Πολυτεχνείο Κρήτης

ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

υπό

Πλούταρχου Κοτζιάπασιη

Χανιά 2006

Η διατριβή του Πλούταρχου Κοτζιάπαση, εγκρίνεται από τους Βασίλη Κουϊκόγλου (επιβλέπων), Αθανάσιο Μυγδαλά και Ηλία Κοσματόπουλο

1) Βασίλης Κουϊκόγλου (επιβλέπων)

2) Αθανάσιος Μυγδαλάς

3) Ηλίας Κοσματόπουλος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Η παρούσα ειδική επιστημονική εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Ειδίκευσης στα Συστήματα Παραγωγής του Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης.

Από την θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Βασίλη Κουικόγλου τόσο για την ανάθεση της εργασίας όσο και για την αμέριστη συμπαράστασή του, την σωστή καθοδήγηση και την εμπιστοσύνη που μου παρείχε σε όλο το διάστημα εκπόνησης της ειδικής επιστημονικής αυτής εργασίας.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στις φίλες Όλγα Καραπάνου, Έλλη Γκίκα και Αθηνά Τζιμίτση, για την φιλική τους παρουσία, στήριξη και αληθινή συμπαράσταση που μου παρείχαν όχι μόνο καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας, αλλά και συνολικά στη διάρκεια των σπουδών μου. Επίσης ευχαριστώ ιδιαίτερα τις αγαπητές φίλες Ευαγγελία Ψαρά και Αριστέα Ξηροκώστα για την πολύτιμή βοήθεια τους.

Τέλος, ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στην οικογένεια μου για την στήριξή της όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου.

Αφιερώνεται στους γονείς μου,
Κυριάκο και Δρόσω
και στα αδέρφια μου,
Χρήστο, Δημήτρη
και Μαριλένα .

Ο Πλούταρχος Κοτζιάπασιης γεννήθηκε στην Αθήνα το 1978. Έχει πτυχίο Μηχανολόγου Μηχανικού από το Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας και ολοκληρώνει το μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών «Συστήματα Παραγωγής» του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης. Ο τομέας της έρευνάς του είναι η ανάλυση και ο έλεγχος αποθεμάτων σε συστήματα παραγωγής.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μεταπτυχιακή αυτή διατριβή επιτηδεύεται το θέμα του ελέγχου αποθεμάτων και προγραμματισμού πολλών προϊόντων σε μία μηχανή. Ειδικότερα, θεωρείται ένα σύνολο προϊόντων που επεξεργάζονται, ένα κάθε φορά, σε μια μηχανή. Συστήματα παραγωγής πολλών προϊόντων μιας μηχανής απαντώνται πολύ συχνά στην πράξη και έχουν εφαρμογή σε παραγωγή συνεχούς ροής και σε παραγωγή κατά παρτίδες. Για παράδειγμα, περιοχές εφαρμογής θα μπορούσαν να είναι βιομηχανίες παραγωγής δομικών πλεγμάτων, επεξεργασίας τροφίμων, παραγωγής χαρτιού, βιομηχανίες χημικών προϊόντων, λιπαντικών κ.τ.λ. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι πολύ συνηθισμένη η χρήση κυκλικών προγραμμάτων για την παραγωγή των προϊόντων.

Η διατριβή χωρίζεται σε πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρόβλημα, ορίζεται το σύστημα παραγωγής πολλών προϊόντων μιας μηχανής, γίνεται μια αρχική ανάλυση του προβλήματος, αναφέρονται οι στόχοι της εργασίας, και η μεθοδολογία που ακολουθείται. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη επισκόπηση αρκετών μεθόδων που αφορούν τον έλεγχο αποθεμάτων για συστήματα παραγωγής πολλών προϊόντων μίας μηχανής. Αρχικά παρουσιάζεται το πρόβλημα προγραμματισμού οικονομικού μεγέθους παρτίδας (Economic Lot Scheduling Problem ή ELSP), καθώς και διάφορες μέθοδοι (κυρίως προσεγγιστικές) που έχουν προταθεί για την επίλυσή του. Στα επόμενα κεφάλαια, για το πρόβλημα προγραμματισμού βέλτιστης παρτίδας σε μία μηχανή, γίνεται μια πιο λεπτομερειακή εξέταση και σύγκριση μεθόδων επίλυσης του, πολλές από τις οποίες παρουσιάστηκαν εν περιλήψει στο δεύτερο κεφάλαιο.

Συγκεκριμένα στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται οι προσεγγίσεις των Bomberger (1966), Madigan (1968) και Hannsman (1962), και συγκρίνονται τα αποτελέσματα σε μία εφαρμογή. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται πιο προηγμένα μοντέλα σε σχέση με το προηγούμενο κεφάλαιο όπου για το πρόβλημα προγραμματισμού βέλτιστης παρτίδας επιτρέπεται η αναμονή πελατών στην ουρά (*backlog*). Συγκεκριμένα εξετάζονται τα μοντέλα των Feng Cheng, Houmin Yan και Jun

Yang (1998) , Gallego (1990) και Zipkin (1991). Επίσης, παρουσιάζεται η προσέγγιση του Thomas. L.J. et al. (1985) όπου περιγράφεται μια μέθοδος ελέγχου των προετοιμασιών, οι οποίες εξαρτώνται από την ακολουθία παραγωγής. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μια σύνοψη των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τα προηγούμενα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή και Συζήτηση του Προβλήματος

1.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρόβλημα, ορίζεται το σύστημα παραγωγής πολλών προϊόντων μιας μηχανής, γίνεται μια αρχική ανάλυση του προβλήματος, αναφέρονται οι στόχοι της εργασίας, και η μεθοδολογία που ακολουθείται.

1.2 Ορισμός Συστήματος Παραγωγής Πολλών Προϊόντων μιας Μηχανής

Σε πολλές βιομηχανίες παράγονται και επεξεργάζονται περισσότερα από ένα προϊόντα στις εγκαταστάσεις τους. Γενικά, θα στοίχιζε πολύ περισσότερο στις βιομηχανίες αυτές αν είχαν ξεχωριστές μηχανές και εξοπλισμό για κάθε τύπο προϊόντος που παράγουν. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι οικονομικότερη η αγορά μιας μηχανής η οποία είναι ικανή να παράγει πολλά προϊόντα σε σχέση με την αγορά πολλών μηχανών με δυνατότητα παραγωγής μόνο ενός προϊόντος. Τέτοιες μηχανές έχουν περιορισμένη δυναμικότητα και είναι ικανές να παράγουν μόνο ένα προϊόν κάθε φορά, ενώ υπάρχει χρόνος προετοιμασίας κάθε φορά που γίνεται αλλαγή παραγωγής από ένα προϊόν σε ένα άλλο. Επομένως, τα κύρια χαρακτηριστικά ενός συστήματος παραγωγής πολλών προϊόντων μιας μηχανής είναι τα ακόλουθα:

- Μία μηχανή
- Πολλά προϊόντα
- Δυνατότητα επεξεργασίας ενός μόνο προϊόντος κάθε φορά
- Περιορισμένη δυναμικότητα αλλά αρκετή ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση
- Χρόνος προετοιμασίας μεταξύ παραγωγής διαφορετικών προϊόντων

1.3 Αρχική Ανάλυση του Προβλήματος

Η ανάγκη ικανοποίησης του περιορισμού της δυναμικότητας της μηχανής, όπως επίσης και του περιορισμού παραγωγής ενός μόνο προϊόντος κάθε φορά, δημιουργεί ένα σύνθετο πρόβλημα ελέγχου αποθεμάτων. Η επεξεργασία των προϊόντων θα πρέπει να συγχρονίζεται για την αποφυγή προγραμματισμού δύο προϊόντων ταυτόχρονα. Μοντέλα καθορισμού μεγέθους παρτίδας (π.χ. EOQ) για κάθε προϊόν δεν μπορούν να εφαρμοστούν ως έχουν σε αυτήν την περίπτωση, επειδή δεν λαμβάνουν καθόλου υπόψιν τον προγραμματισμό παραγωγής των προϊόντων. Ο Rogers (1958) παρουσίασε το πρόβλημα ελέγχου αποθεμάτων σε ένα σύστημα παραγωγής πολλών προϊόντων μιας μηχανής και εφάρμοσε το μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας (EOQ) σε κάθε προϊόν ξεχωριστά. Κατέληξε στο ότι ήταν αδύνατος ο προγραμματισμός αυτών των προϊόντων (με ποσότητες παραγωγής για κάθε προϊόν ίσες με τις ποσότητες παραγωγής που προέκυψαν από το μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας), λόγω της ανικανότητάς της μηχανής να παράγει δύο η περισσότερα προϊόντα ταυτόχρονα.

Για την πληρέστερη κατανόηση του θέματος εισάγονται οι παρακάτω συμβολισμοί:

d_i : Ρυθμός ζήτησης για το προϊόν i

p_i : Ρυθμός παραγωγής για το προϊόν i

t_i : Χρόνος προετοιμασίας για το προϊόν i

A_i Κόστος προετοιμασίας ανά παρτίδα παραγωγής για το προϊόν i

h_i : Κόστος αποθέματος για τον προϊόν i

Ας υποθέσουμε το πρόβλημα παραγωγής τριών προϊόντων από μια μηχανή με χαρακτηριστικά που φαίνονται στον Πίνακας 1.

Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά προϊόντων

Προϊόν	d_i (μονάδες/χρονική μονάδα)	p_i (μονάδες/χρονική μονάδα)	h_i (χρηματικές μονάδες/μονάδα & χρονική μονάδα)	t_i χρονικές μονάδες	A_i Χρηματικές μονάδες
A	50	250	0,04	0,1	20
B	10	50	2,22	0,4	80
Γ	50	490	0,8	0,1	40

Σε αυτή την περίπτωση, η δυναμικότητα της μηχανής είναι περιορισμένη, και χρησιμοποιείται ο τύπος της οικονομικής παρτίδας παραγωγής (EPL) ο οποίος φαίνεται παρακάτω:

$$EPL_i = \sqrt{\frac{2A_i d_i}{h_i\left(1-d_i/p_i\right)}} \tag{1.1}$$

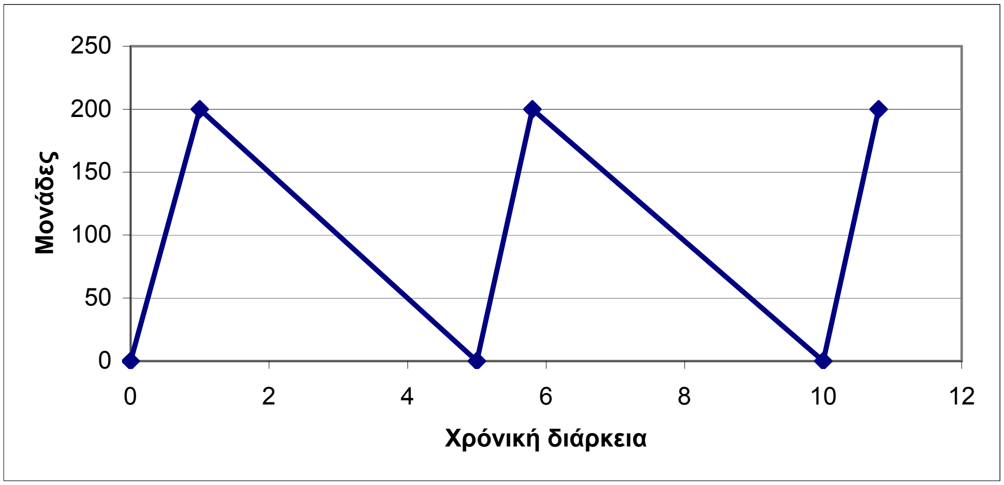
Η παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του βέλτιστου μεγέθους παρτίδας για κάθε προϊόν (υπάρχει επεξήγηση σε επόμενο κεφάλαιο), δίνοντας τα αποτελέσματα στον Πίνακας 2.

Πίνακας 2: Μεγέθη παρτίδας και χρονικές διάρκειες

Προϊόν	EPL_i (μονάδες)	T_i (χρονικές μονάδες)	EPL_i / p_i (χρονικές μονάδες)	Συνολική Διάρκεια (χρονικές μονάδες)
Α	250	5	1	1.1
Β	30	3	0.6	1.0
Γ	75	1.5	0.15	0.25

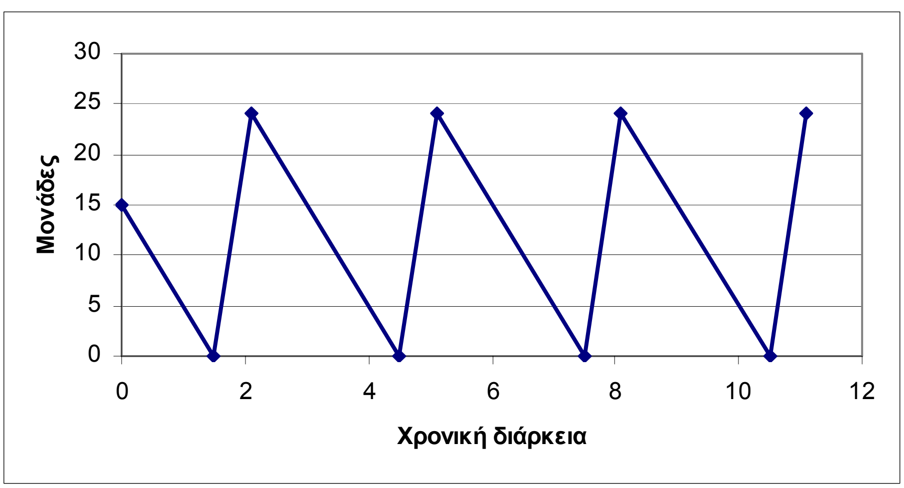
Όπως φαίνεται από το παραπάνω πίνακα, οι βέλτιστες ποσότητες παραγωγής ποικίλλουν από 30 έως 250 μονάδες. Η χρονική διάρκεια αναπαραγωγής T_i δείχνει τη χρονική διάρκεια για την οποία η βέλτιστη παρτίδα καλύπτει την ζήτηση (π.χ. EPL_i / d_i). Αυτό σημαίνει για παράδειγμα ότι το προϊόν Α παράγεται κάθε 5 χρονικές μονάδες. Για τα προϊόντα Β και Γ οι χρονικές διάρκειες αναπαραγωγής είναι 3 και 1.5 αντίστοιχα. Η τέταρτη στήλη του πίνακα δείχνει τις χρονικές διάρκειες παραγωγής για καθένα προϊόν. Η συνολική διάρκεια είναι το άθροισμα της διάρκειας παραγωγής και της διάρκειας προετοιμασίας της μηχανής για κάθε προϊόν. Ο φόρτος χρήση της μηχανής είναι 50/2500+10/50+50/490=0.5, το οποίο υπονοεί ότι η δυναμικότητα της μηχανής είναι αρκετή για να καλύψει τη ζήτηση (επειδή είναι μικρότερο του 1 (Hanssmann, 1962)).

Με δεδομένες τις βέλτιστες παρτίδες παραγωγής θα γίνει μια απόπειρα προγραμματισμού των τριών προϊόντων σε μια μηχανή. Η παραγωγή του προϊόντος Α αρχίζει με μια προετοιμασία χρονικής διάρκειας 0.1. Στη συνέχεια ξεκινάει η παραγωγή του και συνεχίζει μέχρι τη χρονική στιγμή 1.1. Επειδή η περίοδος αναπαραγωγής είναι 5 χρονικές μονάδες, η επόμενη προετοιμασία για το προϊόν Α αρχίζει τη χρονική στιγμή 5 και η επόμενη παραγωγή την χρονική στιγμή 5.1. Ακολούθως, η τρίτη προετοιμασία αρχίζει τη χρονική στιγμή 10 και ο τρίτος κύκλος παραγωγής την χρονική στιγμή 10.1. Το προφίλ του αποθέματος για το προϊόν αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



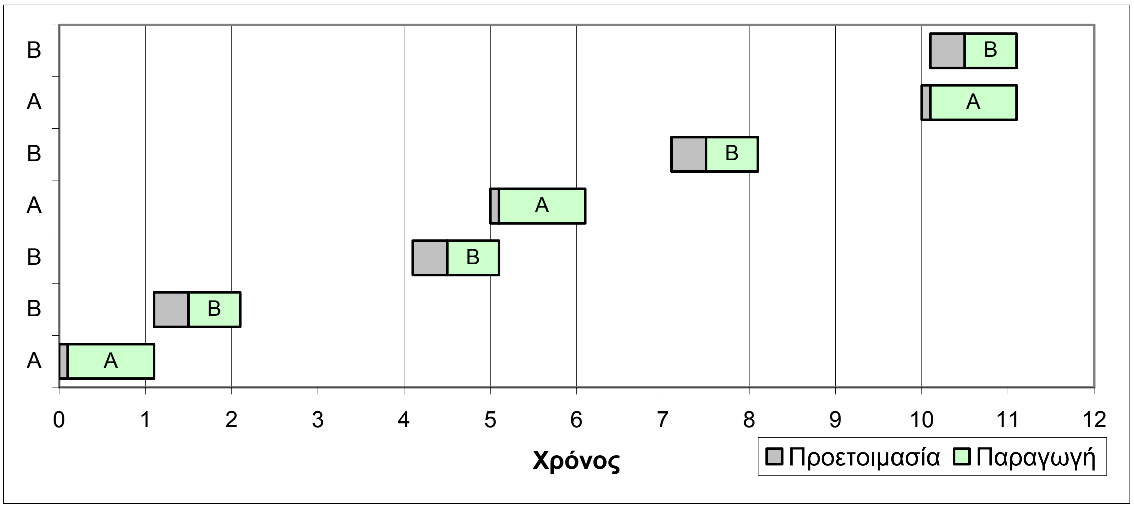
Σχήμα 1: Προφίλ αποθέματος προϊόντος Α

Η παραγωγή του προϊόντος Β, μπορεί να αρχίσει ακριβώς μετά την ολοκλήρωση της παραγωγής του προϊόντος Α τη χρονική στιγμή 1.5. Δεδομένου ότι η χρονική διάρκεια αναπαραγωγής του προϊόντος Β είναι 3, σημαίνει ότι η επόμενη προετοιμασία θα πρέπει να ξεκινήσει την χρονική στιγμή 4.1 ενώ η παραγωγή θα πρέπει να ξεκινήσει τη χρονική στιγμή 4.5 και να ολοκληρωθεί η χρονική στιγμή 5.1. Το προφίλ του αποθέματος για το προϊόν Β φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2: Προφίλ αποθέματος προϊόντος Β

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η δεύτερη προετοιμασία για την παραγωγή του προϊόντος Α πρέπει να αρχίσει τη χρονική στιγμή 5, αλλά εκείνη τη χρονική στιγμή η μηχανή είναι κατειλημμένη για την παραγωγή του προϊόντος Β προκαλώντας αλληλεπικάλυψη των χρόνων παραγωγής (Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Προγραμματισμός προϊόντων Α και Β

Για να αποφευχθεί αυτή η αλληλεπικάλυψη θα πρέπει να προγραμματιστεί ξανά η παραγωγή του προϊόντος Β. Ο δεύτερος κύκλος παραγωγής του προϊόντος Α αρχίζει χρονική στιγμή 6.1, υπονοώντας ότι ο προγραμματισμός παραγωγής του προϊόντος Β θα πρέπει να αναβληθεί ώστε η προετοιμασία του να αρχίζει την χρονική στιγμή 6.1 και η παραγωγή του την χρονική στιγμή 6.5.

Εφόσον η παραγωγή του προϊόντος Β είναι επιθυμητό να αρχίζει τη χρονική στιγμή 6.5, προγραμματίζονται προς τα πίσω θα πρέπει η παραγωγή του προηγούμενου κύκλου του Β να αρχίζει την χρονική στιγμή 3.5 και του προ-προηγούμενου την χρονική στιγμή 0.5 (επειδή η διάρκεια αναπαραγωγής του 3). Παρόλα αυτά το πρόγραμμα αυτό δεν είναι εφικτό για τον λόγο ότι την χρονική στιγμή 0,5 η μηχανή είναι κατειλημμένη για την παραγωγή του πρώτου κύκλου του προϊόντος Α. Όπως φαίνεται, δεν είναι δυνατός ο προγραμματισμός των προϊόντων Α και Β χωρίς επικαλύψεις με τις ποσότητες παραγωγής που προέκυψαν από την εξίσωση $EPL_i = \sqrt{\dfrac{2A_i d_i}{h_i\left(1-d_i/p_i\right)}}$ (1.1).

Υπενθυμίζεται ότι η παραγωγή του προϊόντος Γ δεν έχει ακόμη συνυπολογιστεί, κάτι το οποίο θα έκανε τον προγραμματισμό ακόμη πιο περίπλοκο.

Ο Elmaghraby (1978) ορίζει την κατάσταση όπου δύο ή περισσότερα προϊόντα ανταγωνίζονται για την ίδια παραγωγική πηγή, ως την κατάσταση όπου η μηχανή θα πρέπει να παράγει δύο ή περισσότερα προϊόντα ταυτόχρονα, πράγμα το οποίο είναι ανέφικτο. Σύμφωνα με τον Rogers (1958) οι ποσότητες παραγωγής (ή μεγέθη παρτίδας) θα πρέπει να τροποποιηθούν έτσι ώστε να αποφεύγονται καταστάσεις όπου η μηχανή καταστρατηγεί τον περιορισμό παραγωγής ενός μόνο προϊόντος κάθε φορά. Κατά τον Axsater (2000), είναι κοινή πρακτική η χρήση *κυκλικών προγραμμάτων* όταν είναι επιθυμητός ο συντονισμός αναπλήρωσης των αποθεμάτων διαφορετικών προϊόντων.

Το *κυκλικό πρόγραμμα παραγωγής* είναι ένα πρόγραμμα που επαναλαμβάνεται. Τα κυκλικά προγράμματα έχουν νόημα για πολλές βιομηχανίες επειδή τα προϊόντα τους έχουν σχετικά σταθερή ζήτηση, ενώ το εποχιακό προφίλ είναι ίδιο για όλα τα προϊόντα. Η καθιέρωση επαναλαμβανόμενων προγραμμάτων παραγωγής είναι επίσης θεμελιώδης σε πολλές just-in-time επιχειρήσεις. Σύμφωνα με τον Axsater (2000), είναι πολύ κοινή πρακτική στην πράξη, η χρήση κυκλικών προγραμμάτων εμπειρικά χωρίς τη χρήση μαθηματικών τεχνικών. Για να παρουσιαστεί ο βαθμός δυσκολίας εύρεσης εφικτών προγραμμάτων, ας υποθέσουμε ότι τα τρία προϊόντα στον παρακάτω πίνακα παράγονται σε έναν αυθαίρετο ορισμένο κύκλο χρονικής διάρκειας 1.1 χρονικών μονάδων.

Πίνακας 3: Μεγέθη παρτίδας και χρονικές διάρκειες

1.1 χρονικές μονάδες/κύκλο				
Προϊόν	Ποσότητα Παραγωγής (μονάδες)	Διάρκεια Παραγωγής (χρον. μονάδες)	Διάρκεια Προετοιμασίας (χρον. μονάδες)	Συνολική Διάρκεια (χρον. μονάδες)
Α	55	0.22	0.1	0.32
Β	11	0.22	0.4	0.62
Γ	55	0.11	0.1	0.21
				1.15

Τότε οι ποσότητες παραγωγής για κάθε προϊόν θα πρέπει να καλύπτουν την ζήτηση κατά τη διάρκεια δύο διαδοχικών εκτελέσεων της παραγωγής για κάθε προϊόν (που στην περίπτωσή μας είναι ίσο με τη χρονική διάρκεια του κύκλου). Οι παραγόμενες ποσότητες και οι χρόνοι παραγωγής φαίνονται στον .

Πίνακας **3**. Λόγω του ότι η συνολική διάρκεια παραγωγής όπως φαίνεται από τον

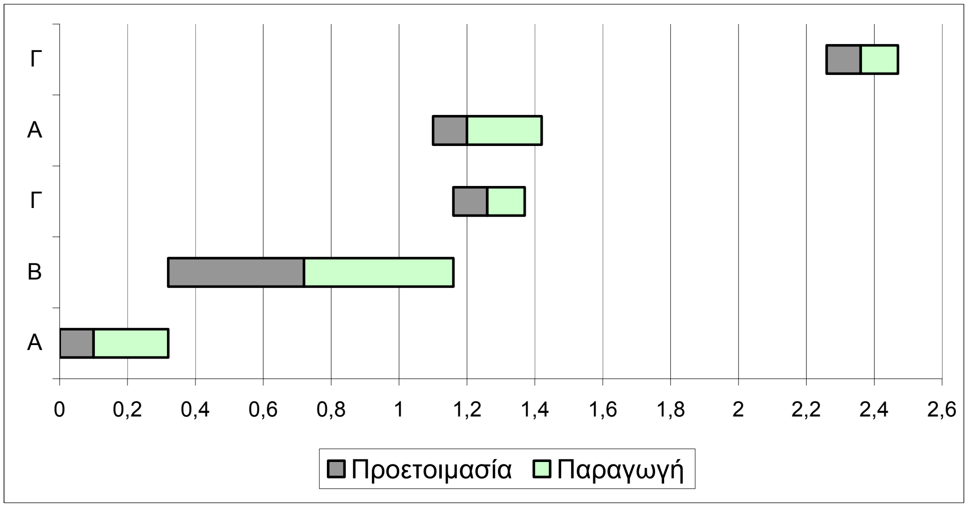
.

Πίνακας **3** είναι 1.15 χρονικές μονάδες ενώ η διάρκεια του κύκλου είναι 1.1 χρονικές μονάδες, ο φόρτος χρήσης της μηχανής υπερβαίνει τη δυναμικότητα της. Για να αποφευχθεί η παραπάνω κατάσταση, θα μπορούσε το προϊόν Β να παράγεται κάθε 1ο κύκλο, 3ο κύκλο, 5ο κύκλο κ.τ.λ. με διπλάσια ποσότητα παραγωγής. Οι παραγόμενες ποσότητες και οι χρόνοι παραγωγής σε αυτήν την περίπτωση φαίνονται στον Πίνακας 4.

Πίνακας 4: Μεγέθη παρτίδας και χρονικές διάρκειες

2.2 χρονικές μονάδες /κύκλο (Α, Γ 1.1 χρονικές μονάδες)				
Προϊόν	Ποσότητα Παραγωγής (μονάδες)	Διάρκεια Παραγωγής (χρον. μονάδες)	Διάρκεια Προετοιμασίας (χρον. μονάδες)	Συνολική Διάρκεια (χρον. μονάδες)
Α	55	2(0.22)	2 (0.1)	0.64
Β	22	(0.44)	0.4	0.84
Γ	55	2(0.11)	2(0.1)	0.42
				1.9

Λόγω του ότι η συνολική διάρκεια απασχόλησης της μηχανής είναι μικρότερη από την διάρκεια του κύκλου, ο φόρτος χρήσης της μηχανής θα είναι μικρότερος σε σχέση με την δυναμικότητα της μηχανής δείχνοντας ότι πρόκειται για εφικτή λύση. Παρόλα αυτά αν η ανακολουθία παραγωγής είναι Α-Β-Γ-Α-Γ, η χρονική διάρκεια μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου τρεξίματος της παραγωγής και το προϊόν Α θα είναι (0.22+0.84+0.21+0.1)=1.37 χρονικές μονάδες. Επειδή η ποσότητα παραγωγής για το προϊόν Α καλύπτει τη ζήτηση για 1.1 χρονικές μονάδες, ενώ το δεύτερο τρέξιμο της παραγωγής για το προϊόν Α αρχίζει τη χρονική στιγμή 1.37, είναι φανερό ότι θα υπάρξει έλλειμμα για το συγκεκριμένο προϊόν.



