμορφώσεων ερπυσμού και για τον προσδιορισμό κάποιων σημαντικών παραμέτρων ερπυσμού θραύσης. Η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου καταδεικνύεται και η ακρίβεια της συγκρίνεται με τα αποτελέσματα που βρίσκονται από επίλυση πεπερασμένων στοιχείων για διάφορες συνθήκες ερπυσμού.

Το φαινόμενο των βλαβών (damage) συνίσταται από ασυνέχειες επιφανειών με τη μορφή των μικρορωγμών ή από ασυνέχειες όγκου με τη μορφή κοιλοτήτων. Περιέχει μια ρεολογική διαδικασία εντελώς διαφορετική από την παραμόρφωση αν και οι αρχικές αιτίες και των δύο φαινομένων είναι πανομοιότυπες: κίνηση και συσσώρευση των εξαρμόσεων στα μέταλλα, τροποποίηση των ενδομοριακών δεσμών στα οργανικά υλικά και μικροαποσταθεροποίηση στα μεταλλεύματα.

Ένας αριθμός κριτηρίων αστοχίας όπως οι συναρτήσεις των συνιστωσών της τάσης ή της παραμόρφωσης χαρακτηρίζουσες τη θραύση του στοιχείου όγκου έχουν προταθεί κατά καιρούς. Εν τούτοις μόνο πρόσφατα το ενδιαφέρον κατευθύνθηκε στη διαμόρφωση μοντέλου προοδευτικής φθοράς υλικού η οποία προηγείται της μακροσκοπικής θραύσης. Με την παρούσα εργασία γίνεται επίλυση σε επίπεδα ιξωδοπλαστικά προβλήματα για κατασκευές από υλικά που υπακούουν σε καταστατικά μοντέλα σύζευξης βλάβης παραμόρφωσης με την παρούσα μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία.

Οι ρωγμές μειώνουν την αντοχή των δομικών στοιχείων και αυτό έχει ειδικό ενδιαφέρον στο σχεδιασμό των μηχανών αεροσκαφών και στους ατμοστρόβιλους όπου κυριαρχούν οι υψηλές θερμοκρασίες και η αστοχία λόγω παραμόρφωσης ερπυσμού ενδιαφέρει. Σε αυτά τα υψηλά επίπεδα θερμοκρασιών το φαινόμενο της χρονικά εξαρτώμενης θραύσης ερπυσμού μπορεί να θεωρηθεί ως πολλαπλής κλίμακας ειδικά όταν το φυσικό μέγεθος κλιμακώνεται στις διαστάσεις της μικροδομής του υλικού.

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία η έννοια του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σαν κριτήριο θραύσης σε συνδυασμό με τη χρήση των προταθέντων ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων παραμόρφωσης ερπυσμού για τον προσδιορισμό έναρξης της ρωγμής σε προβλήματα ερπυσμού δύο διαστάσεων.

Συνοπτικά η συμβολή που επιτεύχθηκε στη διεθνή βιβλιογραφία με την παρούσα εργασία είναι: η επίλυση ιξωδοπλαστικών προβλημάτων θερμοκρασιακής βαθμίδας με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, η εισαγωγή του ιδιόμορφου συνοριακού στοιχείου παραμόρφωσης ερπυσμού για την αποτίμηση του πεδίου των ανελαστικών τάσεων και παραμορφώσεων ερπυσμού στην κορυφή ρωγμής, η επίλυση προβλημάτων σύζευξης βλάβης παραμόρφωσης στην ιξωδοπλαστικότητα με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων και η εισαγωγή του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας ως κριτηρίου θραύσης στα ιξωδοπλαστικά υλικά.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής εργασίας είναι η επίλυση προβλημάτων συγκέντρωσης τάσεων σε ιξωδοπλαστικά (viscoplastic) υλικά υπό την επίδραση βαθμίδων μηχανικής και θερμικής φόρτισης με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων και την ανάπτυξη του κατάλληλου λογισμικού. Επίσης στους στόχους της παρούσας εργασίας είναι η καλύτερη αποτίμηση των πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων στην κορυφή ρωγμών με την εισαγωγή των ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων παραμόρφωσης ερπυσμού και η ανάπτυξη ενός κριτηρίου θραύσης βασισμένου στην έννοια του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας για τα ιξωδοπλαστικά υλικά.

Ένας αριθμός καταστατικών μοντέλων τάσης-παραμόρφωσης γνωστά ως ιξωδοπλαστικά έχει εμφανισθεί τις τελευταίες δεκαετίες. Αυτό οφείλεται στην προσπάθεια βελτίωσης της συμπεριφοράς σε υψηλές θερμοκρασίες των δομικών στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην αεροδιαστημική και την πυρηνική βιομηχανία. Η ανελαστικότητα σε αυτά τα στοιχεία δεν είναι αποτέλεσμα της μηχανικής φόρτισης αλλά προκαλείται κυρίως από τους περιοδικούς κύκλους θέρμανσης και τη θερμοκρασιακή βαθμίδα. Οι συμβατικές καταστατικές εξισώσεις και τα μοντέλα βλαβών αποτυγχάνουν να αποδώσουν την ισχυρή θερμομηχανική εξάρτηση από την πορεία της θερμομηχανικής φόρτισης, η οποία παρατηρείται για παράδειγμα στην κυκλική κράτυνση μερικών μετάλλων και κραμάτων ειδικά στις μεταλλουργικές μεταβολές.

Η ανάπτυξη μερικών ρεαλιστικών ιξωδοπλαστικών μοντέλων με τις κατάλληλες καταστατικές εξισώσεις ήταν κρίσιμη για το σχεδιασμό στοιχείων ενεργειακών συστημάτων σε υψηλές θερμοκρασίες. Το ενδιαφέρον σε αυτά τα μοντέλα ήταν η θεώρηση όλων των ανελαστικών παραμορφώσεων (πλαστική, ερπυσμός, χαλάρωση, κλπ) ως μια απλή ποσότητα και αυτό περικλείει αυτόματα κάθε αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Αυτά τα ιξωδοπλαστικά μοντέλα προσφέρουν αξιόπιστη εκτίμηση της χρονικά εξαρτώμενης ανελαστικής συμπεριφοράς των υλικών σε υψηλές θερμοκρασίες με τη μη θεώρηση της ανελαστικής παραμόρφωσης ως τεχνητά διαχωρισμένης σε μη χρονικά εξαρτώμενη πλαστική παραμόρφωση και χρονικά εξαρτώμενο ερπυσμό. Μια πολύ περιεκτική εξέταση μερικών ιξωδοπλαστικών μοντέλων αναπτύχθηκε από τους Walker [1], Lindholm [2], Lemaitre και Chaboche [3], Freed και Walker [4], Saleeb et al. [5], Ho και Krempl [6], Lubarda et al. [7] και Lin και Brocks [8].

Το κύριο μαθηματικό χαρακτηριστικό αυτών των νέων ιξωδοπλαστικών μοντέλων είναι ότι οι μη ελαστικοί ρυθμοί παραμόρφωσης εκφράζονται σαν συναρτήσεις των τρεχουσών τιμών τάσης, θερμοκρασίας και ορισμένων εσωτερικών μεταβλητών. Ο Krieg [9] έχει δείξει ότι τα περισσότερα από αυτά τα μοντέλα έχουν τον ίδιο βασικό σκελετό με δύο εσωτερικές μεταβλητές μια για την ισότροπη και μια για την κινηματική κράτυνση. Η μαθηματική μορφή αυτών των ιξωδοπλαστικών μοντέλων γίνεται πολύπλοκη επειδή περιέχουν καταστατικές εξισώσεις οι οποίες είναι μη γραμμικές.

Πολλά πρακτικά προβλήματα που περιλαμβάνουν σύνθετες μορφές διατομών και πολύπλοκη θερμομηχανική φόρτιση όπως αυτά που προκύπτουν σε θερμά στοιχεία μηχανών αεροστροβίλων που διαρρέονται από αέρια και σε μηχανές πυραύλων, πρέπει να λυθούν με τέτοιες αριθμητικές μεθοδολογίες που θα κάνουν αυτά τα ιξωδοπλαστικά μοντέλα εφαρμόσιμα για ανάλυση αυτού του είδους των δομικών στοιχείων. Μερικά από αυτά τα πολυάριθμα ιξωδοπλαστικά μοντέλα έχουν προταθεί από τους Hart [10], Hart et al. [11], Robinson και Swindeman [12], Chan et al. [13] και Chaboche [14] και έχουν δοκιμασθεί σε μονοαξονική χρονικά μεταβαλλόμενη φόρτιση σε διάφορα μέταλλα και κράματα και η συσχέτιση της θεωρίας με το πείραμα είναι πολύ καλή και παριστά αξιόπιστα την πειραματικά παρατηρηθείσα συμπεριφορά των υλικών σε μια ποικιλία εφαρμογών.

Οι Mukherjee [15,16], Morjaria και Mukherjee [17], Morjaria et al [18], Morjaria και Mukherjee [19], Arya [20,21], Arya και Kaufman [22], και Arya και Arnold [23] παρουσίασαν μεθοδολογίες συνοριακών (ΜΣΣ) και πεπερασμένων (ΜΠΣ) στοιχείων για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών με συμπεριφορά υλικών διεπόμενη από τα καταστατικά ιξωδοπλαστικά μοντέλα των Hart και Robinson με τη χρησιμοποίηση της μορφής του ρυθμού της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος. Η χωρική ολοκλήρωση των σχετικών μεταβλητών έγινε είτε με τη χρήση της μεθόδου των συνοριακών είτε των πεπερασμένων στοιχείων. Οι εργασίες του Mukherjee και των συνεργατών του με τη ΜΣΣ στο ιξωδοπλαστικό μοντέλο του Hart περιορίζονται σε προβλήματα δύο διαστάσεων ισόθερμης ανελαστικής παραμόρφωσης.

Οι Morjaria και Mukherjee [19] παρουσίασαν μια επίλυση πεπερασμένων στοιχείων σε ανελαστικά προβλήματα οριακών τιμών με μεταβαλλόμενη θερμική φόρτιση και με συμπεριφορά υλικών διεπόμενη από το ιξωδοπλαστικό μοντέλο του Hart. Στις αναφερθείσες εργασίες του Arya έγινε εφαρμογή των πεπερασμένων στοιχείων στο μοντέλο του Robinson αρχικά σε διάφορα μονοαξονικά προβλήματα ισόθερμης και μη ισόθερμης κυκλικής φόρτισης και αργότερα σε περισσότερο σύνθετα όπως η περίπτωση του κυλίνδρου με παχύ τοίχωμα με εσωτερική πίεση, λεπτού περιστρεφόμενιυ δίσκου γύρω από τον άξονα συμμετρίας του ή μιας παχύτοιχης σφαίρας με εσωτερική πίεση. Αυτή η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων βρέθηκε να λειτουργεί επαρκώς για αυτά τα αριθμητικά παραδείγματα.

Οι Morjaria et al. [18] και Providakis [24,25] υποστήριξαν ότι η ΜΣΣ είναι μια πολύ αποτελεσματική μέθοδος με πλεονεκτήματα έναντι της ΜΠΣ στην επίλυση μη γραμμικών χρονικά εξαρτώμενων προβλημάτων ανελαστικής παραμόρφωσης. Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα είναι ότι ο αριθμός των αγνώστων στο τελικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων είναι ανάλογος του αριθμού των συνοριακών στοιχείων στη ΜΣΣ σε αντίθεση με τον συνολικό αριθμό των κόμβων στην ΜΠΣ. Όμως ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα στη ΜΣΣ ήταν η αριθμητική αποτίμηση των επιρροών περιοχής (domain-based effects) (αδρανειακές, καθολικής φόρτισης, ανελαστικής και θερμικής παραμόρφωσης επιδράσεις). Αυτό προκαλείται από την παρουσία των επιφανειακών ολοκληρωμάτων στη διατύπωση των εξισώσεων τα οποία μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούν να μετατραπούν άμεσα σε μορφή ολοκληρωμάτων στο σύνορο.

Σε χρονικά εξαρτώμενα προβλήματα ερπυσμού σε υψηλές θερμοκρασίες επιφανειακά ολοκληρώματα προκύπτουν λόγω των επιδράσεων των θερμικών και των ανελαστικών όρων. Διάφορες μεθοδολογίες έχουν αναπτυχθεί για να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα αυτά όπως τα εσωτερικά στοιχεία και οι μέθοδοι της διπλής αμοιβαιότητας (dual reciprocity), οι οποίες είναι ελκυστικές επειδή δεν χρειάζεται εσωτερικός κάναβος. Οι υπολογισμοί σε γενικά προβλήματα χρονικά εξαρτώμενης ανελαστικής παραμόρφωσης σε υψηλές θερμοκρασίες είναι αρκετά ικανοποιητικοί με τη χρήση της εσωτερικής διακριτοποίησης (μέθοδος εσωτερικών-συνοριακών στοιχείων). Ακόμη και αν πρέπει να εφαρμόζεται η διακριτοποίηση του εσωτερικού σε αυτού του είδους τα μη γραμμικά προβλήματα, αυτό είναι αναγκαίο μόνο για την αποτίμηση ορισμένων ολοκληρωμάτων με γνωστές προς ολοκλήρωση συναρτήσεις.

Για συμμετρικά προβλήματα ρωγμών απαιτείται η διακριτοποίηση του ενός μόνο συνόρου της ρωγμής, στην περίπτωση όμως που δεν υπάρχει συμμετρία εφαρμόζονται διάφορες τεχνικές για την αντιμετώπιση του προβλήματος που δημιουργείται με τη σύμπτωση των συνόρων της ρωγμής. Μεταξύ αυτών είναι η μέθοδος της συνάρτησης Green, της ασυνεχούς μετατόπισης, των υποπεριοχών και της διπλής μεθόδου των συνοριακών στοιχείων. Με τη διπλή μέθοδο συνοριακών στοιχείων η δυσκολία παρακάμπτεται με την εισαγωγή πρόσθετης ανεξάρτητης συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης για τους ελκυστές. Διάφορες εφαρμογές βασισμένες στη διπλή μέθοδο συνοριακών στοιχείων υπάρχουν για προβλήματα θερμοελαστικότητας και μεταφοράς θερμότητας (Prasad et al., [26]).

Σε αυτή την εργασία η ΜΣΣ χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των μη γραμμικών χρονικά εξαρτώμενων ανελαστικών παραμορφώσεων μεταλλικών δομικών στοιχείων και υποβαλλόμενων σε χρονικά μεταβαλλόμενες φορτίσεις και σε θερμοκρασιακές βαθμίδες (Providakis και Kourtakis [27-29]). Επίλυση προβλημάτων ανελαστικής παραμόρφωσης με θερμοκρασιακή βαθμίδα δεν υπάρχει στη διεθνή βιβλιογραφία με τη ΜΣΣ καθώς όπως προαναφέρθηκε στις εργασίες του Mukherjee εξετάζονται μόνο ισόθερμα προβλήματα. Το λογισμικό αναπτύχθηκε κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή η χρησιμοποίηση οποιουδήποτε προαναφερθέντος ιξωδοπλαστικού μοντέλου.

Με τη ΜΣΣ υπολογίζεται ο ρυθμός των μεταβολών των μετατοπίσεων και των τάσεων σε κάθε χρονικό βήμα. Οι χρονικές μεταβολές των ποσοτήτων που ενδιαφέρουν ευρίσκονται χρησιμοποιώντας ένα σχέδιο ολοκλήρωσης ως προς το χρόνο με αυτόματο έλεγχο βήματος. Η παρούσα διατύπωση των συνοριακών στοιχείων χρησιμοποιεί γραμμική ή μη περιγραφή των σχετικών μεταβλητών και είναι ικανή να επιλύσει κάθε επίπεδο πρόβλημα. Αριθμητικά παραδείγματα παρουσιάζονται σε θερμο-ιξωδοπλαστικά προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης για κατασκευές από υλικά που υπακούουν τα ιξωδοπλαστικά καταστατικά μοντέλα του Hart και Robinson και υπόκεινται σε βαθμίδες μηχανικής και θερμικής φόρτισης.

Σημαντικό πεδίο έρευνας στη μηχανική των θραύσεων είναι η ανάλυση των πεδίων των τάσεων και των παραμορφώσεων στην κορυφή της ρωγμής και η αποτίμηση κάποιων σημαντικών παραμέτρων θραύσης που επηρεάζουν την ανάπτυξη των ρωγμών. Το πρόβλημα είναι αρκετά πολύπλοκο αν θεωρηθεί η χρονικά εξαρτώμενη ανελαστική παραμόρφωση ερπυσμού σε ρηγματωμένα υλικά. Δεν υπάρχει πλήρης αναλυτική λύση για αυτού του είδους τα προβλήματα.

Σε παλαιότερες εργασίες των Riedel και Rice [30-32] εφαρμόζεται μια ασυμπτωτική ανάλυση για να δώσει εκφράσεις κλειστού τύπου για τάσεις και παραμορφώσεις ερπυσμού κοντά στην κορυφή της ρωγμής ρηγατωμένων δοκιμίων. Σε αυτή την ανάλυση αμελείται ο ελαστικός ρυθμός παραμόρφωσης συγκρινόμενος με το ρυθμό ερπυσμού, επειδή στην κορυφή της ρωγμής και για τιμές του εκθέτη ερπυσμού μεγαλύτερες της μονάδας είναι αρκετά μικρότερος. Ενώ αυτή η υπόθεση ασυμπτωτικής ανάλυσης είναι ορθή στην κορυφή της ρωγμής, χρειάζεται προσεκτική διερεύνηση αφού η κατάσταση μπορεί να είναι διαφορετική ακόμη και σε μικρή απόσταση από την κορυφή της ρωγμής. Για αυτό το λόγο και για την αντιμετώπιση πραγματικών και πρακτικών προβλημάτων η χρήση των αριθμητικών επιλύσεων όπως οι μέθοδοι των πεπερασμένων (ΜΠΣ) ή των συνοριακών (ΜΣΣ) στοιχείων είναι επιτακτική.

Σε σχέση με τον προσδιορισμό των πεδίων των τάσεων και παραμορφώσεων κοντά στην κορυφή της ρωγμής σε ρηγματωμένα δομικά στοιχεία που υπόκεινται σε ανελαστική παραμόρφωση δύο διαστάσεων με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων μπορεί να αναφερθούν οι εργασίες του Mukherjee και των συνεργατών του [33,34]. Σε αυτές τις δημοσιεύσεις μια στάσιμη ρωγμή διαμορφώνεται ως πολύ λεπτή έλλειψη και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της συνάρτησης Green βρίσκεται η ανακατανομή των τάσεων στο χρόνο κοντά στην κορυφή της ρωγμής.

Αργότερα οι Cruse και Polcsh [35] και Rußwurm [36] διαμόρφωσαν το μοντέλο του πεδίου στην κορυφή της ρωγμής χρησιμοποιώντας επίσης κατάλληλες συναρτήσεις Green, ενώ οι Tan και Lee [37] χρησιμοποίησαν τις βασικές λύσεις Kelvin και κατάλληλες οριακές συνθήκες για να προσομοιώσουν τη ρωγμή. Ο Leitao et al. [38] πρότεινε τη διπλή συνοριακή μεθοδολογία για να προσομοιώσει αριθμητικά την ελαστοπλαστική ανάπτυξη της ρωγμής. Μια περισσότερο περιεκτική εξέταση της επίλυσης με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων για προβλήματα ανελαστικής μηχανικής των θραύσεων υπάρχει στο άρθρο του Aliabadi [39].

Στη διερεύνηση για μια ακριβή αλλά γενική υπολογιστική μέθοδο για την αποτίμηση ιδιόμορφων πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων στην κορυφή της ρωγμής, η μεθοδολογία των ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων σε συνδυασμό με την ΜΣΣ έχει χρησιμοποιηθεί κατάλληλα σε ποικίλες εφαρμογές στη μηχανική των θραύσεων. Διάφοροι ερευνητές έχουν συνεισφέρει σε αυτό το πεδίο, ο Blandford et al. [40] ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τη μεθοδολογία του σημείου στο ένα τέταρτο (quarter-point) του ιδιόμορφου συνοριακού στοιχείου του ελκυστή σε συνδυασμό με μια πολύ-χωρική (multi-domain) διατύπωση για την επίλυση συμμετρικών και μη συμμετρικών προβλημάτων ρωγμών.

Έκτοτε αυτή η μεθοδολογία χρησιμοποιείται ευρέως στην εφαρμογή της ΜΣΣ σε προβλήματα ρωγμών δύο και τριών διαστάσεων. Μια επέκταση αυτής της τεχνικής έγινε από τον Hantschel et al. [41] ο οποίος προσπάθησε να διαμορφώσει το μοντέλο του πεδίου στην κορυφή της ρωγμής σε δισδιάστατα ρηγματωμένα φύλλα ελαστοπλαστικών υλικών εισάγοντας ειδικά ιδιόμορφα συνοριακά στοιχεία και λαμβάνοντας υπόψη το HRR ιδιόμορφο πεδίο (Hutchnison [42] , Rice και Rosengren [43]) κοντά στην κορυφή της ρωγμής.

Ανάλυση της θραύσης που παίρνει υπόψη τη χρονικά εξαρτώμενη ανελαστική παραμόρφωση που ανακύπτει σε δομικά στοιχεία με ερπυσμό σχεδόν δεν υπάρχει στη βιβλιογραφία της ΜΣΣ. Μόνο μια εργασία της ομάδας του Mukherjee [33], όπως περιγράφεται παραπάνω προσπαθεί να επιλύσει το πρόβλημα με τη χρήση της μεθοδολογίας των συναρτήσεων Green. Αυτή η μεθοδολογία των συναρτήσεων Green, αν και ακριβής, περιορίζεται σε προβλήματα με μια απλή ρωγμή η οποία διαμορφώνεται ως μια λεπτή έλλειψη.

Η κύρια δυσκολία στην επίλυση προβλημάτων μηχανικής των θραύσεων αυτού του είδους τόσο με τη ΜΠΣ όσο και με τη ΜΣΣ είναι το ότι ενώ τη χρονική στιγμή μηδέν ο τύπος της ιδιομορφίας των τάσεων κοντά στην κορυφή της ρωγμής είναι η γνωστή ελαστική ιδιομορφία $r^{-\frac{1}{2}}$ (όπου r είναι η απόσταση από την κορυφή της ρωγμής) για κάθε άλλη χρονική στιγμή η τάξη της ιδιομορφίας αλλάζει σε $r^{-\frac{1}{n+1}}$ σε σχέση με τον εκθέτη ερπυσμού n. Είναι φανερό ότι για αυτού του είδους το πρόβλημα η τάξη της ιδιομορφίας είναι μεταβλητή και για μια κατάλληλη αριθμητική επίλυση είναι αναγκαίο να γίνεται η αλλαγή της τάξης της ιδιομορφίας με σύμφωνο τρόπο χρονικά εξαρτώμενο.

Μια παράμετρος θραύσης σε περιοχές συγκέντρωσης τάσης, η οποία έχει παίξει πολύ σημαντικό ρόλο τόσο στην ελαστική όσο και στην ανελαστική μηχανική των θραύσεων είναι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα τα αναπτυσσόμενα σε κλειστές διαδρομές γύρω από την κορυφή ρωγμής. Για υλικά που υφίστανται ερπυσμό ένα τέτοιο ολοκλήρωμα του ρυθμού της ενέργειας, $C(t)$ έχει ορισθεί από τους Bassani και McClintock [44] για την επίλυση προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με τον εκθετικό νόμο ερπυσμού ανάπτυξης των τάσεων στην κορυφή της ρωγμής μετά από την αρχική ελαστική απόκριση.

Το ολοκλήρωμα του ρυθμού της ενέργειας εξαρτάται από το ρυθμό των παραμορφώσεων, τις τάσεις, το ρυθμό των παραγώγων των μετατοπίσεων ως προς τον άξονα της ρωγμής και τον εκθέτη ερπυσμού. Αυτό το ειδικό ολοκλήρωμα φαίνεται να είναι μια εφαρμόσιμη παράμετρος για το χαρακτηρισμό της ανάπτυξης της ρωγμής σε ερπυσμό κάτω από σταθερές συνθήκες (steady-state) και μπορεί να θεωρηθεί ως συντελεστής εύρους εξαρτώμενος από το χρόνο και τη διαδρομή για ασυμπτωτικά πεδία τάσεων κοντά στην κορυφή της ρωγμής.

Ο ερπυσμός είναι χρονικά εξαρτώμενο φαινόμενο που οφείλεται στη μεταβολή της δομής των μετάλλων ή κραμάτων υπό σταθερή φόρτιση με την κίνηση των εξαρμόσεων (dislocations), τη διάχυση των ατόμων και των κενών καθώς και την ολίσθηση συνοριακών κόκκων. Ο ερπυσμός είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της ιξωδοπλαστικής συμπεριφοράς των μετάλλων και κραμάτων σε αυξημένες θερμοκρασίες και αποτελεί αποφασιστικό παράγοντα στο σχεδιασμό μιας κατασκευής.

Ένα ιδιόμορφο συνοριακό στοιχείο παραμόρφωσης ερπυσμού (ΙΣΣΠΕ) αναπτύσσεται με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία με την παρούσα εργασία (Providakis και Kourtakis [45,46]) για να αποτιμήσει τη χρονικά εξαρτώμενη ιδιομορφία της κατανομής του πεδίου των ανελαστικών τάσεων και παραμορφώσεων ερπυσμού σε ρηγματωμένα υλικά σε προβλήματα δύο διαστάσεων. Η δημιουργία αυτών των στοιχείων βασίζεται στην τεχνική Maiti [47] που προσομοιώνει τις ιδιομορφίες εκθετικού τύπου γύρω από την κορυφή της ρωγμής που ανακύπτουν σε διάφορα προβλήματα θραύσης γραμμικής ελαστικότητας. Τα αποτελέσματα των τάσεων και παραμορφώσεων που βρίσκονται με την εφαρμογή των ΙΣΣΠΕ με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν τη χρονική εξάρτηση του ολοκληρώματος του ρυθμού ενέργειας $C(t)$ και την ανάπτυξη της ζώνης ερπυσμού.

Παραδείγματα από ποικίλα προβλήματα ρωγμών διερευνώνται για να επιβεβαιώσουν την επάρκεια των προτεινόμενων ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων για την ανάλυση προβλημάτων κατανομής των τάσεων και παραμορφώσεων ερπυσμού και για τον προσδιορισμό κάποιων σημαντικών παραμέτρων ερπυσμού θραύσης. Τα ερευνούμενα δομικά στοιχεία θεωρείται ότι υφίστανται παραμόρφωση ερπυσμού δύο διαστάσεων και υποβάλλονται σε συνθήκες απομακρυσμένης φόρτισης. Η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου καταδεικνύεται και η ακρίβεια της συγκρίνεται με τα αποτελέσματα που βρίσκονται από επίλυση πεπερασμένων στοιχείων για διάφορες συνθήκες ερπυσμού. Τα ιδιόμορφα συνοριακά στοιχεία απεικονίζουν σωστά τη χρονικά εξαρτώμενη ιδιόμορφη συμπεριφορά των πεδίων των τάσεων και των παραμορφώσεων στην κορυφή της ρωγμής σε υλικά τα οποία υπόκεινται σε ερπυσμό. Πέραν από το μοντέλο του εκθετικού νόμου ερπυσμού (Norton [48]) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και κάθε άλλο καταστατικό μοντέλο ερπυσμού με παρόμοια μαθηματική δομή με κατάλληλη προσαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου.

Το φαινόμενο των βλαβών (damage) στις περιοχές συγκέντρωσης τάσεων συνίσταται από ασυνέχειες επιφανειών με τη μορφή των μικρορωγμών ή από ασυνέχειες όγκου με τη μορφή κοιλοτήτων. Περιέχει μια ρεολογική διαδικασία εντελώς διαφορετική από την παραμόρφωση αν και οι αρχικές αιτίες και των δύο φαινομένων είναι πανομοιότυπες: κίνηση και συσσώρευση των εξαρμόσεων στα μέταλλα, τροποποίηση των ενδομοριακών δεσμών στα οργανικά υλικά και μικροαποσταθεροποίηση στα μεταλλεύματα. Οι βλάβες χαρακτηρίζονται από έντονη μη αναστρεψιμότητα: η παραδοσιακή θερμομηχανική συμπεριφορά μπορεί μόνο μερικά να εξαλείψει τις προκαλούμενες από αυτή ατέλειες. Η μακροσκοπική θραύση έχει μελετηθεί προ πολλού χρόνου με το χαρακτηρισμό της θραύσης μέσω μηχανικών μεταβλητών. Ένας αριθμός κριτηρίων αστοχίας όπως: συναρτήσεις των συνιστωσών της τάσης ή της παραμόρφωσης χαρακτηρίζουσες τη θραύση του στοιχείου όγκου έχουν προταθεί από τους Coulomb, Rankine, Tresca, von Mises, Mohr και Caquot. Εν τούτοις μόνο πρόσφατα το ενδιαφέρον κατευθύνθηκε στη διαμόρφωση μοντέλου προοδευτικής φθοράς υλικού η οποία προηγείται της μακροσκοπικής θραύσης.

Η ανάπτυξη της μηχανικής των βλαβών άρχισε το 1958. Αυτό το έτος ο Kachanov έκανε την πρώτη δημοσίευση πάνω σε συνεχή μεταβλητή βλάβης στο πλαίσιο, αν και περιορισμένα, της αστοχίας ερπυσμού μετάλλων σε μονοαξονική φόρτιση. Αυτή η ιδέα επανήλθε τη δεκαετία του 70, κυρίως στη Γαλλία (Lemaitre και Chaboche), Σουηδία (Hult), Αγγλία (Leckie) και Ιαπωνία (Murakami) και επεκτάθηκε στην όλκιμη θραύση και στη θραύση κόπωσης.

Οι Murakami et al. [49] και Becker et al. [50] έχουν ασχοληθεί με την επίλυση προβλημάτων βλαβών με το μοντέλο των Kachanov-Rabotnov με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στην παρούσα εργασία γίνεται επίλυση προβλημάτων σε ιξωδοπλαστικά υλικά που υπακούουν στο καταστατικό μοντέλο σύζευξης βλάβης παραμόρφωσης των Kachanov-Rabotnov για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία με την παρούσα μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων.

Οι ρωγμές μειώνουν την αντοχή των δομικών στοιχείων και αυτό έχει ειδικό ενδιαφέρον στο σχεδιασμό των μηχανών αεροσκαφών και στους ατμοστρόβιλους όπου κυριαρχούν οι υψηλές θερμοκρασίες και η αστοχία λόγω παραμόρφωσης ερπυσμού ενδιαφέρει. Σε αυτά τα υψηλά επίπεδα θερμοκρασιών το φαινόμενο της χρονικά εξαρτώμενης θραύσης ερπυσμού μπορεί να θεωρηθεί ως πολλαπλής κλίμακας ειδικά όταν το φυσικό μέγεθος κλιμακώνεται στις διαστάσεις της μικροδομής του υλικού.

Για μια επικρατούσα ρωγμή σε ένα μεταλλικό στοιχείο που υπόκειται σε παραμόρφωση ερπυσμού, η δημιουργία της επιφάνειας μακρορωγμής κατά μήκος της διαδρομής της κύριας ρωγμής (τύπος I) πρέπει να διακριθεί από τη δημιουργία των επιφανειών των μικρορωγμών από την πλευρά της κύριας ρωγμής όπου υπάρχει η περιοχή ερπυσμού. Με αυτήν την έννοια μπορεί η θραύση ερπυσμού να θεωρηθεί ως διαδικασία πολλαπλής κλίμακας.

Το κριτήριο της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας έχει προταθεί πάνω από δύο δεκαετίες σαν κριτήριο θραύσης σε αντιδιαστολή με τη συμβατική θεωρία των G και K του ρυθμού απελευθερούμενης ενέργειας του Griffith στην ελαστική μηχανική της θραύσης. Αυτό το κριτήριο παρέχει μια εναλλακτική προσέγγιση στην πρόβλεψη της αστοχίας για την ίδια επίλυση τάσεων. Οι διαφορές μεταξύ των δύο κριτηρίων δόθηκαν σε εργασίες του Sih [51-53]. Το κριτήριο της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας απόκτησε έδαφος και αξιοπιστία στη μηχανική.

Με την παρούσα εργασία εισάγεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία η έννοια του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σαν κριτήριο θραύσης σε συνδυασμό με τη χρήση των προταθέντων ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων παραμόρφωσης ερπυσμού (ΙΣΣΠΕ) για τον προσδιορισμό έναρξης της ρωγμής σε προβλήματα ερπυσμού δύο διαστάσεων (Providakis και Kourtakis [54]).

Η συμβολή που επιτεύχθηκε στη διεθνή βιβλιογραφία στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής συνοπτικά είναι: η εφαρμογή της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων σε ιξωδοπλαστικά προβλήματα θερμοκρασιακής βαθμίδας με την ανάπτυξη του κατάλληλου λογισμικού, η εισαγωγή του ιδιόμορφου συνοριακού στοιχείου παραμόρφωσης ερπυσμού για την αποτίμηση της χρονικά εξαρτώμενης ιδιομορφίας της κατανομής του πεδίου των ανελαστικών τάσεων και παραμορφώσεων ερπυσμού στην κορυφή ρωγμής, η εφαρμογή της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων για επίλυση προβλημάτων σύζευξης βλάβης παραμόρφωσης στην ιξωδοπλαστικότητα και η εισαγωγή του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας ως κριτηρίου θραύσης στα ιξωδοπλαστικά υλικά.

Η διάρθωση της παρούσας διατριβής συνεχίζεται με το κεφάλαιο 2 όπου περιγράφονται γενικά στοιχεία από την ιξωδοπλαστικότητα, αποτελέσματα από πειράματα κράτυνσης, ερπυσμού, χαλάρωσης και κυκλικής φόρτισης. Αναφέρονται θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί για την εξήγηση του φαινομένου του ερπυσμού. Αναπτύσσεται επίσης η θεωρία των εσωτερικών μεταβλητών της ιξωδοπλαστικότητας και ο νόμος και το δυναμικό ροής. Στο κεφάλαιο 3 περιγράφονται αναλυτικά τα ιξωδοπλαστικά μοντέλα των Hart και Robinson. Στο κεφάλαιο 4 περιγράφονται οι συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις για επίπεδη παραμόρφωση και ένταση καθώς και η αριθμητική τους επίλυση. Επιλύονται προβλήματα με τα ιξωδοπλαστικά μοντέλα των Hart και Robinson με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων και γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με αναλυτικές λύσεις και αποτελέσματα από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Στο κεφάλαιο 5 περιγράφονται τα τετραγωνικά (quadratic) και τα προτεινόμενα ιδιόμορφα συνοριακά στοιχεία και επιλύονται προβλήματα συγκέντρωσης τάσεων με τη ΜΣΣ και γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με εμπειρικές λύσεις και αποτελέσματα από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στο κεφάλαιο 6 αναφέρονται θεωρίες και μοντέλα από τη μηχανική βλαβών και επιλύονται προβλήματα με το μοντέλο Kachanov-Rabotnov με τη ΜΣΣ και γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με αποτελέσματα από τη ΜΠΣ. Στο κεφάλαιο 7 δίδονται στοιχεία για την πυκνότητα και το ρυθμό πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας και επιλύονται προβλήματα με τη ΜΣΣ για την επιβεβαίωση του προτεινόμενου κριτηρίου θραύσης για ιξωδοπλαστικά υλικά. Τέλος στο κεφάλαιο 8 συνοψίζονται τα βασικά συμπεράσματα της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΙΞΩΔΟΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

2.1 Εισαγωγή

Η διαρροή είναι το πιο εντυπωσιακό χαρακτηριστικό της πλαστικής συμπεριφοράς, η ύπαρξη μιας καλά προσδιορισμένης τάσης διαρροής είναι η εξαίρεση παρά ο κανόνας. Ο μαλακός χάλυβας, ο οποίος ανήκει σε αυτή την κατηγορία, είναι ένα από τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα μέταλλα και προσπάθειες για τη θεωρητική περιγραφή της συμπεριφοράς του προηγήθηκαν των άλλων μετάλλων. Αυτές οι προσπάθειες περιλάμβαναν ένα κριτήριο διαρροής σαν ουσιώδες γνώρισμα και καθιερώθηκαν σαν θεωρία της πλαστικότητας.

Η θεωρία της ιξωδοπλαστικότητας σαν μεταγενέστερη εξέλιξη λαμβάνει υπόψη στους υπολογισμούς την ευαισθησία του ρυθμού της παραμόρφωσης ή της τάσης. Για μέταλλα και κράματα συνδέεται με μηχανισμούς που έχουν σχέση με την κίνηση των εξαρμόσεων (dislocations) και αποκλίσεις με πρόσθεση επιδράσεων από εσωκρυσταλλική ολίσθηση. Αυτοί οι μηχανισμοί επιδρούν όταν η θερμοκρασία είναι κατά προσέγγιση μεγαλύτερη του ενός τρίτου της απόλυτης θερμοκρασίας τήξης. Αυτό είναι ένα σχηματικό και ενδεικτικό όριο. Ορισμένα κράματα έχουν ιξωδοπλαστική συμπεριφορά σε θερμοκρασία δωματίου (300K) αν και το σημείο τήξης είναι μεγαλύτερο από 1400K. Για ένα μεγάλο εύρος θερμοκρασιών η επιλογή μεταξύ των θεωριών της πλαστικότητας και της ιξωδοπλαστικότητας εξαρτάται από το τύπο της εφαρμογής.

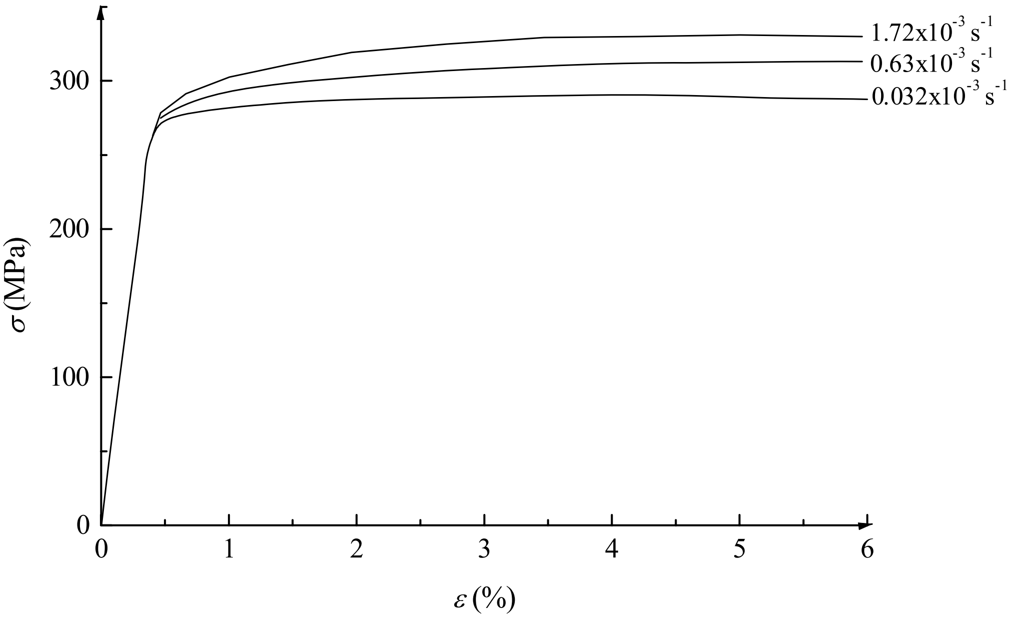
Μια άλλη όψη είναι η επίδραση που προκαλείται ανεξάρτητα από κάθε μακροσκοπική παραμόρφωση όπως η επανάταξη (recovery) της κρυσταλλικής δομής και η γήρανση (aging). Μερικές φορές αυτοί οι μηχανισμοί συμβαίνουν ταυτόχρονα με την παραμόρφωση και σε τέτοιες περιπτώσεις η διαμόρφωση ενός ιξωδοπλαστικού μοντέλου που θα τους περιγράφει είναι ακόμη πιο περίπλοκη. Για πολυμερή, ξύλο και άσφαλτο η θεωρία της ιξωδοπλαστικότητας πρέπει να εφαρμόζεται μόλις το φορτίο υπερβεί το όριο της ελαστικότητας ή ιξωδοελαστικότητας.

Ανάλογα με την μέθοδο που υιοθετείται, ένα ιξωδοπλαστικό μοντέλο βρίσκεται από την ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων των χαρακτηριστικών πειραμάτων. Τέτοια πειράματα είναι τα πειράματα κράτυνσης σε εφελκυσμό [3] με σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης ή σταθερό ρυθμό τάσης, πειράματα ερπυσμού με σταθερή τάση, πειράματα χαλάρωσης με σταθερή παραμόρφωση και πειράματα με κυκλική φόρτιση.

2.1.1 Πειράματα κράτυνσης

Οι καμπύλες κράτυνσης ενός ιξωδοπλαστικού υλικού δεν είναι σημαντικά διαφορετικές από εκείνες των πλαστικών υλικών (καμπύλες με πλατώ δεν παρατηρούνται). Τρεις ουσιώδεις διαφορές είναι εμφανείς:

Η επίδραση του ρυθμού παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}$ (ή τάσης) : όσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός παραμόρφωσης (ή τάσης) τόσο μεγαλύτερη είναι η τάση σ στην ίδια παραμόρφωση (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Πειράματα κράτυνσης σε διάφορους ρυθμούς παραμόρφωσης, σκληρυμένο AU4G, 200^{o} C (Lemaitre and Chaboche[3]).

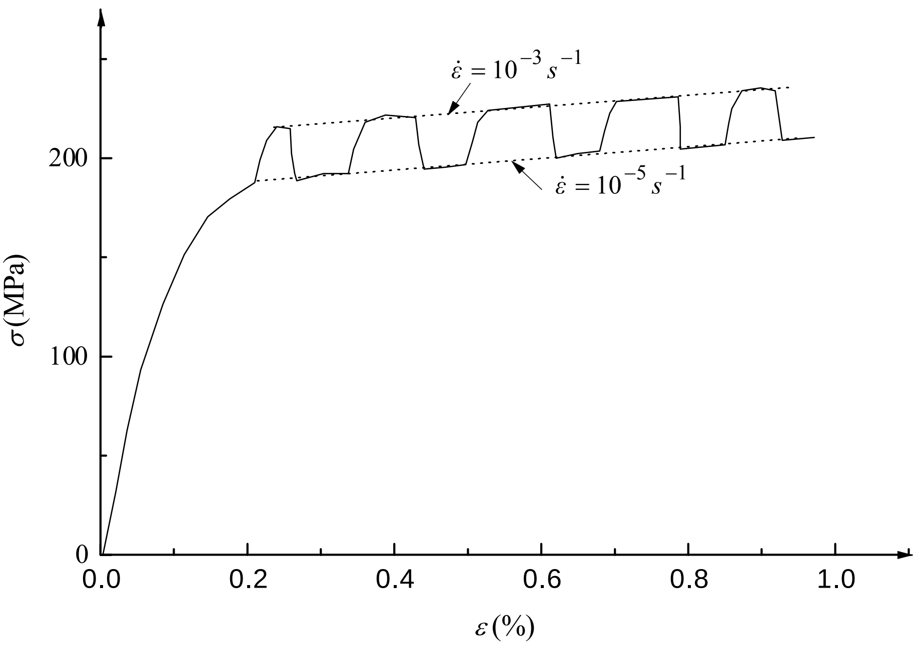
Μια αλλαγή στο ρυθμό παραμόρφωσης κατά τη διάρκεια του πειράματος έχει σαν αποτέλεσμα μια άμεση αλλαγή στην καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων η οποία τείνει στη μονοτονική καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων που αντιστοιχεί στο νέο ρυθμό (Σχήμα 2.2).

Η έννοια του πλαστικού ορίου διαρροής δεν είναι αυστηρά εφαρμόσιμη, πλαστική ροή μπορεί να συμβεί σε μια τάση μικρότερη από κάθε τάση εφαρμοσθείσα προηγούμενα. Το ελαστικό όριο ή η αρχική τάση διαρροής είναι επίσης δύσκολο να προσδιορισθεί. Σε υψηλές θερμοκρασίες είναι βολικό να θεωρείται ως μηδέν και να σχηματοποιείται η ιξωδοπλαστική συμπεριφορά από πολύ ιξώδη μοντέλα.

Αν η αποφόρτιση εκτελείται σε αρκετά υψηλό ρυθμό ($\dot{\varepsilon}>10^{-3}$ s^{-1}) η ελαστική συμπεριφορά παραμένει ανεπηρέαστη από τις ιξωδοπλαστικές παραμορφώσεις. Αυτό σημαίνει ότι η υπόθεση της ανάλυσης των παραμορφώσεων είναι εφαρμόσιμη στις περισσότερες περιπτώσεις όπου οι παραμορφώσεις είναι μικρές:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{in} \tag{2.1}$$

όπου ε^e είναι η ελαστική και ε^{in} η ιξωδοπλαστική παραμόρφωση.



Σχήμα 2.2: Κράτυνση του 304 ανοξείδωτου χάλυβα σε μεταβλητούς ρυθμούς παραμόρφωσης σε θερμοκρασία δωματίου (Lemaitre and Chaboche[3]).

2.1.2 Πειράματα ερπυσμού

Η κλασσική καμπύλη ερπυσμού απεικονίζει την εξέλιξη της παραμόρφωσης σαν συνάρτηση του χρόνου *t* σε ένα υλικό που υπόκειται σε μονοαξονική τάση σε σταθερή θερμοκρασία (Σχήμα 2.3). Αυτή η καμπύλη δείχνει τρεις φάσεις ή περιόδους συμπεριφοράς:

Μια αρχική φάση ερπυσμού ($0 \le \varepsilon^{in} < \varepsilon_1$) κατά τη διάρκεια της οποίας η κράτυνση του υλικού οδηγεί σε μείωση του ρυθμού ροής ο οποίος αρχικά είναι υψηλός.

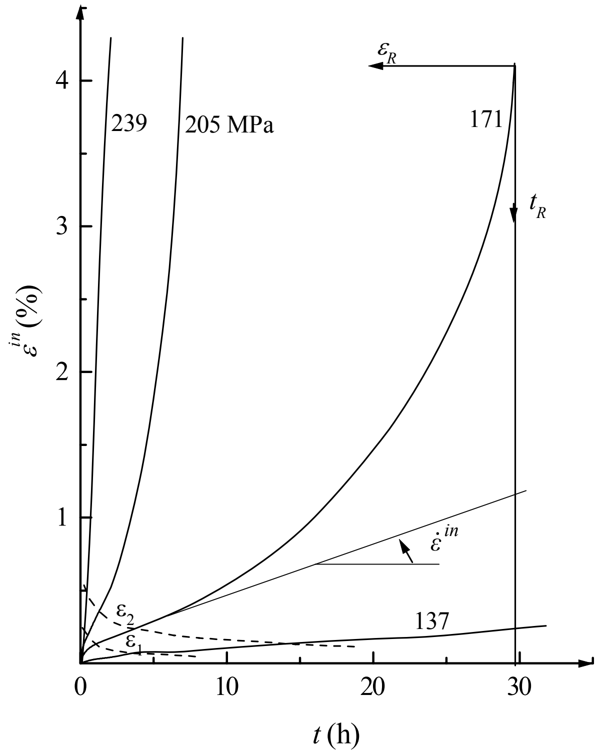
Μια δευτερογενή φάση ερπυσμού ($\varepsilon_1 \le \varepsilon^{in} < \varepsilon_2$) κατά τη διάρκεια της οποίας ο ρυθμός ροής είναι σχεδόν σταθερός.

Μια τριτογενή φάση ερπυσμού ($\varepsilon_2 \le \varepsilon^{in} < \varepsilon_R$) κατά την οποία η συνήθης αύξηση του ρυθμού της παραμόρφωσης μέχρι την παραμόρφωση θραύσης οφείλεται σε δύο παράγοντες, τη μείωση της διατομής του δοκιμίου σε πειράματα με σταθερή φόρτιση και στην εμφάνιση του φαινομένου της βλάβης (damage) η οποία σταδιακά μειώνει την αντίσταση του υλικού.

Ο αρχικός ερπυσμός σε ένα αριθμό μετάλλων και κραμάτων περιγράφεται αρκετά καλά από τον νόμο του Andrade [3]:

$$\sigma = A\, t^{1/q} \tag{2.2}$$

όπου A και q είναι συντελεστές εξαρτώμενοι από το υλικό και τη θερμοκρασία, η τιμή του q είναι περίπου 3.



Σχήμα 2.3: Πειράματα ερπυσμού σε διάφορα επίπεδα τάσεων, υπερκράμα IN 100, 1000^o C (Lemaitre and Chaboche[3]).

Διαφορετικά πειράματα ερπυσμού σε διαφορετικά επίπεδα τάσεων αλλά στην ίδια θερμοκρασία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δείξουν την σχέση μεταξύ του ρυθμού του δευτερογενούς ερπυσμού $\dot{\varepsilon}^{in}$ και της τάσης. Αυτή η σχέση είναι ο νόμος του Norton:

$$\dot{\varepsilon}^{in} = B\sigma^{n} \tag{2.3}$$

όπου B και n είναι συντελεστές χαρακτηριστικοί για κάθε υλικό και θερμοκρασία.

Οι τιμές του εκθέτη n και του B συχνά εξαρτώνται από το θεωρούμενο εύρος του ρυθμού: για υψηλούς ρυθμούς το αποτέλεσμα της μείωσης της διατομής γίνεται σημαντικό και οι τιμές του n είναι γενικά μεγαλύτερες. Για χαμηλούς ρυθμούς ο εκθέτης έχει την τάση να μειωθεί. Τέτοιες μεταβολές παρατηρούνται αμέσως μετά τη διόρθωση από την επίδραση της μείωσης της διατομής. Η κινηματική κράτυνση και η χρονική επανάταξη συντείνουν στο να ληφθούν υπ' όψη αυτές οι μεταβολές.

Σε επόμενες παραγράφους εξετάζεται αναλυτικότερα το φαινόμενο του ερπυσμού καθώς και τα αίτια που το προκαλούν.

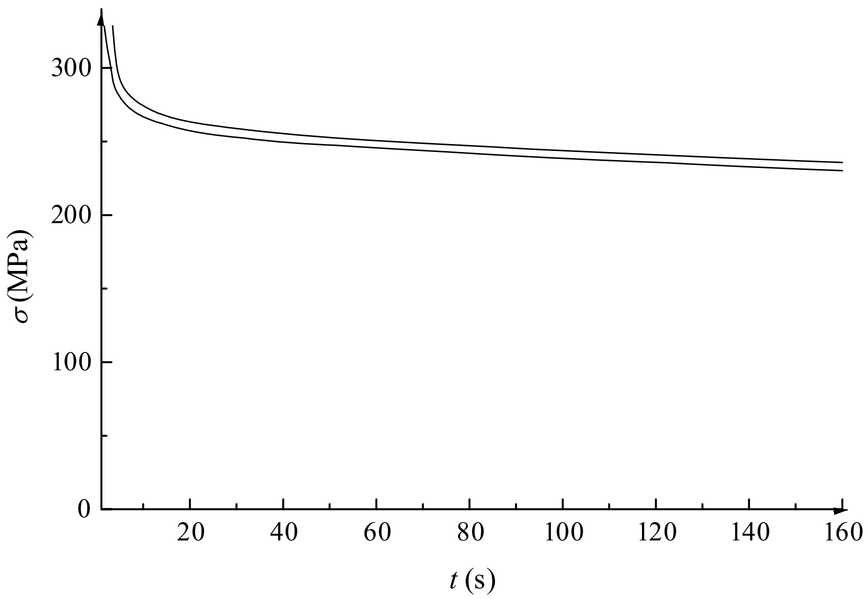
2.1.3 Πειράματα χαλάρωσης

Τα πειράματα χαλάρωσης περιγράφουν τη μείωση της τάσης που προκύπτει από μια μονοαξονική φόρτιση με σταθερή παραμόρφωση (Σχήμα 2.4). Αυτά τα πειράματα χαρακτηρίζουν το ιξώδες και χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της σχέσης μεταξύ της τάσης και του ρυθμού της ιξωδοπλαστικής παραμόρφωσης. Ο ρυθμός της παραμόρφωσης μπορεί να αναλυθεί ως:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{e} + \dot{\varepsilon}^{in} \tag{2.4}$$

όπου με το νόμο της γραμμικής ελαστικότητας $\dot{\varepsilon}^{e} = \dot{\sigma} / E$ και για την περίπτωση της χαλάρωσης όπου $\dot{\varepsilon} = 0$,

$$\dot{\varepsilon}^{in} = -\dot{\sigma} / E \tag{2.5}$$



Σχήμα 2.4: Πειράματα χαλάρωσης, σκληρυμένο με γήρανση κράμα AU4G, 200^{o} C (Lemaitre and Chaboche[3]).

2.1.4 Νόμος ιξώδους κράτυνσης

Τα διαφορετικά αποτελέσματα που μέχρι τώρα έχουν περιγραφεί μπορούν να συμπεριληφθούν σε ένα μονοαξονικό καταστατικό νόμο με τρεις παραμέτρους που απεικονίζουν τα ιξωδοπλαστικά φαινόμενα σε μονοτονική αύξουσα παραμόρφωση [3].

Για κάθε ένα από τα τρία είδη πειραμάτων η εξέλιξη των ε^{in} και $\dot{\varepsilon}^{in}$ μπορεί να υπολογισθεί για να απεικονίζει αυτά σε μια γραφική παράσταση (ε^{in}, $\dot{\varepsilon}^{in}$) με την τάση ως παράμετρο. Για πολλά υλικά χρησιμοποιούνται πειράματα κράτυνσης, ερπυσμού και χαλάρωσης σε σταθερή θερμοκρασία για να σχεδιασθούν ισοτασικές καμπύλες στο επίπεδο των (ε^{in}, $\dot{\varepsilon}^{in}$). Αυτό αποδεικνύει πειραματικά ότι ένας καταστατικός νόμος:

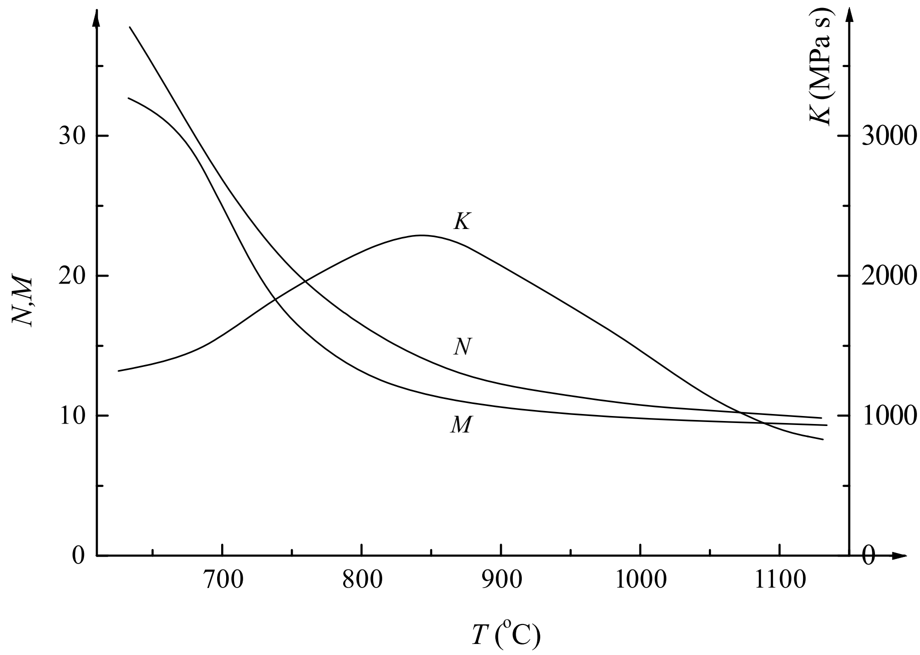
$$\sigma = f\,(\varepsilon^{in},\, \dot{\varepsilon}^{in}) \tag{2.6}$$

μπορεί να προσδιορισθεί στο πεδίο της μεταβολής των ε^{in}, $\dot{\varepsilon}^{in}$.

Λαμβάνοντας υπ' όψη το νόμο του Norton και τη σχέση των καμπύλων κράτυνσης, ένας προσδιορισμός της συνάρτησης f θα ήταν το γινόμενο εκθετικών συναρτήσεων:

$$\sigma = K {\varepsilon^{in}}^{1/M}\ {\dot{\varepsilon}^{in}}^{1/N} \tag{2.7}$$

όπου *N, M, K* είναι τρεις παράμετροι που είναι συναρτήσεις της θερμοκρασίας και εξαρτώνται από το υλικό. *N* είναι ο εκθέτης ιξώδους, *M* ο εκθέτης κράτυνσης και *K* ο συντελεστής αντίστασης.



Σχήμα 2.5: Μεταβολή των συντελεστών *N, M, K* με τη θερμοκρασία, μη επικαλυμένο ανθεκτικό κράμα IN 100 (Lemaitre and Chaboche[3]).

2.1.5 Επίδραση της θερμοκρασίας

Τα ιξώδη φαινόμενα που συμβαίνουν στους κόκκους και στα σύνορα των κόκκων των μετάλλων ή στους ενδομοριακούς συνδέσμους των πολυμερών επηρεάζονται αρκετά από τη θερμοκρασία Η τάση σε μια δεδομένη ιξωδοπλαστική παραμόρφωση και χρόνο μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Ένας τρόπος για τον υπολογισμό της επιρροής της θερμοκρασίας είναι η θεώρηση του ερπυσμού ως θερμικά ενεργού φαινομένου.

Ο ρυθμός ερπυσμού θεωρείται ανάλογος του αριθμού ενεργών πηγών, οι οποίες δίδονται από το νόμο πιθανοτήτων του Maxwell. Αν h είναι η ενέργεια η συσχετιζόμενη με μια πηγή και ΔH η ενέργεια ενεργοποίησης κάθε πηγής, τότε [3]:

$$\dot{\varepsilon}^{in} \sim \int_{\Delta H}^{\infty} \frac{1}{kT} \exp(-h/kT)dh = \exp(-\Delta H/kT) \tag{2.8}$$

όπου k είναι η σταθερά του Boltzmann.

Ο νόμος ιξώδους κράτυνσης λαμβάνοντας υπ’ όψη τη θερμοκρασία T μπορεί να εκφρασθεί ως:

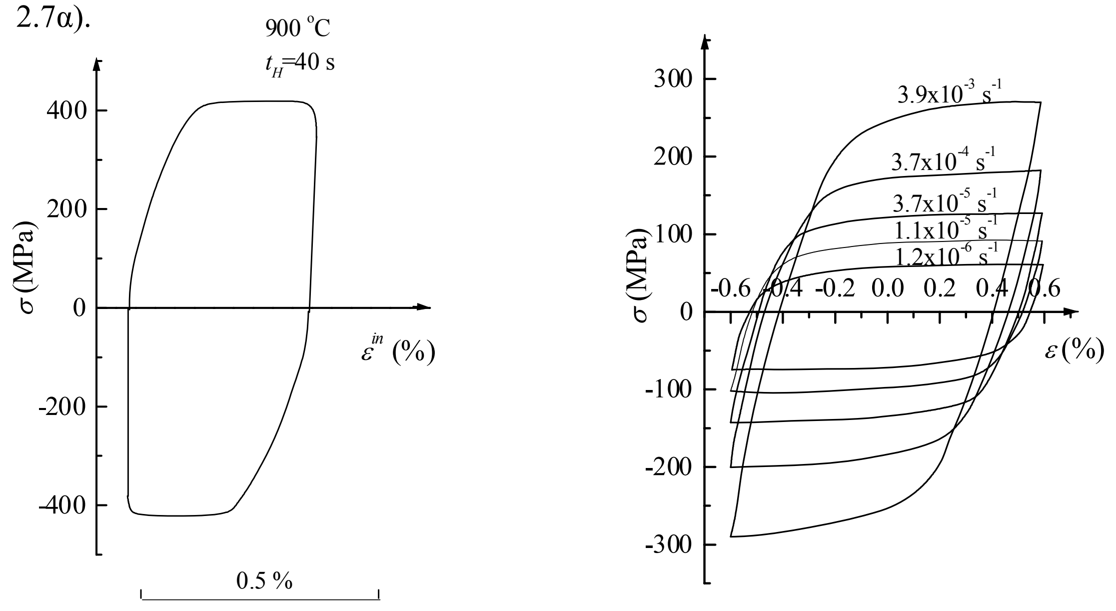
$$\sigma = K\varepsilon^{in^{1/M}} [\dot{\varepsilon}^{in} \exp(\Delta H/kT)]^{1/N} \tag{2.9}$$

Η ενέργεια ενεργοποίησης ΔH μεταβάλλεται με τη τάση και τη θερμοκρασία.

2.1.6 Κυκλική φόρτιση

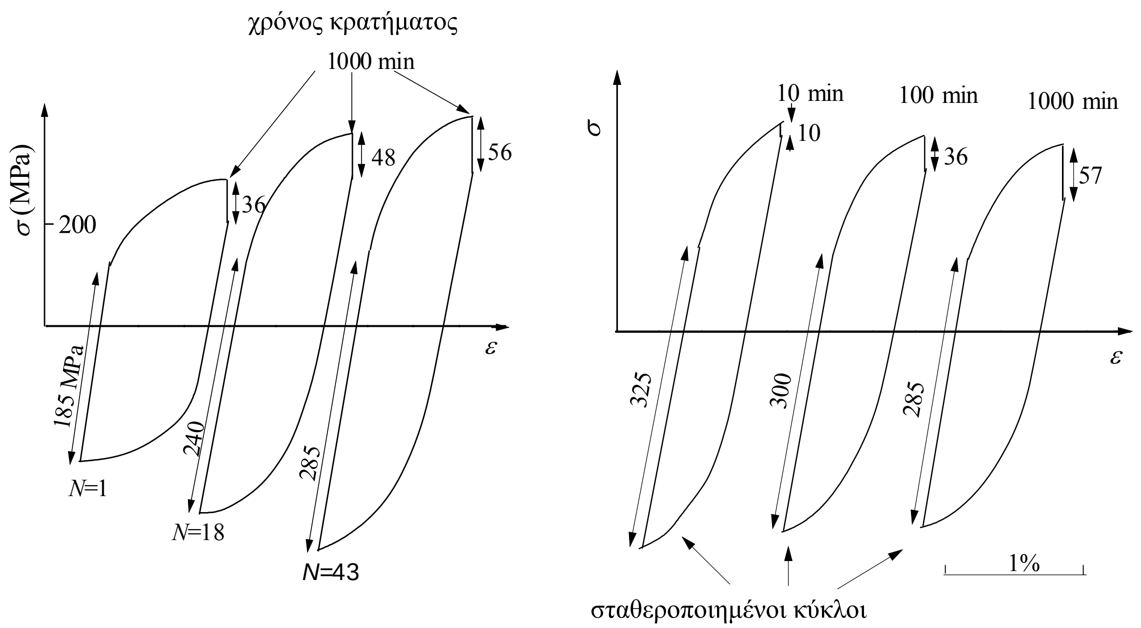
Η επιρροή του ιξώδους του υλικού ανιχνεύεται με πειράματα ερπυσμού κυκλικής φόρτισης (με ίσο χρόνο κρατήματος t_H σε εφελκυσμό και θλίψη σε πειράματα ελεγχόμενης τάσης) (Το Σχήμα 2.6α δείχνει ένα παράδειγμα σε σταθεροποιημένο κύκλο), πειράματα κυκλικής χαλάρωσης (κρατώντας την παραμόρφωση σταθερή), γενικά με τάση όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7 και με πειράματα με διαφορετικές συχνότητες (Σχήμα 2.6β).

Σε κάθε περίπτωση η πλαστική παραμόρφωση για την ίδια τάση έχει διαφορετικό χρόνο να αναπτυχθεί. Συνεπώς η καμπύλη κυκλικής φόρτισης εξαρτάται από την συχνότητα και το χρόνο κρατήματος (Σχήμα 2.8). Για ένα υλικό που υποβάλλεται σε ισχυρή κυκλική κράτυνση παρατηρείται μια αύξηση της μέγιστης τάσης που αντιστοιχεί σε εμφανή αύξηση του ελαστικού πεδίου κατά τη διάρκεια του κύκλου και μια αύξηση της τάσης χαλάρωσης κατά τη διάρκεια του χρόνου κρατήματος (Σχήμα 2.7α).



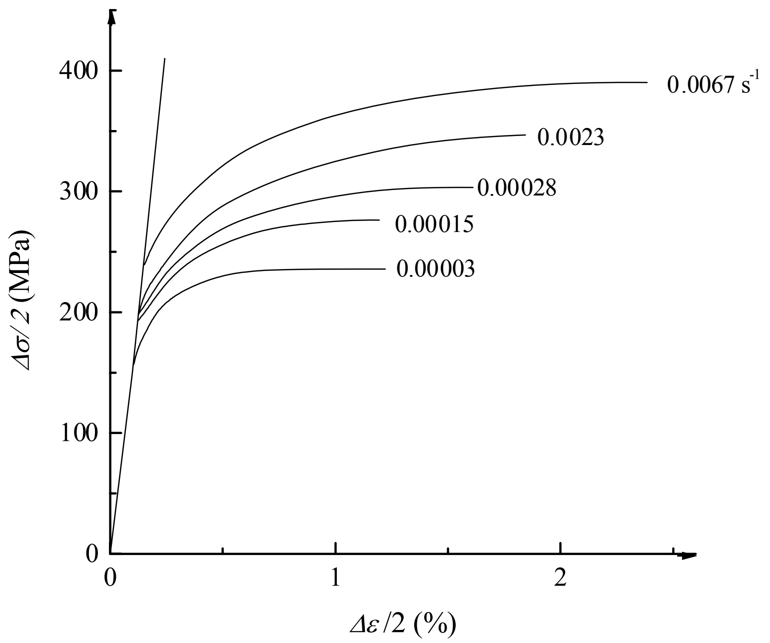
(α) (β)

Σχήμα 2.6: (α) σταθεροποιημένος κύκλος σε πείραμα κυκλικού ερπυσμού κράμα IN100, 800°C, (β) επίδραση του ρυθμού παραμόρφωσης σε σταθεροποιημένους κύκλους κράμα Hastelloy-X, 870°C (Lemaitre and Chaboche[3]).



(α) (β)

Σχήμα 2.7: Πειράματα κυκλικής χαλάρωσης σε 316 ανοξείδωτο χάλυβα, 600°C, (α) εξέλιξη μεταξύ πρώτου και σταθεροποιημένου κύκλου, (β) επίδραση του χρόνου κρατήματος στο σταθεροποιημένο κύκλο (Lemaitre and Chaboche[3]).



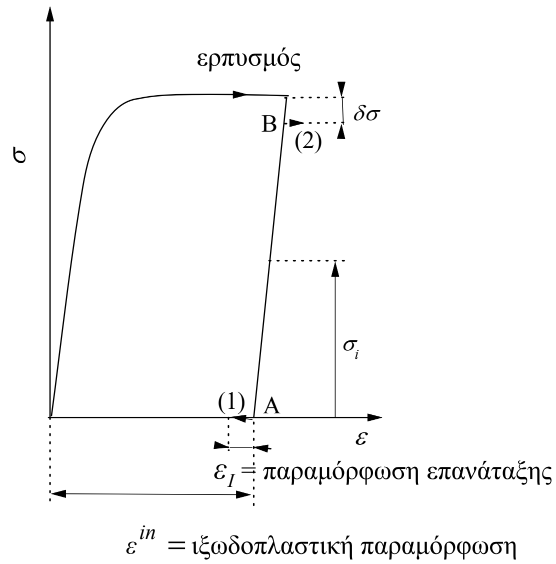
Σχήμα 2.8: Επίδραση του ρυθμού παραμόρφωσης στις κυκλικές καμπύλες του 316 ανοξείδωτου χάλυβα στους 705^{o}C, όπου $\Delta\sigma/2$ και $\Delta\varepsilon/2$ είναι η ημιδιαφορά της μέγιστης από την ελάχιστη τάση ή παραμόρφωση αντίστοιχα στον κάθε κύκλο (Lemaitre and Chaboche[3]).

Η επίδραση της χρονικής επανάταξης (time-recovery) μπορεί να παρατηρηθεί έμμεσα είτε με αποφόρτιση σε ερπυσμό ή με κυκλικά πειράματα. Στη πρώτη περίπτωση μετά από πλήρη αποφόρτιση μπορεί να μετρηθεί μια μερική επανάταξη της ιξωδοπλαστικής παραμόρφωσης μετά από αρκετό χρόνο (Σχήμα 2.9α). Για μια μερική αποφόρτιση σε ερπυσμό δσ παρατηρείται το φαινόμενο της καθυστέρησης ερπυσμού (Σχήμα 2.9β). Ο ρυθμός παραμόρφωσης, αρχικά μηδέν κατά τη διάρκεια του χρόνου επώασης αυξάνει προοδευτικά μέχρι να φθάσει τον ονομαστικό ρυθμό.

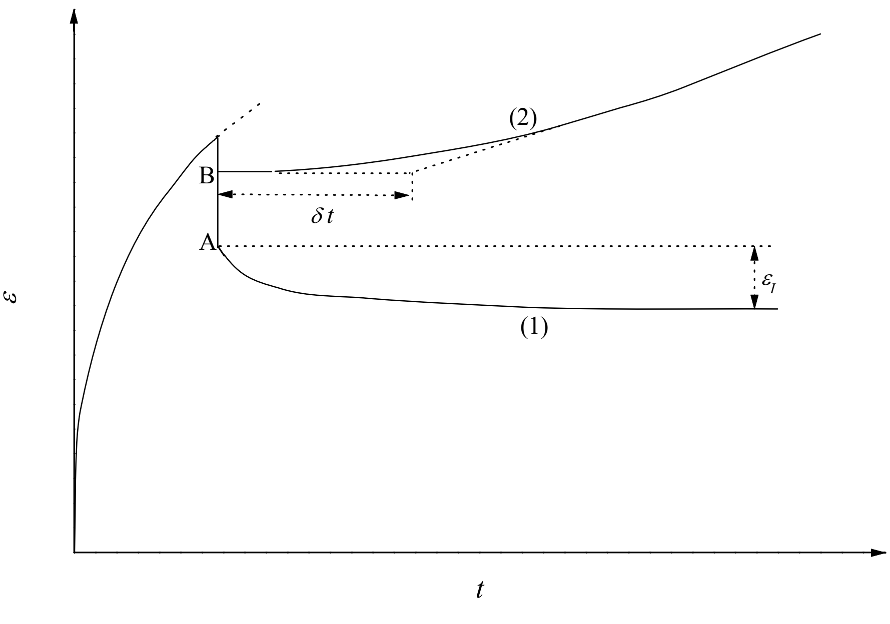
Αυτά τα πειράματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξουν την ύπαρξη μιας εσωτερικής τάσης τέτοιας ώστε ο ρυθμός παραμόρφωσης να είναι ανάλογος της $\sigma-\sigma_i$:

$$\dot{\varepsilon}^{in} = f(\sigma,...)(\sigma-\sigma_i) \tag{2.10}$$

και να προσδιορίσουν ποσοτικά την επίδραση της χρονικής επανάταξης από αυτή την εσωτερική τάση που αντιστοιχεί σε μια αργή αποκατάσταση της κρυσταλλικής δομής. Για κυκλικά πειράματα με ελεγχόμενη παραμόρφωση, η επιρροή του φαινομένου της επανάταξης μειώνει το πλάτος της τάσης σε ένα σταθεροποιημένο κύκλο όταν ο χρόνος κρατήματος αυξάνει (Σχήμα 2.7β). Το φαινόμενο της επανάταξης, το οποίο γίνεται περισσότερο σημαντικό με την αύξηση της διάρκειας του πειράματος, αντισταθμίζει μερικά την κυκλική κράτυνση.



(α)



(β)

Σχήμα 2.9: (α) επανάταξη μετά από πλήρη αποφόρτιση, (β) καθυστέρηση ερπυσμού μετά από μερική αποφόρτιση (Lemaitre and Chaboche[3]).

2.1.7 Αποτελέσματα από πολυαξονικά πειράματα

Εξ αιτίας των δυσκολιών της πολύπλοκης φόρτισης και των σχετιζόμενων προβλημάτων με τη χρήση μέσων ή υψηλών θερμοκρασιών, αποτελέσματα μόνο μερικών πολυαξονικών πειραμάτων υπάρχουν. Τα αποτελέσματα πειραμάτων εφελκυσμού-στρέψης-εσωτερικής πίεσης που εκτελούνται σε σωληνοειδή δοκίμια ή διαξονικού εφελκυσμού σε σταυροειδή δοκίμια, δείχνουν ότι σε ακτινική φόρτιση οι έννοιες της ισοδύναμης τάσης και ισοδύναμης παραμόρφωσης με την έννοια του κριτηρίου του Mises μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιορίσουν στο χώρο των τάσεων, επιφάνειες ίσου ρυθμού παραμόρφωσης για δεδομένη παραμόρφωση.

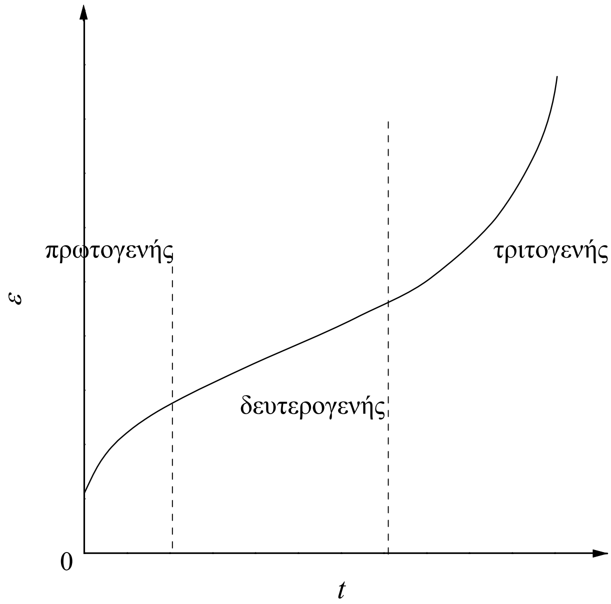
Η υπόθεση του ιξωδοπλαστικού ασυμπίεστου είναι γενικά καλά επιβεβαιωμένη από πειράματα σε μέταλλα και κράματα. Ο κανόνας της κανονικότητας προσδιορίζεται καλά και μερικά πειράματα αποδεικνύουν την κύρια επιρροή της δεύτερης αναλλοίωτης του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων.

Οι αρχικές ισοδυναμικές επιφάνειες γενικά ικανοποιούν σχεδόν το κριτήριο του Mises. Πειράματα ερπυσμού για διάφορες καταστάσεις τάσης $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ μετά από ένα αρχικό ερπυσμό δείχνουν τον ουσιαστικό χαρακτήρα της κινηματικής κράτυνσης του υλικού ακόμη και σε υψηλές θερμοκρασίες. Το μέγεθος του ρυθμού παραμόρφωσης είναι φυσικά μεγαλύτερο για καταστάσεις τάσεων μακρύτερα από το κέντρο των επιφανειών. Αυτά τα πολυαξονικά πειράματα επιβεβαιώνουν την παρατήρηση για την ύπαρξη μιας εσωτερικής τάσης.

2.2 Ερπυσμός

Η παραμόρφωση και η θραύση των υλικών κάτω από συνθήκες ερπυσμού σε αυξημένες θερμοκρασίες είναι χρονικά εξαρτώμενη διαδικασία. Σε θερμοκρασίες κάτω από το 30% της θερμοκρασίας τήξης στην απόλυτη κλίμακα, είναι δικαιολογημένο να θεωρηθεί η ελαστοπλαστική συμπεριφορά των μετάλλων ως μη εξαρτώμενη από το χρόνο. Η παραμόρφωση που αναπτύσσεται στιγμιαία από τη φόρτιση είναι μεγάλη συγκρινόμενη με την επιπρόσθετη που συσσωρεύεται στο χρόνο που ενδιαφέρει. Πολλές όμως πρακτικές εφαρμογές απαιτούν θερμοκρασίες πέραν από το προαναφερθέν όριο, το οποίο για τους χάλυβες είναι 400^o C περίπου. Τότε η συνεχιζόμενη παραμόρφωση κάτω από σταθερή φόρτιση η οποία τελικά οδηγεί σε θραύση ερπυσμού συχνά γίνεται ο αποφασιστικός παράγων στο σχεδιασμό μιας κατασκευής.

Η στοιχειώδης δοκιμή για τη μελέτη της παραμόρφωσης και της αστοχίας σε ερπυσμό είναι η μονοαξονική δοκιμή ερπυσμού. Μια λεία ράβδος υποβάλλεται σε μη χρονικά εξαρτώμενη φόρτιση και η παραμόρφωση μετρείται σε συνάρτηση με το χρόνο. Στο Σχήμα 2.10 φαίνεται η καμπύλη ερπυσμού (παραμόρφωση ε – χρόνος t) που ευρίσκεται στο μισό της θερμοκρασίας τήξης και σε τυπικά επίπεδα τάσεων για πειράματα ερπυσμού στο εργαστήριο. Άμεσα με την εφαρμογή της φόρτισης, υπάρχει η ελαστική παραμόρφωση.



Σχήμα 2.10: Καμπύλη ερπυσμού (σχηματικά) (Riedel [55]).

Στο πρωτογενές στάδιο της καμπύλης ερπυσμού, ο ρυθμός παραμόρφωσης (κλίση καμπύλης ερπυσμού) είναι μεγάλος αρχικά και μειώνεται μέχρι να γίνει σταθερός στο δευτερογενές στάδιο, το οποίο εναλλακτικά καλείται κατάσταση σταθερού ερπυσμού. Στο τριτογενές στάδιο, ο ρυθμός ερπυσμού επιταχύνεται μέχρι να συμβεί η θραύση. Το σχήμα της καμπύλης ερπυσμού ποικίλει από υλικό σε υλικό. Τα καθαρά μέταλλα έχουν συνήθως έντονο πρωτογενές στάδιο, ενώ σε πολλά δομικά κράματα υπερισχύει το τριτογενές στάδιο.

Το πρωτογενές και το δευτερογενές στάδιο της καμπύλης ερπυσμού καθορίζονται από τη συνδυασμένη δράση της παραμορφωσιακής κράτυνσης και της θερμικά ενεργοποιούμενης επανάταξης της δομής των εξαρμόσεων (Bailey [56], Orowan [57]). Στο αρχικό στάδιο, η παραμορφωσιακή κράτυνση με τον σχηματισμό των εμπλεκόμενων εξαρμόσεων υπερισχύει, ενώ το δευτερεγενές στάδιο χαρακτηρίζεται από μια ισορροπία της παραμορφωσιακής κράτυνσης και της επανάταξης. Το αποφασιστικό βήμα στον ερπυσμό εξαρμόσεων είναι η υπερπήδηση των εμποδίων από τις εξαρμόσεις. Αυτό απαιτεί τη διάχυση των κενών και συνεπώς συμβαίνει μόνο σε αυξημένες θερμοκρασίες σε ένα ρυθμό που πρακτικά ενδιαφέρει. Έχοντας η εξάρμοση υπερπηδήσει ένα εμπόδιο κινείται με ευχέρεια μέχρι να συναντήσει το επόμενο εμπόδιο.

Ειδικά μοντέλα για δευτερογενή ερπυσμό βασισμένα στην ιδέα της κίνησης της εξάρμοσης με ελεγχόμενη υπερπήδηση έχουν προταθεί από τον Weertman [58] και τον Friedel [59]. Το κοινό τους αποτέλεσμα είναι μια εκθετική εξάρτηση του ρυθμού της παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}^{in}$ από την τάση σ, γνωστό ως εκθετικός νόμος ερπυσμού του Norton [48]:

$$\dot{\varepsilon}^{in} = B\sigma^{n} \tag{2.11}$$

όπου B και n είναι παράμετροι του υλικού. Για τον εκθέτη της τάσης n, τα μοντέλα δίδουν τιμές 3 (Friedel [59]) ή 4 (Weertman [58]). Αν η διάχυση των κενών επικρατεί κατά μήκος των γραμμών εξαρμόσεων παρά δια του μη διαταραγμένου πλέγματος, η τιμή του n αυξάνεται κατά 2, n = 5 ή 6 (Frost και Ashby, [60]). Τα μοντέλα για ελεγχόμενο από διάχυση ερπυσμό δίδουν ότι ο συντελεστής B πρέπει να είναι:

$$B = A^{*}G^{1-n}(bD_V / kT) \tag{2.12}$$

όπου G είναι το ελαστικό μέτρο διάτμησης, k =1.38 10^{-23}J/K είναι η σταθερά του Boltzmann, T η απόλυτη θερμοκρασία, b το μέγεθος του διανύσματος Burger, A^{*} εμπειρική σταθερά η οποία προσμετρά λεπτομέρειες μη περιεχόμενες στα μοντέλα και

$$D_V = D_{VO}\exp(-Q_V / RT) \tag{2.13}$$

είναι ο συντελεστής διάχυσης όγκου με το συντελεστή D_{VO} και την ενέργεια ενεργοποίησης Q_V, R=8.315 J/(mol.K) η σταθερά των αερίων. Τιμές των παραμέτρων έχουν δοθεί από τους Frost και Ashby [60,61]

Διάφορες άλλες σχέσεις μεταξύ ρυθμού παραμόρφωσης και τάσης έχουν προταθεί. Η πιο διαδεδομένη ιδέα είναι η εισαγωγή μιας εσωτερικής τάσης (internal back stress) σ_i αναπτυσσόμενης στο υλικό έτσι ώστε η τάση στην εξίσωση 2.11 αντικαθίσταται με τη $\sigma - \sigma_i$. Δεν είναι αναγκαίο να υποτεθεί ότι η σ_i είναι μια σταθερή τάση κατωφλίου, αλλά μπορεί να είναι συνάρτηση της δομής των εξαρμόσεων και των κατακρημνισμάτων (precipitation). Ο Gibeling και ο Nix [62] έχουν κάνει μια ανασκόπηση σε παρατηρήσεις και μοντέλα αναφερόμενα στην ιδέα της εσωτερικής τάσης. Η ιδέα της μεταβλητής εσωτερικής τάσης χρησιμοποιείται επίσης στην περιγραφή του αρχικού ερπυσμού από τους Robinson [63] Pugh και Robinson [64] και στο καταστατικό μοντέλο του Hart [65]. Η επιτάχυνση του ερπυσμού στο τριτογενές στάδιο και τελικά η θραύση αποδίδεται στην προοδευτική συσσώρευση της βλάβης (damage) στο υλικό κατά τον ερπυσμό. Στοιχεία από τη θεωρία των εσωτερικών μεταβλητών αναφέρονται αναλυτικότερα σε επόμενες παραγράφους.

2.2.1 Ερπυσμός διάχυσης

Ερπυσμός μπορεί να συμβεί επίσης από ροή διάχυσης ατόμων από μέρη των συνοριακών επιφανειών κόκκων (grain boundaries) ή άλλων ενδοεπιφανειών οι οποίες είναι σε θλίψη σε μέρη τα οποία είναι σε εφελκυσμό [55]. Αυτή η από την τάση κατευθυνόμενη ροή ατόμων ερμηνεύει το μεγαλύτερο μήκος του δοκιμίου κατά τη διεύθυνση του εφελκυσμού. Οι συνοριακές επιφάνειες κόκκων παίζουν κεντρικό ρόλο στον ερπυσμό διάχυσης αφού μπορούν να συγκεντρώνουν ή να απελευθερώνουν άτομα ή με άλλη διατύπωση να δημιουργούν ή να καταστρέφουν ατομικά κενά. Σε ένα τέλειο κρυσταλλικό πλέγμα, η δημιουργία ζεύγους ενδιάμεσων κενών απαιτεί πολύ μεγαλύτερη ενέργεια από τη δημιουργία ενός κενού σε μια συνοριακή επιφάνεια κόκκων και τέτοια ενέργεια δεν είναι διαθέσιμη συνήθως από τη θερμική δόνηση του πλέγματος.

Αν οι συνοριακές επιφάνειες κόκκων είναι οι μόνες δυνατές πηγές για κενά ατόμων το αποφασιστικό βήμα για τον ερπυσμό διάχυσης είναι η διάχυση για αποστάσεις της τάξης του μεγέθους του κόκκου d. Ο Nabarro [66] και ο Herring [67] δίδουν για τον ερπυσμό διάχυσης :

$$\dot{\varepsilon}^{in} = \alpha_V \sigma \,\Omega D_V \,/(kTd^2) \tag{2.14}$$

όπου D_V είναι ο συντελεστής διάχυσης στους κόκκους, Ω ο ατομικός όγκος, d το μέγεθος των κόκκων και α_V ένας αδιάστατος αριθμητικός συντελεστής ο οποίος εξαρτάται από το μέγεθος του κόκκου. Για ισοαξονικούς εξαγωνικούς κόκκους α_V=24. Αν τα άτομα διαχέονται κατά μήκος συνοριακών κόκκων περισσότερο παρά δια μέσου κόκκων τότε:

$$\dot{\varepsilon}^{in} = \alpha_b \sigma \Omega \delta D_b \,/(kTd^3) \tag{2.15}$$

(Coble [68]). Ο συντελεστής α_b έχει τιμή γύρω στο 50 και δD_b είναι συντελεστής διάχυσης συνοριακών κόκκων με διάσταση $\mathrm{m}^3\,/\,\mathrm{s}$ και έχει τη συνήθη θερμική εξάρτηση από θερμικά ενεργοποιούμενη διαδικασία.

Οι παραπάνω εξισώσεις δείχνουν ότι ο ερπυσμός διάχυσης χαρακτηρίζεται από γραμμική σχέση μεταξύ ρυθμού παραμόρφωσης και της τάσης. Ο ερπυσμός Coble υπερισχύει σε ενδιάμεσες θερμοκρασίες και μικρό μέγεθος κόκκων, ενώ ο ερπυσμός Nabarro-Herring εμφανίζεται σε υψηλότερες θερμοκρασίες και μεγαλύτερο μέγεθος κόκκων.

Πειραματικά οι προβλέψεις των παραπάνω εξισώσεων έχουν επιβεβαιωθεί για ένα μεγάλο αριθμό μετάλλων και άλλων υλικών. Σε πολύ χαμηλές τάσεις όμως φαίνεται να υπάρχει μια συμπεριφορά κατωφλίου ώστε η σ στις παραπάνω εξισώσεις πρέπει να αντικατασταθεί από σ-σ_{th} όπου σ_{th} είναι μια τάση κατωφλίου. Στα καθαρά μέταλλα και γύρω από το μισό της θερμοκρασίας τήξης, η τάση κατωφλίου είναι γενικά πολύ μικρότερη από 1 MPa εκτός από το ασήμι όπου σ_{th}=1,25 MPa (Towle και Jones [69]). Αυτές οι μικρές τάσεις κατωφλίου δεν παίζουν ρόλο στα συνήθη πειράματα ερπυσμού και οι μετρήσεις τους απαιτούν ειδική τεχνική.

Στα μέταλλα που περιέχουν μέρη στους συνοριακούς κόκκους, τηκόμενα σε υψηλές θερμοκρασίες, η τάση κατωφλίου μπορεί να είναι μεγαλύτερη και ο ερπυσμός διάχυσης να παρεμποδιστεί αφού σε υψηλότερες τάσεις παρεμβαίνει ο ερπυσμός εξαρμόσεων. Το θέμα έχει εξετασθεί από τους Burton [70], Gibeling και Nix [62], Arzt, Ashby και Verrall [71]. O Sritharan και ο Jones [72] και διάφοροι άλλοι παρατήρησαν μια αύξηση στην τάση κατωφλίου σε ανοξείδωτους χάλυβες του εμπορίου καθώς τα κατακρημνίσματα του καρβιδίου στους συνοριακούς κόκκους αυξάνουν. Όμως η τάση κατωφλίου δεν υπερβαίνει ποτέ τα 2,6 MPa.

Η επιβράδυνση του ερπυσμού διάχυσης έχει αποδοθεί στην εικαζόμενη δυσκολία να συγκεντρωθούν άτομα στους συνοριακούς κόκκους (Ashby [73]) ή στην ενδοεπιφάνεια μεταξύ των σκληρών μερών των συνοριακών κόκκων και του πλέγματος (Burton [74], Harris [75]). Η παρεμπόδιση αυτή είναι σημαντική σε σχέση με τη δημιουργία και την αύξηση των κοιλοτήτων ερπυσμού. Αν η διεπιφάνεια μερών συνοριακών κόκκων και πλέγματος δεν μπορεί να δεχθεί άτομα, μεγάλες τάσεις μπορεί να αναπτυχθούν στους συνοριακούς κόκκους και να προκύψουν κοιλότητες. Από την άλλη, η παρεμπόδιση της διάχυσης μπορεί να δυσχεράνει την αύξηση των κοιλοτήτων.

2.2.2 Ολίσθηση συνοριακών κόκκων

Ένας τυπικός βαθμός ελευθερίας ο οποίος γίνεται ενεργός σε αυξημένες θερμοκρασίες είναι η ολίσθηση συνοριακών κόκκων. Η διαδικασία έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές όψεις η κάθε μια από τις οποίες σχετίζεται με διαφορετική κλίμακα μεγέθους. Σε ατομική κλίμακα, η αντίσταση στην ολίσθηση προσδιορίζεται από την κινητικότητα των εξαρμόσεων των συνοριακών κόκκων. Γενικά θεωρείται ότι στα υλικά σε υψηλές θερμοκρασίες αυτή η αντίσταση ολίσθησης είναι αμελητέα συγκρινόμενη με το αποτέλεσμα των σκληρών μερών β΄ φάσης στο σύνορο. Αν τα μέρη αυτά είναι αρκετά άκαμπτα, η ολίσθηση δεν μπορεί να προχωρήσει εκτός εάν παρακαμφθούν από τη διαδικασία διάχυσης ή από ερπυσμό εξαρμόσεων.

Μοντέλα που αναφέρονται είτε σε επίπεδο εξαρμόσεων είτε σε επίπεδο μερών ονομάζονται από κοινού εγγενή (intrinsic) μοντέλα ολίσθησης (Langdon και Vastava [76]). Εξωγενή μοντέλα με την ίδια ορολογία, είναι αυτά στα οποία η ολίσθηση των πλευρών συνοριακών κόκκων παρεμποδίζεται από τα περιβάλλοντα πολυκρυσταλλικά πλέγματα.

Μια επίπεδη επιφάνεια συνοριακών κόκκων μπορεί να ολισθήσει συγκριτικά εύκολα με την κίνηση των εξαρμόσεων των συνοριακών κόκκων. Σύμφωνα με τους Raj και Ashby [77], ο πραγματικός ρυθμός ολίσθησης ελέγχεται από μια διαδικασία η οποία είναι αναγκαία για την αποφυγή του διαχωρισμού ή της επικάλυψης του υλικού, αν οι συνοριακοί κόκκοι περιέχουν σκληρά μέρη ή είναι ακανόνιστα στο σχήμα. Πιθανόν ο σημαντικότερος μηχανισμός με τον οποίο γίνεται η συγκέντρωση είναι η ροή διάχυσης της ύλης. Άτομα μετακινούνται (ή κενά δημιουργούνται) όπου το υλικό τείνει να επικαλύψει και άτομα αποτίθενται όπου η κίνηση των κόκκων τείνει να δημιουργήσει ανοίγματα. Ο ρυθμός διάχυσης ατόμων είναι ελεγχόμενος γύρω από ανωμαλίες ή μέρη συνοριακών κόκκων.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις οι Raj και Ashby [77] έδειξαν ότι ο ρυθμός ολίσθησης, $\dot{u}_b$, σχετίζεται γραμμικά με την εφαρμοζόμενη διατμητική τάση τ_b:

$$\dot{u}_b = \tau_b / \eta \tag{2.16}$$

όπου η ο συντελεστής ιξώδους, ο οποίος εξαρτάται από το σχήμα των μερών ή των ανωμαλιών. Για σύνορο κόκκων ημιτονοειδούς μορφής με μήκος κύματος λ και πλάτος $h/2$ για παράδειγμα ο η έχει τη μορφή:

$$\eta = \frac{kTh^2}{8\Omega(\delta D_b + \lambda D_V / \pi)} \tag{2.17}$$

Αν η ολίσθηση εμποδίζεται από άκαμπτα κυβικά σωματίδια πλευράς p και μεταξύ τους απόστασης λ_p, στο σύνορο τότε:

$$\eta = \frac{kTp^4 / \lambda_p^2}{8\Omega(\delta D_i + pD_V / 5)} \tag{2.18}$$

όπου δD_i ο συντελεστής διάχυσης στη διεπιφάνεια μερών συνοριακών κόκκων και πλέγματος, ο οποίος σπάνια είναι γνωστός.

Ένα πολυκρυσταλλικό πλέγμα μπορεί γενικά να μην παραμορφωθεί μόνο από ολίσθηση συνοριακών κόκκων χωρίς παραμόρφωση των κόκκων δηλαδή η ολίσθηση περιορίζεται από το υλικό που το περιβάλλει. Αν οι κόκκοι παραμορφώνονται από ροή διάχυσης, η επίδραση της ολίσθησης είναι μια μικρή τροποποίηση των αριθμητικών συντελεστών των εξισώσεων ρυθμού των Nabarro-Herring και Coble.

Η κατάσταση είναι περισσότερο πολύπλοκη αν στην ολίσθηση των συνοριακών κόκκων υπάρχει ερπυσμός εκθετικής μορφής των κόκκων. Σε υψηλές τάσεις ερπυσμός εκθετικού νόμου συμβαίνει άμεσα και τα σύνορα συμπεριφέρονται συγκριτικά άκαμπτα. Σε χαμηλές τάσεις όμως ο ρυθμός ολίσθησης ελέγχεται από τον ερπυσμό ενώ τα σύνορα ολισθαίνουν αρκετά ελεύθερα.

Η εξασθένιση της ολίσθησης συνοριακών κόκκων σε ένα πολυκρύσταλλο με ερπυσμό εκφράζεται συμβατικά από συντελεστή αύξησης τάσης f ο οποίος προσδιορίζεται ως ακολούθως. Αν $\dot{\varepsilon}^{in} = B\sigma^n$ είναι ο ρυθμός ερπυσμού για ένα υλικό χωρίς συνοριακούς κόκκους ολίσθησης, τότε ίδιο υλικό με ελεύθερους ολίσθησης συνοριακούς κόκκους υπόκειται σε ερπυσμό με μεγαλύτερο ρυθμό:

$$\dot{\varepsilon}^{in} = B(f\sigma)^{n} \tag{2.19}$$

Οι Crossmann και Ashby [78] και Gharemani [79] αναλύουν ένα πλέγμα εξαγωνικών κόκκων σε δύο διαστάσεις με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. O Charemani δίδει το συντελεστή f από 2.6 ως 2.9 για n=1 ως 4.

Η χαρακτηριστική τάση για τη διάκριση μεταξύ υψηλών τάσεων όπου οι συνοριακοί κόκκοι συμπεριφέρονται αρκετά άκαμπτα και χαμηλών τάσεων όπου οι συνοριακοί κόκκοι ολισθαίνουν αρκετά ελεύθερα δίδεται από:

$$\sigma = (B\eta d)^{-1/(n-1)} \tag{2.20}$$

όπου η είναι ο συντελεστής ιξώδους και d το μέγεθος των κόκκων.

2.2.3 Χάρτες παραμόρφωσης

Οι χάρτες παραμόρφωσης είναι διαγράμματα στο χώρο τάσεων (σ) – θερμοκρασίας (T) όπου οι περιοχές εμφανίζονται ανάλογα με τον μηχανισμό ερπυσμού που υπερισχύει (Ashby [80]). Η ιδέα είναι ότι διαφορετικοί μηχανισμοί λειτουργούν ανεξάρτητα και προσδιορίζεται ταχύτατα η συμπεριφορά παραμόρφωσης και καταλαμβάνει την αντίστοιχη θέση στο επίπεδο τάσης-θερμοκρασίας. Τα όρια μεταξύ των διάφορων περιοχών συνήθως υπολογίζονται με σύγκριση των εξισώσεων ρυθμού παραμόρφωσης για διάφορους μηχανισμούς. Το Σχήμα 2.11 δείχνει σχηματικά ένα τέτοιο χάρτη παραμόρφωσης, την κανονικοποιημένη τάση (σ / G) σε συνάρτηση με την ομόλογη θερμοκρασία (T / T_m) όπου T_m η θερμοκρασία τήξης.

Το όριο μεταξύ ερπυσμού Nabarro-Herring και Coble υπολογίζεται εξισώνοντας τους ρυθμούς ερπυσμού που δίδονται στις εξισώσεις 2.14 και 2.15 για τους δύο αυτούς μηχανισμούς:

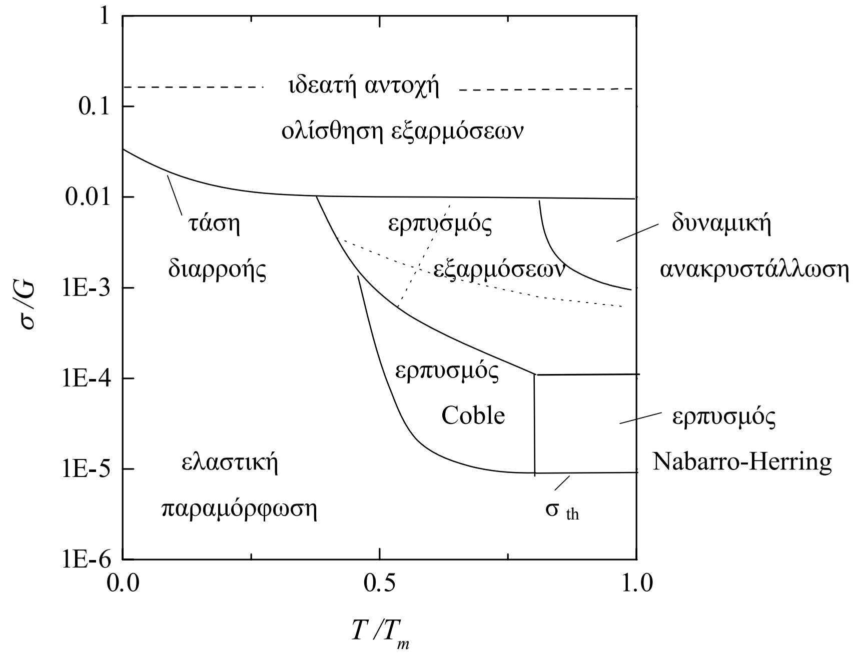
$$\alpha_V \; d \, D_V(T) = \alpha_b \delta D_b(T) \tag{2.21}$$

Λόγω της ίδιας εξάρτησης της τάσης και στους δύο μηχανισμούς ερπυσμού διάχυσης η παραπάνω εξίσωση παριστάται από κατακόρυφη γραμμή και ο μηχανισμός με τη μεγαλύτερη ενέργεια ενεργοποίησης, ερπυσμός Nabarro-Herring, υπερισχύει σε μεγαλύτερη θερμοκρασία. Όμοια εξισώνοντας τις εξισώσεις 2.11 και 2.14 προκύπτει το όριο μεταξύ ερπυσμού Nabarro-Herring και του ερπυσμού εξαρμόσεων:

$$\sigma / G = [\alpha_V \Omega /(d^2 b A^*)]^{1/(n-1)} \tag{2.22}$$

αφού οι θερμοκρασιακές εξαρτήσεις είναι οι ίδιες και για τους δύο μηχανισμούς η παραπάνω εξίσωση παριστάται από οριζόντια γραμμή. Ο ερπυσμός Coble χωρίζει από τον ερπυσμό εξαρμόσεων με τη γραμμή που προκύπτει από την εξίσωση των εξισώσεων 2.11 και 2.15:

$$\sigma / G = [\alpha_b \Omega D_b /(d^3 b D_V A^*)]^{1/(n-1)} \tag{2.23}$$



Σχήμα 2.11: Χάρτης μηχανισμού παραμόρφωσης (σχηματικά) (Riedel [55]).

Η περιοχή του ερπυσμού εξαρμόσεων διαιρείται από δύο διακεκομμένες γραμμές. Η μια που είναι περίπου οριζόντια, παριστά την εξίσωση 2.20. Διαχωρίζει την περιοχή χαμηλών τάσεων όπου η ολίσθηση των συνοριακών κόκκων σαφώς συνεισφέρει στον ολικό ρυθμό παραμόρφωσης, από την περιοχή υψηλών τάσεων όπου οι συνοριακοί κόκκοι συμπεριφέρονται σαν να είναι άκαμπτοι. Η διακεκομμένη περίπου κατακόρυφη γραμμή διαχωρίζει τη διάχυση κενών κατά μήκος γραμμών εξαρμόσεων (χαμηλές θερμοκρασίες) από τη διάχυση δια μέσου του πλέγματος (υψηλές θερμοκρασίες).

Ως προς τις υψηλές τάσεις, το εύρος ισχύος των μηχανισμών ερπυσμού διακόπτεται από την έναρξη εκτεταμένης ολίσθησης εξαρμόσεων. Η πλαστική παραμόρφωση πραγματοποιείται πολύ γρήγορα μετά τη φόρτιση και μπορεί πρακτικά να περιγραφεί από στιγμιαία, ανεξάρτητη ρυθμού πλαστική διαρροή σε πολλές περιπτώσεις.

Το μεγαλύτερο πρακτικό πλεονέκτημα με το χάρτη παραμόρφωσης βρίσκεται στην καθοδήγηση που παρέχει σε περίπτωση επέκτασης (extrapolation) δεδομένων ερπυσμού. Πολλά πειράματα ερπυσμού γίνονται στο εργαστήριο με διάρκεια ενός χρόνου ή λιγότερο, μερικές φορές για χρόνια, ενώ κατασκευές όπως εργοστάσια παραγωγής ηλεκτρικού ρεύματος σχεδιάζονται για τουλάχιστον 25 χρόνια. Τα εργαστηριακά δεδομένα μπορούν να επεκταθούν στις συνθήκες λειτουργίας με κάποια εμπιστοσύνη μόνο αν είναι στην ίδια περιοχή του χάρτη παραμόρφωσης. Οι χάρτες είναι επίσης χρήσιμα εργαλεία για το σχεδιαστή για να επιλέξει τον κατάλληλο καταστατικό νόμο για την ανάλυση των τάσεων για ένα δεδομένο τμήμα.

Ο πιο πλήρης κατάλογος δεδομένων υλικών σχετικά με την κατασκευή χαρτών παραμόρφωσης έχει συνταχθεί από τους Frost και Ashby [61], οι οποίοι δίδουν χάρτες παραμόρφωσης για πάνω από 40 υλικά καλύπτοντας καθαρά μέταλλα, εμπορικά κράματα και κεραμικά. Παράμετροι υλικών έχουν συνταχθεί από τους Frost και Ashby [60], Needleman και Rice [81] και Swinkels και Ashby [82].

2.2.4 Νόμος θ-προβολής

Η έννοια της θ-προβολής από τους Evans, Parker και Wilshire [83] είναι μια προσπάθεια παράστασης των καμπύλων ερπυσμού μαθηματικά σε ένα ευρύ φάσμα συνθηκών. Το σχήμα της καμπύλης ερπυσμού περιγράφεται από μια έκφραση που περιέχει τέσσερεις εμπειρικές συναρτήσεις της τάσης και της θερμοκρασίας, κάθε μια από τις οποίες μπορεί να περιγραφεί με τη χρήση τεσσάρων κατάλληλων παραμέτρων (Evans, Beden και Wilshire [84]).

Ο καταστατικός νόμος της θ-προβολής περιγράφεται από τις σχέσεις [85-89]:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{in} &= \theta_1(1-e^{-\theta_2 t}) + \theta_3(e^{\theta_4 t}-1) \\ \log\theta_i &= a_i + b_i T + c_i\sigma + d_i\sigma T \quad i = 1-4 \end{aligned} \tag{2.24}$$

όπου:

ε^{in} είναι η παραμόρφωση ερπυσμού, σ η εφαρμοζόμενη τάση σε MPa, t ο χρόνος σε sec και T η θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin. Οι τιμές των συντελεστών a_i, b_i, c_i και d_i για το χάλυβα Cr-Mo-V στους 565 ^{0}C είναι [89]:

a_1 = -8,736 b_1=0,004604 c_1=-0,04489 d_1=0,6814x10^{-4}

a_2 = -23,46 b_2=0,02225 c_2=0,02195 d_2=-0,1951x10^{-4}

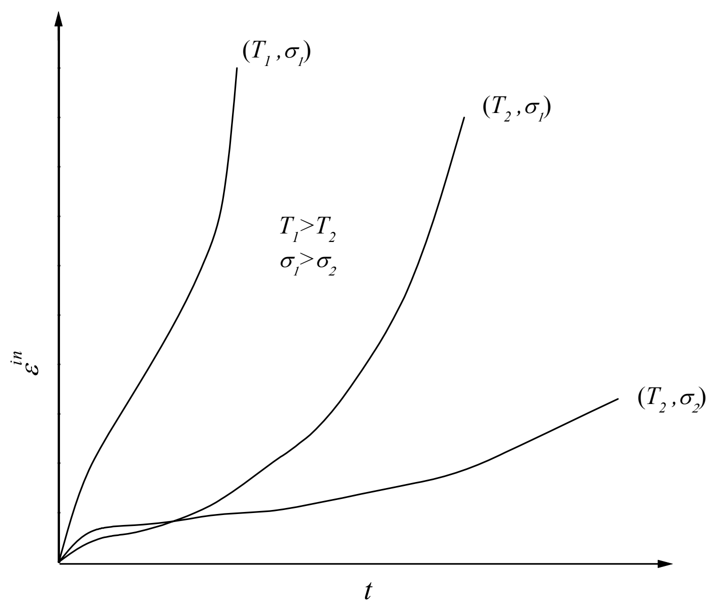
a_3 = -1,869 b_3=-0,002034 c_3=-0,05497 d_3=0,799x10^{-4}

a_4 = -16,43 b_4=0,009149 c_4=-0,04723 d_4=0,719x10^{-4}

Η μέθοδος της θ-προβολής είναι περισσότερο χρήσιμη στην ανάλυση δεδομένων ερπυσμού από άλλες διατυπώσεις για τρεις λόγους. Πρώτον, είναι εύχρηστη σε αλλαγές τάσεων και θερμοκρασίας. Δεύτερον η θ-προβολή επιτρέπει την αποτίμηση του ελάχιστου ρυθμού ερπυσμού από τις τιμές θ_i. Λίγα άλλα διαθέσιμα συστήματα εξισώσεων περιγράφουν τις καμπύλες ερπυσμού με ακρίβεια. Τρίτον, η θ-προβολή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αξιόπιστη αποτίμηση του απομένοντος χρόνου ζωής ενός υλικού που υπόκειται σε ερπυσμό.

Ο ρυθμός παραμόρφωσης ερπυσμού προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\dot{\varepsilon}^{in} = \theta_1\theta_2 e^{-\theta_2 t} + \theta_3\theta_4 e^{\theta_4 t} \qquad (2.25)$$



Σχήμα 2.12: Καμπύλες θ-προβολής σε διαφορετικές τάσεις και θερμοκρασίες (Law et al. [85]).

2.3 Εσωτερικές μεταβλητές

Η παραμόρφωση μπορεί να θεωρηθεί ότι εξαρτάται [90] από ένα σύνολο μεταβλητών $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, την τάση σ και τη θερμοκρασία T. Αυτές οι μεταβλητές ονομάζονται εσωτερικές μεταβλητές και είναι συνήθως βαθμωτά μεγέθη ή τανυστές δεύτερης τάξης. Το μητρώο των τανυστικών εσωτερικών μεταβλητών συμβολίζεται με ξ. Η παραμόρφωση δίδεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T, \xi) \tag{2.26}$$

Η παρουσία αυτών των μεταβλητών στις καταστατικές σχέσεις απαιτεί πρόσθετες καταστατικές εξισώσεις. Αυτές οι εξισώσεις για ένα ανελαστικό σώμα που εξαρτάται από το ρυθμό αντανακλούν την υπόθεση ότι αν η τοπική κατάσταση που προσδιορίζει την παραμόρφωση σαν συνάρτηση των σ, T, ξ τότε και ο ρυθμός της εξέλιξης των εσωτερικών μεταβλητών θα είναι συνάρτηση g_α της τοπικής κατάστασης:

$$\dot{\xi}_a = g_\alpha(\sigma, T, \xi) \tag{2.27}$$

Οι εξισώσεις (2.27) είναι γνωστές ως εξισώσεις εξέλιξης ή εξισώσεις ρυθμού για τις εσωτερικές μεταβλητές ξ_a.

Οι εσωτερικές μεταβλητές μπορεί να είναι οποιεσδήποτε μεταβλητές οι οποίες με την παραμόρφωση (ή τάση) και τη θερμοκρασία, προσδιορίζουν την τοπική κατάσταση στη γειτονιά ενός συνεχούς μέσου. Οι συνιστώσες ε_{ij}^{in} μπορούν να είναι ή να μην είναι μεταξύ των εσωτερικών μεταβλητών. Γενικά οι εσωτερικές μεταβλητές μπορούν να είναι δύο τύπων. Αφ’ ενός μπορεί να είναι «φυσικές» μεταβλητές περιγράφουσες πλευρές της τοπικής φυσικοχημικής δομής που μπορεί να αλλάζει αυτογενώς. Για παράδειγμα αν το υλικό υπόκειται σε μια χημική αντίδραση ή σε μια αλλαγή φάσης τότε μια ποσότητα που περιγράφει τοπικά την έκταση της αντίδρασης ή την σχετική πυκνότητα των δύο φάσεων μπορεί να εξυπηρετεί σαν εσωτερική μεταβλητή. Άλλες εσωτερικές μεταβλητές αυτού του τύπου περιέχουν πυκνότητες δομικών ελαττωμάτων (defects). Αφ' ετέρου εσωτερικές μεταβλητές μπορεί να είναι μαθηματικές κατασκευές, οι οποίες καλούνται φαινομενολογικές μεταβλητές. Η ανελαστική παραμόρφωση ε^{in} είναι αυτού του τύπου. Η μορφή της εξάρτησης της τάσης (ή παραμόρφωσης) από τις εσωτερικές μεταβλητές και των εξισώσεων του ρυθμού τους θεωρείται εκ των προτέρων.

Στα απλούστερα καταστατικά μοντέλα που περιγράφουν μη γραμμική ανελαστική συμπεριφορά εσωτερικές μεταβλητές συχνά θεωρούνται οι ε_{ij}^{in} και μια πρόσθετη εσωτερική μεταβλητή κ ονομαζόμενη μεταβλητή κράτυνσης. Η εξίσωση ρυθμού για την κ θεωρείται ότι συνδέεται με τις εξισώσεις ρυθμού για τις ε_{ij}^{in} με τέτοιο τρόπο ώστε $\dot{\kappa}=0$ όταν $\dot{\varepsilon}^{in}=0$ αλλά σε μια κυκλική διαδικασία στο τέλος της οποίας οι ε_{ij}^{in} επιστρέφουν στις αρχικές τιμές η κ πρέπει να έχει αλλάξει. Συνήθως η κ προσδιορίζεται ώστε $\dot{\kappa} > 0$ όταν $\dot{\varepsilon}^{in} \neq 0$. Δύο ορισμοί του κ χρησιμοποιούνται, πρώτον το ανελαστικό έργο:

$$\kappa = \int D_i dt = W_i \tag{2.28}$$

όπου $D_i = \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ είναι ο ρυθμός ανελαστικού έργου ανά μονάδα όγκου, και δεύτερον η ισοδύναμη (equivalent) ανελαστική παραμόρφωση:

$$\kappa = \int \sqrt{\tfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}}\,dt = \bar{\varepsilon}^{in} \tag{2.29}$$

Ο λόγος για τον παραδοσιακό συντελεστή $\frac{2}{3}$ στο δεύτερο ορισμό είναι ο ακόλουθος: αν ένα δοκίμιο υλικού το οποίο είναι ισότροπο και ανελαστικά ασυμπίεστο ($\dot{\varepsilon}_{\kappa\kappa}^{in}=0$) υπόκειται σε μονοαξονικό εφελκυσμό ή θλίψη τότε ο τανυστής του ανελαστικού ρυθμού παραμόρφωσης είναι:

$$\dot{\varepsilon}^{in} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}^{in} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{in} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{in} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

ώστε το $\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}}$ να είναι ίσο με $\left|\dot{\varepsilon}^{in}\right|$

Στην πράξη υπάρχει μια μικρή διαφορά στον τρόπο που χρησιμοποιούνται οι δύο τύποι εσωτερικών μεταβλητών. Είτε οι συναρτήσεις που εμπλέκονται παρέχονται από τη φυσική ή από υπόθεση, περιέχουν παραμέτρους που πρέπει να αποτιμηθούν με σύγκριση των θεωρητικών προβλέψεων με πειραματικά αποτελέσματα. Στην περίπτωση της πλαστικότητας μετάλλων η φυσική είναι εξαιρετικά επιτυχής στην ποιοτική κατανόηση του φαινομένου αλλά προσπάθειες για τη δημιουργία καταστατικών εξισώσεων με όρους φυσικών μεταβλητών δεν είχαν επιτυχία.

2.4 Επιφάνεια διαρροής

Αν υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f(\sigma,T,\xi)$ τέτοια ώστε να υπάρχει μια περιοχή στο χώρο των συνιστωσών της τάσης για την οποία σε δεδομένες τιμές της θερμοκρασίας και των εσωτερικών μεταβλητών να ισχύει $f(\sigma,T,\xi)<0$ και ο τανυστής του ανελαστικού ρυθμού παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}^{in}$ να μηδενίζεται σε αυτή την περιοχή αλλά όχι στο εξωτερικό της τότε η περιοχή αυτή συνιστά το ελαστικό εύρος και η εξίσωση $f(\sigma,T,\xi)=0$ προσδιορίζει την επιφάνεια διαρροής στο χώρο των τάσεων. Ο προσανατολισμός της επιφάνειας γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το ελαστικό μέρος να σχηματίζει το εσωτερικό της. Ένα υλικό που έχει τέτοια συνάρτηση διαρροής είναι ιξωδοπλαστικό με την ευρύτερη έννοια. Αυτός ο ορισμός δεν συνεπάγεται τον ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των ρυθμών των εσωτερικών μεταβλητών $\dot{\xi}_a$ στην ελαστική περιοχή, αν αυτό συνέβαινε δεν θα ήταν δυνατή η παραμορφωσιακή γήρανση (strain-aging) καθώς απαιτεί μια εξέλιξη της τοπικής δομής ενώ το υλικό είναι αφόρτιστο.

Αυτός ο όρος είναι σημαντικός μόνο κατά τη διαδικασία όπου η κλίμακα του χρόνου είναι της τάξης μεγέθους του χρόνου χαλάρωσης για παραμορφωσιακή γήρανση η οποία για το μαλακό χάλυβα είναι σε κανονικές θερμοκρασίες της τάξης των ωρών. Για μια διαδικασία που διαρκεί μερικά λεπτά, οι εσωτερικές μεταβλητές που διέπουν την παραμορφωσιακή γήρανση μπορούν να θεωρηθούν σταθερές και οι ρυθμοί τους να αγνοηθούν. Για λόγους απλοποίησης υιοθετείται ένας περισσότερο περιορισμένος ορισμός της ιξωδοπλαστικότητας σύμφωνα με τον οποίο όλοι οι ρυθμοί των εσωτερικών μεταβλητών μηδενίζονται στην ελαστική περιοχή δηλ. οι συναρτήσεις $g_\alpha(\sigma,T,\xi)$ υποτίθεται ότι μηδενίζονται όταν $f(\sigma,T,\xi)\le 0$.

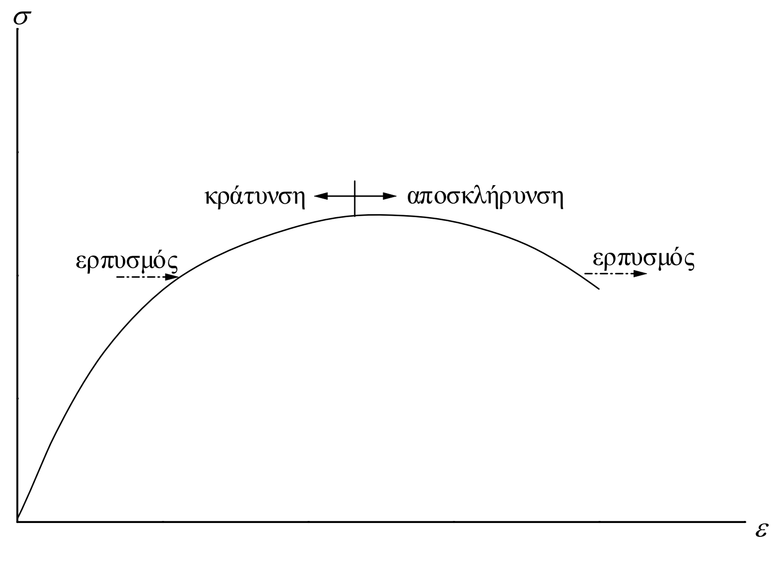
Με την προϋπόθεση αυτή οι συναρτήσεις g_α μπορούν να γραφούν ως $g_\alpha=\varphi h_\alpha$ όπου φ μια βαθμωτή συνάρτηση που εμπεριέχει το ρυθμό και τα χαρακτηριστικά διαρροής του υλικού με την ιδιότητα $\varphi = 0$ όταν $f \leq 0$, $\varphi > 0$ όταν $f > 0$. Τέτοια συνάρτηση εισήγαγε ο Perzyna [91] με τη μορφή $\gamma(T) < \Phi(f) >$ όπου $\gamma(T)$ είναι συντελεστής ιξώδους εξαρτώμενος από τη θερμοκρασία (πραγματικά αντίστροφος του ιξώδους ή ρευστότητα) και ο συμβολισμός $< \Phi(f) >$ προσδιορίζεται ως εξής:

$$< \Phi(f) > = \begin{cases} 0 & \\ \Phi(f) & \end{cases} \text{για} \quad \begin{matrix} f \leq 0 \\ f > 0 \end{matrix} \tag{2.31}$$

2.5 Κράτυνση

Η εξάρτηση της συνάρτησης διαρροής f από τις εσωτερικές μεταβλητές ξ_α περιγράφει τις ιδιότητες κράτυνσης του υλικού. Η σχέση μεταξύ αυτής της εξάρτησης και της συμπεριφοράς του υλικού μπορεί να κατανοηθεί θεωρώντας μια τάση σ κοντά στην επιφάνεια διαρροής αλλά έξω από αυτήν δηλ. $f(\sigma, T, \xi)$ >0. Ειδικότερα αν θεωρηθεί μια κατάσταση μονοαξονικής τάσης σε ένα δοκίμιο υλικού, η καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης δίδεται από το Σχήμα 2.13 το οποίο παρουσιάζει αύξον τμήμα, κράτυνση (hardening) και φθίνον τμήμα, αποσκλήρυνση (softening). Αν το υλικό είναι ιξωδοπλαστικό, η συμπεριφορά του είναι ελαστική σε σημεία κάτω από την καμπύλη και ιξωδοπλαστική πάνω από την καμπύλη, ενώ η καμπύλη παριστά την επιφάνεια διαρροής.

Αν η τάση κρατείται σταθερή σε μια τιμή πάνω από την καμπύλη, συμβαίνει ερπυσμός με αυξανόμενη παραμόρφωση που φαίνεται με τη διακεκομμένη γραμμή. Αν το αρχικό σημείο είναι πάνω από το αύξον τμήμα τότε ο ερπυσμός τείνει προς την καμπύλη και έχει όριο ενώ αν είναι πάνω



Σχήμα 2.13: Κράτυνση και αποσκλήρυνση στην ιξωδοπλαστικότητα (Lubliner [90]).

από το φθίνον τμήμα απομακρύνεται από την καμπύλη και δεν έχει όριο. Επομένως τα σημεία της καμπύλης είναι στην επιφάνεια διαρροής. Γενικεύοντας από την μονοαξονική περίπτωση, ερπυσμός προς την επιφάνεια διαρροής που χαρακτηρίζει την κράτυνση σημαίνει ότι σε σταθερή τάση και θερμοκρασία η συνάρτηση διαρροής f φθίνει από θετική τιμή προς το μηδέν δηλ. $\dot{f} < 0$. Παρόμοια η αποσκλήρυνση χαρακτηρίζεται από $\dot{f} > 0$.

$$\dot{f}\,\Big|_{\sigma=\text{σταθ},\; T=\text{σταθ}} = \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \xi_{\alpha}} \dot{\xi}_{\alpha} = \varphi \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \xi_{\alpha}} h_{\alpha} = -\varphi H$$

(2.32)

όπου $H = -\sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \xi_{\alpha}} h_{\alpha}$

Έτσι H>0 και H<0 για κρατυνόμενα και αποσκληρυνόμενα υλικά (ή κρατυνόμενο και αποσκληρυνόμενο κλάδο του ίδιου υλικού) αντίστοιχα. Η οριακή περίπτωση $H = 0$ που συμβαίνει όταν η f είναι ανεξάρτητη των ξ_{α} περιγράφει το απόλυτα πλαστικό υλικό.

2.6 Νόμος και δυναμικό ροής

Άσχετα με το εάν οι συνιστώσες ανελαστικής παραμόρφωσης [90] περιλαμβάνονται άμεσα μεταξύ των εσωτερικών μεταβλητών, είναι πάντοτε δυνατόν να προσδιορισθεί ένας νόμος ροής, μια εξίσωση ρυθμού για την ε^{in} από τη βασική υπόθεση $\varepsilon^{in} = \varepsilon^{in}(\xi)$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = g_{ij}(\sigma, T, \dot{\xi}) = \varphi\, h_{ij} \qquad (2.33)$$

όπου $h_{ij} = \sum_{a} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{in}}{\partial \xi_{a}} \dot{\xi}_{a}$

και $\varphi(\sigma,T,\xi)$ μια θετική βαθμωτή συνάρτηση.

Αν υπάρχει μια συνάρτηση $g(\sigma,T,\xi)$ συνεχής και παραγωγίσιμη ως προς σ οπουδήποτε $f(\sigma,T,\xi) > 0$ τέτοια ώστε:

$$h_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.34}$$

τότε η g καλείται ιξωδοπλαστικό δυναμικό. Ο Perzyna [91] και άλλοι έχουν θεωρήσει την ύπαρξη ενός ιξωδοπλαστικού δυναμικού όμοιου με τη συνάρτηση διαρροής f.

Το δυναμικό ροής g συνήθως υποτίθεται ότι είναι μια συνάρτηση των τάσεων μόνο, συνηθέστερα: $g(\sigma,T,\xi) = J_2$ όπου J_2 είναι η δεύτερη αναλλοίωτη του αποκλίνοντα τανυστή τάσεων.

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} J_2 = \frac{\partial S_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial}{\partial S_{kl}} \left(\tfrac{1}{2} S_{mn} S_{mn}\right) = \left(\delta_{i\kappa}\delta_{jl} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) S_{kl} = S_{ij} \tag{2.35}$$

και

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \varphi(\sigma,T,\xi)\ S_{ij} \tag{2.36}$$

2.6.1 Ειδικά μοντέλα βασισμένα στο J_2 δυναμικό ροής

Ένα κριτήριο διαρροής το οποίο έχει εξάρτηση από την τάση είναι :

$$\sqrt{J_2} - \kappa \quad = 0 \tag{2.37}$$

όπου το κ εξαρτάται από τη θερμοκρασία και τις εσωτερικές μεταβλητές ξ και ισούται με την τάση διαρροής σε διάτμηση και είναι γνωστό ως κριτήριο διαρροής του Mises. Ένα ιξωδοπλαστικό μοντέλο που ενσωματώνει αυτό το κριτήριο και το δυναμικό ροής J_2 προτάθηκε από τους Hohenemser και Prager [92] σαν γενίκευση της τρισδιάστατης συμπεριφοράς του μοντέλου του Bingham.

Η εξίσωση ροής είναι:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \frac{1}{2\eta} < 1 - \frac{\kappa}{\sqrt{J_2}} > S_{ij} \tag{2.38}$$

όπου η είναι ένα ιξώδες εξαρτώμενο από τη θερμοκρασία και $< \ >$ η παρένθεση του Macauley που προσδιορίζεται ως $< x > = xH(x)$ όπου $H(x)$ είναι η συνάρτηση βήματος του Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

επομένως $$< x > \; = \; \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \tag{2.40}$$

Αν $\kappa \rightarrow 0$ το μοντέλο ανάγεται στο μοντέλο του Maxwell της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας.

2.7 Μετάβαση στην ανεξάρτητη ρυθμού πλαστικότητα

Μια οριακή περίπτωση μεγάλου ενδιαφέροντος είναι όταν το ιξώδες η τείνει στο μηδέν. Προφανώς αν ο αποκλίνων τανυστής τάσης είναι $S \neq 0$ τότε ο ρυθμός ανελαστικής παραμόρφωσης γίνεται άπειρος εκτός εάν η $\sqrt{J_2}$ τείνει ταυτόχρονα στο κ, στην περίπτωση αυτή η ποσότητα $(1/\eta)<1-\kappa/\sqrt{J_2}>$ γίνεται απροσδιόριστη αλλά μπορεί να μείνει πεπερασμένη και θετική.

Υποθέτοντας για λόγους απλότητας ότι το κ είναι σταθερά για δεδομένες τάσεις, η εξ. (2.38) μπορεί να λυθεί ως προς ε_{ij}^{in} σαν συνάρτηση του χρόνου t και η εξάρτηση από το χρόνο εκφράζεται με την μεταβλητή t/η. Η μείωση του ιξώδους ισοδυναμεί με επιβράδυνση της διαδικασίας ανελαστικής παραμόρφωσης και το όριο του μηδενικού ιξώδους είναι ισοδύναμο με το όριο της απεριόριστα αργής διαδικασίας. Επομένως μια αργή διαδικασία μπορεί να συμβεί αν το J_2 είναι λίγο μεγαλύτερο από το κ^2. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν σχηματισθεί το βαθμωτό γινόμενο $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ από την εξ. (2.38).

$$\sqrt{J_2} = \kappa + \eta\,\sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}}\,, \quad \dot{\varepsilon}^{in} \neq 0 \tag{2.41}$$

μια εξίσωση που ερμηνεύεται σαν κριτήριο διαρροής εξαρτώμενου ρυθμού.

Θεωρείται το πιο γενικό ιξωδοπλαστικό μοντέλο και ειδικά αυτό που η φ αυξάνει με την f. Οι εξ. ρυθμού (2.33) δείχνουν ότι ο ρυθμός της διαδικασίας στην οποία η ανελαστική παραμόρφωση παίρνει μέρος αυξάνει με την απόσταση από την επιφάνεια διαρροής. Αν αυτή η διαδικασία είναι πολύ αργή τότε γίνεται πολύ κοντά αλλά έξω από την επιφάνεια διαρροής ώστε το φ είναι πολύ μικρό. Στο όριο καθώς $f \rightarrow 0+$ το φ μπορεί να παραληφθεί.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\,\dot{\sigma}_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}\;\varphi\, h_a = 0$$

και $$\overset{o}{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\,\dot{\sigma}_{ij} \tag{2.42}$$

αν υποτεθεί Η > 0 τότε η συνθήκη $\dot{f} = \overset{o}{f} - \varphi H = 0$ είναι δυνατή με φ>0 αν $\overset{o}{f} > 0$. Επομένως $\varphi = \frac{1}{H} < \overset{o}{f} >$

και
$$\dot{\xi}_a = \frac{1}{H} < \overset{o}{f} > h_a \tag{2.43}$$

και οι δύο πλευρές της εξ. (2.43) είναι παράγωγοι ως προς το χρόνο και επομένως οι αλλαγές στην κλίμακα του χρόνου δεν επηρεάζουν την εξίσωση. Αν υποτεθεί ότι αυτή η εξίσωση περιγράφει την συμπεριφορά του υλικού σε ένα επαρκώς μεγάλο εύρος ρυθμών φόρτισης, τότε η συμπεριφορά αυτή ονομάζεται ανεξάρτητη του ρυθμού πλαστικότητα ή καθαρή πλαστικότητα. Η εξίσωση ροής για την πλαστική παραμόρφωση μπορεί να γραφεί:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{1}{H} < \overset{o}{f} > h_{ij} \tag{2.44}$$

2.8 Συνδυασμένη ιξωδοπλαστικότητα και ανεξάρτητη ρυθμού πλαστικότητα

Σε εξαιρετικά μεγάλους ρυθμούς παραμόρφωσης ή φόρτισης οι εσωτερικές μεταβλητές δεν έχουν αρκετό χρόνο και συνεπώς η παραμόρφωση μπορεί να είναι μόνο ελαστική. Όμως οι ποικίλοι ρυθμοί διαδικασίας υπεύθυνοι για πλαστική παραμόρφωση, που αντιστοιχεί στη γέννηση εξαρμόσεων (dislocations) και τα πολύ διαφορετικά εμπόδια τα οποία πρέπει να υπερνικήσουν οι εξαρμόσεις, έχουν πολύ διαφορετικούς χαρακτηριστικούς χρόνους. Αυτό σημαίνει όχι μόνο ότι τα μέταλλα διαφέρουν το ένα από το άλλο στην ευαισθησία του ρυθμού αλλά και διαφορετικοί μηχανισμοί στο ίδιο μέταλλο μπορεί να ανταποκριθούν με πολύ διαφορετικές ταχύτητες. Οι μηχανισμοί με χαρακτηριστικούς χρόνους πολύ μικρούς συγκρινόμενοι με ένα τυπικό χρόνο φόρτισης παράγουν στιγμιαίες ανελαστικές παραμορφώσεις ενώ οι άλλοι προξενούν χρονικά εξαρτώμενη παραμόρφωση.

Αν και τα δύο φαινόμενα συμβαίνουν σε ένα μέταλλο πάνω από ένα ορισμένο εύρος χρόνων φόρτισης τότε η ολική ανελαστική παραμόρφωση ε_{ij}^{in} μπορεί να αναλυθεί ως:

$$\varepsilon_{ij}^{in} = \varepsilon_{ij}^{vp} + \varepsilon_{ij}^{p} \tag{2.45}$$

όπου ε_{ij}^{vp} είναι η ιξωδοπλαστική παραμόρφωση ισοδύναμη με αυτή που διέπει η σχέση (2.33) και ε_{ij}^{p} είναι η χρονικά ανεξάρτητη πλαστική παραμόρφωση που διέπει η εξ. (2.44). Οι συναρτήσεις διαρροής f και οι τανυστές ροής h_{ij} γενικά είναι διαφορετικοί για τους δύο ανελαστικούς τανυστές παραμόρφωσης. Ειδικά η ιξωδοπλαστική επιφάνεια διαρροής υποτίθεται πάντοτε ότι είναι εσωτερικά της επιφάνειας διαρροής της χρονικά ανεξάρτητης πλαστικής παραμόρφωσης.

2.9 Ιξωδοπλαστικότητα χωρίς επιφάνεια διαρροής

Ενοποιημένα ιξωδοπλαστικά μοντέλα

Σύμφωνα με τον Bodner [93] η διαρροή δεν είναι ένα χωριστό και ανεξάρτητο κριτήριο αλλά η συνέπεια ενός καταστατικού νόμου της συμπεριφοράς των υλικών. Από τη δεκαετία του 70 διάφορα καταστατικά μοντέλα για την χρονικά εξαρτώμενη ανελαστική συμπεριφορά των μετάλλων έχουν προταθεί χωρίς την τυπική υπόθεση της επιφάνειας διαρροής αλλά με το χαρακτηριστικό ότι σε επαρκώς χαμηλούς ρυθμούς οι προκύπτουσες καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων ομοιάζουν με εκείνες υλικών με αρκετά καλά προσδιοριζόμενες τάσεις διαρροής. Πράγματι στη περίπτωση προσδιορισμού της διαρροής με συμβατικό τρόπο, αυτά τα μοντέλα μπορούν να προβλέψουν επιφάνειες διαρροής σε συμφωνία με το δόγμα Bodner ειδικά αν χρησιμοποιούνται συμβατικές παραμόρφωσεις της τάξεως 10^{-6} με 10^{-5} σε αντίθεση με τις καθιερωμένες 10^{-3} με 10^{-2}.

Πέραν της περιγραφής της συμπεριφοράς της παραδοσιακά καλούμενης πλαστικότητας σε μονοτονική και κυκλική φόρτιση, αυτά τα μοντέλα επίσης στοχεύουν να περιγράψουν τον ερπυσμό ειδικά σε υψηλότερες θερμοκρασίες χωρίς την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου. Είναι γνωστά ως ενοποιημένα ιξωδοπλαστικά μοντέλα και είναι χρήσιμα για την περιγραφή σωμάτων που υπόκεινται σε σημαντικά υψηλές θερμοκρασιακές μεταβολές όπως τα διαστημόπλοια. Ίσως το απλούστερο τέτοιο μοντέλο οφείλεται στους Bodner και Partom [94,95] στο οποίο οι εξισώσεις ροής δίδονται από την εξ. (2.33) με $h_{ij} = S_{ij}$, φ συνάρτηση των J_2 και του ανελαστικού έργου W_i, προσδιοριζόμενου από την εξ. (2.28) σαν τη μόνη εσωτερική μεταβλητή. Η εξίσωση ρυθμού είναι :

$$\dot{W}_i = 2\ J_2\ \varphi(W_i, J_2) \qquad (2.46)$$

Η κράτυνση σε αυτήν την περίπτωση είναι καθαρά ισότροπη, αφού $\sqrt{3J_2}$ είναι η τιμή της τάσης της αναγκαίας να διατηρήσει ένα δεδομένο ανελαστικό ρυθμό έργου $\dot{W}_i$ ή ισοδύναμα ένα δεδομένο ρυθμό ανελαστικής παραμόρφωσης αφού σε αυτό το μοντέλο η $\dot{W}_i = \sqrt{3J_2}\ \dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ είναι αύξουσα συνάστηση του W_i ή της $\bar{\varepsilon}^{in}$.

Περισσότερο πολύπλοκα ενοποιημένα ιξωδοπλαστικά μοντέλα τα οποία περιγράφουν πολλά χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς των μετάλλων σε αυξημένες θερμοκρασίες έχουν αναπτυχθεί από το 1975 από τους Miller [96], Hart [65], Krieg, Swearengen και Rohde [97], Walker [1] και Krieg, Swearengen και Jones [98]. Εσωτερικές μεταβλητές σε αυτά τα μοντέλα είναι ο τανυστής τάσης ισορροπίας (equilibrium stress) ρ και μια βαθμωτή τάση τριβής (drag or friction stress) σ_D.

Στα ενοποιημένα μοντέλα οι ομοιάζουσες με τάσεις μεταβλητές ρ και σ_D χρησιμοποιούνται σαν εσωτερικές μεταβλητές. Η μεταβλητή ρ περιγράφει την κινηματική κράτυνση και συνδέεται από κάποιους ερευνητές με την τάση ανάσχεσης (back stress) που προκαλεί την επιβράδυνση των εξαρμόσεων. Για ισότροπη συμπεριφορά η ρ υποτίθεται καθαρά αποκλίνων τανυστής και η εξίσωση ρυθμού για τις ανελαστικές παραμορφώσεις παίρνει τη μορφή:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \tfrac{3}{2}\,\frac{\varphi(\Gamma/\sigma_D)}{\Gamma}\,(S_{ij} - \rho_{ij}) \tag{2.47}$$

όπου $\Gamma = \sqrt{3\bar{J}_2}$ με $\bar{J}_2 = \tfrac{1}{2}\,(S_{ij} - \rho'_{ij})\,(S_{ij} - \rho'_{ij})$, ρ' ο αποκλίνων τανυστής του ρ και φ μια συνάρτηση με διάσταση αντιστρόφου του χρόνου η οποία αυξάνει ραγδαία με το όρισμα της. Η εξέλιξη του ρυθμού της ισοδύναμης ανελαστικής παραμόρφωσης είναι :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{in} = \varphi(\Gamma/\sigma_D) \tag{2.48}$$

και για μονοαξονική τάση :

$$\dot{\varepsilon}^{in} = \varphi\left(|\sigma - \rho|\right)/\sigma_D \tag{2.49}$$

Τυπικές μορφές της $\varphi(x)$ είναι Ax^n, $A(e^x - 1)$ και $A(\sinh(x^m))^n$ όπου A, m και n είναι σταθερές.

Μια ποικιλία μορφών έχει προταθεί για τις εξισώσεις ρυθμού των ρ και σ_D, για παράδειγμα από τον Walker [1]:

$$\dot{\rho}_{ij} = \alpha_1 \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} - [\alpha_2 \dot{\bar{\varepsilon}}^{in} + \alpha_3 (2\,\rho_{kl}\,\rho_{kl}/3))^{(m-1)/2}]\ \rho_{ij} \tag{2.50}$$

$$\dot{\sigma}_D = [\,\alpha_4 - \alpha_5(\sigma_D - \sigma_{D0})]\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{in} - \alpha_6\,(\,\sigma_D - \sigma_{D0}\,)^p \tag{2.51}$$

όπου οι $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ και $\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ αντικαθίστανται από τις εξ. (2.47) και (2.48) και οι α_1 , ... , α_6 , m, p και σ_{D0} σταθερές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΙΞΩΔΟΠΛΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

3.1 Εισαγωγή

Οι σύγχρονες τεχνολογικές εξελίξεις στην αεροδιαστημική, πυρηνική βιομηχανία και σε πολλές άλλες βιομηχανίες έχουν σαν αποτέλεσμα την αυξημένη χρήση υλικών σε άνευ προηγουμένου υψηλές θερμοκρασίες. Στις υψηλές θερμοκρασίες υπάρχει μια αυξημένη προδιάθεση των υλικών για μηχανισμούς ανελαστικής παραμόρφωσης, ερπυσμού και πλαστικότητας. Ο ρεαλιστικός και λογικός σχεδιασμός των δομικών στοιχείων σε τέτοιες θερμοκρασίες πρέπει να βασίζεται σε ακριβή περιγραφή αυτών των ανελαστικών παραμορφώσεων στα καταστατικά μοντέλα.

Συμβατικά μοντέλα που θεωρούν τον ερπυσμό και την πλαστική παραμόρφωση σαν χωριστές μη αλληλεπιδρούσες έννοιες είναι αναποτελεσματικά να αντιμετωπίσουν παρατηρηθείσες αλληλεπιδράσεις σε αυξημένες θερμοκρασίες [99-103]. Έχει καταβληθεί συντονισμένη προσπάθεια από πολλούς ερευνητές για την ανάπτυξη καταστατικών μοντέλων στα οποία η ανελαστική παραμόρφωση δεν διαχωρίζεται τεχνητά σε χρονικά μη εξαρτώμενη πλαστική και χρονικά εξαρτώμενο ερπυσμό. Αυτά τα μοντέλα καλούνται ενοποιημένα ιξωδοπλαστικά μοντέλα και θεωρούν την όλη ανελαστική παραμόρφωση (πλαστικότητα, ερπυσμό, χαλάρωση κλπ) σαν ενοποιημένη και χρονικά εξαρτώμενη ποσότητα και έτσι περιλαμβάνουν αυτόματα κάθε αλληλεπίδραση [10,11,65,96,104-106].

Τα ενοποιημένα ιξωδοπλαστικά μοντέλα εκφράζουν τους ανελαστικούς ρυθμούς παραμόρφωσης σαν συνάρτηση των τρεχουσών τιμών της τάσης, της θερμοκρασίας και ορισμένων εσωτερικών μεταβλητών. Περιέχουν νόμους εξέλιξης με τους οποίους συνδέονται οι εσωτερικές μεταβλητές με τις τρέχουσες τιμές αυτών των μεταβλητών, της τάσης και της θερμοκρασίας. Τα προταθέντα ιξωδοπλαστικά μοντέλα από διαφορετικούς ερευνητές έχουν διαφορετικές λειτουργικές σχέσεις αλλά τα περισσότερα έχουν τον ίδιο σκελετό με δύο εσωτερικές μεταβλητές, μια βαθμωτή και την άλλη τανυστική που αντιστοιχούν στην ισότροπη και κινηματική κράτυνση (hardening).

Έχουν γίνει προσπάθειες για να καταστούν πιο ρεαλιστικά αυτά τα μοντέλα με την ενσωμάτωση όσο το δυνατόν περισσοτέρων από την επιστήμη των υλικών στο συνεχές μοντέλο. Η μαθηματική δομή των μοντέλων είναι γενικά πολύ πολύπλοκη. Αναλυτικές μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση προβλημάτων κλασσικής πλαστικότητας ή ερπυσμού δεν είναι εφαρμόσιμες στα ενοποιημένα μοντέλα.

Πολλά πρακτικά προβλήματα, όπως αυτά που προκύπτουν στην ανάλυση των θερμών τμημάτων μηχανών αεροστροβίλων που διαρρέονται από αέρια και μηχανών πυραύλων επαναχρησιμοποιούμενων διαστημικών συστημάτων προώθησης, έχουν περίπλοκη γεωμετρία και πολύπλοκες θερμομηχανικές ιστορίες φόρτισης. Για την εφαρμογή των ιξωδοπλαστικών μοντέλων σε τέτοια περίπλοκα προβλήματα είναι αναγκαία η εφαρμογή μεθόθων όπως η μέθοδος των πεπερασμένων ή των συνοριακών στοιχείων [17,19,34,107-112]. Στις επόμενες παραγράφους περιγράφονται αναλυτικά τα ιξωδοπλαστικά μοντέλα των Hart και Robinson.

3.2 Μοντέλο του Hart [10,11,65,113]

Ο ολικός μη ελαστικός ρυθμός παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ θεωρείται σαν άθροισμα του ρυθμού μιας ανακτώμενης ανελαστικής παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}_{ij}^{a}$ και του ρυθμού μιας παραμένουσας πλαστικής παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{a} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \tag{3.1}$$

Η ανελαστική παραμόρφωση $\dot{\varepsilon}_{ij}^{a}$ θεωρείται εσωτερική μεταβλητή του υλικού και εκφράζει το μέγεθος και τη διεύθυνση της προηγούμενης ιστορίας παραμόρφωσης και είναι υπεύθυνη για ένα μέρος της μηχανικής ανισοτροπίας του υλικού (Bauschinger effect).

Η πλαστική παραμόρφωση $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ δεν είναι εσωτερική μεταβλητή και είναι παραμένουσα παραμόρφωση εξαρτώμενη από τη διαδρομή. Η άλλη εσωτερική μεταβλητή είναι ένα βαθμωτό μέγεθος σ^* η « σκληρότητα » (hardness) που είναι παρόμοια με μια παράμετρο ισότροπης κράτυνσης. Έχει δειχθεί ότι η σ^* προσδιορίζει πλήρως το ρυθμό πλαστικής παραμόρφωσης σε μέταλλα σε ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων ιστορίας φόρτισης και θερμοκρασίας.

Οι καταστατικές εξισώσεις είναι σχέσεις μεταξύ των τρεχουσών τιμών του εφαρμοζόμενου αποκλίνοντα τανυστή τάσεων S_{ij}, του ολικού μη ελαστικού ρυθμού παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$, της βαθμωτής εσωτερικής μεταβλητής σ^*, της τανυστικής εσωτερικής μεταβλητής ε_{ij}^{a}, του ρυθμού μεταβολής $\dot{\sigma}^*$ και $\dot{\varepsilon}_{ij}^{a}$ και της θερμοκρασίας T (βαθμοί Kelvin).

Ο αποκλίνων τανυστής τάσης αναλύεται σε δύο βοηθητικές συνιστώσες:

$$S_{ij} = S_{ij}^{a} + S_{ij}^{f} \tag{3.2}$$

Ο ρυθμός μη ελαστικής παραμόρφωσης προσδιορίζεται αν δοθούν οι τρέχουσες τιμές των εσωτερικών μεταβλητών σ^* και ε_{ij}^{a} η τάση S_{ij} και η θερμοκρασία T.

Οι σχέσεις για την ανελαστική παραμόρφωση και το ρυθμό μεταβολής της πλαστικής και της μη ελαστικής παραμόρφωσης είναι:

$$\varepsilon_{ij}^{a} = \frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}^{a}}{\bar{\sigma}^{a}} S_{ij}^{a}, \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}^{a}} S_{ij}^{a}, \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}}{\bar{\sigma}^{f}} S_{ij}^{f} \tag{3.3}$$

όπου $\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$, $\bar{\varepsilon}^{a}$, $\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}^{a}$, $\bar{\sigma}^{f}$ είναι βαθμωτά μεγέθη και προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{in} = \left(\tfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}\right)^{1/2}, \qquad \dot{\bar{\varepsilon}}^{p} = \left(\tfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}\right)^{1/2}, \qquad \bar{\varepsilon}^{a} = \left(\tfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{a}\dot{\varepsilon}_{ij}^{a}\right)^{1/2}$$

$$\bar{\sigma} = \left(\tfrac{3}{2}S_{ij}S_{ij}\right)^{1/2}, \qquad \bar{\sigma}^{a} = \left(\tfrac{3}{2}S_{ij}^{a}S_{ij}^{a}\right)^{1/2}, \qquad \bar{\sigma}^{f} = \left(\tfrac{3}{2}S_{ij}^{f}S_{ij}^{f}\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

Οι εξισώσεις μεταξύ των αναλλοίωτων μεγεθών και των σ^* και T είναι:

$$\bar{\sigma}^{a} = L\ \bar{\varepsilon}^{a}, \tag{3.5}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{in} = \dot{a}^*(\bar{\sigma}^{f}/L)^{M} \tag{3.6}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}=\dot{\varepsilon}^{*}(\ln(\sigma^{*}/\ \bar{\sigma}^{a}))^{-1/\lambda} \tag{3.7}$$

$$\dot{\varepsilon}^{*}=\dot{\varepsilon}_{S}^{\ *}(\sigma^{*}/\sigma_{S}^{\ *})^{m}\exp(Q/RT_{B})\ \exp(-Q/RT) \tag{3.8}$$

$$\dot{\sigma}^{*}=\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}\ \sigma^{*}\Gamma(\sigma^{*},\bar{\sigma}^{a}) \tag{3.9}$$

$$\Gamma(\sigma^{*},\bar{\sigma}^{a})=(\beta/\sigma^{*})^{\delta}(\bar{\sigma}^{a}/\sigma^{*})^{\beta/\sigma^{*}} \tag{3.10}$$

όπου $L, M, m, \lambda, \dot{a}^{*}, \dot{\varepsilon}_{S}^{\ *}$ παράμετροι σε ένα επίπεδο αναφοράς «σκληρότητας» $\sigma_{S}^{\ *}$και θερμοκρασίας αναφοράς T_B, β και δ είναι οι παράμετροι κράτυνσης, R η σταθερά των αερίων και Q η ενέργεια ενεργοποίησης για ατομική αυτοδιάχυση. Οι συναρτήσεις $\dot{a}^{*}$, $\dot{\varepsilon}^{*}$, R και η «σκληρότητα» σ^{*} είναι ευαίσθητες σε θερμοκρασιακά προκαλούμενες δομικές αλλαγές.

Για τον 304 ανοξείδωτο χάλυβα οι τιμές μερικών από τις παραπάνω παραμέτρους είναι: $M = 7.8$, $m = 5$, $\lambda = 0.15$ και $Q = 65$ kcal/mole (παράρτημα I).

Η ισχύς των καταστατικών εξισώσεων επιβεβαιώνεται από εκτεταμένα πειραματικά αποτελέσματα. Όλες οι χρησιμοποιούμενες παράμετροι μπορούν να προσδιοριστούν μοναδικά από πειραματικές τεχνικές. Μόνο ένα μέρος από αυτές τις παραμέτρους βρέθηκε ότι είναι είναι ευαίσθητο σε θερμοκρασιακές μικροδομικές αλλαγές.

Οι καταστατικές εξισώσεις μπορούν να συνοψισθούν ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} &= f_{ij}\ (\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^{a},\ \sigma^{*},\ T) \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{a} &= g_{ij}\ (\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^{a},\ \sigma^{*},\ T) \\ \dot{\sigma}^{*} &= h\ (\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^{a},\ \sigma^{*},\ T) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι αν δοθούν οι αρχικές τιμές των ε_{ij}^{a} και σ^{*} μπορεί να προσδιορισθεί η χρονική εξέλιξη για κάθε ιστορία χρόνου των $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ και σ_{ij} .

Το στοιχείο $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ περιγράφεται από τις σχέσεις (3.7) και (3.8) και διέπει την διαδικασία παραμόρφωσης του κρυσταλλικού πλέγματος (grain matrix) που επικρατεί σε υψηλές ομόλογες θερμοκρασίες. Τα πειραματικά αποτελέσματα παριστώνται σε καμπύλες $\log\bar{\sigma}$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ σαν συναρτήσεις της θερμοκρασίας και της «σκληρότητας» σ^{*}. Κατά τη διάρκεια ενός πειράματος χαλάρωσης το επίπεδο «σκληρότητας» είναι ουσιαστικά αμετάβλητο και έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται κάτω από σταθερή «σκληρότητα». Η κατάσταση σε ένα πείραμα χαλάρωσης είναι τέτοια ώστε στη περιοχή που το στοιχείο $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ επικρατεί η $\bar{\sigma}^{a}$ είναι κοντά στη $\bar{\sigma}$ και η $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ κοντά στην $\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$. Οι προκύψασες καμπύλες $\log\bar{\sigma}$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ βρέθηκε ότι περιγράφονται καλά από την εξίσωση (3.7). Η σταθερά λ, η οποία έχει τιμή 0.15 για όλα τα υλικά, προσδιορίζει το σχήμα της καμπύλης.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ στοιχείου είναι η κλιμακωτή συμπεριφορά σε σχέση με τη σ^{*}. Η παράμετρος $\dot{\varepsilon}^{*}$ αλλάζει με τη μεταβολή του σ^{*}. Έτσι το σχήμα της καμπύλης $\log\bar{\sigma}^{a}$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ είναι ανεξάρτητο από την τιμή του σ^{*}, αλλά η θέση της καμπύλης μετατοπίζεται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής με κλίση $1/m$. Η τιμή του m στην εξίσωση (3.8) προσδιορίζεται από την κλιμακωτή συμπεριφορά διάφορων $\log\bar{\sigma}^{a}$-$\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ καμπύλων σε διαφορετικές τιμές του σ^{*}. Η εξίσωση αυτή δίδει τη θερμοκρασιακή εξάρτηση του $\dot{\varepsilon}^{*}$. Η ενέργεια ενεργοποίησης Q έχει δειχθεί πειραματικά ότι είναι η ενέργεια αυτοδιάχυσης.

Το στοιχείο $\bar{\varepsilon}^{a}$ περιγράφεται από τη σχέση (3.5) και είναι ένα γραμμικό ανελαστικό ελατήριο και υποδηλώνει ότι το μέγεθος της συσσωρευμένης ανελαστικής παραμόρφωσης στο κρυσταλλικό πλέγμα προσδιορίζεται από την $\bar{\sigma}^{a}$ και το ανελαστικό μέτρο L και ο ρυθμός με τον οποίο συσσωρεύεται ή επανακτάται διέπεται από το στοιχείο $\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$. Η τιμή του L μπορεί να είναι συνάρτηση του $\bar{\sigma}^{a}$ και του σ^{*}. Η παράμετρος L μπορεί να πάρει διαφορετική τιμή όταν φορτίζεται σε θλίψη μετά από κάποια προηγούμενη πλαστική παραμόρφωση σε εφελκυσμό ή αντίστροφα.

Αν αγνοηθούν οι ανελαστικές επιδράσεις από τους συνοριακούς κόκκους (grain boundary) κατά την μονοαξονική αποφόρτιση σε χαμηλό ρυθμό παραμόρφωσης ενός υλικού που έχει υποβληθεί στη διαδικασία αύξησης των τάσεων με παραμορφωσιακή κράτυνση (strain hardening) για την βελτίωση του επιπέδου σκληρότητας (hardness level) τα $\sigma - \varepsilon$ αποτελέσματα θα δείξουν την επίδραση του $\bar{\varepsilon}^{a}$ στοιχείου. Σε χαμηλές τάσεις η κλίση του προκύπτοντος $\sigma - \varepsilon$ διαγράμματος προσεγγίζει το μέτρο ελαστικότητας E. Καθώς αυξάνεται η τάση μετά από μια μεταβατική περιοχή η $\sigma - \varepsilon$ προσεγγίζει μια άλλη σχεδόν ευθεία γραμμή με κλίση $L\,E\,/\,(L+E)$. Η τάση στην οποία θα συμβεί η μετάβαση εξαρτάται από το ρυθμό παραμόρφωσης του πειράματος.