Σχήμα 4:Προγραμματισμός προϊόντων Α-Β-Γ

Έτσι, από το παραπάνω παράδειγμα (βλέπε Σχήμα 4) βγαίνει το συμπέρασμα ότι δεν είναι εύκολη η δημιουργία ενός εφικτού προγράμματος χωρίς την χρήση μαθηματικών τεχνικών. Έστω τώρα ότι η διάρκεια του κύκλου ορίζεται αυθαίρετα στις 1.5 χρονικές μονάδες. Οι παραγόμενες ποσότητες και οι χρόνοι παραγωγής σε αυτήν την περίπτωση φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Λόγω του ότι κάθε προϊόν παράγεται μία φορά μέσα στον κύκλο δεν υπάρχει το πρόβλημα ακολουθίας των προϊόντων όπως στην προηγούμενη περίπτωση. Επομένως η λύση αυτή είναι εφικτή επειδή η χρονική διάρκεια απασχόλησης της μηχανής είναι μικρότερη από τη χρονική διάρκεια του κύκλου.

Πίνακας 5: Μεγέθη παρτίδας και χρονικές διάρκειες

1.5 χρονικές μονάδες/κύκλο				
Προϊόν	Ποσότητα Παραγωγής (μονάδες)	Διάρκεια Παραγωγής (χρον. μονάδες)	Διάρκεια Προετοιμασίας (χρον. μονάδες)	Συνολική Διάρκεια (χρον. μονάδες)
Α	75	0.3	0.1	0.4
Β	15	0.3	0.4	0.7
Γ	75	0.15	0.1	0.25
				1.35

Όμως οι ποσότητες κάθε προϊόντος παράγονται αυθαίρετα και όχι με το βέλτιστο δυνατό τρόπο. Επομένως υπάρχει περίπτωση να βρεθούν καλύτερες λύσεις όσον αφορά το συνολικό κόστος αποθέματος και προετοιμασίας.

Συνοψίζοντας, ο έλεγχος αποθεμάτων σε συστήματα παραγωγής πολλών προϊόντων μιας μηχανής χειρίζεται το πρόβλημα ταυτόχρονα σε τρία επίπεδα:

- Μέγεθος παρτίδας (Πόσες μονάδες προϊόντος θα πρέπει να παραχθούν)
- Προγραμματισμός (Πότε θα πρέπει κάθε προϊόν να παραχθεί)
- Ακολουθία (Με ποια σειρά θα πρέπει να παράγονται τα προϊόντα)

Στην πράξη, οι χρόνοι προετοιμασίας εξαρτώνται από την ακολουθία παραγωγής των προϊόντων. Η εξάρτηση αυτή μπορεί να οφείλεται είτε στον χρόνο καθαρισμού του εξοπλισμού (π.χ. βιομηχανίες λιπαντικών) είτε στην διαφορετικότητά του προϊόντος που παράγεται σε σχέση με το επόμενο. Η λανθασμένη ακολουθία παραγωγής των προϊόντων οδηγεί σε μείωση της δυναμικότητας της μηχανής λόγω των μη παραγωγικών χρόνων προετοιμασίας. Επομένως η εξάρτηση των χρόνων προετοιμασίας από την ακολουθία παραγωγής αυξάνει την πολυπλοκότητα του προβλήματος.

Στην πραγματικότητα, οι ρυθμοί ζήτησης, παραγωγής, και οι χρόνοι προετοιμασίας είναι στοχαστικοί και όχι αιτιοκρατικοί. Η περιορισμένη δυναμικότητα κατανέμεται στα προϊόντα δυναμικά, λόγω της στοχαστικής φύσης του προβλήματος, οπότε τα προϊόντα ανταγωνίζονται μεταξύ τους για τη δυναμικότητα της μηχανής.

Για παράδειγμα, για την αποκατάσταση του επιπέδου του αποθέματος ενός προϊόντος απαιτείται μεγάλος χρόνος παραγωγής, ο οποίος όμως μπορεί να οδηγήσει σε έλλειμμα για τα υπόλοιπα προϊόντα. Λόγο του ανταγωνισμού αυτού, τα αποθέματα ασφαλείας θα πρέπει να δρουν ως προστασία στις διακυμάνσεις της ζήτησης, του ρυθμού παραγωγής και του χρόνου προετοιμασίας. Αυτό οδηγεί στην ανάγκη για μεγαλύτερα επίπεδα αποθεμάτων ασφαλείας έτσι ώστε να υπάρχει ικανοποιητικό επίπεδο εξυπηρέτησης. Πολύ χαμηλό επίπεδο αποθέματος ασφαλείας μπορεί να οδηγεί σε καταστάσεις χαμηλού επιπέδου εξυπηρέτησης πελατών ενώ πολύ υψηλό επίπεδο αποθεμάτων θα μπορούσε να οδηγήσει σε υψηλότερο κόστος αποθέματος από το απαιτούμενο. Επομένως ο έλεγχος αποθεμάτων σε στοχαστικά περιβάλλοντα απαιτεί, ωσαύτως, τον καθορισμό αποθεμάτων ασφαλείας.

1.4 Στόχοι της εργασίας

Για να απαντηθούν ερωτήματα σχετικά με τα θέματα *μεγέθους παρτίδας*, *προγραμματισμού*, και *ακολουθίας* θα πρέπει να αναζητηθούν μοντέλα πάνω στα οποία θα βασιστούν οι απαντήσεις αυτές. Στόχος της μεταπτυχιακής διατριβής είναι η παρουσίαση και η αξιολόγηση μεθόδων επίλυσης του προβλήματος προγραμματισμού και ελέγχου αποθεμάτων σε συστήματα παραγωγής μιας μηχανής με δυνατότητα μη παράλληλης επεξεργασίας πολλών προϊόντων. Η εργασία αυτή εστιάζεται κυρίως σε αιτιοκρατικά περιβάλλοντα με χρόνους προετοιμασίας ανεξάρτητους της ακολουθίας και λιγότερο σε περιβάλλοντα με χρόνους προετοιμασίας εξαρτημένους της ακολουθίας των προϊόντων.

Κεφάλαιο 2

Βιβλιογραφική ανασκόπηση

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη επισκόπηση των μεθόδων που αφορούν τον έλεγχο αποθεμάτων για συστήματα πολλών προϊόντων μίας μηχανής. Αρχικά παρουσιάζεται το πρόβλημα προγραμματισμού οικονομικού μεγέθους παρτίδας (Economic Lot Scheduling Problem ή ELSP), καθώς και διάφορες μέθοδοι (κυρίως προσεγγιστικές) που έχουν προταθεί για την επίλυσή του.

2.2 Πρόβλημα προγραμματισμού οικονομικού μεγέθους παρτίδας

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, είναι κοινή πρακτική η χρήση *κυκλικών προγραμμάτων* όταν είναι επιθυμητός ο συντονισμός αναπλήρωσης των αποθεμάτων διαφορετικών προϊόντων. Στην βιβλιογραφία, ο προσδιορισμός *κυκλικών προγραμμάτων* για την παραγωγή πολλών προϊόντων σε μια μηχανή είναι γνωστό ως πρόβλημα προγραμματισμού οικονομικού μεγέθους παρτίδας. Σύμφωνα με τον Silver (1998), ορίζεται πρόβλημα προγραμματισμού οικονομικού μεγέθους παρτίδας, ως το ζήτημα εύρεσης του μήκους του κύκλου (cycle length), της σειράς παραγωγής, των χρόνων παραγωγής, και των χρόνων αδράνειας (idle times), ώστε η σειρά παραγωγής να μπορεί να ολοκληρωθεί στο παραπάνω κύκλο, ενώ ο κύκλος μπορεί να επαναλαμβάνεται, η ζήτηση θα πρέπει να ικανοποιείται, και το ετήσιο κόστος αποθέματος και προετοιμασιών να ελαχιστοποιείται.

Οι υποθέσεις για την περιορισμένη έκδοση του προβλήματος είναι κατά τον Bomberger (1966) οι ακόλουθες:

- Παραγωγή ενός προϊόντος κάθε φορά
- Υπάρχει χρόνος προετοιμασίας και κόστος προετοιμασίας για κάθε προϊόν
- Το κόστος και ο χρόνος προετοιμασίας εξαρτώνται μόνο από το προϊόν το οποίο πρόκειται να παραχθεί
- Η ζήτηση για κάθε προϊόν είναι γνωστή και σταθερή για χρονικό ορίζοντα άπειρου μήκους, ενώ θα πρέπει να ικανοποιείται όλη η ζήτηση
- Και για κάθε προϊόν το συνολικό μεταβλητό κόστος είναι το άθροισμα του κόστους και του χρόνου προετοιμασίας και του κόστους αποθέματος
- Οι ρυθμοί παραγωγής είναι γνωστοί και σταθεροί
- Υπάρχει περιορισμός δυναμικότητας

Το παραπάνω πρόβλημα είναι δύσκολο (NP-hard) ως προς την επίλυσή του λόγω της ανάγκης ικανοποίησης του περιορισμού της δυναμικότητας και του περιορισμού παραγωγής ενός μόνο προϊόντος κάθε φορά. Οι Hsu (1983) και Gallego και Shaw (1997) απέδειξαν ότι είναι δύσκολη η εύρεση αποτελεσματικών μεθόδων για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος.

Ο Elmaghraby (1978) παρουσιάζει μια σύντομη επισκόπηση του προβλήματος προγραμματισμού οικονομικής παρτίδας παραγωγής και μια ανασκόπηση για τις αρχικές συνεισφορές στο πρόβλημα. Χωρίζει τις συνεισφορές αυτές σε δύο κατηγορίες:

- Αναλυτικές προσεγγίσεις εύρεσης της βέλτιστης λύσης για την περιορισμένη έκδοση του προβλήματος,
- Ευρετικές (Heuristic) προσεγγίσεις οι οποίες δίνουν «καλές» λύσεις του αρχικού προβλήματος.

Σύμφωνα με τους Yao και Elmaghraby (2001) η λύση για ένα μεγάλο πρόβλημα προγραμματισμού οικονομικής παρτίδας παραγωγής φαίνεται να είναι εκτός δυνατοτήτων για αναλυτικές προσεγγίσεις, όπως ο δυναμικός προγραμματισμός, λόγω αδυναμίας αποθήκευσης στην μνήμη τυχαίας προσπέλασης (RAM) του Η/Υ, του μεγάλου πλήθους των δυνατών συνδυασμών για την ακολουθία παραγωγής των προϊόντων (η λεγόμενη «κατάρα» των διαστάσεων η οποία ακολουθεί τον δυναμικό προγραμματισμό). Από την άλλη οι ευρετικές μέθοδοι δεν μπορούν να εγγυηθούν την ποιότητα της λύσης.

Το πρόβλημα προγραμματισμού οικονομικού μεγέθους παρτίδας έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών για πολλά χρόνια. Οι περισσότερες μελέτες και το παραπάνω πρόβλημα έχουν εστιαστεί στον κυκλικό προγραμματισμό όπου το πρόγραμμα παραγωγής είναι περιοδικό. Για την λύση του παραπάνω προβλήματος έχουν προταθεί τρεις βασικές μέθοδοι:

- Η προσέγγιση κοινού κύκλου (Common Cycle ή CC)
- Η προσέγγιση βασικής περιόδου (Basic Period ή BP)
- Επέκταση προσέγγισης βασικής περιόδου (Extended Basic Period)

Για την παρουσίαση των βασικών αρχών του προβλήματος προγραμματισμού οικονομικής παρτίδας παραγωγής, κρίνεται σκόπιμο σε αυτό το σημείο, η παρουσίαση του απλού προτύπου οικονομικής παρτίδας παραγωγής (Economic Production Lot ή EPL), καθώς και βασικούς ορισμούς που θα βοηθήσουν στην πληρέστερη κατανόηση του θέματος.

2.2.1 Πρότυπο EPL

Ένα σημαντικό θέμα στον προγραμματισμό είναι η περιορισμένη δυναμικότητα των μηχανών. Όλα τα προϊόντα μοιράζονται την ίδια μηχανή. Ο χρόνος που αφιερώνεται για την παραγωγή ενός προϊόντος έχει άμεση επίπτωση στα υπόλοιπα προϊόντα. Όσο μεγαλύτερη είναι η ποσότητα παραγωγής, τόσο περισσότερο το επόμενο προϊόν θα πρέπει να περιμένει για τη σειρά του. Όλοι οι χρόνοι εκκίνησης επηρεάζονται από οποιαδήποτε αλλαγή στο πρόγραμμα παραγωγής.

Οι περισσότερες βιομηχανίες προγραμματίζουν την παραγωγή κάθε προϊόντος καθορίζοντας παρτίδες παραγωγής που να ικανοποιούν την ζήτηση μεταξύ των χρόνων εκκίνησης (διάρκεια κύκλου). Το μέγεθος των παρτίδων παραγωγής επηρεάζει το κόστος αποθέματος και προετοιμασίας (setup) της μηχανής. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το πρότυπο οικονομικής ποσότητας παραγωγής EPL (Taft 1918) το οποίο βρίσκει την ισορροπία ανάμεσα στα δύο προαναφερθέντα κόστη. Δυστυχώς οι περισσότερες βιομηχανίες δεν μπορούν να προγραμματίσουν την παραγωγή τους με βάση το πρότυπο EPL. Στις επόμενες ενότητες περιγράφονται πρακτικές μετατροπές του παραπάνω πρότυπου οι οποίες βοηθούν στο να διατηρηθεί το κόστος στο ελάχιστο δημιουργώντας παράλληλα ρεαλιστικά προγράμματα παραγωγής.

Το μέγεθος παρτίδας παραγωγής επηρεάζει:

- την χρονική διάρκεια παραγωγής (Run time)
- την χρονική διάρκεια αναπαραγωγής (Production Interval), δηλαδή κάθε πότε παράγεται ξανά το κάθε προϊόν

- το απόθεμα
- τη συχνότητα των προετοιμασιών της μηχανής, και άρα το μέσο κόστος προετοιμασίας
- το ποσοστό του όγκου παραγωγής που χάνεται λόγω του μη παραγωγικού χρόνου προετοιμασίας

Η ισορροπία μεταξύ του κόστους αποθέματος και προετοιμασίας είναι παρόμοια με αυτή του πρότυπου οικονομικής ποσότητας παραγγελίας EOQ (Harris 1913). Μεγάλες ποσότητες παραγωγής σημαίνει υψηλά αποθέματα αλλά μικρό αριθμό προετοιμασιών, και αντίστροφα. Δεδομένου ότι ο ρυθμός ζήτησης είναι σταθερός, υπολογίζονται ως ακολούθως :

$$\text{Χρονική Διάρκεια Παραγωγής} = \frac{\text{Μέγεθος Παρτίδας}}{\text{Ρυθμός Παραγωγής}} = \frac{Q}{P} \tag{2.1}$$

$$\text{Χρονική Διάρκεια Αναπαραγωγής} = \frac{\text{Μέγεθος Παρτίδας}}{\text{Ρυθμός Ζήτησης}} = \frac{Q}{D} \tag{2.2}$$

Η διαφορά μεταξύ της διάρκειας αναπαραγωγής και του χρόνου παραγωγής είναι το χρονικό διάστημα που μένει ελεύθερο για παραγωγή, προετοιμασία, συντήρηση, κ.τ.λ. άλλων προϊόντων. Ο λόγος της διάρκειας παραγωγής και της διάρκειας αναπαραγωγής ενός προϊόντος, ορίζει αυτό που ονομάζεται ποσοστό δυναμικότητας της μηχανής. Γενικά :

$$\Delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\kappa\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \mu\eta\chi\alpha\nu\acute{\eta}\varsigma = \frac{D}{P} \tag{2.3}$$

Ο υπολογισμός αυτός είναι βασικός για τον προγραμματισμό. Αν υπολογίσουμε τον λόγο D/P για όλα τα προϊόντα και αθροίσουμε τα αποτελέσματα, το ολικό άθροισμα θα είναι το ποσοστό της δυναμικότητας που χρησιμοποιείται ώστε να ικανοποιείται όλη η ζήτηση. Εάν το αποτέλεσμα υπερβαίνει τη μονάδα, αυτό σημαίνει ότι η ζήτηση δεν μπορεί να ικανοποιηθεί. Στην πραγματικότητα, το αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι μικρότερο της μονάδας, λόγω του ο τι, ποσοστό της δυναμικότητάς χάνεται εξαιτίας των μη παραγωγικών χρόνων προετοιμασίας.

Ο λόγος D/P είναι επίσης σημαντικός για τον καθορισμό του αποθέματος. Κατά τη διάρκεια παραγωγής, το απόθεμα αυξάνεται με ρυθμό, ίσο με το ρυθμό παραγωγής (P), και την ίδια στιγμή μειώνεται με ένα ρυθμό ίσο με το ρυθμό της ζήτησης (D). Επομένως ο καθαρός ρυθμός αύξησης είναι P-D για ένα χρονικό διάστημα μήκους Q/P. Έτσι το μέγιστο απόθεμα είναι (P–D)(Q/P)=(1–D/P)Q, και το μέσο απόθεμα είναι το μισό της μέγιστης τιμής. Θα χρησιμοποιηθεί αυτό το στοιχείο στην μοντελοποίηση του κόστους αποθέματος συναρτήσει της παρτίδας παραγωγής Q.

Το μέσο κόστος προετοιμασίας εξαρτάται από την διάρκειας αναπαραγωγής T=Q/D η οποία καθορίζει την συχνότητα των προετοιμασιών. Το κόστος προετοιμασίας είναι σχετικά δύσκολο να υπολογιστεί. Το κόστος αυτό περιλαμβάνει τις αμοιβές ειδικά εκπαιδευμένων μηχανικών, οι οποίοι είναι υπεύθυνοι για την προετοιμασία, και τους μισθούς των εργατών, οι οποίοι δεν απασχολούνται κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας, καθώς επίσης και ζημίες ή απώλειες υλικών κατά τη διάρκεια δοκιμών της κάθε ρύθμισης. Επιπλέον ο χρόνος προετοιμασίας δημιουργεί απώλεια στην παραγωγική δυναμικότητα. Εάν το ποσοστό αυτό της δυναμικότητάς χρειαζόταν για την ικανοποίηση της ζήτησης, τότε ο χρόνος προετοιμασίας οδηγεί είτε σε χαμένες πωλήσεις είτε σε επιπρόσθετο κόστος υπερωριών. Επομένως, το κόστος προετοιμασίας που θα χρεωθεί στο χρόνο προετοιμασίας εξαρτάται από την κατάσταση.

Η οικονομική ποσότητα παραγωγής EPL ελαχιστοποιεί το άθροισμα του κόστους προετοιμασίας και αποθέματος. Το μέσο μεταβλητό κόστος ανά χρονική μονάδα είναι:

$$TVC = C_I(\frac{Q}{2})(1-\frac{D}{P}) + C_S(\frac{D}{Q}) \tag{2.4}$$

όπου

C_I=κόστος αποθέματος ανά χρονική μονάδα

C_S=κόστος προετοιμασίας της μηχανής

Η ποσότητα παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο μεταβλητό κόστος είναι:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_S}{C_I(1 - D/P)}} \tag{2.5}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{D} \text{ (βέλτιστη περίοδος παραγωγής)} \tag{2.6}$$

Παρόμοια με το πρότυπο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας, η οικονομική ποσότητα παραγωγής μπορεί να διαφοροποιηθεί με ελάχιστη επίδραση στο μέσο μεταβλητό κόστος. Αυτό είναι πολύ σημαντικό στον προγραμματισμό επειδή οι ποσότητες παραγωγής θα πρέπει να τροποποιούνται έτσι ώστε να μην παραβιάζεται το πρόγραμμα παραγωγής.

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή είναι αδύνατος ο προγραμματισμός αυτών των προϊόντων με ποσότητες παραγωγής για κάθε προϊόν ίσες με τις ποσότητες παραγωγής που προέκυψαν από το μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγωγής, λόγω της ανικανότητάς της μηχανής να παράγει δύο η περισσότερα προϊόντα ταυτόχρονα. Το πρότυπο EPL είναι πρότυπο καθορισμού βέλτιστης παρτίδας για κάθε προϊόν χωρίς να λαμβάνει καθόλου υπόψιν τον προγραμματισμό και την ακολουθία παραγωγής των προϊόντων, κατά συνέπεια δεν μπορεί να εφαρμοστεί ως έχεί σε αυτή την περίπτωση. Θα χρησιμοποιηθεί το πρότυπο οικονομικής ποσότητας παραγωγής ως οδηγός στη δημιουργία προγραμμάτων παραγωγής σε επόμενα κεφάλαια

2.3 Η μέθοδος κοινού κύκλου

Ο Hanssmann (1962) ήταν ένας από τους πρώτους που μελέτησε το πρόβλημα προγραμματισμού πολλών προϊόντων σε μια μηχανή. Θεώρησε N προϊόντα και υπέθεσε ότι όλοι οι χρόνοι αναπαραγωγής (cycle times) είναι ίσοι, το οποίο υπονοεί ότι η ποσότητα παραγωγής για κάθε προϊόν είναι $Q_i = d_i T$. Η λύση όπου όλα τα προϊόντα εμφανίζονται μια φορά (όλοι οι χρόνοι αναπαραγωγής είναι ίσοι) ονομάζεται *κοινός κύκλος*. Το κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$C = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{T} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} h_i d_i T \left(1 - \frac{d_i}{p_i}\right)$$

Η βέλτιστη διάρκεια αναπαραγωγής υπολογίζεται θέτοντας την παράγωγο της συνάρτηση κόστους ως προς T ίση με μηδέν. Λύνοντας ως προς T προκύπτει ότι:

$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N} A_i}{\sum_{i=1}^{N} h_i d_i \left(1 - \frac{d_i}{p_i}\right)}}$$

Ο περιορισμός της δυναμικότητας που χρησιμοποιείται ώστε να ικανοποιείται όλη η ζήτηση είναι:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{p_i} \le 1$$

Ο Maxwell (1964) εξηγεί ότι εάν ο κύκλος αναπαραγωγής είναι T, τότε $T\left(1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{p_i}\right)$ είναι ο διαθέσιμος χρόνος για προετοιμασία λόγω του ότι $\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{p_i}$ είναι ο φόρτος χρήσης της μηχανής. Επομένως, καταλήγει στο ότι ο κύκλος ή χρονική διάρκεια αναπαραγωγής θα πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$T \geq \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{1-\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{p_i}}$$

Τότε T^* θα πρέπει να είναι:

$$T^* = \max\left[T^* = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N} A_i}{\sum_{i=1}^{N} h_i d_i \left(1-\frac{d_i}{p_i}\right)}}, \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{1-\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{p_i}} \right]$$

Σύμφωνα με τον Davis (1990), οι επικαλύψεις και διαταραχές στον προγραμματισμό μπορούν να αποφευχθούν με την μέθοδο του κοινού κύκλου, όπου όμως η λύση αυτή μπορεί να μην είναι η βέλτιστη επειδή μπορούν να βρεθούν καλύτερες και πιο οικονομικές λύσεις εφόσον τα προϊόντα έχουν διαφορετικούς κύκλους αναπαραγωγής. Ο Maxwell (1964) εξηγεί πως η προσέγγιση του κοινού κύκλου διευκολύνει την ανάλυση και την υλοποίηση του προγραμματισμού.

Επίσης, η προσέγγιση του κοινού κύκλου μπορεί να φανεί χρήσιμη στην περίπτωση που οι χρόνοι και τα κόστη προετοιμασίας είναι εξαρτημένα της ακολουθίας παραγωγής των προϊόντων. Ο Galvin (1987) παρουσίασε επιτυχημένες εφαρμογές στον τομέα κατασκευής μετάλλων με προετοιμασίες εξαρτημένες της ακολουθίας ενώ και οι Lopez και Kingsman (1991) δήλωσαν ότι η προσέγγιση του κοινού κύκλου πιθανόν να είναι η καλύτερη για χρήση στην πράξη για προϊόντα τα οποία οι χρόνοι και τα κόστη προετοιμασίας είναι εξαρτημένα της ακολουθίας.

2.4 Η μέθοδος βασικής περιόδου

Στην μέθοδο βασικής περιόδου επεκτείνεται η προσέγγιση του κοινού κύκλου επιτρέποντας στα προϊόντα να έχουν διαφορετικούς χρόνους αναπαραγωγής T_i εφόσον οι χρόνοι τους είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας βασικής περιόδου W τέτοια ώστε:

$$T_i = n_i W$$

Όπου n_i είναι ο πολλαπλασιαστής του προϊόντος i. Η βασική περίοδος είναι το χρονικό διάστημα το οποίο είναι αφιερωμένο για προετοιμασία και παραγωγή για ένα υποσύνολο (ή για όλα) τα προϊόντα. Ο Bomberger (1966) εισήγαγε αυτή την προσέγγιση και πρόσθεσε τον περιορισμό όπου η βασική περίοδος θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να είναι δυνατή η παραγωγή όλων των προϊόντων, δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(t_i + \frac{d_i n_i W}{p_i}\right) \le W$$

Ο περιορισμός αυτός εγγυάται εφικτές λύσεις όμως είναι περιοριστικός με την έννοια ότι μπορεί να οδηγήσει σε υποβέλτιστες λύσεις. Για δεδομένη τιμή της βασικής περιόδου οι αναλυτικές προσεγγίσεις που συχνά χρησιμοποιούνται είναι είτε ο δυναμικός ο προγραμματισμός π.χ. Bomberger (1966), είτε μοντέλα ακέραιου μη γραμμικού προγραμματισμού. Πολλοί συγγραφείς αναθεώρησαν το σύνολο των περιορισμών, παρουσιάζοντας ευρετικές λύσεις για μια πιο «χαλαρή» έκδοση του προβλήματος. Για παράδειγμα οι Stankard και Gupta (1969), Doll και Whybark (1973), Haessler και Hogue (1976), και Elmaghraby (1978) χαλάρωσαν τον περιορισμό που αρχικά εισήχθη από τον Bomberger (1966), ότι εάν κάποιο προϊόν δεν έχει προγραμματιστεί για παραγωγή κατά την διάρκεια κάποιου κύκλου τότε κανένα προϊόν δεν μπορεί να παραχθεί στη θέση του.