Το στοιχείο $\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ περιγράφεται από την εξίσωση (3.6) και διέπει τη διαδικασία παραμόρφωσης του κρυσταλλικού πλέγματος που επικρατεί σε χαμηλές ομόλογες θερμοκρασίες. Η εξ. (3.6) έχει βρεθεί ότι ισχύει σε πολλά πειράματα χαλάρωσης σε χαμηλές ομόλογες θερμοκρασίες. Είναι πιθανό αυτή η εξίσωση να είναι μια προσέγγιση μιας πιο ακριβούς σχέσης. Οι σταθερής «σκληρότητας» καμπύλες $\log\bar{\sigma}$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ σε χαμηλές ομόλογες θερμοκρασίες δείχνουν επίσης μια κλιμακωτή συμπεριφορά με κλίση στην περιοχή μετατόπισης $1/M$ σύμφωνα με την εξ. (3.6). Η τιμή του M προσδιορίζει το σχήμα της $\log\bar{\sigma}$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ καμπύλης όταν το στοιχείο $\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ υπερτερεί.

Η τιμή της $\bar{\sigma}^{f}$ στην εξ. (3.6) μπορεί να προσδιορισθεί χρησιμοποιώντας τις εξ. (3.2) και (3.4). Στην περιοχή όπου το $\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ υπερτερεί η $\bar{\sigma}^{\alpha}$ προσεγγίζει τη σ^{*}. Σε ενδιάμεσες ομόλογες θερμοκρασίες και τα δύο στοιχεία $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ και $\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ είναι σημαντικά και η διαδικασία περιγράφεται από τις εξ. (3.6) και (3.7).

Η τιμή της μεταβλητής κατάστασης σ^{*} («σκληρότητα») αυξάνει με την κράτυνση σύμφωνα με την εξ. (3.9) αν αμεληθούν οι ακτινοβολίες και οι θερμοκρασιακά προκαλούμενες μικροδομικές αλλαγές. Η μορφή της συνάρτησης Γ έχει προκύψει από πειράματα εφελκυσμού με σταθερό ρυθμό έκτασης. Τα πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η συνάρτηση αυτή προσδιορίζεται από τη τρέχουσα μεταβλητή κατάστασης και εξαρτάται μόνο από την $\bar{\sigma}^{\alpha}$ και σ^{*} χωρίς περαιτέρω εξάρτηση από τη θερμοκρασία. Οι παράμετροι β και δ εξαρτώνται από το υλικό και δεν επηρεάζονται από θερμοκρασιακά προκαλούμενες μικροδομικές αλλαγές. Η εξ. (3.10) δείχνει ότι αν η αύξηση των τάσεων με παραμορφωσιακή κράτυνση εφαρμόζεται σε θερμοκρασία και ρυθμό παραμόρφωσης όπου το $\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ υπερτερεί , το $\bar{\sigma}^{\alpha}/\sigma^{*}$ τείνει στη μονάδα και η συνάρτηση Γ εξαρτάται μόνο από μια εσωτερική μεταβλητή. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η συμπεριφορά της παραμορφωσιακής κράτυνσης θα είναι ανεξάρτητη του ρυθμού παραμόρφωσης και θα ισχύει ένα εκθετικό μοντέλο (power law).

Αν η παραμορφωσιακή κράτυνση εφαρμόζεται κάτω από συνθήκες όπου το $\dot{\varepsilon}^{p}$ στοιχείο υπερτερεί ο δεύτερος όρος της εξ. (3.10) παύει να είναι μονάδα. Αυτός ο όρος αποδίδει την εξάρτηση της συνάρτησης Γ από τον ρυθμό παραμόρφωσης με την απουσία θερμικά προκαλούμενης επανάταξης (recovery). Σε χαμηλότερους ρυθμούς παραμόρφωσης το μέγεθος αυτού του όρου γίνεται μεγαλύτερο και οδηγεί στη μείωση της παραμορφωσιακής κράτυνσης.

Το σχήμα της περιοχής μετάβασης της καμπύλης παραμόρφωσης – χρόνου ερπυσμού είναι ευαίσθητο στις τιμές των σταθερών β και δ στην εξ. (3.10). Είναι σημαντικό οι τιμές αυτών των σταθερών να προσδιοριστούν με ακρίβεια πειραματικά. Η συνάρτηση Γ εξαρτάται μόνο από τη $\bar{\sigma}^{\alpha}$ και σ^{*} και είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη σημαντική μείωση των απαιτούμενων πειραμάτων εφελκυσμού κάτω από σταθερό ρυθμό έκτασης.
Στα αποτελέσματα των πειραμάτων εφελκυσμού υποτίθεται ότι η επίδραση της προκαλούμενης θερμικής επανάταξης δεν είναι σημαντική στο εύρος της θερμοκρασίας και του ρυθμού παραμόρφωσης που εφαρμόζεται. Αν η θερμοκρασία του πειράματος αυξηθεί η παραπάνω υπόθεση μπορεί να μην ισχύει και θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η θερμική επανάταξη στην ανάλυση των δεδομένων.

3.2.1 Θερμική επίδραση

Κατά τη διάρκεια μακρόχρονης λειτουργίας σε υψηλές θερμοκρασίες η μικροδομή του υλικού θα μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο. Η αλληλεπίδραση μεταξύ θερμικής και μηχανικής ιστορίας μπορεί να προκαλέσει πολύπλοκα φαινόμενα. Η προκαλούμενη μικροδομή σε ένα δοκίμιο μπορεί να είναι διαφορετική ακόμη και με την ίδια θερμική κατάσταση εξαρτώμενη από την μηχανική κατάσταση του πειράματος ερπυσμού.

Η θερμικά προκαλούμενη αλλαγή της μικροδομής θα τροποποιήσει το μέγεθος των κελιών εξάρμοσης (dislocation) και την κατανομή και την πυκνότητα διασποράς των φάσεων. Για ένα $\dot{\varepsilon}^{p}$ στοιχείο αυτές οι αλλαγές θα προκαλέσουν μεταβολή της τιμής της σ^{*} και της $\dot{\varepsilon}^{*}$.

Η τιμή της παραμέτρου $\dot{a}^{*}$ του στοιχείου $\dot{\varepsilon}^{in}$ εκφράζει την κινητικότητα των εξαρμόσεων (dislocation mobility) του κρυσταλλικού πλέγματος. Μπορεί να επηρεασθεί σημαντικά από την συγκέντρωση διαλυμένων (solute) ατόμων ως και από τις χρονικά εξαρτώμενες αλληλεπιδράσεις των διαλυμένων εξαρμόσεων (solute-dislocation) οι οποίες αναπτύσσονται κατά την πτώση του σημείου διαρροής (yield drop) ή την παραμορφωσιακή γήρανση (strain aging). Οι τελευταίες επηρεάζουν το σχήμα των καμπύλων $\log\bar{\sigma}$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ και αναπτύσσουν αυξημένους ρυθμούς μεταβολής του $\dot{a}^*$.

Μόνο οι τρεις παράμετροι σ^*, $\dot{\varepsilon}^*$, $\dot{a}^*$ των καταστατικών εξισώσεων για την παραμόρφωση του κρυσταλλικού πλέγματος επηρεάζονται από τη μεταλλουργία. Μπορούν να προσδιοριστούν εύκολα από πειράματα χαλάρωσης τα οποία απαιτούν μικρότερους χρόνους συγκρινόμενα με το χρόνο λειτουργίας ενός υλικού και παρέχεται η δυνατότητα προσδιορισμού των ιδιοτήτων παραμόρφωσης του υλικού με ακρίβεια σε ένα δεδομένο στάδιο εξέλιξης της μικροδομής. Με τη διακοπή σε κατάλληλα χρονικά διαστήματα ενός πειράματος ερπυσμού μεγάλης διάρκειας μπορεί να ληφθούν δοκίμια σε διαφορετικά στάδια εξέλιξης της μικροδομής και να εφαρμοσθεί χαλάρωση σε διαφορετικές θερμοκρασίες και να καλυφθεί ένα ευρύ φάσμα ρυθμών παραμόρφωσης.

Αυτά τα αποτελέσματα επιτρέπουν την αποτίμηση των τριών παραμέτρων σε συνάρτηση με την εξέλιξη της μικροδομής και την πρόβλεψη των ιδιοτήτων παραμόρφωσης των υλικών κάτω από συνθήκες που δεν περιέχονται στα πειράματα ερπυσμού. Ο συνδυασμός πειραμάτων ερπυσμού και χαλάρωσης αυξάνει το εύρος εφαρμογής των αποτελεσμάτων ερπυσμού μεγάλης διάρκειας με τη μείωση του αριθμού των απαιτούμενων πειραμάτων ειδικά σε χαμηλές θερμοκρασίες τα οποία είναι δαπανηρά και χρονοβόρα.

Πειράματα χαλάρωσης με σταθερή «σκληρότητα» δίδουν καμπύλες $\log\bar{\sigma}$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ από τις οποίες προσδιορίζονται οι σ^*, $\dot{\varepsilon}^*$ και $\dot{a}^*$. Από τα ίδια διαγράμματα μπορούν να προσδιορισθούν και οι λιγότερο εξαρτώμενες από το υλικό παράμετροι λ, m και M. Η ενέργεια ενεργοποίησης Q είναι γνωστή από τη βιβλιογραφία. Πείραμα εφελκυσμού σταθερού ρυθμού έκτασης χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της συνάρτησης κράτυνσης Γ και του ανελαστικού μέτρου L. Σε υψηλές τάσεις τα $\sigma-\varepsilon^{in}$ αποτελέσματα από αυτό το πείραμα διέπονται από το $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ στοιχείο και τη συνάρτηση κράτυνσης.

3.2.2 Επίδραση ακτινοβολίας

Η προσέγγιση των μεταβλητών κατάστασης προσφέρει μια κατάλληλη μέθοδο για τον χαρακτηρισμό των επιδράσεων της ακτινοβολίας μέσω των τριών παραμέτρων σ^*, $\dot{\varepsilon}^*$, $\dot{a}^*$ οι οποίες είναι ευαίσθητες σε μεταλλουργικές επιδράσεις και μπορούν να προσδιορισθούν από πειράματα χαλάρωσης.

Για συνθήκες πειραμάτων σε ερπυσμό σε πυρηνικούς αντιδραστήρες μόνο το στοιχείο $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ λαμβάνεται υπόψη. Η επίδραση της ακτινοβολίας στη κράτυνση (irradiation hardening) στον 304 ανοξείδωτο χάλυβα έχει υπολογισθεί εκτελώντας πειράματα χαλάρωσης (post irradiation load relaxation) με τον υπολογισμό της τιμής των σ^*, $\dot{\varepsilon}^*$. Τα αποτελέσματα του ερπυσμού λόγω ακτινοβολίας στο ίδιο υλικό αποτιμώνται συγκρίνοντας την τιμή του $\dot{\varepsilon}^*$ που βρίσκεται από τα πειράματα χαλάρωσης με τα αποτελέσματα από αντιδραστήρα.

3.2.3 Ιξωδοπλαστικό όριο

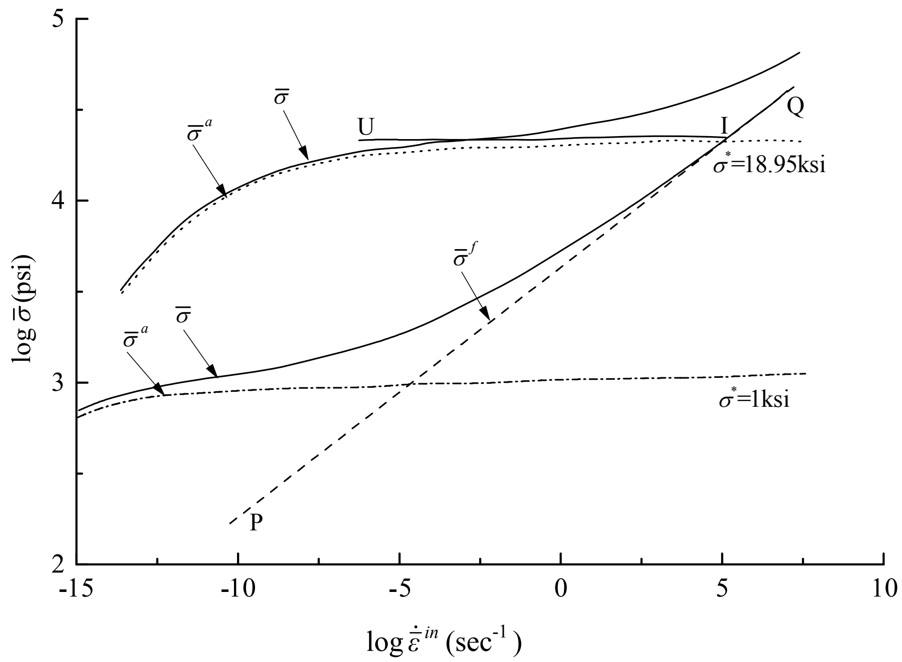
Σε αυτήν την παράγραφο θα εξετασθεί ο προσδιορισμός του ιξωδοπλαστικού ορίου του καταστατικού μοντέλου των εσωτερικών μεταβλητών. Αυτό το όριο είναι αναγκαίο για να διευκολυνθεί η αριθμητική ολοκλήρωση της εξ. (3.7) :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\varepsilon}^*(\ln(\sigma^*/\bar{\sigma}^\alpha))^{-1/\lambda} \qquad (3.12)$$

Αυτή η εξίσωση γίνεται ιδιόμορφη (singular) όταν $\bar{\sigma}^\alpha = 0$ ή $\bar{\sigma}^\alpha = \sigma^*$. Στη πρώτη περίπτωση τίθεται $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = 0$ για φυσικούς λόγους. Η δεύτερη περίπτωση προκύπτει μόνο όταν $\bar{\sigma} > \sigma^*$ επειδή η $\bar{\sigma}^\alpha$ δεν μπορεί να υπερβεί την τάση $\bar{\sigma}$. Σύμφωνα με το $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ στοιχείο η ανελαστική τάση $\bar{\sigma}^\alpha$ δεν μπορεί να υπερβεί την σ^* αλλά μπορεί να την προσεγγίσει και τότε ο λογαριθμικός όρος γίνεται σχεδόν απροσδιόριστος. Αυτή η περιοχή καλείται ιξωδοπλαστικό όριο και για υπολογιστικούς λόγους η εξ. (3.12) αντικαθίσταται με μια εναλλακτική εντός του ιξωδοπλαστικού ορίου.

Διαγράμματα των $\log\bar{\sigma}$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ και $\log\bar{\sigma}^\alpha$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ φαίνονται στα Σχήματα 3.1 και 3.2. Η γραμμή PQ στο Σχήμα 3.1 είναι το διάγραμμα του $\log\bar{\sigma}^f$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$

που προκύπτει από την εξ. (3.6). Η γραμμή CD στο Σχήμα 3.2 παριστάνει το δρόμο μετάβασης για τις $\log\bar{\sigma}^{\alpha}$ - $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ καμπύλες. (λ καμπύλες). Στο Σχήμα 3.2 παρατηρείται ότι οι λ-καμπύλες γίνονται ουσιαστικά οριζόντιες όταν $\bar{\sigma}^{\alpha} \rightarrow \sigma^{*}$ για αρκετά μεγάλες τιμές του $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$.

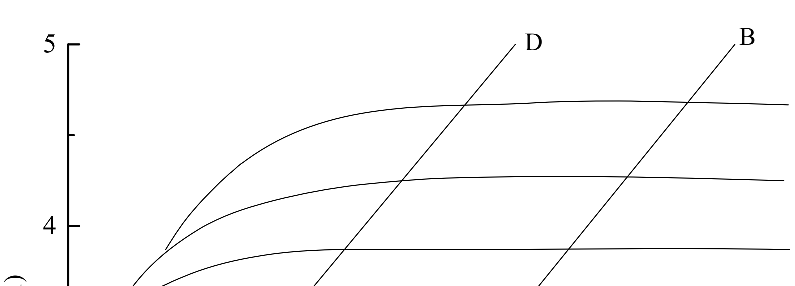


Σχήμα 3.1: Τυπικό διάγραμμα του $\log\bar{\sigma}$ σε σχέση με το $\log\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}$ (Kumar et al. [113]).

Επομένως η σχέση $\bar{\sigma}^{\alpha} = \sigma^{*}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ όταν ο $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ υπερβαίνει μια ορισμένη κρίσιμη τιμή $\dot{\varepsilon}^{pc}$. Αυτή η κρίσιμη τιμή εξαρτάται από την σ^{*} σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\dot{\varepsilon}^{pc} = \dot{\varepsilon}_{d}^{c}\left(\frac{\sigma^{*}}{\sigma_{d}^{*}}\right)^{m} \tag{3.13}$$

όπου $\dot{\varepsilon}_{d}^{c}$ και σ_{d}^{*} είναι κατάλληλα επιλεγμένες παράμετροι αναφοράς.



$\log \dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ (sec^{-1})

Σχήμα 3.2: Τυπικά διαγράμματα $\log \bar{\sigma}^{\alpha}$ σε σχέση με το $\log \dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ (Kumar et al. [113]).

Η εξίσωση (3.13) παριστάνεται στο Σχήμα 3.2 με την ευθεία γραμμή ΑΒ, δεξιά της οποίας είναι το ιξωδοπλαστικό όριο όπου $\bar{\sigma}^{\alpha} \rightarrow \sigma^{*}$. Η παράμετρος αναφοράς $\sigma_d{}^{*}$ είναι αυθαίρετη και μια κατάλληλη επιλογή για την αντίστοιχη $\dot{\varepsilon}_d^c$ είναι από το ρυθμό πλαστικής παραμόρφωσης στον οποίο $\bar{\sigma}^{\alpha} = 0.99\ \sigma^{*}$ όπως βρίσκεται από την εξ. (3.12):

$$\dot{\varepsilon}_d^c = \dot{\varepsilon}^{*}(\sigma_d{}^{*}, T)\ (\ln(\frac{1}{0.99}))^{-1/\lambda} \qquad (3.14)$$

Τιμές του $\dot{\varepsilon}_d^c$ για τιμή της παραμέτρου $\sigma_d{}^{*} = 10$ ksi σε διάφορες θερμοκρασίες για το νικέλιο και τον 304 ανοξείδωτο χάλυβα δίδονται στο παράρτημα Ι.

Η εξίσωση που αντικαθιστά την εξ. (3.12) στο ιξωδοπλαστικό όριο είναι:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}}{1 + \frac{\sigma * \Gamma}{M}} \qquad (3.15)$$

Αν δεν υπάρχουν απότομες ασυνέχειες στην ιστορία της τάσης ή του ρυθμού παραμόρφωσης η εξ. (3.12) εφαρμόζεται όταν $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p} < \dot{\varepsilon}_d^c$ διαφορετικά η εξ. (3.15). Ένα σημαντικό άλμα στην τάση ή το ρυθμό παραμόρφωσης αλλάζει το $\dot{\bar{\sigma}}^{\alpha}$ και έτσι η εξ. (3.15) δεν ισχύει αμέσως μετά το άλμα και η (3.12) πρέπει να χρησιμοποιείται αντί αυτής.

Η εξίσωση (3.12) ισχύει πάντοτε και η εξ. (3.15) είναι μια κατάλληλη αντικατάσταση της για τους προαναφερθέντες λόγους. Η υπόθεση του ιξωδοπλαστικού ορίου αυξάνει την ταχύτητα και την αποτελεσματικότητα των υπολογισμών χωρίς σημαντική απώλεια της ακρίβειας.

Στο μοντέλο αυτό λαμβάνεται υπόψη η μη ελαστική παραμόρφωση που προέρχεται μόνο από τη διαδικασία παραμόρφωσης του κρυσταλλικού πλέγματος (grain matrix process) και όχι από την ολίσθηση συνοριακών επιφανειών ομάδων πολυκρυστάλλων με διαφορετικό προσανατολισμό (grain boundary sliding) η οποία περιορίζει το όριο θερμοκρασίας κάτω των 500 ^{o} C για τον 304 ανοξείδωτο χάλυβα. Για υψηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης από 10^{-4} sec^{-1} και πάνω, το όριο αυτό μπορεί να αυξηθεί στους 650 ^{o} C. Το μοντέλο παραμόρφωσης είναι εφαρμόσιμο κύρια για ευσταθή και ομογενή παραμόρφωση κάτω από μονοτονική φόρτιση. Για κυκλική παραμόρφωση που περιέχει εφελκυσμό και θλίψη χρειάζονται τροποποιήσεις του μοντέλου.

3.3 Μοντελο του Robinson

Το μοντέλο Robinson [12,20-23,114] βασίζεται στην έννοια του δυναμικού ροής. Οι νόμοι ροής και ανάπτυξης για εσωτερικές μεταβλητές παράγονται από το δυναμικό ροής. Η συμπεριφορά του υλικού είναι ελαστική για όλους τους ρυθμούς τάσεων εντός του δυναμικού ροής και ιξωδοπλαστική εκτός αυτού. Υποθέτοντας ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές ο συνολικός ρυθμός παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}_{ij}$ γράφεται σαν άθροισμα μιας ελαστικής και μιας ανελαστικής συνιστώσας που περιέχει την πλαστικότητα, ερπυσμό, χαλάρωση κλπ.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{in}_{ij} \tag{3.16}$$

Το υλικό θεωρείται ισότροπο και ο νόμος του Hooke χρησιμοποιείται για συσχετισθεί ο ρυθμός ελαστικής παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}$ και ρυθμός των τάσεων $\dot{\sigma}_{ij}$:

$$\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E}\,\dot{\sigma}_{kk}\,\delta_{ij}$$

(3.17)

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας , ν ο λόγος του Poisson και δ_{ij} το δέλτα του Kronecker. Ακολουθώντας την γραφή του καρτεσιανού τανυστή, οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες υπονοούν άθροιση.

Ο αποκλίνων τανυστής τάσης S_{ij} προσδιορίζεται από:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \tfrac{1}{3}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij} \tag{3.18}$$

Ο νόμος ανάπτυξης που διέπει την εξέλιξη της εσωτερικής μεταβλητής $\dot{\alpha}_{ij}$ που αναφέρεται στην κινηματική κράτυνση δίδεται από την σχέση:

$$\dot{\alpha}_{ij} = h(\alpha_{kl})\,\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} - r(\alpha_{kl})\alpha_{ij}\,r \tag{3.19}$$

Η μορφή του νόμου αυτού βασίζεται στη θεωρία Baily-Orowan η οποία δηλώνει ότι η παραμόρφωση των υλικών στις υψηλές θερμοκρασίες γίνεται με την επιρροή δύο ανταγωνιστικών μηχανισμών που εκφράζονται από τους δύο όρους της εξ. (3.19). Ο πρώτος όρος δηλώνει τη διαδικασία κράτυνσης (hardening process) με συσσώρευση παραμόρφωσης και ο δεύτερος μια επανάταξη (recovery) ή διαδικασία αποσκλήρυνσης (softening process) που προχωρεί με το χρόνο. Σε συνθήκες σταθερής κατάστασης (steady-state) αυτοί οι δύο μηχανισμοί ισοσταθμίζουν ο ένας τον άλλο και συνεπώς $\dot{\alpha}_{ij} = 0$.

Ο νόμος ροής που διέπει το ρυθμό ανελαστικής παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ γράφεται ως:

$$2\,\overline{\mu}\;\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \begin{cases} f(F)\Sigma_{ij} & F > 0 \qquad\qquad\quad \kappa\alpha\iota \quad S_{ij}\Sigma_{ij} > 0 \\ 0 & F \le 0 \quad \acute{\eta} \;\; F > 0 \;\; \kappa\alpha\iota \quad S_{ij}\Sigma_{ij} \le 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

όπου Σ_{ij} δηλώνει την ενεργό τάση (effective stress) η οποία προσδιορίζεται ως:

$$\Sigma_{ij} = S_{ij} - \alpha_{ij} \tag{3.21}$$

Η μορφή των συναρτήσεων $f\,(F)$, $h(\alpha_{kl})$ και $r(\alpha_{kl})$ είναι η εξής:

$$f\,(F) = \frac{F^n}{\sqrt{J_2}} \tag{3.22}$$

$$h = \frac{2\mu H}{G^{\beta}}, \qquad r = \frac{RG^{m-\beta}}{\sqrt{I_2}} \qquad G > G_0 \quad \text{και} \quad S_{ij}\alpha_{ij} > 0 \tag{3.23}$$

$$h = \frac{2\mu H}{G_0^{\beta}}, \qquad r = \frac{RG_0^{m-\beta}}{\sqrt{I_2}} \qquad G \le G_0 \quad \text{και} \quad S_{ij}\alpha_{ij} \le 0 \tag{3.24}$$

όπου

$$J_2 = \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij}\Sigma_{ij}, \qquad F = \frac{J_2}{\kappa^2} - 1 \tag{3.25}$$

$$I_2 = \tfrac{1}{2}\alpha_{ij}\alpha_{ij}, \qquad G = \frac{\sqrt{I_2}}{\kappa} \tag{3.26}$$

Οι παράμετροι μ, H, n, m, β και G_0 είναι σταθερές ανεξάρτητες από τη θερμοκρασία. Η επίδραση της θερμοκρασίας λαμβάνεται υπόψη με τις σταθερές $\overline{\mu}$ και R οι οποίες εξαρτώνται από τη θερμοκρασία με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \overline{\mu} &= \mu\exp(-\theta_1) \\ R &= 9\text{x}\ 10^{-8}\exp(\theta_2) \end{aligned} \tag{3.27}$$

όπου $$\theta_1 = (23.8\theta - 2635) \left(\frac{1}{811} - \frac{1}{\theta}\right) \tag{3.28}$$

και $$\theta_2 = 40000 \left(\frac{1}{811} - \frac{1}{\theta}\right) \tag{3.29}$$

όπου θ η θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin. Η βαθμωτή μεταβλητή κατάστασης κ δηλώνει τη βαθμωτή τάση κατωφλίου (threshold stress).

Ο ανελαστικός ρυθμός παραμόφωσης $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ μηδενίζεται για όλες τις τιμές της δεύτερης αναλλοίωτης J_2 κάτω από το κ^2. Η εσωτερική μεταβλητή κ αποδίδει την ισότροπη κράτυνση (hardening) ή την αποσκλήρυνση (softening). Η κ έχει ληφθεί εδώ ως ανεξάρτητη από την θερμοκρασία σταθερά. Οι σχέσεις για την ανάπτυξη της ισότροπης εσωτερικής μεταβλητής και για την εξάρτηση της από τη θερμοκρασία μπορεί να είναι αναγκαίες αναλόγως το υλικό. Οι ανισότητες στις σχέσεις (3.20), (3.23) και (3.24) προσδιορίζουν σύνορα κατά μήκος των οποίων οι νόμοι ροής και ανάπτυξης αλλάζουν μορφή με ασυνέχεια.

Τα ασυνεχή σύνορα στο μοντέλο Robinson πρέπει να εξομαλυνθούν για να διευκολυνθεί η αριθμητική επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων ή συνοριακών στοιχείων. Η εξομάλυνση γίνεται με μια συνάρτηση (spline) $P(x)$ στο διάστημα (-1,1):

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^2}{2} & -1 \le x < 0 \\ 1 - \dfrac{(1-x)^2}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \\ 0 & x < -1 \end{cases} \tag{3.30}$$

Η συνάρτηση F στην εξ. (3.25) αντικαθίσταται από την $\mathcal{F}$ **:**

$$\mathcal{F} = P\left(\frac{S_{ij}\Sigma_{ij}}{W_1}\right)\langle F\rangle \tag{3.31}$$

όπου οι γωνιακές αγκύλες δηλώνουν :

$$\langle x\rangle = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

και η συνάρτηση βάρους W_1 επιλέγεται από το χρήστη. Η χρήση της εξ. (3.31) συμβάλλει στην εξομάλυνση της ασυνέχειας της ε_{ij}^{in} κατά μήκος της επιφάνειας $S_{ij}\Sigma_{ij} = 0$ και επίσης απαλάσσει το νόμο ροής (3.20) από ανισότητες.

Οι ασυνέχειες στο α_{ij} εξαλείφονται με αντικατάσταση της συνάρτησης G με τη G_1 :

$$G_1 = \begin{cases} G & G \geq 2G_0 \\ \dfrac{G^2}{4G_0} + G_0 & G < 2G_0 \end{cases} \tag{3.33}$$

και

$$G = (G_1 - G_0)\; P\left(\frac{S_{ij}\alpha_{ij}}{W_2}\right) + G_0$$

(3.34)

όπου W_2 είναι μια άλλη συνάρτηση βάρους επιλεγόμενη από το χρήστη. Οι εξ. (3.23) και (3.24) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$h = \frac{2\mu H}{G^{\beta}} \tag{3.35}$$

και

$$r = \frac{RG^{m-\beta}}{\sqrt{I_2}} \tag{3.36}$$

Με αυτές τις τιμές των h και r ο νόμος ανάπτυξης. (3.19) γίνεται μια απλή έκφραση με ομαλή μετάβαση κατά μήκος της επιφάνειας $S_{ij}\alpha_{ij} = 0$ και δεν περιέχει ανισότητες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

4.1 Συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις

4.1.1 Επίπεδη παραμόρφωση

Οι εξισώσεις του Navier για μη ελαστικούς ρυθμούς παραμόρφωσης είναι [107]:

$$\dot{u}_{i,kk} + \frac{1}{1-2v}\dot{u}_{k,ki} = -\frac{\dot{F}_i}{G} + 2\dot{\varepsilon}^{in}_{ij,j} + \frac{2(1+v)}{1-2v}(\alpha\dot{T})_{,i} \tag{4.1}$$

όπου $\dot{F}_i$ είναι ο ανά μονάδα ρυθμός μαζικής δύναμης, G, v και α είναι το μέτρο διάτμησης, ο λόγος του Poisson και ο συντελεστικής γραμμικής θερμικής διαστολής αντίστοιχα και $\dot{u}_i$ το διάνυσμα του ρυθμού μετατόπισης, $\dot{\varepsilon}^{in}_{ij}$ ο μη ελαστικός ρυθμός παραμόρφωσης και $\dot{T}$ ο ρυθμός θερμοκρασίας.

Οι συνοριακές συνθήκες μπορεί να είναι:

$$\dot{\tau}_i = \dot{p}_i \quad \text{στο} \quad \Gamma_\tau \tag{4.2}$$

$$\dot{u}_i = \dot{v}_i \quad \text{στο} \quad \Gamma_u$$

όπου $\dot{p}_i$ είναι η τιμή του ρυθμού ελκυστή $\dot{\tau}_i$ στο σύνορο Γ_τ και $\dot{v}_i$ είναι το διάνυσμα του ρυθμού μετατόπισης στο υπόλοιπο του συνόρου, Γ_u.

Η ολοκληρωτική έκφραση της λύσης για ένα σημείο p έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\dot{u}_i(p) = \int_\Gamma [U_{ij}(p,Q)\dot{\tau}_j(Q) - T_{ij}(p,Q)\dot{u}_j(Q)]d\Gamma + \int_\Omega U_{ij}(p,q)\dot{F}_j(q)d\Omega$$

$$+\int_\Omega [\tilde{\Sigma}_{jki}(p,q)\dot{\varepsilon}^{in}_{jk}(q) + \tilde{\tilde{\Sigma}}_{jki}(p,q)\delta_{jk}a\dot{T}(q)]d\Omega \tag{4.3}$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, P και Q σημεία στο σύνορο, p και q εσωτερικά σημεία, Γ και Ω είναι το σύνορο και η επιφάνεια του σώματος αντίστοιχα. Τα kernels

$U_{ij}, T_{ij}, \tilde{\Sigma}_{jki}$ και $\tilde{\tilde{\Sigma}}_{jki}$ είναι γνωστές ιδιόμορφες λύσεις [15] λόγω σημειακής φόρτισης σε ένα άπειρο ελαστικό στερεό σε επίπεδη παραμόρφωση.

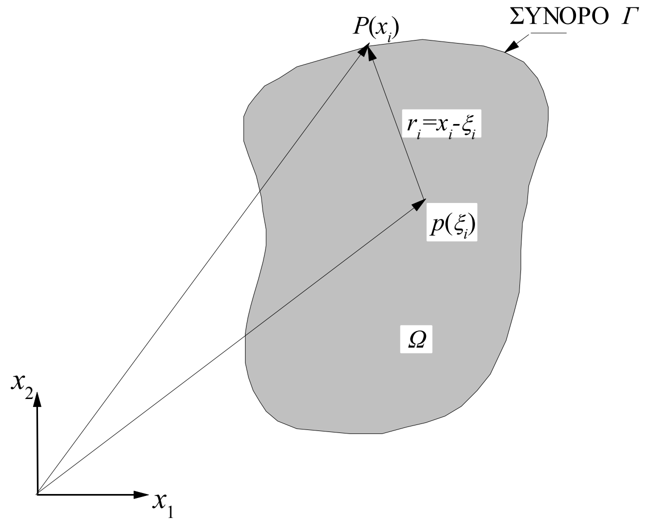
$$U_{ij} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G}\,[\delta_{ij}(3-4\nu)\ln r - r_{,i}r_{,j}] \tag{4.4}$$

$$T_{ij} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\,\{\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(r_{,j}n_i - r_{,i}n_j)\} \tag{4.5}$$

$$\tilde{\Sigma}_{jki} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}[(1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ki}r_{,j}) - \delta_{jk}r_{,i} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \tag{4.6}$$

$$\tilde{\tilde{\Sigma}}_{jki} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}[(1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ki}r_{,j}) - (1-3\nu)\delta_{jk}r_{,i} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \tag{4.7}$$

όπου r είναι η απόσταση μεταξύ ενός σημείου $P(x_i)$ και του σημείου μοναδιαίας φόρτισης $p(\xi_i)$, το κόμμα δηλώνει την παράγωγο ως προς x_i και n είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα.



Σχήμα 4.1: Γεωμετρικοί όροι.

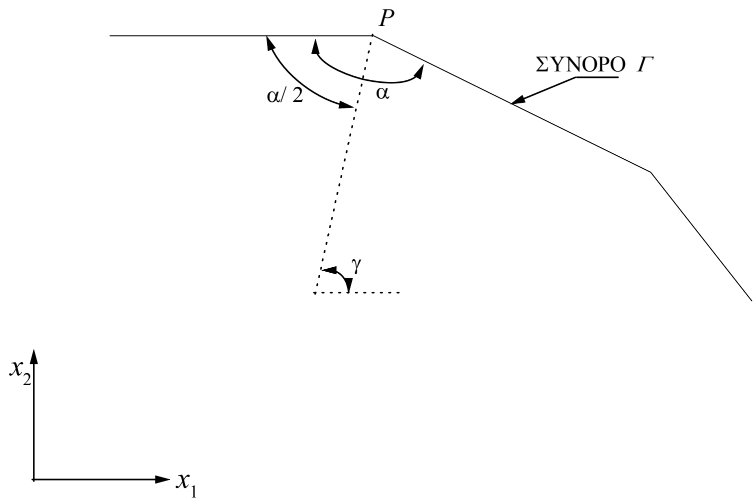
Η διατύπωση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης για προβλήματα πλαστικότητας περιέχει μια εξίσωση ανάλογη της (4.3) όπου ο πλαστικός ρυθμός παραμόρφωσης εμφανίζεται στη θέση του μη ελαστικού ρυθμού παραμόρφωσης. Η ουσιώδης διαφορά μεταξύ των προβλημάτων πλαστικότητας και ιξωδοπλαστικότητας είναι ότι στην πρώτη περίπτωση ο πλαστικός ρυθμός παραμόρφωσης είναι συνάρτηση και της τάσης και του ρυθμού της και έτσι το τελευταίο ολοκλήρωμα στην ανάλογη σχέση της (4.3) δεν μπορεί να υπολογισθεί άμεσα σε ένα ορισμένο χρόνο ακόμη και αν οι τάσεις είναι γνωστές στο χρόνο αυτό. Συνεπώς επαναληπτικές μέθοδοι είναι αναγκαίες πράγμα που οδηγεί σε υπολογιστικές δυσκολίες. Η ύπαρξη συνθηκών διαρροής και ειδικών κριτηρίων οδηγεί σε περαιτέρω υπολογιστικά προβλήματα.

Τέτοια προβλήματα δεν ανακύπτουν με τη χρήση της θεωρίας των εσωτερικών μεταβλητών στην ιξωδοπλαστικότητα καθώς το τελευταίο επιφανειακό ολοκλήρωμα στην εξίσωση (4.3) μπορεί εύκολα να αποτιμηθεί σε κάθε χρονική στιγμή όταν είναι γνωστές οι τάσεις και οι εσωτερικές μεταβλητές σε αυτόν το χρόνο. Αυτό το χαρακτηριστικό κάνει τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων πολύ ελκυστική για αυτά τα προβλήματα. Η θερμομηχανική σύζευξη αγνοείται και έτσι το πεδίο θερμοκρασιών στο σώμα ευρίσκεται εκ των προτέρων για όλο το χρόνο λύνοντας μια μη συζευγμένη εξίσωση διάχυσης. Επίσης οι μαζικές δυνάμεις υποτίθεται ότι περιγράφονται στο χώρο και το χρόνο.

Το ολοκλήρωμα στο σύνορο Γ στην εξίσωση (4.3) δεν μπορεί να αποτιμηθεί άμεσα καθώς ο ρυθμός των μετατοπίσεων και των ελκυστών δεν είναι εκ των προτέρων γνωστός σε όλο το σύνορο. Ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων για τις άγνωστες συνιστώσες του ρυθμού των μετατοπίσεων και των ελκυστών στο σύνορο προκύπτει παίρνοντας το όριο καθώς το σημείο p του Ω προσεγγίζει ένα αυθαίρετο σημείο P του Γ. Η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση στο σύνορο (για $\dot{F}_j = 0$) είναι:

$$(\delta_{ij} - C_{ij})\dot{u}_i(P) = \int_{\Gamma} [U_{ij}(P,Q)\dot{\tau}_j(Q) - T_{ij}(P,Q)\dot{u}_j(Q)]d\Gamma + \int_{\Omega} [\widetilde{\Sigma}_{jki}(P,q)\dot{\varepsilon}^{in}_{jk}(q) +$$
$$\widetilde{\widetilde{\Sigma}}_{jki}(P,q)\delta_{jk} a\dot{T}(q)]d\Omega \qquad (4.8)$$

όπου C_{ij} είναι γνωστές συναρτήσεις [115] της περιεχόμενης γωνίας α στο σημείο P του συνόρου και της γωνίας γ μεταξύ της διχοτόμου της γωνίας α και του άξονα x_1 (Σχήμα 4.2):



Σχήμα 4.2: Ορισμός γωνιών *α* και *γ*.

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{a}{2\pi} + \frac{\cos 2\gamma \sin a}{4\pi(1-\nu)} \\
C_{12} &= -\frac{\sin 2\gamma \sin a}{4\pi(1-\nu)} \\
C_{22} &= \frac{a}{2\pi} - \frac{\cos 2\gamma \sin a}{4\pi(1-\nu)}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Στην περίπτωση ομαλής καμπύλης στο *P* ($\alpha = \pi$) ο τανυστής $\delta_{ij} - C_{ij}$ είναι διαγώνιος με τιμές ½.

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις (4.8) πρέπει να επιλυθούν για τις άγνωστες συνιστώσες του ρυθμού των μετατοπίσεων και των ελκυστών στο σύνορο. Αυτό μπορεί να γίνει αναλυτικά για προβλήματα με απλή γεωμετρία και φόρτιση, διαφορετικά πρέπει να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές μέθοδοι.

Όταν υπολογισθούν οι άγνωστες τιμές του ρυθμού των μετατοπίσεων και των ελκυστών σε ολόκληρο το σύνορο τότε η εξίσωση (4.3) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ρυθμού των μετατοπίσεων στο εσωτερικό του σώματος. Οι ρυθμοί των τάσεων μπορούν να ευρεθούν με τη χρήση της εξίσωσης:

$$\dot{\sigma}_{ij} = G[(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \frac{2\nu}{1-2\nu}\dot{u}_{k,k}\delta_{ij} - 2\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}a\dot{T}\delta_{ij}] \tag{4.10}$$

και την παραγώγιση της εξίσωσης (4.3) :

$$\dot{\sigma}_{ij}(p)=\int_{\Gamma}[V_{ijk}(p,Q)\dot{\tau}_k(Q)-T_{ijk}(p,Q)\dot{u}_k(Q)]d\Gamma+\int_{\Omega}V_{ijk}(p,q)\dot{F}_k(q)d\Omega\text{ -}2G\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}(p)\text{-}$$

$$3K\alpha\dot{T}(p)\delta_{ij}+\int_{\Omega}[\tilde{\Sigma}_{ijkl}(p,q)\dot{\varepsilon}_{kl}^{in}(q)+\tilde{\tilde{\Sigma}}_{ijkl}(p,q)\delta_{kl}a\dot{T}(q)]d\Omega \tag{4.11}$$

όπου K είναι το μέτρο όγκου και [15] :

$$V_{ijk}=\frac{1}{4\pi(1-v)r}[(1-2v)(\delta_{ki}r_{,j}+\delta_{jk}r_{,i}-\delta_{ij}r_{,k})+2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \tag{4.12}$$

$$\Sigma_{ijkl}=\frac{G}{2\pi(1-v)r^2}[2(1-2v)(\delta_{ij}r_{,k}r_{,l}+\delta_{kl}r_{,i}r_{,j})+2v(\delta_{li}r_{,j}r_{,k}+\delta_{jk}r_{,l}r_{,i}+\delta_{ik}r_{,l}r_{,j}+\delta_{jl}r_{,i}r_{,k})\text{ -}$$

$$8\,r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l}+(1-2v)(\delta_{ik}\delta_{lj}+\delta_{jk}\delta_{li})-(1-4v)\delta_{ij}\delta_{kl}] \tag{4.13}$$

$$\tilde{\Sigma}_{ijkl}=\Sigma_{ijkl}+\frac{G}{2\pi(1-v)r^2}(4vr_{,i}r_{,j}\delta_{kl}-2v\delta_{ij}\delta_{kl}) \tag{4.14}$$

$$\tilde{\tilde{\Sigma}}_{ijkl}=\Sigma_{ijkl}+\frac{G}{2\pi(1-v)r^2}(-2vr_{,i}r_{,j}\delta_{kl}+v\delta_{ij}\delta_{kl}) \tag{4.15}$$

$$T_{ijk}=\Sigma_{ijkl}\,n_l \tag{4.16}$$

4.1.2 Επίπεδη ένταση

Η διατύπωση για την επίπεδη ένταση είναι ανάλογη της επίπεδης παραμόρφωσης. Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις του Navier είναι [107]:

$$\dot{u}_{i,kk}+\frac{1+v}{1-v}\dot{u}_{k,ki}=-\frac{\dot{F}_i}{G}+2\dot{\varepsilon}_{ij,j}^{in}+\frac{2v}{1-v}\dot{\varepsilon}_{kk,i}^{in}+\frac{2(1+v)}{1-v}(\alpha\dot{T})_{,i} \tag{4.17}$$

όπου $\dot{\varepsilon}_{kk}^{in}=0$

Η εξίσωση του ρυθμού μετατοπίσεων είναι για το εσωτερικό και το σύνορο αντίστοιχα:

$$\dot{u}_i(p)=\int_{\Gamma}[U_{ij}(p,Q)\dot{\tau}_j(Q)-T_{ij}(p,Q)\dot{u}_j(Q)]d\Gamma+\int_{\Omega}U_{ij}(p,q)\dot{F}_j(q)d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}\Sigma_{jki}(p,q)[\dot{\varepsilon}_{jk}^{in}(q)+\delta_{jk}a\dot{T}(q)]d\Omega \tag{4.18}$$

$$(\delta_{ij}-C_{ij})\dot{u}_i(P)=\int_{\Gamma}[U_{ij}(P,Q)\dot{\tau}_j(Q)-T_{ij}(P,Q)\dot{u}_j(Q)]d\Gamma+\int_{\Omega}\Sigma_{jki}(P,q)[\dot{\varepsilon}_{jk}^{in}(q)+$$

$$\delta_{jk}a\dot{T}(q)]d\Omega \tag{4.19}$$

Τα kernels U_{ij} και T_{ij} δίδονται από τις εξισώσεις (4.4), (4.5) αντίστοιχα με αντικατάσταση του ν με $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$.

$$\Sigma_{jki} = -\frac{1}{4\pi(1-\bar{\nu})r}[(1-2\bar{\nu})(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ki}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \tag{4.20}$$

και η εξίσωση του ρυθμού των τάσεων είναι:

$$\dot{\sigma}_{ij} = G[(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \frac{2\nu}{1-\nu}\dot{u}_{k,k}\delta_{ij} - 2\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}a\dot{T}\delta_{ij}]$$

(4.21)

$$\dot{\sigma}_{ij}(p) = \int_{\Gamma}[V_{ijk}(p,Q)\dot{\tau}_k(Q) - T_{ijk}(p,Q)\dot{u}_k(Q)]d\Gamma + \int_{\Omega} V_{ijk}(p,q)\dot{F}_k(q)d\Omega \text{ -}2G\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}(p)\text{-}$$

$$\frac{2G}{1-2\bar{\nu}}\alpha\dot{T}(p)\delta_{ij} + \int_{\Omega}\Sigma_{ijkl}(p,q)[\dot{\varepsilon}_{kl}^{in}(q) + \delta_{kl}a\dot{T}(q)]d\Omega \tag{4.22}$$

όπου το kernel Σ_{ijkl} έχει την ίδια μορφή με την (4.13) με αντικατάσταση του ν με το $\bar{\nu}$ και

$$V_{ijk} = \text{-}\Sigma_{ijk} \tag{4.23}$$

$$T_{ijk} = \Sigma_{ijkl}\, n_l \tag{4.24}$$

4.2 Αριθμητική επίλυση

Συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις

Γραμμικά συνοριακά στοιχεία

Το σύνορο Γ ενός επίπεδου σώματος διαιρείται σε N_R συνοριακά στοιχεία και το εσωτερικό του σε n_{IR} εσωτερικά στοιχεία. Οι συνιστώσες των ρυθμών των μετατοπίσεων και των ελκυστών θεωρούνται ότι μεταβάλλονται γραμμικά στα συνοριακά στοιχεία και οι συνιστώσες των ρυθμών των μετατοπίσεων, των τάσεων των παραμορφώσεων και της θερμοκρασίας υποτίθεται ότι έχουν την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία του κάθε εσωτερικού στοιχείου. Οι τιμές των ρυθμών των μετατοπίσεων και των ελκυστών στο σύνορο προσδιορίζονται στους κόμβους των συνοριακών στοιχείων οι οποίοι ευρίσκονται στα άκρα τους και οι τιμές των ρυθμών των μετατοπίσεων, των τάσεων, των παραμορφώσεων και της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του σώματος προσδιορίζονται στο κέντρο βάρους των εσωτερικών στοιχείων.

Υποτίθεται συνέχεια των ρυθμών των μετατοπίσεων καθώς δύο γειτονικά συνοριακά στοιχεία μοιράζονται τον ίδιο κόμβο και επιτρέπεται ασυνέχεια στους ρυθμούς των ελκυστών του συνόρου. Η δυσκολία σε αυτή την ασυνέχεια αντιμετωπίζεται αν ορισθούν δύο κόμβοι πολύ κοντά ο ένας στον άλλο και υποθέτοντας διαφορετικές τιμές των ρυθμών των ελκυστών στον καθένα. Αυτό έχει ως συνέπεια την πολύ γρήγορη γραμμική μεταβολή στους ρυθμούς των ελκυστών του συνόρου η οποία προσεγγίζει την ασυνέχεια καθώς οι δύο κόμβοι και οι ρυθμοί των μετατοπίσεων τους συμπίπτουν. Για την αποφυγή των αριθμητικών δυσκολιών οι οποίες ανακύπτουν από τα πολύ μικρά συνοριακά στοιχεία και τη δυσχέρεια που προκαλείται στη διαμόρφωση του μοντέλου τα ολοκληρώματα υπολογίζονται χωριστά. Τα συνοριακά στοιχεία μηδενικού μήκους μπορούν να προστεθούν σε κάθε σημείο όπου υπάρχει άλμα στην τιμή του ρυθμού των ελκυστών.

Θεωρώντας ότι το σημείο P ευρίσκεται σε ένα συνοριακό κόμβο και ότι τα ολοκληρώματα είναι αθροίσματα των ολοκληρωμάτων σε κάθε τμήμα του συνόρου η εξίσωση (4.19) γράφεται [115]:

$$(\delta_{ij} - C_{ij})\dot{u}_i(P) = \sum_{R=1}^{NSEG} \int_{\Delta\Gamma_R} U_{ij}(P, x_R)\dot{\tau}_j(x_R) d\Gamma_R - \sum_{R=1}^{NSEG} \int_{\Delta\Gamma_R} T_{ij}(P, x_R)\dot{u}_j(x_R) d\Gamma_R +$$

$$\sum_{IR=1}^{NELM} [\dot{\varepsilon}_{jk}^{in}(IR) + \delta_{jk} a\dot{T}(IR)] \int_{\Delta\Omega_{IR}} \Sigma_{jki}(P, x_{IR}) d\Omega_{IR} \tag{4.25}$$

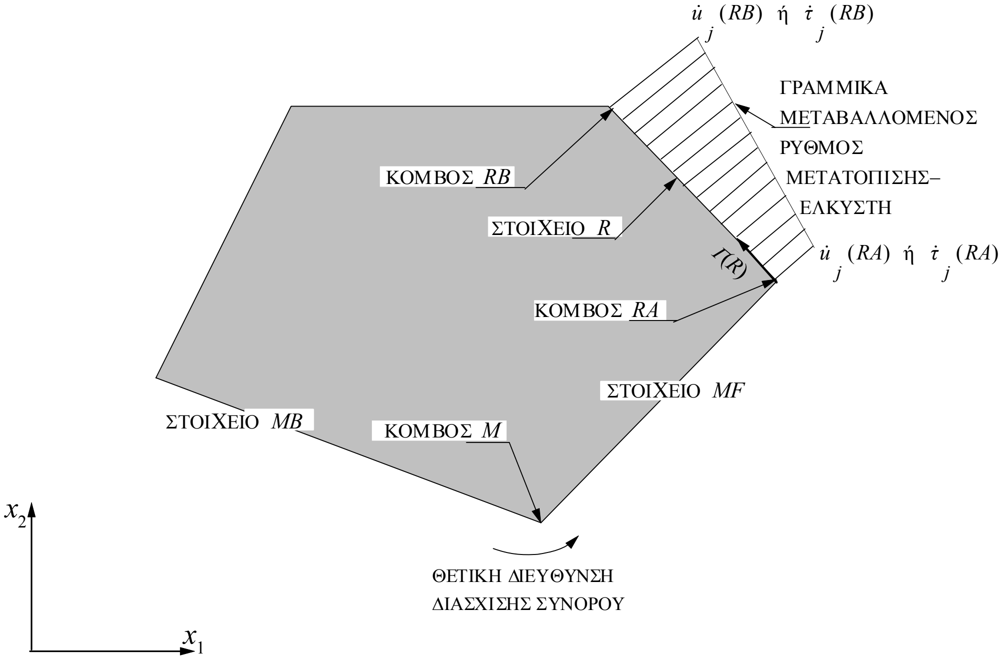
όπου $NSEG$ και $NELM$ είναι ο συνολικός αριθμός των συνοριακών και των εσωτερικών στοιχείων αντίστοιχα, $\Delta\Gamma_R$ είναι το μήκος του αντίστοιχου συνοριακού στοιχείου και $\Delta\Omega_{IR}$ η επιφάνεια του εσωτερικού στοιχείου.

Χρησιμοποιώντας τη γραμμική απεικόνιση των ρυθμών των μετατοπίσεων και των ελκυστών στο σύνορο [115] (Σχήμα 4.3) προκύπτει ότι στο συνοριακό στοιχείο R είναι:

$$\dot{u}_j(R) = \frac{\dot{u}_j(RB) - \dot{u}_j(RA)}{\Delta\Gamma_R}\Gamma(R) + \dot{u}_j(RA)$$

$$\dot{\tau}_j(R) = \frac{\dot{\tau}_j(RB) - \dot{\tau}_j(RA)}{\Delta\Gamma_R}\Gamma(R) + \dot{\tau}_j(RA)$$

όπου $\Delta\Gamma_R$ και $\Gamma(R)$ είναι το μήκος του συνοριακού στοιχείου R και η παράμετρος του εφαπτομενικού μήκους αντίστοιχα.



Σχήμα 4.3: Γραμμική μεταβολή των ρυθμών των μετατοπίσεων και των ελκυστών στο σύνορο (Riccardella [115]).

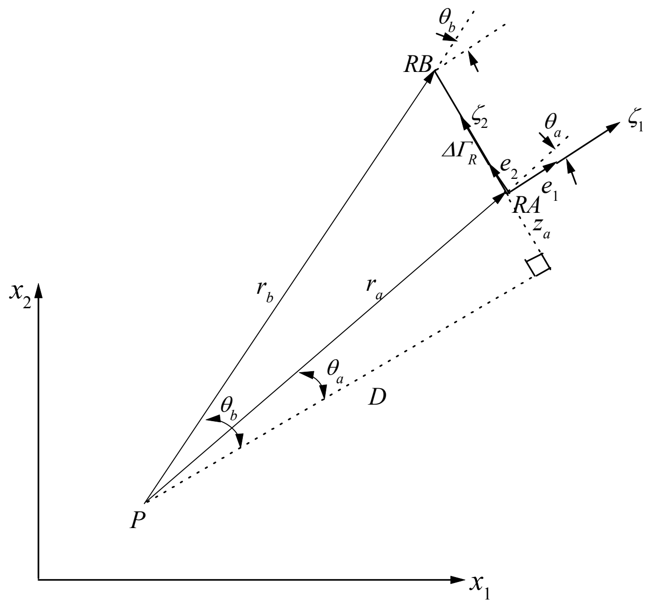
Η εξίσωση (4.25) μπορεί να γραφεί:

$$(\delta_{ij} - C_{ij})\dot{u}_i(P) = \sum_{R=1}^{NSEG}[\frac{\dot{\tau}_j(RB)-\dot{\tau}_j(RA)}{\Delta\Gamma_R}\int_{\Delta\Gamma_R} U_{ij}(P,R)\Gamma(R)d\Gamma_R + \dot{\tau}_j(RA)\int_{\Delta\Gamma_R} U_{ij}(P,R)d\Gamma_R]$$

$$-\sum_{R=1}^{NSEG}[\frac{\dot{u}_j(RB)-\dot{u}_j(RA)}{\Delta\Gamma_R}\int_{\Delta\Gamma_R} T_{ij}(P,R)\Gamma(R)d\Gamma_R + \dot{u}_j(RA)\int_{\Delta\Gamma_R} T_{ij}(P,R)d\Gamma_R] + \sum_{IR=1}^{NELM}[\dot{\varepsilon}^{in}_{jk}(IR) +$$

$$\delta_{jk}a\dot{T}(IR)]\int_{\Delta\Omega_{IR}} \Sigma_{jki}(P,x_{IR})d\Omega_{IR} \qquad (4.26)$$

όπου *RA* δηλώνει τον κόμβο που προηγείται του στοιχείου *R* και *RB* δηλώνει τον κόμβο που ακολουθεί όταν το σύνορο διασχίζεται θετικά, αντίθετα με τη διεύθυνση των δεικτών του ρολογιού. Επειδή οι τιμές των μετατοπίσεων και των ελκυστών προσδιορίζονται στους κόμβους είναι προτιμότερο να γίνει απαλοιφή της αναφοράς ως προς τα στοιχεία. Θέτοντας το στοιχείο πίσω από ένα συνοριακό κόμβο *M* ως *MB* και το στοιχείο μπροστά από αυτόν ως MF καθώς το σύνορο διασχίζεται κατά τη θετική φορά η εξίσωση (4.26) μπορεί να γραφεί ως άθροιση πάνω στους κόμβους.



Σχήμα 4.4: Συμβολισμοί χρησιμοποιούμενοι για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων (Riccardella [115]).

Χρησιμοποιώντας το τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ζ_1,ζ_2) με μοναδιαία διανύσματα (e_1, e_2) [115] (Σχήμα 4.4) που προκύπτει από την περιστροφή του συστήματος (x_1, x_2) ώστε το ζ_1 να ευρίσκεται στη διεύθυνση του εξωτερικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στο συνοριακό στοιχείο και ζ_2 είναι η θετική εφαπτομενική διεύθυνση ισχύει ότι:

$$n = e_1 \quad (n_i = e_{1i})$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial \zeta_1} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial \Gamma} = \frac{\partial r}{\partial \zeta_2} = \sin\theta$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial \zeta_1}\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial r}{\partial \zeta_2}\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_i}\right) = e_{1i}\cos\theta + e_{2i}\sin\theta$$

$$r = \frac{D}{\cos\theta}$$

$$\Gamma(R) = D\tan\theta - z_a$$

$$d\Gamma_R = \frac{D}{\cos^2\theta}d\theta$$

Τα ολοκληρώματα πάνω στο σύνορο στην εξίσωση (4.26) μπορούν να υπολογισθούν σε συνάρτηση με την κάθετη απόσταση D του κόμβου από το συνοριακό στοιχείο και τη γωνία θ μεταξύ της D και του διανύσματος r [115].
Στην ειδική περίπτωση που D= 0 η γωνία θ γίνεται 3π/2 ή π/2 ανάλογα με το αν είναι ο κόμβος P πριν ή μετά το στοιχείο που γίνεται η ολοκλήρωση.

$$\Gamma(R) = (\mathrm{SGN})\,(r) - z_a$$

$$d\Gamma_R = (\mathrm{SGN})\,dr$$

όπου SGN=$\sin\theta$ ισούται με –1 ή +1 ανάλογα με το αν είναι ο κόμβος P πριν ή μετά το στοιχείο που γίνεται η ολοκλήρωση.

Στην περίπτωση συνοριακού στοιχείου μηδενικού μήκους ισχύουν οι σχέσεις:

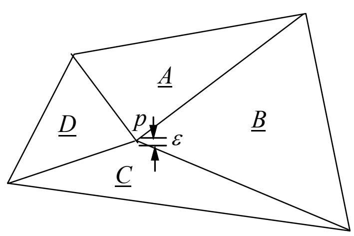
$$r_b^2 = r_a^2 + (\Delta\Gamma_R)^2 + 2\Delta\Gamma_R z_a$$

$$\tan\theta_b = \frac{z_a + \Delta\Gamma_R}{D}$$

$$\theta_b - \theta_a = \frac{\Delta\Gamma_R D}{D^2 + z_a^2 + \Delta\Gamma_R z_a} \quad \text{για μικρή γωνία } \theta_b - \theta_a$$

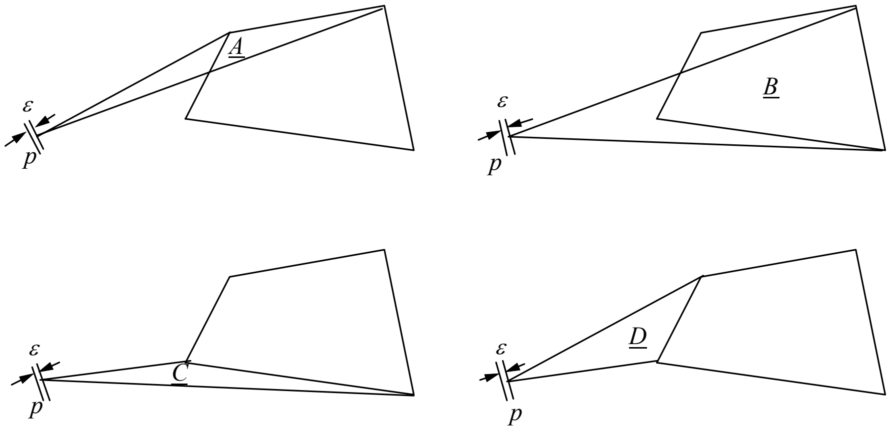
Οι παράμετροι που αναφέρονται στο άκρο b (r_b και θ_b) μπορούν να απαλειφθούν και να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα καθώς το $\Delta\Gamma_R \rightarrow 0$.

Τα εσωτερικά στοιχεία θεωρούνται γενικά πολύγωνα μοναδιαίου πάχους με οποιοδήποτε αριθμό πλευρών. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στο στοιχείο ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ολοκληρωμάτων πάνω στα τρίγωνα A, B, C και D άσχετα αν το βασικό σημείο p ευρίσκεται εντός ή εκτός του εσωτερικού στοιχείου (Σχήμα 4.5 α-β).



α) ΒΑΣΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ p ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ IR

Σχήμα 4.5: Τεχνική ολοκλήρωσης για εσωτερικά στοιχεία (Riccardella [115]).



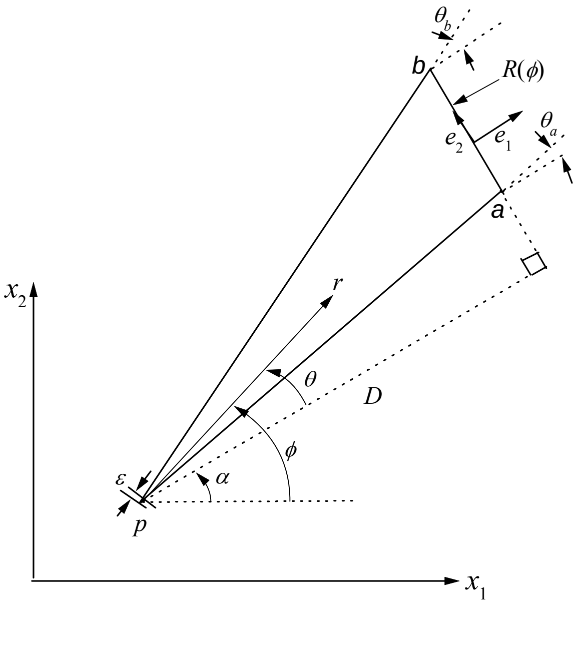
β) ΒΑΣΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ *p* ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ *IR*

Σχήμα 4.5: Τεχνική ολοκλήρωσης για εσωτερικά στοιχεία (Riccardella [115]).

Και στις δύο περιπτώσεις μια μικρή περιοχή ακτίνας ε γύρω από το βασικό σημείο p εξαιρείται λόγω της ιδιόμορφης φύσης των kernels Σ_{jki} και Σ_{ijkl} σε αυτό το σημείο.

Εισάγοντας σύστημα πολικών συντεταγμένων (r,φ) στο σημείο p όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.6 μπορεί να γραφεί:

$$\Delta\Sigma_{jki}(\mathrm{p},\underline{\mathrm{A}}) = \int_{\underline{A}} \Sigma_{jki}(r)\,d\Omega_{\underline{A}} = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\int_{\varepsilon}^{R(\varphi)} \Sigma_{jki}(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$



Σχήμα 4.6: Συμβολισμοί για τον υπολογισμό των επιφανειακών ολοκληρωμάτων (Riccardella [115]).

Τα επιφανειακά ολοκληρώματα στην εξίσωση (4.26) μπορούν να υπολογισθούν σε συνάρτηση με την κάθετη απόσταση D του σημείου p από την πλευρά ab του εσωτερικού στοιχείου και τη γωνία θ μεταξύ της D και του διανύσματος r.

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \sin\varphi$$

$$\varphi = \theta + \alpha$$

$$d\varphi = d\theta$$

$$R(\varphi) = D/\cos\theta$$

Τελικά το ολοκληρούμενο kernel $\Delta\Sigma_{jki}(P, x_{IR})$ για το συνοριακό κόμβο P προς το εσωτερικό στοιχείο IR ευρίσκεται με την άθροιση πάνω στα τέσσερα τρίγωνα:

$$\Delta\Sigma_{jki}(P, x_{IR}) = \Delta\Sigma_{jki}(P,\underline{A}) + \Delta\Sigma_{jki}(P,\underline{B}) + \Delta\Sigma_{jki}(P,\underline{C}) + \Delta\Sigma_{jki}(P,\underline{D}).$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζεται και το kernel $\Delta\Sigma_{ijkl}(p, x_{IR})$.

Η εξίσωση (4.26) γράφεται:

$$(\delta_{ij} - C_{ij})\dot{u}_i(P) = \sum_{M=1}^{NNOD} \dot{\tau}_j(M)[\frac{1}{\Delta\Gamma_{MB}}\int_{\Delta\Gamma_{MB}} U_{ij}(P,MB)\Gamma(MB)d\Gamma_{MB} -$$

$$\frac{1}{\Delta\Gamma_{MF}}\int_{\Delta\Gamma_{MF}} U_{ij}(P,MF)\Gamma(MF)d\Gamma_{MF} + \int_{\Delta\Gamma_{MF}} U_{ij}(P,MF)d\Gamma_{MF}\,] -$$

$$\sum_{M=1}^{NNOD} \dot{u}_j(M)[\frac{1}{\Delta\Gamma_{MB}}\int_{\Delta\Gamma_{MB}} T_{ij}(P,MB)\Gamma(MB)d\Gamma_{MB} - \frac{1}{\Delta\Gamma_{MF}}\int_{\Delta\Gamma_{MF}} T_{ij}(P,MF)\Gamma(MF)d\Gamma_{MF} +$$

$$\int_{\Delta\Gamma_{MF}} T_{ij}(P,MF)d\Gamma_{MF}\,] + \sum_{IR=1}^{NELM}[\dot{\varepsilon}_{jk}^{in}(IR) + \delta_{jk} a\dot{T}(IR)]\int_{\Delta\Omega_{IR}} \Sigma_{jki}(P, x_{IR})d\Omega_{IR}$$

(4.27)

όπου $NNOD$ είναι ο αριθμός των κόμβων των συνοριακών στοιχείων.

Η αναλυτική έκφραση των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης (4.27) δίδεται στο παράρτημα ΙΙ, με τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$\Delta U_{ij}^{B}(M,P)=\frac{1}{\Delta\Gamma_{MB}}\int_{\Delta\Gamma_{MB}} U_{ij}(P,MB)\Gamma(MB)d\Gamma_{MB}$$

$$\Delta U_{ij}^{F}(M,P)=\frac{1}{\Delta\Gamma_{MF}}\int_{\Delta\Gamma_{MF}} U_{ij}(P,MF)\Gamma(MF)d\Gamma_{MF}$$

$$\Delta\widetilde{U}_{ij}^{F}(M,P)=\int_{\Delta\Gamma_{MF}} U_{ij}(P,MF)d\Gamma_{MF}$$

$$\Delta T_{ij}^{B}(M,P)=\frac{1}{\Delta\Gamma_{MB}}\int_{\Delta\Gamma_{MB}} T_{ij}(P,MB)\Gamma(MB)d\Gamma_{MB}$$

$$\Delta T_{ij}^{F}(M,P)=\frac{1}{\Delta\Gamma_{MF}}\int_{\Delta\Gamma_{MF}} T_{ij}(P,MF)\Gamma(MF)d\Gamma_{MF}$$

$$\Delta\widetilde{T}_{ij}^{F}(M,P)=\int_{\Delta\Gamma_{MF}} T_{ij}(P,MF)d\Gamma_{MF}$$

$$\Delta\Sigma_{jki}(IR,P)=\int_{\Delta\Omega_{IR}} \Sigma_{jki}(P,x_{IR})d\Omega_{IR}$$

η εξίσωση (4.27) γίνεται:

$$(\delta_{ij}-C_{ij})\dot{u}_i(P)=\sum_{M=1}^{NNOD}\dot{\tau}_j(M)\,[\,\Delta U_{ij}^{B}(M,P)-\Delta U_{ij}^{F}(M,P)+\Delta\widetilde{U}_{ij}^{F}(M,P)\,]$$

$$-\sum_{M=1}^{NNOD}\dot{u}_j(M)\,[\,\Delta T_{ij}^{B}(M,P)-\Delta T_{ij}^{F}(M,P)+\Delta\widetilde{T}_{ij}^{F}(M,P)\,]+$$

$$\sum_{IR=1}^{NELM}[\dot{\varepsilon}_{jk}^{in}(IR)+\delta_{jk}a\dot{T}(IR)]\;\Delta\Sigma_{jki}(IR,P) \tag{4.28}$$

Η εξίσωση (4.28) μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη μητρωική μορφή:

$$[A]\,[\,\dot{u}\,]=[B]\,[\,\dot{\tau}\,]+[\,\dot{b}\,]+[\,\dot{b}_T\,]$$

όπου:

$$A_{ij}(M,P)=(\delta_{ij}-C_{ij})I(M,P)+\Delta T_{ij}^{B}(M,P)-\Delta T_{ij}^{F}(M,P)+\Delta\widetilde{T}_{ij}^{F}(M,P)$$

$$B_{ij}(M,P)=\Delta U_{ij}^{B}(M,P)-\Delta U_{ij}^{F}(M,P)+\Delta\widetilde{U}_{ij}^{F}(M,P)$$

και τα διανύσματα $[\,\dot{b}\,]$ και $[\,\dot{b}_T\,]$ περιέχουν τους ολοκληρωτικούς όρους για το ρυθμό της μη ελαστικής παραμόρφωσης και θερμοκρασίας αντίστοιχα. Το διάνυσμα $[\,\dot{b}\,]$ είναι γνωστό σε κάθε χρονική στιγμή μέσω της καταστατικής εξίσωσης και το διάνυσμα $[\,\dot{b}_T\,]$ είναι γνωστό με την επίλυση της εξίσωσης διάχυσης. Επί πλέον είναι γνωστές οι μισές συνιστώσες των ρυθμών των μετατοπίσεων και των ελκυστών στο σύνορο από τις συνοριακές συνθήκες και μένουν να υπολογισθούν οι υπόλοιπες από τις 2**NNOD* εξισώσεις.

Όταν υπολογισθούν οι ρυθμοί των μετατοπίσεων και των ελκυστών στο σύνορο τότε μπορούν να υπολογισθούν οι ρυθμοί των μετατοπίσεων σε κάθε εσωτερικό σημείο p με διακριτοποίηση της εξίσωσης (4.18) :

$$\dot{u}_i(p) = \sum_{M=1}^{NNOD} \dot{\tau}_j(M)[\frac{1}{\varDelta\varGamma_{MB}}\int_{\varDelta\varGamma_{MB}} U_{ij}(p,MB)\varGamma(MB)d\varGamma_{MB} -$$

$$\frac{1}{\varDelta\varGamma_{MF}}\int_{\varDelta\varGamma_{MF}} U_{ij}(p,MF)\varGamma(MF)d\varGamma_{MF} + \int_{\varDelta\varGamma_{MF}} U_{ij}(p,MF)d\varGamma_{MF}\ ]-$$

$$\sum_{M=1}^{NNOD} \dot{u}_j(M)[\frac{1}{\varDelta\varGamma_{MB}}\int_{\varDelta\varGamma_{MB}} T_{ij}(p,MB)\varGamma(MB)d\varGamma_{MB}\ -$$

$$\frac{1}{\varDelta\varGamma_{MF}}\int_{\varDelta\varGamma_{MF}} T_{ij}(p,MF)\varGamma(MF)d\varGamma_{MF} + \int_{\varDelta\varGamma_{MF}} T_{ij}(p,MF)d\varGamma_{MF}\ ]+$$

$$\sum_{IR=1}^{NELM}[\dot{\varepsilon}^{in}_{jk}(IR) + \delta_{jk}a\dot{T}(IR)]\int_{\varDelta\varOmega_{IR}} \varSigma_{jki}(p,x_{IR})d\varOmega_{IR} \qquad (4.29)$$

όπου τα kernels U_{ij}, T_{ij} και $\varSigma_{jki}$ υπολογίζονται σε σχέση με το εσωτερικό σημείο p. Οι τιμές $\dot{u}_j$ και $\dot{\tau}_j$ είναι γνωστές και το άθροισμα μπορεί να υπολογισθεί άμεσα.

Με διακριτοποίηση της εξίσωσης (4.22) μπορούν να υπολογισθούν οι ρυθμοί των τάσεων στο εσωτερικό:

$$\dot{\sigma}_{ij}(p) = \sum_{M=1}^{NNOD} \dot{\tau}_k(M)[\frac{1}{\varDelta\varGamma_{MB}}\int_{\varDelta\varGamma_{MB}} V_{ijk}(p,MB)\varGamma(MB)d\varGamma_{MB} -$$

$$\frac{1}{\varDelta\varGamma_{MF}}\int_{\varDelta\varGamma_{MF}} V_{ijk}(p,MF)\varGamma(MF)d\varGamma_{MF} + \int_{\varDelta\varGamma_{MF}} V_{ijk}(p,MF)d\varGamma_{MF}\ ]-$$

$$\sum_{M=1}^{NNOD} \dot{u}_k(M)[\frac{1}{\varDelta\varGamma_{MB}}\int_{\varDelta\varGamma_{MB}} T_{ijk}(p,MB)\varGamma(MB)d\varGamma_{MB}\ - \frac{1}{\varDelta\varGamma_{MF}}$$

$$\int_{\varDelta\varGamma_{MF}} T_{ijk}(p,MF)\varGamma(MF)d\varGamma_{MF} + \int_{\varDelta\varGamma_{MF}} T_{ijk}(p,MF)d\varGamma_{MF}\ ]+$$

$$\sum_{IR=1}^{NELM}[\dot{\varepsilon}^{in}_{kl}(IR) + \delta_{kl}a\dot{T}(IR)]\int_{\varDelta\varOmega_{IR}} \varSigma_{ijkl}(p,x_{IR})d\varOmega_{IR}\ \text{-}2G\,\dot{\varepsilon}^{in}_{ij}(p)\text{-}\frac{2G}{1-2\bar{v}}\,\alpha\,\dot{T}(p)\delta_{ij}$$

(4.30)

Η αναλυτική έκφραση των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης (4.30) δίδεται στο παράρτημα ΙΙ.

όπου:

$$\Delta D^B_{ijk}(M,p)=\frac{1}{\Delta\Gamma_{MB}}\int_{\Delta\Gamma_{MB}}V_{ijk}(p,MB)\Gamma(MB)d\Gamma_{MB}$$

$$\Delta D^F_{ijk}(M,p)=\frac{1}{\Delta\Gamma_{MF}}\int_{\Delta\Gamma_{MF}}V_{ijk}(p,MF)\Gamma(MF)d\Gamma_{MF}$$

$$\Delta\widetilde{D}^F_{ijk}(M,p)=\int_{\Delta\Gamma_{MF}}V_{ijk}(p,MF)d\Gamma_{MF}$$

$$\Delta S^B_{ijk}(M,p)=\frac{1}{\Delta\Gamma_{MB}}\int_{\Delta\Gamma_{MB}}T_{ijk}(p,MB)\Gamma(MB)d\Gamma_{MB}$$

$$\Delta S^F_{ijk}(M,p)=\frac{1}{\Delta\Gamma_{MF}}\int_{\Delta\Gamma_{MF}}S_{ijk}(p,MF)\Gamma(MF)d\Gamma_{MF}$$

$$\Delta\widetilde{S}^F_{ijk}(M,p)=\int_{\Delta\Gamma_{MF}}T_{ijk}(p,MF)d\Gamma_{MF}$$

$$\Delta\Sigma_{ijkl}(IR,p)=\int_{\Delta\Omega_{IR}}\Sigma_{ijkl}(p,x_{IR})d\Omega_{IR}$$

Η εξίσωση (4.30) γίνεται:

$$\dot{\sigma}_{ij}(p)=\sum_{M=1}^{NNOD}\dot{\tau}_k(M)[\,\Delta D^B_{ijk}(M,p)-\Delta D^F_{ijk}(M,p)+\Delta\widetilde{D}^F_{ijk}(M,p)\,]-\sum_{M=1}^{NNOD}\dot{u}_k(M)[\,\Delta S^B_{ijk}(M,p)$$

$$-\Delta S^F_{ijk}(M,p)+\Delta\widetilde{S}^F_{ijk}(M,p)\,]+\sum_{IR=1}^{NELM}[\dot{\varepsilon}^{in}_{kl}(IR)+\delta_{kl}a\dot{T}(IR)]\ \Delta\Sigma_{ijkl}(IR,p)-2G\dot{\varepsilon}^{in}_{ij}(p)-$$

$$\frac{2G}{1-2\overline{v}}\alpha\dot{T}(p)\delta_{ij} \tag{4.31}$$

4.3 Χρονική ολοκλήρωση

Η αρχική κατανομή των εσωτερικών μεταβλητών πρέπει να ορισθεί και η αρχική μη ελαστική παραμόρφωση είναι μηδέν. Επομένως η μόνη παραμόρφωση τη χρονική στιγμή μηδέν είναι η ελαστική και θερμική και οι αρχικές τάσεις και μετατοπίσεις ευρίσκονται από την επίλυση του αντίστοιχου θερμοελαστικού προβλήματος. Ο ρυθμός των μετατοπίσεων και των τάσεων τη χρονική στιγμή μηδέν, για παράδειγμα για την επίπεδη ένταση, ευρίσκεται από τις εξισώσεις (4.18), (4.19) και (4.22) και από την εξίσωση του ρυθμού της μη ελαστικής παραμόρφωσης και ο ρυθμός μεταβολής των εσωτερικών μεταβλητών υπολογίζεται από τις εξισώσεις που ισχύουν για το κάθε ιξωδοπλαστικό μοντέλο. Έτσι οι αρχικοί ρυθμοί όλων των σχετικών μεταβλητών είναι γνωστοί και οι τιμές τους σε ένα νέο χρόνο *t* ευρίσκονται με ολοκλήρωση ως προς το χρόνο χρησιμοποιώντας κατάλληλη αριθμητική διαδικασία. Οι νέες τάσεις και εσωτερικές μεταβλητές στο χρόνο t χρησιμοποιούνται τώρα για την εύρεση των ρυθμών σε αυτό το χρόνο και ούτω καθεξής συνεχίζεται η διαδικασία μέχρι τον επιθυμητό τελικό χρόνο. Με αυτό τον τρόπο ευρίσκονται οι μεταβλητές που ενδιαφέρουν σε συνάρτηση με το χρόνο.

Για τη διαδικασία της ολοκλήρωσης ως προς το χρόνο έχει επιλεγεί ένας αλγόριθμος τύπου Euler με χρονικό βήμα αυτόματου ελέγχου [27]. Η διαδικασία βασίζεται στη σύγκριση ενός κατάλληλα προσδιοριζόμενου λάθους e με οριζόμενα όρια λάθους $e_{\min}$ και $e_{\max}$. Επίσης πρέπει να ορισθεί το αρχικό χρονικό βήμα. Το $\nu_{\sigma\tau o}$ χρονικό βήμα στο χρόνο t_ν μπορεί να εξαχθεί στη βάση του εκτιμώμενου $E\Delta t_\nu$ σε σχέση με την απλή διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dt} = F(y,t) \tag{4.32}$$

Η τιμή του $y(t+\Delta t)$ σε συνάρτηση με το $y(t)$ είναι:

$$y(t+\Delta t) = y(t) + F(y,t)\Delta t \tag{4.33}$$

Ένα σύστημα τέτοιων εξισώσεων προκύπτει για τους ρυθμούς των μεταβλητών για όλους τους κόμβους. Το λάθος e_i για την $i_{\sigma\tau\eta}$ μεταβλητή σε αυτό το χρονικό βήμα είναι:

$$e_i = \frac{\Delta t \sum |\nabla F_\nu|}{\sum |y_\nu(t)|} \tag{4.34}$$

όπου $\nabla F_\nu = F_\nu - F_{\nu-1}$ η πρώτη προς τα πίσω διαφορά και η άθροιση εκτείνεται στις τιμές της $i_{\sigma\tau\eta\varsigma}$ μεταβλητής για όλους τους κόμβους και:

$$e = \max|e_i| \tag{4.35}$$

και ο αλγόριθμος προχωρεί ως εξής:

Αν $e_{\max} < e$ το $E\Delta t_\nu$ αντικαθίσταται από το $E\Delta t_\nu/2$ και επανυπολογίζεται το e

Αν $e_{\min} < e < e_{\max}$ τότε $E\Delta t_{\nu+1} = \Delta t_\nu$.

Αν $e \le e_{\min}$ τότε $E\Delta t_{\nu+1} = 2\Delta t_\nu$.

4.4 Παραδείγματα

Αριθμητική ανάλυση γίνεται για ένα επιμήκη παχύτοιχο κύλινδρο εσωτερικής διαμέτρου α και εξωτερικής β (Σχήμα 4.7) και για ένα πειραματικό θάλαμο προώθησης (Σχήμα 4.21) σε επίπεδη παραμόρφωση σε συνθήκες θερμο-ιξωδοπλαστικής παραμόρφωσης και κάτω από θερμική και μηχανική φόρτιση. Οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων των υλικών για τον 304 ανοξείδωτο χάλυβα, το 2,25 Cr-1Mo κράμα χάλυβα και το κράμα NARloy-Z χαλκού έχουν ληφθεί από τους Mukherjee [16], Arya [20] και Arya και Arnold [23] αντίστοιχα.

4.4.1 Αναλυτική λύση

Για λόγους σύγκρισης, τύποι των ρυθμών των τάσεων και παραμορφώσεων δίδονται για την περίπτωση του επιμήκους παχύτοιχου κυλίνδρου. Παρόμοιοι τύποι έχουν δοθεί από τους Kumar και Mukherjee [116], Cordts και Kollman [117] και Arya [20]. Η εξίσωση ισορροπίας του ρυθμού τάσης για την περίπτωση επιμήκους παχύτοιχου κυλίνδρου με εσωτερική και εξωτερική διάμετρο α και β αντίστοιχα, ο οποίος υποβάλλεται σε χρονικά εξαρτώμενη θερμική φόρτιση δίδεται σε πολικές συντεταγμένες r και θ από:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{\sigma}_r) = \dot{\sigma}_\theta \tag{4.36}$$

και η εξίσωση συμβιβαστού:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{\varepsilon}_\theta) = \dot{\varepsilon}_r \tag{4.37}$$

Ο συνολικός ρυθμός ακτινικής παραμόρφωσης είναι:

$$\dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_r^e + \dot{\varepsilon}_r^{in} + \dot{\varepsilon}^T = \frac{1}{E}[\dot{\sigma}_r - \nu(\dot{\sigma}_\theta + \dot{\sigma}_z)] + \dot{\varepsilon}_r^{in} + \alpha\dot{T} \tag{4.38}$$

με παρόμοια έκφραση και για τον ρυθμό εφαπτομενικής παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}_\theta$. Ο ρυθμός ανελαστικής παραμόρφωσης μπορεί να βρεθεί από την αντίστοιχη εξίσωση του ιξωδοπλαστικού μοντέλου.

Από την εξίσωση ισορροπίας και τις εκφράσεις για τους ρυθμούς παραμόρφωσης προκύπτει η εξίσωση:

$$\dot{\sigma}_r = -\frac{\alpha E}{r^2(1-\nu)}\int_\alpha^r \dot{T} r dr + \frac{E}{r^2(1-\nu^2)}\left[\int_\alpha^r r\psi(r)dr - \int_\alpha^r r(\dot{\varepsilon}_\theta^{in} + \nu\dot{\varepsilon}_z^{in})dr\right] + \left(\frac{r^2-\alpha^2}{r^2}\right)\frac{A}{2} + \frac{B}{r^2} \tag{4.39}$$

όπου A και B σταθερές της ολοκλήρωσης και

$$\psi(r) = \int_a^r \frac{\dot{\varepsilon}_r^{in} - \dot{\varepsilon}_\theta^{in}}{x} dx$$

η παραπάνω εξίσωση με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες:

$\dot{\sigma}_r = 0$ όταν $r = \alpha$ και $\dot{\sigma}_r = 0$ όταν $r = \beta$

δίδει την ακόλουθη έκφραση για τον ρυθμό της ακτινικής τάσης:

$$\dot{\sigma}_r = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(I_1 - \frac{r^2-\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}\frac{\beta^2}{r^2}I_2\right) + \frac{E(1-2\nu)}{2(1-\nu^2)}\frac{1}{r^2}\left(I_3 - \frac{r^2-\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}I_4\right) - \dot{p}\frac{\beta^2-r^2}{\beta^2-\alpha^2}\frac{\alpha^2}{r^2} - \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^2}\left(I_5 - \frac{r^2-\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}I_6\right) \tag{4.40}$$

όπου:

$$I_1 = \int_\alpha^r \frac{\dot{\varepsilon}_r^{in} - \dot{\varepsilon}_\theta^{in}}{x} dx, \qquad I_2 = \int_\alpha^\beta \frac{\dot{\varepsilon}_r^{in} - \dot{\varepsilon}_\theta^{in}}{x} dx = (I_1)_{r=\beta}$$

$$I_3 = \int_\alpha^r x\dot{\varepsilon}_z^{in} dx, \qquad I_4 = \int_\alpha^\beta x\dot{\varepsilon}_z^{in} dx = (I_3)_{r=\beta}$$

$$I_5 = \int_\alpha^r x\dot{T} dx, \qquad I_6 = \int_\alpha^\beta x\dot{T} dx = (I_5)_{r=\beta}$$

και ο ρυθμός της εφαπτομενικής τάσης:

$$\dot{\sigma}_\theta = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(I_1 - \frac{r^2+\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}\frac{\beta^2}{r^2}I_2\right) - \frac{E(1-2\nu)}{2(1-\nu^2)}\frac{1}{r^2}\left(I_3 + \frac{r^2+\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}I_4\right) - \frac{E}{1-\nu^2}(\dot{\varepsilon}_\theta^{in} + \nu\dot{\varepsilon}_z^{in})$$

$$+\dot{p}\frac{\beta^2+r^2}{\beta^2-\alpha^2}\frac{\alpha^2}{r^2} - \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^2}\left(I_5 + \frac{r^2+\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}I_6 - \dot{T}r^2\right) \tag{4.41}$$

Τελικά οι παραπάνω εξισώσεις του ρυθμού των τάσεων και παραμορφώσεων μαζί με τις καταστατικές εξισώσεις των ιξωδοπλαστικών μοντέλων πρέπει να ολοκληρωθούν για να βρεθεί η κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων για όλη τη διατομή του κυλίνδρου. Η ολοκλήρωση ως προς το χρόνο γίνεται με παρόμοια μεθοδολογία με αυτήν των συνοριακών στοιχείων.

Μοντέλο συνοριακών στοιχείων

Η διακριτοποίηση του συνόρου και του εσωτερικού για την ιξωδοπλαστική και θερμική ανάλυση των τάσεων για τα δύο μοντέλα Hart και Robinson έγινε με 32 γραμμικά συνοριακά στοιχεία και 100 και 35 εσωτερικά στοιχεία για τον κύλινδρο και το θάλαμο προώθησης αντίστοιχα. Λόγω της συμμετρίας μόνο το ένα τέταρτο της διατομής του κυλίνδρου και το ένα δεύτερο του θαλάμου διακριτοποιήθηκαν.

4.4.2 Θερμική ανάλυση

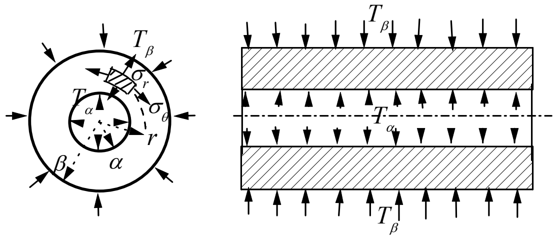
Το πεδίο του ρυθμού θερμοκρασίας στην περίπτωση του παχύτοιχου κυλίνδρου σε ένα σημείο σε απόσταση r από το κέντρο του κυλίνδρου θεωρείται ότι δίδεται από την εξίσωση [16]:

$$T = \frac{1}{\ln(\beta/\alpha)}(T_\beta \ln(r/\alpha) + T_\alpha \ln(\beta/r)) \tag{4.42}$$

η οποία είναι πραγματικά η λύση της εξίσωσης διάχυσης σε σταθερή κατάσταση με αργή μεταβολή των θερμοκρασιών της εσωτερικής και εξωτερικής επιφάνειας $T_\alpha(t)$ και $T_\beta(t)$ αντίστοιχα. Για την περίπτωση όμως του θαλάμου προώθησης η μορφή των ρυθμών θερμοκρασίας υπολογίζεται με τη χρήση του προγράμματος SINDA (Smith [118]) για θερμική ανάλυση.

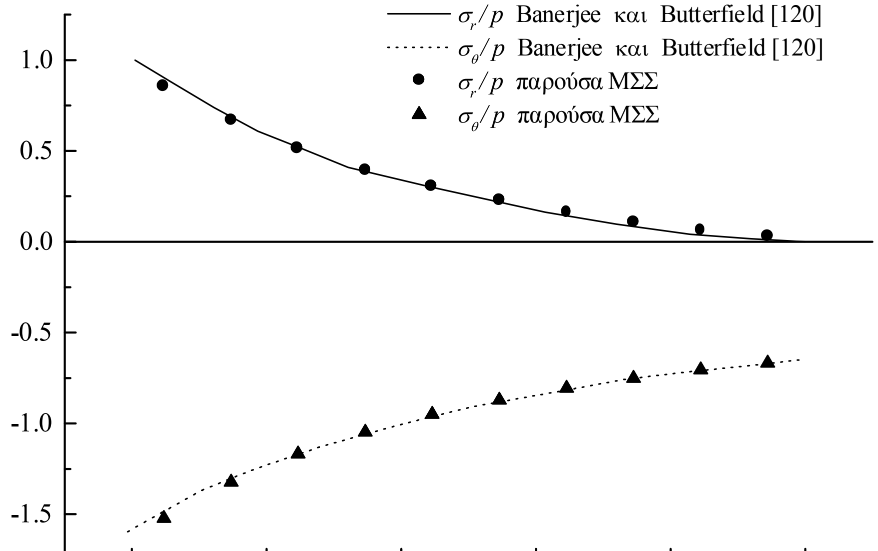
4.4.3 **Ιξωδοπλαστικό μοντέλο του Hart** [27-29]

Παράδειγμα 1

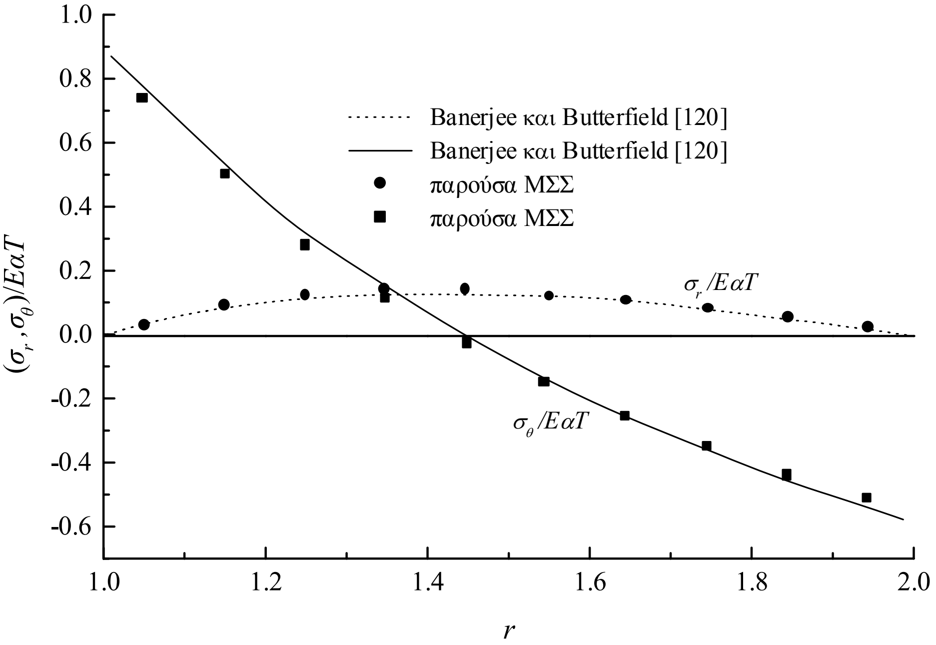


Σχήμα 4.7: Παχύτοιχος κύλινδρος.

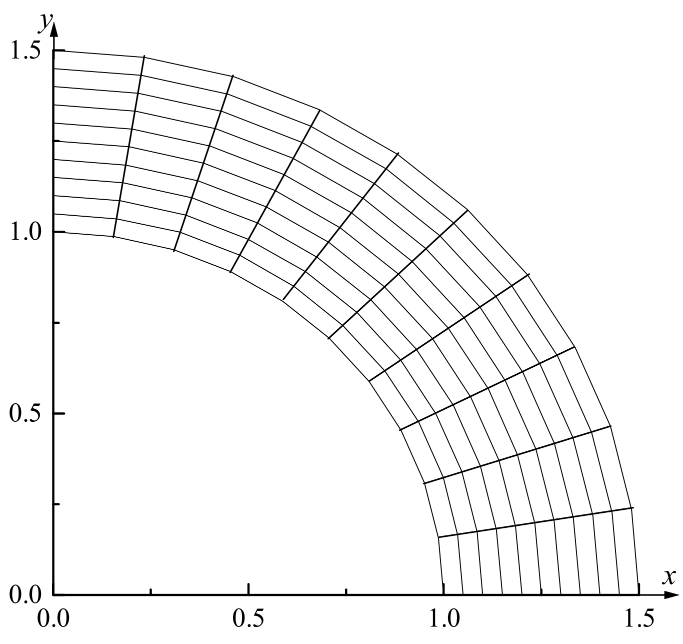
Το πρώτο πρόβλημα που αναλύεται είναι ένας ομοιόμορφος επιμήκης παχύτοιχος κύλινδρος από 304 ανοξείδωτο χάλυβα με λόγο ακτίνων 2 σε επίπεδη παραμόρφωση. Για να επιβεβαιωθεί η παρούσα μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων (ΜΣΣ) γίνεται σύγκριση με την ελαστική επίλυση του κυλίνδρου που υποβάλλεται σε εσωτερική πίεση κατά τη διεύθυνση της ακτίνας ή σε θερμική φόρτιση, όπως προκύπτει με τη ΜΣΣ από τους Banerjee και Butterfield [119,120] και την παρούσα μεθοδολογία στο χρονικό βήμα t = 0 (ελαστική επίλυση). Στα Σχήματα 4.8 και 4.9 φαίνεται η κατανομή της καθαρά μηχανικής ή θερμικής, ακτινικής και εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης.



Σχήμα 4.8: Κατανομή ελαστικής ακτινικής και εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος ακτινικής διεύθυνσης με εσωτερική πίεση *p*.

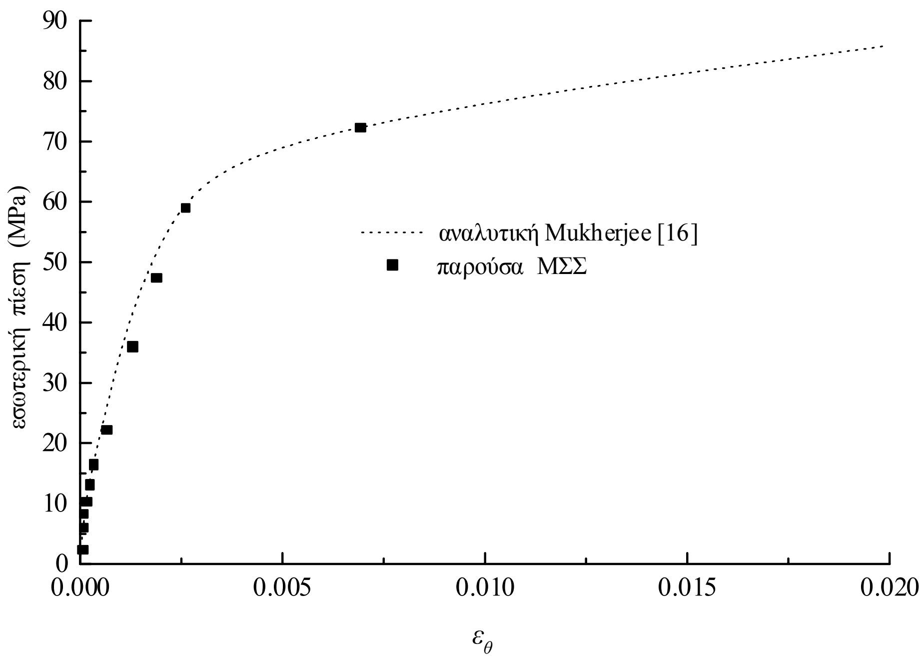


Σχήμα 4.9: Κατανομή θερμοελαστικής ακτινικής και εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος ακτινικής διεύθυνσης.



Σχήμα 4.10: Διακριτοποίηση του εσωτερικού του κυλίνδρου.

Το Σχήμα 4.11 απεικονίζει το διάγραμμα πίεσης – παραμόρφωσης όπως προκύπτει με τη χρήση της αναλυτικής μεθόδου από τον Mukherjee [16] και την παρούσα μεθοδολογία όταν κύλινδρος με λόγο ακτίνων 1,5 υποβάλλεται σε εσωτερική αυξανόμενη πίεση με ένα σταθερό ρυθμό 68,95 MPa/sec στη θερμοκρασία των 200^o C. Η πολύ καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων επιβεβαιώνει την ορθή εφαρμογή του ιξωδοπλαστικού μοντέλου του Hart στην παρούσα μεθοδολογία.

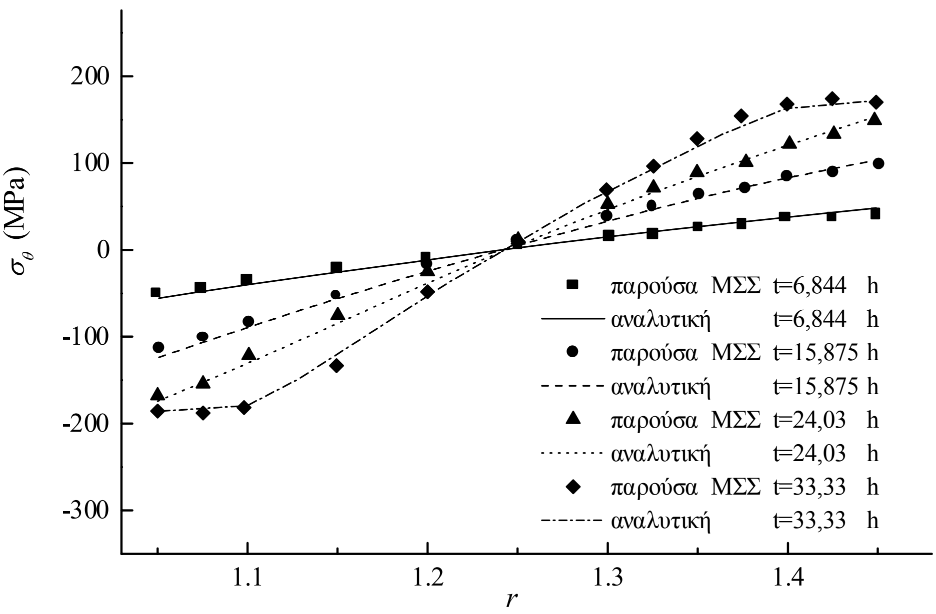


Σχήμα 4.11: Ιξωδοπλαστική εφαπτομενική παραμόρφωση σε σχέση με την εσωτερική πίεση στους 200^o C.

Παράδειγμα 2

Θεωρείται παχύτοιχος κύλινδρος με λόγο ακτίνων 1,5 με μια αρχική θερμοκρασία 100^o C. Η εσωτερική καμπύλη επιφάνεια του κυλίνδρου θερμαίνεται με ένα σταθερό ρυθμό θερμοκρασίας T_α=6^{o}C/h ενώ η εξωτερική επιφάνεια διατηρείται στη σταθερή θερμοκρασία των 100^o C. Το Σχήμα 4.12 δείχνει την ανακατανομή της θερμο-ιξωδοπλαστικής εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης όπως προκύπτει με την παρούσα μεθοδολογία και την αναλυτική επίλυση για την κατανομή της εφαπτομενικής τάσης από την εξίσωση 4.41.

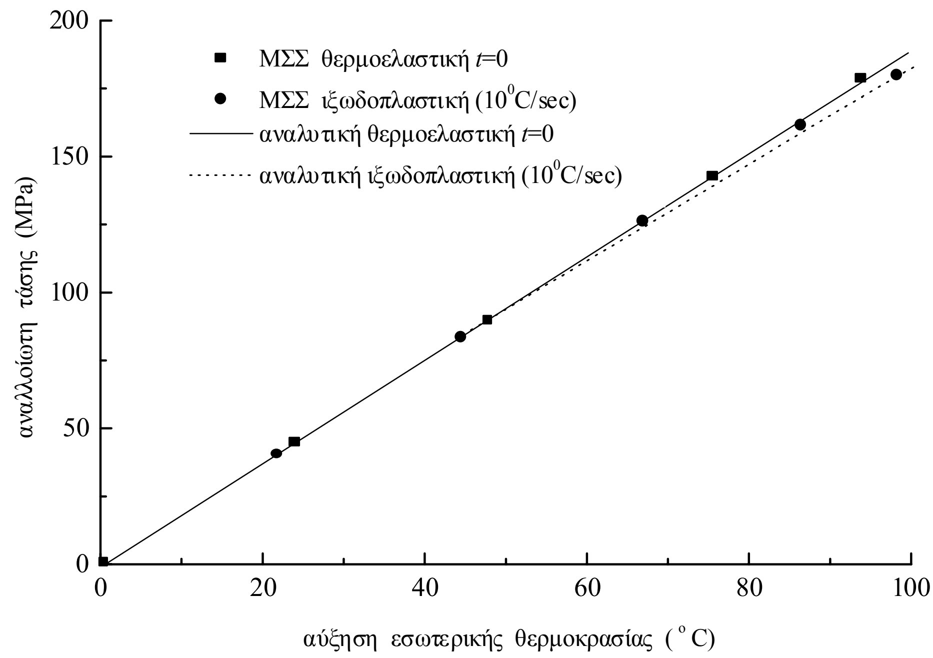
Η καλή συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων της παρούσας μεθοδολογίας των συνοριακών στοιχείων και της αναλυτικής [16] επιβεβαιώνει την ορθή εφαρμογή της για αυτό το είδος των προβλημάτων. Επιπρόσθετα παρατηρείται ότι η μορφή των διαγραμμάτων των τάσεων στο Σχήμα 4.12 και των δύο ιξωδοπλαστικών επιλύσεων είναι ποιοτικά η ίδια με αυτήν που βρίσκεται από την κλασσική θεωρία της πλαστικότητας και παρουσιάζει δύο μέτωπα διαρροής, το πρώτο ξεκινά από το εσωτερικό και το δεύτερο από το εξωτερικό του κυλίνδρου.



Σχήμα 4.12: Ανακατανομή της εφαπτομενικής ιξωδοπλαστικής τάσης κατά την ακτινική διεύθυνση για διάφορες εσωτερικές θερμοκρασίες.

Το Σχήμα 4.13 δείχνει την αναλλοίωτη της εσωτερικής ιξωδοπλαστικής τάσης σε συνάρτηση με την αύξηση της θερμοκρασίας στο εσωτερικό για τον ίδιο κύλινδρο αλλά για διαφορετικές συνθήκες θερμοκρασίας όπως προκύπτει με την παρούσα επίλυση των συνοριακών στοιχείων και την αναλυτική [16]. Η αρχική θερμοκρασία του κυλίνδρου είναι 200^o C. Η εσωτερική καμπύλη επιφάνεια του κυλίνδρου θερμαίνεται με ένα σταθερό ρυθμό θερμοκρασίας T_α=10^oC/h ενώ η εξωτερική επιφάνεια διατηρείται στη σταθερή θερμοκρασία των 200^o C. Η συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο λύσεων είναι πολύ καλή ειδικά στην περίπτωση υψηλού ρυθμού θερμοκρασίας.

Οι παράμετροι για τον 304 ανοξείδωτο χάλυβα λαμβάνονται από το παράρτημα Ι για τις αντίστοιχες θερμοκρασίες. Οι αρχικές τιμές των εσωτερικών μεταβλητών είναι σ^*=117,215 MPa και $\varepsilon_{ij}^{\alpha}$ =0.



Σχήμα 4.13: Αναλλοίωτη της τάσης στο εσωτερικό του κυλίνδρου σε σχέση με την αύξηση της θερμοκρασίας.

4.4.4 Ιξωδοπλαστικό μοντέλο του Robinson [28]

Οι χρησιμοποιούμενες παράμετροι του υλικού στα παραδείγματα 3 και 4 (λήφθησαν από τον Arya, [20]) είναι:

β = 1,5, G_0= 0,14, H= 4,75 x10^{-6} (MPa/sec), k= 5,654 (MPa),

m= 7,73, μ= 1,296 x10^{11}και n= 4.

Οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας E και του λόγου του Poisson v εξαρτώνται από τη θερμοκρασία. Οι ακόλουθες πολυωνυμικές εκφράσεις λήφθηκαν από τον Sartory [121] και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των E και v:

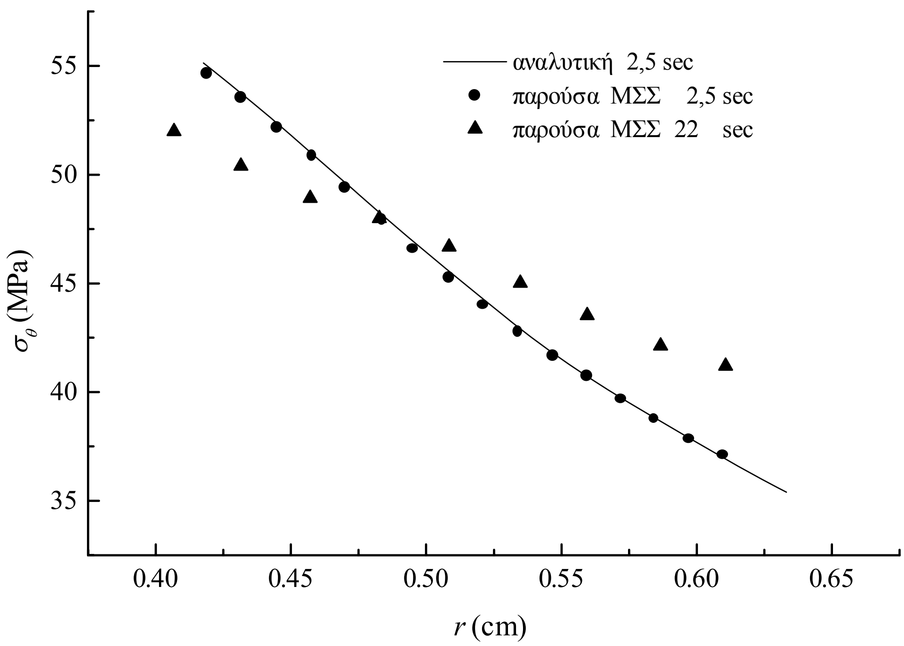
$$E = 31100 - 13{,}59T + 0{,}2505x10^{-5}T^2 - 0{,}2007x10^{-13}T^3 \text{ (ksi)}$$

$$v = 0{,}254 + 0{,}154x10^{-3}T - 0{,}126x10^{-6}T^3$$

όπου T σε βαθμούς F.

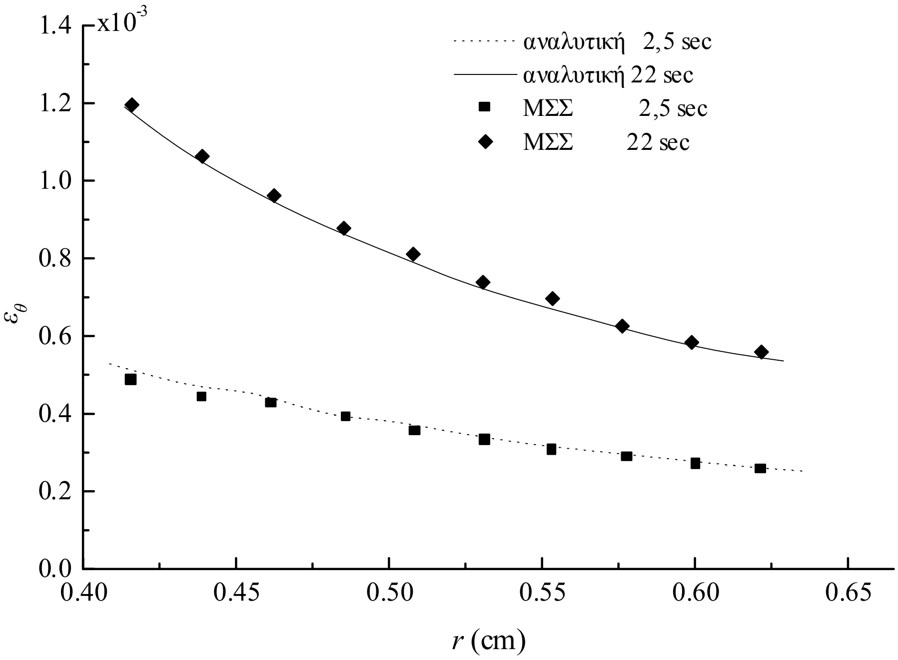
Παράδειγμα 3

Θεωρείται ο παχύτοιχος κύλινδρος του Σχήματος 4.7 από 2,25 Cr-1Mo κράμα χάλυβα με εσωτερική διάμετρο 0,406 και εξωτερική 0,635 cm αντίστοιχα. Ο κύλινδρος υποβάλλεται σε εσωτερική πίεση η οποία αυξάνει γραμμικά με το χρόνο από 0 έως 25,17 MPa σε 10 sec και έκτοτε διατηρείται σταθερή. Η θερμοκρασία στον κύλινδρο είναι σταθερή (ισόθερμη κατάσταση) 550^{o} C. Στο Σχήμα 4.14 φαίνεται η κατανομή της εφαπτομενικής τάσης σε σχέση με την απόσταση όπως προκύπτει με την παρούσα επίλυση των συνοριακών στοιχείων στα 2,5 και 22 sec και την αναλυτική [20] στα 2,5 sec αντίστοιχα. Η πολύ καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων μεταξύ της αναλυτικής και της παρούσας μεθοδολογίας επαληθεύει την ακρίβεια της στην εφαρμογή του ιξωδοπλαστικού μοντέλου του Robinson. Μπορεί επίσης να παρατηρήσει κανείς στο Σχήμα 4.14 ότι η τάση ανακατανέμεται ταχέως στην αρχή και ότι ο ρυθμός ανακατανομής μειώνεται με το χρόνο.



Σχήμα 4.14: Ανακατανομή της εφαπτομενικής τάσης στην ακτινική διεύθυνση σε παχύτοιχο κύλινδρο σε διάφορους χρόνους.

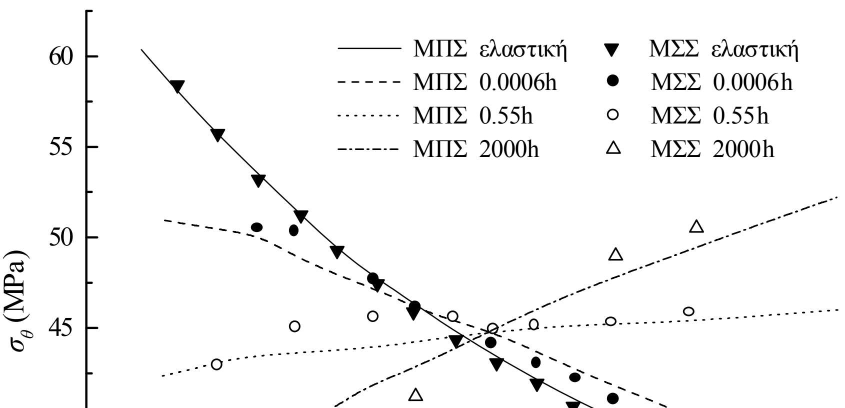
Η κατανομή της εφαπτομενικής παραμόρφωσης όπως προκύπτει με την παρούσα ΜΣΣ μεθοδολογία και την αναλυτική [20] έχει σχεδιασθεί στο Σχήμα 4.15 για δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές της παραμόρφωσης είναι στην εσωτερική και την εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου αντίστοιχα.



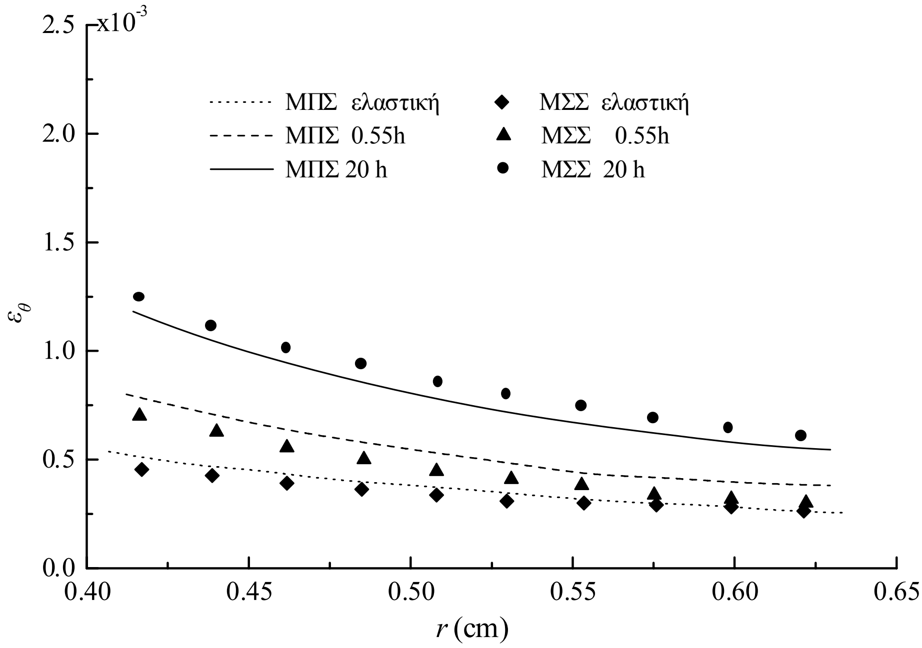
Σχήμα 4.15: Ανακατανομή της εφαπτομενικής παραμόρφωσης στην ακτινική διεύθυνση σε παχύτοιχο κύλινδρο σε διάφορους χρόνους.

Παράδειγμα 4

Θεωρείται ο κύλινδρος του προηγούμενου παραδείγματος αλλά η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή στους 427^{o} C.



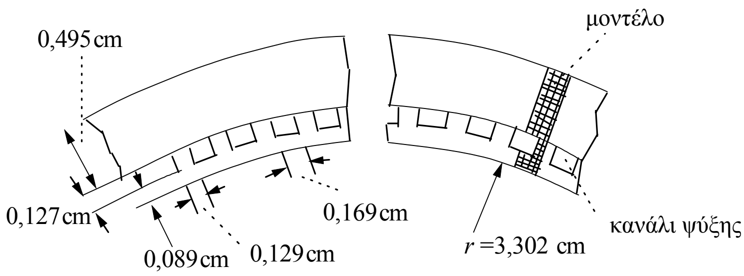
Σχήμα 4.16: Εφαπτομενική τάση σε σχέση με την ακτινική απόσταση του κυλίνδρου σε διάφορους χρόνους (427^o C).



Σχήμα 4.17: Εφαπτομενική παραμόρφωση σε σχέση με την ακτινική απόσταση του κυλίνδρου σε διάφορους χρόνους (427^o C).

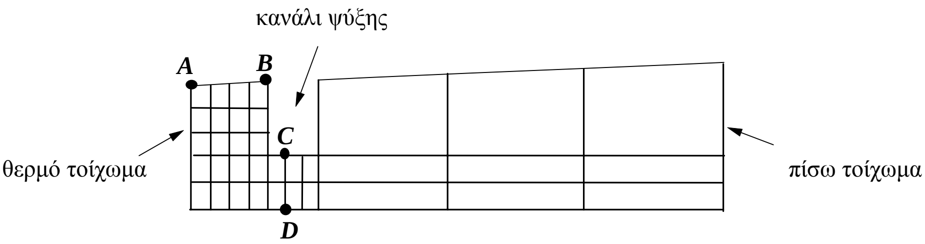
Τα Σχήματα 4.16 και 4.17 δίδουν την εφαπτομενική τάση και παραμόρφωση σε σχέση με την ακτινική απόσταση του κυλίνδρου σε διάφορους χρόνους. Για την περαιτέρω επαλήθευση των αποτελεσμάτων της παρούσας μεθοδολογίας και για τη σωστή εφαρμογή του μοντέλου του Robinson, γίνεται σύγκριση τους με τα αποτελέσματα που προκύπτουν με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) από τους Arya και Kaufman [22].

Παράδειγμα 5

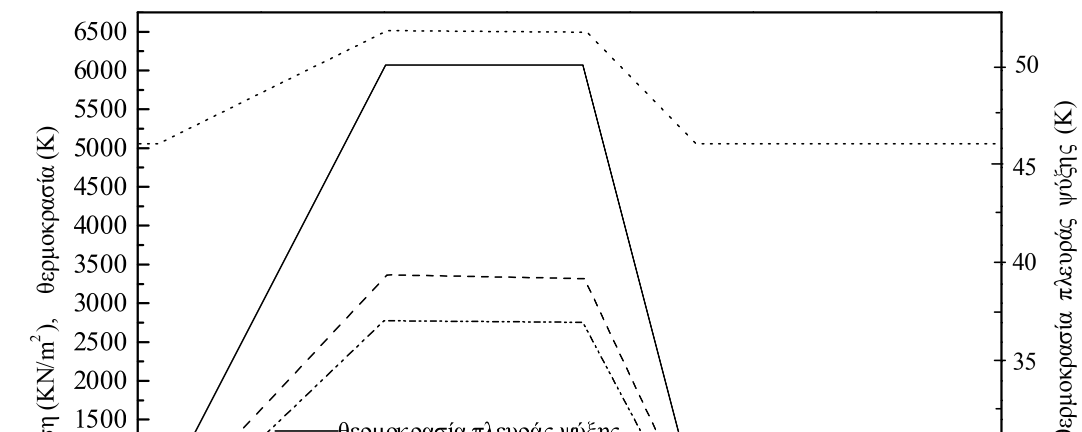


Σχήμα 4.18: Πειραματικός θάλαμος προώθησης.

Θεωρείται ένας πειραματικός θάλαμος προώθησης από κράμα NARloy-Z χαλκού με διατομή που φαίνεται στο Σχήμα 4.18 ο οποίος επίσης εξετάσθηκε από τους Arya και Arnold [23] με τη μεθοδολογία των πεπερασμένων στοιχείων. Το μοντέλο της διατομής που αναλύεται φαίνεται με τη γραμμοσκιασμένη περιοχή στο παραπάνω σχήμα και διακριτοποιείται στο Σχήμα 4.19 για να εξετασθεί μια σύνθετη θερμομηχανική ανάλυση κάτω από τη μηχανική πίεση και θερμική φόρτιση του Σχήματος 4.20.



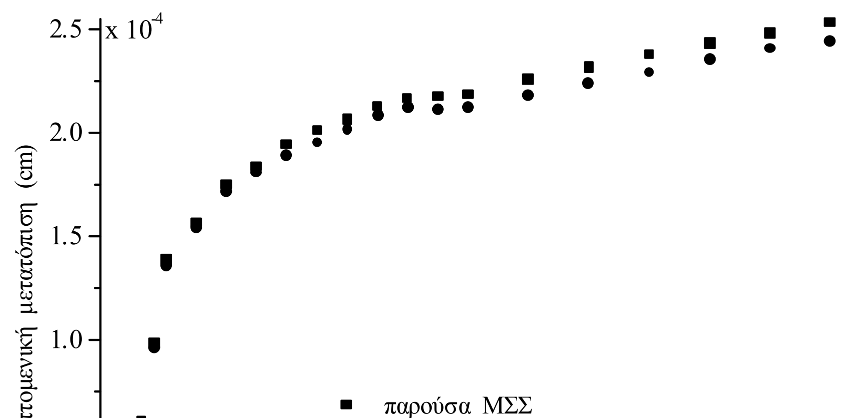
Σχήμα 4.19: Διακριτοποίηση θαλάμου προώθησης.



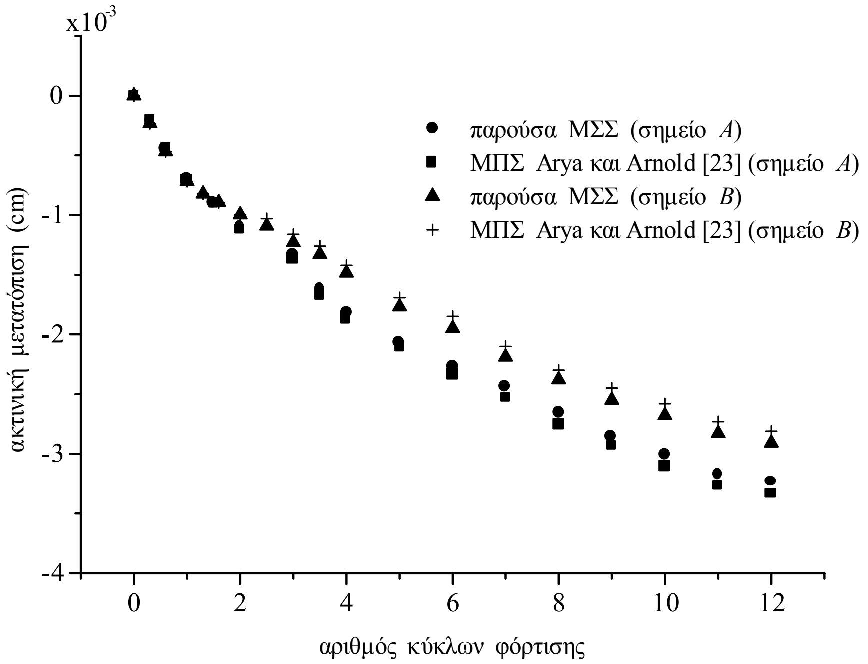
Σχήμα 4.20: Μηχανική πίεση και θερμική φόρτιση σε συνάρτηση με το χρόνο.

Στο Σχήμα 4.21 φαίνονται οι εφαπτομενικές μετατοπίσεις στο σημείο C όπως προκύπτουν με την παρούσα ΜΣΣ μεθοδολογία και την επίλυση των πεπερασμένων στοιχείων των Arya και Arnold [23] σε σχέση με τον αριθμό των κύκλων φόρτισης. Οι τιμές των μετατοπίσεων στο σημείο C που φαίνονται στο Σχήμα 4.21 δίδουν επίσης και τη μεταβολή του πάχους μεταξύ των σημείων C και D καθώς το D περιορίζεται. Η προσεκτική εξέταση αυτού του σχήματος αποκαλύπτει ένα γνωστό φαινόμενο, καθώς ο αριθμός των κύκλων αυξάνει, τόσο περισσότερο μειώνεται το πάχος CD του καναλιού (doghouse effect).

Το Σχήμα 4.22 δείχνει την ακτινική μετατόπιση στα σημεία A και B σε σχέση με τον αριθμό των κύκλων. Το παραπάνω φαινόμενο επίσης συνάγεται από την εξέταση του Σχήματος 4.22 καθόσον η διαφορά των μετατοπίσεων στα σημεία A και B είναι η μεταβολή του πάχους της διατομής AB. Η πολύ καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων που υπάρχει μεταξύ της παρούσας ΜΣΣ μεθοδολογίας και της επίλυσης των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) των Arya και Arnold [23] επιβεβαιώνει την ακρίβεια και την επάρκεια της προταθείσας μεθοδολογίας στην εφαρμογή του μοντέλου του Robinson.



Σχήμα 4.21: Εφαπτομενική μετατόπιση στο σημείο C.



Σχήμα 4.22: Ακτινική μετατόπιση στα σημεία A και B.

Συμπεράσματα

Με την παρούσα μεθοδολογία γίνεται επιτυχής εφαρμογή των ιξωδοπλαστικών μοντέλων των Hart και Robinson με άμεση διατύπωση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων στην ανάλυση προβλημάτων ερπυσμού σε μεταλλικές κατασκευές που υποβάλλονται σε μηχανική και θερμική φόρτιση. Παρουσιάζεται επίσης μια αναλυτική επίλυση του προβλήματος για να επιβεβαιώσει τα αποτελέσματα της παρούσας μεθοδολογίας συνοριακών στοιχείων. Δίδονται επίσης λεπτομέρειες για στρατηγικές ολοκλήρωσης και επίλυσης προβλημάτων αρχικών συνοριακών τιμών.

Στο πλαίσιο της καλής συμφωνίας μεταξύ των αποτελεσμάτων της αναλυτικής επίλυσης και των πεπερασμένων στοιχείων συγκρινόμενων με τα αποτελέσματα της παρούσας ΜΣΣ, μπορεί να συναχθεί ότι η παρούσα μεθοδολογία μπορεί να είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση περίπλοκων μη γραμμικών προβλημάτων πρακτικής σημασίας. Το πρόγραμμα συνοριακών στοιχείων είναι αρκετά γενικό και μπορεί να επιλύσει πολύ κοινά προβλήματα σε θερμαινόμενους μεταλλικούς σωλήνες και δοχεία πίεσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

5.1 «Τετραγωνικά» συνοριακά στοιχεία

Τα σταθερά και τα γραμμικά συνοριακά στοιχεία έχουν καλή εφαρμογή στην επίλυση προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης ή έντασης περιλαμβανομένων και άπειρων ή μη περιοχών και σε κάποια προβλήματα συγκέντρωσης τάσεων. Ο κύριος περιορισμός τους είναι ότι δεν μπορούν να απεικονίσουν καμπύλες γεωμετρίες. Προβλήματα που περιέχουν κάμψη επίσης απαιτούν τη χρήση στοιχείων υψηλότερης τάξης καθώς οι παραμορφώσεις είναι δύσκολο να περιγραφούν με γραμμικά στοιχεία. Τα απλούστερα και περισσότερο εύχρηστα από τα καμπυλόγραμμα συνοριακά στοιχεία είναι τα «τετραγωνικά» (quadratic) [122] για τα οποία ο ρυθμός των μετατοπίσεων ή των ελκυστών μπορεί να απεικονισθεί όπως στο Σχήμα 5.1.

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^1 \\ \dot{u}_i^2 \\ \dot{u}_i^3 \end{Bmatrix}^R = \Phi \dot{u}^R \tag{5.1}$$

$$\dot{\tau} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\tau}_i^1 \\ \dot{\tau}_i^2 \\ \dot{\tau}_i^3 \end{Bmatrix}^R = \Phi \dot{\tau}^R \tag{5.2}$$

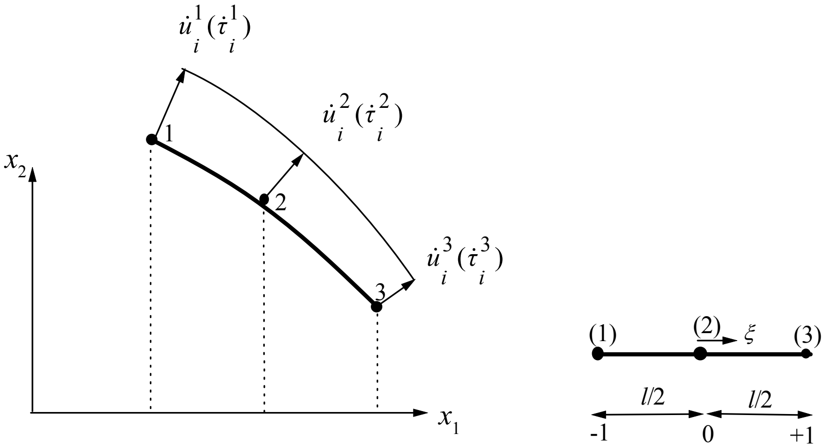
όπου φ_i είναι οι συναρτήσεις σχήματος για το «τετραγωνικό» στοιχείο:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tfrac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ \varphi_2 &= (1 - \xi^2) \\ \varphi_3 &= \tfrac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{aligned} \tag{5.3}$$

όπου ξ είναι οι αδιάστατες συντεταγμένες κατά μήκος του στοιχείου.

Η γεωμετρία του στοιχείου μπορεί να θεωρηθεί επίσης «τετραγωνική» και να απεικονισθεί από τις συντεταγμένες των κόμβων με τις ίδιες συναρτήσεις σχήματος φ_i που χρησιμοποιούνται και για τις συνιστώσες του ρυθμού των μετατοπίσεων και των ελκυστών:

$$x = \begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ x_i^3 \end{Bmatrix}^R = \Phi\, x^R \tag{5.4}$$



Κόμβος	ξ	φ_1	φ_2	φ_3
1	-1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1

Σχήμα 5.1: «Τετραγωνικό» στοιχείο.

Τα ολοκληρώματα κατά μήκος του συνόρου πρέπει να μετασχηματισθούν στο ομογενές σύστημα συντεταγμένων ξ.

$$d\Gamma_R = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2}\, d\xi = |G| d\xi \tag{5.5}$$

Τετρακομβικά εσωτερικά στοιχεία

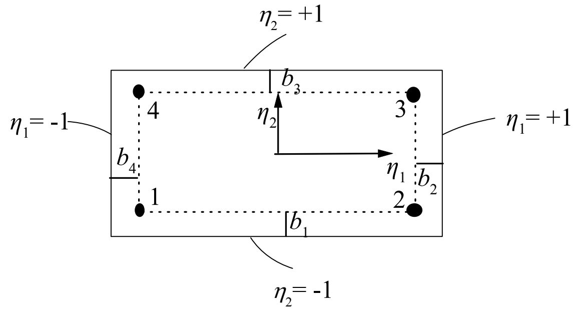
Το εσωτερικό μπορεί να διακριτοποιηθεί σε τετράπλευρα στοιχεία με τέσσερεις κόμβους στο εσωτερικό τους. Ο ρυθμός παραμόρφωσης έχει τρεις συνιστώσες και σε κάθε εσωτερικό στοιχείο δίδεται σε συνάρτηση με τους ρυθμούς των παραμορφώσεων των κόμβων από:

$$\dot{\varepsilon}^{in} = \left\{\dot{\varepsilon}_{11}^{in}\ \dot{\varepsilon}_{12}^{in}\ \dot{\varepsilon}_{22}^{in}\right\} = \left[\varphi_1^*\ \varphi_2^*\ \varphi_3^*\ \varphi_4^*\right] \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11}^{in1} & \dot{\varepsilon}_{12}^{in1} & \dot{\varepsilon}_{22}^{in1} \\ \dot{\varepsilon}_{11}^{in2} & \dot{\varepsilon}_{12}^{in2} & \dot{\varepsilon}_{22}^{in2} \\ \dot{\varepsilon}_{11}^{in3} & \dot{\varepsilon}_{12}^{in3} & \dot{\varepsilon}_{22}^{in3} \\ \dot{\varepsilon}_{11}^{in4} & \dot{\varepsilon}_{12}^{in4} & \dot{\varepsilon}_{22}^{in4} \end{Bmatrix}^{IR} = \Phi^* \dot{\varepsilon}^{inIR} \tag{5.6}$$

όπου φ_i^* είναι οι συναρτήσεις σχήματος για το τετρακομβικό εσωτερικό στοιχείο.

$$\begin{aligned}
\varphi_1^* &= \frac{(a_2-\eta_1)(a_3-\eta_2)}{(a_1+a_3)(a_2+a_4)} \\
\varphi_2^* &= \frac{(a_4+\eta_1)(a_3-\eta_2)}{(a_1+a_3)(a_2+a_4)} \\
\varphi_3^* &= \frac{(a_4+\eta_1)(a_1+\eta_2)}{(a_1+a_3)(a_2+a_4)} \\
\varphi_4^* &= \frac{(a_2-\eta_1)(a_1+\eta_2)}{(a_1+a_3)(a_2+a_4)}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

όπου η_1 και η_2 είναι οι αδιάστατες συντεταγμένες του κάθε εσωτερικού στοιχείου και $a_i = 1 - b_i$, $i = 1,...,4$. (Σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.2: Τετρακομβικό στοιχείο.

Οι συντεταγμένες ενός αυθαίρετου εσωτερικού σημείου μπορούν να προκύψουν από τις ίδιες συναρτήσεις σχήματος που χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση του ρυθμού των μη ελαστικών παραμορφώσεων και του ρυθμού των θερμοκρασιών.

$$x=\left[\varphi_1^*\ \varphi_2^*\ \varphi_3^*\ \varphi_4^*\right]\begin{Bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ x_i^3 \\ x_i^4 \end{Bmatrix}^{IR} = \Phi^* x^{IR} \tag{5.8}$$

Τα ολοκληρώματα πάνω στα εσωτερικά στοιχεία πρέπει να μετασχηματισθούν στο ομογενές σύστημα συντεταγμένων η_1, η_2.

$$d\Omega_{IR} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1}\frac{\partial x_1}{\partial \eta_2}\right) d\eta_1 d\eta_2 = \left|G^*\right| d\eta_1 d\eta_2 \tag{5.9}$$

Οι διακριτοποιημένες συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις για την επίπεδη ένταση μπορούν να γραφούν:

$$(\delta_{ij} - C_{ij})\dot{u}_i(P) = \sum_{R=1}^{NSEG}\left\{ \int_{\Delta\Gamma_R} \varphi_m U_{ij}(P, x_R) d\Gamma_R \right\} \dot{\tau}_j^{mR} - \sum_{R=1}^{NSEG}\left\{ \int_{\Delta\Gamma_R} \varphi_m T_{ij}(P, x_R) d\Gamma_R \right\} \dot{u}_j^{mR} +$$
$$\sum_{IR=1}^{NELM}\left\{ \int_{\Delta\Omega_{IR}} \varphi_g^* \Sigma_{jki}(P, x_{IR}) d\Omega_{IR} \right\}[\dot{\varepsilon}_{jk}^{in\, g(IR)} + \alpha\delta_{jk}\dot{T}^{g(IR)}] \tag{5.10}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(p) = \sum_{R=1}^{NSEG}\left\{ \int_{\Delta\Gamma_R} \varphi_m V_{ijk}(p, x_R) d\Gamma_R \right\} \dot{\tau}_k^{mR} - \sum_{R=1}^{NSEG}\left\{ \int_{\Delta\Gamma_R} \varphi_m T_{ijk}(p, x_R) d\Gamma_R \right\} \dot{u}_k^{mR} - 2G\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}(p)$$
$$-\frac{2G}{1-2\bar{v}}\alpha\delta_{ij}\dot{T}(p) + \sum_{IR=1}^{NELM}\left\{ \int_{\Delta\Omega_{IR}} \varphi_g^* \Sigma_{ijkl}(p, x_{IR}) d\Omega_{IR} \right\}[\dot{\varepsilon}_{kl}^{in\, g(IR)} + \alpha\delta_{kl}\dot{T}^{g(IR)}]$$

(5.11)

όπου $i, j, k, l = 1,2$, $m =$ 1,2,3 και $g = 1,2,3,4$

και:

$$(\delta_{ij}-C_{ij})\dot{u}_i(P)=\sum_{R=1}^{NSEG}\Big\{\int_{-1}^{1}\varphi_m U_{ij}(P,x_R)|G|d\xi\Big\}\ \dot{\tau}_j^{mR}-\sum_{R=1}^{NSEG}\Big\{\int_{-1}^{1}\varphi_m T_{ij}(P,x_R)|G|d\xi\Big\}\dot{u}_j^{mR}+$$

$$\sum_{IR=1}^{NELM}\Big\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi_g^{*}\Sigma_{jki}(P,x_{IR})|G^{*}|d\eta_1 d\eta_2\Big\}[\dot{\varepsilon}_{jk}^{in\,g(IR)}+\alpha\delta_{jk}\dot{T}^{g(IR)}] \qquad (5.12)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(p)=\sum_{R=1}^{NSEG}\Big\{\int_{-1}^{1}\varphi_m V_{ijk}(p,x_R)|G|d\xi\Big\}\ \dot{\tau}_k^{mR}-\sum_{R=1}^{NSEG}\Big\{\int_{-1}^{1}\varphi_m T_{ijk}(p,x_R)|G|d\xi\Big\}\dot{u}_k^{mR}-$$

$$2G\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}(p)-\frac{2G}{1-2\bar{v}}\alpha\delta_{ij}\dot{T}(p)+\sum_{IR=1}^{NELM}\Big\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi_g^{*}\Sigma_{ijkl}(p,x_{IR})|G^{*}|d\eta_1 d\eta_2\Big\}[\dot{\varepsilon}_{kl}^{in\,g(IR)}+\alpha\delta_{kl}\dot{T}^{g(IR)}]$$

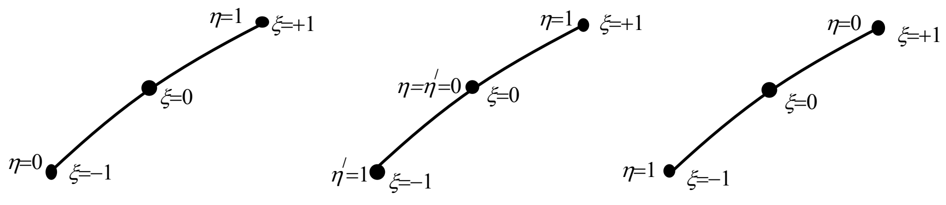
(5.13)

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων στις παραπάνω εξισώσεις απαιτεί πολύπλοκες διαδικασίες ολοκλήρωσης. Επειδή η αναλυτική ολοκλήρωση αυτών δεν είναι γενικά δυνατή, χρησιμοποιείται η μέθοδος ολοκλήρωσης Gauss (παράρτημα III). Για τις ιδιάζουσες περιπτώσεις που το βασικό σημείο συμπίπτει με το σημείο περιοχής στο ίδιο στοιχείο ακολουθούνται ειδικές προσεγγίσεις [122].

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{-1}^{1}\varphi_m U_{ij}(P,x_R)|G|d\xi\ \}$ απαιτείται ειδική διαδικασία όταν το βασικό σημείο P συμπίπτει με ένα από τους τρεις κόμβους του συνοριακού στοιχείου.

α) όταν το βασικό σημείο συμπίπτει με το κόμβο 1 μια νέα αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων ξ εφαρμόζεται (Σχήμα 5.3 α):

$\eta = (\xi+1)/2$



α) β) γ)

Σχήμα 5.3: Συστήματα συντεταγμένων για αριθμητική ολοκλήρωση.

Το ολοκλήρωμα τότε δίδει δύο μέρη, ένα με ιδιόμορφο όρο ln(η) και ένα άλλο χωρίς ιδιομορφία. Το πρώτο μέρος ολοκληρώνεται με ειδική ολοκλήρωση (παράρτημα III) της μορφής:

$$I = \int_0^1 \ln(\eta) f(\eta) d\eta \cong -\sum_i^n w_i f(\eta_i) \tag{5.14}$$

Το δεύτερο μέρος ολοκληρώνεται με τη μέθοδο Gauss.

β) το βασικό σημείο συμπίπτει με το κόμβο 2 (Σχήμα 5.3 β)

Το ολοκλήρωμα διαιρείται σε δύο μέρη επειδή υπάρχει ιδιομορφία και από τις δύο πλευρές του κόμβου:

$$\int_{(1)}^{(3)} \varphi_m U_{ij}(P, x_R)|G| d\xi = \int_{(1)}^{(2)} \varphi_m U_{ij}(P, x_R)|G| d\xi + \int_{(2)}^{(3)} \varphi_m U_{ij}(P, x_R)|G| d\xi \tag{5.15}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα γίνεται η αλλαγή συντεταγμένων $\eta' = -\xi$ και για το δεύτερο $\eta = \xi$ και στη συνέχεια με την ειδική λογαριθμική ολοκλήρωση υπολογίζονται τα δύο ολοκληρώματα.

γ) το βασικό σημείο συμπίπτει με το κόμβο 3 (Σχήμα 5.3 γ).

Αυτή η περίπτωση είναι παρόμοια με την πρώτη με μεταβλητή της ειδικής λογαριθμικής ολοκλήρωσης:

$\eta = (1-\xi)/2$

Ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{-1}^{1} \varphi_m T_{ij}(P, x_R)|G| d\xi \;\}$ γίνεται έμμεσα με τη θεώρηση του στερεού σώματος όταν το βασικό σημείο P συμπίπτει με ένα από τους κόμβους του συνοριακού στοιχείου. Θεωρώντας μοναδιαίο ρυθμό μετατόπισης στερεού σώματος σε ένα από τους άξονες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (x_k), το διάνυσμα των ρυθμών των ελκυστών και των μαζικών δυνάμεων πρέπει να είναι μηδέν:

$$(\delta_{ij} - C_{ij})\delta_{ki}(P) = -\sum_{R=1}^{NSEG} \left\{ \int_{-1}^{1} \varphi_m T_{ij}(P, x_R)|G| d\xi \right\} \delta_{kj}^{mR} \tag{5.16}$$

Μετά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στα οποία το βασικό σημείο P δεν συμπίπτει με ένα από τους κόμβους του συνοριακού στοιχείου και χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση μπορούν να υπολογισθούν τα υπόλοιπα ολοκληρώματα.

Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει από την εφαρμογή της εξίσωσης 5.12 σε κάθε κόμβο του συνόρου προσδιορίζονται οι άγνωστοι ρυθμοί των μετατοπίσεων και των ελκυστών στο σύνορο και ακολούθως από την εξίσωση 5.13 υπολογίζονται οι ρυθμοί των τάσεων σε κάθε κόμβο των εσωτερικών στοιχείων. Ο προσδιορισμός των αγνώστων σε συνάρτηση με το χρόνο γίνεται όπως και στην περίπτωση των γραμμικών συνοριακών στοιχείων.

5.2 Ιδιόμορφα συνοριακά στοιχεία

Ιδιομορφία σε παραγώγους των μεταβλητών πεδίου συμβαίνει στην κορυφή ρωγμής ή σε γόνυ σε στρεβλή (kinked) ρωγμή στην ανάλυση των τάσεων, στην κορυφή ασυνέχειας ομοιάζουσας με ρωγμή στη μετάδοση θερμότητας ή στη γωνία μιας λωρίδας στη μικροκυματική ηλεκτρονική. Η περισσότερο κοινή ιδιομορφία είναι της τάξης $-\frac{1}{2}$, η οποία συμβαίνει στην κορυφή ρωγμής σε ελαστικά υλικά. Στην περίπτωση της στρεβλής ρωγμής η τάξη της ιδιομορφίας εξαρτάται από τη γωνία του γόνατος. Επίσης στην περίπτωση ρωγμής που καταλήγει στη διεπιφάνεια δύο υλικών η τάξη της ιδιομορφίας εξαρτάται από το συνδυασμό των υλικών και την κατάσταση των τάσεων (επίπεδη παραμόρφωση ή ένταση).

Για τέτοια προβλήματα η σύγκλιση προς την ακριβή λύση είναι αργή αν δεν χρησιμοποείται ο σωστός τύπος ιδιόμορφων στοιχείων γύρω από το σημείο της ιδιομορφίας. Πολλά από τα κατά καιρούς προταθέντα ιδιόμορφα στοιχεία δεν πληρούν τα κριτήρια σύγκλισης πλήρως, ειδικότερα την κατάσταση της σταθερής παραμόρφωσης και δεν είναι κατάλληλα για θερμικά και αρχικά προβλήματα τάσεων.

Η ανάλυση των πεδίων των τάσεων και των παραμορφώσεων στην κορυφή της ρωγμής και η αποτίμηση κάποιων σημαντικών παραμέτρων θραύσης που επηρεάζουν την ανάπτυξη των ρωγμών αποτελεί την κύρια εργασία στη μηχανική των θραύσεων. Η παράμετρος του χρόνου που υπεισέρχεται στα προβλήματα ερπυσμού σε ρηγματωμένα υλικά περιπλέκει την επίλυση τους και δεν υπάρχει πλήρης αναλυτική λύση για αυτού του είδους τα προβλήματα. Οι Rice και Riedel [30-32] έχουν εφαρμόσει μια ασυμπτωτική ανάλυση για να προκύψουν εκφράσεις κλειστού τύπου για τάσεις και παραμορφώσεις ερπυσμού κοντά στην κορυφή της ρωγμής. Στην παραπάνω ανάλυση δεν λαμβάνεται υπόψη ο ελαστικός ρυθμός παραμόρφωσης επειδή είναι πολύ μικρότερος από το ρυθμό παραμόρφωσης ερπυσμού στην κορυφή της ρωγμής Ενώ αυτή η υπόθεση ασυμπτωτικής ανάλυσης είναι ορθή στην κορυφή της ρωγμής, χρειάζεται προσεκτική διερεύνηση αφού η κατάσταση μπορεί να είναι διαφορετική ακόμη και σε μικρή απόσταση από την κορυφή της ρωγμής. Για αυτό το λόγο και για την αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων είναι επιτακτική η χρήση αριθμητικών επιλύσεων όπως οι μέθοδοι των πεπερασμένων (ΜΠΣ) ή των συνοριακών (ΜΣΣ) στοιχείων [123].

Ο Mukherjee και οι συνεργάτες του [33,34,124] έχουν δημοσιεύσει εργασίες για τον προσδιορισμό των πεδίων των τάσεων και των παραμορφώσεων σε δισδιάστατα προβλήματα με τη ΜΣΣ κοντά στην κορυφή της ρωγμής σε δομικά στοιχεία που υπόκεινται σε ανελαστική παραμόρφωση. Μια στάσιμη ρωγμή στις παραπάνω δημοσιεύσεις διαμορφώνεται ως πολύ λεπτή έλλειψη και με τη χρήση συνάρτησης Green βρίσκεται η ανακατανομή των τάσεων κοντά στην κορυφή της ρωγμής σε σχέση με το χρόνο. Οι Cruse και Polcsh [35] και ο Rußwurm [36] διαμόρφωσαν αργότερα το μοντέλο του πεδίου στην κορυφή της ρωγμής με τη χρήση επίσης κατάλληλων συναρτήσεων Green. Οι Tan και Lee [37] για να προσομοιώσουν τη ρωγμή χρησιμοποίησαν τις βασικές λύσεις Kelvin και κατάλληλες οριακές συνθήκες. Ο Leitao et al. [38] πρότεινε τη διπλή συνοριακή μεθοδολογία για να προσομοιώσει αριθμητικά την ελαστοπλαστική ανάπτυξη της ρωγμής. Μια περισσότερο περιεκτική εξέταση της επίλυσης με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων για προβλήματα ανελαστικής μηχανικής των θραύσεων κάνει ο Aliabadi [39].

Η μεθοδολογία των ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων σε συνδυασμό με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (ΜΣΣ) έχει χρησιμοποιηθεί κατάλληλα σε ποικίλες εφαρμογές στη μηχανική των θραύσεων στη διερεύνηση για μια ακριβή αλλά γενική υπολογιστική μέθοδο για την αποτίμηση ιδιόμορφων πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων στην κορυφή της ρωγμής. Ο Blandford et al. [40] εισήγαγε τη μεθοδολογία του σημείου στο ένα τέταρτο του ιδιόμορφου συνοριακού στοιχείου του ελκυστή. Η μεθοδολογία αυτή είναι εύκολη στη χρήση στα συνοριακά στοιχεία και δίδει ακριβή αποτελέσματα τα οποία δεν επηρεάζονται από τη διακριτοποίηση. Έκτοτε αυτή η μεθοδολογία χρησιμοποιείται ευρέως στην εφαρμογή της ΜΣΣ σε προβλήματα ρωγμών δύο και τριών διαστάσεων. Επέκταση της τεχνικής αυτής έγινε από τον Hantschel et al. [41] ο οποίος διαμόρφωσε το μοντέλο του πεδίου στην κορυφή της ρωγμής σε επίπεδα ελαστοπλαστικά προβλήματα με την εισαγωγή ειδικών ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων και λαμβάνοντας υπόψη το HRR ιδιόμορφο πεδίο (Hutchnison [42], Rice και Rosengren [43]) κοντά στην κορυφή της ρωγμής.

Η κύρια δυσκολία στην επίλυση προβλημάτων μηχανικής των θραύσεων σε ιξωδοπλαστικά υλικά τόσο με τη ΜΠΣ όσο και με τη ΜΣΣ είναι λόγω της μεταβολής της τάξης της ιδιομορφίας των τάσεων κοντά στην κορυφή της ρωγμής από την ελαστική ιδιομορφία $r^{-\frac{1}{2}}$ (όπου r είναι η απόσταση από την κορυφή της ρωγμής) τη χρονική στιγμή μηδέν στην $r^{-\frac{1}{n+1}}$ (όπου n ο εκθέτης ερπυσμού) για κάθε άλλη χρονική στιγμή. Είναι φανερό ότι για αυτού του είδους το πρόβλημα η τάξη της ιδιομορφίας είναι μεταβλητή και για μια κατάλληλη αριθμητική επίλυση είναι αναγκαίο να γίνεται η αλλαγή της τάξης της ιδιομορφίας με σύμφωνο τρόπο.

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα τα αναπτυσσόμενα σε κλειστές διαδρομές γύρω από την κορυφή της ρωγμής είναι μια παράμετρος θραύσης η οποία έχει παίξει πολύ σημαντικό ρόλο τόσο στην ελαστική όσο και στην ανελαστική μηχανική των θραύσεων. Για υλικά που υπόκεινται σε ερπυσμό ένα τέτοιο ολοκλήρωμα του ρυθμού της ενέργειας $C(t)$ έχει ορισθεί από τους Bassani και McClintock [44] για την επίλυση προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με τον εκθετικό νόμο ερπυσμού ανάπτυξης των τάσεων στην κορυφή της ρωγμής μετά από την αρχική ελαστική απόκριση. Αυτό το ειδικό ολοκλήρωμα είναι μια εφαρμόσιμη παράμετρος για το χαρακτηρισμό της ανάπτυξης της ρωγμής σε ερπυσμό κάτω από σταθερές συνθήκες (steady-state) και μπορεί να θεωρηθεί ως συντελεστής εύρους εξαρτώμενος από το χρόνο και τη διαδρομή για ασυμπτωτικά πεδία τάσεων κοντά στην κορυφή της ρωγμής.

Με την παρούσα εργασία αναπτύσσεται ένα ιδιόμορφο συνοριακό στοιχείο παραμόρφωσης ερπυσμού (ΙΣΣΠΕ) [45,46] με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων για να αποτιμήσει τη χρονικά εξαρτώμενη ιδιομορφία της κατανομής του πεδίου των ανελαστικών τάσεων και παραμορφώσεων ερπυσμού σε ρηγματωμένα υλικά σε προβλήματα δύο διαστάσεων. Η δημιουργία αυτών των στοιχείων βασίζεται στην τεχνική Maiti [47] που προσομοιώνει τις ιδιομορφίες εκθετικού τύπου γύρω από την κορυφή της ρωγμής που ανακύπτουν σε διάφορα προβλήματα θραύσης γραμμικής ελαστικότητας. Τα αποτελέσματα των τάσεων και παραμορφώσεων που βρίσκονται με την εφαρμογή των ΙΣΣΠΕ με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν τη χρονική εξάρτηση του ολοκληρώματος του ρυθμού ενέργειας $C(t)$ και την ανάπτυξη της ζώνης ερπυσμού. Παραδείγματα από ποικίλα προβλήματα ρωγμών διερευνώνται για να επιβεβαιώσουν την επάρκεια των προτεινόμενων ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων για την ανάλυση προβλημάτων κατανομής των τάσεων και παραμορφώσεων ερπυσμού και για τον προσδιορισμό κάποιων σημαντικών παραμέτρων ερπυσμού θραύσης. Η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου καταδεικνύεται και η ακρίβεια της συγκρίνεται με τα αποτελέσματα που βρίσκονται από επίλυση πεπερασμένων στοιχείων για διάφορες συνθήκες ερπυσμού. Πέραν από το μοντέλο του εκθετικού νόμου ερπυσμού (Norton [48]) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και κάθε άλλο καταστατικό μοντέλο ερπυσμού με παρόμοια μαθηματική δομή με κατάλληλη προσαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου.

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις μπορούν να εκφρασθούν σε αριθμητική μορφή με τη διακριτοποίηση του συνόρου σε ένα αριθμό «τετραγωνικών» συνοριακών στοιχείων τριών κόμβων με την προϋπόθεση ότι δεν είναι γειτονικά στην κορυφή της ρωγμής και του εσωτερικού σε εννεακομβικά «τετραγωνικά» τετράπλευρα εσωτερικά στοιχεία. Η διακριτοποίηση των ολοκληρωμάτων στο σύνορο εκτελείται χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες και τα πεδία του ρυθμού των μετατοπίσεων και των ελκυστών ενός αυθαίρετου σημείου του συνοριακού στοιχείου Γ_R τα οποία μπορούν να υπολογισθούν από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_m(\xi) x_i^{m\,R} \\ \dot{u}_i &= \varphi_m(\xi) \dot{u}_i^{m\,R} \\ \dot{\tau}_i &= \varphi_m(\xi) \dot{\tau}_i^{m\,R} \end{aligned} \tag{5.17}$$

όπου $\varphi_m(\xi)$ είναι οι «τετραγωνικές» συναρτήσεις σχήματος προσδιοριζόμενες σε κάθε κανονικό συνοριακό στοιχείο Γ_R μη γειτονικό στην κορυφή της ρωγμής ως εξής:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tfrac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ \varphi_2 &= (1-\xi^2) \\ \varphi_3 &= \tfrac{1}{2}\xi(\xi+1) \end{aligned} \tag{5.18}$$

όπου ξ οι αδιάστατες συντεταγμένες στο στοιχείο Γ_R, m =1,2,3 και $x_i^{m^R}, \dot{u}_i^{m^R}$ και $\dot{\tau}_i^{m^R}$ είναι οι τιμές των συντεταγμένων και των ρυθμών των μετατοπίσεων και των ελκυστών στους κόμβους του συνοριακού στοιχείου Γ_R αντίστοιχα.