Οι Doll και Whybark (1973), παρουσίασαν μια επαναληπτική διαδικασία για τον καθορισμό των συχνοτήτων παραγωγής και της βασικής περιόδου. Η διαδικασία αρχίζει υπολογίζοντας την περίοδο αναπαραγωγής T_i για κάθε προϊόν ενώ η μικρότερη επιλέγεται ως βασική περίοδος W. Στο επόμενο βήμα καθορίζεται το κλάσμα της βέλτιστης περιόδου αναπαραγωγής για κάθε προϊόν προς τη βασική περίοδο:

$$n_i^- \le \frac{T_i^*}{W} \le n_i^+$$

όπου n_i^-, n_i^+, ακέραιοι αριθμοί. Το κόστος για κάθε προϊόν χρησιμοποιώντας τα n_i^-, n_i^+, υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$C_i\left(n_i, W\right) = \frac{A_i}{n_i W} + \frac{1}{2} h_i d_i n_i W \left(1 - \frac{d_i}{p_i}\right)$$

Τα καινούργια n_i επιλέγονται ως:

$$\begin{aligned} n_i &= n_i^- \;\; \varepsilon\acute{\alpha}\nu \;\; C_i\left(n_i^-, W\right) \le C_i\left(n_i^+, W\right) \\ n_i &= n_i^+ \;\; \varepsilon\acute{\alpha}\nu \;\; C_i\left(n_i^+, W\right) \prec C_i\left(n_i^-, W\right) \end{aligned}$$

Το συνολικό κόστος υπολογίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$C_i\left(n_i, W\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{n_i W} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} h_i d_i n_i W \left(1 - \frac{d_i}{p_i}\right)$$

Η βέλτιστη βασική περίοδος υπολογίζεται διαφοροποιώντας το συνολικό κόστος, δηλαδή:

$$W^* = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{n_i}}{\sum_{i=1}^{N} n_i h_i d_i \left(1 - \frac{d_i}{p_i}\right)}}$$

Τα καινούργια n_i^-, n_i^+, υπολογίζονται από την εξίσωση $n_i^- \leq \frac{T_i^*}{W} \leq n_i^+$, χρησιμοποιώντας το W από την παραπάνω εξίσωση. Τότε υπολογίζεται καινούργιο W^*. Η διαδικασία τερματίζεται όταν υπολογίζονται ίδιες τιμές των n_i για δυο διαδοχικές επαναλήψεις.

Οι Haessler and Hogue (1976) επέκτειναν την προσέγγιση των Doll και Whybark (1973). Ανέπτυξαν μία διαδικασία βασισμένη στον περιορισμό του συνόλου των πολλαπλασιαστών σε δυνάμεις του δύο (Powers of Two), για παράδειγμα τα προϊόντα παράγονται κάθε έναν κύκλο, κάθε δύο κύκλους, κάθε τέσσερις κύκλους κ.ο.κ. Σύμφωνα με τους, Yao and Elmaghraby (2001), υπάρχουν πολλοί λόγοι για την εφαρμογή πολιτικών, δυνάμεις του δύο, από θεωρητικής και πρακτικής άποψης, διευκολύνοντας την κατασκευή του κυκλικού προγράμματος.

Ο Arcade (1993) συνέκρινε εννέα διαφορετικές προσεγγίσεις βασικής περιόδου [Bomberger (1966), Doll and Whybark (1973), Eilon (1985), Goyal (1973), Haessler, (1971), Hanssmann (1962), Hodgson (1970), Madigan (1968), Stankard και Gupta, (1969)]. Συνέκρινε τα αποτελέσματα όσον αφορά το μέσο ημερήσιο κόστος με το κάτω φράγμα. Πέντε από τις ευρετικές μεθόδους [Doll and Whybark (1973), Eilon (1985), Goyal (1973), Haessler (1971), Hodgson (1970)] παρουσίασαν αποτελέσματα εντός του 2% του κάτω φράγματος για τα περισσότερα προβλήματα [μόνο των Doll and Whybark (1973) για όλα τα προβλήματα]. Ο Carreno (1990) επιχειρηματολογεί ότι η προσέγγιση της βασικής περιόδου δίνει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την προσέγγιση του κοινού κύκλου γενικότερα, αλλά δεν εγγυάται εφικτές λύσεις.

2.5 Επέκταση προσέγγισης βασικής περιόδου

Με την επέκταση της προσέγγισης της βασικής περιόδου «χαλαρώνει» ο περιορισμός ότι η βασική περίοδος θα πρέπει να είναι ικανή ώστε να είναι δυνατή η παραγωγή όλων των προϊόντων. Αντ' αυτού, η βασική περίοδος θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μέσου όρου των χρόνων παραγωγής και των χρόνων προετοιμασίας για όλα τα προϊόντα (Lopez and Kingsman, 1991). Τότε ο περιορισμός αυτός είναι:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{t_i}{n_i}+\frac{d_i W}{p_i}\right)\leq W$$

Ο Haessler (1979) παρουσιάζει μια διαδικασία χρησιμοποιώντας την εκτεταμένη προσέγγιση βασικής περιόδου. Η διαδικασία αρχίζει υπολογίζοντας το βέλτιστο χρόνο αναπαραγωγής ως ακολούθως:

$$T_i^* = \max\left\{\sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N} A_i}{\sum_{i=1}^{N} h_i d_i\left(1-\frac{d_i}{p_i}\right)}}, \frac{t_i}{1-\frac{d_i}{p_i}}\right\}$$

Το μικρότερο μέγεθος κύκλου επιλέγεται ως αρχική τιμή της βασικής περιόδου. Στην συνέχεια καθορίζονται τιμές των b_i ως:

$$b_i \leq \frac{T_i^*}{W} \prec 2b_i$$

το b_i καθορίζεται από το σύνολο $\{1,2,4,8,16,...\}$ ικανοποιώντας την παραπάνω εξίσωση. Το n_i παίρνει τιμή b_i ή $2b_i$ ανάλογα με το ποιο από αυτά αναπαριστά το ελάχιστο κόστος της εξίσωσης

$$C_i\left(n_i, W\right) = \frac{A_i}{n_i W} + \frac{1}{2} h_i d_i n_i W\left(1-\frac{d_i}{p_i}\right)$$

Η νέα τιμή της βασικής περιόδου θα είναι:

$$W^* \max = \left\{ \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{n_i}}{\sum_{i=1}^{N} n_i h_i d_i \left(1 - \frac{d_i}{p_i}\right)}}, \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{t_i}{n_i}}{1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{p_i}} \right\}$$

Τότε, η τιμή αυτή χρησιμοποιείται και τον καθορισμό των τιμών b_i από την εξίσωση $b_i \leq T_i^* / W \prec 2b_i$ και στη συνέχεια ένα νέο W^*. Αυτό επαναλαμβάνεται μέχρι να εμφανιστούν ίδιες τιμές σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις. Ο Haessler (1979) παρουσιάζει επίσης τον τρόπο με τον οποίο γίνεται ο έλεγχος για το αν οι λύσεις είναι εφικτές.

Σύμφωνα με τον Yao et al. (2003), το κίνητρο για αλλαγή από την προσέγγιση βασικής περιόδου, στην επέκταση της βασικής περιόδου είναι να αποφευχθεί το χάσιμο της δυναμικότητας της μηχανής λόγω του αυστηρού περιορισμού $\sum_{i=1}^{N}\left(t_i + \frac{d_i n_i W}{p_i}\right) \leq W$.

Σύμφωνα με τους Lopez and Kingsman (1991) η επέκταση της προσέγγισης της βασικής περιόδου θα είναι ανώτερη της προσέγγισης της βασικής περιόδου ως προς το συνολικό κόστος λόγω του ότι οι περιορισμοί της δεύτερης είναι λιγότερο αυστηροί σε σχέση με τους περιορισμούς της πρώτης. Οι Axsater (1987), Fujita (1978), και Larraneta και Onieva (1988) παρουσίασαν επίσης προσεγγίσεις της επέκτασης της βασικής περιόδου.

2.6 Εφικτά προγράμματα και ακολουθίες

Σύμφωνα με τον Davis (1990), δύο η περισσότερα προϊόντα ανταγωνίζονται για την ίδια μηχανή όταν:

- ο φόρτος χρήσης της μηχανής υπερβαίνει την δυναμικότητα καταλήγοντας έτσι σε αλληλεπικαλύψεις (overlap) στο πρόγραμμα παραγωγής

- το ξεκίνημα παραγωγής ενός προϊόντος εμφανιστεί πριν την ολοκλήρωση της παραγωγής ενός άλλου προϊόντος

Σύμφωνα με τον Rogers (1958), είναι πιθανή η εύρεση εφικτών προγραμμάτων παραγωγής όταν υπάρχουν λίγα προϊόντα που μοιράζονται την ίδια μηχανή και όταν υπάρχει αρκετός ελεύθερος χώρος στο πρόγραμμα λόγω υψηλών ρυθμών παραγωγής σε σχέση με την ζήτηση. Στην περίπτωση όπου υπάρχουν πάρα πολλά προϊόντα, ο αριθμός των ενδεχόμενων επικαλύψεων αυξάνεται.

Ο Elmaghraby (1978) άσκησε κριτική για τα ευρετικά μοντέλα στα οποία δεν υπάρχει συστηματικός τρόπος ελέγχου για εφικτά προγράμματα για ένα δοσμένο σύνολο παραμέτρων, και επίσης για το ότι δεν υπάρχουν προκαθορισμένες διαδικασίες ώστε η λύση να ξεφεύγει από το σύνολο των μη εφικτών λύσεων. Οι Haessler και Hogue (1976) παρουσίασαν μια διαδικασία για την εύρεση εφικτών λύσεων όταν οι συχνότητες καθορίζονται αυξάνοντας συστηματικά την βασική περίοδο και μειώνοντας στο μισό τις συχνότητες. Η διαδικασία αρχίζει με την γενική συνθήκη:

$$W \geq \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{t_i}{n_i}}{1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{p_i}}$$

Η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να ισχύει για να υπάρχει εφικτή λύση. Τα προϊόντα ανατίθενται σε διαφορετικές περιόδους από τις συχνότητες. Έστω μια δυαδική μεταβλητή X_{ij} όπου παίρνει την τιμή 1 εάν το προϊόν i παράγεται κατά τη διάρκεια του κύκλου j, διαφορετικά παίρνει τιμή μηδέν. Τότε σύμφωνα με τους Haessler και Hogue (1976) υπάρχει εφικτή λύση εάν ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ij} \left(t_i + \frac{d_i n_i W}{p_i} \right) \leq W \text{ για όλα τα } j.$$

Η παραπάνω εξίσωση υπονοεί ότι το άθροισμα του χρόνου προετοιμασίας και του χρόνου παραγωγής για όλα τα προϊόντα που παράγονται σε μια συγκεκριμένη περίοδο θα πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση της βασικής περιόδου. Αυτό θα πρέπει να ισχύει για όλους τους κύκλους. Εάν αυτό δεν ισχύει, τότε η τιμή της βασικής περιόδου θα πρέπει να αυξηθεί έως ότου η παραπάνω εξίσωση να ισχύει. Το συνολικό κόστος υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την τιμή αυτή της βασικής περιόδου. Για κάθε προϊόν με $n_i \succ 1$ η συχνότητα θα πρέπει να μειώνεται στο μισό. Για κάθε περίπτωση θα πρέπει να υπολογίζεται μία νέα τιμή βέλτιστης βασικής περιόδου από την εξίσωση:

$$W^* \max = \left\{ \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{n_i}}{\sum_{i=1}^{N} n_i h_i d_i \left(1-\frac{d_i}{p_i}\right)}, \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{t_i}{n_i}}{1-\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{p_i}}} \right\}$$

και το συνολικό κόστος από την εξίσωση:

$$C_i\left(n_i, W\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{n_i W} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} h_i d_i n_i W\left(1-\frac{d_i}{p_i}\right)$$

Επιλέγεται η περίπτωση με το μικρότερο συνολικό κόστος, η συχνότητα του προϊόντος μειώνεται στο μισό και δημιουργείται ένα νέο πρόγραμμα. Στη συνέχεια ελέγχεται εάν ισχύει η εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ij}\left(t_i + \frac{d_i n_i W}{p_i}\right) \le W$$

Εάν δεν ισχύει αυξάνεται η βασική περίοδος μέχρι η παραπάνω εξίσωση να ισχύει. Το συνολικό κόστος της λύσης αυτής υπολογίζεται και συγκρίνεται με το συνολικό κόστος της προηγούμενης λύσης. Εάν το συνολικό κόστος είναι μικρότερο, η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται, διαφορετικά η διαδικασία τερματίζεται.

Ο Dobson (1987) διατύπωσε μια διαδικασία σύμφωνα με την οποία δημιουργούνται εφικτά προγράμματα επιτρέποντας στα μεγέθη των παρτίδων και, επομένως, στη χρονική διάρκεια του κύκλου σε κάθε προϊόν να μεταβάλλονται. Ο Zipkin (1991) παρουσίασε μια ευρετική μέθοδο σύμφωνα με την οποία δημιουργούνται εφικτά προγράμματα με συχνότητες που είναι δυνάμεις του δύο. Προγραμματίζεται η παραγωγή των προϊόντων σε ίσα υπό διαστήματα αρχίζοντας με τα προϊόντα που παράγονται πιο συχνά, στη συνέχεια τα επόμενα προϊόντα που παράγονται πιο συχνά κ.ο.κ.

Επίσης, ο Yao et al. (2003) παρουσιάζουν μία ευρετική μέθοδο όπου ελέγχεται κατά πόσο η λύση του ELSP είναι εφικτή. Προτείνουν μοντέλα ακέραιου προγραμματισμού και ευρετικές μεθόδους για την επίλυσή τους. Οι Levén και Segerstedt (2005) παρουσίασαν μία μέθοδο όπου ρυθμίζονται οι ποσότητες παραγωγής οι οποίες προκύπτουν από ευρετικές διαδικασίες για το πρόβλημα προγραμματισμού βέλτιστης παρτίδας παραγωγής. Η μέθοδος θεωρεί τους χρόνους εξάντλησης αποθέματος (τρέχον επίπεδο αποθέματος διαιρούμενο με την προσδοκώμενη τιμή των ρυθμών ζήτησης) των προϊόντων και, αν η τρέχουσα κατάσταση δείχνει μελλοντική εξάντληση των αποθεμάτων, οι παρτίδες παραγωγής μειώνονται ούτως ώστε να αποφευχθεί το έλλειμμα.

2.7 Προετοιμασίες συναρτήσει της ακολουθίας

Οι περισσότερες ερευνητικές εργασίες για το πρόβλημα προγραμματισμού βέλτιστης παρτίδας παραγωγής υποθέτουν χρόνους προετοιμασίας ανεξάρτητους της σειράς παραγωγής, όπου σύμφωνα με τους Lopez και Kinsman (1991) δεν είναι σωστή υπόθεση για πολλά αληθινά προβλήματα. Αντίθετα, οι χρόνοι και τα κόστη προετοιμασίας είναι εξαρτημένα της ακολουθίας παραγωγής. Για παράδειγμα, αυτό μπορεί να φανεί σε βιομηχανίες όπου οι προετοιμασίες απαιτούν καθαρισμό του εξοπλισμού πριν την παραγωγή του επόμενου προϊόντος, η χρονική διάρκεια του οποίου εξαρτάται άμεσα από το επόμενο προϊόν.

Σύμφωνα με τον Maxwell (1964) η λανθασμένη ακολουθία παραγωγής οδηγεί σε μεγάλο χάσιμο παραγωγικού χρόνου λόγω των μη παραγωγικών προετοιμασιών.

Επομένως, σε ένα πρόβλημα όπου οι προετοιμασίες είναι συναρτήσει της ακολουθίας παραγωγής, η ακολουθία με την οποία τα προϊόντα θα πρέπει να παραχθούν είναι σημαντική για την ελαχιστοποίηση του κόστους αποθέματος και του κόστους προετοιμασίας. Οι Lopez και Kingsman (1991) επιχειρηματολογούν ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση του κοινού κύκλου. Τότε χρησιμοποιείται η ακολουθία παραγωγής των προϊόντων η οποία ελαχιστοποιεί το συνολικό χρόνο προετοιμασίας του κύκλου. Η εύρεση της βέλτιστης ακολουθίας είναι παραλλαγή του προβλήματος του περιπλανώμενου πολίτη, όπου θα πρέπει ένας πωλητής να επισκεφθεί κάποιες πόλεις, και να επιστρέψει στην πόλη από την οποία άρχισε, με την ελάχιστη διαδρομή. Οι Lopez Kingsman (1991) δοκίμασαν διαφορετικούς αλγόριθμους σε προβλήματα με προετοιμασίες εξαρτημένες της ακολουθίας παραγωγής.

Η προσέγγιση του κοινού κύκλου καταλήγει σε χαμηλά κόστη σε χρόνους κύκλου, επειδή τα προϊόντα έχουν την βέλτιστη ακολουθία ώστε να ελαχιστοποιείται ο συνολικός χρόνος προετοιμασίας, επιτρέποντας μικρότερα μεγέθη παρτίδας και χαμηλότερα κόστη. Ο μόνος τρόπος χρήσης των προσεγγίσεων βασικής περιόδου και της επέκτασης της είναι η χρήση των μέσων χρόνων προετοιμασίας για κάθε προϊόν. Επίσης ο συνολικός χρόνος προετοιμασίας για την μέθοδο κοινού κύκλου θα είναι μικρότερος της μεθόδου βασικής περιόδου και της επέκτασης της.

Επίσης εξέφρασαν την ανάγκη τροποποίησης της επέκτασης της βασικής περιόδου ώστε να ενσωματώσει την εξάρτηση των χρόνων προετοιμασίας από την ακολουθία παραγωγής. Εάν αυτό δεν είναι δυνατό, τότε ο κοινός κύκλος σύμφωνα με τους Lopez και Kingsman (1991), είναι η καλύτερη προσέγγιση για χρήση τον προγραμματισμό παραγωγής στην πράξη με χρόνους προετοιμασίας εξαρτημένους της ακολουθίας παραγωγής.

Μερικοί ερευνητές παρουσίασαν ευρετικές μεθόδους για την επίλυση του προβλήματος προγραμματισμού παραγωγής της βέλτιστης παρτίδας με προετοιμασίες εξαρτημένες της ακολουθίας παραγωγής. Ο Galvin (1987) θεώρησε κόστη προετοιμασίας εξαρτημένα της ακολουθίας παραγωγής χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του κοινού κύκλου. Χώρισε το πρόβλημα σε δύο μέρη. Σε αυτό της εύρεσης της ακολουθίας και αυτό της εύρεσης του κοινού κύκλου για όλα τα προϊόντα με δεδομένη το ελάχιστο κόστος της ακολουθίας. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο διακλάδωσης και φράγματος για το πρόβλημα του περιπλανώμενου πολίτη για τον καθορισμό της βέλτιστης ακολουθίας με το ελάχιστο κόστος προετοιμασίας.

Ο Maxwell (1964) υπέθεσε κόστη προετοιμασίας ανάλογα των χρόνων προετοιμασίας και παρουσίασε μια ευρετική διαδικασία για τον καθορισμό του καλύτερου προϊόντος στην καλύτερη θέση. Η διαδικασία αρχίζει με έναν κοινό κύκλο και αξιολογεί εάν μπορεί να προστεθεί ένα επιπλέον τρέξιμο της παραγωγής στον κύκλο. Συγκρίνει το κόστος του καινούργιου κύκλου με το κόστος του κύκλου πριν τη μετατροπή και στη συνέχεια καθορίζει την καλύτερη θέση για το προϊόν. Η διαδικασία τερματίζεται όταν εξεταστούν όλες οι πιθανές θέσεις χωρίς να βρεθεί ο κύκλος με το χαμηλότερο κόστος.

Οι Delporte και Thomas (1977) παρουσίασαν μια ευρετική μέθοδο, με την οποία καθορίζονται τα μεγέθη παρτίδας, οι συχνότητες παραγωγής, παράγονται οι ακολουθίες, και υπολογίζονται οι χρονικές διάρκειες αναπαραγωγής (cycle times). Η παραγωγή συχνοτήτων θεωρεί το μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα σχετιζόμενο με n παραγωγές ενός προϊόντος στην διάρκεια του κύκλου. Η διαδικασία αρχίζει με συχνότητες του ένα, για όλα τα προϊόντα, και υπολογίζεται η βέλτιστη τιμή της διάρκειας του κύκλου και το κόστος αυτών των συχνοτήτων. Στη συνέχεια η μέθοδος αυξάνει τις συχνότητες παραγωγής για κάθε προϊόν, κατά ένα την φορά, υπολογίζει την αντίστοιχη διάρκεια κύκλου, έτσι ώστε το νέο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου για κάθε προϊόν να είναι ίσο με το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου όταν θεωρείται η μικρότερη συχνότητα.

Το προϊόν με τη μικρότερη διάρκεια κύκλου επιλέγεται και η συχνότητα του προϊόντος αυτού αυξάνεται κατά ένα. Αυτό επαναλαμβάνεται μέχρι η διάρκεια του κύκλου να υπερβεί μια μέγιστη διάρκεια κύκλου, η οποία καθορίζεται, ή μέχρι οι συχνότητες να ξεπεράσουν το ένα. Δεν ενσωματώνουν την εξάρτηση της ακολουθίας στον υπολογισμό των συχνοτήτων.

Ο Dobson (1992) παρουσιάζει μια διαδικασία επίλυσης για το πρόβλημα με χρόνους και κόστη προετοιμασίας εξαρτημένα της ακολουθίας παραγωγής. Η μέθοδος είναι βασισμένη σε μια σειρά χαλαρώσεων των περιορισμών του αρχικού προβλήματος. Οι συχνότητες βαθμολογούνται έτσι ώστε η μικρότερη συχνότητα να είναι ένα, και στη συνέχεια στρογγυλοποιούνται στις πιο κοντινές δυνάμεις του δύο. Υπολογιστικές δοκιμές έδειξαν ότι η δυσκολία του προβλήματος αυξάνεται όταν αυξάνεται ο φόρτος χρήσης της μηχανής ή όταν αυξάνεται η ποικιλομορφία (diversity) των προετοιμασιών.

Οι Wagner και Davis (2002) ανέπτυξαν μια ευρετική διαδικασία για το πρόβλημα με προετοιμασίες εξαρτημένες της ακολουθίας παραγωγής. Η διαδικασία αρχίζει με μια τυχαία ακολουθία αξιολογώντας όλες τις πιθανές εναλλαγές δύο προϊόντων χρησιμοποιώντας μη γραμμικό προγραμματισμό. Επιλέγεται η εναλλαγή η οποία αποδίδει την μεγαλύτερη μείωση κόστους. Στη συνέχεια αξιολογούνται όλες οι πιθανές εναλλαγές για τρία προϊόντα. Η αξιολόγηση γίνεται άλλη μια φορά για όλα τις πιθανές εναλλαγές δύο προϊόντων. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου δεν υπάρχει περαιτέρω βελτίωση. Στη συνέχεια η μέθοδος καθορίσει τα προϊόντα τα οποία θα πρέπει να προσθέσουν ένα επιπλέον τρέξιμο παραγωγής στην ακολουθία αξιολογώντας την επίδραση ενός επιπλέον τρεξίματος και κάθε προϊόν. Η αξιολόγηση κάθε προϊόντος πριν την αύξηση της συχνότητας παραγωγής είναι χρονοβόρα, ειδικά στην περίπτωση που υπάρχουν πάρα πολλά προϊόντα.

Στα επόμενα κεφάλαια, για το πρόβλημα προγραμματισμού βέλτιστης παρτίδας σε μία μηχανή, γίνεται μια πιο λεπτομερειακή εξέταση και σύγκριση μεθόδων επίλυσης του, πολλές από τις οποίες παρουσιάστηκαν εν περιλήψει στο παρόν κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Προσεγγίσεις των Bomberger-Madigan-Hanssman

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται οι προσεγγίσεις των Bomberger (1966), Madigan (1968) και Hannsman (1962), και συγκρίνονται τα αποτελέσματα σε μία εφαρμογή. Οι δύο πρώτες προσεγγίσεις, είναι αναλυτικές προσεγγίσεις εύρεσης βέλτιστης λύσης για την περιορισμένη έκδοση του προβλήματος προγραμματισμού βέλτιστης παρτίδας, βασιζόμενες στην μέθοδο της βασικής περιόδου. Ο Bomberger (1966) διατυπώνει το πρόβλημα με την θεωρία του δυναμικού προγραμματισμού, ενώ η προσέγγιση του Madigan (1968) βασίζεται σε ένα σύνολο από μεγέθη παρτίδας τα οποία υπολογίζονται με την υπόθεση του κοινού κύκλου (rotation cycle), και ένα άλλο σύνολο από μεγέθη παρτίδας υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τους τύπους του οικονομικού μεγέθους παρτίδας.

3.2 Bomberger (1966)

Το πρόβλημα που εξετάζεται είναι αυτό του προγραμματισμού της παραγωγής πολλών προϊόντων σε μια μηχανή. Η μηχανή μπορεί να παράγει ένα προϊόν κάθε φορά, υπάρχει χρόνος και κόστος προετοιμασίας. Ο ρυθμός της ζήτησης για κάθε προϊόν είναι σταθερός για άπειρο χρονικό ορίζοντα και όλες οι ζητήσεις θα πρέπει να ικανοποιούνται. Η λύση του παραπάνω προβλήματος προσεγγίζεται με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού. Η λύση αυτή εφαρμόζεται σε ένα πρόβλημα, και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα σχετικά φράγματα.

3.2.1 Εισαγωγή

Το εξεταζόμενο πρόβλήμα είναι αυτό του προγραμματισμού της παραγωγής πολλών προϊόντων που μοιράζονται την ίδια μηχανή σε επαναλαμβανόμενη βάση. Ένα πρόγραμμα n προϊόντων είναι επαναλαμβανόμενο εάν υπάρχει ένα σύνολο χρόνων αναπαραγωγής $\{T_i\}$, $i = 1,...,n$ τέτοιοι ώστε ο κύκλος παραγωγής για κάθε προϊόν i να επαναλαμβάνεται κάθε T_i χρονικές μονάδες.

Η παραγωγή κάθε προϊόντος i γίνεται κατά παρτίδες. Επομένως το χρονικό διάστημα T_i, είναι ο χρόνος αναπαραγωγής, δηλαδή το χρονικό διάστημα μεταξύ των χρόνων παραγωγής διαδοχικών παρτίδων του ίδιου προϊόντος.

Τα σχετικά χαρακτηριστικά της μηχανής είναι:

i. παραγωγή ενός προϊόντος κάθε φορά,
ii. υπάρχει χρόνος προετοιμασίας και κόστος προετοιμασίας για κάθε προϊόν,
iii. το κόστος και ο χρόνος προετοιμασίας εξαρτώνται μόνο από το προϊόν το οποίο πρόκειται να παραχθεί,
iv. η ζήτηση για κάθε προϊόν είναι γνωστή και σταθερή για χρονικό ορίζοντα άπειρου μήκους, ενώ θα πρέπει να ικανοποιείται όλη η ζήτηση,
v. και για κάθε προϊόν το συνολικό μεταβλητό κόστος είναι το άθροισμα του κόστους και του χρόνου προετοιμασίας και του κόστους αποθέματος.