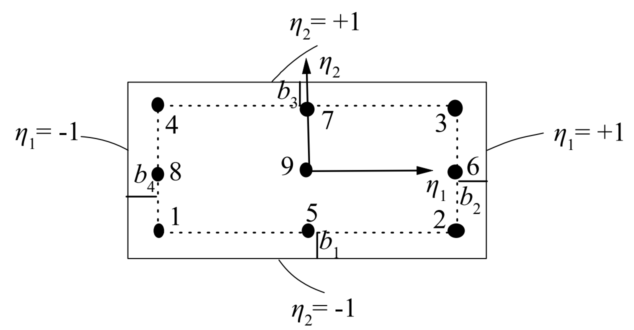
Οι συντεταγμένες και τα πεδία των ρυθμών της ανελαστικής παραμόρφωσης και της θερμοκρασίας για ένα αυθαίρετο εσωτερικό σημείο του κάθε εσωτερικού στοιχείου Ω_{IR} μπορούν να υπολογισθούν από τις εξισώσεις:

$$x_j = \varphi_g^*(\eta_1,\eta_2)x_j^{g^{(IR)}}$$

$$\dot{\varepsilon}_{jk}^{in} = \varphi_g^*(\eta_1,\eta_2)\dot{\varepsilon}_{jk}^{in\,g^{(IR)}} \tag{5.19}$$

$$\dot{T} = \varphi_g^*(\eta_1,\eta_2)\dot{T}^{g^{(IR)}}$$

όπου x_j οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός αυθαίρετου εσωτερικού σημείου του στοιχείου Ω_{IR} και x_j^g οι συντεταγμένες των κόμβων του Ω_{IR}, $\dot{\varepsilon}_{jk}^{in\,g}$ και $\dot{T}^g$ είναι οι τιμές των ρυθμών της ανελαστικής παραμόρφωσης και της θερμοκρασίας στους κόμβους του Ω_{IR}, η_1 και η_2 είναι οι αδιάστατες συντεταγμένες του κάθε εσωτερικού στοιχείου και $\varphi_g^*(\eta_1,\eta_2)$, g = 1,…,9 οι συναρτήσεις σχήματος του εννεακομβικού εσωτερικού στοιχείου [45] (Σχήμα 5.4):



Σχήμα 5.4: Εννεακομβικό εσωτερικό στοιχείο.

$$\varphi_1^* = \eta_1\eta_2\frac{(-\alpha_2+\eta_1)(-\alpha_3+\eta_2)}{\alpha_4\alpha_5\alpha_1\alpha_6}$$

$$\varphi_2^* = \eta_1\eta_2\frac{(-\alpha_4+\eta_1)(-\alpha_3+\eta_2)}{\alpha_2\alpha_5\alpha_1\alpha_6}$$

$$\varphi_3^* = \eta_1\eta_2 \frac{(-\alpha_4+\eta_1)(\alpha_1+\eta_2)}{\alpha_2\alpha_5\alpha_3\alpha_6}$$

$$\varphi_4^* = \eta_1\eta_2 \frac{(-\alpha_2+\eta_1)(\alpha_1+\eta_2)}{\alpha_4\alpha_5\alpha_3\alpha_6} \tag{5.20}$$

$$\varphi_5^* = \eta_2(a_2-\eta_1)(\alpha_4+\eta_1)\frac{(-\alpha_3+\eta_2)}{\alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_6}$$

$$\varphi_6^* = \eta_1(a_3-\eta_2)(\alpha_1+\eta_2)\frac{(\alpha_4+\eta_1)}{\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_5}$$

$$\varphi_7^* = \eta_2(a_2-\eta_1)(\alpha_4+\eta_1)\frac{(\alpha_1+\eta_2)}{\alpha_2\alpha_4\alpha_3\alpha_6}$$

$$\varphi_8^* = \eta_1(a_3-\eta_2)(\alpha_1+\eta_2)\frac{(-\alpha_2+\eta_1)}{\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$$

$$\varphi_9^* = (a_2-\eta_1)(\alpha_4+\eta_1)(a_3-\eta_2)\frac{(\alpha_1+\eta_2)}{\alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_3}$$

με $\alpha_i = 1-b_i \quad i=1,4$

$a_5 = a_2 + a_4$

$a_6 = a_1 + a_3$

όπου για κανονικά επιφανειακά στοιχεία μη γειτονικά της κορυφής της ρωγμής και της γραμμής της ρωγμής οι παράμετροι b_i είναι μηδέν.

Για την εύρεση ενός ειδικού στοιχείου το οποίο θα παρουσιάζει την HRR ιδιομορφία στην κορυφή της ρωγμής πρέπει να τροποποιηθούν οι «τετραγωνικές» συναρτήσεις σχήματος για τους ρυθμούς μετατόπισης. Με κατάλληλη επεξεργασία τους (Maiti [47]) με εκθέτη $\frac{1}{1+n}$ μπορούν να βρεθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις σχήματος οι οποίες εξαρτώνται από τον εκθέτη ερπυσμού n [45,46]:

$$\varphi_1^u = 2^{\frac{1}{1+n}}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^{1+\frac{1}{1+n}} - \left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{1}{1+n}}\right] + \left(\frac{r}{l}\right)$$

$$\varphi_2^u = 2^{1+\frac{1}{1+n}}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{1}{1+n}} - \left(\frac{r}{l}\right)^{1+\frac{1}{1+n}}\right] \tag{5.21}$$

$$\varphi_3^u = 2^{\frac{1}{1+n}}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^{1+\frac{1}{1+n}} - \left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{1}{1+n}}\right] - \left(\frac{r}{l}\right) + 1$$

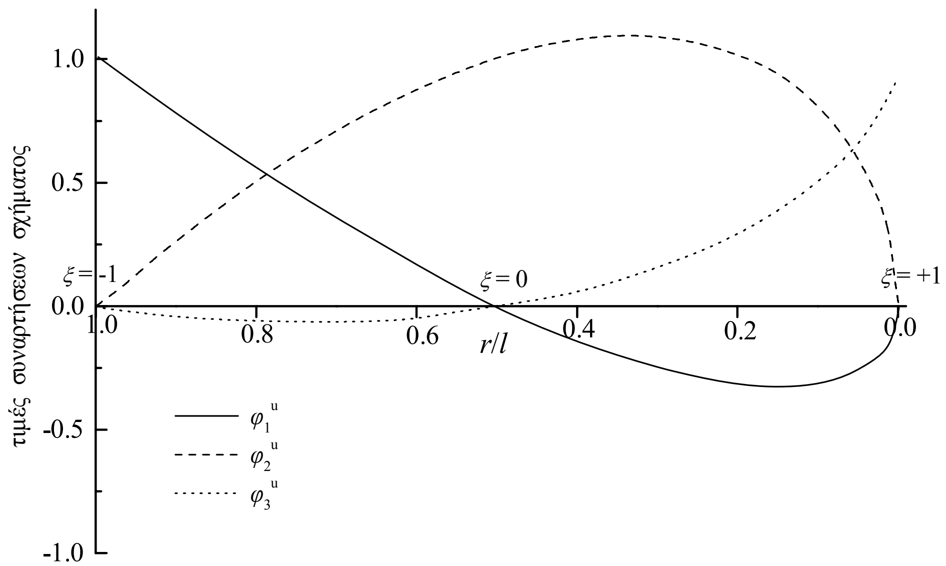
όπου l είναι το μήκος του νέου ειδικού «τετραγωνικού» στοιχείου, η απόσταση $r = l - x$ και ο λόγος μπορεί να προσδιορισθεί από τις αδιάστατες συντεταγμένες ξ ως $(r/l) = (1-\xi)/2$.

Οι συναρτήσεις σχήματος έχουν τις ακόλουθες τιμές στους κόμβους:

$\frac{r}{l} = 0$: $\varphi_1^u = 0,\ \varphi_2^u = 0,\ \varphi_3^u = 1$

$\frac{r}{l} = 0.5$: $\varphi_1^u = 0,\ \varphi_2^u = 1,\ \varphi_3^u = 0$

$\frac{r}{l} = 1$: $\varphi_1^u = 1,\ \varphi_2^u = 0,\ \varphi_3^u = 0$



Σχήμα 5.5: Συναρτήσεις σχήματος ρυθμού μετατόπισης ερπυσμού.

Με παραγώγιση των νέων συναρτήσεων σχήματος προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{\partial \varphi_1^u}{\partial x} = -\left(\frac{1}{l}\right) + 2^{\frac{1}{1+n}}\left(\frac{1}{1+n}\right)\left(\frac{1}{l}\right)\left(\frac{l-x}{l}\right)^{-\frac{n}{1+n}} - 2^{\frac{1}{1+n}+1}\left(\frac{1}{1+n}+1\right)\left(\frac{1}{l}\right)\left(\frac{l-x}{l}\right)^{\frac{1}{1+n}}$$

$$\frac{\partial \varphi_2^u}{\partial x} = -2^{\frac{1}{1+n}+1}\left(\frac{1}{1+n}\right)\left(\frac{1}{l}\right)\left(\frac{l-x}{l}\right)^{-\frac{n}{1+n}} + 2^{\frac{1}{1+n}+1}\left(\frac{1}{1+n}+1\right)\left(\frac{1}{l}\right)\left(\frac{l-x}{l}\right)^{\frac{1}{1+n}} \qquad (5.22)$$

$$\frac{\partial \varphi_3^u}{\partial x} = \left(\frac{1}{l}\right) - 2^{\frac{1}{1+n}}\left(\frac{1}{1+n}\right)\left(\frac{1}{l}\right)\left(\frac{l-x}{l}\right)^{-\frac{n}{1+n}} - 2^{\frac{1}{1+n}+1}\left(\frac{1}{1+n}+1\right)\left(\frac{1}{l}\right)\left(\frac{l-x}{l}\right)^{\frac{1}{1+n}}$$

Οι παράγωγοι παρουσιάζουν μια ιδιομορφία $r^{-n/(n+1)}$ κοντά στην κορυφή της ρωγμής η οποία είναι η πραγματική κατάσταση για τις ιδιομορφίες του ρυθμού της παραμόρφωσης. Μπορεί να αποδειχθεί ανάλογα όπως στο Maiti [47] ότι οι νέες συναρτήσεις σχήματος του ρυθμού των μετατοπίσεων εκπληρούν τα κριτήρια σύγκλισης του στερεού σώματος και του σταθερού ρυθμού παραμόρφωσης. Η ισχύς της σχέσης $\sum \varphi_i^u = 1$ ικανοποιεί το κριτήριο του στερεού σώματος. Το κριτήριο του σταθερού ρυθμού παραμόρφωσης ελέγχεται ως ακολούθως. Θεωρείται ότι η θερμοκρασία του στοιχείου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $\dot{T}$ περιορίζοντας πλήρως τον κόμβο 3. Τότε οι ρυθμοί των μετατοπίσεων είναι $\dot{u}_1 = l\alpha\dot{T}$ και $\dot{u}_2 = l\alpha\dot{T}/2$ όπου α ο συντελεστής θερμικής διαστολής. Ο ρυθμός παραμόρφωσης του στοιχείου είναι:

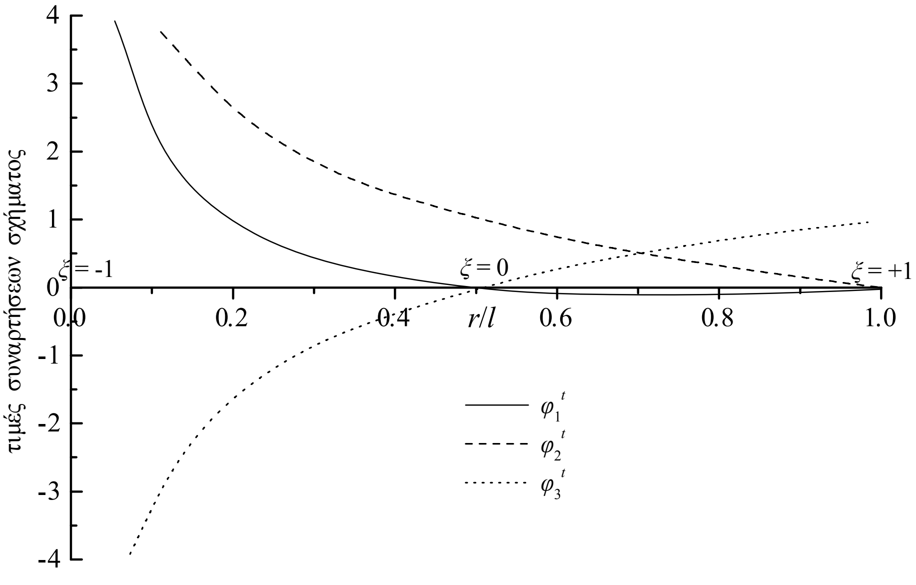
$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = \dot{u}_1 \frac{\partial \varphi_1^u}{\partial x} + \dot{u}_2 \frac{\partial \varphi_2^u}{\partial x} = \alpha\dot{T}$$

και επομένως το στοιχείο πληρεί την απαίτηση του σταθερού ρυθμού παραμόρφωσης.

Επειδή στη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων οι ρυθμοί των μετατοπίσεων και των ελκυστών εκφράζονται ανεξάρτητα, το παραπάνω ιδιόμορφο συνοριακό στοιχείο για την προσομοίωση της συμπεριφοράς στην κορυφή της ρωγμής του ρυθμού των μετατοπίσεων αποτυγχάνει να αποδώσει την αναμενόμενη συμπεριφορά των ρυθμών των ελκυστών στην κορυφή της ρωγμής η οποία παρουσιάζει μια ιδιομορφία της τάξης $-1/(n+1)$. Έτσι για την κατάλληλη προσομοίωση της ιδιομορφίας του ρυθμού των ελκυστών, διαφορετικές συναρτήσεις σχήματος παράγονται από τις παραγώγους των συναρτήσεων σχήματος του ρυθμού των μετατοπίσεων και τελικά τροποποιούνται στις ακόλουθες σχέσεις σε συνάρτηση με τον εκθέτη ερπυσμού n:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^t &= 2^{\frac{n}{1+n}}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^{\frac{1}{1+n}}-\left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{n}{1+n}}\right]-2+2\left(\frac{r}{l}\right)\\
\varphi_2^t &= 2^{\frac{n}{1+n}}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^{\frac{1}{1+n}}-\left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{n}{1+n}}\right]\\
\varphi_3^t &= 2^{\frac{n}{1+n}}\left[-\left(\frac{l}{r}\right)^{\frac{1}{1+n}}+\left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{n}{1+n}}\right]+1
\end{aligned} \tag{5.23}$$

όπου $r = x$ και ο λόγος $(r/l) = (1+\xi)/2$



Σχήμα 5.6: Συναρτήσεις σχήματος ρυθμού ελκυστή ερπυσμού.

Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις σχήματος ρυθμού των ελκυστών έχουν την κατάλληλη τάξη ιδιομορφίας επειδή έχουν εξάρτηση από $r^{-1(n+1)}$. Από τις παραπάνω συναρτήσεις σχήματος προκύπτει ότι η τιμή τους στην κορυφή της ρωγμής όπως αναμένεται δίδεται από τις ακόλουθες σχέσεις σύγκλισης:

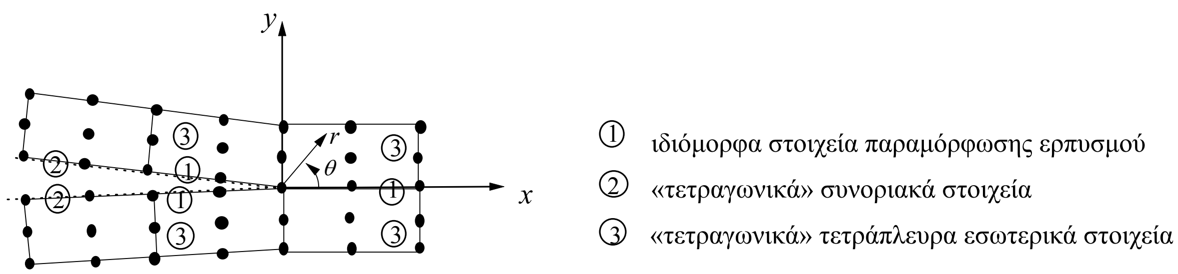
$$\varphi_1^t = \lim_{r \to 0}\left(\frac{l}{r}\right)^{\frac{1}{1+m}}, \qquad \varphi_2^t = \lim_{r \to 0}\left(\frac{l}{r}\right)^{\frac{1}{1+m}}, \qquad \varphi_3^t = \lim_{r \to 0}\left(\frac{l}{r}\right)^{\frac{1}{1+m}} \qquad \text{καθώς} \quad \frac{r}{l} = 0$$

$$\varphi_1^t = 0, \qquad \varphi_2^t = 1, \qquad \varphi_3^t = 0 \qquad \text{καθώς} \quad \frac{r}{l} = 0.5$$

$$\varphi_1^t = 0, \qquad \varphi_2^t = 0, \qquad \varphi_3^t = 1 \qquad \text{καθώς} \quad \frac{r}{l} = 1$$

Μια ταυτόχρονη προσομοίωση των πεδίων του ρυθμού των μετατοπίσεων και των ελκυστών με τη χρήση των αντίστοιχων συναρτήσεων σχήματος οδηγεί στα προτεινόμενα ιδιόμορφα στοιχεία παραμόρφωσης ερπυσμού (ΙΣΣΠΕ).

Η μοντελοποίηση του ρυθμού της ανελαστικής παραμόρφωσης γύρω από την κορυφή της ρωγμής (Σχήμα 5.7) εφαρμόζεται μέσω ημι-ασυνεχών εννεακομβικών τετράπλευρων επιφανειακών στοιχείων με τη χρήση των συναρτήσεων σχήματος τους με επιλογή κατάλληλης τιμής της παραμέτρου a_i. Σε αυτή την περίπτωση δύο διαφορετικοί κάναβοι πρέπει να ορισθούν: ο γεωμετρικός ο οποίος ορίζεται από τους κόμβους που κείνται στο σύνορο των επιφανειακών στοιχείων και ο λειτουργικός ο οποίος ορίζεται από τους λειτουργικούς κόμβους που είναι σε τέτοια απόσταση από τα συνοριακά στοιχεία ώστε να μη συμπίπτουν με τους γεωμετρικούς κόμβους στην κορυφή της ρωγμής



Σχήμα 5.7: Διακριτοποίηση στην κορυφή της ρωγμής.

5.3 Ασυμπτωτικά πεδία στην κορυφή ρωγμής σε υλικά με ερπυσμό

Η συμπεριφορά του υλικού περιγράφεται στο παρόν από την ελαστική-μη γραμμική ιξώδη καταστατική σχέση σύμφωνα με τον εκθετικό νόμο (Norton [48]):

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + B\sigma^{n} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_0\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{n} \tag{5.24}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας, σ_0 μια τάση αναφοράς, $\dot{\varepsilon}_0$ ένας ρυθμός αναφοράς παραμόρφωσης ερπυσμού και n είναι ο εκθέτης ερπυσμού. Στην περίπτωση πολυαξονικών καταστάσεων τάσης η εξίσωση 5.24 μπορεί να επεκταθεί:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} \\
\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} &= \frac{1+\nu}{E}\dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} \\
\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} &= \frac{3}{2}\dot{\varepsilon}_0\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^{n-1}\frac{S_{ij}}{\sigma_0}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

όπου S_{ij} είναι οι συνιστώσες του αποκλίνοντα τανυστή τάσης, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ και $\bar{\sigma}$ η ισοδύναμη τάση του Mises, που προσδιορίζεται από τη σχέση: $\bar{\sigma} = ((3/2)S_{ij}S_{ij})^{1/2}$.

Από την εξέταση των εξισώσεων 5.24 και 5.25 παρατηρείται ότι αν υπάρχει ένα ιδιόμορφο πεδίο στην κορυφή της ρωγμής στη χρονική στιγμή t = 0 υπερισχύουν τα ελαστικά ιδιόμορφα πεδία. Σε επόμενο χρονικό βήμα και σε αποστάσεις αρκετά κοντά στην κορυφή της ρωγμής το μέρος της παραμόρφωσης ερπυσμού στον ολικό ρυθμό παραμόρφωσης είναι πολύ μεγαλύτερο από τον ελαστικό ρυθμό και φαίνεται ότι διέπει το πεδίο στην κορυφή της ρωγμής (n>1). Έτσι οι καταστατικές εξισώσεις 5.24 και 5.25 γίνονται σχέσεις εκθετικού νόμου ερπυσμού.

Ο Hoff [125] θεώρησε ότι αν οι μετατοπίσεις και οι παραμορφώσεις στα ελαστοπλαστικά υλικά αντικατασταθούν αντίστοιχα με τους ρυθμούς των μετατοπίσεων και παραμορφώσεων σε υλικά που υπόκεινται σε ερπυσμό σε όλες τις βασικές εξισώσεις τότε η δομή της επίλυσης είναι παρόμοια για τα δύο είδη υλικών. Χρησιμοποιώντας το ανάλογο του Hoff για την αντιστοίχιση της σχέσης κράτυνσης του εκθετικού νόμου με τη σχέση ερπυσμού του εκθετικού νόμου, οι Riedel και Rice [32] και Ohji et al. [126] παρουσίασαν τα τύπου HRR ιδιόμορφα πεδία για υλικά ερπυσμού εκθετικού νόμου που περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \sigma_0 \left(\frac{C(t)}{\dot{\varepsilon}_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \widetilde{\sigma}_{ij}(\theta) \\
\dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_0 \left(\frac{C(t)}{\dot{\varepsilon}_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \widetilde{\varepsilon}_{ij}(\theta) \\
\dot{u}_i &= \dot{\varepsilon}_0 r \left(\frac{C(t)}{\dot{\varepsilon}_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \widetilde{u}_{ij}(\theta)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

όπου r η απόσταση από την κορυφή της ρωγμής και θ η γωνία σε σχέση με το x άξονα. Οι αδιάστατες σταθερές I_n και οι συναρτήσεις μεταβολής του θ των κατάλληλα κανονικοποιημένων συναρτήσεων $\widetilde{\sigma}_{ij}, \widetilde{\varepsilon}_{ij}$ και $\widetilde{u}_{ij}$ εξαρτώνται από τον εκθέτη ερπυσμού n και έχουν δοθεί σε πίνακες από τον Shih [127].

Ο συντελεστής εύρους $C(t)$ στην εξίσωση 5.26 εξαρτάται από το χρόνο εφαρμογής, το μέγεθος του φορτίου, τη μορφή της ρωγμής και τις ιδιότητες του υλικού. Είναι γνωστό από την εργασία στα πεπερασμένα στοιχεία των Bassani και McClindock [44] ότι σε κάθε κλειστή διαδρομή S γύρω από την κορυφή της ρωγμής, η οποία βρίσκεται στην περιοχή όπου οι ρυθμοί παραμόρφωσης ερπυσμού που δίδονται από την εξίσωση 5.24 υπερισχύουν αρκετά των ελαστικών, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ρυθμού παραμόρφωσης μπορεί να δοθεί από:

$$C(t) = \int_S \left[\left(\frac{n}{n+1} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \sigma_{11} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} - \sigma_{21} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_1} \right) dx_2 + \left(\sigma_{12} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_1} \right) dx_1 \right] \tag{5.27}$$

όπου S είναι μια μικρή, κλειστή, κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού διαδρομή τείνουσα να μηδενισθεί γύρω από την κορυφή της ρωγμής και $\dot{u}_1$, $\dot{u}_2$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ και σ_{ij} είναι οι ρυθμοί των μετατοπίσεων, οι ρυθμοί των παραμορφώσεων και οι τάσεις αντίστοιχα, υπολογιζόμενες κατά μήκος της διαδρομής S. Είναι φανερό ότι το ολοκλήρωμα $C(t)$ χαρακτηρίζει την ένταση των πεδίων κοντά στην κορυφή της ρωγμής σε ελαστικά - μη γραμμικά ιξώδη υλικά όπως το J-ολοκλήρωμα στα ανεξάρτητα του ρυθμού ελαστοπλαστικά υλικά.

Αναλογικά με την πλαστική ανάλυση, η ζώνη ερπυσμού μπορεί να προσδιορισθεί επίσης υποθέτοντας ότι το πεδίο τάσεων εξωτερικά της ζώνης είναι ουσιαστικά ελαστικό και το μέγεθος της μπορεί να υπολογισθεί από:

$$r_c(\theta,t) = \beta_c(n,\theta)\left(\frac{K^2}{2\pi}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}\left[\frac{I_n}{BC(t)}\right]^{\frac{2}{n-1}} \tag{5.28}$$

όπου r_c είναι το μέγεθος της ζώνης ερπυσμού, K είναι ο γνωστός συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων και $\beta_c(n,\theta)$ μια αδιάστατη συνάρτηση της γωνίας θ. Ο συντελεστής I_n προσμετρά τις καταστάσεις των τάσεων ενώ η σταθερά $B = \dot{\varepsilon}_0 / \sigma_0^n$.
Καθώς στην πορεία του χρόνου το μέγεθος της ζώνης ερπυσμού αυξάνει, μια εκτεταμένη κατάσταση ερπυσμού εμφανίζεται και το από τη διαδρομή και το χρόνο εξαρτώμενο ολοκλήρωμα του ρυθμού ενέργειας προσεγγίζει μια σταθερή τιμή C^*. Έχει δειχθεί ότι το $C(t)$ μπορεί να προσεγγισθεί από τον εμπειρικό τύπο:

$$C(t) \cong C^*\left(1 + \frac{t_T}{t}\right) \tag{5.29}$$

όπου t_T είναι ο χρόνος μετάβασης από τον ερπυσμό μικρής κλίμακας στον εκτεταμένο ερπυσμό και δίδεται από:

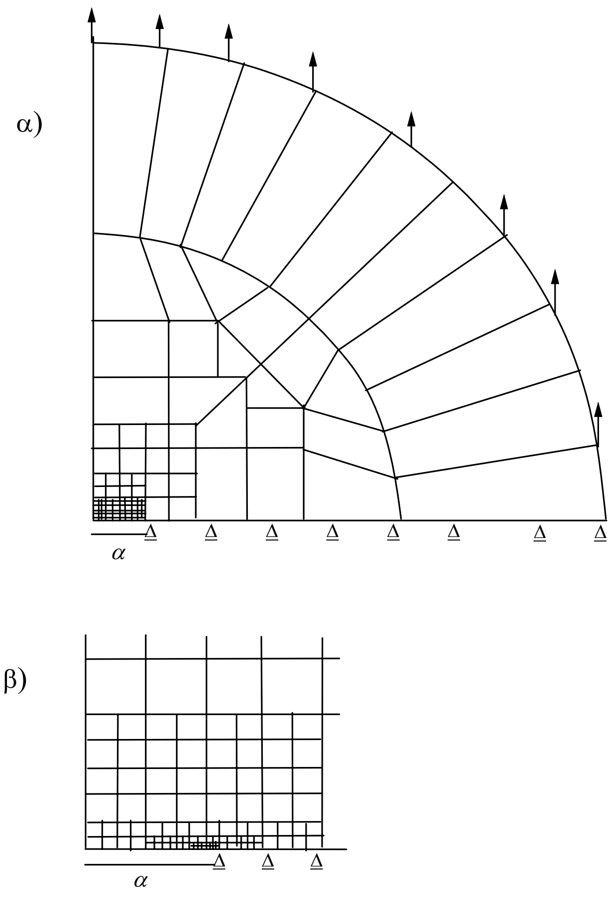
$$t_T = \frac{(1-v^2)K^2}{(n+1)EC^*} \tag{5.30}$$

Το ολοκλήρωμα ρυθμού ενέργειας $C(t)$ υπολογίζεται αριθμητικά ως προς το χρόνο μέσω των τιμών της τάσης, των ρυθμών της παραμόρφωσης και των ρυθμών των παραγώγων των μετατοπίσεων ως προς τον άξονα της ρωγμής με τη χρήση της εξίσωσης 5.27 για διαφορετικές διαδρομές. Κάθε διαδρομή αναλύεται σε ένα επαρκή αριθμό ευθυγράμμων τμημάτων και το ολοκλήρωμα σε κάθε τμήμα ευρίσκεται με τη μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss.

5.4 **Αριθμητικά αποτελέσματα** [45,46]

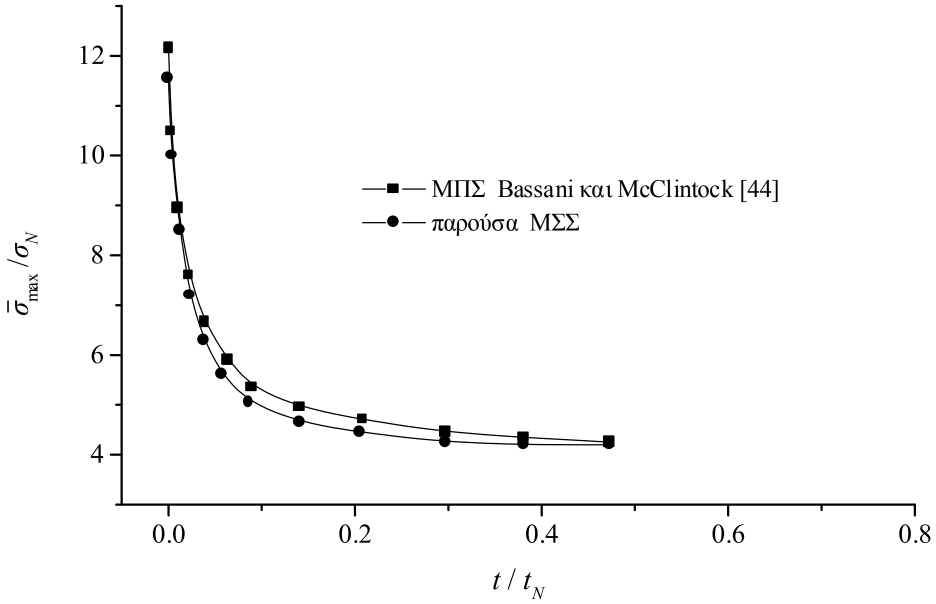
Παράδειγμα 1

Για να επιβεβαιωθεί η προταθείσα μεθοδολογία θεωρείται ένα δοκίμιο ημικυκλικής διατομής με ρωγμή σε επίπεδη παραμόρφωση. Ένα παρόμοιο παράδειγμα εξετάζεται επίσης στην εργασία για πεπερασμένα στοιχεία των Bassani και McClintock [44]. Αυτός ο ημικυκλικός δίσκος υποβάλλεται σε τύπου Ι ομοιόμορφη φόρτιση σε εφελκυσμό μεγέθους $\sigma_N = \sigma_0 = E/2000$. Ο δίσκος έχει ακτίνα ίση με 21α όπου α είναι το μήκος της ρωγμής. Όλα τα αποτελέσματα είναι για ν = 0.3 και και εκθέτη ερπυσμού n = 3. Μια τυπική διακριτοποίηση του εσωτερικού για αυτό το παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 5.8 α,β.



Σχήμα 5.8: α) διακριτοποίηση του εσωτερικού για δοκίμιο ημικυκλικής διατομής με ρωγμή. β) λεπτομέρεια της διακριτοποίησης στην περιοχή της κορυφής της ρωγμής.

Η μείωση των τάσεων ερπυσμού φαίνεται στο Σχήμα 5.9 όπως προκύπτει από την παρούσα μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων σε συνδυασμό με τη χρήση των ΙΣΣΠΕ στοιχείων και την μεθοδολογία των πεπερασμένων στοιχείων των Bassani και McClintock [44].



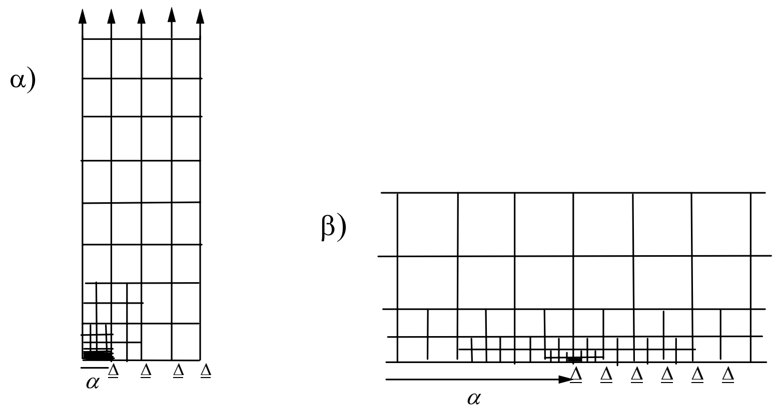
Σχήμα 5.9: Ανακατανομή των τάσεων ερπυσμού ως προς το χρόνο.

Η συμφωνία είναι καλή ειδικά για χρόνο $t > 0{,}5\, t_N$ όπου $t_N = (\sigma_N / E)/\dot{\varepsilon}_0(\sigma_N/\sigma_0)^n$. Η διαφορά που υπάρχει μεταξύ των δύο λύσεων προέρχεται πιθανόν από κάποια λάθη που προκύπτουν από την λύση των Bassani και McClintock [44] εξ αιτίας της χρήσης πεπερασμένων στοιχείων στην κορυφή της ρωγμής με ιδιομορφία παραμόρφωσης r^{-1} η οποία δεν προσεγγίζει την πραγματική ιδιομορφία παραμόρφωσης $r^{-n/(n+1)}$. Η τιμή του λόγου $\bar{\sigma}_{max}/\sigma_N$ της μέγιστης ισοδύναμης τάσης προς την εφαρμοζόμενη τάση σ_N είναι ίσος με 4.2 αντί του 4.28 που προκύπτει από τους Bassani και McClindock [44] για σταθερή κατάσταση (steady state).

Παράδειγμα 2

Θεωρείται ένα τυπικό δοκίμιο με ρωγμή στο μέσο της μιας αφόρτιστης πλευράς (SENT) σε εφελκυσμό σε συνθήκες τύπου Ι επίπεδης παραμόρφωσης. Το δοκίμιο έχει μια αβαθή ρωγμή μήκους α = 0.125 w και w = 101.6 cm. Το υλικό του δοκιμίου περιγράφεται από τον εκθετικό νόμο ερπυσμού 5.24 και έχει E = 153,717 GPa,

σ_0= 417,057 MPa, v = 0,33, n =5 και η σταθερά B = 1,347 x 10^{-16} $(\mathrm{MPa})^{-5}$/ h. Το δοκίμιο υποβάλλεται σε απομακρυσμένη ομοιόμορφη φόρτιση 206,85 MPa η οποία εφαρμόζεται στιγμιαία και έκτοτε διατηρείται σταθερή μέχρι να επιτευχθούν συνθήκες σταθερής κατάστασης (steady state). Η αρχική εφαρμογή του φορτίου υποτίθεται ότι είναι τόσο γρήγορη ώστε να υπάρχει καθαρά ελαστική απόκριση. Λόγω της συμμετρίας του δοκιμίου μόνο το μισό δοκίμιο διακριτοποιείται Σχήμα 5.10 α,β.



Σχήμα 5.10: α) διακριτοποίηση του εσωτερικού για SENT δοκίμιο β) λεπτομέρεια της διακριτοποίησης στην περιοχή της κορυφής της ρωγμής.

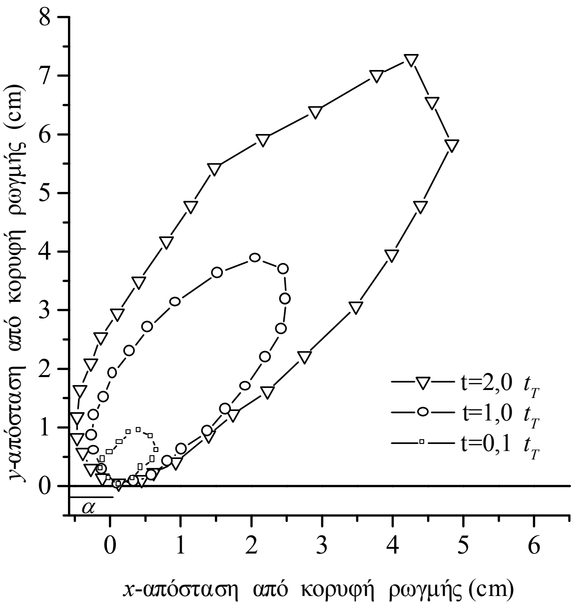
Το σύνορο της ζώνης ερπυσμού προσδιορίζεται ως η περιοχή όπου η ισοδύναμη παραμόρφωση ερπυσμού ($\bar{\varepsilon}^{in} = (\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^{in}\varepsilon_{ij}^{in})^{1/2}$) ισούται με την ισοδύναμη ελαστική παραμόρφωση ($\bar{\varepsilon}^{e} = (\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^{e}\varepsilon_{ij}^{e})^{1/2}$). Έτσι παίρνοντας το γεωμετρικό τόπο των εσωτερικών σημείων που ικανοποιούν αυτήν την ισότητα, η μορφή της ζώνης ερπυσμού του υπό εξέταση δοκιμίου φαίνεται στο Σχήμα 5.11 για χρόνο t = 0,1t_T, t = t_T και t = 2t_T όπου ο χρόνος μετάβασης t_T ίσος με 225 h όπως προκύπτει από την εξίσωση 5.30 και με τιμή του C^*= 0,797 MPa cm/h (εξισώσεις Li et al. [128])

$$C^* = B(w-\alpha)(\alpha/w)h_1(\alpha/w,n)(P\sigma_0/P_0)^{\tilde{n}+1}$$

$$P_0 = 1{,}455\tilde{n}(w-\alpha)\sigma_0 \tag{5.31}$$

$$\tilde{n} = \left(1+\left(\frac{\alpha}{w-\alpha}\right)^2\right)^{1/2} - \left(\frac{\alpha}{w-\alpha}\right)$$

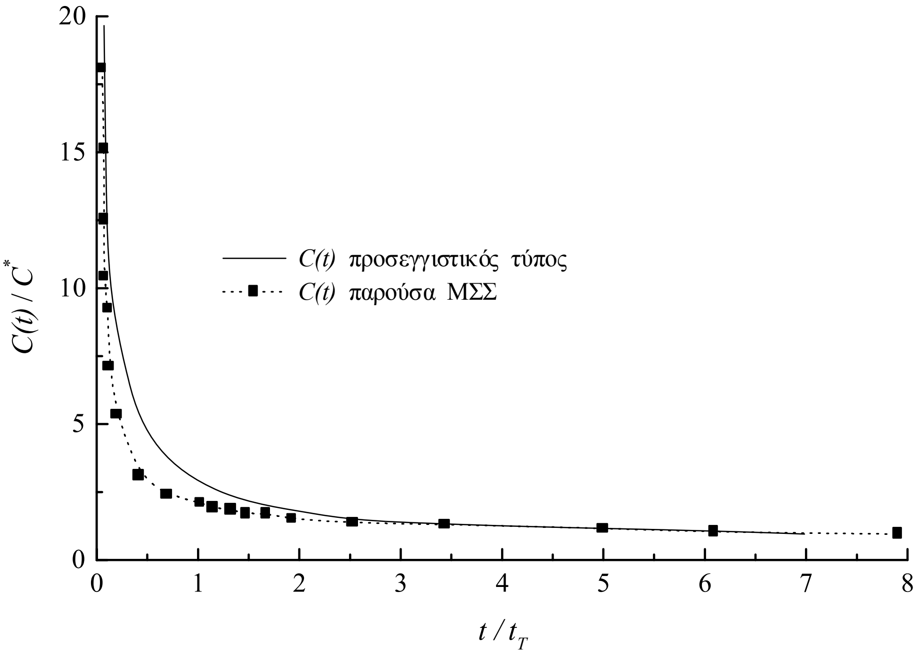
όπου P είναι το εφαρμοζόμενο φορτίο και h_1 μια αδιάστατη συνάρτηση που εξαρτάται από τον εκθέτη ερπυσμού n και το λόγο α/w και δίδεται από πίνακες στο Kumar et al. [129].



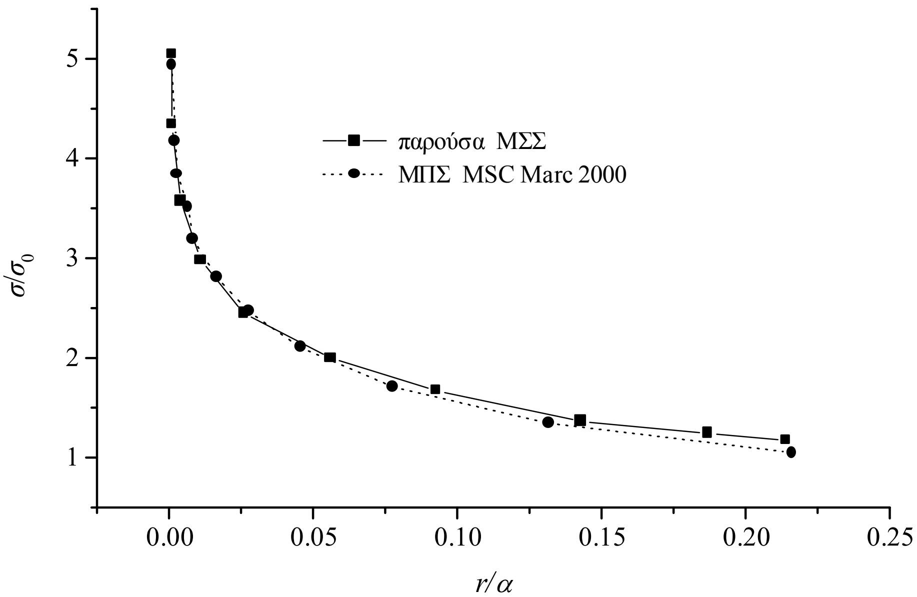
Σχήμα 5.11: Αύξηση ζώνης ερπυσμού στο SENT δοκίμιο.

Η απεικονιζόμενη στο Σχήμα 5.11 ζώνη ερπυσμού συμφωνεί αρκετά στη μορφή με εκείνες που παρουσιάστηκαν από τους Ehlers και Riedel [130]. Μπορεί να παρατηρηθεί επίσης ότι η παραμόρφωση ερπυσμού υπερισχύει στο εσωτερικό της ζώνης, ενώ ως αναμένεται η ελαστική παραμόρφωση υπερισχύει στο εξωτερικό της ζώνης ερπυσμού. Η χρονική εξάρτηση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος του ρυθμού ενέργειας $C(t)$ αποτιμάται αριθμητικά με ολοκλήρωση της εξίσωσης 5.27 κατά μήκος διαδρομής ακτίνας r = 0.018 α από την κορυφή της ρωγμής όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.12. Για χρονικό διάστημα $t > t_T$ το ολοκλήρωμα $C(t)$ όπως προκύπτει με την παρούσα μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων προσεγγίζει την τιμή που προκύπτει από τον προσεγγιστικό τύπο 5.29 σε σχέση με τις τιμές C^* = 0,797 MPa cm/h και t_T = 225 h. Παρατηρείται επίσης στο Σχήμα 5.12 ότι στο χρόνο $t \approx 3{,}5\, t_T$ το ολοκλήρωμα $C(t)$ προσεγγίζει την τιμή της σταθερής κατάστασης C^* = 0,797 MPa cm/h όπως αυτή υπολογίζεται από τις εξισώσεις Li et al. [128].

Η μείωση των τάσεων ερπυσμού για το παραπάνω δοκίμιο στο χρόνο $t = 0{,}1\, t_T$ κατά μήκος της γραμμής ρωγμής φαίνεται στο Σχήμα 5.13 όπως υπολογίζεται με την παρούσα μέθοδο και τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων του λογισμικού MSC Marc [131]. Οι δύο μέθοδοι δίδουν ανάλογα αποτελέσματα.



Σχήμα 5.12: Χρονική εξάρτηση ολοκληρώματος $C(t)$.



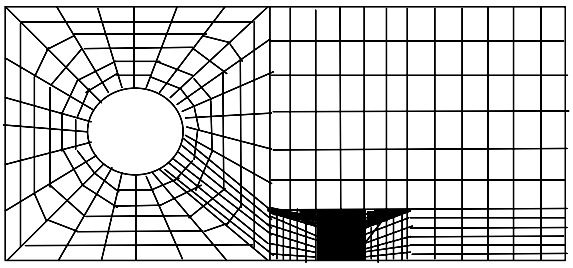
Σχήμα 5.13: Μείωση τάσεων ερπυσμού στο SENT δοκίμιο σε $t = 0{,}1\ t_T$.

Παράδειγμα 3

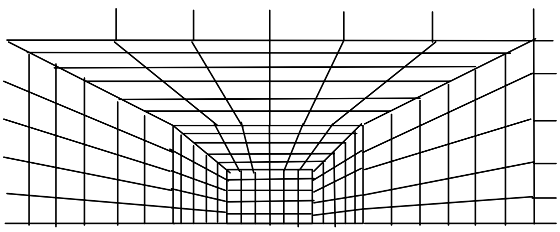
Θεωρείται ένα τυπικό δοκίμιο (CT) δοκιμής θραύσης σε εφελκυσμό με πλάτος w = 26mm και πάχος B_h = 13mm. Το δοκίμιο περιέχει μια ρωγμή μήκους α = 13mm και υποβάλλεται σε φόρτιση P = 7 KN. Οι ιδιότητες του υλικού είναι E = 181GPa, ν = 0,34, B = 2,65 x 10^{-56} (MPa^{-n})/h και ο εκθέτης ερπυσμού n = 18,27. Το φορτίο P = 7 KN εφαρμόζεται με ένα σύστημα στην οπή του Σχήματος 5.14 α. Οι κανονικοποιημένες τιμές του επικαμπύλιου ολοκληρώματος του ρυθμού ενέργειας C(t) φαίνονται στο Σχήμα 5.15. Η εξάρτηση του ολοκληρώματος C(t) από τη διαδρομή φαίνεται με την αποτίμηση του σε διαφορετικές διαδρομές (r/α). Η ακρίβεια της παρούσας μεθοδολογίας επαληθεύεται με σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εξίσωση 5.27 και αυτών που βρίσκονται από τον εμπειρικό τύπο 5.29.

Οι τιμές του πλήρως πλαστικού J-ολοκληρώματος για εκθετικό νόμο κράτυνσης (Kumar et al. [129]) μπορούν άμεσα να χρησιμοποιηθούν ως τιμές του C^* για εκθετικό νόμο ερπυσμού του CT δοκιμίου. Μια σύγκριση της τιμής C^* σε σταθερή κατάσταση όπως υπολογίζεται με την παρούσα μεθοδολογία συνοριακών στοιχείων και με αυτή που προκύπτει από την πλήρως πλαστική του J- ολοκληρώματος φαίνεται στο Σχήμα 5.16 σε συνάρτηση με το εφαρμοζόμενο φορτίο. Η πολύ καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων επιβεβαιώνει την εγκυρότητα της προταθείσας ΜΣΣ σε συνδυασμό με το ΙΣΣΠΕ συνοριακό στοιχείο.

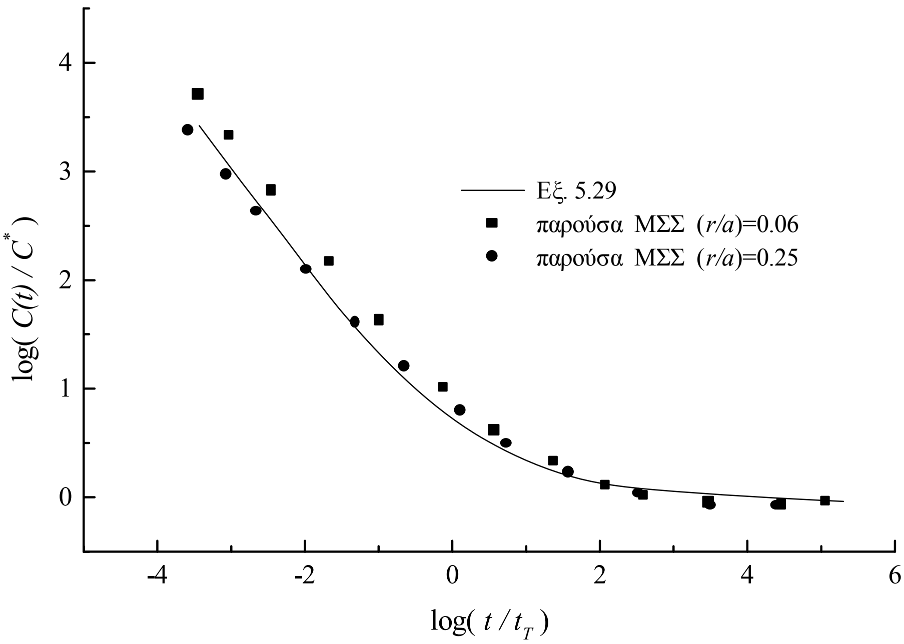
α)



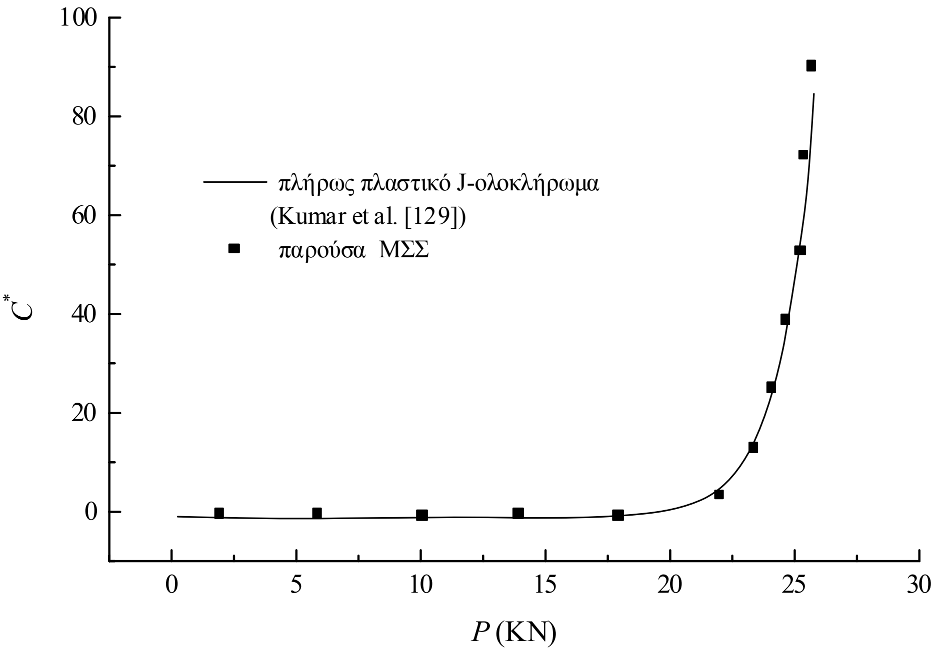
β)



Σχήμα 5.14: α) διακριτοποίηση του εσωτερικού για CT δοκίμιο β) λεπτομέρεια της διακριτοποίησης στην περιοχή της κορυφής της ρωγμής.



Σχήμα 5.15: Ολοκλήρωμα ενέργειας $C(t)$ ως προς το χρόνο για CT δοκίμιο.



Σχήμα 5.16: Ολοκλήρωμα ενέργειας $C(t)$ ως προς το εφαρμοζόμενο P φορτίο για CT δοκίμιο.

Η νέα μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων που βασίζεται στην εφαρμογή ενός ειδικού ιδιόμορφου συνοριακού στοιχείου εισάγεται για την αποτίμηση των πεδίων στην κορυφή της ρωγμής που προκύπτουν σε δισδιάστατα προβλήματα ερπυσμού υπό την επίδραση απομακρυσμένων φορτίων. Το νέο ιδιόμορφο συνοριακό στοιχείο είναι εύκολο στην εφαρμογή και δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα στο προκύπτον σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων και στην επίλυση του. Αυτή η νέα μεθοδολογία συναγωνίζεται σε ακρίβεια αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μεθοδολογία των πεπερασμένων στοιχείων και διαθέσιμων εμπειρικών λύσεων για αυτό το είδος της χρονικά εξαρτώμενης ανάλυσης θραύσης. Χρειάζεται να εξετασθεί η αποτελεσματικότητα του ΙΣΣΠΕ ιδιόμορφου συνοριακού στοιχείου σε περισσότερο πολύπλοκα προβλήματα θραύσης ερπυσμού με μη συμμετρικούς και αλληλεπιδρώντες τύπους ρωγμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΒΛΑΒΩΝ

6.1 Εισαγωγή

Το φαινόμενο των βλαβών (damage) συνίσταται από ασυνέχειες επιφανειών με τη μορφή των μικρορωγμών ή από ασυνέχειες όγκου με τη μορφή κοιλοτήτων. Περιέχει μια ρεολογική διαδικασία εντελώς διαφορετική από την παραμόρφωση αν και οι αρχικές αιτίες και των δύο φαινομένων είναι πανομοιότυπες: κίνηση και συσσώρευση των εξαρμόσεων στα μέταλλα, τροποποίηση των ενδομοριακών δεσμών στα οργανικά υλικά και μικροαποσταθεροποίηση στα μεταλλεύματα. Οι βλάβες χαρακτηρίζονται από έντονη μη αναστρεψιμότητα: η παραδοσιακή θερμομηχανική συμπεριφορά μπορεί μόνο μερικά να εξαλείψει τις προκαλούμενες από αυτή ατέλειες. Η μακροσκοπική θραύση έχει μελετηθεί προ πολλού χρόνου. Ένας αριθμός κριτηρίων αστοχίας όπως: συναρτήσεις των συνιστωσών της τάσης ή της παραμόρφωσης χαρακτηρίζουσες τη θραύση του στοιχείου όγκου έχουν προταθεί από τους Coulomb, Rankine, Tresca, von Mises, Mohr και Caquot.

Εν τούτοις μόνο πρόσφατα το ενδιαφέρον κατευθύνθηκε στη διαμόρφωση μοντέλου προοδευτικής φθοράς υλικού η οποία προηγείται της μακροσκοπικής θραύσης. Η ανάπτυξη της μηχανικής των βλαβών άρχισε το 1958. Αυτό το έτος ο Kachanov έκανε την πρώτη δημοσίευση πάνω σε συνεχή μεταβλητή βλάβης στο πλαίσιο, αν και περιορισμένα, της αστοχίας ερπυσμού μετάλλων σε μονοαξονική φόρτιση. Αυτή η ιδέα επανήλθε τη δεκαετία του 70, κυρίως στη Γαλλία (Lemaitre και Chaboche), Σουηδία (Hult), Αγγλία (Leckie) και Ιαπωνία (Murakami) και επεκτάθηκε στην όλκιμη θραύση και στη θραύση κόπωσης. Έχει γενικευθεί σε πολυαξονική ισότροπη περίπτωση στο πλαίσιο της θερμοδυναμικής μη αντιστρεπτής διαδικασίας.

Ένα υλικό θεωρείται ελεύθερο από κάθε βλάβη όταν δεν περιέχει ρωγμές και κοιλότητες σε μικροκλίμακα ή από μια πιο πραγματική θεώρηση, αν η παραμορφωσιακή του συμπεριφορά είναι αυτή του υλικού του κατασκευασμένου κάτω από τις καλύτερες δυνατές συνθήκες. Η αρχική κατάσταση του υλικού δεν μπορεί να προσδιορισθεί αντικειμενικά. Συνήθως, είναι η κατάσταση πέραν της οποίας είναι γνωστή η ιστορία φόρτισης. Η τελική κατάσταση βλαβών είναι αυτή της θραύσης του στοιχείου όγκου, δηλ. η ύπαρξη μακροσκοπικής ρωγμής μεγέθους του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου που για μέταλλα και πολυμερή είναι της τάξης των 0.1-1 mm, για ξύλο 1 cm και για σκυρόδεμα 10cm. Για μεγαλύτερες της τάξης αυτής ρωγμές ασχολείται η μηχανική των ρωγμών.

Η θεωρία των βλαβών περιγράφει όμως την ανάπτυξη των φαινομένων μεταξύ της παρθενικής κατάστασης και της έναρξης μακροσκοπικής ρωγμής. Αυτή η ανάπτυξη που δεν είναι πάντοτε ευδιάκριτη από τα φαινόμενα παραμόρφωσης τα οποία τη συνοδεύουν συνήθως οφείλεται σε διάφορους μηχανισμούς όπως:

όλκιμη πλαστική βλάβη που ακολουθεί μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις των μετάλλων σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος ή μέσες θερμοκρασίες,

ψαθυρή ιξωδοπλαστική (ή ερπυσμού) βλάβη, μια συνάρτηση του χρόνου που για μέταλλα σε μέσες ή υψηλές θερμοκρασίες αντιστοιχεί σε αποσταθεροποίηση των εσωτερικών κόκκων ακολουθούμενη από ιξωδοπλαστικές παραμορφώσεις,

βλάβη κόπωσης (ή μικροπλαστική), προκαλούμενη από τις επαναλαμβανόμενες τάσεις και εξαρτώμενη από τον αριθμό των κύκλων,

μακροψαθυρή βλάβη, προκαλούμενη από μονοτονική φόρτιση χωρίς αξιοσημείωτες μη αναστρέψιμες παραμορφώσεις, όπως στην περίπτωση του σκυροδέματος.

Και άλλα φαινόμενα μπορούν να θεωρηθούν ως βλάβη όπως: η οξείδωση, η διάβρωση και η ακτινοβολία.

Επομένως η θεωρία βλαβών αναφέρεται σε όλα τα υλικά σε χαμηλές και υψηλές θερμοκρασίες και σε κάθε είδους φόρτιση. Με τα μοντέλα εξέλιξης μπορούν να αναπαριστώνται αυτά τα διαφορετικά φαινόμενα τα οποία μπορούν να προστίθενται ή να αλληλεπιδρούν. Γνωρίζοντας την ιστορία τάσης και παραμόρφωσης για ένα δεδομένο στοιχείο όγκου μιας κατασκευής, οι νόμοι βλαβών παρέχουν με ολοκλήρωση ως προς το χρόνο, την εξέλιξη της βλάβης στο στοιχείο μέχρι το σημείο έναρξης της μακροσκοπικής ρωγμής. Έτσι η θεωρία παρέχει το χρόνο ή τον αριθμό των κύκλων που αντιστοιχούν στην έναρξη μιας τέτοιας ρωγμής στο περισσότερο καταπονούμενο σημείο της κατασκευής. Αυτή είναι η σύγχρονη αρχή της ανάλυσης της αντίστασης των κατασκευών χρησιμοποιούμενη στο επίπεδο σχεδιασμού και στην επαλήθευση και στον έλεγχο σε κατάσταση λειτουργίας της κατασκευής. Παρέχει επίσης ένα καλύτερο μέσο βελτιστοποίησης στη διαδικασία κατεργασίας μετάλλων με πλαστικές παραμορφώσεις, για αποφυγή ή μείωση κατασκευαστικών ατελειών. Σε κάθε περίπτωση είναι το μέσο για τη γνώση εκ των προτέρων των αλλαγών στις μηχανικές ιδιότητες του προϊόντος που απορρέουν από τη διαδικασία κατεργασίας.

Ο προσδιορισμός μιας μηχανικής μεταβλητής βλάβης από μόνο του είναι ένα δύσκολο πρόβλημα. Δεν υπάρχει κάτι που μακροσκοπικά να διακρίνει ένα στοιχείο όγκου με υψηλή βλάβη και ένα παρθένο. Επομένως είναι αναγκαίες εσωτερικές μεταβλητές οι οποίες θα είναι αντιπροσωπευτικές της επιδεινωμένης κατάστασης του υλικού. Υπάρχουν διάφορες δυνατότητες για αυτή την επιλογή εξαρτώμενες από τη σχολή σκέψης και τη μορφή των μετρήσεων των βλαβών:

- μετρήσεις στην κλίμακα της μικροδομής (πυκνότητα μικρορωγμών ή κοιλοτήτων) οδηγούν σε μοντέλα μικροκλίμακας με τα οποία μπορεί να γίνει ολοκλήρωση στο μακροσκοπικό στοιχείο όγκου. Έτσι μπορούν να βρεθούν οι ιδιότητες του στοιχείου όγκου που έχει υποστεί βλάβη αλλά από αυτές είναι δύσκολο να προσδιορισθεί μια μακροσκοπική μεταβλητή βλάβης και ένας νόμος εξέλιξης της ο οποίος να μπορεί να χρησιμοποιηθεί εύκολα στην ανάλυση της μηχανικής του συνεχούς μέσου,
- συνολικές φυσικές μετρήσεις (πυκνότητα, ειδική αντίσταση) απαιτούν τον προσδιορισμό ενός συνολικού μοντέλου για τη μετατροπή τους σε ιδιότητες που χαρακτηρίζουν μηχανική αντίσταση,
- ένας άλλος τύπος αποτίμησης βλάβης συνδέεται με τον απομένοντα χρόνο ζωής αλλά αυτή η έννοια δεν οδηγεί άμεσα σε ένα καταστατικό νόμο βλαβών,
- συνολικές μηχανικές μετρήσεις (της μεταβολής των ελαστικών, πλαστικών ή ιξωδοπλαστικών ιδιοτήτων) είναι ευκολότερο να ερμηνεύσουν μεταβλητές βλαβών χρησιμοποιώντας την έννοια της ενεργού τάσης (effective stress).

6.1.1 Μεταβλητή βλάβης

Θεωρείται ένα στερεό με βλάβες από το οποίο έχει απομονωθεί ένα πεπερασμένο στοιχείο όγκου με επαρκές μέγεθος σε σχέση με την ανομοιογένεια του μέσου και S είναι η επιφάνεια του στοιχείου και *n* το κάθετο διάνυσμα. Σε αυτή τη διατομή ρωγμές και κοιλότητες οι οποίες συνιστούν τη βλάβη, αφήνουν ίχνη διαφορετικών τύπων.

Ας είναι $\widetilde{S}$ η ενεργός επιφάνεια αντίστασης ($\widetilde{S} < S$) παίρνοντας υπόψη την επιφάνεια αυτών των ιχνών, τις συγκεντρώσεις τάσεων στη γειτονιά των γεωμετρικών ασυνεχειών και την αλληλεπίδραση μεταξύ των γειτονικών ατελειών. Η διαφορά:

$$S_D = S - \widetilde{S} \tag{6.1}$$

είναι η συνολική επιφάνεια των ιχνών των ατελειών διορθωμένη για συγκεντρώσεις τάσεων και αλληλεπιδράσεις.

Εξ ορισμού:

$$D_n = S_D / S \tag{6.2}$$

είναι το μηχανικό μέτρο της τοπικής βλάβης σε σχέση με τη διεύθυνση *n*. Από φυσική άποψη η μεταβλητή βλάβης είναι η σχετική (ή διορθωμένη) επιφάνεια των ρωγμών και των κοιλοτήτων σε διεύθυνση κάθετη στο διάνυσμα *n*. Από μαθηματική άποψη, καθώς η *S* τείνει στο μηδέν, η μεταβλητή D_n είναι η (διορθωμένη) επιφανειακή πυκνότητα των ασυνεχειών του υλικού σε επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα *n*.

$D_n = 0$ αντιστοιχεί σε κατάσταση χωρίς βλάβες,

$D_n = 1$ αντιστοιχεί σε θραύση του στοιχείου όγκου σε δύο μέρη κατά μήκος του καθέτου στο διάνυσμα *n* επιπέδου,

$0 < D_n < 1$ χαρακτηρίζει κατάσταση με βλάβες.

Στη γενική περίπτωση της ανισότροπης βλάβης που συνίσταται από ρωγμές και κοιλότητες με προτιμώμενο προσανατολισμό, η τιμή της βαθμωτής μεταβλητής D_n εξαρτάται από τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος *n* και η αντίστοιχη εσωτερική μεταβλητή μπορεί να παρασταθεί με τανυστή δεύτερης ή τέταρτης τάξης.
Η ισότροπη βλάβη περιλαμβάνει ρωγμές και κοιλότητες κατανεμημένες ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις. Σε αυτήν την περίπτωση η μεταβλητή δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό και η κατάσταση βλάβης χαρακτηρίζεται πλήρως από το βαθμωτό μέγεθος *D*.

6.1.2 Ενεργός τάση

Η εισαγωγή της μεταβλητής βλάβης η οποία παριστά την επιφανειακή πυκνότητα των ασυνεχειών στο υλικό, οδηγεί άμεσα στην έννοια της ενεργού τάσης, δηλ. της υπολογιζόμενης τάσης στη διατομή που ανθίσταται ενεργά στις δυνάμεις.

Σε μονοαξονική φόρτιση, αν *F* είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη σε μια διατομή του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου, $\sigma = F/S$ είναι η συνήθης τάση που ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας. Με την παρουσία ισότροπης βλάβης *D*, η ενεργός επιφάνεια αντίστασης είναι:

$$\widetilde{S} = S - S_D = S(1-D) \tag{6.3}$$

και εξ ορισμού η ενεργός τάση $\widetilde{\sigma}$ είναι:

$$\widetilde{\sigma} = \sigma\, S / \widetilde{S} \quad \text{ή} \quad \widetilde{\sigma} = \sigma /(1-D) \tag{6.4}$$

προφανώς $\widetilde{\sigma} \geq \sigma$

$\widetilde{\sigma} = \sigma$ για υλικό χωρίς βλάβες,

$\widetilde{\sigma} \to \infty$ τη στιγμή της θραύσης.

Στην περίπτωση πολυαξονικής ισότροπης βλάβης, ο λόγος $S / \widetilde{S}$ δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό του κάθετου διανύσματος και ο συντελεστής 1/(1-*D*) μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλες τις συνιστώσες.

6.1.3 Αρχή της ισοδυναμίας παραμόρφωσης

Υποτίθεται ότι η παραμορφωσιακή συμπεριφορά του υλικού επηρεάζεται μόνο από βλάβη με τη μορφή της ενεργού τάσης. Κάθε παραμορφωσιακή συμπεριφορά, μονοαξονική ή πολυαξονική, ενός υλικού με βλάβες εκφράζεται με καταστατικούς νόμους του παρθένου υλικού όπου η συνήθης τάση αντικαθίσταται από την ενεργό.

Για παράδειγμα, ο μονοαξονικός γραμμικός νόμος ενός υλικού με βλάβες γράφεται:

$$\varepsilon^e = \frac{\widetilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \tag{6.5}$$

όπου *E* είναι το μέτρο ελαστικότητας. Αυτό αποτελεί μια μη αυστηρή υπόθεση η οποία δέχεται ότι όλες οι διαφορετικές συμπεριφορές (ελαστικότητα, πλαστικότητα, ιξωδοπλαστικότητα) επηρεάζονται με τον ίδιο τρόπο από την επιφανειακή πυκνότητα των ατελειών. Η απλότητα αυτή επιτρέπει την καθιέρωση ενός συνεκτικού και επαρκούς φορμαλισμού.

6.1.4 Κρίσιμη βλάβη ή θραύση

Με την εφαρμογή της έννοιας της ενεργού τάσης τη στιγμή της θραύσης από ενδοατομική αποσταθεροποίηση, προσδιορίζεται η κρίσιμη τιμή της βλάβης D_c, όπως αυτή αντιστοιχεί στην εμφάνιση αυτού του φαινομένου.

Αν $\widetilde{\sigma}_u$ είναι η μονοαξονική τάση θραύσης από αποσταθεροποίηση (decohesion) και σ_u είναι η συνήθης απώτατη τάση θραύσης :

$$\widetilde{\sigma}_u = \sigma_u / (1 - D_c)$$

ή

$$D_c = 1 - (\sigma_u / \widetilde{\sigma}_u) \qquad (6.6)$$

Η φυσική των στερεών δείχνει ότι η τιμή της $\widetilde{\sigma}_u$ είναι της τάξης *E*/50 – *E*/20, για κοινά υλικά η $\widetilde{\sigma}_u$ είναι της τάξης *E*/100 – *E*/250, και η D_c είναι επομένως της τάξης 0.5 – 0.9. Αυτό επιτρέπει την παράλειψη του όρου $(1 - D_c)^x$ (με $x >> 1$), ενός όρου που συχνά εμφανίζεται στους υπολογισμούς, σε σύγκριση με τη μονάδα.

6.1.5 Μέτρηση βλάβης

Η βλάβη δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα. Η ποσοτική της αποτίμηση, όπως για κάθε φυσικό μέγεθος, συνδέεται με τον ορισμό της επιλεγείσας μεταβλητής που περιγράφει το φαινόμενο. Έχοντας επιλέξει ένα ορισμό βασισμένο στην έννοια της ενεργού τάσης συνδεδεμένης με την υπόθεση της ισοδυναμίας παραμόρφωσης, οι μετρήσεις που απορρέουν από αυτόν είναι συνδεδεμένες με τη σύζευξη παραμόρφωσης και βλάβης, δηλ. με τη μεταβολή των μηχανικών ιδιοτήτων που προξενεί η βλάβη.

Μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας

Από τη σχέση (6.4) προκύπτει:

$$\widetilde{\sigma} = \sigma / (1 - D) = E\varepsilon^e$$

ή

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon^e \qquad (6.7)$$

όπου *E* είναι το μέτρο του Young δηλ. το μέτρο ελαστικότητας του υλικού απαλλαγμένο από κάθε βλάβη. Το $E(1 - D) = \widetilde{E}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως το μέτρο ελαστικότητας του υλικού με βλάβη. Αν το μέτρο ελαστικότητας *E* είναι γνωστό, κάθε μέτρηση της ελαστικής δυσκαμψίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της βλάβης από τη σχέση:

$D = 1 - \sigma / (E\varepsilon^e)$ και με αντικατάσταση της $\sigma = \widetilde{E}\varepsilon^e$ προκύπτει:

$$D = 1 - \widetilde{E} / E \qquad (6.8)$$

Αν και πολύ απλή κατά γενική θεώρηση, η μέτρηση είναι μάλλον παραπλανητική για τους ακόλουθους λόγους:

κάθε μέτρηση του μέτρου ελαστικότητας απαιτεί ακριβή μέτρηση πολύ μικρών παραμορφώσεων,

η βλάβη συνήθως περιορίζεται τοπικά το οποίο απαιτεί οι μετρήσεις να γίνουν σε μια πολύ μικρή βάση της τάξης των 0.5-5mm,

στο απαιτούμενο επίπεδο ακριβείας, η καλύτερη ευθεία γραμμή στο διάγραμμα τάσεων- παραμορφώσεων που παριστά μια ελαστική φόρτιση ή αποφόρτιση είναι δύσκολο να προσδιορισθεί.

Για τους παραπάνω λόγους συνιστάται :

η χρήση δοκιμίων με μειωμένης επιφάνειας κεντρική διατομή για τον περιορισμό της βλάβης σε αυτή,

μέτρηση της παραμόρφωσης με μικρά όργανα 0.5 mm x 0.5 mm όταν η θερμοκρασία το επιτρέπει ή με μετατροπείς μετατόπισης συνδεδεμένους με όσο το δυνατό μικρότερη βάση μετρήσεων όταν η θερμοκρασία είναι πάνω από 200^o C,

προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας κατά τη διάρκεια ελαστικής αποφόρτισης με αποφυγή των ζωνών υψηλής μη γραμμικότητας. Αυτό επιτυγχάνεται κάνοντας τον προσδιορισμό σε ένα εύρος τάσεων προσδιοριζόμενο ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\max} < \sigma < \sigma_{\min} \\ &\sigma_{\max} = 0.85\sigma(\varepsilon) \\ &\sigma_{\min} = 0.15\sigma(\varepsilon) \end{aligned} \tag{6.9}$$

Αν τηρηθούν αυτοί οι όροι, η βλάβη μπορεί να προσδιορισθεί με σχετική ακρίβεια της τάξης του $\pm 5\%$ και η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί για κάθε είδος βλάβης.

Μεταβολή των πλαστικών χαρακτηριστικών

Χαρακτηριστικά μονοτονικής κράτυνσης

Η μέθοδος αυτή έχει ενδιαφέρον ειδικά για το χαρακτηρισμό της όλκιμης πλαστικής βλάβης ως συμπλήρωμα της μεθόδου των μετρήσεων μέσω της μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας. Η όλκιμη πλαστική βλάβη ακολουθεί τις μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις στα μέταλλα και στα πολυμερή και γίνεται σημαντική μόνο καθώς προσεγγίζεται η κατάσταση λαιμού. Σε πειράματα κράτυνσης, αυτό είναι εμφανές από την πτώση της τάσης που αρχίζει από το σημείο της αστάθειας που προσδιορίζεται από τη $d\sigma / d\varepsilon = 0$. Αυτή η πτώση στην τάση οφείλεται στο συνδυασμό της γεωμετρικής επίδρασης (λαιμός) και της επίδρασης της βλάβης (μείωση της ενεργού διατομής $\widetilde{S} = S - S_D$).

Ο νόμος κράτυνσης για ένα υλικό χωρίς βλάβη και για μεγάλες παραμορφώσεις είναι [3]:

$$\varepsilon_v^p = \left\langle \frac{\sigma_v - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y} \tag{6.10}$$

$$\varepsilon_v^p = \ln(1 + \varepsilon^p) \tag{6.11}$$

όπου ε_v^p η πραγματική πλαστική παραμόρφωση, σ_v η πραγματική τάση, σ_Y είναι το ελαστικό όριο, K_Y ο συντελεστής πλαστικής αντίστασης, M_Y ο εκθέτης κράτυνσης και οι γωνιακές αγκύλες είναι $<x> = x$ αν $x>0$ και $<x>=0$ αν $x \leq 0$.

Όταν η βλάβη γίνει αισθητή ($\varepsilon_v > \varepsilon_v^*$) η υπόθεση της ισοδυναμίας παραμόρφωσης σε συνδυασμό με την έννοια της ενεργού τάσης δίδει:

$$\varepsilon_v^p = \frac{1}{K_Y^{M_Y}} \left\langle \frac{\sigma_v}{1 - D} - \sigma_Y \right\rangle^{M_Y} \tag{6.12}$$

Αυτή η έκφραση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση του D έμμεσα από το διάγραμμα (σ_v, ε_v) πραγματικών τάσεων – πραγματικών παραμορφώσεων :

$$D = 1 - \frac{\sigma_v}{K_Y \varepsilon_v^{p^{1/M_Y}} + \sigma_Y} \tag{6.13}$$

Χαρακτηριστικά κυκλικής κράτυνσης

Η μέθοδος είναι κατάλληλη ειδικά για τη μέτρηση βλάβης σε χαμηλού κύκλου κόπωση. Ο βασικός νόμος κυκλικής πλαστικότητας χρησιμοποιείται με τη μορφή της σχέσης μεταξύ της μέγιστης πλαστικής παραμόρφωσης σε ένα σταθεροποιημένο κύκλο και της μέγιστης τάσης.

$$\varepsilon_{\max}^{p*} = \left[\frac{\sigma_{\max}^*}{K_c} \right]^{M_c} \tag{6.14}$$

όπου K_c ο συντελεστής πλαστικής αντίστασης και M_c ο εκθέτης κράτυνσης για κυκλική φόρτιση.

Γενικά υποτίθεται ότι η βλάβη κόπωσης είναι αμελητέα σε ένα σταθεροποιημένο κύκλο. Η περαιτέρω εξέλιξη της μέγιστης πλαστικής παραμόρφωσης σε ένα πείραμα ελεγχόμενης τάσης ($\sigma_{\max} = \sigma^*_{\max}$) αποδίδεται στη βλάβη. Η υπόθεση της ισοδυναμίας παραμόρφωσης σε συνδυασμό με την έννοια της ενεργού τάσης για κάθε κύκλο δίδει:

$$\varepsilon^p_{\max} = \left[\frac{\sigma^*_{\max}}{K_c(1-D)} \right]^{M_c} \tag{6.15}$$

και η βλάβη προκύπτει με το συνδυασμό των δύο παραπάνω σχέσεων:

$$D = 1 - \left(\frac{\varepsilon^{p^*}_{\max}}{\varepsilon^p_{\max}} \right)^{1/M_c} \tag{6.16}$$

Η σχετική ακρίβεια της μεθόδου είναι της τάξης 10-20%, η μεγαλύτερη δυσκολία είναι η αποτίμηση της σταθεροποιημένης κατάστασης.

Σε αντίθεση κάτω από ελεγχόμενη πλαστική παραμόρφωση ($\varepsilon^p_{\max} = \varepsilon^{p^*}_{\max}$), η ίδια μέθοδος δίδει:

$$D = 1 - \sigma_{\max} / \sigma^*_{\max} \tag{6.17}$$

Κάτω από ελεγχόμενη συνολική παραμόρφωση, η εξήγηση είναι περισσότερο σύνθετη επειδή σε μια τέτοια περίπτωση τόσο η ελαστικότητα όσο και οι κυκλικοί νόμοι επηρεάζονται από τη βλάβη.

Για ένα πείραμα κόπωσης με μη συμμετρική φόρτιση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ίδια μέθοδος αλλά με συνυπολογισμό της προοδευτικής αυξητικής επίδρασης με μια καταστατική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{\delta \varepsilon^p_{\max}}{\delta N} = \left[\frac{\sigma_{\max}}{(1-D)K_r} \right]^{M_r} \tag{6.18}$$

όπου N είναι ο αριθμός των κύκλων.

Αυτή η μέθοδος είναι εφαρμόσιμη μόνο στην περίπτωση της κόπωσης χαμηλών κύκλων (μετρήσιμες πλαστικές παραμορφώσεις) για υλικά που δεν υποβάλλονται σε κυκλική κράτυνση (ή αποσκλήρυνση) για τον περισσότερο χρόνο ζωής τους. Η βλάβη κόπωσης που μπορεί να μετρηθεί έτσι είναι αυτή που συμβαίνει στο τελευταίο στάδιο του χρόνου ζωής του στοιχείου όγκου όταν οι μικρορωγμές έχουν ήδη αρχίσει (στάδιο I) και διαδίδονται σε μια μικροκλίμακα (στάδιο II).

Μεταβολή ιξωδοπλαστικών χαρακτηριστικών

Αυτή η μέθοδος περιγράφει τη βλάβη ερπυσμού, που στα μέταλλα αντιστοιχεί στη διαδικασία σχηματισμού και αύξησης κυρίως των ενδοκρυσταλλικών μικρορωγμών. Αυτή η βλάβη αυξάνει σαν συνάρτηση του χρόνου κάτω από σταθερή ή αργή αύξηση της φόρτισης. Το φαινόμενο γίνεται εντονότερο καθώς αυξάνει η θερμοκρασία. Σε ένα μονοαξονικό πείραμα ερπυσμού με σταθερή τάση, κατά τη διάρκεια του τριτογενούς ερπυσμού υπάρχει αύξηση της ταχύτητας ερπυσμού η οποία γίνεται αρκετά υψηλή όταν προσεγγίζεται η θραύση. Στα πειράματα ερπυσμού με σταθερή φόρτιση, ο τριτογενής ερπυσμός προέρχεται και από τη μείωση της διατομής του δοκιμίου.

Όπως και στην όλκιμη πλαστική βλάβη μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σύζευξη βλάβης και παραμορφωσιακής συμπεριφοράς (ιξωδοπλαστικής) για τον προσδιορισμό της βλάβης. Με την υπόθεση ότι η βλάβη είναι μηδέν ή αμελητέα στον πρωτογενή ερπυσμό, υπολογίζεται ο δευτερογενής ερπυσμός από το νόμο του Norton:

$$\dot{\varepsilon}^{in^*} = B\sigma_v{}^n \tag{6.19}$$

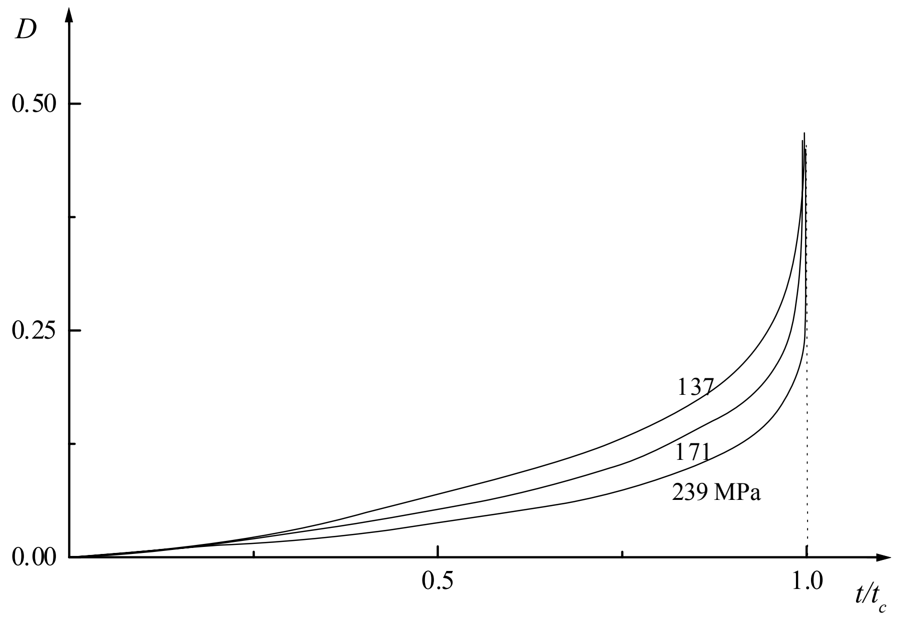
και ο τριτογενής ερπυσμός με την έννοια της ενεργού τάσης:

$$\dot{\varepsilon}^{in} = B[\sigma_v/(1-D)]^n \tag{6.20}$$

Γνωρίζοντας τον εκθέτη ιξώδους n, όταν D = 0, η βλάβη μπορεί να εκφρασθεί σαν συνάρτηση του ρυθμού του δευτερογενούς ερπυσμού $\dot{\varepsilon}^{in^*}$ και του ρυθμού του τριτογενούς ερπυσμού $\dot{\varepsilon}^{in}$, μετρούμενοι σαν συναρτήσεις του χρόνου στην καμπύλη ερπυσμού. Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι όταν σ_v είναι σταθερή:

$$D = 1 - (\dot{\varepsilon}^{in^*}/\dot{\varepsilon}^{in})^{1/n} \tag{6.21}$$

Αυτή η μέθοδος αποτίμησης βλάβης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό του διαγράμματος του $D(t/t_c)$ στον τριτογενή ερπυσμό (Σχήμα 6.1) όπου t_c είναι ο χρόνος θραύσης. Στην πράξη το πείραμα εκτελείται με σταθερή φόρτιση και είναι αναγκαίο να ληφθεί υπόψη η μεταβολή της σ_v.



Σχήμα 6.1: Εξέλιξη βλάβης ερπυσμού, IN 100 κράμα 1000^{o}C (Lemaitre and Chaboche [3]).

6.2 Θεμελιώδεις νόμοι βλαβών

Όλκιμη πλαστική βλάβη, γραμμική ως προς την παραμόρφωση.

Από άποψη μικροκλίμακας αυτό έγκειται στο σχηματισμό, την αύξηση και την ένωση των κοιλοτήτων που προκαλούνται από μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις. Για πολλά μεταλλικά υλικά που υποβάλλονται σε μονοαξονική μονοτονική αυξανόμενη φόρτιση, η βλάβη D μεταβάλλεται γραμμικά με την παραμόρφωση. Ένας απλός νόμος, σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα, είναι :

$$D = D_c \left\langle \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_{vD}}{\varepsilon_{vR} - \varepsilon_{vD}} \right\rangle \tag{6.22}$$

όπου:

ε_{vD} είναι η πραγματική παραμόρφωση στο κατώφλι βλάβης, πριν το οποίο η βλάβη είναι μηδέν ή αμελητέα και ε_{vR} είναι η πραγματική παραμόρφωση στη θραύση όπου η βλάβη είναι ίση με την κρίσιμη τιμή της D_c. Αυτή η εμπειρική εξίσωση περιέχει τρεις συντελεστές οι οποίοι έχουν προσδιορισθεί για μερικά υλικά.

Νόμος βλάβης ερπυσμού – Kachanov

Αυτός αναφέρεται σε ψαθυρή ιξωδοπλαστική βλάβη. Το 1958 ο Kachanov πρότεινε την ακόλουθη σχέση:

$$\dot{D} = \left[\frac{\sigma_v}{A_0(1-D)} \right]^r \tag{6.23}$$

όπου:

A_0 και r είναι δύο χαρακτηριστικοί συντελεστές βλάβης ερπυσμού του υλικού. Αυτή η έκφραση δίδει όχι μηδενικές αλλά πολύ χαμηλές τιμές για πρωτογενή και δευτερογενή ερπυσμό. Ένας αριθμός πειραμάτων έχει δείξει την ορθότητα αυτού του μοντέλου, τουλάχιστο για περιπτώσεις απλών ιστοριών φόρτισης.

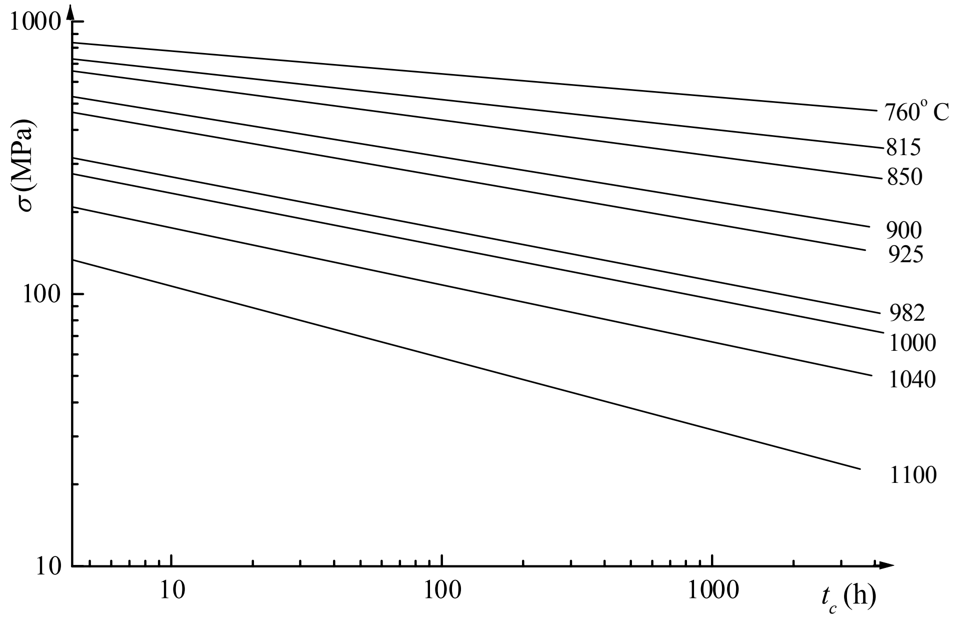
Ο χρόνος θραύσης t_c σε ένα πείραμα ερπυσμού κάτω από σταθερή πραγματική τάση, ευρίσκεται από την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης του μοντέλου για τιμή βλάβης ίση με την κρίσιμη τιμή, $D = D_c$, με αρχική συνθήκη $D = 0$ στο χρόνο $t = 0$:

$$t_c = \frac{1-(1-D_c)^{r+1}}{r+1} \left(\frac{\sigma_v}{A_0} \right)^{-r} \tag{6.24}$$

Για συνήθεις τιμές του r ο όρος $(1-D_c)^{r+1}$ μπορεί να παραληφθεί σε σύγκριση με τη μονάδα και να εκφρασθεί η εξέλιξη της βλάβης με απλή μορφή ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση από το 0 μέχρι το D:

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{1/(r+1)} \quad \text{με} \quad t_c = \frac{1}{r+1} \left(\frac{\sigma_v}{A_0} \right)^{-r} \tag{6.25}$$

Το Σχήμα 6.2 δείχνει ότι η εκθετική σχέση μεταξύ της τάσης και του χρόνου θραύσης επαληθεύεται ικανοποιητικά από πειράματα και οι συντελεστές A_0 και r επηρεάζονται σημαντικά από τη θερμοκρασία.



Σχήμα 6.2: Χρόνος θραύσης συναρτήσει της θερμοκρασίας και τάσης, IN 100 κράμα (Lemaitre and Chaboche [3]).

6.3 Ειδικά μοντέλα

Στα ισότροπα μοντέλα υποτίθεται ότι δεν υπάρχει σύζευξη μεταξύ βλάβης και άλλων φαινομένων. Ο νόμος εξέλιξης της μεταβλητής D δεν εξαρτάται από άλλες εσωτερικές μεταβλητές, αυτό εμποδίζει να ληφθούν υπόψη κάποια φαινόμενα όπως η αύξηση του χρόνου ζωής που οφείλεται στην προπαραμόρφωση. Για να συνυπολογισθεί αυτό το φαινόμενο πρέπει να εισαχθεί μια μεταβλητή κράτυνσης στο νόμο της βλάβης. Αυτό είναι δυνατόν αλλά είναι μια πολυσύνθετη διαδικασία.

6.3.1 Όλκιμη πλαστική βλάβη

Όλκιμη πλαστική βλάβη ακολουθεί μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις και όπως στην πλαστικότητα είναι ανεξάρτητη του ρυθμού και δεν περιέχει σαφώς το χρόνο. Αν θεωρηθεί μόνο ισότροπη βλάβη και κράτυνση, η μόνη εσωτερική μεταβλητή που εμφανίζεται πέρα της βλάβης είναι η συσσωρευμένη πλαστική παραμόρφωση $\dot{p}$:

$$\dot{p} = \dot{\bar{\varepsilon}}^{p} = (\tfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p})^{1/2} \tag{6.26}$$

Η ελαστική περιοχή εκφράζεται από [3]:

$$f = f(\sigma_{ij}, R, D) = \bar{\sigma}/(1-D) - R - \sigma_Y \le 0$$

όπου R η εσωτερική τάση που σχετίζεται με την ισότροπη κράτυνση, σ_Y το ελαστικό όριο και $\bar{\sigma}$ η ισοδύναμη τάση ($\bar{\sigma} = (\tfrac{3}{2}S_{ij}S_{ij})^{1/2}$).

Το δυναμικό βλάβης g_D επιλέγεται σαν εκθετική συνάρτηση του $-Y$:

$$g_D = \frac{S_0}{s_0+1}\frac{1}{1-D}\left(-\frac{Y}{S_0}\right)^{s_0+1} \tag{6.27}$$

όπου Y η μεταβλητή που σχετίζεται με τη βλάβη, s_0 και S_0 είναι χαρακτηριστικοί συντελεστές για κάθε υλικό και εξαρτώνται από τη θερμοκρασία.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\lambda}}{1-D}\frac{S_{ij}}{\overline{\sigma}}\ , \qquad \dot{p} = (\tfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p})^{1/2} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D}$$

$$\dot{D} = -\dot{\lambda}\frac{\partial g_D}{\partial Y} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D}\left(-\frac{Y}{S_0}\right)^{s_0} \tag{6.28}$$

$$\dot{D} = \left(-\frac{Y}{S_0}\right)^{s_0}\dot{p}$$

όπου λ ο συντελεστής πλαστικότητας και S_{ij} οι συνιστώσες του αποκλίνοντα τανυστή τάσης.

Μοντέλο μονοαξονικής τάσης

Η μεταβλητή Y και η ισοδύναμη ενεργός τάση $\tilde{\tilde{\sigma}}$ είναι ισοδύναμες μεταβλητές:

$$-Y = (1/2E)\tilde{\tilde{\sigma}}^2 \tag{6.29}$$

Σε μια μονοτονικά αυξανόμενη μονοαξονική φόρτιση, υπόθεση για την ισχύ του μοντέλου, η $\tilde{\tilde{\sigma}}$ συμπίπτει με την ενεργό τάση $\tilde{\sigma}$ και η $\dot{p}$ με το ρυθμό πλαστικής παραμόρφωσης $\left|\dot{\varepsilon}^p\right|$:

$$\dot{D} = (\tilde{\sigma}^2/2ES_0)^{s_0}\left|\dot{\varepsilon}^p\right| \tag{6.30}$$

Μια σχετική διατύπωση, κοντά στα πειραματικά αποτελέσματα επειδή εισάγει το κατώφλι βλάβης σ_D είναι η ακόλουθη [3]:

$$dD = \left\langle \frac{\sigma - \sigma_D}{(1-D)S} \right\rangle^{s}\frac{d\sigma}{S} \tag{6.31}$$

Οι τρεις χαρακτηριστικοί συντελεστές της όλκιμης πλαστικής βλάβης, οι οποίοι εξαρτώνται από τη θερμοκρασία, προσδιορίζονται από μετρήσεις βλάβης.

Η ολοκλήρωση αυτής της διαφορικής εξίσωσης δίδει την τιμή της βλάβης για κάθε τιμή της τάσης. Με την αρχική συνθήκη $\sigma = \sigma_D \rightarrow D = 0$, προκύπτει:

$$D = 1 - \left(1 - \left\langle \frac{\sigma - \sigma_D}{S} \right\rangle^{s+1} \right)^{1/s+1} \tag{6.32}$$

Η τελική όλκιμη θραύση συμβαίνει όταν:

$D = D_c$ ή $\sigma = \sigma_R$

Ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών συντελεστών της όλκιμης βλάβης μπορεί να γίνει με μέτρηση των μεταβολών του μέτρου ελαστικότητας κατά τη διάρκεια πειραμάτων κράτυνσης.

Μοντέλο πολυαξονικής παραμόρφωσης

Ξεκινώντας από το ίδιο δυναμικό μπορεί να αναπτυχθεί ένα πολυαξονικό μοντέλο στο πλαίσιο της υπόθεσης της ισότροπης βλάβης και της ισότροπης κράτυνσης η οποία ισχύει για κάθε φόρτιση [3].

$$-\frac{\partial g_D}{\partial Y} = \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} \tag{6.33}$$

Το $-Y$ μπορεί να αντικατασταθεί συναρτήσει της ισοδύναμης τάσης $\bar{\sigma}$ και της υδροστατικής τάσης σ_H :

$$-Y = \frac{\tilde{\bar{\sigma}}^2}{2E} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2E(1-D)^2} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\bar{\sigma}} \right)^2 \right] \tag{6.34}$$

Η όλκιμη βλάβη συμβαίνει μόνο όταν η παραμορφωσιακή κράτυνση είναι κορεσμένη και το υλικό τότε θεωρείται πλήρως πλαστικό. Η έκφραση του πλαστικού κριτηρίου:

$\bar{\sigma}/(1-D) - R - \sigma_Y = 0$ δείχνει ότι

$$\frac{\bar{\sigma}}{1-D} = \tilde{\bar{\sigma}} = \text{σταθερό} = C$$

τότε

$$\dot{D} = (C^2 / 2ES_0)^{s_0} [\tfrac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\sigma_H/\bar{\sigma})^2]^{s_0}\, \dot{p} \tag{6.35}$$

Η εξέλιξη της βλάβης σαν συνάρτηση του p ευρίσκεται με ολοκλήρωση αυτής της διαφορικής εξίσωσης με αρχική συνθήκη $p \le p_D \to D = 0$ όπου p_D είναι το κατώφλι βλάβης σε όρους παραμόρφωσης.

Στην περίπτωση ακτινικής φόρτισης που ο λόγος $\sigma_H / \overline{\sigma}$ είναι σταθερός προκύπτει:

$$D = (C^2 / 2ES_0)^{s_0} [\tfrac{2}{3}(1+v) + 3(1-2v)(\sigma_H / \overline{\sigma})^2]^{s_0} \langle p - p_D \rangle \tag{6.36}$$

Η έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί με την εισαγωγή της συνθήκης θραύσης:

$$p = p_R \to D = D_c$$

όπου p_R είναι η συσσωρευμένη παραμόρφωση στη θραύση. Αφού η D_c είναι σταθερά του υλικού η p_R εξαρτάται από το λόγο $\sigma_H / \overline{\sigma}$:

$$D_c = (C^2 / 2ES_0)^{s_0} [\tfrac{2}{3}(1+v) + 3(1-2v)(\sigma_H / \overline{\sigma})^2]^{s_0} \langle p_R - p_D \rangle \tag{6.37}$$

και η έκφραση ως προς D μπορεί να γραφεί:

$$D = D_c \left\langle \frac{p - p_D}{p_R - p_D} \right\rangle \tag{6.38}$$

$$p_R - p_D = D_c \left(\frac{C^2}{2ES_0} \left[\frac{2}{3}(1+v) + 3(1-2v) \left(\frac{\sigma_H}{\overline{\sigma}} \right)^2 \right] \right)^{-s_0} \tag{6.39}$$

Υποθέτοντας ότι η τριαξονικότητα της τάσης επηρεάζει το κατώφλι βλάβης p_D και την παραμόρφωση θραύσης p_R κατά τον ίδιο τρόπο, ο λόγος p_D / p_R είναι μια σταθερά για κάθε υλικό ίση με τη μονοαξονική τιμή $\varepsilon_D / \varepsilon_R$ όπου δεν γίνεται διάκριση μεταξύ ολικών παραμορφώσεων και πλαστικών παραμορφώσεων. Το μοντέλο περιέχει μόνο δύο σταθερές D_c και $\varepsilon_D / \varepsilon_R$ και η συνάρτηση p_R μπορεί να εκφρασθεί σαν συνάρτηση της μονοαξονικής παραμόρφωσης θραύσης ε_R που αντιστοιχεί στον λόγο τριαξονικότητας $\sigma_H / \overline{\sigma} = \frac{1}{3}$:

$$p_R(\tfrac{1}{3}) = \varepsilon_R = \left(\frac{2ES_0}{C^2} \right)^{s_0} \frac{D_c}{1 - \varepsilon_D / \varepsilon_R}$$

$$p_R\left(\frac{\sigma_H}{\bar{\sigma}}\right)=\varepsilon_R\left[\frac{2}{3}(1+\nu)+3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\bar{\sigma}}\right)^2\right]^{-s_0} \tag{6.40}$$

Αν οι αριθμητικές τιμές που υπολογίζονται από αυτή την έκφραση συγκριθούν με αυτές που βρίσκονται με την εφαρμογή των μοντέλων ανάπτυξης κοιλοτήτων των MacClintock, Rice και Tracey, προκύπτει ότι η τιμή $s_0 = 1$ αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση και είναι σε συμφωνία με το μοντέλο μονοαξονικής τάσης.

Συνοπτικά το μοντέλο πολυαξονικής όλκιμης πλαστικής βλάβης παραμόρφωσης είναι το:

Σε διαφορική μορφή:

$$\dot{D}=\frac{D_c}{\varepsilon_R-\varepsilon_D}\left[\frac{2}{3}(1+\nu)+3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\bar{\sigma}}\right)^2\right]\dot{p} \tag{6.41}$$

και με ολοκλήρωση:

$$D\approx\frac{D_c}{\varepsilon_R-\varepsilon_D}\left(p\left[\frac{2}{3}(1+\nu)+3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\bar{\sigma}}\right)^2\right]-\varepsilon_D\right) \tag{6.42}$$

Οι τρεις σταθερές προσδιορίζονται από μονοαξονικά πειράματα.

6.3.2 Βλάβη ερπυσμού

Μοντέλο μη γραμμικής συσσώρευσης

Μια μορφή η οποία είναι βελτίωση στο νόμο του Kachanov ευρίσκεται με την εισαγωγή ενός επί πλέον συντελεστού *k* προταθέντος από τον Rabotnov [3] :

$$\dot{D}=(\sigma/A)^r(1-D)^{-k} \tag{6.43}$$

Αυτός πάντοτε περικλείει τον κανόνα της γραμμικής συσσώρευσης και γενικά ο *k* είναι μεγαλύτερος από τον *r*. Ο ρυθμός βλάβης επηρεάζεται περισσότερο από το βαθμό της βλάβης παρά τη συνολική μηχανική συμπεριφορά. Με ολόκλήρωση αυτού του νόμου για σταθερή τάση προκύπτει:

$$D=1-\left(1-\frac{t}{t_c}\right)^{1/(k+1)} \quad \text{με} \quad t_c=\frac{1}{k+1}\left(\frac{\sigma}{A}\right)^{-r} \tag{6.44}$$

Το Σχήμα 6.1 δείχνει ότι οι καμπύλες εξαρτώνται από το επίπεδο τάσης, το οποίο είναι σύμφωνο με την ύπαρξη των μη γραμμικών σωρευτικών επιδράσεων και οδηγεί στην ακόλουθη γενίκευση:

$$\dot{D} = (\sigma / A)^r (1 - D)^{-k(\sigma)} \tag{6.45}$$

Αφού ο εκθέτης k εξαρτάται από το επίπεδο τάσης, οι δύο μεταβλητές σ και D δεν είναι πλέον διαχωρίσιμες. Δεν υπάρχει θεωρητική αιτιολόγηση για την εισαγωγή της συνάρτησης $k(\sigma)$ εκτός του ότι παρέχει την απλούστερη αναπαράσταση μη γραμμικής συσσώρευσης.

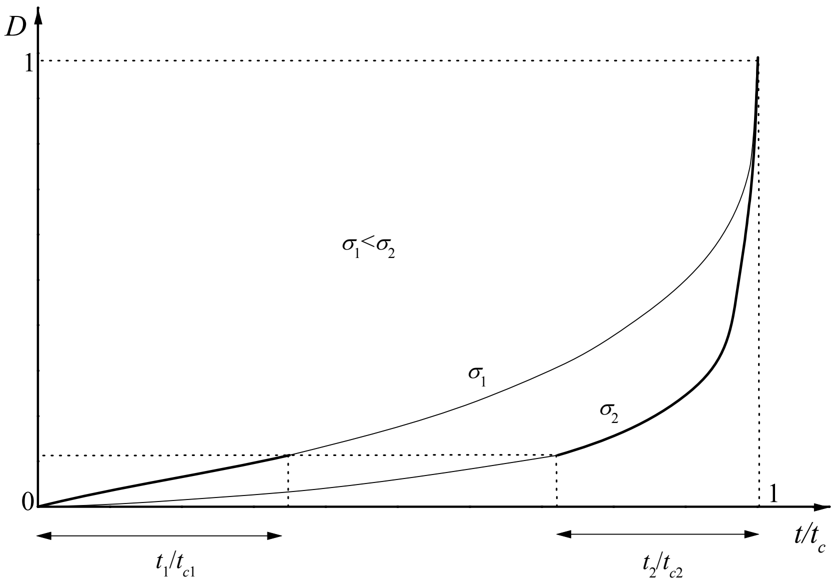
Διακριτές τιμές του $k(\sigma)$ προσδιορίζονται από την αύξηση της βλάβης που μετρείται κατά τη διάρκεια ερπυσμού κάτω από σταθερή τάση. Η εξέλιξη της D σαν συνάρτηση του t/t_c ευρίσκεται με ολοκλήρωση από το 0 μέχρι το D και εξαρτάται από τη σ:

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/[k(\sigma)+1]}, \qquad t_c = \frac{1}{k(\sigma)+1}\left(\frac{\sigma}{A}\right)^{-r} \tag{6.46}$$

Η συνάρτηση $k(\sigma)$ είναι αύξουσα επειδή η αύξηση της βλάβης είναι ταχύτερη για χαμηλότερες τάσεις (Σχήματα 6.1 και 6.3). Αυτό επιβεβαιώνεται με τα αποτελέσματα πειραμάτων σε δύο επίπεδα τάσεων. Η εξίσωση παριστά την επίδραση της μη γραμμικής συσσώρευσης αρκετά καλά. Με ολοκλήρωση από το 0 μέχρι το D_1 σε ένα πρώτο επίπεδο τάσεων και κατόπιν από το D_1 μέχρι το 1 σε ένα δεύτερο επίπεδο, προκύπτει:

$$\frac{t_2}{t_{c2}} = \left(1 - \frac{t_1}{t_{c1}}\right)^{[k(\sigma_2)+1]/[k(\sigma_1)+1]} \tag{6.47}$$

Τα παραπάνω εφαρμόζονται σε ερπυσμό με εφελκυσμό, λίγες μελέτες έχουν γίνει σχετικά με βλάβη ερπυσμού σε θλίψη. Θραύση δεν παρατηρείται ποτέ καθώς προηγείται αστάθεια γεωμετρικής προέλευσης (λυγισμός). Εν τούτοις δεν υπάρχει κάτι που να αποδεικνύει ότι αυτή η βλάβη δεν υφίσταται ή ότι η θλίψη δεν επηρεάζει την βλάβη σε περίπτωση πρόσθετου εφελκυσμού.



Σχήμα 6.3: Σχηματικό διάγραμμα απεικόνισης μη γραμμικής συσσώρευσης σε πειράματα ερπυσμού σε δύο επίπεδα τάσης (Lemaitre and Chaboche [3]).

Πολυαξονικό ισοτροπικό μοντέλο

Η περιοχή ισχύος αυτού του μοντέλου περιορίζεται σε φόρτιση που μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι σχεδόν αναλογική. Διαφορετικά μπορεί να είναι αναγκαίο να θεωρηθεί η επίδραση της ανισότροπης βλάβης. Επομένως η σύνταξη ενός πολυαξονικού νόμου απαιτεί μόνο τη χρήση της ισοδύναμης τάσης με την έννοια της βλάβης ερπυσμού. Ανάλογα με το υλικό είναι δυνατή η χρήση ενός από τα παρακάτω κριτήρια και η περιγραφή ισόχρονων επιφανειών θραύσης στο χώρο της τάσης (επιφανειών που συσχετίζουν τις καταστάσεις της τάσης οι οποίες προκύπτουν στη θραύση ερπυσμού κατά τον ίδιο χρόνο):

κριτήριο ρυθμού απελευθερούμενης πυκνότητας ελαστικής ενέργειας:

$$\hat{\sigma} = \bar{\sigma}[\tfrac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\sigma_H / \bar{\sigma})^2]^{1/2} \tag{6.48}$$

κριτήριο συντελεστού ευαισθησίας διατμητικής διόγκωσης :

$$\hat{\sigma}_\beta = (1-\beta)\bar{\sigma} + 3\beta\sigma_H \tag{6.49}$$

το γενικότερο κριτήριο που περιέχει συνδυασμό των τριών βασικών αναλλοίωτων:

$$\chi(\sigma) = aJ_0(\sigma) + \beta J_1(\sigma) + (1-a-\beta)\bar{J}_2(\sigma) \tag{6.50}$$

όπου $J_1(\sigma) = 3\sigma_H$, $\bar{J}_2(\sigma) = \bar{\sigma}$ και $J_0(\sigma)$ είναι η μέγιστη κύρια τάση, α και β συντελεστές.

Στην ισότροπη περίπτωση η μεταβλητή βλάβης D εκφυλλίζεται σε βαθμωτή και η ενεργός τάση εκφράζεται από:

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1-D} \tag{6.51}$$

και ο πολυαξονικός νόμος εξέλιξης της βλάβης εκφράζεται ως ακολούθως:

$$\dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\widetilde{\sigma})}{A} \right\rangle^{r} (1-D)^{r-k} \tag{6.52}$$

Αν $r = k$ προκύπτει ο νόμος του Kachanov. Για απλή τάση προκύπτουν ακριβώς οι ίδιες εκφράσεις όπως στην προηγούμενη παράγραφο. Αν ο εκθέτης εξαρτάται από την τάση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη έκφραση:

$$\dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\widetilde{\sigma})}{A} \right\rangle^{r} (1-D)^{r-k\langle \chi(\sigma) \rangle} \tag{6.53}$$

Αυτή μπορεί να γραφεί και ως:

$$\dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\sigma)}{A} \right\rangle^{r} (1-D)^{-k\langle \chi(\sigma) \rangle} \quad \text{ή} \quad \dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\widetilde{\sigma})}{A} \right\rangle^{k\langle \chi(\sigma) \rangle} \left[\frac{\chi(\sigma)}{A} \right]^{r-k\langle \chi(\sigma) \rangle} \tag{6.54}$$

Ως συνήθως το σύμβολο $\langle \chi \rangle$ δηλώνει το θετικό μέρος του χ. Το $\chi(\sigma)$ μπορεί να είναι αρνητικό για ορισμένες καταστάσεις τάσης εξαρτώμενο από τις τιμές των συντελεστών α και β. Ο ρυθμός βλάβης είναι τότε μηδέν και δεν υπάρχει ισόχρονη επιφάνεια που να διέρχεται από αυτά τα σημεία.

6.4 Σύζευξη παραμόρφωσης και βλάβης

Η σύζευξη παραμόρφωσης και βλάβης αναφέρεται στο γεγονός ότι η επίλυση ενός προβλήματος σε οριακές καταστάσεις εξαρτάται από την κατάσταση βλάβης της υπό θεώρηση κατασκευής. Γενικά η βλάβη μειώνει τη δυσκαμψία και την αντοχή των υλικών. Για μια δεδομένη κατάσταση τάσεων όσο μεγαλύτερες είναι οι παραμορφώσεις τόσο μεγαλύτερη είναι η βλάβη και ως εκ τούτου είναι σημαντικό να ληφθεί υπόψη η σύζευξη για προβλήματα εξέλιξης στα οποία οι τάσεις, οι παραμορφώσεις και η βλάβη υπολογίζονται ταυτόχρονα.

Η έννοια της ενεργού τάσης σε συνδυασμό με την αρχή της ισοδυναμίας παραμόρφωσης επιτρέπουν να γραφούν οι νόμοι της συμπεριφοράς με σύζευξη πολύ απλά με αντικατάσταση της συνήθους τάσης σ με την ενεργό τάση $\widetilde{\sigma}$. Για λόγους απλότητας θεωρείται στα παρακάτω ότι η βλάβη είναι ισότροπη.

6.4.1 Ελαστικότητα συζευγμένη με βλάβη

Αυτό είναι σημαντικό για υλικά που η επίδραση της πλαστικότητας δεν είναι πολύ σπουδαία. Ένα τυπικό παράδειγμα είναι το σκυρόδεμα στο οποίο οι μη γραμμικές παραμορφώσεις, οι οποίες μερικές φορές είναι μη αναστρέψιμες, προκαλούνται από τη διαδικασία της αποσυνεκτικοποίησης. Αυτή η διαδικασία μπορεί να αναλυθεί με τη χρήση της θεωρίας βλάβης.

Η θεωρητική μελέτη της περίπτωσης αυτής απορρέει άμεσα από την επιλογή της ενεργού τάσης. Για ισότροπη ελαστικότητα και ισότροπη βλάβη στις αρχικές συνθήκες, ο νόμος ελαστικότητας του υλικού με βλάβη γράφεται:

$$\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}}{E(1-D)} \tag{6.55}$$

Αυτή η σχέση πρέπει να συνδυασθεί με τον επιλεγέντα νόμο βλάβης.

6.4.2 Πλαστικότητα συζευγμένη με βλάβη

Για την εξέταση της συμπεριφοράς ενός κρατυνόμενου πλαστικού υλικού με βλάβη εφαρμόζεται η αρχή της ισοδυναμίας παραμόρφωσης. Η τάση σ αντικαθίσταται από την ενεργό τάση $\tilde{\sigma}$ στο δυναμικό και όλες οι άλλες μεταβλητές μένουν οι ίδιες.
Η ελαστική περιοχή εκφράζεται από [3]:

$$f = \bar{J}_2(\tilde{\sigma} - X) - R - \sigma_Y = \bar{J}_2\left(\frac{\sigma}{1-D} - X\right) - R - \sigma_Y \le 0 \tag{6.56}$$

όπου X, R οι εσωτερικές τάσεις που σχετίζονται με την κινηματική και ισότροπη κράτυνση αντίστοιχα, σ_Y το ελαστικό όριο και $\bar{J}_2(\tilde{\sigma} - X) = [\tfrac{3}{2}(\tilde{\sigma}'_{ij} - X'_{ij})(\tilde{\sigma}'_{ij} - X'_{ij})]^{1/2}$ όπου $\tilde{\sigma}'$ και X' οι αποκλίνοντες τανυστές των $\tilde{\sigma}$ και X.

Ο νόμος ροής και η εξέλιξη των εσωτερικών μεταβλητών και της βλάβης ευρίσκονται με το νόμο της κανονικότητας.
Το δυναμικό g αναλύεται σε:

$$f(\tilde{\sigma}, X, R) \quad \text{και} \quad g_D(Y, \varepsilon^e, a, \kappa, D)$$

όπου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην πλαστικότητα και ο δεύτερος στη βλάβη με την υπόθεση της μη σύζευξης με τον πρώτο και όπου ε^e η ελαστική παραμόρφωση, a και κ οι εσωτερικές μεταβλητές που σχετίζονται με τις X και R αντίστοιχα.

Οι γενικευμένοι κανόνες κανονικότητας δίδουν το νόμο ροής και την εξέλιξη των εσωτερικών μεταβλητών:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda}(\partial f / \partial \sigma_{ij})$$
$$\dot{a}_{ij} = -\dot{\lambda}(\partial f / \partial X_{ij}) \qquad (6.57)$$
$$\dot{\kappa} = -\dot{\lambda}(\partial f / \partial R)$$
$$\dot{D} = -\dot{\lambda}(\partial g_D / \partial Y)$$

Ο πολλαπλασιαστής πλαστικότητας $\dot{\lambda}$ προσδιορίζεται από την συνθήκη της πλαστικής ροής $\dot{f} = f = 0$. Η περίπτωση μόνο της ισότροπης κράτυνσης εξετάζεται παρακάτω.

Σύζευξη μεταξύ ισότροπης όλκιμης πλαστικής βλάβης και ισότροπης κράτυνσης.

Υποθέτοντας ότι το υλικό υπακούει το κριτήριο του Von Misses, η ελαστική περιοχή εκφράζεται από $f = \bar{\sigma}/(1-D) - R - \sigma_Y \le 0$, το g_D εξαρτάται μόνο από τη Y και τη D.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\lambda}}{1-D}\frac{\tilde{\sigma}'_{ij}}{\tilde{\tilde{\sigma}}} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\lambda}}{1-D}\frac{S_{ij}}{\bar{\sigma}}$$
$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} = (\tfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p})^{1/2}(1-D) = \dot{p}(1-D) \qquad (6.58)$$

που παριστάνει το διορθωμένο συσσωρευμένο πλαστικό ρυθμό παραμόρφωσης λόγω της μη αναστρέψιμης παραμόρφωσης από τη βλάβη. Υποτίθεται ότι ο νόμος κράτυνσης του υλικού χωρίς βλάβη είναι $R = R(\kappa)$.

ο $\dot{\lambda}$ ή ο $\dot{\kappa}$ εκφράζονται με τη συνθήκη:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial R}\dot{R} + \frac{\partial f}{\partial D}\dot{D} = 0 \qquad (6.59)$$

ή

$$\frac{3}{2}\frac{S_{ij}\dot{\sigma}_{ij}}{\bar{\sigma}(1-D)} - R'(\kappa)\dot{\kappa} + \frac{\bar{\sigma}}{(1-D)^2}\dot{D} = 0 \qquad (6.60)$$

τότε με:

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda}, \; \frac{\bar{\sigma}}{1-D} - R = \sigma_Y \;\; \text{και} \;\; \dot{D} = -\frac{\partial g_D}{\partial Y}\dot{\lambda} \qquad (6.61)$$

προκύπτει:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{(1-D)R'(\kappa) + [\sigma_Y + R(\kappa)]\partial g_D / \partial Y} \qquad (6.62)$$

Το κριτήριο φόρτισης-αποφόρτισης εκφράζεται από:

$$\begin{matrix} \dot{\lambda} = 0 \\ \dot{\lambda} > 0 \end{matrix} \quad \text{αν} \quad \begin{matrix} \dot{\bar{\sigma}} \le 0 \\ \dot{\bar{\sigma}} > 0 \end{matrix} \tag{6.63}$$

επί πλέον ροή υπάρχει μόνο αν $f = 0$. Δηλώνοντας το μέτρο κράτυνσης με $h(\kappa, D, Y)$:

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} = H(f)\frac{\langle \dot{\bar{\sigma}} \rangle}{h(\kappa, D, Y)} \tag{6.64}$$

όπου: $H(f)$ η συνάρτηση βήματος του Heaviside (εξίσωση 2.39) και

$$h(\kappa, D, Y) = (1-D)^2 R'(\kappa) + (1-D)[\sigma_Y + R(\kappa)]\partial g_D / \partial Y \tag{6.65}$$

Αφού $\partial g_D / \partial Y$ είναι αρνητικό, αυτό το μέτρο κράτυνσης μπορεί να είναι αρνητικό. Είναι θετικό όταν η παραμόρφωση είναι μικρή και το $R'(\kappa)$ μεγάλο, και γίνεται αρνητικό στο σημείο αστάθειας:

$$h(\kappa, D, Y) = 0 \tag{6.66}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η παραπάνω περιγραφή δεν είναι εφαρμόσιμη και πρέπει να γίνει χρήση της συνθήκης φόρτισης-αποφόρτισης με $\dot{\bar{\bar{\sigma}}}$.

Έτσι, οι εξισώσεις των Prandtl-Reuss στις οποίες ο νόμος κράτυνσης έχει τη μορφή της εκθετικής συνάρτησης:

$$R(p) = K_Y p^{1/M_Y} = \bar{\sigma} - \sigma_Y \tag{6.67}$$

μπορούν να γραφούν:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \\ d\varepsilon_{ij}^e &= \frac{(1+\nu)d\sigma_{ij} - \nu d\sigma_{kk}\delta_{ij}}{E(1-D)} \end{aligned} \tag{6.68}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \tfrac{3}{2} H(f) \frac{\langle d\bar{\sigma} \rangle}{\dfrac{K_Y(1-D)^2}{M_Y}\left\langle \dfrac{\bar{\sigma}}{K_Y(1-D)} - \dfrac{\sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{1-M_Y} + \bar{\sigma}\dfrac{\partial g_D}{\partial Y}} \frac{S_{ij}}{\bar{\sigma}} \tag{6.69}$$

και ο αντίστοιχος νόμος βλάβης:

$$\dot{D} = -\frac{\partial g_D}{\partial Y}\dot{\lambda} = -\frac{\partial g_D}{\partial Y}\dot{p}(1-D) \tag{6.70}$$

ή

$$dD = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D}\left[\tfrac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\bar{\sigma}}\right)^2\right]dp \tag{6.71}$$

και

$$\frac{\partial g_D}{\partial Y} = -\frac{D_c}{(\varepsilon_R - \varepsilon_D)(1-D)}\left[\tfrac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\bar{\sigma}}\right)^2\right] \tag{6.72}$$

6.4.3 Ιξωδοπλαστικότητα συζευγμένη με βλάβη

Ο νόμος της ιξωδοπλαστικότητας συζευγμένης με βλάβη είναι [3]:

$$\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{in}_{ij} \\
&\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\dot{\sigma}_{ij}}{1-D} - \frac{\nu}{E}\frac{\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}}{1-D} \\
&\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} = \tfrac{3}{2}\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}\frac{S_{ij}}{\bar{\sigma}}, \quad \dot{\kappa} = \dot{\bar{\varepsilon}}^{in}(1-D), \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^{in} = (\tfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}^{in}_{ij}\dot{\varepsilon}^{in}_{ij})^{1/2} \\
&\dot{\kappa} = \frac{1}{1-D}\left[\frac{\bar{\sigma}}{(1-D)K\kappa^{1/M}}\right]^N
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Όπως και στην πλαστικότητα, η σχέση $\dot{\kappa} = \dot{\bar{\varepsilon}}^{in}(1-D)$ προκύπτει από την επιλογή ενός ιξωδοπλαστικού δυναμικού της μορφής:

$$g = \frac{K}{N+1}\left\langle \frac{\bar{J}_2(\tilde{\sigma}) - R + h'(\kappa)}{K}\right\rangle^{N+1}\kappa^{-N/M} \tag{6.74}$$

και από τον κανόνα κανονικότητας:

$$\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} = \partial g / \partial \sigma_{ij} \tag{6.75}$$

Μόνο βλάβη ερπυσμού μπορεί να συμβεί ταυτόχρονα με ιξωδοπλαστικότητα:

$$\dot{D} = \langle \chi(\sigma)/A\rangle^r (1-D)^{-k\langle\chi(\sigma)\rangle} \tag{6.76}$$

Στις εφαρμογές μπορεί να θεωρηθεί ότι η βλάβη είναι αμελητέα στον πρωτογενή ερπυσμό και ότι η παραμορφωσιακή κράτυνση είναι κορεσμένη στον τριτογενή ερπυσμό.

Για παράδειγμα στον εφελκυσμό:

κατά τη διάρκεια του πρωτογενή ερπυσμού:

$$\varepsilon^{in} < \varepsilon^{in*}, \ D = 0 \rightarrow \qquad \varepsilon^{in} = \left[\frac{N+M}{M} \left(\frac{\sigma}{K} \right)^N t \right]^{M(N+M)} \tag{6.77}$$

κατά τη διάρκεια του τριτογενή ερπυσμού: $\varepsilon^{in} \geq \varepsilon^{in*}$, το $K\kappa^{1/M}$ αντικαθίσταται με $K\varepsilon^{in*1/M}$, και η εξίσωση βλάβης δίδει:

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{1/(k+1)} \quad \text{με} \qquad t_c = \frac{1}{k+1} \left(\frac{\sigma}{A} \right)^{-r} \tag{6.78}$$

τότε η καταστατική εξίσωση γράφεται:

$$d\varepsilon^{in} = \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{-(N+1)/(k+1)} \left(\frac{\sigma}{K} \right)^N dt \tag{6.79}$$

μετά από ολοκλήρωση για σ = σταθερά προκύπτει:

$$\varepsilon^{in} = \varepsilon^{in*} + (\varepsilon_R^{in} - \varepsilon^{in*}) \left[1 - \left(\frac{1 - t/t_c}{1 - t^*/t_c} \right)^{(k-N)/(k+1)} \right]$$

$$\varepsilon_R^{in} = \varepsilon^{in*} + \frac{k-1}{k-N} \left(\frac{\sigma}{K\varepsilon^{in*1/M}} \right)^N t_c \left(1 - \frac{t^*}{t_c} \right)^{(k-N)/(k+1)} \tag{6.80}$$

με $\qquad t^* = \dfrac{M}{N+M} \left(\dfrac{\sigma}{K} \right)^{-N} \varepsilon^{in*(N+M)/M}$

όπου οι εκθέτες έχουν την ακόλουθη σειρά:

$r \leq N \leq k$

Η παραμόρφωση θραύσης είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της εφαρμοζόμενης τάσης κατά τη διάρκεια του ερπυσμού. Αυτό είναι γενικά επιβεβαιωμένο από το πείραμα.

6.4.4 Μοντέλο Katchanov-Rabotnov

Οι καταστατικές εξισώσεις βλάβης των Katchanov-Rabotnov είναι [50]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \frac{3}{2} A \frac{(\overline{\sigma})^{n-1} S_{ij}}{(1-D)^n} \tag{6.81}$$

όπου $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ οι συνιστώσες του ρυθμού ανελαστικής παραμόρφωσης, A και n είναι σταθερές του υλικού, $\overline{\sigma}$ η ισοδύναμη τάση και S_{ij} οι συνιστώσες του αποκλίνοντα τανυστή τάσης. Ο ρυθμός της μεταβλητής βλάβης D είναι:

$$\dot{D} = M \frac{(\sigma_d)^{\chi}}{(1+\varphi)(1-D)^{\varphi}} \tag{6.82}$$

όπου M, φ και χ είναι σταθερές βλάβης του υλικού. Η τάση σ_d είναι συνάρτηση της μέγιστης κύριας τάσης σ_I και της ισοδύναμης τάσης $\overline{\sigma}$:

$$\sigma_d = \alpha\sigma_I + (1-\alpha)\overline{\sigma} \tag{6.83}$$

η οποία είναι κατάλληλη για υλικά που υπακούουν σε κριτήρια μικτής τάσης, όπου α είναι σταθερά του υλικού που κυμαίνεται από $\alpha = 1$, όταν η μέγιστη κύρια τάση υπερισχύει, έως $\alpha = 0$ όταν υπερισχύει η ισοδύναμη τάση. Ο ακριβής προσδιορισμός παίζει σημαντικό ρόλο στην εφαρμογή του μοντέλου συνεχούς βλάβης σε πολυαξονική τάση. Οι τιμές του α προσδιορίζονται από πειράματα μονοαξονικής τάσης σε δοκίμια με εγκοπές.

6.5 Υπολογισμός βλάβης

6.5.1 Αρχική βλάβη

Το πρώτο πρόβλημα που προκύπτει στην ολοκλήρωση των μοντέλων διαφορικής βλάβης είναι οι αρχικές συνθήκες. Η διαδικασία της παραγωγής, της διαμόρφωσης και της μηχανικής κατεργασίας των μηχανικών μερών μπορεί να αφήσει αρχική βλάβη, η οποία πρέπει να ληφθεί υπόψη στην πρόβλεψη της θραύσης. Η μέθοδος των υπερήχων μπορεί να δώσει κάποιες ενδείξεις αλλά συνήθως είναι αναγκαία η αξιολόγηση με έμμεσες πληροφορίες.

6.5.2 Υπολογισμός της βλάβης σε κρίσιμα σημεία

Μη συζευγμένη βλάβη

Σε ένα αριθμό εφαρμογών μπορεί να θεωρηθεί ότι η επίδραση της βλάβης στην παραμορφωσιακή συμπεριφορά είναι μικρή και να μη ληφθεί υπόψη η σύζευξη παραμόρφωσης και βλάβης.

Ο υπολογισμός γίνεται σε δύο στάδια:

1. Υπολογισμός των τάσεων και παραμορφώσεων της κατασκευής με τη μέθοδο των πεπερασμένων ή των συνοριακών στοιχείων. Κάτω από γνωστή φόρτιση πρέπει να επιλυθεί ένα πρόβλημα οριακών τιμών, το οποίο γίνεται σύνθετο σε πολλές εφαρμογές από την επίδραση της πλαστικής ή της ιξωδοπλαστικής ροής.
2. Γνωρίζοντας τις τάσεις και τις παραμορφώσεις σε κάθε σημείο της κατασκευής, είναι δυνατόν να προσδιορισθεί το κρίσιμο ή τα κρίσιμα σημεία (όπου υπάρχει ο κίνδυνος έναρξης ρωγμής) και ο χρόνος ζωής της κατασκευής. Αυτό το βήμα απαιτεί τη χρήση ενός κριτηρίου έναρξης ρωγμής το οποίο μπορεί να προκύψει από το νόμο εξέλιξης της βλάβης. Γενικά είναι επαρκές να χρησιμοποιηθεί μια άμεση σχέση μεταξύ των τάσεων και /ή των παραμορφώσεων αφ' ενός και ενός χρόνου ή αριθμού κύκλων για αστοχία αφ' ετέρου.

Ένα επιπρόσθετο πρόβλημα προκύπτει όταν η φόρτιση δεν είναι σταθερή ή περιοδική. Για ορισμένες εφαρμογές είναι αναγκαίο να ληφθεί υπόψη η πραγματική φόρτιση λειτουργίας, η οποία συνήθως εξιδανικεύεται. Μένοντας στο πλαίσιο της μη συζευγμένης θεωρίας, η κατασκευή αναλύεται ανεξάρτητα για κάθε φόρτιση και γίνεται πρόσθεση των βλαβών που προκύπτουν ανεξάρτητα από κάθε φόρτιση.

Σύζευξη βλάβης παραμόρφωσης

Η επίδραση μπορεί να είναι σημαντική για ορισμένα υλικά ή ορισμένους τύπους φόρτισης καθ' όσον οι υπολογιζόμενες τάσεις και παραμορφώσεις τροποποιούνται από την εισαγωγή μιας τέτοιας σύζευξης.

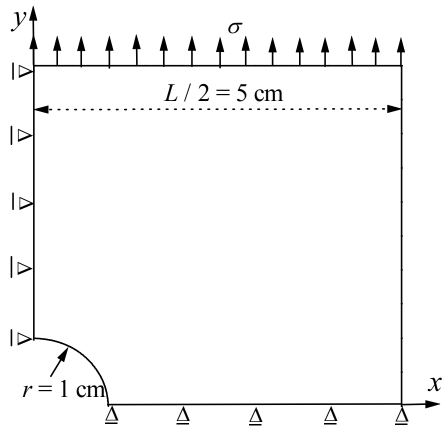
Η επιρροή της βλάβης ερπυσμού στην ιξωδοπλαστική συμπεριφορά είναι σημαντική. Γίνεται εμφανής στον τριτογενή ερπυσμό. Ακόμη και αν η κατασκευή φορτίζεται με καθορισμένες δυνάμεις, η επίδραση του τριτογενή ερπυσμού μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα επιπρόσθετη ανακατανομή των τάσεων. Ένας τέτοιος υπολογισμός δεν είναι εύκολος, ακόμη και κάτω από σταθερή φόρτιση.

Στις επόμενες παραγράφους επιλύονται προβλήματα μηχανικής βλαβών με την προταθείσα σε προηγούμενα κεφάλαια μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων.

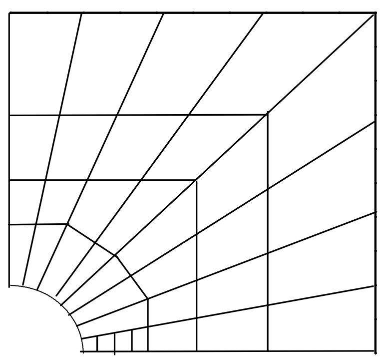
6.6 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Το Σχήμα 6.4 δείχνει ένα επίπεδο τετραγωνικό δίσκο με κυκλική οπή που υποβάλλεται σε εφελκυστική τάση σε μια διεύθυνση. Το πάχος του δίσκου υποτίθεται αρκετά μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί κατάσταση επίπεδης έντασης. Λόγω συμμετρίας της γεωμετρίας και της φόρτισης μόνο το ένα τέταρτο του διακριτοποιείται σε 35 εσωτερικά και 51 συνοριακά στοιχεία.



Σχήμα 6.4: Τετραγωνικός δίσκος με κυκλική οπή.



Σχήμα 6.5: Διακριτοποίηση δίσκου.

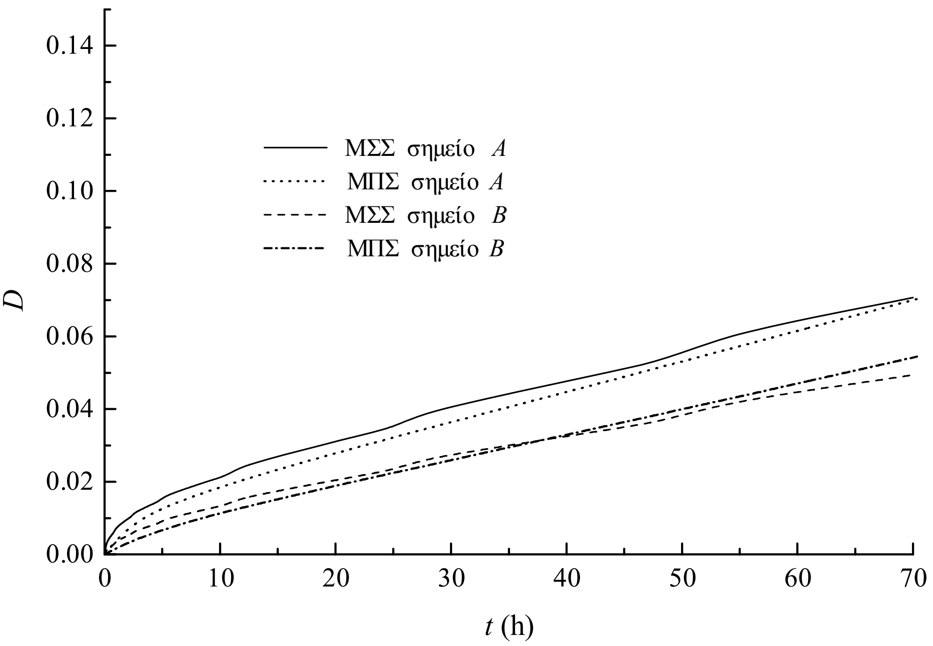
Το χρησιμοποιούμενο υλικό για τους υπολογισμούς ερπυσμού και βλάβης είναι κράμα τιτανίου στους 650^{o} C με μέτρο ελαστικότητας E = 89.5 x10^{3} MPa και λόγο Poisson ν = 0,3 και εφαρμόζονται οι καταστατικές εξισώσεις των Katchanov-Rabotnov.

Οι σταθερές του υλικού έχουν ληφθεί από τους A. Becker, T. Hyde, W. Sun και P. Andersson [50]:

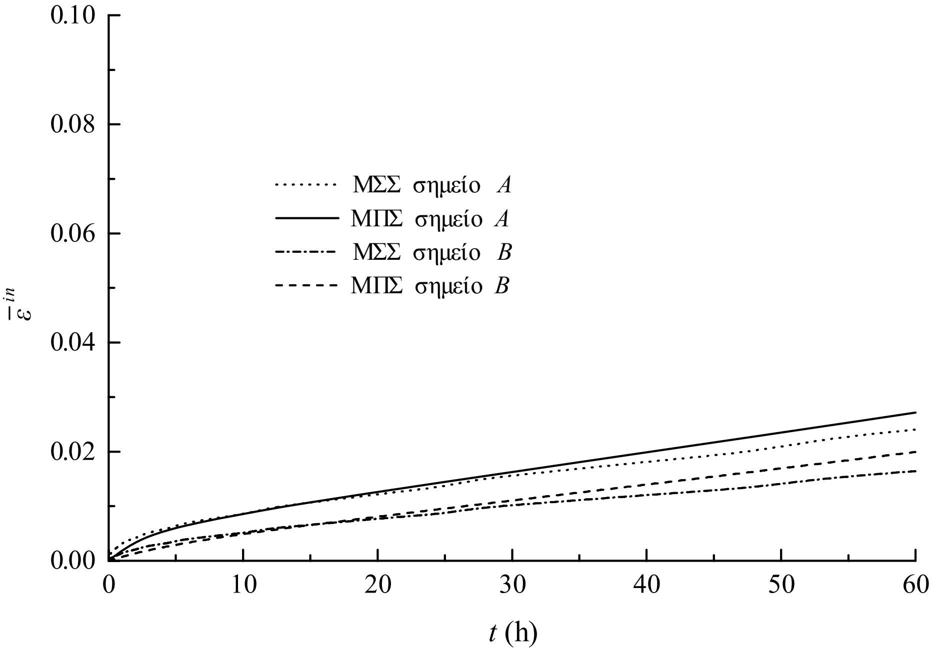
$A = 5{,}623\text{x}10^{-18}$, $n = 5{,}911$, $M = 1{,}114\text{x}10^{-15}$, $\varphi = 4{,}8$, $\chi = 5{,}416$ και $\alpha = 0$

όταν η τάση μετρείται σε MPa και ο χρόνος σε ώρες.

Οι υπολογισμοί γίνονται για εφαρμοζόμενη τάση 140 MPa. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για δύο σημεία κοντά στην οπή με συντεταγμένες *A* (1,103, 0,109) και *B* (1,355, 0,135). Τα Σχήματα 6.6 και 6.7 δείχνουν τη μεταβολή της βλάβης και της ισοδύναμης παραμόρφωσης ερπυσμού ($\bar{\varepsilon}^{in} = (\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^{in}\varepsilon_{ij}^{in})^{1/2}$) αντίστοιχα σε σχέση με το χρόνο με την παρούσα μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων (ΜΣΣ) και των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) MSC Marc(2000). Τα αποτελέσματα που προκύπτουν με τις δύο μεθόδους βρίσκονται σε καλή συμφωνία.

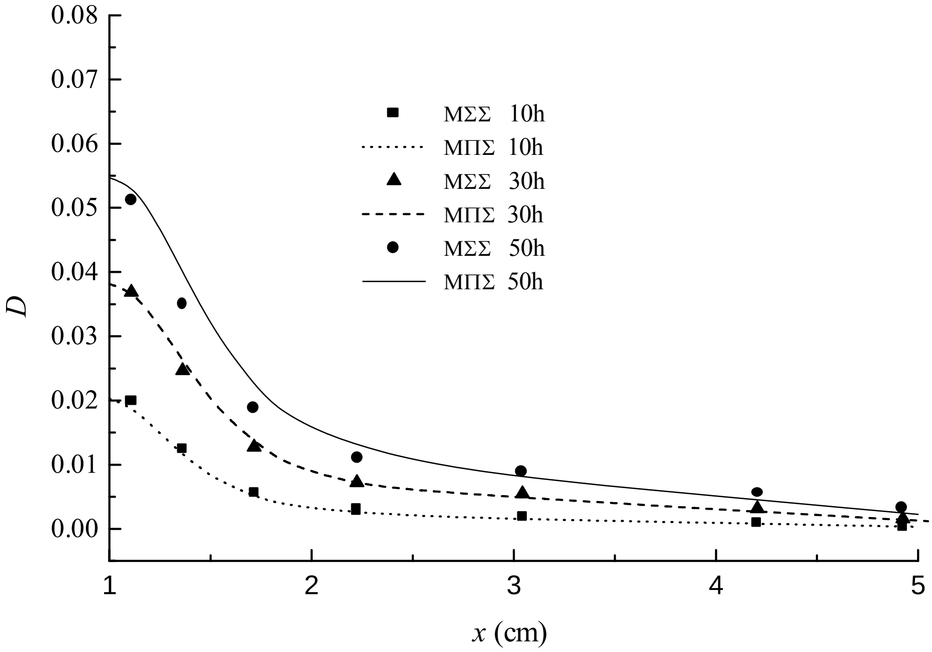


Σχήμα 6.6: Βλάβη ερπυσμού σε σχέση με το χρόνο.

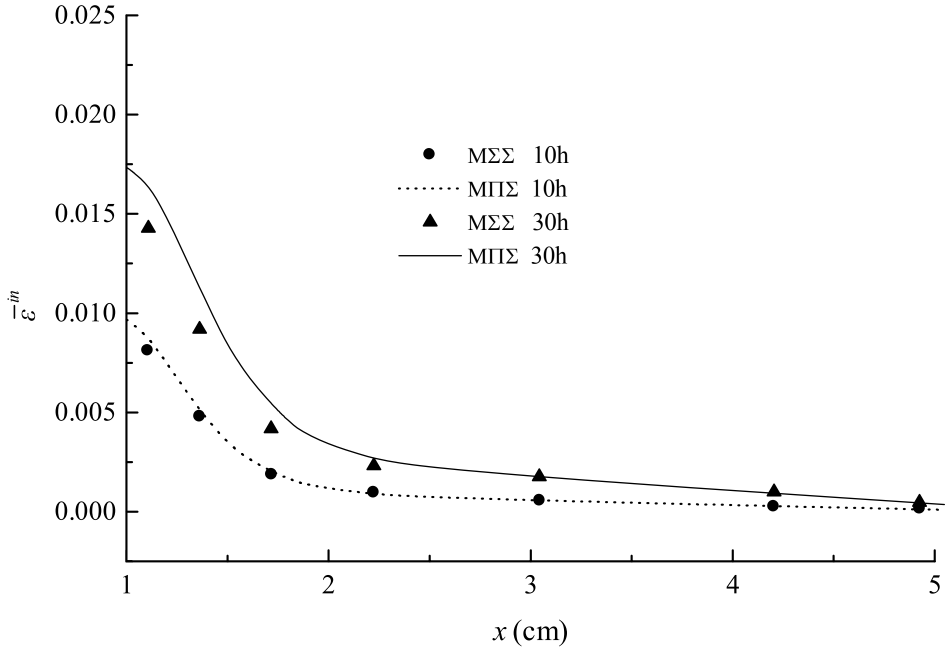


Σχήμα 6.7: Ισοδύναμη παραμόρφωση ερπυσμού σε σχέση με το χρόνο.

Τα Σχήματα 6.8 και 6.9 δείχνουν τη μεταβολή της βλάβης και της ισοδύναμης παραμόρφωσης αντίστοιχα σε σχέση με την απόσταση από την οπή με την παρούσα μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων και των πεπερασμένων στοιχείων MSC. Marc(2000).



Σχήμα 6.8: Βλάβη ερπυσμού σε σχέση με την απόσταση.

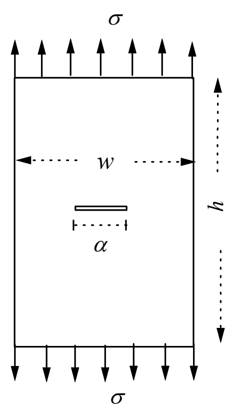


Σχήμα 6.9: Ισοδύναμη παραμόρφωση σε σχέση με την απόσταση.

Στο πλαίσιο της ικανοποιητικής συμφωνίας των αποτελεσμάτων μεταξύ των πεπερασμένων στοιχείων συγκρινόμενων με τα αποτελέσματα της παρούσας μεθοδολογίας συνοριακών στοιχείων, μπορεί να συναχθεί ότι η παρούσα μεθοδολογία μπορεί να είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση περίπλοκων μη γραμμικών προβλημάτων πρακτικής σημασίας.

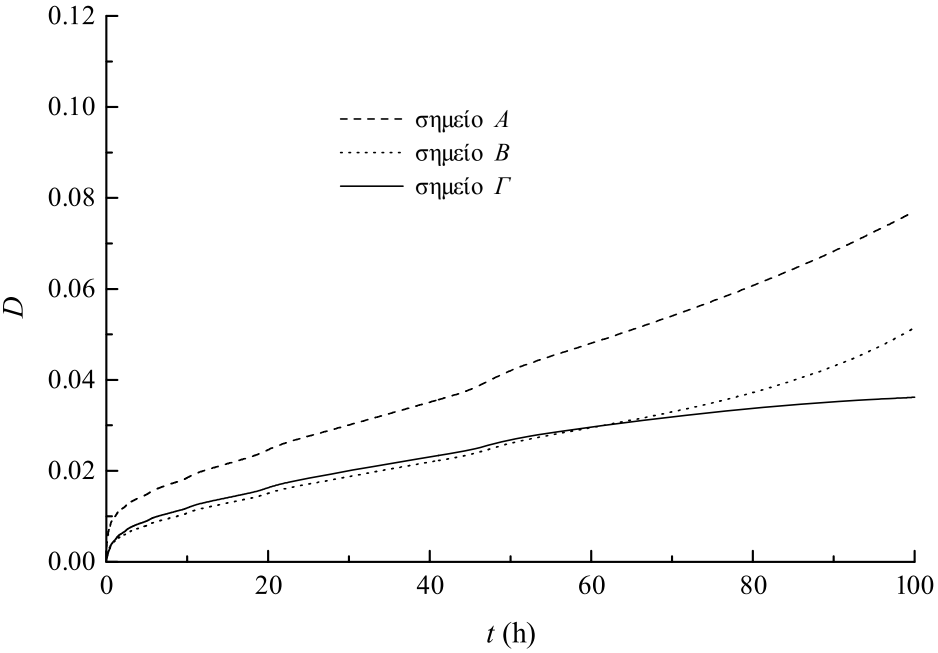
Παράδειγμα 2

Θεωρείται ένας επίπεδος ορθογωνικός δίσκος, αποτελούμενος από το υλικό του προηγούμενου παραδείγματος, διαστάσεων w = 8 cm και h = 16 cm με κεντρική ρωγμή μήκους α =1 cm (Σχήμα 6.10) που υποβάλλεται σε εφελκυστική τάση 120 MPa σε μια διεύθυνση. Το πάχος του δίσκου υποτίθεται αρκετά μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί κατάσταση επίπεδης έντασης. Λόγω συμμετρίας της γεωμετρίας και της φόρτισης μόνο το ένα τέταρτο του διακριτοποιείται σε 53 εσωτερικά και 46 συνοριακά στοιχεία αντίστοιχα.

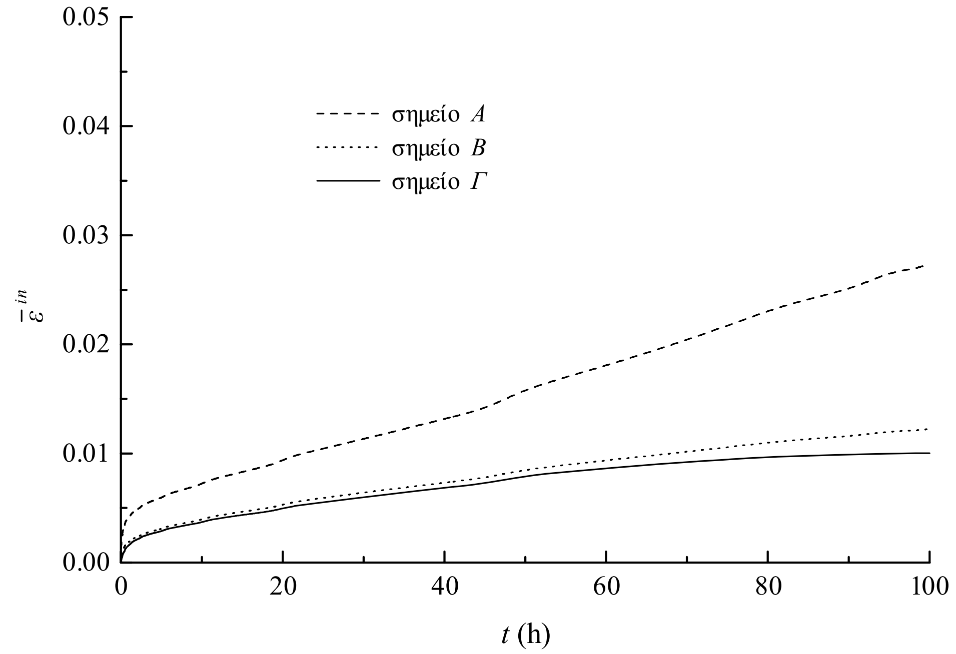


Σχήμα 6.10: Ορθογωνικός δίσκος με κεντρική οπή.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για τρία σημεία κοντά στη ρωγμή με συντεταγμένες A (0,5078, 0,0078), B (0,5078, 0,0234) και Γ (0,5234, 0,0078). Τα Σχήματα 6.11 και 6.12 δείχνουν τη μεταβολή της βλάβης και της ισοδύναμης παραμόρφωσης αντίστοιχα σε σχέση με το χρόνο με την παρούσα μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων.

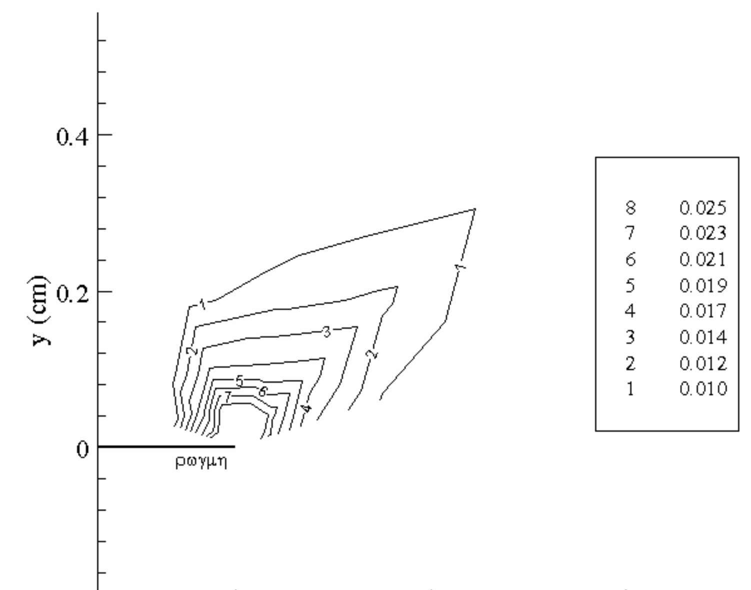


Σχήμα 6.11: Βλάβη ερπυσμού σε σχέση με το χρόνο.

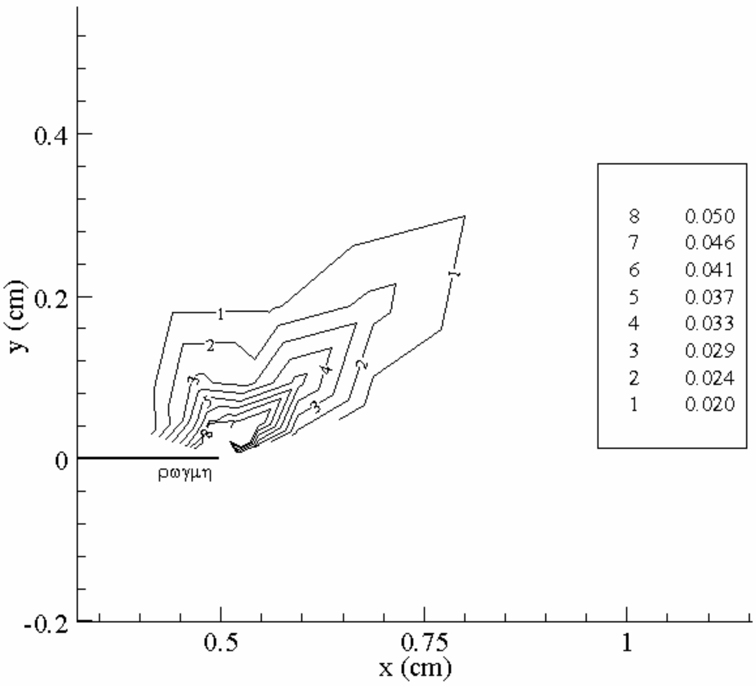


Σχήμα 6.12: Ισοδύναμη παραμόρφωση ερπυσμού σε σχέση με το χρόνο.

Τυπικά διαγράμματα καμπύλων κατανομής της βλάβης ερπυσμού στο ένα τέταρτο του δοκιμίου για δύο διαφορετικούς χρόνους (t = 50 και t =100 h) φαίνονται στα Σχήματα 6.13 και 6.14 αντίστοιχα.

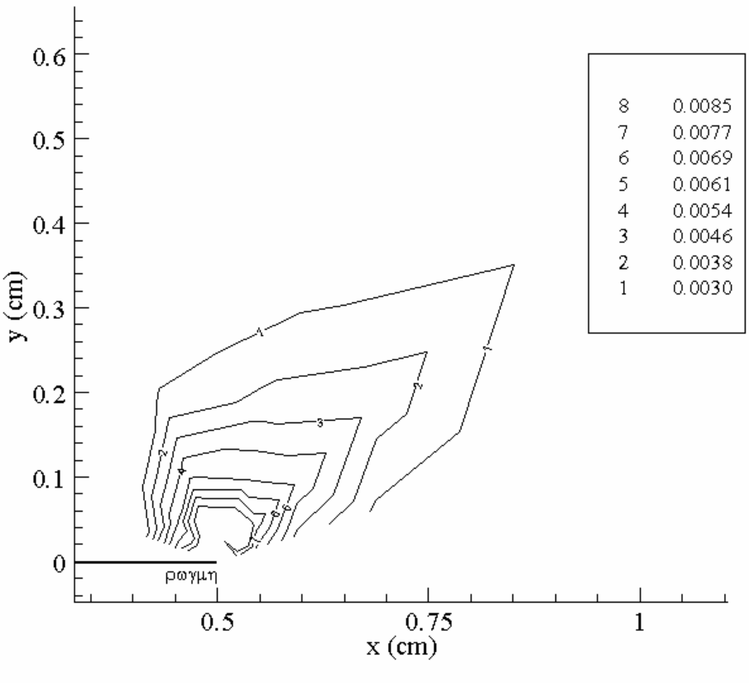


Σχήμα 6.13: Καμπύλες βλάβης ερπυσμού για t = 50 h.

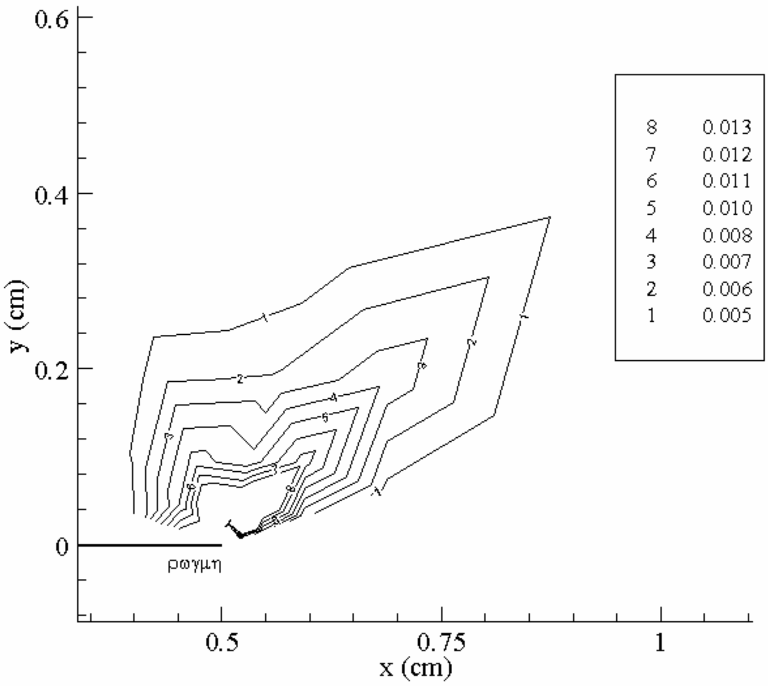


Σχήμα 6.14: Καμπύλες βλάβης ερπυσμού για t = 100 h.

Τυπικά διαγράμματα καμπύλων κατανομής της ισοδύναμης παραμόρφωσης ερπυσμού στο ένα τέταρτο του δοκιμίου για δύο διαφορετικούς χρόνους (t = 50 και t =100 h) φαίνονται στα Σχήματα 6.15 και 6.16 αντίστοιχα.