Τα επαναλαμβανόμενα προγράμματα παραγωγής χρησιμοποιούνται συχνά, (α) λόγω της ευκολίας με την οποία μπορούν να δημιουργηθούν και, ως ένα βαθμό, να ακολουθηθούν, και (β) επειδή απλοποιούν πολύ τον προγραμματισμό των πόρων.

Στην πραγματικότητα τα επαναλαμβανόμενα προγράμματα που απαιτούν την ίδια ποσότητα παραγωγής για κάθε προϊόν σε κάθε κύκλο, δεν μπορούν να ακολουθηθούν αυστηρά. Οι τυχαίες διακυμάνσεις στη ζήτηση, τον χρόνο παραγωγής, ή τον χρόνο προετοιμασίας δημιουργούν αποκλίσεις από το πρόγραμμα. Αυτό που γίνεται συνήθως στην πράξη είναι να ρυθμίζεται η παραγωγή με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να καλύπτεται η ζήτηση ανά πάσα στιγμή. Η ευκολία με την οποία τέτοιες ρυθμίσεις μπορούν να γίνουν εξαρτάται από το βαθμό χρήσης της δυναμικότητα της μηχανής.

Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση μιας απλής μεθόδου προγραμματισμού παραγωγής που είναι σχεδόν βέλτιστη, από την άποψη της ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους παραγωγής και αποθέματος.

3.2.2 Ορισμός της λύσης

Από τον ορισμό του επαναλαμβανόμενου προγράμματος και τις συνθήκες (i) και (iv), μια λύση αποτελείται από τον καθορισμό ενός κύκλου αποθέματος για κάθε προϊόν, υπό τον περιορισμό (α) η ποσότητα παραγωγής ενός προϊόντος μέσα σε έναν κύκλο θα πρέπει να είναι επαρκής ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση για περίοδο ίση με τη χρονική διάρκεια του κύκλου, και (β) η χρονική διάρκεια του κύκλου πρέπει να είναι επαρκής ώστε να επιτρέπει την παραγωγή και άλλων προϊόντων τα οποία έχουν προγραμματιστεί για παραγωγή κατά τη διάρκεια του κύκλου. Ένα πρόγραμμα είναι εφικτό εάν οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται, και βέλτιστο εάν είναι εφικτό και ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

3.2.3 Ένα κάτω όριο του κόστους

Το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής είναι υπολογιστικά ανέφικτο. Για σκοπούς σύγκρισης μη βέλτιστων εφικτών λύσεων είναι επιθυμητό να υπάρχει ένα εύκολα υπολογίσιμο κάτω όριο του συνολικού κόστους για το βέλτιστο πρόγραμμα. Στη συνέχεια υπολογίζεται ένα κάτω όριο του συνολικού κόστους.

Έστω,

$i =$ δείκτης προϊόντος,

$s =$ κόστος προετοιμασίας,

$h =$ κόστος αποθέματος,

$p =$ ρυθμός παραγωγής,

$r =$ ρυθμός ζήτησης,

$t =$ χρόνος προετοιμασίας,

$T =$ χρόνος αναπαραγωγής

Το κόστος ανά μονάδα χρόνου για κάθε προϊόν είναι:

$$C_i = s_i / T_i + h_i \left(p_i - r_i \right) r_i T_i / 2 p_i \qquad (3.1)$$

Αναγκαία συνθήκη για να είναι εφικτό το πρόγραμμα είναι:

$$\sum_1^n \left(t_i + r_i T_i / p_i \right) / T_i \le 1$$

ή διαφορετικά

$$\sum_1^n t_i / T_i \leq 1 - \sum r_i / p_i \tag{3.2}$$

Η ποσότητα $\sum_1^n r_i / p_i$ είναι το ποσοστό του χρόνου το οποίο χρησιμοποιείται για παραγωγή, και το $1 - \sum_1^n r_i / p_i$ είναι το ποσοστό το οποίο είναι διαθέσιμο για τις προετοιμασίες των προϊόντων. Ένα κάτω φράγμα του βέλτιστου επαναλαμβανόμενου προγράμματος μπορεί να υπολογισθεί επιλέγοντας T_i ώστε να ελαχιστοποιείται το $\sum_1^n C_i$ υπό τον περιορισμό (3.2). Το κόστος είναι ελάχιστο εάν η περίοδος αναπαραγωγής κάθε προϊόντος είναι:

$$T_i = \sqrt{\frac{\left(A_i + \lambda t_i\right)}{B_i}} \tag{3.3}$$

όπου

$$A_i = s_i$$
$$B_i = h_i \left(p_i - r_i\right) r_i / 2 p_i,$$

και λ είναι ο μικρότερος μη αρνητικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η (3.2)

$$C_i = \left(\left(2A_i + \lambda t_i\right) / \left(A_i + \lambda t_i\right)\right)\left(\left(A_i + \lambda t_i\right) B_i\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

και

$$C_\lambda = \sum_1^n C_i \tag{3.5}$$

είναι ένα κάτω όριο του κόστος του βέλτιστου προγράμματος.

Να σημειωθεί ότι για $\lambda = 0$, οι εξισώσεις (3.3) και (3.4) είναι οι εξισώσεις εύρεσης βέλτιστης παρτίδας για το στατικό αιτιοκρατικό αποθεματικό πρόβλημα, και το C_0 είναι το ελάχιστο όριο για το κόστος καθώς η δυναμικότητα αυξάνεται.

3.2.4 Άλλες προσεγγιστικές μέθοδοι (Hanssmann, 1962)

Η απλούστερη μέθοδος όσον αφορά την εφαρμογή της είναι αυτή του Hanssmann (1962) από τις διάφορες προσεγγιστικές μεθόδους για την εύρεση εφικτών επαναλαμβανόμενων προγραμμάτων. Αυτή η μέθοδος είναι βασισμένη στην υπόθεση ότι όλοι οι χρόνοι αναπαραγωγής (cycle times) είναι ίσοι, το οποίο υπονοεί ότι η ποσότητα παραγωγής για κάθε προϊόν είναι $Q_i = d_i T$. Σε αυτό το πλαίσιο μια λύση απαιτεί την εύρεση του μήκους του κύκλου T που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Γίνεται υπόθεση παραγωγής n προϊόντων σε μια μηχανή, και ότι. $T_i = T$. Το συνολικό κόστος είναι:

$$C(T) = (1/T)\sum_1^n s_i + T\sum_1^n h_i\left(p_i - r_i\right) r_i / 2p_i$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό της χρονικής διάρκειας, το βέλτιστο μήκος του κύκλου και το αντίστοιχο ελάχιστο κόστος είναι:

$$T = \left(A/B\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

και

$$C(T) = 2(AB)^{1/2} \tag{3.7}$$

όπου

$$A = \sum_1^n s_i$$

και

$$B = \sum_1^n h_i (p_i - r_i) r_i / 2 p_i$$

Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι η ευκολία με την οποία μια εφικτή λύση μπορεί να υπολογιστεί, μια λύση που σε πολλές εφαρμογές θα διαφέρει ελάχιστα από το C_λ. Αυτή η λύση, όπως θα δούμε, είναι και ένα πάνω φράγμα και μια περιοριστική λύση (limiting solution) της μεθόδου του Bomberger (1966).

Η μέθοδος που προτάθηκε από τον Rodgers (1958) δίνει προγράμματα με χαμηλότερο κόστος, σε σχέση με την παραπάνω προσέγγιση, όμως με μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος. Η προσέγγιση που ακολουθείται σε αυτή την ενότητα βρίσκεται κάπου ενδιάμεσα των δύο παραπάνω προσεγγίσεων όσον αφορά το κόστος και την ευκολία υπολογισμού.

3.2.5 Αναδιατύπωση του προβλήματος

Δεδομένου ότι για τον καθορισμό ενός επαναλαμβανόμενου προγράμματος απαιτείται το T_i να είναι σταθερό, και δεδομένου ότι ο βέλτιστος κύκλος για την περίπτωση στην οποία όλα τα T_i είναι ίσα δίνεται από την (3.6), συνεπάγεται ότι για οποιοδήποτε άλλο επαναλαμβανόμενο πρόγραμμα για να δώσει χαμηλότερο κόστος από την (3.7) τα T_i δεν μπορεί να είναι ίσα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο που υιοθετείται σε αυτή την ενότητα, αρχικά επιβάλλονται οι περιορισμοί στους χρόνους αναπαραγωγής T_i ώστε να μπορεί να κατασκευασθεί ένα εφικτό πρόγραμμα και στη συνέχεια λαμβάνεται ένα βέλτιστο πρόγραμμα από ένα σύνολο εφικτών προγραμμάτων. Ειδικότερα, απαιτείται ότι (a) για κάθε χρόνο αναπαραγωγής T_i να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο, k_i, ενός βασικού κύκλου, και ότι (β) το άθροισμα των χρονικών περιόδων για προετοιμασία και παραγωγή για κάθε προϊόν να είναι μικρότερο του βασικού κύκλου. Οι συνθήκες (a) και (β) μπορούν να εκφραστούν ως

$$T_i = k_i T \tag{3.8}$$

και

$$\sum_1^n \left(k_i T r_i / p_i + t_i \right) \leq T \tag{3.9}$$

Αντικαθιστώντας το $T_i = k_i T$ στην (3.1) ορίζεται

$$f_i\left(k_i, T\right) = s_i / k_i T + h_i\left(p_i - r_i\right) r_i k_i T / 2 p_i$$

και

$$F(k,T)=\sum_1^n f_i(k_i,T)$$

όπου $k=(k_1,...,k_n)$.

Επομένως, η λύση απαιτεί την εύρεση του διανύσματος k και του κύκλου T για τα οποία ελαχιστοποιείται το F ικανοποιώντας την σχέση (3.9). Οι συνθήκες (a) και (β) αποτρέπουν τη λύση να καταλήξει στο πρόγραμμα με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Να σημειωθεί ότι εάν η λύση είναι τέτοια ώστε

$$T-\sum_1^n(k_iTr_i/p_i+t_i)\geq T\max(r_i/p_i)$$

τότε ο απρογραμμάτιστος χρόνος του βασικού κύκλου είναι αρκετός ώστε να προσαρμόσει μια αύξηση στο μέγεθος παρτίδας οποιουδήποτε προϊόντος με το ποσό r_iT.

3.2.6 Δυναμικός προγραμματισμός

Σε ένα ορισμένο κύκλο T γίνεται η υπόθεση ότι τα προϊόντα $i=1,...,m-1$ έχουν προγραμματιστεί και ότι απαιτούνται τ χρονικές μονάδες παραγωγής. Έστω $F_m(T-\tau,T)$, το ελάχιστο κόστος παραγωγής των υπόλοιπων προϊόντων $i=m,...,n$, στο υπόλοιπο κομμάτι του κύκλου $T-\tau$, το οποίο είναι

$$F_m(T-\tau,T)=\min_k\sum_m^n f_i(k_i,T) \tag{3.10}$$

υπό τον περιορισμό

$$\sum_m^n(k_ir_i/p_i+t_i/T)\leq(T-\tau)/T$$

Χρησιμοποιώντας την (3.10) μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση

$$F_m(T-\tau,T)=\min_{k_m}\left[f_m(k_m,T)+F_{m+1}(T-\tau-k_mr_mT/p_m-t_m,T)\right] \tag{3.11}$$

με $0 \leq km \leq Km$,

$$K_m = \left(T - \tau - t_m\right) / \left(Tr_m / p_m\right)$$

και

$$F_{n+1}\left(T - \tau, T\right) = 0$$

Οι πίνακες που απαιτούνται για μια λύση μπορούν να ληφθούν με υπολογίζοντας διαδοχικά την (3.11) για κάθε προϊόν, αρχίζοντας με $m = n$, με $\tau = \Delta T, 2\Delta T, ..., T$. Η ανάπτυξη μιας αποδοτικής υπολογιστικής τεχνικής για την ελαχιστοποίηση της (3.11) όσον αφορά *το* T φαίνεται αρκετά δύσκολη, ιδιαίτερα όταν η δυναμικότητα της μηχανής είναι υψηλή $\left(\sum r_i / p_i \succ 0.85\right)$.

3.3 Προσέγγιση Madigan (1968)

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται μια εύκολα εφαρμόσιμη μέθοδος για την επίλυση του προβλήματος προγραμματισμού πολλών εργασιών/ προϊόντων σε μια μηχανή για άπειρο χρονικό ορίζοντα η οποία προτάθηκε από τον Madigan (1968).

3.3.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται όταν είναι επιθυμητή η ελαχιστοποίηση του κόστους η οποία συνδέεται με τον προγραμματισμό πολλών διαφορετικών προϊόντων σε μια μηχανή σε επαναλαμβανόμενη βάση. Το πρόβλημα περιγράφεται ως εξής:

- παραγωγή ενός μόνο προϊόντος κάθε φορά,
- υπάρχει το κόστος προετοιμασίας και χρόνος προετοιμασίας για κάθε προϊόν,
- ο ρυθμός ζήτησης είναι γνωστός και σταθερός για άπειρο χρονικό ορίζοντα, ενώ η ζήτηση θα πρέπει να ικανοποιείται,
- ο ρυθμός παραγωγής είναι γνωστός και σταθερός,

- υπάρχει κόστος αποθεματοποίησης συναρτήσει του προϊόντος και του χρόνου για το οποίο διατηρείται το απόθεμα.

Η μέθοδος προγραμματισμού που περιγράφεται είναι βασισμένη στη μέθοδο η οποία προτάθηκε από τον Elion (1962), σύμφωνα με την οποία ένα σύνολο από μεγέθη παρτίδας υπολογίζεται με την υπόθεση του επαναλαμβανόμενου κύκλου, και ένα άλλο σύνολο υπολογίζεται εφαρμόζοντας τις εξισώσεις οικονομικού μεγέθους παρτίδας.

Ο συμβολισμός που ακολουθείται είναι ο εξής:
$i =$ δείκτης του προϊόντος,
$s =$ κόστος προετοιμασίας,
$h =$ κόστος αποθεματοποίησης ανά χρονική μονάδα
$p =$ ρυθμός παραγωγής,
$r =$ ρυθμός ζήτησης,
$q =$ μέγεθος παρτίδας,
$q^* =$ οικονομικό μέγεθος παρτίδας,
$C^* =$ κόστος οικονομικής παρτίδας ανά χρονική μονάδα,
$T^* =$ περίοδος αναπαραγωγής,
$k = h(1 - r / p)2r$
$n =$ ακέραιο,
$P =$ λόγος του κόστους της ποσότητας q προς το κόστος της ποσότητας q^*.

3.3.2 Αλγόριθμος

Τα βήματα που ακολουθούνται για την εύρεση της λύσης είναι τα εξής:

1. καθορισμός του οικονομικού μεγέθους παρτίδας και κόστους για κάθε προϊόν ξεχωριστά,

$$q^* = (s_i / k_i)^{1/2}$$

$$C_i^* = 2r_i\left(k_i s_i\right)^{1/2}$$

2. για όλα τα προϊόντα καθορίζεται ο βέλτιστος χρόνος αναπαραγωγής και τα σχετικά μεγέθη παρτίδας και κόστους για κάθε προϊόν.

$$T^* = \left[\left(2\sum_1^n s_i\right)/\left(\sum_1^n 2r_i^2 k_i\right)\right]^{1/2},$$

$$q_i = r_i T^*$$

$$C_i = s_i / T^* + T^* r_i^2 k_i$$

3. Συγκρίνονται τα μεγέθη παρτίδας και τα κόστη από τα βήματα (1) και (2). Εάν το κόστος για κάποιο προϊόν που προκύπτει από το βήμα (2) είναι σημαντικά υψηλότερο σε σχέση με το κόστος που προκύπτει από το (1), τροποποιείται το μέγεθος παρτίδας του συγκεκριμένου προϊόντος έτσι ώστε να μειωθεί το κόστος. Και σκοπούς προγραμματισμού το τροποποιημένο μέγεθος παρτίδας θα πρέπει να αντιστοιχεί σε ένα πολλαπλάσιο του βέλτιστου κύκλου αναπαραγωγής του βήματος (2). Η τροποποίηση γίνεται εύκολα, καθώς το κόστος δεν αλλάζει σημαντικά με την αλλαγή αυτή.
4. Εφόσον πραγματοποιηθούν οι τροποποιήσεις, ελέγχεται εάν ο συνολικός χρόνος προετοιμασίας και παραγωγής δεν υπερβαίνει το διαθέσιμο χρόνο. Εάν ο περιορισμός αυτός παραβιάζεται, τα προτεινόμενα μεγέθη παρτίδας θα πρέπει να αλλάξουν ξανά μέχρι να ικανοποιηθεί ο περιορισμός του διαθέσιμου χρόνου. Οι παράγοντες που λαμβάνονται υπόψη για την απόφαση μείωσης της συχνότητας παραγωγής για κάποιο προϊόν είναι ο διαθέσιμος χρόνος για τα υπόλοιπα προϊόντα, και το κόστος που χρεώνεται το προϊόν αυτό λόγω της μη συχνής παραγωγής του.
5. Προγραμματισμός παραγωγής. Ιδανικά για ένα κυκλικό εφικτό πρόγραμμα με διαδοχικές εκτέλεσης της παραγωγής για κάθε προϊόν i θα πρέπει να ξεκινάει ακριβώς κάθε $n_i T^*$ περιόδους. Παρόλα αυτά, λόγω των χρόνων προετοιμασίας

κ.τ.λ., αυτό δεν είναι πάντα αληθές. Ο Madigan (1968) πρότεινε μία μέθοδο ελαχιστοποίησης του επιπρόσθετου κόστους αποθέματος λόγω πρόωρης παραγωγής κάποιων παρτίδων.

a. Διάταξη των προϊόντων σε φθίνουσα σειρά ως προς το κόστος διατήρησης ενός προτεινόμενου μεγέθους παρτίδας για μία προγραμματισμένη χρονική μονάδα.
b. Καταγραφή των προϊόντων που παράγονται πολλές φορές μέσα στον κύκλο. Γίνεται προσπάθεια ώστε τα προϊόντα που παράγονται πολλές φορές μέσα στον κύκλο να παράγονται μετά από προϊόντα τα οποία βρίσκονται υψηλότερα ως προς τη θέση κατάταξης. Εάν αυτό δεν είναι δυνατό, τότε το προϊόν που βρίσκεται τελευταίο στην κατάταξη (βήμα a) μετακινείται μπροστά στο χρόνο, ώστε το πρόγραμμα να μπορεί να είναι εφικτό, υπολογίζεται το επιπρόσθετο κόστος αποθέματος και προστίθεται στο κόστος του προτεινόμενου προγράμματος.

3.4 Σύγκριση Αποτελεσμάτων

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκαν τα μοντέλα των Bomberger (1966), Madigan (1968) και Hanssman (1962). Στη συνέχεια γίνεται μια εφαρμογή των παραπάνω μεθόδων, για την επίλυση του ιδίου προβλήματος, ώστε να είναι δυνατή η μεταξύ τους σύγκριση.

3.4.1 Εφαρμογή Δυναμικού Προγραμματισμού

Δίδονται δεδομένα για δέκα τυπικά προϊόντων στον παρακάτω πίνακα. Θεωρείται ότι το έτος αποτελείται από 240 ημέρες διάρκειας 8 ωρών,η παραγωγή λαμβάνει χώρα σε μια βάρδια (8 ώρες), και όλες οι προετοιμασίες γίνονται κατά τη διάρκεια των εργάσιμων ωρών.

Πίνακας 6: Δεδομένα του Προβλήματος

#	Κόστος Προετοιμασίας	Κόστος Αποθέματος	Ρυθμός Παραγωγής	Ρυθμός Ζήτησης	Χρόνοι Προετοιμασιών
1	15	2.70833E-06	30000	100	1
2	20	7.39583E-05	8000	100	1
3	30	0.000053125	9500	200	2
4	10	4.16667E-05	7500	400	1
5	110	0.001160417	2000	20	4
6	50	0.000111458	6000	20	2
7	310	0.000625	2400	6	8
8	130	0.002458333	1300	85	4
9	200	0.000375	2000	85	6
10	5	1.66667E-05	15000	100	1

Με αυτά τα δεδομένα, παράγονται λύσεις για τρία διαφορετικά επίπεδα της ζήτησης. Οι λύσεις προέκυψαν για $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ και $a_3 = 4$, όπου a_i είναι ο πολλαπλασιαστής της αρχικής ζήτησης.

Οι λύσεις που προέκυψαν με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού, του κάτω φράγματος (3.5), και του Hanssmann (1962) (3.7), συνοψίζονται στον Πίνακας 7. Οι διάρκειες των κύκλων αναπαραγωγής συγκρίνονται στον Πίνακας 8.

Πίνακας 7: Λύσεις κάτω φράγματος, Bomberger (1966), Hanssmann (1962)

a_i	$\sum r/p$	Κάτω Φράγμα	Bomberger	Hanssmann
1	0.22	$16.97	$17.02	$22.60
3	0.66	28.08	29.91	36.85
4	0.88	31.62	36.65	41.17

Ο Πίνακας 7 δείχνει ότι, για φόρτο χρήσης της μηχανής μικρότερο από 0.9, ο δυναμικός προγραμματισμός δίνει καλύτερες λύσεις σε σχέση με τις λύσεις του Hanssmann (1962), και ότι περαιτέρω βελτιώσεις στον προγραμματισμό δίνουν οριακές απολαβές όταν ο φόρτος χρήσης είναι μικρότερος του 0.66.

Πίνακας 8: Σύγκριση Διαρκειών Αναπαραγωγής

#	$a=1$			$a=3$			$a=4$		
	Κάτω Φράγμα	Bomberger	Hanssmann	Κάτω Φράγμα	Bomberger	Hanssmann	Κάτω Φράγμα	Bomberger	Hanssmann
1	333	320	77.88	193	210	47.76	168	40	42.75
2	74	80		43	35		38	40	
3	76	80		45	35		39	40	
4	36	40		22	35		20	40	
5	98	100		57	35		50	40	
6	212	220		123	105		107	40	
7	407	400		236	175		204	120	
8	36	100		23	35		21	40	
9	114	100		69	70		61	40	
10	78	80	77.88	45	35	47.76	39	40	42.75

Για φόρτο χρήσης μεγαλύτερο από 0.9 το υπολογιστικό κόστος του δυναμικού προγραμματισμού μπορεί να ξεπεράσει τις αποταμιεύσεις που προσφέρει σε σχέση με τις λύσεις του Hanssmann (1962). Το υπολογιστικό κόστος του τελευταίου είναι ανεξάρτητο του φόρτου χρήσης, ενώ το υπολογιστικό κόστος του προηγούμενου αυξάνεται με την αύξηση του φόρτου χρήσης.

Σημειώνεται ότι ο κύκλος αναπαραγωγής ή *βασική περίοδος* στον Πίνακας 8 είναι 20 όταν ο πολλαπλασιαστής της ζήτησης είναι 1, όταν ο πολλαπλασιαστής είναι 3 είναι 35, και τέλος όταν ο πολλαπλασιαστής είναι 4 ο κύκλος αναπαραγωγής είναι 40.

3.4.2 Εφαρμογή Madigan (1968)

Στην παρούσα υποενότητα, χρησιμοποιείται η μέθοδος του Madigan (1968 για το ίδιο πρόβλημα με τα ίδια δεδομένα που εφαρμόστηκε για τη μέθοδο που ανέπτυξε ο Bomberger (1966) με συντελεστή χρήσης της μηχανής $\sum_{i=1}^{10}\left(r_i / p_i\right)=0.88$ και $a=4$. Χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες εξισώσεις και στρογγυλοποιώντας το βέλτιστο κύκλο αναπαραγωγής στο 43 (αντί του 42.75) λαμβάνονται τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Πίνακας 9: Συνολικό κόστος για $T = 43$

#	Οικονομικό μέγεθος παρτίδας	Κόστος οικονομικού μεγέθους παρτίδας	Μέγεθος παρτίδας για $T = 43$	Κόστος παρτίδας για $T = 43$
1	67012	0.179	17200	0.372
2	15091	1.060	17200	1.069
3	31410	1.528	34400	1.534
4	31245	1.024	68800	1.360
5	3975	4.428	3440	4.474
6	8529	0.938	3440	1.352
7	4904	3.034	1032	7.529
8	6978	12.668	14620	16.294
9	20903	6.506	14620	6.926
10	15703	0.255	17200	0.256
Συνολικό Κόστος		**31.621**		**41.166**

Συγκρίνοντας τα κόστη που προκύπτουν από το οικονομικό μέγεθος παρτίδας (Πίνακας 9), και τα κόστη όταν η διάρκεια του κύκλου είναι 43, παρατηρείται ότι θα μπορούσαν να προκύψουν σημαντικές αποταμιεύσεις εάν το προϊόν 7 παράγεται κάθε 5 κύκλους (43*5=215 ημέρες), και το προϊόν 8, 2 φορές σε κάθε κύκλο (21.5 ημέρες).

Παρόλα αυτά, οι χρόνοι παραγωγής και προετοιμασίας που απαιτούνται κατά τη διάρκεια του πρώτου κύκλου είναι μεγαλύτεροι από τη διάρκεια του κύκλου, επομένως το προτεινόμενο πρόγραμμα παραγωγής είναι ανέφικτο. Η εναλλακτική λύση είναι να παραχθεί το προϊόν 7 κάθε 2 κύκλους (86 ημέρες), και τα προϊόντα 8 και 4, δύο φορές μέσα στον κύκλο (κάθε 21.5μέρες).

Πίνακας 10: Προτεινόμενο πρόγραμμα

#	Προτεινόμενο μέγεθος παρτίδας	Διάρκεια κύκλου	Χρονική διάρκεια παραγωγής και προετοιμασίας	Κόστος προτεινόμενου προγράμματος
1	17200	43	0.698333	0.372
2	17200	43	2.275	1.069
3	34400	43	3.871053	1.534
4	34400	21.5	4.712	1.029
5	3440	43	2.220	4.474
6	3440	43	0.823333	1.352
7	2064	86	1.860	4.243
8	7310	21.5	6.123	12.682
9	14620	43	8.060	6.926
10	17200	43	1.271667	0.256
Συνολικό Κόστος				**33.938**

Η διάταξη των προϊόντων κατά φθίνουσα σειρά ως προς το κόστος αποθέματος μιας ημέρας για τα προτεινόμενα μεγέθη παρτίδας είναι 8, 9, 5, 3, 4, 2, 7, 6, 10, 1.

Το προτεινόμενο πρόγραμμα παραγωγής είναι εφικτό για τον ακόλουθο επαναλαμβανόμενο κύκλο:

Πίνακας 11: προτεινόμενο πρόγραμμα παραγωγής

Χρονική διάρκεια παραγωγής & προετοιμασίας	6.123	4.712	8.060	1.860	0.698	0.047	6.123	4.712	10.861	0.204
Προϊόν	8	4	9	7	1	Αδράνεια	8	4	5,3,2,6,10	Αδράνεια

Σύγκριση Αποτελεσμάτων

Εφαρμόζεται το ίδιο πρόβλημα με πολλαπλασιαστή ζήτησης 1 και 3 για την μέθοδο του Madigan (1968), και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν με την εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού, του κάτω φράγματος, και της μεθόδου του (Hanssmann 1962).