Σχήμα 6.15: Καμπύλες ισοδύναμης παραμόρφωσης ερπυσμού για t = 50 h.



Σχήμα 6.16: Καμπύλες ισοδύναμης παραμόρφωσης ερπυσμού για t = 100 h.

Στα προηγούμενα παραδείγματα επιβεβαιώνεται η ισχύς της παρούσας μεθοδολογίας των συνοριακών στοιχείων για την επίλυση προβλημάτων μηχανικής των βλαβών με τη χρήση του μοντέλου των Kachanov-Rabotnov. Το πρόγραμμα συνοριακών στοιχείων είναι αρκετά γενικό και μπορεί να επιλύσει αρκετά προβλήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΑΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

7.1 Εισαγωγή

Η ιδέα του Griffith, της αστάθειας των ατελειών σε ένα στερεό ήταν το πρώτο βήμα στην πρόβλεψη της αντοχής σε θραύση των στερεών. Η βασική ιδέα της θεωρίας είναι ότι η ρωγμή θα αρχίσει να διαδίδεται αν η απελευθερούμενη ελαστική ενέργεια από την αύξηση της ρωγμής είναι μεγαλύτερη από την απαιτούμενη για να δημιουργηθούν ρηγματωμένες επιφάνειες. Ο Griffith εξέτασε το πρόβλημα της ρωγμής μήκους $2a$ σε δίσκο (plate) σε εφελκυσμό σ, όπως στο Σχήμα 7.1 και βρήκε ότι η κρίσιμη τάση σ_c για την αύξηση της ρωγμής είναι :

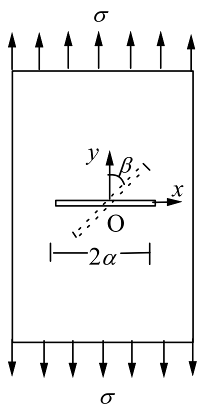
$$\sigma_c a^{\frac{1}{2}} = (\frac{2E\gamma}{\pi})^{\frac{1}{2}} \tag{7.1}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας και γ η ειδική επιφανειακή ενέργεια. Επειδή η ποσότητα $(2E\gamma/\pi)^{\frac{1}{2}}$ περιέχει μόνο σταθερές του υλικού, ο συντελεστής $\sigma_c a^{\frac{1}{2}}$ πρέπει να είναι μια εσωτερική παράμετρος του υλικού. Το διπλάσιο της ειδικής επιφανειακής ενέργειας γ είναι ίσο με τον κρίσιμο ρυθμό της απελευθερούμενης ελαστικής ενέργειας G_{Ic}=2γ. Πειράματα που εκτελέστηκαν από τον Griffith σε γυαλί έδειξαν ότι οι τιμές του $\sigma_c a^{\frac{1}{2}}$ ήταν πράγματι οι ίδιες σε ένα ευρύ φάσμα μήκους ρωγμών.

Η έννοια της απελευθερούμενης ενέργειας ρωγμής έχει σοβαρά μειονεκτήματα σε πεδία ρωγμών συνδυασμένων τάσεων. Η έννοια της απελευθερούμενης ενέργειας προϋποθέτει ότι η διεύθυνση διάδοσης της ρωγμής είναι γνωστή εκ των προτέρων. Έτσι η θεωρία αυτή μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα όπου η ρωγμή είναι κάθετη στη διεύθυνση εφαρμογής των τάσεων. Το απλό ερώτημα, ποιά είναι η διεύθυνση διάδοσης της ρωγμής αν η ρωγμή σχηματίζει γωνία β με τον άξονα της φόρτισης δεν έχει απαντηθεί ικανοποιητικά. Σε μια τέτοια περίπτωση η εξίσωση (7.1) προφανώς δεν ισχύει. Επί πλέον μια αναστροφή της φόρτισης θα προκαλέσει διάδοση της ρωγμής κατά μήκος μιας άλλης διαδρομής. Μια ρεαλιστική θεωρία της μηχανικής των θραύσεων θα πρέπει να είναι ικανή να εξηγήσει τα φαινόμενα θραύσης και για τους δύο τύπους φόρτισης σε κεκλιμένες ρωγμές (Σχήμα 7.1).

Ο Irwin σε εφαρμογή της ιδέας του Griffith για την επίλυση προβλημάτων θραύσης αναγνώρισε τη σπουδαιότητα της έντασης των τοπικών πεδίων τάσεων. Πρότεινε τρεις τύπους ανάπτυξης ρωγμών, με αντίστοιχους συντελεστές έντασης τάσεων K_I, K_{II} και K_{III}. Ο συντελεστής έντασης K_I του τύπου Ι σχετίζεται με το ρυθμό απελευθερούμενης ενέργειας του Griffith G_I ως:

$$G_I = \frac{\pi K_I^2}{E}$$



Σχήμα 7.1: Κεντρική ρωγμή.

Στο μοντέλο του ο Barenblatt επιλέγει να μετακινήσει την r^{-1} ιδιομορφία των τάσεων θεωρώντας μια συνεκτική ζώνη κατά μήκος της γραμμής μπροστά από τη ρωγμή. Το κριτήριο θραύσης βασίζεται στην έννοια του κρίσιμου μέτρου συνοχής. Στη συνέχεια ο Dugdale χρησιμοποίησε ένα όμοιο μαθηματικό αλλά διάφορο φυσικό μοντέλο για να μελετήσει το μέγεθος της πλαστικής ζώνης στην κορυφή της ρωγμής σε λεπτά φύλλα. Μια γενίκευση μερικών από αυτές τις φυσικές έννοιες έγινε αργότερα από τον Rice με την εφαρμογή ενός ολοκληρώματος το οποίο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και ίδιο στη μορφή με συνιστώσα του τανυστή ενεργειακής ορμής που εισήγαγε ο Eshelby για να χαρακτηρίσει γενικευμένες δυνάμεις σε εξαρμόσεις σε κλασσικά πεδία.

Τα παραπάνω μοντέλα ρωγμών τα οποία δίδουν περισσότερη έμφαση στη φυσική πλευρά του υλικού, όλα περιορίζονται σε ρωγμές οι οποίες επεκτείνονται κατά μήκος της γραμμής συμμετρίας της φόρτισης. Αν και αυτός ο περιορισμός δεν είναι ουσιώδης για την πειραματική μελέτη της δυσκαμψίας θραύσεως, παρουσιάζει μεγάλο εμπόδιο στην πρόβλεψη των εφαρμοζόμενων τάσεων για την έναρξη ρωγμών σε μέλη κατασκευών. Στο σχεδιασμό γεφυρών και αεροσκαφών, η κατάσταση τάσεων γύρω από την κορυφή της ρωγμής στις περισσότερες περιπτώσεις είναι μεικτού τύπου όπου η υπόθεση θραύσης τύπου I είναι μη πραγματική.

Ο Sih [51-53] έχει προτείνει μια θεωρία θραύσης βασισμένη στην αντοχή του πεδίου της τοπικής πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας την οποία χαρακτηρίζει μια βασική διαφορά από τις κλασσικές και τρέχουσες έννοιες. Η θεωρία αυτή δεν απαιτεί υπολογισμό του ρυθμού απελευθερούμενης ενέργειας και έτσι έχει το πλεονέκτημα της αντιμετώπισης όλων των προβλημάτων επέκτασης ρωγμών μεικτού τύπου για πρώτη φορά. Σε αντίθεση με τη συμβατική θεωρία των G και K η οποία μετρά μόνο το εύρος των τοπικών τάσεων, η θεμελιώδης παράμετρος σε αυτή τη θεωρία είναι ο συντελεστής πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας S ο οποίος επηρεάζεται από τη διεύθυνση.

Η διαφορά μεταξύ του G (ή K) και του S είναι ανάλογη με τη διαφορά ενός βαθμωτού μεγέθους και ενός διανύσματος. Η θεωρία των Griffith-Irwin μπορεί να θεωρηθεί ως βαθμωτή θεωρία που προσδιορίζει μόνο την κρίσιμη τιμή ενός βαθμωτού μεγέθους $G_I\,(\text{ή}\,K_I)$ σε αρχόμενη θραύση. Η διεύθυνση διάδοσης της ρωγμής υποτίθεται ότι είναι πάντοτε κάθετη στη φόρτιση. Επιπλέον το μέτωπο της ρωγμής πρέπει να είναι ομαλό ώστε το G (ή K) να μη μεταβάλλεται κατά μήκος της κύριας ακμής της ρωγμής. Επιπρόσθετα η βαθμωτή θεωρία δεν μπορεί να αποδώσει τη σωστή παράμετρο του υλικού αν δύο ή τρεις συντελεστές έντασης των τάσεων υπάρχουν κατά μήκος του συνόρου της ρωγμής.

Ο συντελεστής S στη θεωρία του Sih συμπεριφέρεται ως οδηγός και δίδει την αίσθηση της διεύθυνσης της ελάχιστης αντίστασης με την επίτευξη μιας στάσιμης τιμής σε σχέση με τη γωνία θ που σχηματίζει με τον άξονα x. Η στάσιμη τιμή $S_{\min}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν παράμετρος του υλικού, η τιμή της οποίας στο σημείο αστάθειας της ρωγμής S_c είναι ανεξάρτητη από τη μορφή της ρωγμής και τη φόρτιση. Σε γενικό πλαίσιο η θεωρία Griffith-Irwin είναι μερική περίπτωση όταν $\theta = 0$ και το S συμπίπτει με τον άξονα x.

7.2 Πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας

Η πρόβλεψη της αστοχίας απαιτεί πέρα από τη γνώση της κατάστασης τάσης-παραμόρφωσης και ένα κριτήριο που θα αποτιμά το όριο λειτουργίας των δομικών στοιχείων. Επειδή η φόρτιση, η μορφή και το υλικό αλληλεπιδρούν, η συνδυασμένη επιρροή τους δεν μπορεί εύκολα να βελτιστοποιηθεί. Θα ήταν σκόπιμο να υπάρχει μια απλή παράμετρος που θα μπορεί να περιλάβει αυτές τις επιδράσεις και να προσαρμόζει το σχεδιασμό. Η ανάπτυξη μιας τέτοιας δυνατότητας έχει επιχειρηθεί από πολλούς ερευνητές στο παρελθόν.

Οι κλασσικές θεωρίες αστοχίας δεν είναι επαρκείς για τις λειτουργικές απαιτήσεις των μοντέρνων κατασκευών. Η πληροφορία για το πώς, το πότε και το που θα μπορούσε να συμβεί μια αστοχία απαιτεί την ταυτόχρονη περιγραφή της αρχικής τοπικής αστοχίας και τον ολικό τερματισμό της. Η αποτίμηση της απομένουσας αντοχής και ζωής κατασκευών εξασθενισμένων από ελαττώματα είναι αναγκαία ώστε να ληφθεί απόφαση για επισκευή τους. Για να πραγματοποιηθεί μια τέτοια εργασία αοριστίες και ασυμβατότητες πέρα από τις εγγενείς στις θεωρίες της μηχανικής των συνεχών μέσων πρέπει να ελαχιστοποιηθούν με την επιλογή του κριτηρίου αστοχίας.

Μέχρι σήμερα μόνο η θεωρία της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας είναι ικανή να εισάγει ταυτόχρονα υποκρίσιμη και κρίσιμη αστοχία και πληροφορία για κατώφλι στις ιδιότητες του υλικού και το δομικό σχεδιασμό για γραμμικά και μη γραμμικά υλικά. Η ανομοιομορφία μπορεί να προκύψει σε πολλές μορφές και με διαφορετικά μέσα στα δομικά στοιχεία άσχετα με την αιτία.

Ποσοτική αποτίμηση αυτής της ανομοιομορφίας μπορεί να επιτευχθεί καλύτερα με την ποσότητα παραμορφωσιακής ενέργειας ή την ενέργεια ανά μονάδα όγκου του υλικού dW/dV. Εκείνο το οποίο έχει δειχθεί σε πολλές εργασίες είναι ότι τα μέγιστα και τα ελάχιστα της dW/dV μπορούν να σχετισθούν με την αστοχία από διαρροή ή θραύση. Το εύρος και η θέση τους εξαρτώνται από την τοπική ή ολική θεώρηση των συντεταγμένων αναφοράς.

Ενδεχόμενες θέσεις αστοχίας μπορούν να προσδιορισθούν με τη θεώρηση της επίδρασης της φόρτισης, της μορφής και του υλικού. Διερευνάται η αστοχία των δομικών στοιχείων με έμφαση στην περιγραφή της ευστάθειας έναρξης της θραύσης σε σχέση με τον τελικό τερματισμό. Αυτό γίνεται με τον υπολογισμό μιας παραμέτρου l που προσδιορίζεται από την απόσταση μεταξύ των τοπικών και ολικών ελαχίστων της

dW/dV και σχετίζεται με αλλαγές στην ευστάθεια του συστήματος καθώς επηρεάζεται από την ανομοιομορφία του υλικού, τη φόρτιση και τη γεωμετρική μορφή.

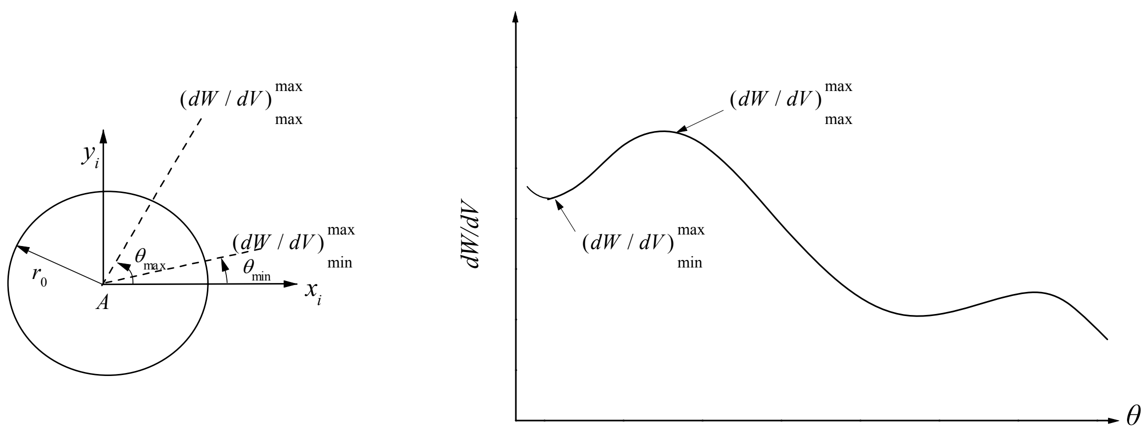
Η διαδικασία διαχωρισμού ή θραύσης του υλικού δεν συμβαίνει ξαφνικά. Ξαφνική και απροσδόκητη θραύση σε μια κλίμακα χρόνου στη μηχανική θα πρέπει να αποφεύγεται στην πράξη καθώς διαταράσσει τη λειτουργία της κατασκευής. Επομένως είναι επιθυμητό ο σχεδιασμός να γίνεται σε υποκρίσιμη αστοχία. Αυτό απαιτεί ένα κριτήριο που θα μπορεί να εισάγει τοπική έναρξη αστοχίας και ολικό τερματισμό της με συμβατό τρόπο.

Η συνάρτηση πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας dW/dV προσδιορίζεται από:

$$\frac{dW}{dV} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{7.2}$$

όπου σ_{ij} και ε_{ij} οι συνιστώσες του τανυστή τάσης και παραμόρφωσης αντίστοιχα.

Θεωρείται ένα αυθαίρετο σημείο A το οποίο είναι συνδεδεμένο με το τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $A\,x_i y_i$. Η διακύμανση της συνάρτησης πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας dW/dV υπολογίζεται κατά μήκος περιφέρειας κύκλου ακτίνας r_0 και κέντρου A, όπου r_0 είναι η ακτίνα της περιοχής του πυρήνα που αντικατοπτρίζει μια παράμετρο μικροδομής του υλικού (Σχήμα 7.2). Σε κάθε σημείο A υπάρχει τουλάχιστο ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο της dW/dV.

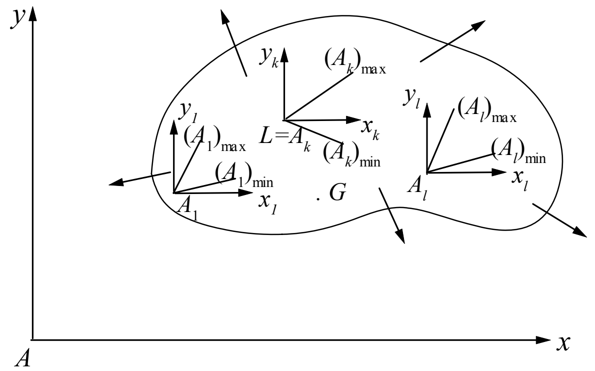


Σχήμα 7.2: Τοπικά μέγιστα των ελαχίστων και μεγίστων της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας.

Η έναρξη της θραύσης από το σημείο A λαμβάνει χώρα κατά τη διεύθυνση του μεγίστου των ελαχίστων τιμών $(dW/dV)_{\min}^{\max}$ της dW/dV ενώ από το σημείο με την μέγιστη τιμή $(dW/dV)_{\max}^{\max}$ της dW/dV αρχίζει η διαρροή [132-138]. Η έναρξη της αστοχίας με θραύση ή διαρροή λαμβάνει χώρα όταν $(dW/dV)_{\min}^{\max}$ ή $(dW/dV)_{\max}^{\max}$ παίρνουν τις αντίστοιχες κρίσιμες τιμές τους.

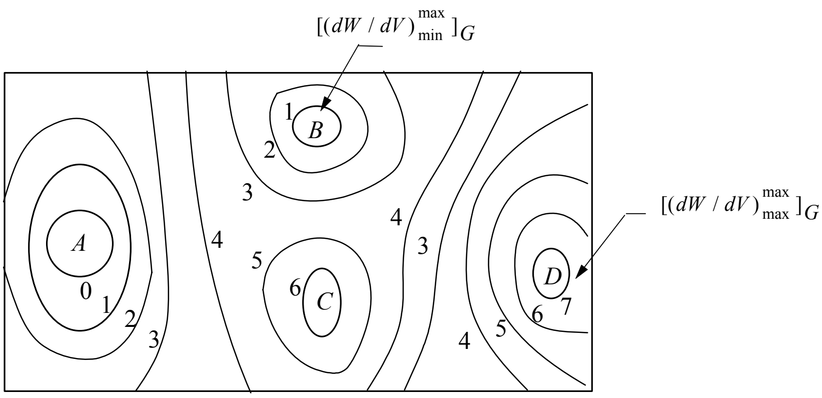
Σε ένα συνεχές στερεό θεωρούνται τα σημεία A_j ($j=1,2,...,l$) στα οποία είναι συνδεδεμένα τα τοπικά καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων και προσδιορίζονται όπως προηγουμένως σε κάθε σημείο οι πιθανές διευθύνσεις έναρξης αστοχίας (θραύση ή διαρροή) (Σχήμα 7.3). Μεταξύ όλων των ελαχίστων και μεγίστων σε μια περιοχή υπάρχει ένα ζεύγος που αντιπροσωπεύει το μέγιστο όλων των ελαχίστων και το μέγιστο όλων των μεγίστων και δηλώνεται αντίστοιχα ως $[(dW/dV)_{\min}^{\max}]_L$ και $[(dW/dV)_{\max}^{\max}]_L$.

Θραύση ή διαρροή σε ένα στερεό αρχίζει από το σημείο με τη μέγιστη τιμή των τοπικών ελαχίστων $[(dW/dV)_{\min}^{\max}]_L$, ή τη μέγιστη τιμή $[(dW/dV)_{\max}^{\max}]_L$ της dW/dV αντίστοιχα. Αν $L \equiv A_k$ είναι το σημείο έναρξης της θραύσης στο στερεό, η θραύση λαμβάνει χώρα όταν η $[(dW/dV)_{\min}^{\max}]_L$ γίνεται ίση με την κρίσιμη τιμή της $(dW/dV)_{\min}^{c}$. Η ποσότητα $(dW/dV)_{\min}^{c}$ είναι ίση με το εμβαδόν της περιοχής κάτω από το διάγραμμα των πραγματικών τάσεων-πραγματικών παραμορφώσεων του υλικού σε εφελκυσμό και είναι μια ιδιότητα του υλικού.



Σχήμα 7.3: Τοπικά μέγιστα και ελάχιστα της dW/dV σε ένα στερεό και το ολικό μέγιστο των ελαχίστων της dW/dV στο G.

Θεωρώντας όλα τα σημεία του συνεχούς στερεού στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Axy και εξετάζοντας τη θραύση, υπάρχει ένα σημείο G στο οποίο είναι το μέγιστο των ελαχίστων της dW/dV. Η τιμή αυτή $[(dW/dV)_{\min}^{\max}]_G$ της dW/dV διαφέρει σε θέση και μέγεθος από την $[(dW/dV)_{\min}^{\max}]_L$. Αυτό φαίνεται καλύτερα με τις καμπύλες ίσης πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας (Σχήμα 7.4) όπου οι δείκτες 0,1,…,7 της dW/dV χρησιμοποιούνται για τη διάκριση των διαφορετικών μεγεθών της dW/dV: $(\frac{dW}{dV})_0 < (\frac{dW}{dV})_1 < ... < (\frac{dW}{dV})_7$

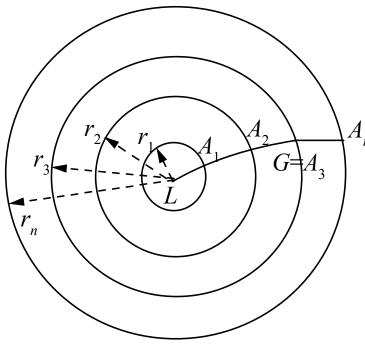


Σχήμα 7.4: Καμπύλες ίσης dW/dV για ολικό μέγιστο των ελαχίστων και μεγίστων της dW/dV.

Θραύση αρχίζει από το σημείο L στο οποίο υπάρχει η μέγιστη τιμή των τοπικών ελαχίστων της dW/dV. Για ταχεία ασταθή θραύση, η αστοχία συμβαίνει ξαφνικά και δεν είναι παράλογο να υποτεθεί ότι η τροχιά της θραύσης μπορεί να προσδιορισθεί από τις συνθήκες που ισχύουν πριν την έναρξη της. Σε αυτές τις περιπτώσεις το υλικό δεν έχει επαρκή χρόνο για ανακατανομή των τάσεων κατά τη διαδικασία θραύσης και η τροχιά μπορεί να προσδιορισθεί εκ των προτέρων με μεγάλη ακρίβεια.

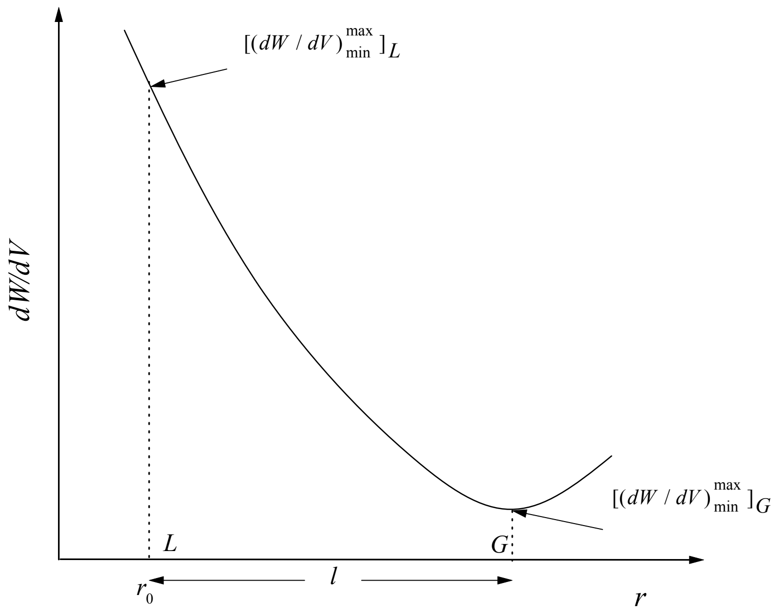
Η τροχιά της θραύσης μπορεί να προσδιορισθεί τώρα από τις γωνίες θραύσης για ένα ευρύ φάσμα ακτίνων με αρχή το L. Ας είναι $A_1, A_2, A_3 \equiv G, ..., A_n$ τα σημεία στα οποία η dW/dV έχει το μέγιστο των ελάχιστων τιμών της κατά μήκος περιφερειών ακτίνων $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ (Σχήμα 7.5). Είναι προφανές ότι αφού στο G είναι το ολικό μέγιστο των ελαχίστων τιμών της dW/dV στο ίδιο σημείο θα είναι και το μέγιστο των ελαχίστων τιμών της dW/dV κατά μήκος της περιφέρειας με ακτίνα r_3. Έτσι η τροχιά θραύσης $LA_1A_2G...A_n$ με αρχή το σημείο L θα περνά από το σημείο G του ολικού μεγίστου των ελαχίστων τιμών της dW/dV.

Θεωρώντας το μήκος $l = LG$ του τόξου κατά μήκος της τροχιάς θραύσης μεταξύ του τοπικού L και του ολικού G μεγίστου των ελαχίστων της dW/dV παρατηρείται ότι αφού η θραύση καθορίζεται από μέγιστα των τοπικών ελαχίστων της dW/dV θα εγκλωβισθεί στο σημείο G στο οποίο υπάρχει το ολικό μέγιστο των ελαχίστων τιμών της dW/dV. Όσο μικρότερη είναι η απόσταση l τόσο περισσότερο περιορίζεται η έναρξη της θραύσης γύρω από το σημείο L.



Σχήμα 7.5: Τροχιά θραύσης LG.

Έτσι η τιμή του l προσδιορίζει το μήκος της τροχιάς της ασταθούς θραύσης και σχετίζεται με την ευστάθεια του στερεού όταν η θραύση ξεκινήσει από το σημείο L. Κατά αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται μια παράμετρος μήκους η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποτιμήσει την ευστάθεια θραύσης ενός μηχανικού συστήματος καθώς επηρεάζεται από το συνδυασμό των ιδιοτήτων του υλικού, τον τύπο και την ιστορία φόρτισης, τις φυσικές διαστάσεις και τη γεωμετρική μορφή. Η αστοχία μπορεί να περιορισθεί σε μια περιοχή όπου η αρχική θραύση εμφανίζεται αν το l μειώνεται με την αύξηση της $[(dW/dV)_{\min}^{\max}]_L$. Η αρχική θραύση θα επεκταθεί και η κατασκευή θα έχει συνολική αστοχία αν το l αυξάνει με την αύξηση της $[(dW/dV)_{\min}^{\max}]_L$ πέρα από την κρίσιμη τιμή.



Σχήμα 7.6: Τοπική και ολική πυκνότητα ενέργειας στην περιοχή έναρξης της αστοχίας.

Η τροχιά θραύσης υποδεικνύεται από τις καμπύλες σχήματος V ίσης πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας. Αν οι κορυφές των V καμπύλων ενωθούν με μια γραμμή, τότε η προκύπτουσα καμπύλη ξεκινά από το *A* και καταλήγει στην περιοχή του *G*. Αυτή η καμπύλη είναι η τροχιά της διαδιδόμενης ρωγμής (Σχήμα 7.7α). Αναφερόμενοι με όρους τοπογραφικού χάρτη η καμπύλη *AG* παριστάνει φαράγγι σε κοίτη ποταμού που αρχίζει από την κορυφή λόφου *A*. Η μορφή αυτού του φαραγγιού δίδει επιπρόσθετες πληροφορίες για την εκτίμηση της ευστάθειας της διαδρομής της ρωγμής ανάλογα με την αιχμηρότητα των καμπύλων. Μπορεί να λεχθεί ότι η ευστάθεια της διαδρομής της ρωγμής μπορεί να συναχθεί από την αιχμηρότητα της καμπύλης που περιγράφει το φαράγγι.

Στο σχήμα 7.7 φαίνονται δύο πιθανές μορφές καμπύλων πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας γύρω από την κορυφή της ρωγμής *A*. Το σχήμα 7.7α δείχνει ένα χάρτη καμπύλων πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας όπου το φαράγγι διακρίνεται ευκρινώς. Αυτό αντιστοιχεί σε ευσταθή διαδρομή ρωγμής. Στο σχήμα 7.7β το φαράγγι δεν είναι ευκρινές. Αναλογικά η πρώτη περίπτωση θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί σαν μικρή κοίτη ποταμού και η δεύτερη σαν μεγάλη. Είναι πιθανό στην περίπτωση του σχήματος 7.7β η ρωγμή να ακολουθήσει διαδρομή περιεχόμενη εντός της γωνίας *ΒΑΓ*.

Σχήμα 7.7. Καμπύλες πυκνότητας ενέργειας (*dW/dV*) για τον προσδιορισμό της τροχιάς της ρωγμής: α) ευσταθής και β) ασταθής.

Όταν η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας φθάσει την κρίσιμη τιμή της $(dW/dV)^{c}_{\min}$ η ρωγμή προχωρεί σταθερά και τα πεπερασμένα αυξητικά βήματα $r_1, r_2, ..., r_c$ διέπονται από τη σχέση [139]:

$$(\frac{dW}{dV})_c = \frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = \ldots = \frac{S_j}{r_j} = \ldots = \frac{S_c}{r_c} \tag{7.3}$$

όπου S_j ο συντελεστής πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας ο οποίος παριστάνει την ένταση του πεδίου της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας και μεταβάλλεται με την πολική γωνία θ [52]:

$$S_j = \alpha_{11}K_I^2 + 2\alpha_{12}K_I K_{II} + \alpha_{22}K_{II}^2 + \alpha_{33}K_{III}^2 \tag{7.4}$$

όπου K_I, K_{II} και K_{III} οι συντελεστές έντασης τάσεων και οι συντελεστές α_{ij} δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{1}{16G}[(3-4v-\cos\theta)(1-\cos\theta)] \\
\alpha_{12} &= \frac{1}{16G}2\sin\theta[\cos\theta-(1-2v)] \\
\alpha_{22} &= \frac{1}{16G}[(4(1-v)(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)(3\cos\theta-1)] \\
\alpha_{33} &= \frac{1}{4G}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

όπου v είναι ο λόγος του Poisson και G το μέτρο διάτμησης.

Ασταθής θραύση λαμβάνει χώρα όταν :

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_c = \frac{S_c}{r_c} \qquad (7.6)$$

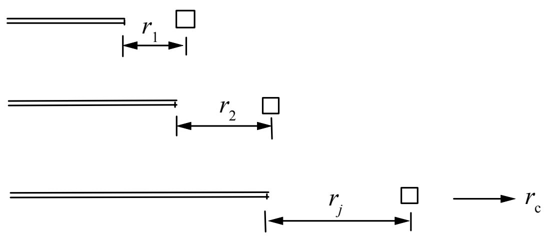
όπου r_c είναι μια κρίσιμη απόσταση μπροστά από τη ρωγμή.

Οι παραπάνω εξισώσεις δείχνουν ότι η αύξηση της ρωγμής αποτελείται από μια σειρά διαδικασιών πυρηνοποίησης περιέχουσα την έκρηξη απομονωμένων ενεργειακών θυλάκων στις διακριτές αποστάσεις $r_1, r_2, \ldots$. Για μονοτονική αύξουσα φόρτιση κάθε διαδοχικό βήμα θα αυξάνει σε μέγεθος (Σχήμα 7.8):

$r_1 < r_2 < \ldots < r_j < \ldots < r_c$

με αντίστοιχη αύξηση των συντελεστών έντασης ενεργειακής πυκνότητας:

$S_1 < S_2 < \ldots < S_j < \ldots < S_c$



Σχήμα 7.8: Αυξητικά βήματα ρωγμής καταλήγοντα σε αστάθεια.

Ένα καταληκτικό βήμα r_c θα πυροδοτήσει τελικά ολική αστάθεια. Ένα τέτοιο κατώφλι στην απελευθέρωση ενέργειας προσδιορίζεται ποσοτικά από το S_c, το οποίο στη μηχανική των θραύσεων αναφέρεται ως δυσκαμψία θραύσης (fracture toughness) και είναι χαρακτηριστικό του υλικού στην αντίσταση σε θραύση σε επίπεδο μακροκλίμακας. Η κρίσιμη απόσταση θα πρέπει να είναι επαρκής ώστε η ομοιογένεια να επικαλύπτει την ασυνέχεια της μικροδομής του υλικού ενώ επαρκώς μεγάλη ποσότητα ενέργειας θα πρέπει να είναι συσσωρευμένη σε αυτή την απόσταση για να πυροδοτήσει ολική αστάθεια.

Οι συνθήκες :

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_j > \ldots > r_c \qquad (7.7)$$

$$S_1 > S_2 > \ldots > S_j > \ldots > S_c$$

αντιστοιχούν σε μειούμενο ρυθμό αύξησης της ρωγμής και εγκλωβισμό της.

Μετά το πρώτο αυξητικό βήμα της ρωγμής ένα νέο πεδίο τάσεων μπορεί να υπολογισθεί για να προβλέψει την επόμενη αύξηση της. Με επανάληψη αυτής της διαδικασίας μπορεί να υπολογισθεί η πλήρης τροχιά της ρωγμής. Έτσι αυτή η βήμα προς βήμα μεθοδολογία μπορεί να αυτοματοποιηθεί για τον προσδιορισμό της τροχιάς της ρωγμής. Όταν το S_c είναι γνωστό μπορεί να προσδιορισθεί επίσης και η αρχή της ασταθούς θραύσης για δεδομένη μορφή δομικού στοιχείου. Για γραμμικά ομογενή ελαστικά υλικά το S_c σχετίζεται με την ASTM τιμή K_{Ic} για επίπεδη παραμόρφωση ως :

$$S_c = \frac{(1+v)(1-2v)K_{Ic}^2}{2\pi E} \tag{7.8}$$

όπου v είναι ο λόγος του Poisson και E το μέτρο ελαστικότητας.

7.3 Ρυθμός πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας

Στα ιξωδοπλαστικά υλικά η συμπεριφορά τους έχει εξάρτηση από το ρυθμό παραμόρφωσης και είναι αναγκαίο να προσδιορισθεί ο ρυθμός πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας, ο οποίος δίδεται από τη σχέση:

$$\frac{d\dot{W}}{dV} = \int_0^{\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}} \sigma_{ij}\, d\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} \tag{7.9}$$

όπου σ_{ij} και $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ οι συνιστώσες του τανυστή τάσης και ρυθμού ανελαστικής παραμόρφωσης αντίστοιχα.

Σε υλικά που υπακούουν σε εκθετικό νόμο ερπυσμού ισχύει:

$$\dot{\overline{\varepsilon}}^{in} = B\overline{\sigma}^n = \dot{\varepsilon}_0 (\frac{\overline{\sigma}}{\sigma_0})^n, \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \tfrac{3}{2}\frac{\dot{\overline{\varepsilon}}^{in}}{\overline{\sigma}} S_{ij} \tag{7.10}$$

όπου οι αναλλοίωτες της τάσης και του ρυθμού παραμόρφωσης προσδιορίζονται από:

$$\overline{\sigma} = (\tfrac{3}{2} S_{ij} S_{ij})^{1/2}, \quad \dot{\overline{\varepsilon}}^{in} = (\tfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in})^{1/2} \tag{7.11}$$

όπου:

S_{ij} είναι οι συνιστώσες του αποκλίνοντα τανυστή τάσης

$\dot{\varepsilon}_0$ και σ_0 ρυθμός παραμόρφωσης και τάση αναφοράς

n εκθέτης του εκθετικού νόμου

Στη περίπτωση αυτή ο ρυθμός πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας μπορεί να προσδιορισθεί αναλυτικά ως [89]:

$$\frac{d\dot{W}}{dV} = \frac{n}{n+1}\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{in}} \tag{7.12}$$

Στην περίπτωση που η παραμόρφωση δίδεται από το νόμο της θ-προβολής ο ρυθμός ανελαστικής παραμόρφωσης (εξ. 2.25) είναι:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{in} = \theta_1\theta_2 e^{-\theta_2 t} + \theta_3\theta_4 e^{\theta_4 t} \tag{7.13}$$

όπου t ο χρόνος σε sec και θ_i συντελεστές εξαρτώμενοι από την τάση και τη θερμοκρασία. Ο ρυθμός πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας μπορεί να προσδιορισθεί από τη σχέση:

$$\frac{d\dot{W}}{dV} = \int_0^{\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}} \bar{\sigma}\, d\dot{\bar{\varepsilon}}^{in} \tag{7.14}$$

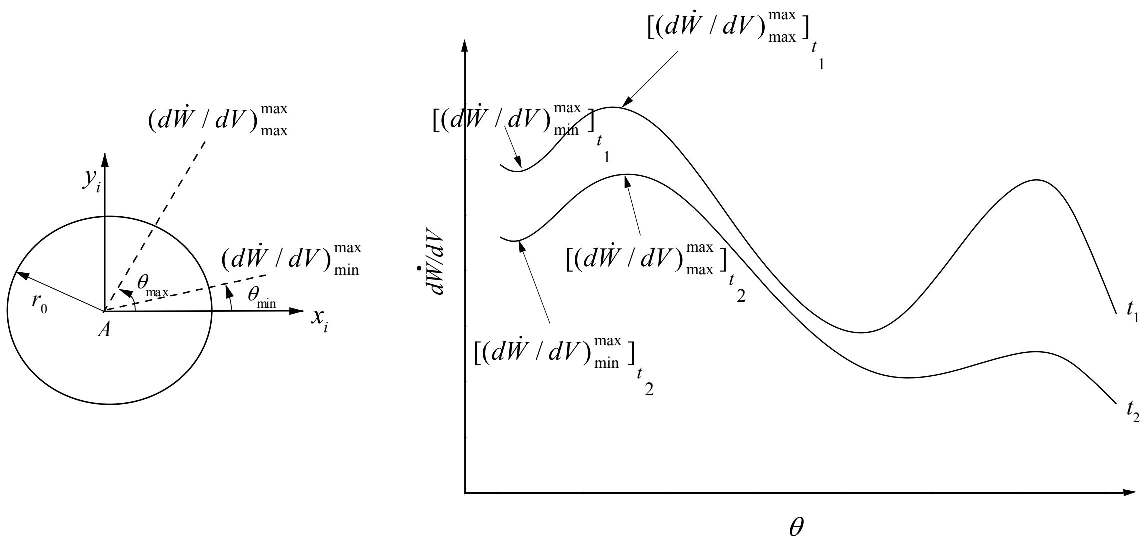
Για γενικευμένους νόμους ερπυσμού ο προσδιορισμός του $d\dot{W}/dV$ γίνεται ως εξής:

$$\frac{d\dot{W}}{dV} = \int_0^{\dot{\bar{\varepsilon}}^{in}} \bar{\sigma}\, d\dot{\bar{\varepsilon}}^{in} = \bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{in} - \int_0^{\bar{\sigma}} \dot{\bar{\varepsilon}}^{in}\, d\bar{\sigma} \tag{7.15}$$

Ο δεύτερος όρος μπορεί εύκολα να ολοκληρωθεί αριθμητικά αν ο ρυθμός ανελαστικής παραμόρφωσης δίδεται σαν συνάρτηση της τάσης. Γενικά ο ρυθμός παραμόρφωσης ερπυσμού δεν είναι μόνο συνάρτηση της τάσης αλλά επίσης είναι συνάρτηση είτε του χρόνου (χρονική κράτυνση) είτε της παραμόρφωσης ερπυσμού (παραμορφωσιακή κράτυνση). Τότε η ολοκλήρωση του δεύτερου όρου πρέπει να γίνεται για σταθερό χρονικό διάστημα ή για σταθερή παραμόρφωση ερπυσμού εξαρτώμενη από το νόμο κράτυνσης.

Παρατηρώντας ότι η αποτελεσματικότητα της αριθμητικής ολοκλήρωσης εξαρτάται από την ύπαρξη κλειστής έκφρασης, η έκφραση της χρονικής κράτυνσης μπορεί να χρησιμοποιείται για αριθμητική ολοκλήρωση ακόμη και όταν ο νόμος παραμορφωσιακής κράτυνσης χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του ρυθμού παραμόρφωσης ερπυσμού. Σε τέτοια περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιείται ο σωστός χρόνος που προκύπτει από το νόμο της παραμορφωσιακής κράτυνσης.

Θεωρείται ένα αυθαίρετο σημείο A το οποίο είναι συνδεδεμένο με το τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $A\,x_i y_i$. Η διακύμανση της συνάρτησης του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας $d\dot{W}/dV$ υπολογίζεται κατά μήκος περιφέρειας κύκλου ακτίνας r_0 και κέντρου A, όπου r_0 είναι η ακτίνα της περιοχής του πυρήνα που αντικατοπτρίζει μια παράμετρο μικροδομής του υλικού (Σχήμα 7.9).



Σχήμα 7.9: Τοπικά μέγιστα των ελαχίστων και μεγίστων του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σε δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2.

Σε κάθε σημείο A υπάρχει τουλάχιστο ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο του $d\dot{W}/dV$ όπως φαίνεται στις αριθμητικές εφαρμογές των επόμενων παραγράφων. Η έναρξη της θραύσης από το σημείο Α λαμβάνει χώρα κατά τη διεύθυνση του μεγίστου των ελαχίστων τιμών $(d\dot{W}/dV)_{\min}^{\max}$ του $d\dot{W}/dV$ σε αντιστοιχία με το κριτήριο της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας.

Στην παρούσα εργασία εξετάζονται διάφορα παραδείγματα δοκιμίων που υπόκεινται σε ερπυσμό κάτω από διάφορα φορτία με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων που περιγράφεται σε προηγούμενα κεφάλαια και στη συνέχεια με τον υπολογισμό του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας διαπιστώνεται η ισχύς της παραπάνω πρότασης.

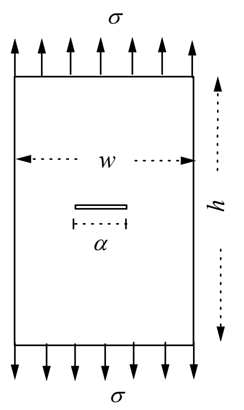
7.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Παράδειγμα 1ο

Θεωρείται ένα δοκίμιο ορθογωνικής διατομής με κεντρική ρωγμή (CCP) [54] με ύψος h = 40,64cm και πλάτος w = 20,32cm, (Σχήμα 7.10) κατασκευασμένο από ένα υλικό που διέπεται από εκθετικό νόμο ερπυσμού (υπερκράμα Inconel 800 H) στους 650^o C με μέτρο ελαστικότητας E = 153.717 MPa, λόγο Poisson v = 0,33, σ_0 = 417,06 MPa, εκθέτη ερπυσμού n = 5 και την παράμετρο:

$$B = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0^n} = 1{,}347 \text{ x } 10^{-16}\ (\text{MPa})^{-5}/\text{h}$$

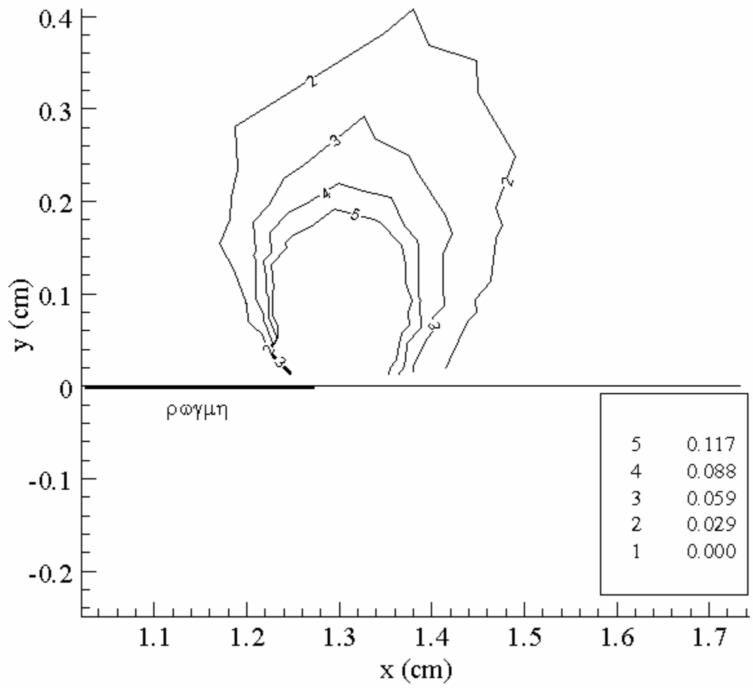
Το δοκίμιο έχει μια κεντρική ρωγμή μήκους α = 0,125 w και υποβάλλεται σε μια απομακρυσμένη ομοιόμορφη φόρτιση 129,28 MPa η οποία εφαρμόζεται στιγμιαία. Λόγω της συμμετρίας μόνο το ένα τέταρτο του αναλύεται.



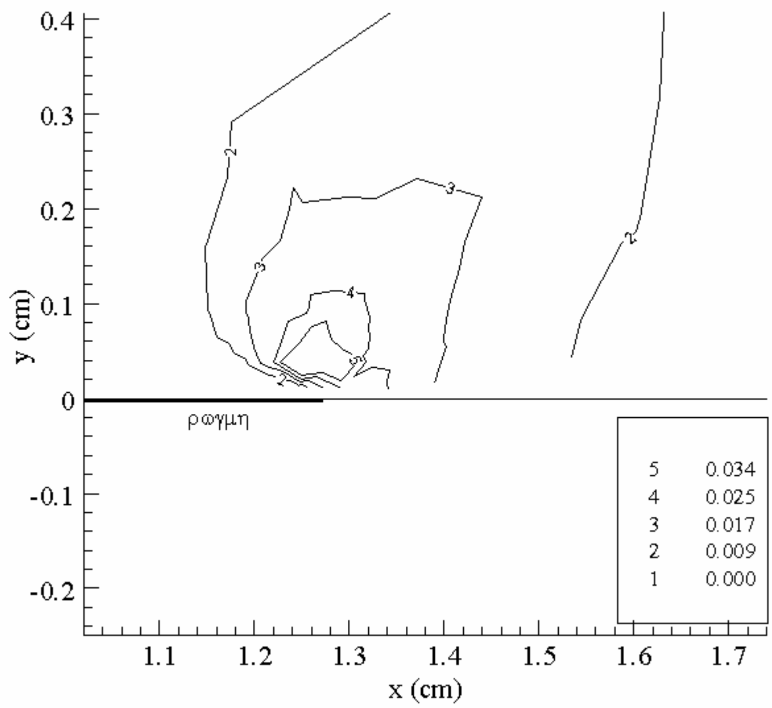
Σχήμα 7.10: Δοκίμιο με κεντρική ρωγμή (CCP).

Το λογισμικό που αναπτύσσεται με την παρούσα μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων μπορεί να δώσει επαρκή αποτελέσματα αναφορικά με ιστορία κατανομής των τάσεων και παραμορφώσεων. Βασιζόμενοι σε αυτά τα αποτελέσματα και με τη χρήση της εξίσωσης 7.12 μπορεί να υπολογισθεί σε κάθε χρονικό βήμα η κατανομή του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας.

Τυπικά διαγράμματα καμπύλων κατανομής του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας στο ένα τέταρτο του δοκιμίου για δύο διαφορετικούς χρόνους (t = 0 και t=5,01 h) φαίνονται στα Σχήματα 7.11 και 7.12 αντίστοιχα.

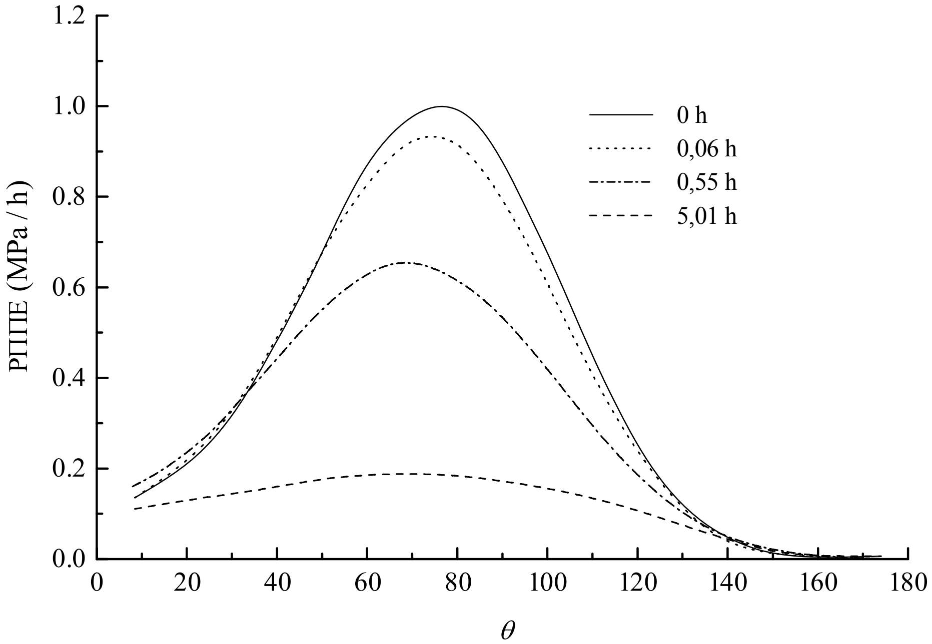


Σχήμα 7.11: Καμπύλες ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας για t = 0 h (MPa/h).



Σχήμα 7.12: Καμπύλες ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας για t = 5,01 h (MPa/h).

Το Σχήμα 7.13 απεικονίζει τη μεταβολή του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας (ΡΠΠΕ) για διαφορετικούς χρόνους σε σχέση με τη γωνία. Από την εξέταση του Σχήματος συνάγεται ότι ο ρυθμός πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας μειώνεται αυξανομένου του χρόνου. Αυτό αναμενόταν αφού το εφαρμοζόμενο φορτίο παραμένει σταθερό και η ρωγμή υποτίθεται στάσιμη. Μπορεί επίσης να παρατηρηθεί ότι όλες οι καμπύλες έχουν έχουν ένα ελάχιστο στη γωνία θ_o= 0. Λαμβάνοντας υπ όψη το προταθέν κριτήριο του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας αυτό δείχνει ότι η ρωγμή θα ξεκινήσει από τη γωνία θ_o= 0 και θα συνεχίσει κατά μήκος του άξονα συμμετρίας υπό τον παρόντα τύπο Ι ρωγμής.



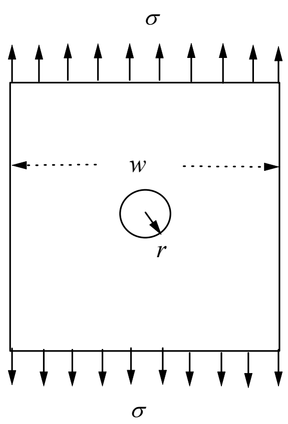
Σχήμα 7.13: Μεταβολή του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σε σχέση με τη γωνία σε διάφορους χρόνους.

Παράδειγμα 2ο

Θεωρείται ένα δοκίμιο τετραγωνικής διατομής πλευράς 25,4 cm με οπή στο κέντρο ακτίνας 2,54 cm (Σχήμα 7.14) κατασκευασμένο από ένα υλικό που διέπεται από εκθετικό νόμο ερπυσμού με μέτρο ελαστικότητας E = 206.850 MPa, λόγο Poisson $\nu = 0{,}3$, εκθέτη ερπυσμού $n = 4$ και την παράμετρο:

$B = 4{,}42 \times 10^{-16}\ (\mathrm{MPa})^{-4}/\mathrm{h}$

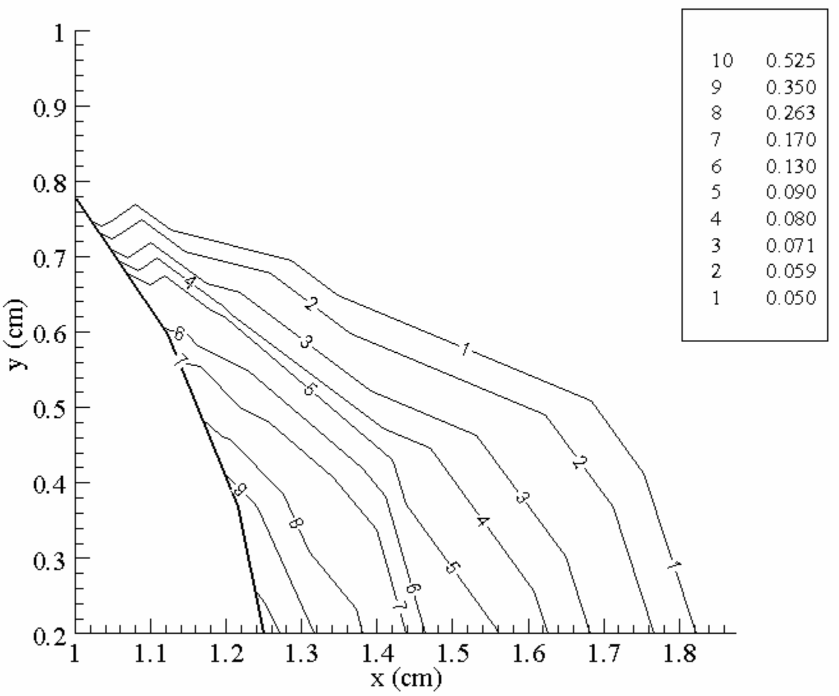
Το δοκίμιο υποβάλλεται σε μια απομακρυσμένη ομοιόμορφη φόρτιση 100 MPa η οποία εφαρμόζεται στιγμιαία. Λόγω της συμμετρίας μόνο το ένα τέταρτο του δοκιμίου αναλύεται.



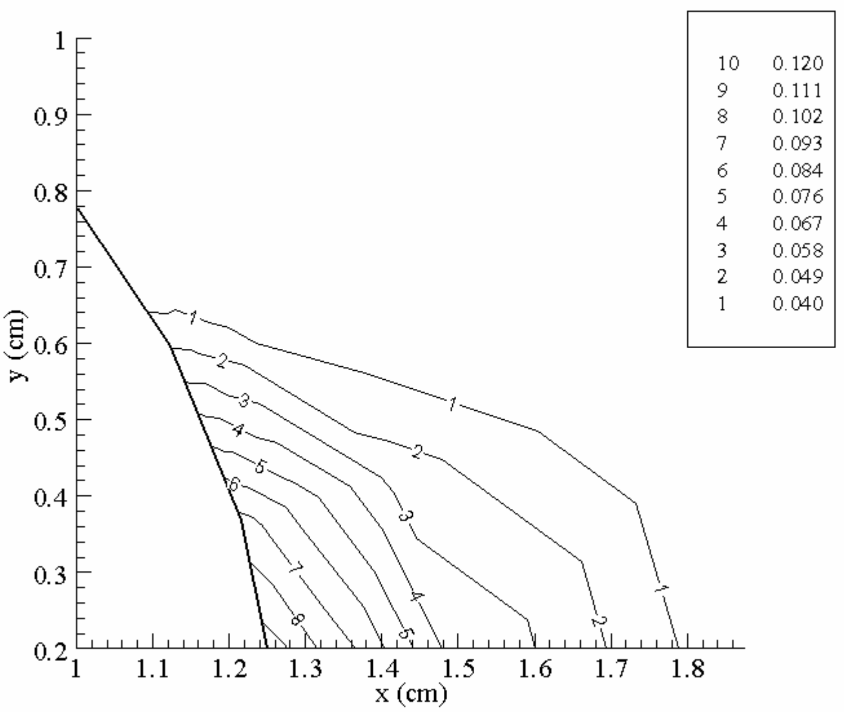
Σχήμα 7.14: Δοκίμιο με οπή στο κέντρο.

Τυπικά διαγράμματα καμπύλων κατανομής του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας στο ένα τέταρτο του δοκιμίου για δύο διαφορετικούς χρόνους (t = 0 και t = 400h) φαίνονται στα Σχήματα 7.15 και 7.16 αντίστοιχα.

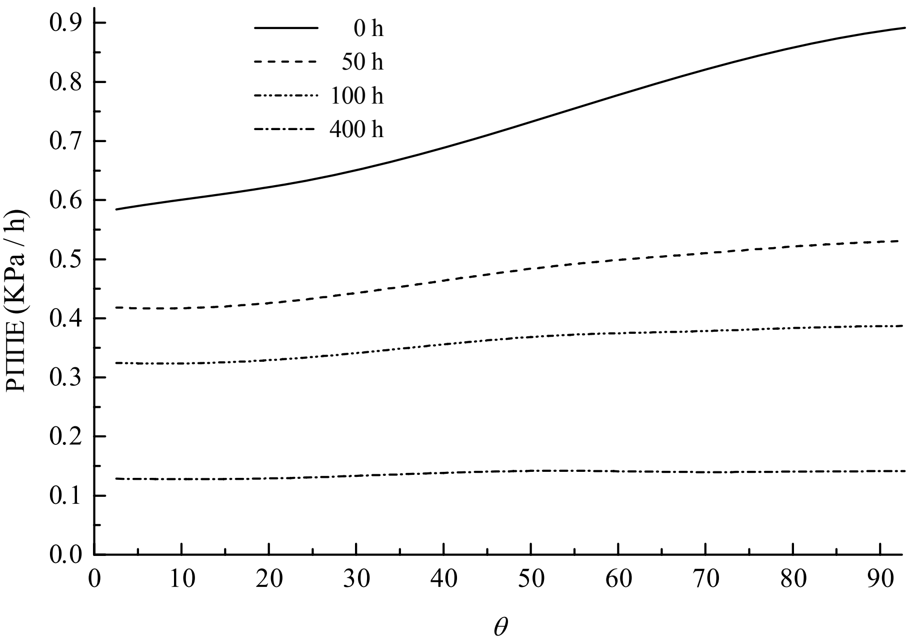
Τα Σχήματα 7.17 και 7.18 απεικονίζουν τη μεταβολή του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας για διαφορετικούς χρόνους σε σχέση με τη γωνία.



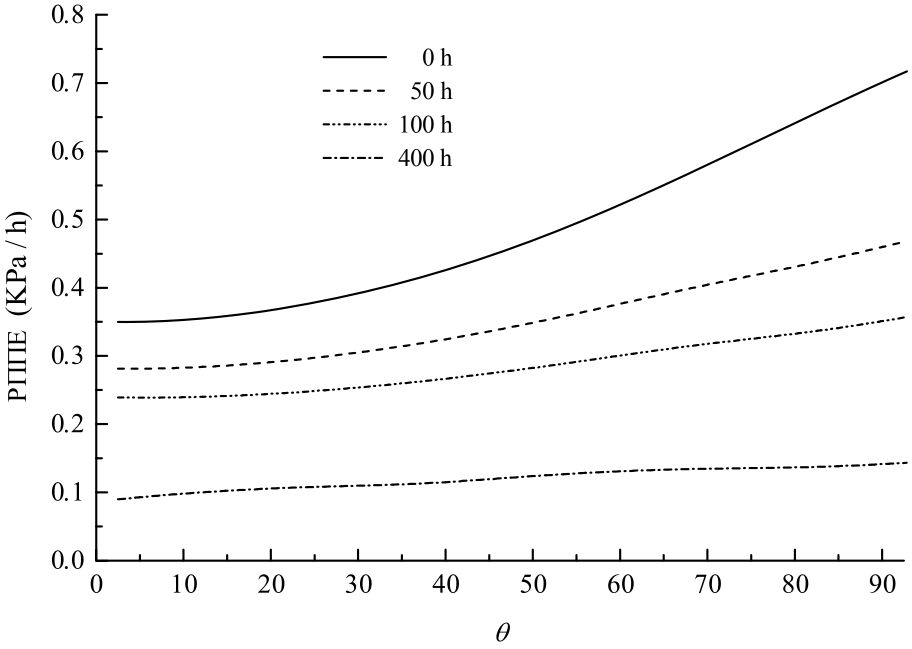
Σχήμα 7.15: Καμπύλες ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας για t = 0 (KPa/h).



Σχήμα 7.16: Καμπύλες ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας για t = 400 h (KPa/h).



Σχήμα 7.17: Μεταβολή του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σε σχέση με τη γωνία σε διάφορους χρόνους σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας 0,38 mm με κέντρο την τομή του άξονα x με την οπή.



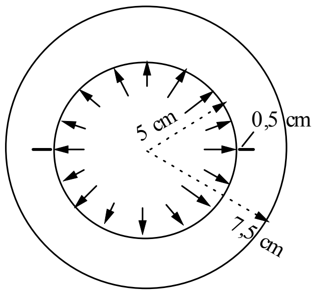
Σχήμα 7.18: Μεταβολή του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σε σχέση με τη γωνία σε διάφορους χρόνους σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας 0,89 mm με κέντρο την τομή του άξονα x με την οπή.

Παράδειγμα 3ο

Θεωρείται ένα δοκίμιο κυκλικής διατομής με ακτίνα 7,5 cm, με οπή στο κέντρο ακτίνας 5 cm και με ρωγμή μήκους 0,5 cm (Σχήμα 7.19) κατασκευασμένο από ένα υλικό που διέπεται από εκθετικό νόμο ερπυσμού με μέτρο ελαστικότητας E = 206.850 MPa, λόγο Poisson v = 0,3, εκθέτη ερπυσμού n = 4 και την παράμετρο:

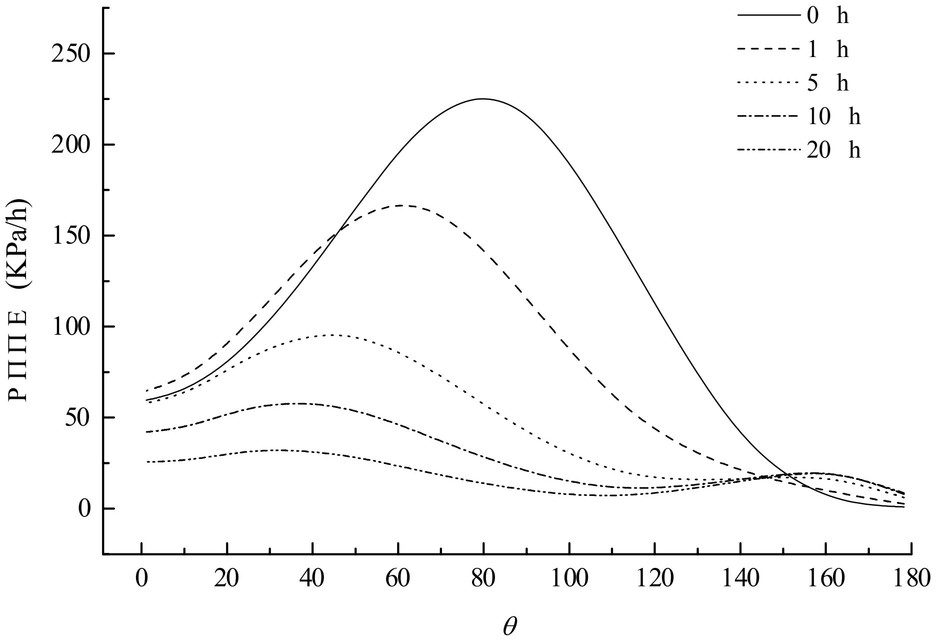
$B = 4{,}42 \times 10^{-16}\ (\mathrm{MPa})^{-4}/\mathrm{h}$

Το δοκίμιο υποβάλλεται σε πίεση στο εσωτερικό του. Λόγω της συμμετρίας μόνο το ένα τέταρτο του δοκιμίου αναλύεται, σε 58 συνοριακά και 150 εσωτερικά στοιχεία αντίστοιχα.

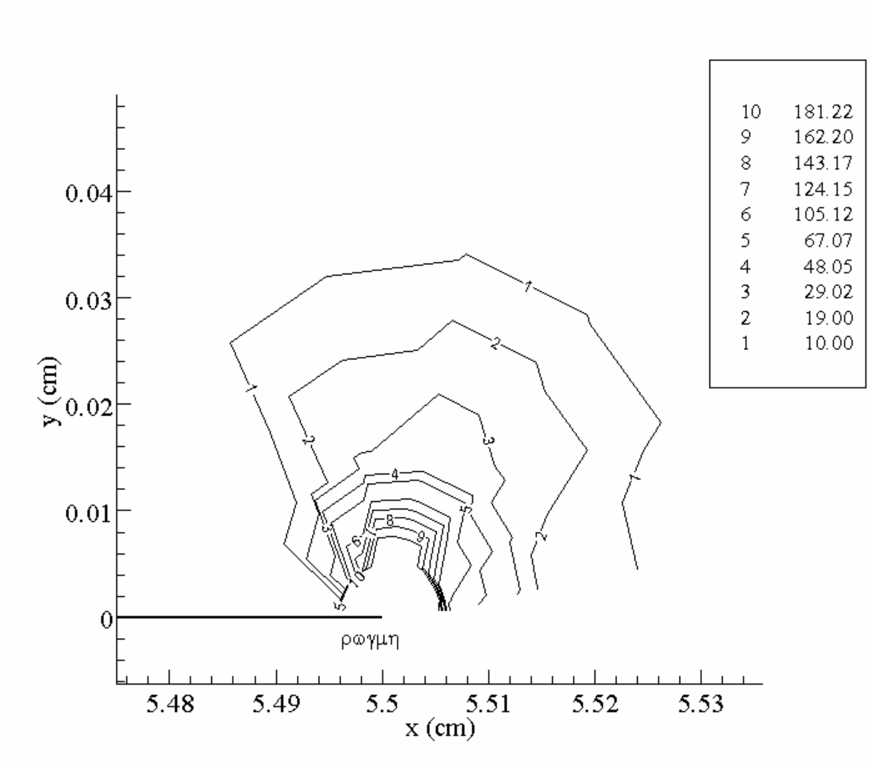


Σχήμα 7.19: Δοκίμιο με οπή και ρωγμή.

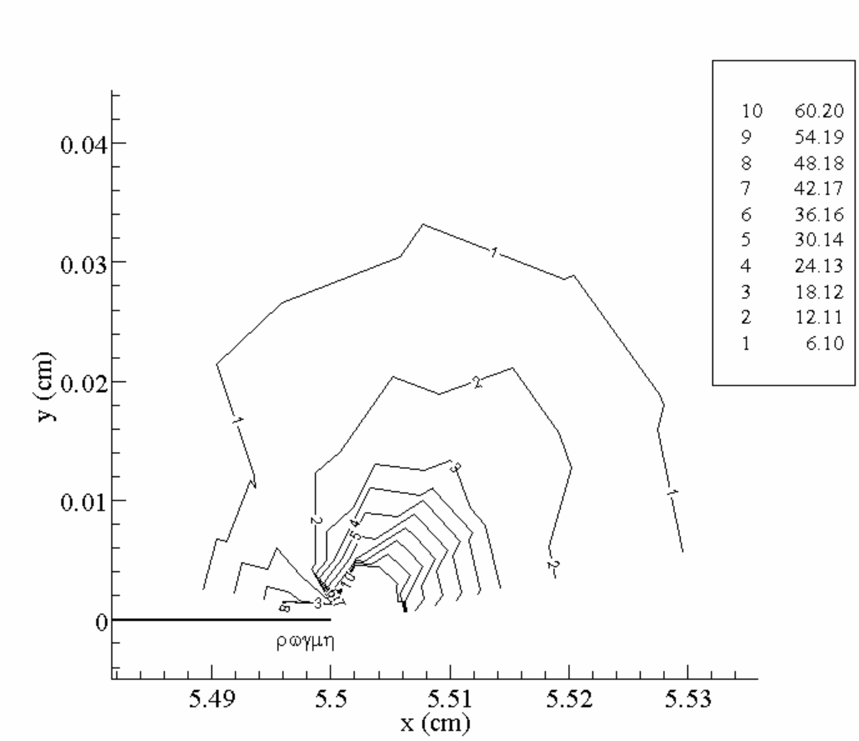
Τυπικά διαγράμματα καμπύλων κατανομής του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας στο ένα τέταρτο του δοκιμίου για διαφορετικούς χρόνους και φορτίσεις φαίνονται στα Σχήματα 7.21, 7.22, 7.26 και 7.27.



Σχήμα 7.20: Μεταβολή του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σε σχέση με τη γωνία σε διάφορους χρόνους για εσωτερική πίεση 50 MPa.

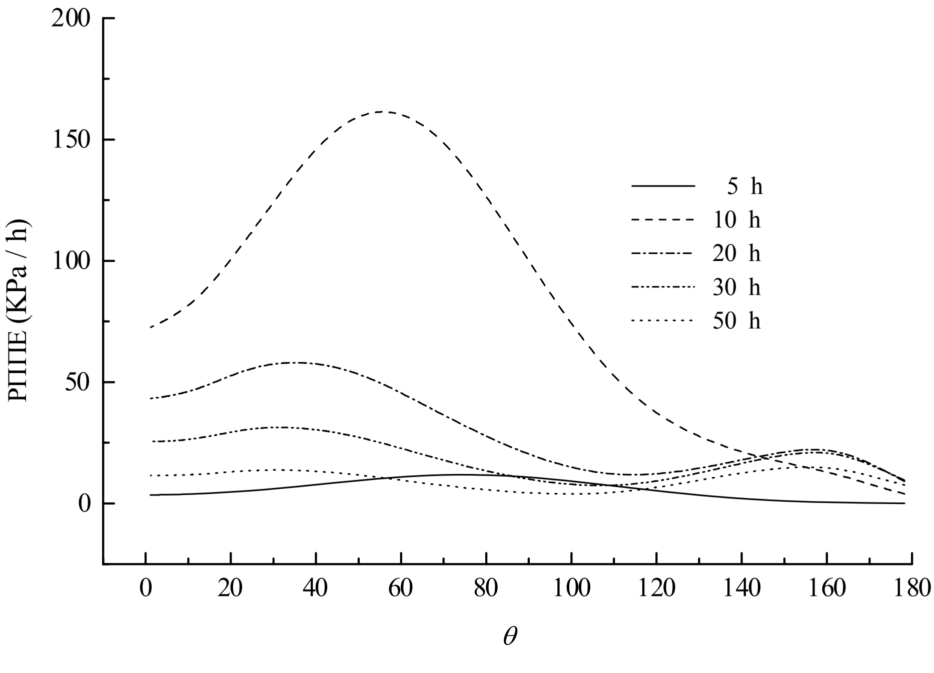


Σχήμα 7.21: Καμπύλες ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας (KPa/h) για t = 0 h και για εσωτερική πίεση 50 MPa.

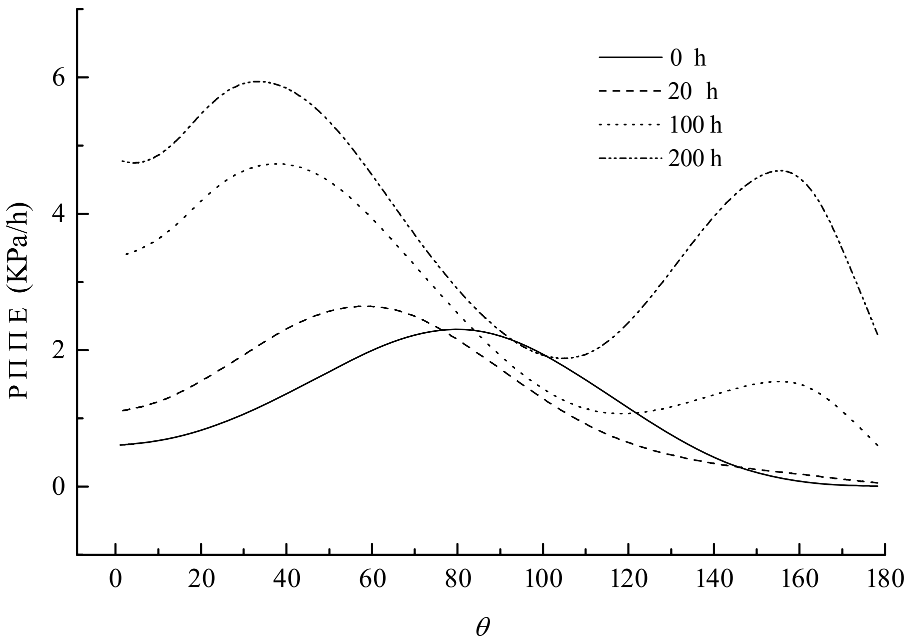


Σχήμα 7.22:Καμπύλες ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας (KPa/h) για t =10 h και για εσωτερική πίεση 50 MPa.

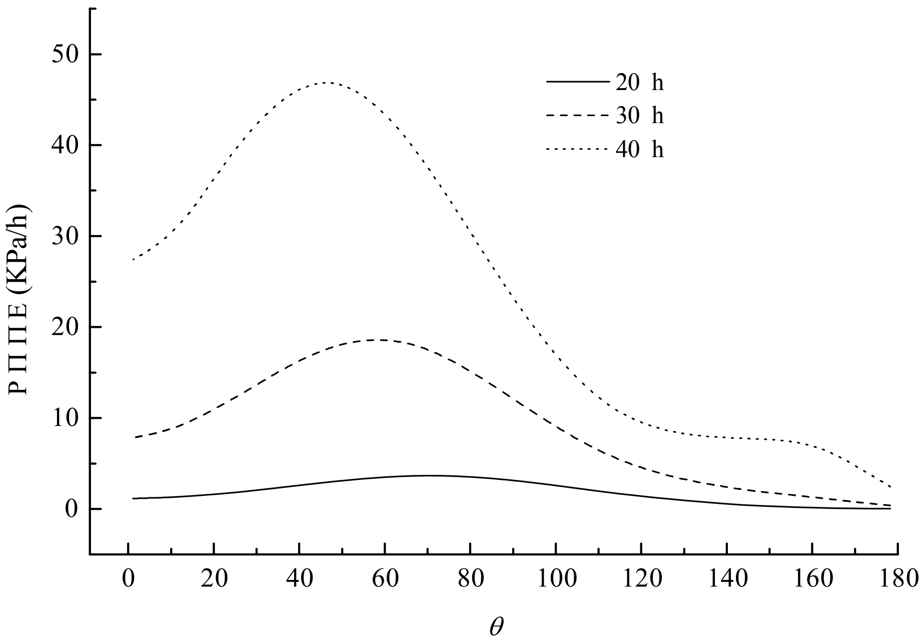
2



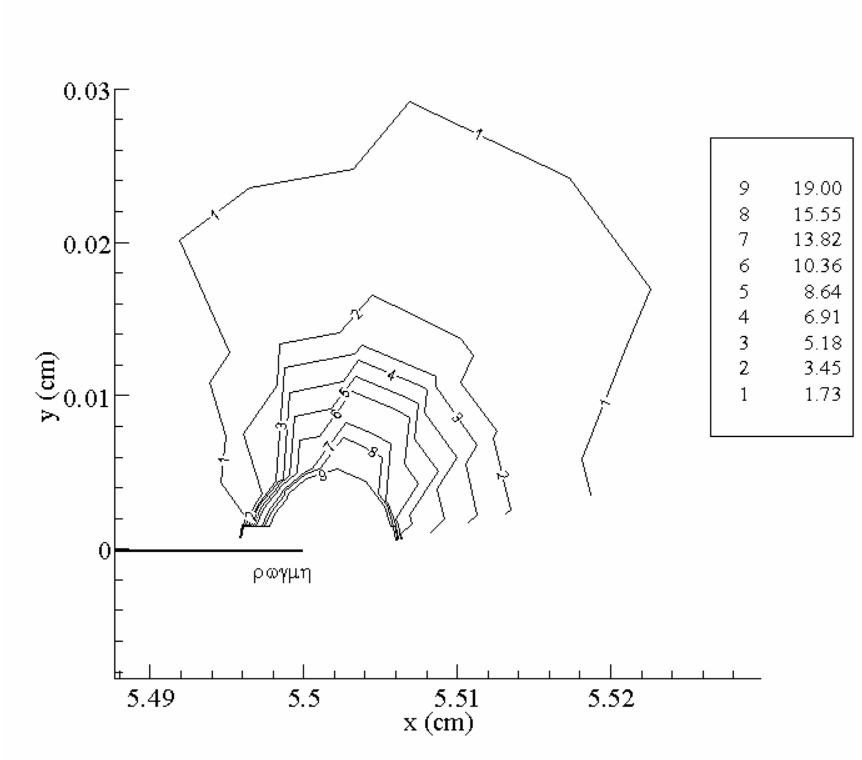
Σχήμα 7.23: Μεταβολή του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σε σχέση με τη γωνία σε διάφορους χρόνους για εσωτερική πίεση 5 MPa/h εφαρμοζόμενη μέχρι 10 h.



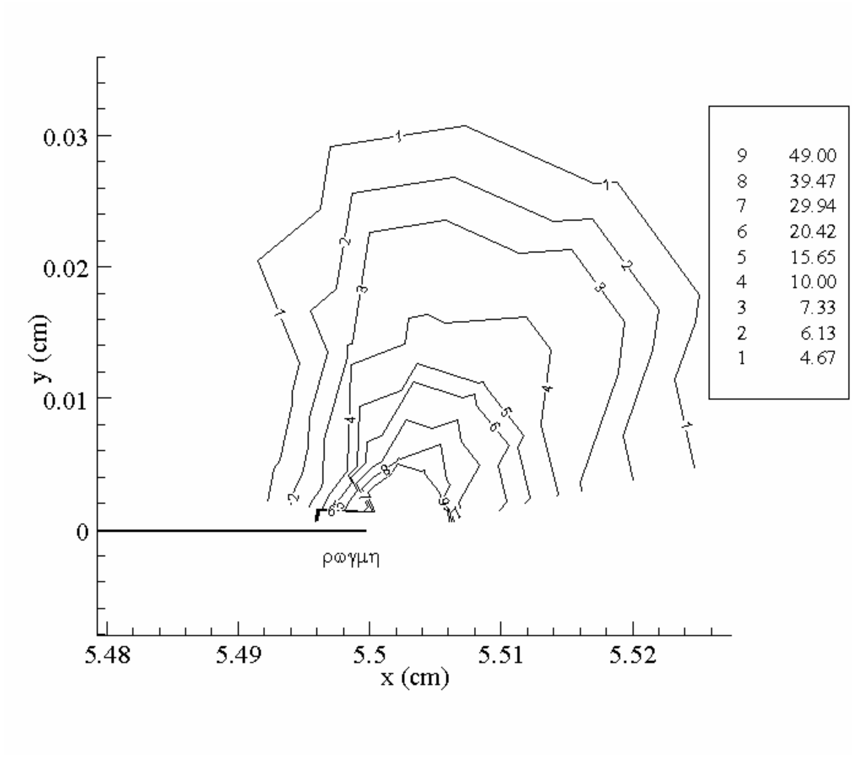
Σχήμα 7.24: Μεταβολή του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σε σχέση με τη γωνία σε διάφορους χρόνους για αρχική εσωτερική πίεση 20 MPa και 0,1 MPa/h.



Σχήμα 7.25: Μεταβολή του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σε σχέση με τη γωνία σε διάφορους χρόνους για εσωτερική πίεση 1 MPa/h.



Σχήμα 7.26: Καμπύλες ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας (KPa/h) για *t*=30 h και για εσωτερική πίεση 1 MPa/h.



Σχήμα 7.27: Καμπύλες ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας (KPa/h) για *t*=40 h και για εσωτερική πίεση 1 MPa/h.

Τα Σχήματα 7.20, 7.23, 7.24 και 7.25 απεικονίζουν τη μεταβολή του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας για διαφορετικούς χρόνους και διάφορες φορτίσεις σε σχέση με τη γωνία. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι όλες οι καμπύλες έχουν έχουν ένα ελάχιστο στη γωνία θ_o=0. Λαμβάνοντας υπ όψη το προταθέν κριτήριο του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας αυτό δείχνει ότι η ρωγμή θα ξεκινήσει από τη γωνία θ_o= 0 και θα συνεχίσει κατά μήκος του άξονα συμμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή εξετάζονται με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων προβλήματα συγκέντρωσης τάσεων σε ιξωδοπλαστικά υλικά υπό την επίδραση διάφορων θερμομηχανικών φορτίσεων. Γίνεται εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας στα ιξωδοπλαστικά μοντέλα των Hart και Robinson. Εισάγονται ειδικά συνοριακά στοιχεία τα οποία περιγράφουν σωστά την χρονικά εξαρτώμενη συμπεριφορά των ιδιόμορφων πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων στην κορυφή ρωγμών. Επιλύονται προβλήματα μηχανικής των βλαβών σε ιξωδοπλαστικά υλικά με το μοντέλο των Kachanov-Rabotnov με τη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων. Εισάγεται το κριτήριο του ρυθμού πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας στην ιξωδοπλαστικότητα σε αντιστοιχία με το κριτήριο πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας.

Αναλυτικά τα συμπεράσματα και τα επιτεύγματα της παρούσας διδακτορικής εργασίας είναι τα εξής:

Παρουσιάζεται μια άμεση διατύπωση της μεθοδολογίας των συνοριακών στοιχείων για την ανάλυση προβλημάτων μηχανικής και θερμικής φόρτισης σε υλικά που υπόκεινται σε ιξωδοπλαστική παραμόρφωση. Δίδονται λεπτομέρειες για τη στρατηγική της ολοκλήρωσης και επίλυσης προβλημάτων αρχικών συνοριακών τιμών. Το αναπτυχθέν λογισμικό της μεθοδολογίας των συνοριακών στοιχείων είναι αρκετά γενικό και μπορεί να επιλύσει πολύ κοινά προβλήματα σε θερμαινόμενους μεταλλικούς σωλήνες και δοχεία πίεσης. Είναι δυνατή η ανάλυση προβλημάτων με πολύπλοκη γεωμετρία και σε περιπτώσεις χρονικά μεταβαλλόμενης θερμικής και μηχανικής φόρτισης.

Τα συνοριακά στοιχεία έχουν εμφανισθεί σαν ένα ισχυρό εναλλακτικό εργαλείο σε σχέση με τα πεπερασμένα στοιχεία ειδικά σε περιπτώσεις όπου απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια όπως σε προβλήματα συγκέντρωσης τάσεων. Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της μεθοδολογίας των συνοριακών στοιχείων (ΜΣΣ) σε σχέση με τη χρήση των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) είναι ότι ο αριθμός των αγνώστων στο τελικό αλγεβρικό σύστημα των εξισώσεων είναι ανάλογος του αριθμού των συνοριακών στοιχείων σε αντίθεση με το συνολικό αριθμό των κόμβων στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Η διακριτοποίηση του συνόρου στη ΜΣΣ πλεονεκτεί έναντι της διακριτοποίησης της επιφάνειας που απαιτείται στη ΜΠΣ και ο ίδιος αριθμός εξισώσεων δίδει ακριβέστερα αποτελέσματα με τη ΜΣΣ. Η τροποποίηση της διακριτοποίησης στα συνοριακά στοιχεία μπορεί να ξαναγίνει ευκολότερα και δεν χρειάζεται να αλλαχθούν τα εσωτερικά στοιχεία για βελτίωση των αποτελεσμάτων. Διατομές με οπές των οποίων η θέση, το μέγεθος ή ο αριθμός μπορεί να αλλάξει κατά τη διαδικασία σχεδιασμού, μπορούν να διακριτοποιηθούν καλύτερα με τα συνοριακά στοιχεία ενώ στα πεπερασμένα μπορεί να δημιουργηθούν προβλήματα καθώς ορισμένα από αυτά θα πρέπει να είναι στρεβλά ή να έχουν κακή αναλογία πλευρών. Στη διακριτοποίηση των συνοριακών στοιχείων μπορούν να περιληφθούν και ασυνεχή στοιχεία για να περιγράψουν ασυνέχειες στους ελκυστές του συνόρου τα οποία δεν είναι επιτρεπτά στα πεπερασμένα στοιχεία. Το πρόγραμμα περιλαμβάνει γραμμικά συνοριακά στοιχεία αλλά και «τετραγωνικά» (quadratic) τα οποία παρέχουν καλύτερα αποτελέσματα ιδίως σε προβλήματα συγκέντρωσης τάσεων.

Στην παρούσα εργασία περιγράφονται στοιχεία από την ιξωδοπλαστικότητα με αποτελέσματα από πειράματα κράτυνσης, ερπυσμού, χαλάρωσης και κυκλικής φόρτισης, αναφέρονται οι θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί για την εξήγηση του φαινομένου του ερπυσμού και περιγράφεται η θεωρία των εσωτερικών μεταβλητών της ιξωδοπλαστικότητας. Οι εσωτερικές μεταβλητές στην ιξωδοπλαστικότητα διευκολύνουν στη χρονική αποτίμηση των επιφανειακών ολοκληρωμάτων καθώς είναι γνωστές οι τάσεις και οι εσωτερικές μεταβλητές σε κάθε χρονικό βήμα και αυτό το χαρακτηριστικό κάνει τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων αρκετά ελκυστική σε αντίθεση με την πλαστικότητα που υπάρχει δυσκολία με την ύπαρξη συνθηκών διαρροής και ειδικών κριτηρίων.

Γίνεται αναλυτική περιγραφή και επιτυχής εφαρμογή των ιξωδοπλαστικών μοντέλων του Hart και του Robinson με τη διατύπωση της μεθοδολογίας των συνοριακών στοιχείων σε προβλήματα με χρονικά μεταβαλλόμενες φορτίσεις σε υψηλές θερμοκρασιακές βαθμίδες το οποίο δεν είχε γίνει ως τώρα. Επίσης παρουσιάζεται η αναλυτική λύση σε προβλήματα που υπάρχει, για επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων της παρούσας μεθοδολογίας. Στη βάση της καλής συμφωνίας μεταξύ των αποτελεσμάτων της παρούσας μεθοδολογίας και της αναλυτικής ή των πεπερασμένων στοιχείων, αποδεικνύεται ότι η προτεινόμενη μεθοδολογία των συνοριακών στοιχείων είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση σύνθετων μη γραμμικών προβλημάτων πρακτικής σημασίας. Το πρόγραμμα συνοριακών στοιχείων είναι αρκετά γενικό και μπορεί να γίνει προσαρμογή οποιουδήποτε ιξωδοπλαστικού μοντέλου.

Τα ιδιόμορφα συνοριακά στοιχεία αποτιμούν ορθά τα πεδία στην κορυφή της ρωγμής που προκύπτουν σε δομικά στοιχεία κάτω από την επίδραση απομακρυσμένης φόρτισης. Το νέο ιδιόμορφο συνοριακό στοιχείο παραμόρφωσης ερπυσμού που εισάγεται με την παρούσα εργασία, είναι εύκολο στην εφαρμογή και δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα στο προκύπτον σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων και στην επίλυση του. Αυτή η νέα μεθοδολογία συναγωνίζεται σε ακρίβεια αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μεθοδολογία των πεπερασμένων στοιχείων και διαθέσιμων εμπειρικών λύσεων για αυτό το είδος της χρονικά εξαρτώμενης ανάλυσης θραύσης. Παραδείγματα με ρωγμές διερευνώνται για να επιβεβαιώσουν την επάρκεια αυτών των ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων στην ανάλυση προβλημάτων κατανομής των τάσεων και παραμορφώσεων ερπυσμού και για τον προσδιορισμό σημαντικών παραμέτρων ερπυσμού θραύσης.

Εισάγονται διαφορετικές συναρτήσεις σχήματος για τις μετατοπίσεις και τους ελκυστές ώστε να απεικονίζεται η συμπεριφορά των ελκυστών στην κορυφή της ρωγμής η οποία παρουσάζει ιδιομορφία της τάξης $-1/(n+1)$ όπου n ο εκθέτης ερπυσμού. Η κατάλληλη προσομοίωση της ιδιομορφίας των ελκυστών οδηγεί σε διαφορετικές συναρτήσεις σχήματος για τους ελκυστές με κατάλληλη τροποποίηση των παραγώγων των συναρτήσεων σχήματος των μετατοπίσεων. Χρειάζεται να εξετασθεί η αποτελεσματικότητα του ιδιόμορφου συνοριακού στοιχείου σε περισσότερο πολύπλοκα προβλήματα θραύσης ερπυσμού με μη συμμετρικούς και αλληλεπιδρώντες τύπους ρωγμών.

Γίνεται περιγραφή της θεωρίας της μηχανικής βλαβών και επιτυχής εφαρμογή του μοντέλου βλάβης των Kachanov-Rabotnov με την άμεση διατύπωση της μεθοδολογίας των συνοριακών στοιχείων το οποίο δεν έχει γίνει ως τώρα παρά μόνο με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στο πλαίσιο της καλής συμφωνίας μεταξύ των αποτελεσμάτων της παρούσας μεθοδολογίας και των πεπερασμένων στοιχείων, επιβεβαιώνεται η ισχύς της προτεινόμενης μεθοδολογίας των συνοριακών στοιχείων για την επίλυση προβλημάτων σύζευξης βλάβης και ιξωδοπλαστικής παραμόρφωσης. Το πρόγραμμα συνοριακών στοιχείων είναι αρκετά γενικό και μπορεί να γίνει προσαρμογή οποιουδήποτε μοντέλου σύζευξης βλάβης και ιξωδοπλαστικής παραμόρφωσης

Τέλος δίδονται στοιχεία από τη θεωρία της πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας και περιγράφεται το κριτήριο θραύσης που ισχύει για ελαστοπλαστικά υλικά. Εισάγεται το κριτήριο του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας σε υλικά που υπόκεινται σε ιξωδοπλαστική παραμόρφωση επεκτείνοντας ανάλογα το κριτήριο της πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας. Η έναρξη της θραύσης λαμβάνει χώρα κατά τη διεύθυνση του μεγίστου των ελαχίστων τιμών του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας.

Η αποτελεσματικότητα, η ακρίβεια και η επάρκεια της παρούσας μεθοδολογίας των συνοριακών στοιχείων και σε συνδυασμό με την εισαγωγή των ιδιόμορφων συνοριακών στοιχείων, του κριτηρίου του ρυθμού πυκνότητας της παραμορφωσιακής ενέργειας και την εφαρμογή στα ιξωδοπλαστικά μοντέλα του Hart και του Robinson και στο μοντέλο σύζευξης βλάβης και ιξωδοπλαστικής παραμόρφωσης των Kachanov-Rabotnov, επιβεβαιώνεται για διάφορες καταστάσεις ερπυσμού σε προβλήματα δύο διαστάσεων και συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης ή επίπεδης έντασης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I [113]

Παράμετροι ροής, κράτυνσης και ιξωδοπλαστικού ορίου για το νικέλιο στο μοντέλο του Hart

---

λ= 0.15 M =7.6 m = 5 λόγος του Poisson ν = 0.298

Θερμοκρασία (^{0}C)	$\dot{a}^*$ (sec^{-1})	L (psi)	E(psi)
25	$5.249 x 10^{27}$	$15.5 x 10^6$	$29 x 10^6$
100	$7.968 x 10^{26}$	$13.9 x 10^6$	$26 x 10^6$
200	$1.813 x 10^{24}$	$12.3 x 10^6$	$23 x 10^6$
300	$5.264 x 10^{22}$	$13.3 x 10^6$	$25 x 10^6$
400	$1.855 x 10^{34}$	$14.3 x 10^6$	$27 x 10^6$

Θερμοκρασία(^{0}C)	$\dot{\varepsilon}_S{}^*$(psi)	$\sigma_S{}^*$(psi)	$\dot{\varepsilon}_d^c$(sec^{-1})	$\sigma_d{}^*$(psi)
25	$2.118 x 10^{-38}$	10000	$4.414 x 10^{-25}$	10000
100	$2.646 x 10^{-29}$	10000	$5.512 x 10^{-16}$	10000
200	$1.371 x 10^{-21}$	10000	$2.856 x 10^{-8}$	10000
300	$6.941 x 10^{-17}$	10000	$1.466 x 10^{-3}$	10000
400	$8.548 x 10^{-14}$	10000	1.781	10000

Θερμοκρ. (^{0}C)	β(psi)	δ
25	$1.044 x 10^5$	1.64
100	$9.360 x 10^4$	1.64
200	$8.280 x 10^4$	1.64
300	$9.000 x 10^4$	1.64
400	$9.717 x 10^4$	1.64

$$\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}_S{}^* \, (\sigma^* / \sigma_S{}^*)^{\mathrm{m}} \, \exp(Q/R\,T_B) \, \exp(-Q/R\,T) \qquad \dot{\varepsilon}^{pc} = \dot{\varepsilon}_d^c \, (\frac{\sigma^*}{\sigma_d{}^*})^m$$

$$\Gamma = (\beta/\sigma^*)^{\delta} \, (\bar{\sigma}^{\alpha} / \sigma^*)^{\beta/\sigma^*} \qquad \dot{\varepsilon}_d^c = \dot{\varepsilon}_S{}^* / 4.8x10^{14}$$

Παράμετροι ροής, κράτυνσης και ιξωδοπλαστικού ορίου για τον ανοξείδωτο χάλυβα 304 στο μοντέλο του Hart

---

$\lambda = 0.15$ $M = 7.8$ $m = 5$ λόγος του Poisson $\nu = 0.298$

Θερμοκρασία (^{0}C)	$\dot{a}^*$ (sec^{-1})	L (psi)	E(psi)
25	$1.619\text{x}10^{22}$	$14.6\ \text{x}10^{6}$	$28.1\text{x}10^{6}$
100	$1.042\text{x}10^{23}$	$14.4\text{x}10^{6}$	$27.6\text{x}10^{6}$
200	$2.411\text{x}10^{24}$	$14.1\text{x}10^{6}$	$26.7\text{x}10^{6}$
300	$1.771\text{x}10^{27}$	$13.6\text{x}10^{6}$	$25.1\text{x}10^{6}$
400	$6.937\text{x}10^{24}$	$13.2\text{x}10^{6}$	$24.4\text{x}10^{6}$
500	$1.562\text{x}10^{28}$	$12.05\text{x}10^{6}$	$23.7\text{x}10^{6}$

Θερμοκρασία(^{0}C)	$\dot{\varepsilon}_S{}^*$ (psi)	$\sigma_S{}^*$ (psi)	$\dot{\varepsilon}_d^c$(sec^{-1})	$\sigma_d{}^*$ (psi)
25	$1.708\text{x}10^{-51}$	10000	$3.558\text{x}10^{-38}$	10000
100	$7.211\text{x}10^{-42}$	10000	$1.5024\text{x}10^{-28}$	10000
200	$9.572\text{x}10^{-34}$	10000	$1.9945\text{x}10^{-20}$	10000
300	$2.008\text{x}10^{-28}$	10000	$4.1834\text{x}10^{-15}$	10000
400	$1.269\text{x}10^{-24}$	10000	$2.4660\text{x}10^{-11}$	10000
500	$8.797\text{x}10^{-22}$	10000	$1.8833\text{x}10^{-8}$	10000

Θερμοκρ. (^{0}C)	β(psi)	δ
300	$1.882\text{x}10^{5}$	1.33
400	$1.790\text{x}10^{5}$	1.33
500	$1.706\text{x}10^{5}$	1.33

$$\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}_S{}^* \left(\sigma^*/\sigma_S{}^*\right)^{m} \exp(Q/R\,T_B)\ \exp(-Q/R\,T) \qquad \dot{\varepsilon}^{pc} = \dot{\varepsilon}_d^c \left(\frac{\sigma^*}{\sigma_d{}^*}\right)^m$$

$$\Gamma = (\beta/\sigma^*)^{\delta}\ (\overline{\sigma}^{\alpha}/\sigma^*)^{\beta/\sigma^*} \qquad \dot{\varepsilon}_d^c = \dot{\varepsilon}_S{}^* / 4.8x10^{14}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ [115]

Τα kernels των ολοκληρωμάτων στη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση για δύο διαστάσεις είναι:

$$U_{ij} = c_1 (c_2 \delta_{ij} \ln r - r_{,i} r_{,j})$$

$$T_{ij} = c_3 \frac{1}{r} [\frac{\partial r}{\partial n} (c_4 \delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j}) - c_4 (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i)]$$

όπου:

$$c_1 = -1/[8\pi G(1-v)]$$

$$c_2 = 3 - 4v$$

$$c_3 = -1/[4\pi(1-v)]$$

$$c_4 = 1 - 2v$$

Στην περίπτωση επίπεδης έντασης το v αντικαθίσταται από το $\bar{v} = \dfrac{v}{1+v}$

$$U_{ij} = c_1[c_2 \delta_{ij} \ln r - e_{1i} e_{1j} \cos^2\theta - (e_{1i} e_{2j} + e_{2i} e_{1j}) \sin\theta \cos\theta - e_{2i} e_{2j} \sin^2\theta]$$

$$T_{ij} = c_3 \frac{1}{r} \{\cos\theta [c_4 \delta_{ij} + 2 e_{1i} e_{1j} \cos^2\theta + 2(e_{1i} e_{2j} + e_{2i} e_{1j}) \cos\theta \sin\theta + 2 e_{2i} e_{2j} \sin^2\theta] -$$
$$c_4 (e_{2i} e_{1j} - e_{1i} e_{2j}) \sin\theta\}$$

$$\Delta U_{ij} = c_1 c_2 \delta_{ij} I_{U1} - c_1 e_{1i} e_{1j} I_{U2} - c_1 (e_{1i} e_{2j} + e_{2i} e_{1j)}) I_{U3} - c_1 e_{2i} e_{2j} I_{U4}$$

όπου:

$$I_{U1} = D[\tan\theta_b (\ln r_b - 1) - \tan\theta_a (\ln r_a - 1) + \theta_b - \theta_a]$$

$$I_{U2} = D(\theta_b - \theta_a)$$

$$I_{U3} = D \ln(r_b / r_a)$$

$$I_{U4} = D[\tan\theta_b - \tan\theta_a - (\theta_b - \theta_a)]$$

$$\Delta \widetilde{U}_{ij} = \frac{1}{\Delta \Gamma_R} [c_1 c_2 \delta_{ij} (I_{U5} - I_{U4}) - c_1 e_{1i} e_{1j} (I_{U6} - I_{U10}) - c_1 (e_{1i} e_{2j} + e_{2i} e_{1j})(I_{U7} - I_{U11}) -$$
$$c_1 e_{2i} e_{2j} (I_{U8} - I_{U12})]$$

όπου:

$$I_{U5}=\tfrac{1}{4}r_b^2(2\ln r_b-1)-\tfrac{1}{4}r_a^2(2\ln r_a-1)$$

$$I_{U6}=D^2\ln(r_b/r_a)$$

$$I_{U7}=D^2[\tan\theta_b-\tan\theta_a-(\theta_b-\theta_a)]$$

$$I_{U8}=D^2[\tfrac{1}{2}(\tan^2\theta_b-\tan^2\theta_a)-\ln(r_b-r_a)]$$

$$I_{U9}=z_aI_{U1}$$

$$I_{U10}=z_aI_{U2}$$

$$I_{U11}=z_aI_{U3}$$

$$I_{U12}=z_aI_{U4}$$

$$\Delta T_{ij}=c_3c_4\delta_{ij}I_{T1}+c_3e_{1i}e_{1j}I_{T2}+c_3(e_{1i}e_{2j}+e_{2i}e_{1j})I_{T3}+c_3e_{2i}e_{2j}I_{T4}-c_3c_4(e_{2i}e_{1j}-e_{1i}e_{2j})I_{T5}$$

όπου:

$$I_{T1}=\theta_b-\theta_a$$

$$I_{T2}=\theta_b-\theta_a+\sin\theta_b\cos\theta_b-\sin\theta_a\cos\theta_a$$

$$I_{T3}=\sin^2\theta_b-\sin^2\theta_a$$

$$I_{T4}=\theta_b-\theta_a-\sin\theta_b\cos\theta_b+\sin\theta_a\cos\theta_a$$

$$I_{T5}=\ln(r_b/r_a)$$

$$\Delta\widetilde{T}_{ij}=\frac{1}{\Delta\Gamma_R}\{c_3c_4\delta_{ij}(I_{T6}-I_{T11})+c_3e_{1i}e_{1j}(I_{T7}-I_{T12})+c_3(e_{1i}e_{2j}+e_{2i}e_{1j})(I_{T8}-I_{T13})+$$
$$c_3e_{2i}e_{2j}(I_{T9}-I_{T14})-c_3c_4(e_{2i}e_{1j}-e_{1i}e_{2j})(I_{T10}-I_{T15})\}$$

όπου:

$$I_{T6}=D\ln(r_b/r_a)$$

$$I_{T7}=D(\sin^2\theta_b-\sin^2\theta_a)$$

$$I_{T8}=D(\theta_b-\theta_a-\sin\theta_b\cos\theta_b+\sin\theta_a\cos\theta_a)$$

$$I_{T9}=D[\cos^2\theta_b-\cos^2\theta_a+2\ln(r_b/r_a)]$$

$$I_{T10}=D\ [\tan\theta_b-\tan\theta_a-(\theta_b-\theta_a)]$$

$$I_{T11}=z_aI_{T1}$$

$$I_{T12} = z_a I_{T2}$$

$$I_{T13} = z_a I_{T3}$$

$$I_{T14} = z_a I_{T4}$$

$$I_{T15} = z_a I_{T5}$$

περίπτωση $D = 0$

$$U_{ij} = c_1(c_2\delta_{ij}\ln r - e_{2i}e_{2j})$$

$$T_{ij} = c_3 c_4 \frac{1}{r}(e_{2i}e_{1j} - e_{1i}e_{2j})(SGN)$$

$$\mathit{\Delta} U_{ij} = c_1(c_2\delta_{ij} I_{U13} - e_{2i}e_{2j} I_{U14})$$

όπου:

$$I_{U13} = (SGN)[r_b(\ln r_b - 1) - r_a(\ln r_a - 1)]$$

$$I_{U14} = (SGN)(r_b - r_a)$$

αν $r_a = 0$ τότε $\displaystyle \lim_{r_a \to 0} r_a \ln r_a = 0$

$$\mathit{\Delta}\widetilde{U}_{ij} = \frac{1}{\mathit{\Delta\Gamma}_R} c_1[c_2\delta_{ij}(I_{U15} - I_{U17}) - e_{2i}e_{2j}(I_{U16} - I_{U18})]$$

όπου:

$$I_{U15} = \tfrac{1}{4} r_b^2(2\ln r_b - 1) - \tfrac{1}{4} r_a^2(2\ln r_a - 1)$$

$$I_{U16} = (r_b^2 - r_a^2)/2$$

$$I_{U17} = z_a I_{U13}$$

$$I_{U18} = z_a I_{U14}$$

$$\mathit{\Delta} T_{ij} = -c_3 c_4 \frac{1}{r}(e_{2i}e_{1j} - e_{1i}e_{2j}) I_{T16}$$

όπου:

$$I_{T16} = \ln(r_b / r_a)$$

$$\Delta\widetilde{T}_{ij} = -\frac{1}{\Delta\Gamma_R} c_3 c_4 \frac{1}{r}(e_{2i}e_{1j} - e_{1i}e_{2j})(I_{T17} - I_{T18})$$

όπου:

$$I_{T17} = (SGN)(r_b - r_a)$$

$$I_{T18} = z_a I_{T16}$$

αν $r_a = 0$ τότε ο προσδιορισμός των ολοκληρωμάτων γίνεται έμμεσα με τη θεώρηση του στερεού σώματος όπως και στην περίπτωση των «τετραγωνικών» συνοριακών στοιχείων.

$$V_{ijk} = -\frac{1}{r} c_3 [c_4(\delta_{jk} r_{,i} + \delta_{ki} r_{,j} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2 r_{,i} r_{,j} r_{,k}]$$

$$V_{ijk} = -\frac{1}{r} c_3 \{c_4[(\delta_{jk} e_{1i} + \delta_{ki} e_{1j} - \delta_{ij} e_{1k})\cos\theta + (\delta_{jk} e_{2i} + \delta_{ki} e_{2j} - \delta_{ij} e_{2k})\sin\theta] +$$
$$2[e_{1i}e_{1j}e_{1k}\cos^3\theta + (e_{2i}e_{1j}e_{1k} + e_{1i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{1j}e_{2k})\cos^2\theta\sin\theta +$$
$$(e_{2i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{2j}e_{2k} + e_{2i}e_{1j}e_{2k})\cos\theta\sin^2\theta + e_{2i}e_{2j}e_{2k}\sin^3\theta]\}$$

$$\Delta D_{ijk} = -c_3\{c_4[(\delta_{jk} e_{1i} + \delta_{ki} e_{1j} - \delta_{ij} e_{1k}) I_{D1} + (\delta_{jk} e_{2i} + \delta_{ki} e_{2j} - \delta_{ij} e_{2k}) I_{D2}] +$$
$$e_{1i}e_{1j}e_{1k} I_{D3} + (e_{2i}e_{1j}e_{1k} + e_{1i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{1j}e_{2k}) I_{D4} +$$
$$(e_{2i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{2j}e_{2k} + e_{2i}e_{1j}e_{2k}) I_{D5} + e_{2i}e_{2j}e_{2k} I_{D6}\}$$

όπου:

$$I_{D1} = \theta_b - \theta_a$$

$$I_{D2} = \ln(r_b / r_a)$$

$$I_{D3} = \theta_b - \theta_a + \sin\theta_b \cos\theta_b - \sin\theta_a \cos\theta_a$$

$$I_{D4} = \sin^2\theta_b - \sin^2\theta_a$$

$$I_{D5} = \theta_b - \theta_a - \sin\theta_b \cos\theta_b + \sin\theta_a \cos\theta_a$$

$$I_{D6} = \cos^2\theta_b - \cos^2\theta_a + 2\ln(r_b / r_a)$$

$$\varDelta\widetilde{D}_{ijk} = -\frac{1}{\varDelta\varGamma_R} c_3\{c_4[(\delta_{jk}e_{1i} + \delta_{ki}e_{1j} - \delta_{ij}e_{1k})(I_{D7} - I_{D13}) + (\delta_{jk}e_{2i} + \delta_{ki}e_{2j} - \delta_{ij}e_{2k})$$

$$(I_{D8} - I_{D14})] + e_{1i}e_{1j}e_{1k}(I_{D9} - I_{D15}) + (e_{2i}e_{1j}e_{1k} + e_{1i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{1j}e_{2k})(I_{D10} - I_{D16}) +$$

$$(e_{2i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{2j}e_{2k} + e_{2i}e_{1j}e_{2k})(I_{D11} - I_{D17}) + e_{2i}e_{2j}e_{2k}(I_{D12} - I_{D18})\}$$

όπου:

$$I_{D7} = D\ln(r_b / r_a)$$

$$I_{D8} = D[\tan\theta_b - \tan\theta_a - (\theta_b - \theta_a)]$$

$$I_{D9} = D(\sin^2\theta_b - \sin^2\theta_a)$$

$$I_{D10} = D(\theta_b - \theta_a - \sin\theta_b\cos\theta_b + \sin\theta_a\cos\theta_a)$$

$$I_{D11} = D[\cos^2\theta_b - \cos^2\theta_a + 2\ln(r_b / r_a)]$$

$$I_{D12} = D[2(\tan\theta_b - \tan\theta_a) - 3(\theta_b - \theta_a) + \sin\theta_b\cos\theta_b - \sin\theta_a\cos\theta_a]$$

$$I_{D13} = z_a I_{D1}$$

$$I_{D14} = z_a I_{D2}$$

$$I_{D15} = z_a I_{D3}$$

$$I_{D16} = z_a I_{D4}$$

$$I_{D17} = z_a I_{D5}$$

$$I_{D18} = z_a I_{D6}$$

όταν $D = 0$

$$\varDelta D_{ijk} = -c_3[c_4(\delta_{jk}e_{2i} + \delta_{ki}e_{2j} - \delta_{ij}e_{2k}) + 2e_{2i}e_{2j}e_{2k}]I_{D19}$$

όπου:

$$I_{D19} = \ln(r_b / r_a)$$

$$\varDelta\widetilde{D}_{ijk} = -\frac{1}{\varDelta\varGamma_R} c_3[c_4(\delta_{jk}e_{2i} + \delta_{ki}e_{2j} - \delta_{ij}e_{2k}) + 2e_{2i}e_{2j}e_{2k}](I_{D20} - I_{D21})$$

όπου:

$$I_{D20} = (SGN)(r_b - r_a)$$

$$I_{D21} = z_a I_{D19}$$

$$T_{ijk} = -\frac{1}{r^2} 2Gc_3[\frac{\partial r}{\partial n}(2c_4\delta_{ij}r_{,k} + 2v(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ki}r_{,j}) - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}) + 2c_4 r_{,i}r_{,j}n_k +$$

$$2v(r_{,j}r_{,k}n_i + r_{,k}r_{,i}n_j) + c_4(\delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) - (1-4v)\delta_{ij}n_k]$$

$$T_{ijk} = -\frac{1}{r^2} 2Gc_3 \{2(c_4\delta_{ij}e_{1k} + v\delta_{jk}e_{1i} + v\delta_{ki}e_{1j} + e_{1i}e_{1j}e_{1k})\cos^2\theta + 2[c_4\delta_{ij}e_{2k} + v\delta_{jk}e_{2i}$$
$$+ v\delta_{ki}e_{2j} + (1-v)(e_{1i}e_{2j}e_{1k} + e_{2i}e_{1j}e_{1k}) + 2ve_{1i}e_{1j}e_{2k}]\cos\theta\sin\theta - 8[e_{1i}e_{1j}e_{1k}\cos^4\theta +$$
$$(e_{1i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{1j}e_{2k} + e_{2i}e_{1j}e_{1k})\cos^3\theta\sin\theta + (e_{2i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{2j}e_{2k} + e_{2i}e_{1j}e_{2k})\cos^2\theta$$
$$\sin^2\theta + e_{2i}e_{2j}e_{1k}\cos\ \theta\sin^3\theta] + c_4(\delta_{ik}e_{1j+}\delta_{jk}e_{1i}) - (1-4v)\delta_{ij}e_{1k} + 2[c_4e_{2i}e_{2j}e_{1k} +$$
$$v(e_{1i}e_{2j}e_{2k} + e_{1i}e_{2j}e_{2k})]\sin^2\theta\}$$

$$\Delta S_{ijk} = -2Gc_3\{(c_4\delta_{ij}e_{1k} + v\delta_{jk}e_{1i} + v\delta_{ki}e_{1j} + e_{1i}e_{1j}e_{1k})I_{S1} + [c_4\delta_{ij}e_{2k} + v\delta_{jk}e_{2i} + v\delta_{ki}e_{2j} +$$
$$(1-v)(e_{1i}e_{2j}e_{1k} + e_{2i}e_{1j}e_{1k}) + 2ve_{1i}e_{1j}e_{2k}]I_{S2} - e_{1i}e_{1j}e_{1k}I_{S3} - (e_{1i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{1j}e_{2k} +$$
$$e_{2i}e_{1j}e_{1k})I_{S4} - (e_{2i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{2j}e_{2k} + e_{2i}e_{1j}e_{2k})I_{S5} - e_{2i}e_{2j}e_{1k}I_{S6} +$$
$$[c_4(\delta_{ik}e_{1j+}\delta_{jk}e_{1i}) - (1-4v)\delta_{ij}e_{1k}]I_{S7} + [c_4e_{2i}e_{2j}e_{1k} + v(e_{1i}e_{2j}e_{2k} + e_{1i}e_{2j}e_{2k})]I_{S8}\}$$

όπου:

$$I_{S1} = (\theta_b - \theta_a + \sin\theta_b\cos\theta_b - \sin\theta_a\cos\theta_a)/D$$

$$I_{S2} = (\sin^2\theta_b - \sin^2\theta_a)/D$$

$$I_{S3} = [3(\theta_b - \theta_a) + 5(\sin\theta_b\cos\theta_b - \sin\theta_a\cos\theta_a) - 2(\sin^3\theta_b\cos\theta_b - \sin^3\theta_a\cos\theta_a)]/D$$

$$I_{S4} = -2(\cos^4\theta_b - \cos^4\theta_a)/D$$

$$I_{S5} = [\theta_b - \theta_a - (\sin\theta_b\cos\theta_b - \sin\theta_a\cos\theta_a) + 2(\sin^3\theta_b\cos\theta_b - \sin^3\theta_a\cos\theta_a)]/D$$

$$I_{S6} = 2(\sin^4\theta_b - \sin^4\theta_a)/D$$

$$I_{S7} = (\theta_b - \theta_a)/D$$

$$I_{S8} = (\theta_b - \theta_a - \sin\theta_b\cos\theta_b + \sin\theta_a\cos\theta_a)/D$$

$$\Delta\widetilde{S}_{ijk} = -\frac{1}{\Delta\Gamma_R} 2Gc_3\{(c_4\delta_{ij}e_{1k} + v\delta_{jk}e_{1i} + v\delta_{ki}e_{1j} + e_{1i}e_{1j}e_{1k})(I_{S9} - I_{S17}) + [c_4\delta_{ij}e_{2k} + v\delta_{jk}e_{2i}$$
$$+ v\delta_{ki}e_{2j} + (1-v)(e_{1i}e_{2j}e_{1k} + e_{2i}e_{1j}e_{1k}) + 2ve_{1i}e_{1j}e_{2k}](I_{S10} - I_{S18}) - e_{1i}e_{1j}e_{1k}(I_{S11} - I_{S19}) -$$
$$(e_{1i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{1j}e_{2k} + e_{2i}e_{1j}e_{1k})(I_{S12} - I_{S20}) - (e_{2i}e_{2j}e_{1k} + e_{1i}e_{2j}e_{2k} + e_{2i}e_{1j}e_{2k})(I_{S13} -$$
$$I_{S21}) - e_{2i}e_{2j}e_{1k}(I_{S14} - I_{S22}) + [c_4(\delta_{ik}e_{1j+}\delta_{jk}e_{1i}) - (1-4v)\delta_{ij}e_{1k}](I_{S15} - I_{S23}) +$$
$$e_{2i}e_{2j}e_{1k}(I_{S16} - I_{S24})\}$$

όπου:

$I_{S9} = \sin^2\theta_b - \sin^2\theta_a$

$I_{S10} = \theta_b - \theta_a - \sin\theta_b \cos\theta_b + \sin\theta_a \cos\theta_a$

$I_{S11} = -2(\cos^4\theta_b - \cos^4\theta_a)$

$I_{S12} = \theta_b - \theta_a - (\sin\theta_b \cos\theta_b - \sin\theta_a \cos\theta_a) + 2(\sin^3\theta_b \cos\theta_b - \sin^3\theta_a \cos\theta_a)$

$I_{S13} = 2(\sin^4\theta_b - \sin^4\theta_a)$

$I_{S14} = 3(\theta_b - \theta_a) - 3(\sin\theta_b \cos\theta_b - \sin\theta_a \cos\theta_a) - 2(\sin^3\theta_b \cos\theta_b - \sin^3\theta_a \cos\theta_a)$

$I_{S15} = \ln(r_b / r_a)$

$I_{S16} = \cos^2\theta_b - \cos^2\theta_a + 2\ln(r_b / r_a)$

$I_{S17} = z_a I_{S1}$

$I_{S18} = z_a I_{S2}$

$I_{S19} = z_a I_{S3}$

$I_{S20} = z_a I_{S4}$

$I_{S21} = z_a I_{S5}$

$I_{S22} = z_a I_{S6}$

$I_{S23} = z_a I_{S7}$

$I_{S24} = z_a I_{S8}$

όταν $D = 0$

$$\Delta S_{ijk} = -2Gc_3[c_4(\delta_{ik}e_{1j+}\delta_{jk}e_{1i}) - (1-4\nu)\delta_{ij}e_{1k} + 2c_4 e_{2i}e_{2j}e_{1k} + 2\nu(e_{1i}e_{2j}e_{2k} + e_{1i}e_{2j}e_{2k})]I_{S25}$$

όπου:

$I_{S25} = -(SGN)(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a})$

$$\Delta\widetilde{S}_{ijk} = -\frac{2}{\Delta\Gamma_R}Gc_3[c_4(\delta_{ik}e_{1j+}\delta_{jk}e_{1i}) - (1-4\nu)\delta_{ij}e_{1k} + 2c_4 e_{2i}e_{2j}e_{1k} + 2\nu(e_{1i}e_{2j}e_{2k} + e_{1i}e_{2j}e_{2k})]$$
$$(I_{S26} - I_{S27})$$

όπου:

$I_{S26} = \ln(r_b / r_a)$

$I_{S27} = z_a I_{S25}$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ [107]

(σταθερή τιμή των συνιστωσών των ρυθμών της μετατόπισης, τάσης, παραμόρφωσης και θερμοκρασίας σε όλη την επιφάνεια του κάθε στοιχείου)

$$\Sigma_{jki} = \frac{1}{r} c_3 [c_4 (\delta_{ij} r_{,k} + \delta_{ki} r_{,j} - \delta_{jk} r_{,i}) + 2 r_{,i} r_{,j} r_{,k}]$$

$$\Sigma_{jki} = \frac{1}{r} c_3 \{c_4 [(\delta_{ij} e_{1k} + \delta_{ki} e_{1j} - \delta_{jk} e_{1i}) \cos\theta + (\delta_{ij} e_{2k} + \delta_{ki} e_{2j} - \delta_{jk} e_{2i}) \sin\theta] +$$

$$2[e_{1i} e_{1j} e_{1k} \cos^3\theta + (e_{2i} e_{1j} e_{1k} + e_{1i} e_{2j} e_{1k} + e_{1i} e_{1j} e_{2k}) \cos^2\theta \sin\theta +$$

$$(e_{2i} e_{2j} e_{1k} + e_{1i} e_{2j} e_{2k} + e_{2i} e_{1j} e_{2k}) \cos\theta \sin^2\theta + e_{2i} e_{2j} e_{2k} \sin^3\theta]\}$$

$$\Delta\Sigma_{jki}(P, x_{IR}) = \Delta\Sigma_{jki}(P, \underline{A}) + \Delta\Sigma_{jki}(P, \underline{B}) + \Delta\Sigma_{jki}(P, \underline{C}) + \Delta\Sigma_{jki}(P, \underline{D}).$$

$$\Delta\Sigma_{jki}(P, \underline{A}) = D c_3 [c_4 (a_{1ijk} I_{T1} + a_{2ijk} I_{T5}) + e_{1i} e_{1j} e_{1k} I_{T2} + \beta_{1ijk} I_{T3} + \beta_{2ijk} I_{T4} + e_{2i} e_{2j} e_{2k} I_{V1}]$$

όπου:

$$a_{hikl} = e_{hl} \delta_{ik} + e_{hk} \delta_{li} - e_{hi} \delta_{kl}$$

$$\beta_{hikl} = e_{1i} e_{hk} e_{2l} + e_{1k} e_{hl} e_{2i} + e_{1l} e_{hi} e_{2k}$$

και

$$I_{T1} = \theta_b - \theta_a$$

$$I_{T2} = \theta_b - \theta_a + \sin\theta_b \cos\theta_b - \sin\theta_a \cos\theta_a$$

$$I_{T3} = \sin^2\theta_b - \sin^2\theta_a$$

$$I_{T4} = \theta_b - \theta_a - \sin\theta_b \cos\theta_b + \sin\theta_a \cos\theta_a$$

$$I_{T5} = \ln(r_b / r_a)$$

$$I_{V1} = \cos^2\theta_b - \cos^2\theta_a + 2\ln(r_b / r_a)$$

$$\Sigma_{ijkl} = \frac{G}{2\pi(1-\nu) r^2} [2(1-2\nu)(\delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j}) + 2\nu(\delta_{li} r_{,j} r_{,k} + \delta_{jk} r_{,l} r_{,i} + \delta_{ik} r_{,l} r_{,j} + \delta_{jl} r_{,i} r_{,k}) -$$

$$8 r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} + (1-2\nu)(\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{jk} \delta_{li}) - (1-4\nu) \delta_{ij} \delta_{kl}]$$

$$\Delta\Sigma_{ijkl}(p, x_{IR}) = \Delta\Sigma_{ijkl}(p, \underline{A}) + \Delta\Sigma_{ijkl}(p, \underline{B}) + \Delta\Sigma_{ijkl}(p, \underline{C}) + \Delta\Sigma_{ijkl}(p, \underline{D}).$$

$$\Delta\Sigma_{ijkl}(p,\underline{A}) = Gc_3[-c_4(e_{1j}a_{1ikl}+e_{1i}a_{1jkl})I_{T1} - c_4(e_{1j}a_{2ikl}+e_{1i}a_{2jkl})I_{T5} - 2e_{1i}e_{1j}e_{1k}e_{1l}I_{T2} -$$

$$(e_{1j}\beta_{1ikl}+e_{1i}\beta_{1jkl})I_{T3} - (e_{1j}\beta_{2ikl}+e_{1i}\beta_{2jkl})I_{T4} - (e_{1j}e_{2k}e_{2l}e_{2i}+e_{1i}e_{2l}e_{2k}e_{2j})I_{V1} +$$

$$c_4(e_{1j}a_{1ikl}+e_{1i}a_{1jkl})I_{\Sigma1} - c_4(e_{2j}a_{1ikl}+e_{2i}a_{1jkl})I_{\Sigma2} + c_4(e_{1j}a_{2ikl}+e_{1i}a_{2jkl})I_{\Sigma3} - c_4(e_{2j}a_{2ikl} +$$

$$e_{2i}a_{2jkl})I_{\Sigma1} + 2e_{1i}e_{1j}e_{1k}e_{1l}I_{\Sigma4} - (e_{2j}e_{1k}e_{1l}e_{1i}+e_{2i}e_{1l}e_{1k}e_{1j})I_{\Sigma5} + (e_{1j}\beta_{1ikl}+e_{1i}\beta_{1jkl})I_{\Sigma6} -$$

$$(e_{2j}\beta_{1ikl}+e_{2i}\beta_{1jkl})I_{\Sigma4} + (e_{1j}\beta_{2ikl}+e_{1i}\beta_{2jkl})I_{\Sigma7} - (e_{2j}\beta_{2ikl}+e_{2i}\beta_{2jkl})I_{\Sigma6} + (e_{1j}e_{2k}e_{2l}e_{2i} +$$

$$e_{1i}e_{2l}e_{2k}e_{2j})I_{\Sigma8} - 2e_{2i}e_{2j}e_{2k}e_{2l}I_{\Sigma7} - \frac{2v}{1-2v}\delta_{ij}\{c_4(2e_{1k}e_{1l}-\delta_{kl})I_{T1} + c_4(e_{1k}e_{2l}+e_{1l}e_{2k})I_{T5}$$

$$+e_{1k}e_{1l}I_{T2} + (e_{2k}e_{1l}+e_{1k}e_{2L})I_{T3} + e_{2k}e_{2l}I_{T4}\} + 2v\delta_{ij}\{2(e_{1k}e_{1l}-e_{2k}e_{2l})I_{\Sigma1} - (e_{2k}e_{1l} +$$

$$e_{1k}e_{2l})I_{\Sigma2} + (e_{1k}e_{2l}+e_{2k}e_{1l})I_{\Sigma3}\}]$$

όπου:

$$I_{\Sigma1} = \sin\theta_b\cos\theta_b - \sin\theta_a\cos\theta_a$$

$$I_{\Sigma2} = \cos^2\theta_b - \cos^2\theta_a$$

$$I_{\Sigma3} = \sin^2\theta_b - \sin^2\theta_a$$

$$I_{\Sigma4} = 2(\sin\theta_b\cos^3\theta_b - \sin\theta_a\cos^3\theta_a)$$

$$I_{\Sigma5} = 2(\cos^4\theta_b - \cos^4\theta_a)$$

$$I_{\Sigma6} = 2(\sin\theta_b^{\ 2}\cos^2\theta_b - \sin^2\theta_a\cos^2\theta_a)$$

$$I_{\Sigma7} = 2(\sin^3\theta_b\cos\ \theta_b - \sin^3\theta_a\cos\ \theta_a)$$

$$I_{\Sigma8} = 2(\sin^4\theta_b - \sin^4\theta_a)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ [122]

Η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά Gauss είναι γενική, απλή και αρκετά ακριβής. Η περίπτωση των μη ιδιόμορφων συναρτήσεων οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ολοκλήρωση τόσο στα συνοριακά όσο και στα εσωτερικά στοιχεία σε μια και δύο διαστάσεις αντίστοιχα παρουσιάζεται πρώτα. Κατόπιν γίνεται αναφορά σε ολοκληρώματα με λογαριθμική ιδιομορφία σε ένα από τα δύο άκρα του χωρίου ολοκλήρωσης.

Ολοκλήρωση Gauss σε μια διάσταση.

Τα ολοκληρώματα σε αυτήν την περίπτωση μπορούν να γραφούν:

$$I=\int_{-1}^{+1} f(\xi)d\xi=\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i)+E_n \qquad (\Pi 3.1)$$

όπου n είναι ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης, ξ_i είναι η συντεταγμένη του σημείου ολοκλήρωσης i, w_i είναι ο σχετιζόμενος συντελεστής βάρους και E_n είναι το λάθος ή υπόλοιπο.

$$E_n=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)(2n!)^3}\frac{d^{2n}f(\xi)}{d\xi^{2n}} \qquad (-1<\xi<1) \qquad (\Pi 3.2)$$

Η σχέση (Π3.1) είναι βασισμένη στην έκφραση της $f(\xi)$ μέσω των πολυωνύμων Legendre $P_n(\xi)$. Η ξ_i είναι η συντεταγμένη στο σημείο i όπου P_n είναι μηδέν και για το οποίο οι συντελεστές βάρους δίδονται από:

$$w_i=2/(1-\xi_i^2)\left[\frac{dP_n(\xi)}{d\xi}\right]^2_{\xi=\xi_i}$$

Τιμές των ξ_i και w_i περιέχονται στον πίνακα Π3.1. Οι τιμές των ξ_i είναι συμμετρικές σε σχέση με το $\xi=0$ και το w_i έχει την ίδια τιμή για δύο συμμετρικές τιμές του ξ_i.

Ολοκλήρωση Gauss σε δύο διαστάσεις για ορθογώνια.

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\cong\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)w_i w_j \qquad (\Pi 3.3)$$

όπου οι συντεταγμένες των σημείων ολοκλήρωσης και οι συντελεστές βάρους δίδονται στον πίνακα Π3.1.

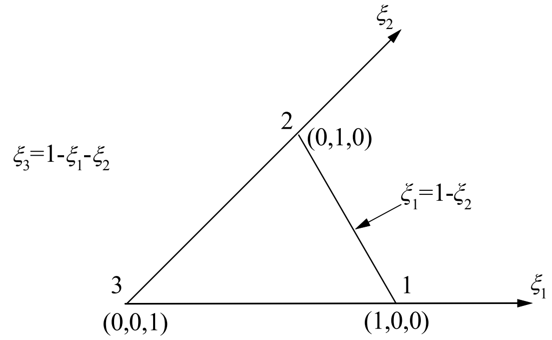
ΠΙΝΑΚΑΣ Π3.1

$\pm\xi_i$	w_i	$\pm\xi_i$	w_i
		n=8	
n=2		0.18343 46424 95650	0.36268 37833 78362
0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000	0.52553 24099 16329	0.31370 66458 77887
		0.79666 64774 13627	0.22238 10344 53374
n=3		0.96028 98564 97536	0.10122 85362 90376
0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88888	n=9	
0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55555	0.00000 00000 00000	0.33023 93550 01260
		0.3242 534234 03809	0.31234 70770 40003
n=4		0.61337 14327 00590	0.26061 06964 02935
0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546	0.83603 11073 26636	0.18064 81606 94857
0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454	0.96816 02395 07626	0.08127 43883 61574
n=5		n=10	
0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889	0.14887 43389 81631	0.29552 42247 14753
0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366	0.43339 53941 29247	0.26926 67193 09996
0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189	0.67940 95682 99024	0.21908 63625 15982
n=6		0.86506 33666 88985	0.14945 13491 50581
0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691	0.97390 65285 17172	0.06667 13443 08688
0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139	n=12	
0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170	0.12523 34085 11469	0.24914 70458 13403
n=7		0.36783 14989 98180	0.23349 25365 38355
0.00000 00000 00000	0.41795 91836 73469	0.58731 79542 86617	0.20316 74267 23066
0.40584 51513 77397	0.38183 00505 05119	0.76990 26741 94305	0.16007 83285 43346
0.74153 11855 99394	0.27970 53914 89277	0.90411 72563 70475	0.10693 93259 95318
0.94910 79123 42759	0.12948 49661 68870	0.98156 06342 46719	0.04717 53363 86512

Ολοκλήρωση σε δύο διαστάσεις για τρίγωνα.

$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 \Big) d\xi_2 = \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) \qquad (\Pi 3.4)$$

όπου n είναι ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης, $\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i$ οι συντεταγμένες του i σημείου ολοκλήρωσης και w_i οι συντελεστές βάρους (πίνακας Π3.2).



Σχήμα Π2-1 Τριγωνικές συντεταγμένες

ΠΙΝΑΚΑΣ Π3.2

n	i	ξ_1^i	ξ_2^i	ξ_3^i	$2\,w_i$
1	1	1/3	1/3	1/3	1
3	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	1/2	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3
4	1	1/3	1/3	1/3	-27/48
	2	3/5	1/5	1/5	25/48
	3	1/5	3/5	1/5	25/48
	4	1/5	1/5	3/5	25/48
7	1	1/3	1/3	1/3	0.2250 0000
	2	0.7974 2699	0.1012 8651	0.1012 8651	0.1259 3918
	3	0.1012 8651	0.7974 2699	0.1012 8651	0.1259 3918
	4	0.1012 8651	0.1012 8651	0.7974 2699	0.1259 3918
	5	0.0597 1587	0.4701 4206	0.4701 4206	0.1323 9415
	6	0.4701 4206	0.0597 1587	0.4701 4206	0.1323 9415
	7	0.4701 4206	0.4701 4206	0.0597 1587	0.1323 9415

Λογαριθμική ολοκλήρωση Gauss σε μια διάσταση

Πυρήνες που περιέχουν λογαριθμική ιδιομορφία στο ένα άκρο του χωρίου ολοκλήρωσης μπορούν να ολοκληρωθούν χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σχέση:

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) f(\xi)\,d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) \qquad (\Pi 3.5)$$

όπου οι συντεταγμένες των σημείων ολοκλήρωσης και οι συντελεστές βάρους δίδονται στον πίνακα Π3.3

ΠΙΝΑΚΑΣ Π3.3

n	ξ_i	w_i	n	ξ_i	w_i
2	0.1120 0880	0.7185 3931	8	0.0133 2024	0.1644 1660
	0.6022 7691	0.2814 6068		0.0797 5043	0.2375 2560
3	0.0638 9079	0.5134 0455		0.1978 7102	0.2268 4198
	0.3689 9706	0.3919 8004		0.3541 5398	0.1757 5408
	0.7668 8030	0.0946 1541		0.5294 5857	0.1129 2402
4	0.0414 4848	0.3834 6406		0.7018 1452	0.0578 7221
	0.2452 7491	0.3868 7532		0.8493 7932	0.0209 7907
	0.5561 6545	0.1904 3513		0.9533 2645	0.0036 8641
	0.8489 8239	0.0392 2549	9	0.0108 6934	0.1400 6846
5	0.0291 3447	0.2978 9346		0.0649 8368	0.2097 7224
	0.1739 7721	0.3497 7622		0.1622 2943	0.2114 2716
	0.4117 0251	0.2344 8829		0.2937 4996	0.1771 5622
	0.6773 1417	0.0989 3046		0.4466 3195	0.1277 9920
	0.8947 7136	0.0189 1155		0.6054 8172	0.0784 7888
6	0.0216 3440	0.2387 6366		0.7541 1017	0.0390 2249
	0.1295 8339	0.3082 8657		0.8772 6585	0.0138 6729
	0.3140 2045	0.2453 1742		0.9622 5056	0.0024 0804
	0.5386 5721	0.1420 0875	10	0.0090 4259	0.1209 5474
	0.7569 1533	0.0554 5462		0.0539 7105	0.1863 6310
	0.9226 6884	0.0101 6896		0.1353 1134	0.1956 6066
7	0.0167 1935	0.01961 6938		0.2470 5169	0.1735 7723
	0.1001 8568	0.2703 0264		0.3802 1171	0.1356 9597
	0.2462 9424	0.2396 8187		0.5237 9159	0.0936 4708
	0.4334 6349	0.1657 7577		0.6657 7472	0.0557 8794
	0.6323 5098	0.0889 4323		0.7941 9019	0.0271 5989
	0.8111 1862	0.0331 9430		0.8981 6102	0.0095 1520
	0.9408 4816	0.0059 3279		0.9688 4798	0.0016 3816

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] **K. Walker**, Research and development program for nonlinear structural modelling with advanced time-temperature dependent constitutive relationships, 1981, PWA-5700-50, Pratt and Whitney Aircraft, NASA Contract NAS3-22055, NASA CR165533.

[2] **U. Lindholm**, Constitutive modelling for isotropic materials, 1984, NASA CR-174718.

[3] **J. Lemaitre and J.-L. Chaboche**, Mechanics of solid materials, Cambridge Univ. Press, 1990.

[4] **A. Freed and K. Walker**, Viscoplasticity with creep and plasticity bounds, J. Plasticity, 1993, 9, 213-242.

[5] **A. Saleeb, S. Arnold, M. Castelli, T. Wilt and W. Graf**, A general hereditary multimechanism-based deformation model with application to the viscoelastoplastic response of titanium alloys, J. Plasticity, 2001, 17, 1305-1350.

[6] **K. Ho and E. Krempl**, Extension of the viscoplasticity theory based on overstress to capture non-standard rate dependence on solids, J. Plasticity, 2002, 18, 851-872.

[7] **V. Lubarda, D. Benson and M. Meyers**, Strain-rate effects in rheological models of inelastic response, J. Plasticity, 2003, 19, 1097-1118.

[8] **R. Lin and W. Brocks**, On a finite strain viscoplastic theory based on a new internal dissipation inequality, J. Plasticity, 2004, 20, 1281-1311.

[9] **R. Krieg**, Numerical integration of some new unified plasticity-creep formulations, In: Trans. 4th Int. Conf. Struct. Mech., Luxemburgh, 1977, M6/4.

[10] **E. Hart**, A phenomenological theory for plastic deformation of polycrystalline metals, Acta Metallurgica, 1970, 18 ,6, 599-610.

[11] **E. Hart**, **C. Li, H. Yamada and G. Wire**, Phenomenological theory: a guide to constitutive relations and fundamental deformation properties, in Argon, A.S., (Ed.) Constitutive equations in Plasticity, MIT Press, Cambridge, 1976, Mass 149-197.

[12] **D. Robinson and R. Swinderman**, Unified creep-plasticity constitutive equations for 2,25Cr-1Mo steel at elevate temperature, ORNL TM-8444, Oak Ridge National Laboratory, 1982.

[13] **K.Chan, S. Bodner and U. Lindholm**, Phenomenological modeling of hardening and thermal recovery in metals, 1988, Trans. ASME, 110, 1-8.

[14] **J.L. Chaboche**, Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, J. Plasticity, 1986, 5, 283-295.

[15] **S. Mukherjee**, Corrected boundary-integral equations in planar thermoelastoplasticity, Int. J. of solids and structures, 1977, Vol. 13, 331-335.

[16] **S. Mukherjee**, Thermoviscoplastic response of cylindrical structures using a state variable theory, ICM 3, volume 2, Cambridge, England, August 1979, 233-242.

[17] **M. Morjaria and S. Mukherjee**, Improved boundary-integral equation method for time-dependent inelastic deformation in metals, J. Num. Meth. in Eng., 1980, 15, 97-111.

[18] **M. Morjaria, V. Sarihan, S. Mukherjee**, Comparison of boundary element and finite element methods in two-dimensional inelastic analysis, Res. Mechanica, 1980, 1, 3-20.

[19] **M. Morjaria and S. Mukherjee**, Finite element analysis of time-dependent inelastic deformation in the presence of transient thermal stresses, J. Num. Meth. in Eng., 1981, 17, 909-921.

[20] **V. Arya**, Analytical and finite element solutions of some problems using a viscoplastic model, J. Computers and Structures, 1989, vol. 33 957-967.

[21] **V. Arya**, Application of finite-element-based solution technologies for viscoplastic structural analysis, NASA Contractor report 185196, 1990.

[22] **V. Arya and Kaufman**, Finite element implementation of Robinson's unified model and its application to some multiaxial problems, J. Eng. Comput. 1989 vol. 6 237-247.

[23] **V. Arya and S. Arnold**, Viscoplastic analysis of an experimental cylindrical thrust chamber liner, J. AIAA, 1992, vol. 30, 781-789.

[24] **C. Providakis**, Creep analysis of V-notched metallic plates in bending, Eng. Fract. Mech., 1999a, 32, 1, 1-7.

[25] **C. Providakis**, Boundary element analysis of creeping V-notched metallic plates in bending, Eng. Fract. Mech., 1999b, 64, 2, 129-140.

[26] **N. Prasad, M. Aliabadi and D. Rooke**, Thermomechanical fatigue crack growth, J. Fatigue, 1996, 18, 6, 349-361.

[27] **C. Providakis, S. Kourtakis**, Viscoplastic BEM analysis of creeping metallic structural components in the presence of temperature gradients, Pressure Vessels and Piping 2002, 79: 309-317.

[28] **C. Providakis, S. Kourtakis**, BEM solution of viscoplastic problems in metallic structures in the presence of temperature gradients , Thessaloniki 19-21 July 2001, 6th National Conference on Mechanics.

[29] **C. Providakis, S. Kourtakis**, Viscoplastic D/BEM analysis of metallic structures with dependence on thermomechanical history, Engineering Computations, 2002, 19-6 : 640-661.

[30] **H. Riedel**, Zeitschrift fur metallkunde, 1978, 69, 12, 755-760.

[31] **H. Riedel**, Creep deformation at crack-tips in elastic-viscoplastic solids. MRL E-114 Technical Report, Materials Research Laboratory, Brown University, RI, 1979.

[32] **H. Riedel, J. Rice**, Tensile cracks in creeping solids, Fracture Mechanics, in Twelfth Conference, 1980, ASTM STP 700, 112-130.

[33] **M. Morjaria and S. Mukherjee**, Numerical analysis of planar, time-dependent inelastic deformation of plates with cracks by the boundary element method, J. Solid Struct., 1981,17, 127-143.

[34] **M. Morjaria and S. Mukherjee**, Numerical solutions for stresses near crack tip fields in time-dependent inelastic fracture mechanics, J. of Fracture, 1982, 18, 293-310.

[35] **T. Cruce, E. Polsh,** Application of an elastoplastic boundary element method to some fracture mechanics problems, Eng. Fract. Mech.,1986, 23, 1085-1096.

[36] **S. Rußwurm**, Berechung elastoplasticher Rißprobleme mittels der Randelementmethode, Fortschr-Ber VDI, Reihe 18 Nr 104, VDI Verlang, 1992.

[37] **C. Tan, K. Lee**, Elastic-plastic stress analysis of a cracked thin- walled cylinder, J. Strain Anal., 1983, 50-57.

[38] **V. Leitao, M. Aliabadi, D. Rooke**, The dual boundary element formulation for elastoplastic fracture mechanics, J. Num. Meth. in Eng., 1995, 38, 315-333.

[39] **M. Aliabadi,** Boundary element formulations in fracture mechanics, Appl. Mech. Rev., 1997, 50(2): 83-96

[40] **G. Blandford, A. Ingraffea, J. Ligget,** Two dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method, Int. J. Num. Meth. Eng.,1981, 17: 387-404

[41] **T. Hantschel, M. Busch, M. Kuna, H. G. Maschke,** Solution of elastic-plastic crack problems by an advanced boundary element method, In: Luxmoore AR, Owen DRJ(eds), Numerical Methods in Fracture Mechanics, Pineridge Press, Swansea, 1990, pp. 29-40

[42] **J. Hutchinson,** Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material. J. Mech. Phys. Solids, 1968, 16: 13-31

[43] **J. Rice and G. Rosengren**, Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, J. Mech Phys Solids, 1968, 16, 1-12.

[44] **J. Bassani, F. McClintock,** Creep relaxation of stress around a crack tip, Int. J. Solids Struct., 1981, 17: 479-492.

[45] **C. Providakis, S. Kourtakis**, Time-dependent creep fracture using singular boundary elements, Computational Mechanics, 2002, 29: 298-306.

[46] **C. Providakis, S. Kourtakis**, Viscoplastic D/BEM stress concentration analysis of cracked metallic structures, Patra 27-29 June 2002, 4th GRACM Congress on Computational Mechanics.

[47] **S. Maiti**, A finite element for variable order singularities based on the displacement formulation, J. Num. Meth. Eng., 1992, 33, 1955-1974.

[48] **F. Norton**, The creep of steel at high temperatures, McGraw-Hill, New York, 1929.

[49] **S. Murakami, Y. Liu, M. Mizuno**, Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics, J. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 2000, 183 15-33.

[50] **A. Becker, t. Hyde, W. Sun, P. Andersson**, Benchmarks for finite element analysis of creep continuum damage mechanics, J. Comp. Mater. Science, 2002, 25, 34-41.

[51] **G. Sih**, Some basic problems in fracture mechanics and new concepts, J. Eng. Fract. Mech., 1973, 365-377.

[52] **G. Sih**, A special theory of crack propagation. Methods of analysis and solution of crack problems, edited by G. Sih, 1973.

[53] **G. Sih**, Mechanics of Fracture Initiation and Propagation, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[54] **C. Providakis, S. Kourtakis**, Fracture analysis problems in creeping materials: Strain energy density rate, Messini 2-6 September 2002, International Symposium of Multiscaling in Mechanics.

[55] **H. Riedel**, Fracture at high temperatures,1987.

[56] **R. Bailey**, J. Inst. Metals, 1926, 35, 27-40.

[57] **E. Orowan**, J. West Scotl. Iron Steel Inst., 1946, 54, 45-53.

[58] **J. Weertman**, J. Appl. Phys., 1955, 26, 1213-1217.

[59] **J. Friedel**, Dislocations, Pergamon Press, Oxford, London, 1967, Chapter 8.

[60] **J. Frost and M. Ashby**, In: Fundamental aspects of structural alloy design, R. Jaffee and B. Wilcox, Eds., Plenum Press, New York and London, 1977, p.p. 27-58.

[61] **J. Frost and M. Ashby**, Deformation-mechanism maps, The plasticity and creep of metals and ceramics, Pergamon Press, Oxford, 1982, New York.

[62] **J. Gibeling and W. Nix**, Mater. Sci. Eng., 1980, 45, 123-135.

[63] **D. Robinson**, Oak Ridge Laboratory Report No. TM-5969, Oak Ridge, Tenn., 1978.

[64] **C. Pugh and D. Robinson**, Nucl. Eng. Design, 1978, 48, 269-276.

[65] **E. Hart**, Constitutive relations for the nonelastic deformation of metals, J. Eng. Mater. Tech.,1976, 193-202.

[66] **F. Nabarro**, In: Proc. conference on strength of solids, Physical society, London, 1948, p. 75.

[67] **C. Hering**, J. Appl. Phys., 1950, 21, 437-445.

[68] **R. Coble**, J. Appl. Phys., 1963, 34, 1679-1684.

[69] **D. Towle and H. Jones**, Acta Metall., 1976, 24, 399-407.

[70] **B. Burton**, Diffusional creep of polycrystalline material: Diffusion and creep monograph series, Trans. Tech. Publications, 1977, Ohio.

[71] **E. Arzt, M. Ashby and R. Verrall**, Acta Metall., 1983, 31, 1977-1989.

[72] **T. Sritharan and H. Jones**, Acta Metall., 1980, 28, 1633-1639.

[73] **M. Ashby**, Scripta Metall., 1969, 3, 843-848.

[74] **B. Burton**, Mater. Sci. Eng. ,1973, 11, 37-343.

[75] **J. Harris**, J. Nuclear Mater., 1976, 59, 303-306.

[76] **T. Langdon and R. Vastava**, In: Mechanical testing for deformation model development, ASTM STP 765, R. Rohde and J. Swearengen, Eds., American society for testing and materials, 1982, pp. 435-451.

[77] **R. Raj and M. Ashby**, Metall. Trans., 1971, 2A, 1113-1127.

[78] **F. Crossman and M. Ashby**, Acta Metall., 1975, 23, 425-440.

[79] **F. Gharenami**, Int. J. Solids Struct., 1980, 16, 847-862.

[80] **M. Ashby**, Acta Metall., 1972, 20, 887-897.

[81] **A. Needleman and J. Rice**, Acta Metall., 1980, 28, 1315-1332.

[82] **F. Swinkels and M. Ashby**, Acta Metall., 1981, 29, 259-281.

[83] **R. Evans, J. Parker and B. Wilshire**, In: Recent advances in creep and fracture of engineering materials and structures, Pineridge Press, Swansea, 1982, pp. 135-184.

[84] **R. Evans, I. Beden and B. Wilshire**, In: Creep and fracture of engineering materials and structures, Pineridge Press, Swansea, part II, 1984, pp. 1277-1290.

[85] **M. Law, W. Payten, K. Snowden**, Finite element analysis of creep using theta projection data, J. Pres. Ves. and Piping, 1998, 75, 437-442.

[86] **M. Law, W. Payten, K. Snowden**, Modelling creep of pressure vessels with thermal gradients using theta projection data, J. Pres. Ves. and Piping, 2002, 79, 847-851.

[87] **A. Loghman and M. Wahab**, Creep damage simulation of thick-walled tubes using the theta projection concept, J. Pres. Ves. and Piping, 1996, 67, 105-111.

[88] **R. Girdwood and R. Evans**, Recovery of creep properties of the nickel-base superalloy nimonic 105, J. Pres. Ves. and Piping, 1995, 66, 141-153.

[89] **Y.-Jae Kim**, Contour integral calculations for generalised creep laws within ABAQOUS, J. Pres. Ves. and Piping, 2001, 78, 661-666.

[90] **J. Lubliner**, Plasticity theory, Macmillan Publ. Company, New York,1990.

[91] **P. Perzyna**, Q. Appl. Math.,1963, 20, 321.

[92] **K. Hohenemser and W. Prager**, Z. angew. Math. Mech.,1932, 12, 1.

[93] **S. Bodner**, in mechanical behavior of materials under dynamic loads, Springer-Verlag, New York, 1968, p. 176.

[94] **S. Bodner and Y. Partom**, J. Appl. Mech., 1972, 39, 751.

[95] **S. Bodner and Y. Partom**, J. Appl. Mech., 1975, 42, 385.

[96] **A. Miller**, An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic and creep deformation : part I-equations development and analytical procedures, J. Eng. Mater. Tech. Trans ASME 1976, 98, 97-105.

[97] **R. Krieg, J. Swearengen and W. Rohde**, in inelastic behavior of pressure vessel and piping components, American society of mechanical engineers, New York, 1978, p. 15.

[98] **R. Krieg, J. Swearengen and W. Jones**, in unified constitutive equations for creep and plasticity, Elsevier appl. Science, London, 1987, p. 245.

[99] **Y. Rabotnov**, Creep problems in structural members, Amsterdam, North-Holland, 1969.

[100] **R. Penny, D. Marriott**, Design for creep, London, McGraw-Hill, 1971.

[101] **E. Krempl**, The interaction of rate and history dependent effects and its significance for slow cyclic inelastic analysis at elevate temperatures, Nucl. Eng. Des., 1974, 29, 125-134.

[102] **E. Krempl**, Cyclic creep-an interpretive literature survey. Welding Res Coun Bull, 1974, 195, 63-123.

[103] **E. Onat, F. Fardshisheh**, Representation of creep of metals, Oak Ridge Natl. Lab Rep 1972: 4783.

[104] **J.L. Chaboche**, Thermoviscoplastic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers, J. Solid Struct., 1997, 34, 2239-2254.

[105] **A. Miller**, An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic and creep deformation : part II-application to type 304 stainless steel, J. Eng. Mater. Tech. Trans ASME 1976, 98, 106-113.

[106] **R. Lagneborg**, A modified recovery-creep model and its evaluation, J. Metal. Sci., 1972, 6, 127-133.

[107] **S. Mukherjee, V. Kumar**, Numerical analysis of time-dependent inelastic deformation in metallic media using the boundary-integral equation method, ERDA report COO-2733-14, 1977

[108] **V. Banthia and S. Mukherjee**, Boundary-element analysis of stresses in a creeping plate with a crack, Elastic-Plastic Fracture: 2nd Symp., vol. I ,ASTM STP 803, C. Shih, J. Gudas Eds, 1983, I637-I653.

[109] **V. Kumar and S. Mukherjee,** A boundary - integral equation formulation for time-dependent inelastic deformation in metals, J. Mech. Sct., 1977, 19, 713-724.

[110] **V. Banthia and S. Mukherjee**, On stresses and line integrals in the presence of cracks, Res. Mechanica, 1982, 5, 151-158.

[111] **V. Kumar, M. Morjaria, S. Mukherjee**, Numerical integration of some stiff constitutive models of inelastic deformation, J. Eng. Mater. Tech., 1980, 102, 92-96.

[112] **C. Providakis**, A general and advanced boundary element transient analysis of elastoplastic plates, Eng. Anal. Bound. Elem.,1996, 17, 133-143.

[113] **V. Kumar, S. Mukherjee, F. Huang, C. Y. Li**, Deformation in type 304 austenitic stainless steel, Cornell university, EPRI, 1979.

[114] **V. Arya**, Finite element analysis of structural components using viscoplastic models with application to a cowl lip problem, NASA Contractor report 185189, 1990.

[115] **P. C. Riccardella**, An implementation of the boundary - integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity, report SM-73-10 Carnegie Mellon University, 1973.

[116] **V. Kumar and S. Mukherjee**, Creep analysis of metallic structures in the presence of thermal gradients using newer constitutive relations, J. Pres. Ves. Tech. Trans ASME 1977, 272-280.

[117] **D. Cordts and F. Kollmann**, An implicit time integration scheme for inelastic constitutive equations with internal state variables, J. Num. Meth. Eng., 1986, 23, 533-554.

[118] **J. Smith**, Systems improved numerical differencing analyzer (SINDA): user's manual, TRW-14690-h001r0-00 TRW systems Group, 1971, Renoldo Beach, CA.

[119] **P. Banerjee and R. Butterfield**, editors. Development in boundary element methods I London: Elsevier Applied Science, 1979.

[120] **P. Banerjee and R. Butterfield**, Boundary element methods in engineering science, 1981, McGraw-Hill, London.

[121] **W. Sartory**, Inelastic ratchetting analysis of the 2.25Cr-1Mo steel to type 316 stainless steel dissimilar metal weldment region of specimen TTT-3, ORNL-5512, 1979.

[122] **C. Brebbia, J. Dominguez**, Boundary elements, An introductory course, 1992

[123] **D. Beskos,** Numerical methods in dynamic fracture mechanics, EUR-11300 EN, Joint Research Center of EC Ispra Establishment, Ispra, Italy, 1987.

[124] **M. Morjaria and S. Mukherjee**, A boundary element formulation for planar time-dependent inelastic deformation of plates with cutouts, Int. J. Solids and Structures, 1981, 17, 115-126.

[125] **N. Hoff,** Quarterly Appl. Mech., 1954, 12: 49-55

[126] **K. Ohji, K. Ogura, S. Kubo**, Stress-strain field and modified J-integral in the vicinity of crack tip under transient creep conditions, Japanese Society of Mechanical Engineer 1979, 790(13), 18-20.

[127] **G. Sih**, Tables of Hutchinson-Rice-Rosengren singular field quantities, MRL E-147, 1983, Division of Engineering, Brown University.

[128] **F.Z. Li, A. Needleman, C.F. Shih**, Characterization of near tip stress and deformation fields in creeping solids, J. of Fracture, 1988, 36, 163-186.

[129] **V. Kumar, M. German, C. Shih,** An engineering approach to elastic-plastic analysis. EPRI NP-1931, 1981, Electric Power Research Institute, Palo Alto, CA.

[130] **R. Ehlers, H. Riedel,** A finite element analysis of creep deformation in a specimen containing a macroscopic crack. In: Proceedings of the Fifth International Conference on Fracture, Pergamon Press, Oxford, 1981, pp. 691-698

[131] **MSC. Marc**, 2000, MSC. Software Corporation, Los Angeles, CA.

[132] **E. Gdoutos and C. Thireos**, Fracture instability of notched cracked plates characterized by the strain energy density theory, J. Theor. and App. Fract Mech., 1988, 9, 239-247.

[133] **C. Chue and Y. Wei**, Failure initiation sites and instability of structural components with localized energy density, J. Theor. and App. Fract Mech., 1991, 15, 163-177.

[134] **D. Zacharopoulos**, Fracture stability problems of reinforced panel with cracks emanating from hole, J. Theor. and App. Fract Mech., 1998, 29, 21-31.

[135] **G. Papakaliatakis**, Effect of strain rate on crack growth in aluminum alloy 1100-0, J. Theor. and App. Fract Mech., 1999, 31, 131-139.

[136] **Z.C. Lin, S.P. Lo**, 2-D discontinuous chip cutting model by using strain energy density theory and elastic-plastic finite element method, J. Mech. Sciences, 2001, 43, 381-398.

[137] **Q. Li**, Strain energy density failure criterion, J. Solid Struct., 2001, 38, 6997-7013.

[138] **D. Zacharopoulos**, Stability analysis of crack path using the strain energy density theory, J. Theor. and App. Fract Mech., 2003, 1-11.

[139] **G. Sih, J. Zuo**, Multiscale behavior of crack initiation and growth in piezoelectric ceramics, J. Theor. and App. Fract Mech., 2000, 34, 123-141.