Πίνακας 12: Σύγκριση Αποτελεσμάτων

a_i	$\sum r/p$	Κάτω Φράγμα	Bomberger	Hanssmann	Madigan
1	0.22	\$16.97	\$17.02	\$22.60	\$17.00
3	0.66	28.08	29.91	36.85	28.37
4	0.88	31.62	36.65	41.17	33.94

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η καλύτερη μέθοδος όσον αφορά το κόστος είναι η μέθοδος που αναπτύχθηκε από τον Madigan (1968) για όλα τα επίπεδα της ζήτησης. Στη γενική περίπτωση η μέθοδος αυτή δεν δίνει το χαμηλότερο κόστος προγραμματισμού, αλλά μπορεί να θεωρηθεί μια εύκολα εφαρμόσιμη μέθοδος η οποία είναι ικανή να δώσει προγράμματα παραγωγής με χαμηλό κόστος.

Επιπλέον παραδείγματα έδειξαν ότι για υψηλό φόρτο χρήσης της μηχανής, ο χρόνος προετοιμασίας γίνεται σοβαρός περιορισμός. Ο Parsons (1966) προτείνει ένα πάνω όριο για τον διαθέσιμο χρόνο προετοιμασίας και για το βέλτιστο κύκλο να υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό αυτό. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται με χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Κεφάλαιο 4

Προσεγγίσεις των Cheng et al. (1998), Gallego(1990), Zipkin (1991), Thomas et al. (1985)

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται πιο προηγμένα μοντέλα σε σχέση με το προηγούμενο κεφάλαιο όπου για το πρόβλημα προγραμματισμού βέλτιστης παρτίδας επιτρέπεται η αναμονή πελατών στην ουρά (*backlog*). Συγκεκριμένα, εξετάζονται τα μοντέλα των Feng Cheng, Houmin Yan και Jun Yang (1998) και Gallego (1990). Γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων του πρώτου μοντέλου με τα αποτελέσματα της προσέγγισης του Zipkin (1991) όπου δημιουργούνται εφικτά προγράμματα με συχνότητες που είναι δυνάμεις του δύο, προγραμματίζεται η παραγωγή των προϊόντων σε ίσα υποδιαστήματα αρχίζοντας με τα προϊόντα που παράγονται πιο συχνά, στη συνέχεια τα επόμενα προϊόντα που παράγονται πιο συχνά κ.ο.κ. Τέλος παρουσιάζεται η προσέγγιση του Thomas. L.J. et al. (1985) όπου περιγράφεται μια μέθοδος ελέγχου των προετοιμασιών, οι οποίες εξαρτώνται από την ακολουθία παραγωγής.

4.1 Προσέγγιση των Cheng, Yan και Yang (1998)

Σε αυτή τη ενότητα εξετάζεται το πρόβλημα μεσοπρόθεσμου προγραμματισμού παραγωγής και βραχυπρόθεσμου προγραμματισμού των προετοιμασιών πολλών προϊόντων σε μία μηχανή. Η μηχανή παράγει ένα προϊόν κάθε φορά. Όταν η παραγωγή σταματάει για να γίνει αλλαγή από κάποιο προϊόν σε κάποιο άλλο υπάρχει χρόνος και κόστους προετοιμασίας. Ο στόχος είναι ο καθορισμός του προγράμματος των προετοιμασιών και του ρυθμού παραγωγής για κάθε προϊόν για τα οποία ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος, το οποίο περιλαμβάνει απόθεμα, παραγγελίες στην ουρά, και προετοιμασίες. Εκτός από τις μεταβλητές απόφασης που χρησιμοποιούνται στο κλασικό πρόβλημα προγραμματισμού οικονομικού μεγέθους παρτίδας, χρησιμοποιείται ως μεταβλητή απόφασης και ο ρυθμός παραγωγής. Αποδεικνύεται ότι οι λύσεις αυτού του προτύπου βελτιώνουν τα αποτελέσματα του κλασικού προβλήματος οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού (ELSP).

Το πρόβλημα οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών για πολλά χρόνια. Οι περισσότερες μελέτες και το παραπάνω πρόβλημα έχουν εστιαστεί στον κυκλικό προγραμματισμό όπου το πρόγραμμα παραγωγής είναι περιοδικό. Για την λύση του παραπάνω προβλήματος έχουν προταθεί ουσιαστικά δύο βασικές μέθοδοι όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Στην πρώτη επιλέγεται μια βασική περίοδος σύμφωνα με την οποία η περίοδος αναπαραγωγής για κάθε προϊόν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου αυτής, ενώ οι παρτίδες του κάθε προϊόντος είναι του ίδιου μεγέθους.

Αντίθετα, στην δεύτερη μέθοδο επιλέγεται μία ενιαία περίοδος αναπαραγωγής όπου τα προϊόντα μπορούν να παραχθούν μία φορά μέσα στον κύκλο. Την προσέγγιση αυτή ακολουθήσαν οι Maxwell (1964), Delporte και Thomas (1977), ενώ έχουν αναπτυχθεί αποτελεσματικοί αλγόριθμοι από πολλούς συγγραφείς (βλέπε Lee και Dansusaputro 1989, Roundy 1989, Zipkin 1991).

Σύμφωνα με τον Zipkin (1991) τα προϊόντα μπορούν να παράγονται πολλές φορές και σε διαφορετικά μεγέθη κατά τη διάρκεια του κύκλου παραγωγής. Ανέπτυξε μια διαδικασία βασισμένη στον παραμετρικό τετραγωνικό προγραμματισμό και βασικούς υπολογισμούς παρόμοιους με αυτούς του προτύπου οικονομικής ποσότητας παραγγελίας. Γνωρίζοντας την ακολουθία παραγωγής των προϊόντων μέσα στον κύκλο, ο αλγόριθμος βρίσκει τη βέλτιστη περίοδο αναπαραγωγής και τα μεγέθη των παρτίδων.

Ο Silver (1990) με αριθμητικά παράδειγμα εξηγεί ότι εάν δεν υπάρχει κέρδος αδρανοποίησης της μηχανής, τότε μπορούν να αποκτηθούν σημαντικές αποταμίευσης, επιβραδύνοντας την παραγωγή από κάποιο προϊόν κλειδί, το οποίο έχει σχετικά υψηλό κόστος αποθεματοποίησης και σχετικά χαμηλό ρυθμό ζήτησης σε σχέση με τα άλλα προϊόντα.

Οι Moon, Gallego, and Smith-Levi (1991) ανέπτυξαν μία ευρετική μέθοδο για την λύση του προβλήματος οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού με έναν κοινό κύκλο, στον οποίο ο ρυθμός παραγωγής μπορεί να ελεγχθεί όχι μόνο στην αρχή της παραγωγής, αλλά και κατά την διάρκεια της παραγωγής. Χωρίζουν τα προϊόντα σε προϊόντα υψηλού και χαμηλού κόστους αποθεματοποίησης. Τα πρώτα παράγονται πρώτα για να καλύψουν τη ζήτηση ενώ τα τελευταία παράγονται με τον μέγιστο ρυθμό. Έχει αναφερθεί ότι είναι δυνατή η αποταμίευση ειδικά στις περιπτώσεις όπου υπάρχει υψηλό κόστος προετοιμασίας.

Σύμφωνα με τους Feng Cheng, Houmin Yan και Jun Yang (1998) επιλύεται το πρόβλημα μεσοπρόθεσμου προγραμματισμού παραγωγής και βραχυπρόθεσμου προγραμματισμού προετοιμασιών στο οποίο η περίοδος αναπαραγωγής, το μέγιστο απόθεμα, και ο ρυθμός παραγωγής για κάθε προϊόν είναι μεταβλητές απόφασης. Υιοθετείται το πρότυπο του κυκλικού επαναλαμβανόμενου προγραμματισμού (cycle rotation schedule) όπου η σειρά παραγωγής επαναλαμβάνεται, ενώ το κάθε προϊόν παράγεται μόνο μια φορά μέσα στον κύκλο. Το πρότυπο του κυκλικού επαναλαμβανόμενου προγραμματισμού είναι απλό στη χρήση και εύκολα υλοποιήσιμο ενώ έχει αναφερθεί ότι το βέλτιστο πρόγραμμα από ένα μεγάλο ποσοστό προβλημάτων που δημιουργήθηκαν τυχαία είναι αυτού του τύπου Zipkin (1991). Η προσέγγιση του Cheng et al (1998) διαφέρει από αυτή του κλασικού προτύπου οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού, σύμφωνα με το οποίο η μηχανή είτε παράγει με σταθερή δυναμικότητα είτε παραμένει αδρανοποιημένη.

Επιπλέον γίνεται θεωρητική σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά του Zipkin (1991) για το πρόβλημα προγραμματισμού οικονομικού μεγέθους παρτίδας. Σε συστήματα παραγωγής όπου υιοθετείται η παραπάνω πολιτική, η περίοδος αναπαραγωγής είναι μεγαλύτερη, τα μεγέθη των παρτίδων είναι μεγαλύτερα, και το μέγιστο επίπεδο αποθέματος των ακριβών προϊόντων είναι χαμηλότερο σε σύγκριση με αυτά του προτύπου οικονομικού μεγέθους παρτίδας προγραμματισμού. Ως αποτέλεσμα, η παραπάνω προσέγγιση δίνει χαμηλότερο μέσο κόστος.

Στην επόμενη ενότητα γίνεται η εισαγωγή των συμβολισμών που υιοθετούνται, εν συνεχεία εξετάζεται το πρόβλημα πολλών προϊόντων σε λεπτομέρεια και τέλος οι λύσεις συγκρίνονται με τις λύσεις του κλασικού προβλήματος οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού.

4.1.1 Συμβολισμοί και διατύπωση του προβλήματος

$N =$ ο αριθμός των προϊόντων,
$i =$ ο δείκτης για το προϊόν, $i = 1,2,...N$
$d_i =$ ο ρυθμός συζητήσεις για το προϊόν i,
$U_i =$ η δυναμικότητα παραγωγής για το προϊόν i,
$u_i(t) =$ ο ρυθμός παραγωγής και το προϊόν i τη χρονική στιγμή, t
$x_i(t) =$ το επίπεδο αποθέματος ή παραγγελιών στην ουρά για το προϊόν i τη χρονική στιγμή, t
$x_i =$ το αρχικό επίπεδο αποθέματος για το προϊόν i,
$x_i^+(t) =$ το επίπεδο αποθέματος για το προϊόν i τη χρονική στιγμή t,
$x_i^-(t) =$ το επίπεδο παραγγελιών στην ουρά για το προϊόν i τη χρονική στιγμή t,
$Q_i =$ το μέγεθος παρτίδας για το προϊόν i,
$q_i =$ το μέγιστο επίπεδο αποθέματος για το προϊόν i,
$b_i =$ η προγραμματισμένη ποσότητα των παραγγελιών στην ουρά για το προϊόν i,
$c_i^+ =$ το μοναδιαίο κόστος αποθέματος για το προϊόν i,
$c_i^- =$ το μοναδιαίο κόστος του προϊόντος i στην ουρά,
$S_i =$ το κόστος προετοιμασίας για το προϊόν i,

$S = \sum_{i=1}^{N} S_i =$ το συνολικού κόστος προετοιμασιών του κύκλου,

$TC =$ το συνολικό κόστος του κύκλου παραγωγής,

$\overline{TC} =$ το μέσο κόστος του κύκλου παραγωγής,

$T_i =$ ο χρόνος παραγωγής για το προϊόν i,

$\tau_i =$ ο χρόνος προετοιμασίας για το προϊόν i,

$\tau = \sum_{i=1}^{N} \tau_i =$ το συνολικό άθροισμα του χρόνου προετοιμασίας στον κύκλο παραγωγής,

$T = \sum_{i=1} \left(T_i + \tau_i\right) =$ η περίοδος αναπαραγωγής,

$\lambda_i = \dfrac{T_i}{T} =$ το ποσοστό του χρόνου παραγωγής που είναι δεσμευμένο για το προϊόν i.

Η δυναμική του συστήματος είναι:

$$\begin{cases} x_i\left(t\right) = u_i\left(t\right) - d_i, \qquad x_i\left(0\right) = x_i, \\ \text{για } i = 1,\dots,N \end{cases}$$

Όμοια με τον Zipkin (1991) υποτίθεται ότι μηχανή έχει επαρκή δυναμικότητα. Στην περίπτωση μηδενικών χρόνων προετοιμασίας η δυναμικότητα παραγωγής θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση της ζήτησης. Στην περίπτωση μη μηδενικών χρόνων προετοιμασίας, η δυναμικότητα παραγωγής θα πρέπει να είναι αυστηρά μεγαλύτερη από τη ζήτηση. Δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{U_i} \leq 1 \quad \alpha\nu\, \tau = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{U_i} \prec 1 \quad \alpha\nu\, \tau \succ 0.$$

Στόχος είναι η εύρεση όλων των χαρακτηριστικών του προγράμματος παραγωγής τα οποία είναι η περίοδος αναπαραγωγής (μεγέθη παρτίδων), το μέγιστο επίπεδο αποθέματος, και ο ρυθμός παραγωγής για κάθε προϊόν, για τα οποία ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος του κύκλου παραγωγής, το οποίο είναι :

$$J^* = \min_{T, q_i, u_i} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \int_0^T \left[c_i^+ x_i^+\left(t\right) + c_i^- x_i^-\left(t\right) \right] dt + S_i \right\}.$$

4.1.2 Πρότυπο συστήματος πολλών προϊόντων

Αρχικά, η μελέτη περιορίζεται στην εφαρμογή του κυκλικού επαναλαμβανόμενου προγραμματισμού ή κοινού κύκλου. Θα επεκταθεί η μελέτη στην περίπτωση του προγραμματισμού μη κοινού κύκλου υιοθετώντας μια διαδικασία παρόμοια με αυτήν του Zipkin (1991).

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *Κανόνας μηδενικής αλλαγής (Gallego και Joneja, 1994): Στην βέλτιστη λύση, η παραγωγή ενός προϊόντος αρχίζει ακριβώς την χρονική στιγμή t μόνον όταν το επίπεδο αποθέματος είναι μηδενικό την χρονική στιγμή t.*
Σημείωση: Πρόταση 1 είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που δεν υπάρχουν παραγγελίες στην ουρά.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Όταν η μηχανή προετοιμάζεται για την παραγωγή του προϊόντος i, πριν αλλάξει σε άλλα προϊόντα θα συνεχίζει να παραγάγει το προϊόν i, το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει χρόνος αδράνειας στην παραγωγή.*

Εφόσον ο ρυθμός παραγωγής μπορεί να ρυθμιστεί από την τιμή μηδέν μέχρι τα όρια της δυναμικότητας της μηχανής, δεν υπάρχει λόγος να υπάρχουν περίοδοι αδράνειας στην παραγωγή. Εάν υποτεθεί ότι υπάρχει χρόνος αδράνειας στην παραγωγή, τότε κατά τη διάρκεια της περιόδου αδράνειας η ζήτηση του προϊόντος i ικανοποιείται είτε από το απόθεμα που έχει ήδη δημιουργηθεί σε προηγούμενη χρονική περίοδο παραγωγής, είτε θα υπάρξει έλλειμμα και θα ικανοποιηθεί σε μελλοντική χρονική περίοδο. Επομένως, ο χρόνος αδράνειας επιδρά αρνητικά στο κόστος αποθέματος και στο κόστος αναμονής στην ουρά. Άρα, ο χρόνος αδράνειας δεν είναι επιθυμητός στην παραγωγή.

Για το προϊόν i, $i = 1,...,N$, το μέγεθος παρτίδας είναί $Q_i = u_i T_i = d_i T$, ενώ το άθροισμα του μέγιστου επιπέδου αποθέματος και του μέγιστου επιπέδου παραγγελιών στην ουρά είναι $q_i + b_i = (u_i - d_i)T_i = d_i(T - T_i)$, το ποσοστό του χρόνου παραγωγής είναι $\lambda_i = \frac{d_i}{u_i} = \frac{T_i}{T}$. Ο περιορισμός της δυναμικότητας της παραγωγής μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$\frac{d_i}{U_i} \le \lambda_i, \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{T_i}{T} + \frac{\tau}{T} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{u_i} + \frac{\tau}{T} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i + \frac{\tau}{T} = 1$$

Επιπλέον, συνεπάγεται ότι το πρόβλημα έχει εφικτή λύση μόνον όταν

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{U_i} \le 1 - \frac{\tau}{T} \qquad \acute{\eta} \qquad T \ge \frac{\tau}{1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{U_i}} \equiv T^0$$

Όπου T^0 είναι η ελάχιστη περίοδος αναπαραγωγής τέτοιο ώστε να μπορεί να καλύπτεται η ζήτηση κατά τη διάρκεια των προετοιμασιών. Στη συνέχεια, αναλύεται η γενική περίπτωση όπου υπάρχουν χρόνοι προετοιμασίας και παραγγελίες στην ουρά.

Από το τριγωνικό προφίλ του αποθέματος δεν είναι δύσκολο να υπολογιστεί το συνολικό κόστος στη διάρκεια ενός κύκλου, το οποίου είναι

$$\begin{aligned} TC &= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{T}{2(T-T_i)d_i} \left(c_i^+ q_i^2 + c_i^- b_i^2 \right) + S \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{T}{2(T-T_i)d_i} \left(c_i^+ \left[(T-T_i)d_i - b_i^2 \right] + c_i^- b_i^2 \right) + S \right]. \end{aligned}$$

Επομένως, το μέσο κόστος είναι

$$\overline{TC} = \frac{TC}{T} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2(T-T_i)d_i} \left(c_i^+ \left[(T-T_i)d_i - b_i^2 \right] + c_i^- b_i^2 \right) + \frac{S}{T} \right].$$

Υπολογίζονται οι ποσότητες των προϊόντων στην ουρά b_i, μηδενίζοντας την μερική παραγωγό του μέσου κόστους ως προς b_i,

$$\frac{\partial \overline{TC}}{\partial b_i} = \frac{1}{2\left(T-T_i\right)d_i}\left(2c_i^+\left[b_i-\left(T-T_i\right)d_i\right]+2c_i^-b_i\right)=0$$

οπότε

$$b_i = \frac{c_i^+ d_i (T-T_i)}{c_i^+ + c_i^-}$$

Άρα το μέσο κόστος είναι

$$\Omega = \left\{1 \le j \le N : \frac{d_j c_j^+ c_j^-}{\left(c_j^+ + c_j^-\right)} = \max_{1\le i\le N}\left\{\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right\}\right\},\ \overline{TC} = \sum_{i=1}^{N}\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{2\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\left(1-\lambda_i\right)T + \frac{S}{T}.$$

Να σημειωθεί ότι

$$\frac{d_l c_l^+ c_l^-}{2\left(c_l^+ + c_l^-\right)} = \max_{1\le i\le N}\left\{\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{2\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right\},$$

το οποίο δείχνει ότι το προϊόν l έχει τον υψηλότερο δείκτη κόστους. Λόγω του ότι $\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{2\left(c_i^+ + c_i^-\right)} \succ 0,\text{για}\ i=1,\dots,N$ για οποιαδήποτε σταθερή τιμή του T, το ελάχιστο επιτυγχάνεται για λ_l όσο το δυνατόν μεγαλύτερο, ενώ, για $\lambda_i,\ i\neq l,$ είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Άρα ,

$$\lambda_i^* = \frac{d_i}{U_i},\qquad \text{για}\ i \neq l$$

$$\lambda_l^* = 1-\sum_{i\neq l}\lambda_i - \frac{\tau}{T} = 1-\sum_{i\neq l}\frac{d_i}{U_i} - \frac{\tau}{T}$$

Αντικαθιστώντας το λ_i με λ_i^*,

$$\overline{TC} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq l}^{N}\left(\frac{d_i}{U_i}\left(\frac{d_l c_l^+ c_l^-}{\left(c_l^+ + c_l^-\right)} - \frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right) + \frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right)T + \frac{d_l c_l^+ c_l^-}{2\left(c_l^+ + c_l^-\right)}\tau + \frac{S}{T},$$

και μηδενίζοντας την μερική παραγωγό του μέσου κόστους ως προς T

$$\frac{\partial \overline{TC}}{\partial T}=\frac{1}{2}\sum_{i\neq l}^{N}\left(\frac{d_i}{U_i}\left(\frac{d_l c_l^+ c_l^-}{\left(c_l^+ + c_l^-\right)}-\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right)+\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right)-\frac{S}{T^2}=0.$$

Η βέλτιστη περίοδος αναπαραγωγής T^*, και το μέσο κόστος $\overline{TC}^*$, είναι

$$T^*=\sqrt{\frac{2S}{\sum_{i\neq l}^{N}\left(\frac{d_i}{U_i}\left(\frac{d_l c_l^+ c_l^-}{\left(c_l^+ + c_l^-\right)}-\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right)+\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right)}},$$

και

$$\overline{TC}^*=\sqrt{2S\sum_{i\neq l}^{N}\left(\frac{d_i}{U_i}\left(\frac{d_l c_l^+ c_l^-}{\left(c_l^+ + c_l^-\right)}-\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right)+\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right)}+\frac{d_l c_l^+ c_l^-}{\left(c_l^+ + c_l^-\right)}\tau,$$

όπου ο ρυθμός παραγωγής και το μέγεθος παρτίδας δίνονται από

$$u_i^*=\frac{d_i}{\lambda_i^*}=\begin{cases} U_i, & \text{για } i\neq l \\ \dfrac{d_i}{1-\sum_{i\neq l}\dfrac{d_i}{U_i}-\dfrac{\tau}{T^*}} & \text{για } i=l \end{cases}$$

$$Q_i^*=d_i T^*,\qquad i=1,\ldots,N.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις δίνουν τα πλήρη χαρακτηριστικά του βέλτιστου κυκλικού επαναλαμβανόμενου προγράμματος. Επίσης το πρόγραμμα παραγωγής που δίνουν οι παραπάνω τρεις εξισώσεις είναι το βέλτιστο στην περίπτωση παραγωγής δύο προϊόντων.

Εάν δύο η περισσότερα προϊόντα έχουν τον ίδιο μέγιστο δείκτη κόστους, ορίζεται Ω ως το σύνολο των δεικτών αυτών των προϊόντων, το οποίο είναι

$$\Omega=\left\{1\leq j\leq N:\frac{d_j c_j^+ c_j^-}{\left(c_j^+ + c_j^-\right)}=\max_{1\leq j\leq N}\left\{\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}\right\}\right\},$$

τότε

$$\lambda_i^* = \frac{d_i}{U_i}, \ i \notin \Omega,$$

και το συνολικό ποσοστό των χρόνων παραγωγής για τα προϊόντα με τον υψηλότερο δείκτη κόστους υπολογίζεται ως,

$$\sum_{j \in \Omega} \lambda_j^* = 1 - \sum_{i \notin \Omega} \frac{d_i}{U_i} - \frac{\tau}{T^*}$$

το οποίο μπορεί να χρεωθεί σε αυτά τα προϊόντα αυθαίρετα όσο η συνθήκη εφιξιμότητας ικανοποιείται.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. Το ποσοστό του χρόνου παραγωγής για το προϊόν i ορίζεται από το δείκτη κόστους $\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)}$, ο οποίος είναι το μοναδιαίο κόστος αποθέματος και κόστος αναμονής στην ουρά, σταθμισμένο με τον ρυθμό ζήτησης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. Σε έναν κύκλο παραγωγής, η μηχανή κατανέμει το χρόνο παραγωγής στα προϊόντα ανάλογα με την κατάταξη των δεικτών κόστους. Για το μεγαλύτερο δυνατό χρονικό διάστημα, ο χρόνος παραγωγής θα κατανεμηθεί στο προϊόν που έχει τον υψηλότερο δείκτη κόστους. Συνεπώς, η μηχανή παράγει αυτό το προϊόν με ρυθμό χαμηλότερο, σε σύγκριση με τη δυναμικότητα της. Από την άλλη, η μηχανή παράγει όλα τα υπόλοιπα προϊόντα στα όρια της δυναμικότητας της λόγω του ότι οι δείκτες κόστους τους είναι μικρότεροι. Τα αποθέματα των προϊόντων με μικρό δείκτη κόστους αυξάνονται περισσότερο με την παραγωγή. Διαισθητικά, αυτό έχει νόημα λόγω του ότι τα προϊόντα με μικρό δείκτη κόστους είναι λιγότερο ακριβά, στην αποθήκευση ή όταν υπάρχει έλλειμμα. Ο δείκτης κόστους ξαναγράφεται ως

$$\frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)} = \frac{d_i}{\dfrac{1}{c_i^+} + \dfrac{1}{c_i^-}}.$$

$\forall \varepsilon \succ 0$, ισχύει

$$\frac{(d_i-\varepsilon)c_i^+c_i^-}{(c_i^++c_i^-)}<\frac{d_ic_i^+c_i^-}{(c_i^++c_i^-)}, \qquad \frac{d_i(c_i^+-\varepsilon)c_i^-}{(c_i^+-\varepsilon)+c_i^-}<\frac{d_ic_i^+c_i^-}{(c_i^++c_i^-)},$$

και

$$\frac{d_ic_i^+(c_i^--\varepsilon)}{c_i^++(c_i^--\varepsilon)}<\frac{d_ic_i^+c_i^-}{(c_i^++c_i^-)}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3. Το βέλτιστο μέγεθος παρτίδας είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του κόστους προετοιμασίας, το οποίο είναι παρόμοιο με αυτό του προτύπου οικονομικής ποσότητας παραγγελίας.

Οι παραπάνω λύσεις ισχύουν για τις περιπτώσεις όπου $T^*\geq T^0$. Εάν $T^*<T^0$, τότε , ορίζεται $T^*\equiv T^0$. Τότε το βέλτιστο μέσο κόστος είναι

$$\overline{TC}^*=\frac{1}{2}\sum_{i\neq l}^{N}\left(\frac{d_i}{U_i}\left(\frac{d_lc_l^+c_l^-}{(c_l^++c_l^-)}-\frac{d_ic_i^+c_i^-}{(c_i^++c_i^-)}\right)+\frac{d_ic_i^+c_i^-}{(c_i^++c_i^-)}\right)T^0+\frac{d_lc_l^+c_l^-}{2(c_l^++c_l^-)}\tau+\frac{S}{T^0}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. Η βέλτιστη περίοδος αναπαραγωγής T^*, και το μέσο κόστος $\overline{TC}^*$ στην περίπτωση που δεν επιτρέπεται η αναμονή προϊόντων στην ουρά, είναι

$$T^*=\sqrt{\frac{2S}{\sum_{i\neq l}^{N}\left(\frac{d_i}{U_i}(d_lc_l-d_ic_i)+c_id_i\right)}},$$

$$\overline{TC}^*=\sqrt{2S\sum_{i\neq l}^{N}\left(\frac{d_i}{U_i}(d_lc_l-d_ic_i)+c_id_i\right)}+\frac{1}{2}c_ld_l\tau,$$

$$\lambda_i^* = \frac{d_i}{U_i}, \qquad \text{για } i \neq l$$

$$\lambda_l^* = 1 - \sum_{i \neq l} \frac{d_i}{U_i} - \frac{\tau}{T^*}$$

όπου

$$l = \left\{ k : c_k d_k = \max_{1 \leq i \leq N} \{c_i d_i\} \right\},$$

$T^* \geq T^0$. Εάν $T^* < T^0$, τότε , ορίζεται $T^* \equiv T^0$. Τότε το βέλτιστο μέσο κόστος είναι

$$\overline{TC}^* = \sum_{i \neq l}^{N} \frac{1}{2} \left(\frac{d_i}{U_i} \left(d_l c_l - d_i c_i \right) + c_i d_i \right) T^0 + \frac{1}{2} c_l d_l \tau + \frac{S}{T^0}.$$

Να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα των Buzacott και Ozkarahan (1983) μπορούν να ληφθούν άμεσα από τα πορίσματα 1 και 2.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3. Η βέλτιστη περίοδος αναπαραγωγής T^*, και το μέσο κόστος $\overline{TC}^*$ στην περίπτωση μηδενικών χρόνων προετοιμασίας, είναι

$$T^* = \sqrt{\frac{2S}{\sum_{i \neq l}^{N} \left(\frac{d_i}{U_i} \left(\frac{d_l c_l^+ c_l^-}{\left(c_l^+ + c_l^-\right)} - \frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)} \right) + \frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)} \right)}},$$

και

$$\overline{TC}^* = \sqrt{2S \sum_{i \neq l}^{N} \left(\frac{d_i}{U_i} \left(\frac{d_l c_l^+ c_l^-}{\left(c_l^+ + c_l^-\right)} - \frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)} \right) + \frac{d_i c_i^+ c_i^-}{\left(c_i^+ + c_i^-\right)} \right)},$$

$$\lambda_i^* = \frac{d_i}{U_i}, \qquad \text{για } i \neq l$$

$$\lambda_l^* = 1 - \sum_{i \neq l} \frac{d_i}{U_i} - \frac{\tau}{T^*}$$

όπου l το προϊόν με τον υψηλότερο δείκτη κόστους.

4.1.3 Σύγκριση με την μέθοδο του Zipkin (1991)

Η βασική διαφορά ανάμεσα στην προσέγγιση των Feng Cheng, Houmin Yan, και Jun Yang (1998) και του κλασικού προτύπου οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού είναι ότι στο πρώτο επιτρέπεται η ρύθμιση του ρυθμού παραγωγής από το μηδέν μέχρι τα όρια της δυναμικότητας της μηχανής. Από την οπτική γωνία της μοντελοποίησης το πρώτο πρότυπο είναι μια γενικευμένη μορφή του δεύτερου. Λόγω του ότι ο χώρος των λύσεων του προβλήματος οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού είναι υποσύνολο του χώρου των λύσεων του προτύπου που ανέπτυξαν οι Feng Cheng, Houmin Yan, και Jun Yang (1998), οι λύσεις του πρώτου δεν μπορεί να είναι καλύτερες.

Στην εργασία του Zipkin (1991) λαμβάνονται οι βέλτιστες λύσεις για το πρόβλημα οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού. Θεωρείται ότι υπάρχει χρόνος προετοιμασίας και κόστος προετοιμασίας, δεν επιτρέπονται παραγγελίες αναμονής στην ουρά, και ο ρυθμός παραγωγής μπορεί να είναι είτε μηδέν είτε στο όριο της δυναμικότητας της μηχανής.

Υπάρχει συγκεκριμένη διαδικασία που αναπτύχθηκε από τον Zipkin (1991) που λύνει το συγκεκριμένο πρόβλημα. Στο πρώτο βήμα επιλέγεται η συχνότητα $n_i, i = 1,...,N$ όπου το προϊόν προγραμματίζεται να παραχθεί μέσα στον κύκλο, όπου n_i είναι μη αρνητική ακέραια δύναμη του 2. Το βέλτιστο μέσο κόστος είναι

$$\overline{TC}^{*}_{ELSP} = \sqrt{2\sum_{i=1}^{N} n_i S_i \sum_{i=1}^{N}\left[\left(1-\frac{d_i}{U_i}\right)\frac{c_i d_i}{n_i}\right]}.$$

υπό τη συνθήκη ότι ισχύει

$$T^*_{ELSP} = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N} n_i S_i.}{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(1-\frac{d_i}{U_i}\right)\frac{c_i d_i}{n_i}\right]}} \geq T^0 = \frac{\tau}{1-\sum_{i=1}^{N} n_i \frac{d_i}{U_i}}$$

Το βέλτιστο μέσο κόστος είναι το καλύτερο αποτέλεσμα του βήματος 1. Στο βήμα 2, τα n_i είναι προσαρμοσμένα σε δυνάμεις του δύο για να ελεγχθεί εάν το μέσο κόστος μπορεί να μειωθεί περισσότερο 0.5%. Σε 160 τυχαία επιλεγμένων προβλημάτων, τα 149 προβλήματα έφτασαν στο τελικό αποτέλεσμα στο βήμα 1, το οποίο υπονοεί ότι η επαναληπτική διαδικασία δίνει οριακές βελτιώσεις για την πλειοψηφία των προβλημάτων.

Τα αποτελέσματα των 2 προτύπων συγκρίνονται για τις ακόλουθες περιπτώσεις : την περίπτωση 2 προϊόντων, την περίπτωση πολλών προϊόντων υπό κυκλικό επαναλαμβανόμενο πρόγραμμα, και την περίπτωση προγράμματος πολλών προϊόντων μη κοινού κύκλου (non-rotation schedule).

Το πρόγραμμα στην περίπτωση του συστήματος 2 προϊόντων μπορεί να είναι μόνο κυκλικό επαναλαμβανόμενο πρόγραμμα, το οποίο σημαίνει $n_i = 1\ , i = 1,...,N$. Στη συνέχεια αυτής της ενότητας, υποτίθεται ότι ισχύει $c_2 d_2 \succ c_1 d_1$. Στην περίπτωση όπου $c_2 d_2 \prec c_1 d_1$ μπορεί να υιοθετηθεί παρόμοια μέθοδος.

ΛΗΜΜΑ. *Για το σύστημα 2 προϊόντων, το πρόγραμμα παραγωγής που δίνει το πρότυπο των Feng Cheng, Houmin Yan, και Jun Yang (1998), βελτιώνει το πρόγραμμα οικονομικής παρτίδας και προγραμματισμού, το οποίο σημαίνει ότι* $\overline{TC}^* \leq \overline{TC}^*_{ELSP}$ *όπου*

$$\overline{TC}^* = \begin{cases} \sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1 d_1 + \left(\frac{d_1}{U_1}\right)c_2 d_2\right]} + \frac{1}{2}c_2 d_2 \tau, & T^* \geq T^0 \\ \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1 d_1 + \left(\frac{d_1}{U_1}\right)c_2 d_2\right]T^0 + \frac{1}{2}c_2 d_2 \tau + \frac{S}{T^0} & T^* \prec T^0 \end{cases}$$

$$\overline{TC}^{*}_{ELSP}=\begin{cases}\sqrt{2S\left[\left(1-\dfrac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(1-\dfrac{d_2}{U_2}\right)c_2d_2\right]}, & T^{*}_{ELSP}\geq T^{0}\\ \dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(1-\dfrac{d_2}{U_2}\right)c_2d_2\right]T^{0}+\dfrac{S}{T^{0}} & T^{*}_{ELSP}\prec T^{0}\end{cases}$$

Τα T^{*},T^{*}_{ELSP} και T^{0} είναι

$$T^{*}=\sqrt{\frac{2S}{\left(1-\dfrac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(\dfrac{d_1}{U_1}\right)c_2d_2}},$$

$$T^{*}_{ELSP}=\sqrt{\frac{2S}{\left(1-\dfrac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(1-\dfrac{d_2}{U_2}\right)c_2d_2}},$$

$$T^{0}=\frac{\tau}{1-\dfrac{d_1}{U_1}-\dfrac{d_2}{U_2}}.$$

Το παραπάνω λήμμα θα αποδειχθεί σε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με την σχέση των T^{*},T^{*}_{ELSP} και T^{0}. Να σημειωθεί ότι $T^{*}\succ T^{*}_{ELSP}$ εάν $\tau\succ 0$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: $T^{*}_{ELSP}\geq T^{0}$. Το ελάχιστο μέσο κόστος είναι

$$\overline{TC}^{*}=\sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(\frac{d_1}{U_1}\right)c_2d_2\right]}+\frac{1}{2}c_2d_2\tau.$$

Θα πρέπει να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(\frac{d_1}{U_1}\right)c_2d_2\right]}+\frac{1}{2}c_2d_2\tau\leq\sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(1-\frac{d_2}{U_2}\right)c_2d_2\right]}$$

το οποίο είναι

$$\tau\sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(\frac{d_1}{U_1}\right)c_2d_2\right]}+\frac{1}{4}c_2d_2\tau^2\le 2S\left(1-\frac{d_1}{U_1}-\frac{d_2}{U_2}\right).$$

Από τον περιορισμό επιτευξιμότητας γνωρίζουμε ότι,

$$1-\frac{d_1}{U_1}-\frac{d_2}{U_2}\ge\frac{\tau}{\sqrt{\dfrac{2S}{\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(1-\frac{d_2}{U_2}\right)c_2d_2}}}.$$

Άρα αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$2\sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(\frac{d_1}{U_1}\right)c_2d_2\right]}+\frac{1}{2}c_2d_2\tau\le 2\sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(1-\frac{d_2}{U_2}\right)c_2d_2\right]}$$

Με την ίδια μέθοδο, η παραπάνω σχέση μπορεί να επεκταθεί ως

$$2^{2k-1}\sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(\frac{d_1}{U_1}\right)c_2d_2\right]}+\frac{1}{2}c_2d_2\tau\le 2^{2k-1}\sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(1-\frac{d_2}{U_2}\right)c_2d_2\right]}$$

όπου ο δείκτης k είναι ο αριθμός των επαναλήψεων. Έστω $k\to\infty$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(\frac{d_1}{U_1}\right)c_2d_2\right]}\le\sqrt{2S\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1d_1+\left(1-\frac{d_2}{U_2}\right)c_2d_2\right]}.$$

Παρατηρείται ότι $\frac{d_1}{U_1}\le 1-\frac{d_2}{U_2}$, η παραπάνω ανισότητα είναι έγκυρη.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: $T^*\prec T^0$. hold

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1 d_1+\left(\frac{d_1}{U_1}\right)c_2 d_2\right]T^0+\frac{1}{2}c_2 d_2 \tau+\frac{S}{T^0}$$
$$\le\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1 d_1+\left(1-\frac{d_2}{U_2}\right)c_2 d_2\right]T^0+\frac{S}{T^0}.$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύ αυτόματα επειδή $T^0=\tau\left(1-d_1/U_1-d_2/U_2\right)$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: $T^*_{ELSP}\prec T^0\le T^*$. Σε αυτή την περίπτωση, είναι φανερό ότι η λύση των Feng Cheng, Houmin Yan, και Jun Yang (1998) είναι καλύτερη σε σχέση με τα αποτελέσματα της εργασίας του Zipkin (1991).

Στη συνέχεια εξετάζεται η σχέση των περιόδων αναπαραγωγής και των μεγεθών παρτίδας που δίνουν οι παραπάνω δύο προσεγγίσεις. Επίσης συγκρίνονται τα ποσοστά των χρόνων τα οποία δεσμεύονται από συγκεκριμένα προϊόντα στον κύκλο παραγωγής για τις δύο προσεγγίσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: $T^*\prec T^0$. Σε αυτή την περίπτωση η συνθήκη επιτεύξιμοτητας δεν ικανοποιείται από τις δύο προσεγγίσεις. Λαμβάνεται $T^*=T^*_{ELSP}=T^0$, και $T_i=(d_i/U_i)T^0$. Επομένως, οι χρόνοι αναπαραγωγής και το ποσοστό των χρόνων του δεσμεύονται από συγκεκριμένα προϊόντα είναι ίσα και για τις δύο προσεγγίσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: $T^*_{ELSP}\ge T^0$.

$$T^*=\sqrt{\frac{2S}{\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)c_1 d_1+\left(\frac{d_1}{U_1}\right)c_2 d_2}},$$
$$T_1^*=\frac{d_1}{U_1}T^*,$$
$$T_2^*=\left(1-\frac{d_1}{U_1}\right)T^*-\tau$$

Έτσι, λαμβάνεται

$$\frac{T_1^*}{T^*} = \frac{d_1}{U_1}, \ \frac{T_2^*}{T^*} = 1 - \frac{d_1}{U_1} - \frac{\tau}{T^*},$$

και

$$T_{ELSP}^* = \sqrt{\frac{2S}{\left(1 - \frac{d_1}{U_1}\right) c_1 d_1 + \left(1 - \frac{d_2}{U_2}\right) c_2 d_2}},$$

$$T_{1_{ELSP}}^* = \frac{d_1}{U_1} T_{ELSP}^*,$$

$$T_{2_{ELSP}}^* = \left(1 - \frac{d_1}{U_1}\right) T_{ELSP}^* - \tau \ .$$

Επομένως,

$$\frac{T_{1_{ELSP}}^*}{T_{ELSP}^*} = \frac{d_1}{U_1}, \ \frac{T_{2_{ELSP}}^*}{T_{ELSP}^*} = 1 - \frac{d_1}{U_1} - \frac{\tau}{T_{ELSP}^*}.$$

Εύκολα συμπεραίνεται

$$T^* \geq T_{ELSP}^*, \ \frac{T_1^*}{T^*} = \frac{T_{1_{ELSP}}^*}{T_{ELSP}^*} \text{ και } \frac{T_2^*}{T^*} \geq \frac{T_{2_{ELSP}}^*}{T_{ELSP}^*}$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει για $d_1 / U_1 + d_2 / U_2 = 1$, και η τελευταία ισότητα ισχύει για $\tau = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4. Από την παραπάνω σύγκριση συμπεραίνεται ότι η περίοδος αναπαραγωγής που προκύπτει από την προσέγγιση των Feng Cheng, Houmin Yan, και Jun Yang (1998) είναι μεγαλύτερη σε σχέση με του Zipkin (1991). Σύμφωνα με την πρώτη, το προϊόν με τον υψηλότερο δείκτη κόστους θα χρεωθεί με μεγαλύτερο χρόνο του κύκλου παραγωγής, ενώ το προϊόν με τον μικρότερο δείκτη κόστους θα κατανεμηθεί το ίδιο ποσοστό του χρόνου παραγωγής με αυτό που δίνει το πρότυπο οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5. Τα μεγέθη των παρτίδων που λαμβάνονται σύμφωνα με την προσέγγιση των Feng Cheng, Houmin Yan, και Jun Yang (1998) είναι μεγαλύτερα σε σχέση με του Zipkin (1991) επειδή η περίοδος αναπαραγωγής είναι μεγαλύτερη. Παρόλα αυτά ο λόγος Q_1^* / Q_2^* είναι ίδιος.

Να σημειωθεί ότι το μέγιστο αυπόθεμα είναι $q_i^* = d_i(T - T_i)$, έτσι

$$q_1^* = d_1\left(1 - \frac{d_1}{U_1}\right)T^*, \qquad q_2^* = d_2\left(\frac{d_1}{U_1}T^* + \tau\right),$$

$$q_{1_{ELSP}}^* = d_1\left(1 - \frac{d_1}{U_1}\right)T_{ELSP}^*, \qquad q_{2_{ELSP}}^* = d_2\left(\frac{d_1}{U_1}T_{ELSP}^* + \tau\right)$$

Ανακαλέστε ότι $T^* \geq T_{ELSP}^*$. Εάν η συνθήκη εφιξιμότητας ικανοποιείται, τότε

$$\frac{q_2^*}{q_{2_{ELSP}}^*} \leq \frac{q_1^*}{q_{1_{ELSP}}^*}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 6. Το μέγιστο επίπεδο αποθέματος του προϊόντος με τον υψηλότερο δείκτη κόστους που προκύπτει σύμφωνα με την προσέγγιση των Feng Cheng, Houmin Yan, και Jun Yang (1998) είναι σχετικά χαμηλότερο.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το πρόβλημα με περισσότερα από δύο προϊόντα. Αρχικά συζητείται το πρόβλημα του κυκλικού επαναλαμβανόμενο προγραμματισμού. Θυμηθείτε ότι σε ένα κυκλικό επαναλαμβανόμενο πρόγραμμα, το κάθε προϊόν παράγεται μόνο μια φορά μέσα στον κύκλο παραγωγής, το οποίο σημαίνει ότι $n_i = 1, \ \forall i$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4. Το κυκλικό επαναλαμβανόμενο πρόγραμμα όπου δεν επιτρέπεται η αναμονή προϊόντων στην ουρά που προκύπτει σύμφωνα με την προσέγγιση των Feng Cheng, Houmin Yan, και Jun Yang (1998), είναι καλύτερο σε σχέση με αυτό του κλασικού προτύπου οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού του, το οποίο σημαίνει $\overline{TC}^* \leq \overline{TC}_{ELSP}^*$, όπου

$$\overline{TC}^* = \begin{cases} \sqrt{2S\sum_{i\neq l}\left[\left(\frac{d_i}{U_i}\right)\left(c_l d_l - c_i d_i\right) + c_i d_i\right]} + \frac{1}{2}c_l d_l \tau, & T^* \geq T^0 \\ \sum_{i\neq l}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d_i}{U_i}\right)\left(c_l d_l - c_i d_i\right) + c_i d_i\right]T^0 + \frac{1}{2}c_l d_l \tau + \frac{S}{T^0} & T^* \prec T^0 \end{cases}$$

και $c_l d_l = \max_{1\leq i\leq N}\{c_i d_i\}$,

$$\overline{TC}^*_{ELSP} = \begin{cases} \sqrt{2S\sum_{i=1}^{N}\left[\left(1-\frac{d_i}{U_i}\right)c_i d_i\right]}, & T^*_{ELSP} \geq T^0 \\ \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{d_i}{U_i}\right)c_i d_i\right]T^0 + \frac{S}{T^0} & T^*_{ELSP} \prec T^0 \end{cases}$$

όπου

$$T^*_{ELSP} = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N} n_i S_i.}{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(1-\frac{d_i}{U_i}\right)\frac{c_i d_i}{n_i}\right]}} \geq T^0 = \frac{\tau}{1-\sum_{i=1}^{N} n_i \frac{d_i}{U_i}},$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2S}{2S\sum_{i\neq l}\left[\left(\frac{d_i}{U_i}\right)\left(c_l d_l - c_i d_i\right) + c_i d_i\right]}}$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή που ακολουθήθηκε στην προτυποποίηση συστήματος πολλών προϊόντων.

Στη συνέχεια συζητείται το πρόβλημα του μη επαναλαμβανόμενου προγραμματισμού. Στον μη επαναλαμβανόμενο προγραμματισμό, $\exists i : n_i \succ 0$. Το μέσο ετήσιο κόστος σύμφωνα με το πρότυπο όπου δεν επιτρέπεται η αναμονή προϊόντων στην ουρά των Feng Cheng, Houmin Yan, και Jun Yang (1998) γίνεται

$$\overline{TC}^* = \sqrt{2\sum_{i=1}^{N} n_i S_i \sum_{i\neq l}\left[\left(\frac{d_i}{U_i}\right)\left(\frac{c_l d_l}{n_l} - \frac{c_i d_i}{n_i}\right) + \frac{c_i d_i}{n_i}\right]} + \frac{c_l d_l}{2n_l}\tau$$

όπου

$$\frac{c_l d_l}{n_l} = \max_{1 \le i \le N} \left\{ \frac{c_i d_i}{n_i} \right\}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η παραπάνω σχέση δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την

$$\overline{TC}^{*}_{ELSP} = \sqrt{2 \sum_{i=1}^{N} n_i S_i \sum_{i=1}^{N} \left[\left(1 - \frac{d_i}{U_i} \right) \frac{c_i d_i}{n_i} \right]}.$$

Επιπλέον, μπορεί να υιοθετηθεί ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε από τον Zipkin (1991). Αρχικά, ορίζονται $n_i = 1,\ i = 1, ..., N$, και υπολογίζονται τα αποτελέσματα του $\overline{TC}^{*}$. Στη συνέχεια ρυθμίζονται τα n_i και ξανά-υπολογίζεται το ελάχιστο μέσο κόστος. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι η μείωση του ελαχίστου μέσου κόστους από την ρύθμιση να γίνει μικρότερη από το 0.5%.

4.2 Προσέγγιση του Gallego (1990)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η προσέγγιση του Gallego (1990) όπου καθορίζεται μια κυκλική ακολουθία παραγωγής χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των Gallego and Roundy (1992) για το πρόβλημα προγραμματισμού οικονομικής παρτίδας παραγωγής με κόστη αναμονής πελατών στην ουρά (*backorder costs*), παρουσιάζοντας μία ευρετική μέθοδο προσομοίωσης για τον καθορισμό των αποθεμάτων ασφαλείας.

4.2.1 Εισαγωγή

Θεωρείται το πρόβλημα προγραμματισμού εργασιών σε μία μηχανή η οποία μπορεί να παράγει μόνο ένα προϊόν κάθε φορά. Απαιτείται προετοιμασία της μηχανής, το οποίο μεταφράζεται σε κόστος σε χρήμα και χρόνο, για την παραγωγή κάποιου προϊόντος, κατά τη διάρκεια της οποίας τα αποθέματα των υπόλοιπων προϊόντων εξαντλούνται λόγο της ζήτηση. Ο αντικειμενικός σκοπός είναι να προγραμματιστεί η μηχανή με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο μακροπρόθεσμο κόστος των εκτελούμενων προετοιμασιών, του αποθέματος και του κόστους αναμονής στην ουρά.

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται το πρόβλημα όπου η ζήτηση είναι τυχαία, και επιτρέπεται η αναμονή προϊόντων στην ουρά (Guillermo Gallego 1990). Ωστόσο, γίνεται η υπόθεση ότι οι προσδοκώμενοι ρυθμοί ζήτησης είναι σταθερές οι οποίες εξαρτώνται από το κάθε προϊόν και ότι οι παραγγελίες αναμονής στην ουρά χρεώνονται με έναν γραμμικά χρονικά σταθμισμένο ρυθμό. Στη συνέχεια αναπτύσσεται ένα αποδοτικό εργαλείο προγραμματισμού σε τρία βήματα: κυκλικό πρόγραμμα στόχος βασισμένο στις προσδοκώμενες ζητήσεις, πολιτική ελέγχου σύμφωνα με την οποία τα αποθέματα να διατηρούνται στο επίπεδο του στόχου που έχει τεθεί, και αποθέματα ασφαλείας για την εξασφάλιση ενάντια στην τυχαιότητα (randomness). Το πρόγραμμα στόχος, η πολιτική ελέγχου και τα αποθέματα ασφαλείας μπορούν να προϋπολογιστούν, ούτως ώστε το εργαλείο να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πραγματικό χρόνο. Υπάρχει εφαρμογή σε παράδειγμα.

Η βιβλιογραφία αφθονεί σε εργασίες που αφορούν το πρόβλημα οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού (ELSP). Σύμφωνα με αυτό το πρόβλημα, μία τέλεια αξιόπιστη μηχανή υποτίθεται ότι παράγει τα προϊόντα της με σταθερό ρυθμό παραγωγής, οποίος εξαρτάται από το κάθε προϊόν. Οι χρόνοι και τα κόστη προετοιμασίας υποτίθεται ότι είναι σταθερές και εξαρτώνται από το κάθε προϊόν Οι ρυθμοί ζήτησης είναι σταθερές και εξαρτώνται από το κάθε προϊόν, ενώ δεν επιτρέπονται οι ελλείψεις. Ο αντικειμενικός στόχος αυτού του προβλήματος είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου μακροπρόθεσμου κόστους αποθέματος και προετοιμασίας.

Η έμφαση της έρευνας για το οικονομικό πρόβλημα μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού εστιάζεται στην εύρεση αποδοτικών κυκλικών προγραμμάτων. Στο κυκλικό πρόγραμμα παραγωγής, η ακολουθία των προϊόντων επαναλαμβάνεται εις αεί. Ο κύκλος αναπαραγωγής καθορίζεται από τους χρόνους προετοιμασίας, τους χρόνους παραγωγής και τους χρόνους αδράνειας της μηχανής. Στο κυκλικό πρόγραμμα η θέση του αποθέματος επαναλαμβάνεται σε κάθε κύκλο. Κλειδί αυτής της ιδιότητας είναι υπόθεση ντετερμινιστικών ζητήσεων.

Ωστόσο στην πράξη η ζήτηση είναι τυχαία. Επιπλέον, η υπόθεση ότι δεν επιτρέπεται η αναμονή παραγγελιών στην ουρά είναι μάλλον μη ρεαλιστική εφόσον υπάρχει τυχαιότητα. Επομένως η παρουσία τυχαιότητας εμποδίζει την ύπαρξη κυκλικού προγράμματος. Παρόλα αυτά, κυκλικά προγράμματα βασισμένα στις προσδοκώμενες ζητήσεις, με πεπερασμένο κόστος αναμονής παραγγελιών στην ουρά, αποτελούν την βάση του εργαλείου προγραμματισμού που αναπτύχθηκε από τον Guillermo Gallego (1990).

Υποθέσεις που γίνονται σε αυτή την ενότητα είναι ακριβώς οι ίδιες με εκείνες του προτύπου οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού εκτός του ότι η ζήτηση είναι τυχαία και ότι επιτρέπεται η αναμονή παραγγελιών στην ουρά. Η υπόθεση αναμονής παραγγελιών στην ουρά επιλέγεται για το λόγο ότι ανταποκρίνεται περισσότερο στην πραγματικότητα, όπου υπάρχει τυχαιότητα και τίθεται ένα κριτήριο για λιγότερες χαμένες πωλήσεις. Να σημειωθεί ότι το πρότυπο Gallego (1990) γίνεται ίδιο με το πρότυπο ELSP όταν οι τυχαίες μεταβλητές εκφυλίσσονται και όταν το κόστος αναμονής προϊόντων στην ουρά γίνεται άπειρο.

Στην εργασία των Gallego και Roundy (1988) τροποποιείται το πρότυπο ELSP έτσι ώστε να επιτρέπεται η αναμονή προϊόντων στην ουρά. Η διαδικασία που ακολουθείται συνδυάζει μοντέρνες ευρετικές μεθόδους για το πρόβλημα οικονομικού μεγέθους παρτίδας και προγραμματισμού ELSP οι οποίες καταλήγουν σε βέλτιστο ή σχεδόν βέλτιστο κυκλικό πρόγραμμα. Ως πρώτο βήμα εφαρμόσετε η διαδικασία αυτή, όπου οι ρυθμοί ζήτησης αντικαθίστανται από τις προσδοκίες τους. Το κυκλικό πρόγραμμα που προκύπτει ονομάζεται *κυκλικό πρόγραμμα στόχος*.

Στη συνέχεια η ενότητα αυτή οργανώνεται ως ακολούθως. Αρχικά εισάγονται οι συμβολισμοί, οι οποίοι χαρακτηρίζουν τα κυκλικά προγράμματα υπό σταθερή ζήτηση και δείχνεται ότι οι λόγοι των παραγγελιών στην ουρά προς το άθροισμα του κόστους παραγγελιών στην ουρά και του αποθέματος είναι ίσοι με το ποσοστό των χρόνων όπου τα προϊόντα υπάρχουν σε απόθεμα. Σε ακόλουθη φάση, παρουσιάζεται το πρόβλημα επαναφοράς του προγράμματος στόχος, μετά από μια απρόσμενη κατάσταση. Η πολιτική επαναφοράς χρησιμοποιείται για την διατήρηση των αποθεμάτων κοντά στους στόχους του προγράμματος συν τα αποθέματα ασφαλείας. Αναζητείται η διαμόρφωση των αποθεμάτων ασφαλείας τα οποία ελαχιστοποιούν το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος. Στη βέλτιστη κατάσταση το προσδοκώμενο ποσοστό του χρόνου που ένα προϊόν είναι σε απόθεμα είναι και πάλι ο λόγος των παραγγελιών προς το άθροισμα του κόστους αποθέματος και αναμονής στην ουρά. Τέλος, γίνεται εφαρμογή των παραπάνω σε παράδειγμα.

4.2.2 Συμβολισμοί

Στην ενότητα αυτή οι ζητήσεις αντικαθίστανται από τις προσδοκίες τους. Ορίζεται i ως ο δείκτης για κάθε προϊόν για $i = 1,...,m$, και

$d_i^{'}$ = προσδοκώμενος ρυθμός ζήτησης για κάθε προϊόν i,

$p_i^{'}$ = ο ρυθμός παραγωγής για το προϊόν i,

$h_i^{'}$ = κόστος αποθέματος για το προϊόν i,

$b_i^{'}$ = το κόστος αναμονής στην ουρά του προϊόντος i,

s_i = χρόνος προετοιμασίας για το προϊόν i,

a_i = κόστος προετοιμασίας για το προϊόν i.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ξανά ορίζονται οι μονάδες για κάθε προϊόν ώστε όλοι οι προσδοκώμενοι ρυθμοί ζήτησης να είναι μονάδα. Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας $d_i \equiv d_i^{'} / d_i^{'} = 1,\ p_i \equiv p_i^{'} / d_i^{'},\ h_i \equiv h_i^{'} d_i^{'}$, και $b_i \equiv b_i^{'} d_i^{'}$. Ο μετασχηματισμός δημιουργεί πολλά ισοδύναμα προβλήματα σε ένα το οποίο είναι ευκολότερο. Σημειώνετε ότι $r_i \equiv 1/ p_i = d_i^{'} / p_i^{'}$ Είναι το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου (εκτός των προετοιμασιών) όπου η μηχανή είναι δεσμευμένη για την παραγωγή του προϊόντος i. Επομένως $\kappa = 1 - \sum_{i=1}^{m} r_i$. Είναι το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που είναι διαθέσιμο για προετοιμασίες.

Αν $\kappa = 0$ Η ζήτηση καλύπτεται οριακά από την δυναμικότητα της μηχανής, ενώ δεν υπάρχει διαθέσιμος χρόνος για προετοιμασίες. Για το λόγο αυτό, υποτίθεται ότι $\kappa > 0$. Ορίζονται τα αντίστοιχα διανύσματα με διάσταση m, **d**=**e**, **p**, **h**, **b**, **s**, **a** και **r**, όπου **e** είναι ένα διάνυσμα με μονάδες. Το κυκλικό πρόγραμμα περιγράφεται πλήρως από τέσσερα διανύσματα, το διάνυσμα ακολουθίας **f**, αρχικών αποθεμάτων **w**, χρόνων παραγωγής και αδράνειας **u** και **t**. Κάθε προϊόν κατέχει τουλάχιστον μια θέση μέσα στην ακολουθία, οπότε τα **f**, **t** και **u** είναι διανύσματα με διάσταση n όπου $n \geq m$.

Στην αρχή του κύκλου οι τιμές των αποθεμάτων δίνονται από το διάνυσμα w. Ο κύκλος αρχίζει αδρανοποιώντας την μηχανή για u_1 χρονικές μονάδες, στη συνέχεια η μηχανή προετοιμάζεται για την παραγωγή του προϊόντος στην πρώτη θέση της ακολουθίας και παράγεται για t_1 χρονικές μονάδες. Η μηχανή χρεώνεται με τις περιόδους παραγωγής, προετοιμασίας, και αδράνειας για κάθε θέση της ακολουθίας. Αν $n = m$, τότε το κυκλικό πρόγραμμα ονομάζεται κυκλικός επαναλαμβανόμενο πρόγραμμα. Η περίοδος αναπαραγωγής T είναι ίση με το άθροισμα των χρόνων προετοιμασίας των χρόνων παραγωγής και των χρόνων αδράνειας.

Για κάθε $\kappa \succ 0$ και για οποιαδήποτε ακολουθία παραγωγής **f** τα διανύσματα **w**, **t**, και **u** τα οποία μαζί με το **f** καθορίζουν το κυκλικό πρόγραμμα. Βλέπε Gallego και Roundy (1988), και Dobson (1987) για αντίστοιχα αποτελέσματα για το οικονομικό μέγεθος παρτίδας και προγραμματισμού. Επιπλέον υπάρχει αλγόριθμος παραμετρικού τετραγωνικού προγραμματισμού οποίος βρίσκει τις τιμές των **w**, **t** και **u.** Το κυκλικό πρόγραμμα που προκύπτει ονομάζεται βέλτιστο **f**-κυκλικό πρόγραμμα. Το παραπάνω είναι αληθές ακόμη και στην περίπτωση όπου οι χρόνοι παραγωγής εξαρτώνται από την ακολουθία. Βλέπε Gallego και Roundy (1988) και Zipkin (1987) για αντίστοιχα αποτελέσματα που αφορούν το οικονομικό μέγεθος παρτίδας και προγραμματισμού.

Ορίζεται το επίπεδο εξυπηρέτησης για κάθε προϊόν ως το ποσοστό του χρόνου για το οποίο είναι σε απόθεμα. Το ακόλουθο λήμμα βοηθάει στη διαμόρφωση του επιπέδου εξυπηρέτησης όταν τα προϊόντα ακολουθούν το **f**-κυκλικό πρόγραμμα. Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $x^+ = \max\{0, x\}$, και $x^- = \max\{0, -x\}$.

ΛΗΜΜΑ 4.1. *Ορίζεται* $\mu(t)$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση Lebesgue στο διάστημα* $[0, T]$ *Αν τα* b *και* h *είναι θετικές σταθερές τότε ορίζεται*

$$\Gamma(y) = h\int_0^T \left(\mu(t) + y\right)^+ dt + b\int_0^T \left(\mu(t) + y\right)^- dt.$$

Τότε η $\Gamma(y)$ υπάρχει, είναι συνεχής και κυρτή. Επιπλέον η $\Gamma(y)$ έχει ελάχιστο y^* ικανοποιώντας την

$$\Gamma'_-\left(y^*\right) \le 0 \le \Gamma'_+\left(y^*\right) \tag{4.1}$$

όπου

$$\Gamma'_-\left(y\right) = h\int_0^T 1\left\{t:\left(\mu(t)+y \succ 0\right)\right\}dt - b\int_0^T 1\left\{t:\left(\mu(t)+y \le 0\right)\right\}dt$$

και

$$\Gamma'_+\left(y\right) = h\int_0^T 1\left\{t:\left(\mu(t)+y \ge 0\right)\right\}dt - b\int_0^T 1\left\{t:\left(\mu(t)+y \prec 0\right)\right\}dt$$

είναι η δεξιά και η αριστερή παραγωγός της Γ στο y. Επιπλέον, εάν η $\mu(t)$ δεν είναι πουθενά επίπεδη, τότε η $\Gamma(y)$ είναι *συνεχώς διαφορήσιμη και $y^* = 0$ ελαχιστοποιεί την $\Gamma(y)$ εάν και μόνο εάν η $\mu(t)$είναι θετική στο σύνολο $bT/(b+h.)$*

Εάν ο βαθμός επιπεδότητας χαλαρώσει τότε

$$y^* = \inf\left\{y:\int_0^T 1\left\{t:\left(\mu(t)+y \ge 0\right)\right\}dt \ge \frac{bT}{(b+h)}\right\}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.2. *Τα επίπεδα εξυπηρέτησης για το βέλτιστο **f**-κυκλικό πρόγραμμα είναι τα $b_i/(b_i+h_i)$, $i=1,...,m$.*

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένας εναλλακτικός χαρακτηρισμός του κυκλικού προγράμματος ο οποίος είναι χρήσιμος για τη συνέχεια. Ορίζεται γ_j (και αντίστοιχα δ_j), το απόθεμα του προϊόντος το οποίο παράγεται στη θέση j ακριβώς πριν (και αντίστοιχα ακριβώς μετά) τον κύκλο παραγωγής, ενώ γ και δ τα αντίστοιχα διανύσματα. Να σημειωθεί ότι η γνώση των **f**, **t**, **u**, **w** είναι ισότιμη με τη γνώση των **f**, γ, δ, **w**.

Ο εκτεταμένος κανόνας μηδενικής διακοπής EZSR (Extended Zero Switch rule) [βλέπε Gallego και Roundy (1988)] ικανοποιείται όταν $\gamma \leq 0$ και $\delta \geq 0$, δηλαδή αρχίζει η παραγωγή όταν το επίπεδο αποθέματος είναι ≥ 0 και δεν σταματάει ποτέ όταν το επίπεδο αποθέματος είναι. ≤ 0. Ο παραπάνω κανόνας EZSR μετατρέπεται στον ZSR $(\gamma = 0)$ όταν το κόστος αναμονής στην ουρά γίνεται άπειρο. Υπάρχουν βέλτιστα **f**-κυκλικά προγράμματα για τα οποία ο κανόνας EZSR δεν μπορεί να ακολουθηθεί. Οι περιπτώσεις αυτές είναι πολύ σπάνιες και αντιστοιχούν σε αριστοτεχνική επιλογή των **f**. Βλέπε Maxwell (1964) όπου αντιμετωπίζετε παρόμοια περίπτωση με το ZSR. Σε ό,τι ακολουθεί γίνεται υπόθεση δημιουργίας, με τη διαδικασία που προτάθηκε από τους Gallego και Roundy (1988), βέλτιστου **f**-κύκλικου προγράμματος το οποίο ικανοποιεί τον EZSR.

4.2.3 Επαναφορά της παραγωγής μετά από διακοπή

Μια διακοπή σε ένα κυκλικό πρόγραμμα μπορεί να προέλθει από ένα μεγάλο πλήθος απρόβλεπτων γεγονότων. Για παράδειγμα η μηχανή πιθανόν να πάθει βλάβη, έλλειψη πρώτων υλών, μεγάλη διακύμανση της ζήτησης κ.τ.λ. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να ξαναρχίσει η παραγωγή μετά από μια αρχική διακοπή. Θα πρέπει να ευρεθεί ο τρόπος με τον οποίο το επίπεδο του αποθέματος θα επανέλθει ξανά στις τιμές **w** επί των οποίων το πρόγραμμα στόχος μπορεί να ακολουθηθεί.

Για σκοπούς απλοποιήσεις γίνεται η υπόθεση ότι **f**$=(1,2,\ldots,m)$, δηλαδή το βέλτιστο κυκλικό πρόγραμμα στόχος είναι επαναλαμβανόμενο πρόγραμμα (rotation schedule). Ωστόσο όλα τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής μπορούν να επεκταθούν για γενικότερες ακολουθίες παραγωγής δεδομένου ότι το βέλτιστο κυκλικό πρόγραμμα ικανοποιεί τον EZSR. Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα μπορούν να επεκταθούν όταν οι προετοιμασίες εξαρτώνται από την ακολουθία παραγωγής.

Θα παρουσιαστεί ότι πάντοτε είναι πιθανό να ξαναρχίσει η παραγωγή σε πεπερασμένο χρόνο με την προϋπόθεση απουσίας επιπλέον διακοπών. Επομένως, το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος είναι ανεξάρτητο της πολιτικής ανάκαμψης της παραγωγής.

Οι *μεταβλητές ελέγχου* είναι οι χρόνοι παραγωγής οι οποίοι μπορούν να διαφέρουν σε κάθε επανάληψη του **f**. Οι χρόνοι αδράνειας είναι καθορισμένοι στο πρόγραμμα στόχος. Αυτό αποτελεί χαλαρό περιορισμό επειδή οι μηχανές παράγουν σχεδόν στα όρια της δυναμικότητάς τους οπότε υπάρχει ελάχιστος ή και καθόλου χρόνος αδράνειας στο πρόγραμμα στόχος. Το πλεονέκτημα αδράνειας της μηχανής εμφανίζεται όταν το σταμάτημα συμβαίνει σε μια περίοδο όπου τα αποθέματα των προϊόντων βρίσκονται σε υψηλό επίπεδο σε σχέση με αυτά που έχουν καθοριστεί στο πρόγραμμα στόχος, για παράδειγμα μετά από μια περίοδο όπου η ζήτηση είναι χαμηλότερη από την προσδοκώμενη. Στο τέλος αυτής της ενότητας, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο τοποθετούνται χρόνοι αδράνειας με βέλτιστο τρόπο μετά από μια διακοπή, αλλά πριν την εφαρμογή πολιτικής επαναφοράς **f**.

Στη συνέχεια προτυποποιείται το πρόβλημα επαναφοράς, ως πρόβλημα ελέγχου άπειρου ορίζοντα διακριτού χρόνου. Ορίζεται **x** το διάνυσμα με απόθεμα ίσο με το επίπεδο αποθέματος μετά τη διακοπή. Ορίζεται **z** το διάνυσμα αρχικής κατάστασης του συστήματος ως η διαφορά μεταξύ του αρχικού αποθέματος, και του αποθέματος μετά την διακοπή.

Ορίζεται ο *μηδενικός χρόνος απόφασης* $\tau_0 = 0$. Από την χρονική στιγμή αυτή και μετά ακολουθείται η ακολουθία παραγωγής **f.** O k *χρόνος απόφασης* εμφανίζεται στο τέλος της k επανάληψης του **f**, τη χρονική στιγμή τ_k. Στον k χρόνο απόφασης παρατηρούνται τα επίπεδα των αποθεμάτων $\mathbf{x}^k$, και καθορίζεται η κατάσταση του συστήματος $\mathbf{z}^k = \mathbf{w} - \mathbf{x}^k$. Στη συνέχεια επιλέγονται οι χρόνοι παραγωγής $\mathbf{t}^k = \mathbf{t} + \mathbf{v}^k$, για την επόμενη επανάληψη του **f** ορίζοντας το *διάνυσμα ελέγχου* $\mathbf{v}^k$. Να σημειωθεί ότι $\mathbf{v}^k$ θα πρέπει να ικανοποιεί την $\mathbf{t} + \mathbf{v}^k \geq 0$. Ο επόμενος χρόνος απόφασης συμβαίνει την χρονική στιγμή $\tau_{k+1} = \tau + T + \mathbf{e}^T \mathbf{v}^k$. Όταν λέμε k *κύκλος ελέγχου* αναφερόμαστε στα γεγονότα που συμβαίνουν στη χρονική περίοδο $[\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Μία οποιαδήποτε πολιτική είναι μια αντιστοιχία από το χώρο κατάστασης στο χώρο ελέγχου. Με δεδομένο $\mathbf{z} = \mathbf{z}^0$ μια **f**-πολιτική επαναφοράς δημιουργεί άπειρες ακολουθίες $\{\mathbf{z}^k\}$ και $\{\mathbf{v}^k\}$ με την ιδιότητα $\mathbf{z}^k \to 0$ καθώς το $k \to \infty$. Εάν υπάρχει πεπερασμένο K τέτοιο ώστε $\mathbf{z}^k = 0$ για $k \geq K$ τότε λέγεται ότι η πολιτική επαναφέρει το σύστημα σε πεπερασμένο χρόνο.

Στη συνέχεια λαμβάνεται η κατάσταση στο τέλος του k κύκλου ελέγχου. Τα αποθέματα τη χρονική στιγμή τ_{k+1} υπολογίζονται από τα αποθέματα την προηγούμενη χρονική στιγμή τ_k αθροίζοντας την παραγωγή και αφαιρώντας τη ζήτηση στον k κύκλο ελέγχου. Ορίζεται $diag(\mathbf{p})$ ως ο διαγώνιος πίνακα με $\mathbf{p}$ στην διαγώνιο. Τότε

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - diag(\mathbf{p})(\mathbf{t} + \mathbf{v}^k) - \mathbf{e}(\mathbf{T} + \mathbf{e}'\mathbf{v}^k) = \mathbf{x}^k + \left[diag(\mathbf{p}) - \mathbf{ee}'\right]\mathbf{v}^k.$$

Αν ορίσουμε $Q \equiv diag(\mathbf{p}) - \mathbf{ee}'$. Τότε $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + Q\mathbf{v}^k$,οπότε η κατάσταση την χρονική στιγμή $k+1$ είναι

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k - Q\mathbf{v}^k \tag{4.2}$$

ΛΗΜΜΑ 4.3 *Ο πίνακας Q έχει μη-μηδενικό αντίστροφο.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4. *Υπάρχει μια πολιτική επαναφοράς* **f** *η οποία επαναφέρει το σύστημα σε πεπερασμένο χρόνο. Επιπλέον άπειρο άθροισμα $\sum_k \mathbf{v}^k$ είναι ανεξάρτητο της πολιτικής επαναφοράς* **f**.

Μια πολιτική π λέγεται ότι ικανοποιεί τον κανόνα EZSR στο **z** εάν όλοι οι κύκλοι ελέγχου που έχουν δημιουργηθεί από το π ικανοποιούν τον κανόνα EZSR όταν εφαρμόζονται στο **z.** Δηλαδή, η παραγωγή αρχίζει με μη θετικά αποθέματα και τελειώνει με μη αρνητικά αποθέματα.

Στην επόμενη παράγραφο περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει μια γραμμική πολιτική επαναφοράς **f** η οποία είναι βέλτιστη για όλα τα **z** τα οποία ικανοποιούν τον. EZSR.

Αρχικά τίθεται ένα πάνω όριο $V^{\pi}(\mathbf{z})$ για το κόστος της π πολιτικής επαναφοράς **f** το οποίο εφαρμόζεται στην κατάσταση $\mathbf{z}$. Στη συνέχεια ελαχιστοποιείται το $V^{\pi}(\mathbf{z})$ για όλες τις κλάσεις των πολιτικών επαναφοράς **f** το οποίο είναι ισοδύναμο με ένα πρόβλημα γραμμικού τετραγωνικού ελέγχου απείρου ορίζοντα σταθερού χρόνου. Το πρόβλημα επιλύεται με τυπικές τεχνικές από τη θεωρία ελέγχου καταλήγοντας σε γραμμική πολιτική επαναφοράς **f**

$$\mathbf{v}^k = G\mathbf{z}^k \tag{4.4}$$

Για να τον υπολογισμό $V^{\pi}(\mathbf{z})$ μελετάται αρχικά το κόστος του κύκλου ελέγχου. Ορίζεται $\mu_i(t)$ το απόθεμα του προϊόντος i την χρονική στιγμή t. Το κόστος για το διάστημα $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ είναι

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sum_{i=1}^{m} \left[h_i\left(\mu_i(t)\right)^+ + b_i\left(\mu_i(t)\right)^- \right] + \mathbf{e}'\mathbf{a} \tag{4.5}$$

όπου το ολοκλήρωμα αντιπροσωπεύει το κόστος αποθέματος, αναμονής παραγγελίας στην ουρά, ενώ το $\mathbf{e}'\mathbf{a}$ είναι το κόστος προετοιμασίας.

Για την διευκόλυνση στον υπολογισμό του ολοκληρώματος, ορίζεται a_i (και αντίστοιχα β_i) να είναι το ελάχιστο (και αντίστοιχα το μέγιστο) του $\mu_i(t)$. Λαμβάνονται κλειστές εκφράσεις μορφής για τα $\alpha = (a_i)$ και $\beta = (\beta_i)$. Όπως τα $\gamma_i's$ (αντίστοιχα $\delta_i's$), τα $a_i's$ (αντίστοιχα β_i') επιτυγχάνονται αμέσως πριν (αντίστοιχα μετά) τα τρεξίματα παραγωγής. Ορίζεται R (αντίστοιχα S *) να* είναι το χαμηλότερο (αντίστοιχα αυστηρά χαμηλότερο) τριγωνικό μέρος του πίνακα Q. Τα a, β σχετίζονται με τα γ, δ από την σχέση

$$a = \gamma + S\mathbf{v} - \mathbf{z} \tag{4.6}$$

και

$$\beta = \delta + R\mathbf{v} - \mathbf{z} \tag{4.7}$$

Η εξίσωση (4.6) έχει νόημα επειδή $-\mathbf{e}_i' S\mathbf{v}$ πρόσθετες μονάδες του προϊόντος i ζητούνται προτού να παραχθεί το i. Η εξίσωση (4.7) έχει επίσης νόημα επειδή $R - S = diag(\mathbf{p}) - I$, και παράγονται $(p_i - 1)\upsilon_i$ πρόσθετες μονάδες του προϊόντος i.

Ορίζεται B (αντίστοιχα H) ο $m \times m$ διαγώνιος πίνακας με $b_i p_i / (p_i - 1)$ (αντίστοιχα $h_i p_i / (p_i - 1)$ στην i θέση. Υπολογίζεται το ολοκλήρωμα (4.5) με την προσθήκη μιας δευτέρου βαθμού ενδεικτικής συνάρτησης. Η δευτεροβάθμια συνάρτηση αντιστοιχεί στις σταθμισμένες περιοχές των τριγώνων αποθέματος και αναμονής στην ουρά. ενδεικτική συνάρτηση αντιστοιχεί στις περιοχές των τριγώνων που είναι έξω από το διάστημα του κύκλου ελέγχου. Η ενδεικτική συνάρτηση είναι

$$g(x) = \frac{1}{2}\sum_i \left\{ h_i\left(x_i^+\right) - b_i\left(x_i^-\right) \right\}$$

Το ολοκλήρωμα (4.5) δίνεται από την

$$\frac{1}{2}\left\{ \left(a^-\right)' Ba^- + \left(\beta^+\right)' H\beta^+ - \left(a^+\right)' Ha^+ - \left(\beta^-\right)' B\beta^- \right\} + g(\mathbf{w} - \mathbf{z}) - g(\mathbf{w} - \mathbf{z} + Q\mathbf{v}),$$

με το προφανές άνω όριο

$$\frac{1}{2}\left\{ a'Ba + \beta H \beta \right\} + g(\mathbf{w} - \mathbf{z}) - g(\mathbf{w} - \mathbf{z} + Q\mathbf{v}) \tag{4.8}$$

Σημειώνεται ότι η (4.8) είναι ίση με το ολοκλήρωμα (4.5) οποτεδήποτε $a \le 0$ και $\beta \ge 0$ δηλ. οποτεδήποτε ικανοποιείται ο κανόνας EZSR κατά την διάρκεια του κύκλου ελέγχου.

Με την αντικατάσταση των (4.6)και (4.7) στην (4.8), με πρόσθεση του κόστους προετοιμασίας $\mathbf{e}'\mathbf{a}$ και με την αφαίρεση του μέσου κόστους $a(T + \mathbf{e}'\mathbf{v})$

προκύπτει ένα άνω όριο $C(\mathbf{z},\mathbf{v})$, για το κόστος ενός κύκλου ελέγχου κατάστασης $\mathbf{z}$ και έλεγχου $\mathbf{v}$. Φυσικά

$$aT = \frac{1}{2}\sum\left\{\gamma' B\gamma + \delta' H\delta\right\} + \mathbf{e}'\mathbf{a}$$

είναι ακριβώς το κόστος του κύκλου του προγράμματος στόχος. Η άλγεβρα απλοποιείται με το παρακάτω λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 4.5. *Το διάνυσμα* $\gamma' B\gamma + \delta' H\delta$ *είναι ίσο με 0.*

Μετά από κάποια άλγεβρα έχουμε

$$C(\mathbf{z},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}C & D\\ D' & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix} + \mathbf{c}'\mathbf{v} + g(\mathbf{w}-\mathbf{z}) - g(\mathbf{w}-\mathbf{z}+Qv) \tag{4.9}$$

όπου $C = H + B,\ D = BS' + HR',\ E = S'BS + R'HR$ και το διάνυσμα $\mathbf{c}' = \gamma' BS + \delta' HR - a\mathbf{e}'$.

ΛΗΜΜΑ 4.6. *Ο πίνακας* (4.9) *είναι θετικά ορισμένος.*

Το άνω όριο για το κόστος του π στο $\mathbf{z}$ είναι

$$V^{\pi}(\mathbf{z}) = \sum_k C(\mathbf{z}^k, \mathbf{v}^k) \tag{4.10}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.7. Η ελαχιστοποίηση του $V^{\pi}(\mathbf{z})$ για όλες τις πολιτικές επαναφοράς $\mathbf{f}$ είναι ισοδύναμη με το γραμμικό-τετραγωνικό πρόβλημα ελέγχου άπειρου-ορίζοντα.

$$W^*(\mathbf{z}) = \inf_{\{\mathbf{v}^k\}} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\mathbf{z}^k\\ \mathbf{v}^k\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}C & D\\ D' & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{z}^k\\ \mathbf{v}^k\end{pmatrix} \tag{4.11}$$

υπό την συνθήκη

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^{k} - Q\mathbf{v}^{k}$$

Ικανές συνθήκες για την ύπαρξη και την μοναδικότητα μιας λύσης της (4.11) είναι ότι το Q είναι αντιστρέψιμο και ότι ο πίνακας (4.11) είναι θετικά ορισμένος. Το πρόβλημα (4.11) μπορεί να λυθεί με τεχνικές από τη θεωρία ελέγχου καταλήγοντας στην γραμμική πολιτική επαναφοράς (4.4). Η συνάρτηση $W^*(\mathbf{z})$ είναι

$$W^*(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}' M \mathbf{z} \tag{4.12}$$

όπου ο πίνακας M είναι η μοναδική θετικά ορισμένη λύση τις αλγεβρικής εξίσωση πινάκων Riccati.

$$M = M + C - (MQ - D)(E + Q'MQ)^{-1}(MQ - D)' \tag{4.13}$$

Το G στην (4.4) καλείται πίνακας κέρδους και δίνεται

$$G = (E + Q'MQ)^{-1}(MQ - D)' \tag{4.14}$$

Η εξίσωση (4.13) μπορεί να λυθεί με διαδοχικές προσεγγίσεις. Βλέπε Dorato και Lewis (1971).

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.8 *Η πολιτική* (4.4) *με το* G *που δίνεται από την* (4.14) *είναι βέλτιστη όσον αφορά το επιπλέον κόστος μεταξύ όλων των πολιτικών επαναφοράς* **f** *που ικανοποιούν το EZSR στο* **z.**

Οι αναπροσαρμογές κατάστασης υπό τη βέλτιστη πολιτική επαναφοράς (4.4) λαμβάνονται με την αντικατάσταση της (4.4) στην (4.2) δηλαδή $\mathbf{z}^{k+1} = U\mathbf{z}^{k} = U^{k}\mathbf{z}$, όπου $U = I - QG$. Επειδή η (4.4) είναι μια πολιτική επαναφοράς **f**, *το* U είναι συγκλίνων πίνακας. Συνεπώς, υπάρχει μέτρο, έστω || • ||, για το οποίο *το* X είναι μια συστολή (contraction). Θα χρησιμοποιηθεί αυτό το στοιχείο για την επαλήθευση της παρακάτω πρότασης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.9. *Το σύνολο αρχικών διαταραχών* $\mathbf{z}$ *για τις οποίες η* (4.4) *ικανοποιεί τον EZSR περιέχει μια ανοικτή σφαίρα* $B(\varepsilon)=\{\mathbf{z}:\|U\mathbf{z}\|\prec\varepsilon\}$ *με θετική ακτίνα.*

Τα ελάχιστα και μέγιστα διανύσματα αποθεμάτων της (4.4) στον k κύκλο λαμβάνονται από τις (4.6) και (4.7) με την αντικατάσταση $\mathbf{z}^k=U^k\mathbf{z}$:

$$\begin{aligned} a^k &= \gamma-(I-SG)U^k\mathbf{z} \\ \beta^k &= \delta-(I-RG)U^k\mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.15), (4.16)$$

Έστω ε^* η μεγαλύτερη τιμή του ε για την οποία $B(\varepsilon)$ ικανοποιεί τα $a\le 0$ και $\beta\ge 0$. Επειδή γ και δ είναι μακριά από το μηδέν $\varepsilon^*\ge 0$. Επειδή U είναι μια συστολή προκύπτει ότι το $B(\varepsilon^*)$ περιλαμβάνεται στο σύνολο που ικανοποιεί τα $a^k\le 0$ και $\beta^k\ge 0$ για όλα τα $k=0,1,2,...$. Επομένως, υπάρχει ένα μη κενό σύνολο αρχικών καταστάσεων για τα οποία η (4.4) είναι η βέλτιστη πολιτική επαναφοράς **f**.

Όταν η (4.4) δεν ικανοποιεί τον EZSR στο $\mathbf{z}$ τα τρεξίματα μπορούν να τεθούν $(\mathbf{t}+G\mathbf{z})^+$, καταλήγοντας τελικά σε μια κατάσταση για την οποία η ιδιότητα EZSR ισχύει.

Παρεμβολή χρόνων αδράνειας

Θεωρείται τώρα $\vartheta\ge 0$ προτού να εφαρμοστεί η πολιτική επαναφοράς **f**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.10. *Ο βέλτιστος χρόνος αδράνειας μετά από μια διακοπή της παραγωγής, προτού εφαρμοστεί η γραμμική πολιτική ελέγχου* (4.4), *είναι*

$$\vartheta^*=\left[a-\mathbf{c}'Q^{-1}\mathbf{e}-\mathbf{e}'M\mathbf{z}\right]^+/\,\mathbf{e}'M\mathbf{e} \quad (4.17)$$

Επιτρέποντας άλματα στην ακολουθία

Η γραμμική πολιτική (4.4) προέκυψε για την ακολουθία $\mathbf{f}$. Μπορούμε να ληφθούν n διαφορετικές πολιτικές, μια για κάθε θέση του $\mathbf{f}$. Παραδείγματος χάριν, $\mathbf{f}$ = (1, 2, 3) μπορούμε να λάβουμε μια πολιτική για $\mathbf{f}'$ = (2, 3, 1) και $\mathbf{f}''$ = (3, 1, 2). Στην πραγματικότητα όλες οι n πολιτικές μπορούν να ληφθούν από την (4.4) με σειρά γραμμικών μετασχηματισμών. Βλέπε Gallego (1988α). Αυτό που είναι τελικά σημαντικό είναι ότι η γνώση αυτών των n πολιτικών επιτρέπει την επαναφορά από οποιαδήποτε θέση στην ακολουθία. Κατά συνέπεια, μετά από μια διακοπή, είναι δυνατός ο υπολογισμός του κόστους και της προετοιμασίας για το προϊόν που αντιστοιχεί στην πιο ανεκτή θέση. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί στο τέλος κάθε μιας τρεξίματος της παραγωγής, δημιουργώντας ενδεχομένως άλματα στην ακολουθία $\mathbf{f}$. Τέτοια άλματα είναι πιθανό να εμφανιστούν εάν τα πραγματικά αποθέματα απέχουν σημαντικά από τις τιμές των αποθεμάτων που έχουν τεθεί ως στόχοι και πιθανό να αποφεύγουν περιττές προετοιμασίες.

4.2.4 Τυχαίες ζητήσεις και αποθέματα ασφάλειας

Σε αυτή την ενότητα γίνεται υπόθεση ότι οι αθροιστικές ζητήσεις των προϊόντων είναι ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες. Ειδικότερα, η αθροιστική ζήτηση του προϊόντος i μέχρι το χρόνο t $D_i(t)$, για παράδειγμα, ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή t και μεταβλητότητα $\sigma_i^2 t$.

Υποτίθεται ότι μετά από κάθε επανάληψη του $\mathbf{f}$, παρατηρείται η κατάσταση $\mathbf{Z}^k = \mathbf{z}^k$ και τα τρεξίματα παραγωγής καθορίζονται σε $\mathbf{t} + G\mathbf{z}^k$. Εδώ, χρησιμοποιείται η γραμμική πολιτική ελέγχου (4.4) που αποδείχθηκε ότι είναι βέλτιστη για επαναφορά μετά από μια διακοπή της παραγωγής. Η κατάσταση $\mathbf{Z}^{k+1}$ σαφώς ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $U\mathbf{z}^k$ και πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης $\left(T + \mathbf{e}'G\mathbf{z}^k\right)$.

Πρόταση 4.11. *Η ακολουθία καταστάσεων* $\left\{\mathbf{Z}^k\right\}$ *συγκλίνει σε ένα κανονικό τυχαίο διάνυσμα* $\mathbf{Z}$ *με το μέσο όρο μηδέν και* με πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης Σ ικανοποιώντας $\Sigma = T diag(\sigma)^2 + U\Sigma U'$.

Έστω $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$, καθορισμένος χρόνος $t = 0$ και η παραγωγή τρέχει στο $\mathbf{t} + G\mathbf{z}$. $X_i(t\,|\,\mathbf{z})$ είναι το απόθεμα του προϊόντος i την χρονική στιγμή t και $p_i(t\,|\,\mathbf{z})$ να είναι η συσσωρευτική παραγωγή του μέχρι την χρονική στιγμή t. Σαφώς,

$$X_i\left(t\,|\,\mathbf{z}\right)=w_i-z_i+p_i\left(t\,|\,\mathbf{z}\right)-D_i\left(t\right)$$

και

$$EX_i\left(t\,|\,\mathbf{z}\right)=w_i-z_i+p_i\left(t\,|\,\mathbf{z}\right)-t\equiv\mu_i\left(t\,|\,\mathbf{z}\right)$$

Για $\mathbf{Z}=\mathbf{z}$, το αναμενόμενο κόστος ανά κύκλο είναι

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{0}^{T(\mathbf{z})}\left[h_iEX_i\left(t\,|\,\mathbf{z}\right)^{+}+b_iEX_i\left(t\,|\,\mathbf{z}\right)^{-}\right]dt+\mathbf{e}'\mathbf{a} \tag{4.18}$$

όπου $T\left(\mathbf{z}\right)=T+\mathbf{e}'G\mathbf{z}$. Η εναλλαγή της ολοκλήρωσης και της προσδοκίας δικαιολογείται επειδή $X_i\left(t\,|\,\mathbf{z}\right)^{+}$ και $X_i\left(t\,|\,\mathbf{z}\right)^{-}$ είναι μη αρνητικά. Σημειώστε ότι αφού $hX^{+}+bX^{-}$ είναι κυρτός μέσα στο X, η ανισότητα Jensen υπονοεί ότι.

$$hEX^{+}+bEX^{-}\geq h\left(EX\right)^{+}+b\left(EX\right)^{-}$$

Συνεπώς, το (4.18) είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλο όσο το κόστος του κύκλου όταν οι ζητήσεις είναι σταθερές. Στην πραγματικότητα, εάν το κόστος αναμονής στην ουρά (αντίστοιχα αποθέματος) είναι μεγαλύτερο σχετικά με το κόστος αποθέματος (αντίστοιχα αναμονής στην ουρά) τότε το (4.18) μπορεί να είναι μεγάλο σχετικά με το αιτιοκρατικό αντίστοιχό του.

Θα επιτευχθεί ένα αποτέλεσμα παρόμοιο με το λήμμα 2,1 που συσχετίζονται τα αποθέματα ασφάλειας με τα επίπεδα υπηρεσιών. Έστω $\mathbf{y}=\left(y_i\right)$ το διάνυσμα αποθεμάτων ασφάλειας. Επαναπροσδιορίζεται η κατάσταση έτσι ώστε $\mathbf{w}+\mathbf{y}-\mathbf{z}$ να αντιπροσωπεύει τα πραγματικά αποθέματα. Έστω $\Gamma\left(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{z}\right)$ το αναμενόμενο κόστος αποθέματος και αναμονής στην ουρά με $\mathbf{y}$ το απόθεμα ασφάλειας και $\mathbf{Z}=\mathbf{z}$.Έτσι το αναμενόμενο κόστος είναι

$$\Gamma\left(\mathbf{y}\right)=E_{\mathbf{Z}}\int_{0}^{T(\mathbf{Z})}\sum_{i}\left[h_iE\left(X_i\left(t\,|\,\mathbf{Z}\right)+y_i\right)^{+}+b_iE\left(X_i\left(t\,|\,\mathbf{Z}\right)+y_i\right)^{-}\right]dt \tag{4.19}$$

με προσδοκώμενο μήκος κύκλου $E(T+\mathbf{e}'G\mathbf{Z}) = T+\mathbf{e}'GE\mathbf{Z} = T$ επειδή $E\mathbf{Z}=0$. Το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος τρεξίματος συγκλίνει, με πιθανότητα ένα, στο $\left(\Gamma(\mathbf{y})+\mathbf{e}'\mathbf{a}\right)/T$. Έτσι για δεδομένο T, η ελαχιστοποίηση του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους τρεξίματος είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση της (4.19).

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.12. Η $\Gamma(\mathbf{y})$ *είναι διαχωρίσιμη και αυστηρά κυρτή στο* $\mathbf{y}$.

Αναζητείται το διάνυσμα $\mathbf{y}$ των αποθεμάτων ασφάλειας που ελαχιστοποιεί το $\Gamma(\mathbf{y})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.13. *Υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα των αποθεμάτων ασφάλειας* $\mathbf{y}^* = (y_i^*)$ *που ελαχιστοποιεί το* $\Gamma(\mathbf{y})$. *Επιπλέον το* y_i^*, *είναι βέλτιστο εάν και μόνο εάν το αναμενόμενο ποσοστό του χρόνου όπου το προϊόν* i *είναι σε απόθεμα είναι* $b_i/(b_i + h_i)$) *για όλα τα* i.

4.2.5 Εφαρμογή Gallego (1990)

Στην συνέχεια παρουσιάζεται το εργαλείο προγραμματισμού σε μια εφαρμογή. Τα δεδομένα λήφθηκαν με την παραγωγή παραμέτρων ομοιόμορφης κατανομής ως ακολούθως: κόστη αποθέματος $U(5,100)$, κόστος αναμονή στην ουρά $U(5000,5000)$, ρυθμοί παραγωγής $U(4,8)$, χρονικές διάρκειας προετοιμασίας $U(1,5)$, και κόστος προετοιμασίας $U(50,500)$. Συμπεριλήφθηκαν επιπρόσθετα προϊόντα εφ' όσον $k \succ 0.15$.

Δεδομένα: $m=5$, $h=(57,77,55,73,72)$, $b=(16495,10613,46907,39997,38774)$, $s=(1,4,3,2,2)$, $p=(6,5,5,6,6)$, $a=((188,308,179,404,69)$.

Χρησιμοποιήθηκε η διαδικασία που αναπτύχθηκε από τους Gallego και Roundy (1988) για να υπολογίσει το κυκλικό πρόγραμμα στόχος. Αυτό οδήγησε σε

$\mathbf{f} = (4, 5, 1, 2, 4, 5, 1, 3)$,

$\mathbf{t} = (14.295, 14.252, 14.223, 34.000, 14.039, 14.081, 14.110, 34.000)$

$\mathbf{w} = (33.305, 50.790, 135.841, 1.872, 18.164)$

Το πρόγραμμα στόχος δεν είχε καθόλου χρόνους αδράνειας ενώ η διάρκεια του κύκλου ήταν 170. Το ποσοστό του διαθέσιμου χρόνου για τις προετοιμασίες ήταν 10%. Το μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα ήταν \$16,082.66. Χρησιμοποιήθηκε ένα κάτω φράγμα του μέσου κόστους (Gallego και Roundy 1988) όπου ήταν \$ 15,672.17 για λόγο 1.0262. Η βέλτιστη πολιτική γραμμικού ελέγχου υπολογίστηκε με την επίλυση του (4.13) δίνοντας:

$$M = \begin{pmatrix} 48283.696 & 35874.056 & 41738.979 & 31551.926 & 31862.901 \\ 35874.056 & 53112.605 & 51022.447 & 35228.877 & 36135.278 \\ 41738.979 & 51022.447 & 82117.526 & 43172.108 & 40981.590 \\ 31551.926 & 35228.877 & 43172.108 & 77339.632 & 36763.250 \\ 31862.901 & 36135.278 & 40981.590 & 36763.250 & 74836.479 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας κέρδους G (βλέπε 4.24) είναι:

$$G = \begin{pmatrix} 0.008005 & 0.023333 & -0.056388 & 0.191382 & -0.018039 \\ 0.010040 & 0.026552 & -0.056557 & 0.032556 & 0.182747 \\ 0.181386 & 0.010007 & -0.051487 & 0.029222 & 0.006205 \\ -0.054597 & 0.147695 & -0.203368 & -0.035185 & -0.065656 \\ 0.033625 & 0.030715 & 0.003266 & 0.025340 & 0.059093 \\ 0.039006 & 0.034027 & 0.007473 & 0.022310 & 0.031044 \\ 0.018261 & 0.030434 & 0.041354 & 0.006845 & 0.026886 \\ 0.105283 & 0.128406 & 0.217835 & 0.111230 & 0.104626 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια η ζήτηση μοντελοποιείται σαν κίνηση Brawn με $\sigma = (0.5, 0.3, 0.5, 0.4, 0.3)$. Το μέσο μακροπρόθεσμο κόστος του προγράμματος στόχους με πολιτική επαναφοράς είναι $\$33276.32$. Για την απόκτηση των βέλτιστων αποθεμάτων ασφαλείας χρησιμοποιήθηκε η προσομοίωση Monte Carlo για την εύρεση αμερόληπτων εκτιμητριών της κλίσης του $\Gamma(\mathbf{y})$, και η προσεγγιστική μέθοδος Robbins-Morno για την εύρεση του $\mathbf{y}$ για το οποίο το $\Gamma(\mathbf{y})$ γίνεται ελάχιστο. Κάθε εκτίμηση της κλήσης ήταν 1000 επαναλήψεων όπου οι πρώτες 50 αγνοήθηκαν για να αποφευχθεί η μεροληψία έναρξης. Το μέγεθος του βήματος ήταν

$1/k$ αρχίζοντας με $k=10$ στην αρνητική κατεύθυνση της κλήσης. Τελικά η λύση για τα αποθέματα ασφαλείας ήταν $y^*=(9.87,17.41,12.36,7.83,5.83)$. Το ποσοστό των χρόνων που τα προϊόντα ήταν σε απόθεμα με τα παραπάνω αποθέματα ασφάλειας ήταν $(0.99655, 0.99280, 0.99882, 0.99818, 0.99815)$ ακριβώς όπως στο πρόγραμμα στόχος. Το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος με τα παράπονα του αποθέματα ασφαλείας ήταν \$20,781.01, αποταμίευση της τάξης του 38%. Σημειώνεται ότι το μέσο μακροπρόθεσμο κόστος προγραμματισμού της μηχανής με τυχαίες ζητήσεις είναι μόνο 23% περισσότερο σε σχέση με το μέσο κόστος του προγράμματος στόχου. Η μεγάλη διαφορά μεταξύ του κόστους του στοχαστικού και του ντετερμινιστικού συστήματος είναι λόγω των αποθεμάτων ασφαλείας. Στην πραγματικότητα, το κόστος του προγράμματος στόχος όταν η ζήτηση είναι αιτιοκρατική είναι \$19,604.72.

Ο υπολογισμός των αποθεμάτων ασφαλείας έχει σημαντικά πλεονεκτήματα, ειδικά στην περίπτωση όπου το κόστος αναμονής στην ουρά είναι ακριβότερο σε σχέση με το κόστος αποθέματος, όπως είναι γνωστό στην πράξη.

4.3 Προσέγγιση Thomas. L.J. et al. (1985)

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται η προσέγγιση του Thomas. L.J. et al. (1985) όπου περιγράφεται μια μέθοδος ελέγχου των προετοιμασιών, οι οποίες εξαρτώνται από την ακολουθία παραγωγής. Η *ακολουθία παραγωγής* είναι η σειρά με την οποία παράγονται τα διάφορα προϊόντα. Είναι χρήσιμο να καθορίζεται η ακολουθία πριν τον καθορισμό του προγράμματος. Για παράδειγμα σε βιομηχανίες όπου το κόστος προετοιμασίας εξαρτάται από την ακολουθία, η προετοιμασία γίνεται πολύ πιο εύκολα για προϊόντα που ανήκουν στην ίδια οικογένεια σε σχέση με προϊόντα που ανήκουν σε διαφορετική οικογένεια.

Επίσης υπάρχουν άλλες καταστάσεις που οδηγούν σε κόστη προετοιμασίας που να εξαρτώνται από την ακολουθία. Για παράδειγμα η παραγωγή είναι λιγότερο ακριβή για μπογιές όταν η ακολουθία αρχίζει από ανοιχτόχρωμα σε πιο έντονα χρώματα. Η ακολουθία παραγωγής για τα γυαλόχαρτα γίνεται από τα πιο λεπτά στο πιο χοντρά. Επίσης επειδή οι αλλαγή εργαλείων σε μεγάλες μηχανές μπορεί να είναι πολύ χρονοβόρα, προϊόντα με παρόμοιες απαιτήσεις εργαλείων συχνά τοποθετούνται στην ίδια ομάδα μαζί. Στην περίπτωση παραγωγής αναψυκτικών, η μηχανή θα πρέπει να καθαρίζεται όταν γίνεται αλλαγή από έναν τύπο αναψυκτικού σε κάποιον άλλον. Στην περίπτωση όμως παραγωγής σάλτσας, εκτός από τον απλό καθαρισμό, χρειάζεται μεγαλύτερη προετοιμασία μετά την παραγωγή πικάντικης σάλτσας.

Το πρόβλημα καθορισμού βέλτιστης ακολουθίας είναι εξαιρετικά δύσκολο. Παρόλα αυτά το πρόβλημα ακολουθίας για πολλές βιομηχανίες γίνεται ευκολότερο χωρίζοντάς τις προετοιμασίες σε αυτές μεταξύ προϊόντων με τα ίδια χαρακτηριστικά και προϊόντων με διαφορετικά χαρακτηριστικά. Καταρχάς ένα καλό πρόγραμμα θα πρέπει να διατηρεί μαζί προϊόντα που βρίσκονται στην ίδια οικογένεια για να αποφευχθούν μη απαραίτητες προετοιμασίες μεγάλης διάρκειας. Δεύτερον, η ακολουθία παραγωγής προϊόντων μεταξύ οικογενειών είναι ασήμαντη επειδή το κόστος γα τις προετοιμασίες αυτές είναι το ίδιο και άρα ανεξάρτητο της ακολουθίας.

Παρόλα αυτά μπορεί να είναι επιθυμητή η συχνότερη παραγωγή κάποιον οικογενειών από κάποιες άλλες εξαιτίας διαφορετικής ζήτησης και κόστους αποθέματος. Ένα μεγάλο στοιχείο κόστους είναι αυτό της προετοιμασίας μεταξύ οικογενειών. Επομένως, πρώτος στόχος ενός συστήματος προγραμματισμού είναι ο έλεγχος του αριθμού αυτών των προετοιμασιών. Μέρος αυτού είναι η εξακρίβωση ότι δύο η περισσότερες οικογένειες δεν χρειάζονται παραγωγή την ίδια χρονική. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται σε δύο επίπεδα.

Αρχικά η περίοδος παραγωγής καθορίζεται για κάθε οικογένεια με τρόπο που να επιτρέπει την δημιουργία του κυκλικού προγράμματος. Εντός του προγράμματος αυτού, χρόνοι παραγωγής των οικογενειών κατανέμονται με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφευχθούν καταστάσεις χαμηλών αποθεμάτων για δύο οικογένειες στην ίδια χρονική στιγμή. Το πρότυπο οικονομικής ποσότητας παραγωγής τροποποιείται ώστε να ενσωματώνει ολόκληρες οικογένειες προϊόντων, μας δίνει την δυνατότητα υπολογισμού των περιόδων παραγωγής, εξασφαλίζοντας ότι το κόστος προετοιμασίας και αποθέματος (σχεδόν) ελαχιστοποιείται.

4.3.1 Οικογενειακή Περίοδος Αναπαραγωγής

Θεωρείται ότι κάθε οικογένεια αποτελείται από N προϊόντα. Ένας από τους στόχους είναι, η παραγωγή τους να γίνει διαδοχικά θέτοντας μια κοινή περίοδο παραγωγής T για ολόκληρη την οικογένεια. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει η ποσότητα παραγωγής για κάθε προϊόν i να ικανοποιεί τη ζήτηση για περίοδο ίση με την κοινή περίοδο παραγωγής T. Οπότε, το μέσο μεταβλητό κόστος για κάθε οικογένεια δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{TVC} = \left(\text{Οικογενειακό Κόστος Αποθέματος}\right)\left(\frac{\mathrm{T}}{2}\right) + \left(\text{Οικοφενειακό Κόστος Προετοιμασίας}\right)\frac{1}{\mathrm{T}}$$

όπου

οικογ. κόστος αποθέματος= $\sum\left(D_i C_{I,i}\right)\left(1-\dfrac{D_i}{P_i}\right)$

οικογ. κόστος προ/ας= $\text{μείζων κόστος προετοιμασίας} + \sum\left(\text{ελάσσων κόστος προ/ας}\right)$

ή $TVC = \dfrac{T}{2}\sum_{i=1}^{N}(D_i C_{I,i})(1-\dfrac{D_i}{P_i}) + (C_{SM} + \sum_{i=1}^{N} C_{S,i})\dfrac{1}{T}$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει το μέσο ετήσιο κόστος ανά οικογένεια. Η βέλτιστή περίοδος παραγωγής T^* κάθε οικογένειας μπορεί να υπολογιστεί αν θέσουμε παραγωγό της TVC ίση με μηδέν, και λύσουμε ως προς T. Το αποτέλεσμα είναι:

$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N}(C_{SM} + \sum_{i=1}^{N} C_{S,i})}{\sum_{i=1}^{N}(D_i C_{I,i})(1-\frac{D_i}{P_i})}}$$

Στην ιδανική περίπτωση, η κάθε οικογένεια k θα πρέπει να αναπαράγεται κάθε περίοδο T_k^*. Παρόλα αυτά, το πρόγραμμα παραγωγής μπορεί να μην επιτρέπει στην οικογένεια k να αναπαράγεται ακριβώς κάθε T_k^* περιόδους. Να σημειωθεί ότι το

T_k^* μπορεί να είναι διαφορετικό για κάθε οικογένεια. Στην πραγματικότητα, θα πρέπει η τιμή της οικογενειακής περιόδου αναπαραγωγής T_k^*, να τροποποιηθεί σημαντικά ώστε να προκύψει ένα πρόγραμμα παραγωγής το οποίο να είναι εφικτό για όλες τις οικογένειες.

4.3.2 Βέλτιστη Περίοδος Αναπαραγωγής για όλες τις Οικογένειες

Η απόφαση για το πόσες φορές θα εκτελεστεί η παραγωγή μιας οικογένειας σε έναν κύκλο μπορεί να είναι πολύ δύσκολη ειδικά όταν υπάρχουν πολλές οικογένειες. Στα επόμενα βήματα περιγράφεται η μέθοδος δυνάμεων του δύο (Powers-of-2 Rule) σύμφωνα με την οποία υπολογίζεται η βέλτιστη συχνότητα παραγωγής σε έναν κύκλο για κάθε οικογένεια. Η μέθοδος αυτή δεν διατηρεί το μέσο μεταβλητό κόστος εντός του 6 % της ελάχιστης δυνατής τιμής του. (Ο Zipkin [1991] περιγράφει μια εναλλακτική μέθοδο).

Αλγόριθμος

1. Υπολόγισε τη βέλτιστη οικογενειακή περιόδου αναπαραγωγής. Βρες τη μικρότερη και ονόμασε την $T_{\min}$.
2. Για κάθε οικογένεια, υπολόγισε την συχνότητα παραγωγής της $n_k = \dfrac{T_k^*}{T_{\min}}$,
3. Στρογγυλοποίεισε το n_k για κάθε οικογένεια k σε μια δύναμη του 2 χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα.

Από	Μέχρι	Τιμή
0,707	1,414	1
1,414	2,828	2
2,828	5,657	4
5,657	11,314	8
11,314	22,627	16
22,627	45,255	32

4. Βρες το μεγαλύτερο n_k και το ονόμασε το $n_{\max}$
5. Υπολόγισε τον αριθμό των παρτίδων της οικογένειας k που θα παράγονται μέσα στον κύκλο, ως εξής: $m_k^* = \dfrac{n_{\max}}{n_k}$

6. Υπολόγισε τη βέλτιστη περίοδο αναπαραγωγής με τις παραπάνω παρτίδες

$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N} m_i (C_{SM} + \sum_{i=1}^{N} C_{S,i})}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i}(D_i C_{l,i})(1-\frac{D_i}{P_i})}}\ .$$

Η βέλτιστη περίοδος αναπαραγωγής θα είναι περίπου ίση με $n_{\max} T_{\min}$

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Η διατριβή αυτή πραγματεύτηκε συστήματα μιας μηχανής με πολλά προϊόντα και παρουσίασε αρκετά μοντέλα ελέγχου αποθεμάτων από την διεθνή βιβλιογραφία σε τέτοια συστήματα. Το πρόβλημα που εξετάστηκε είναι γνωστό ως οικονομικό πρόβλημα προγραμματισμού μεγέθους παρτίδας. Ειδικότερα, διεξήλθε μια σύντομη επισκόπηση πολλών μεθόδων επίλυσης του προβλήματος του προγραμματισμού οικονομικής παρτίδας παραγωγής κυρίως στο δεύτερο κεφάλαιο, κάποιες από τις οποίες παρουσιάστηκαν αναλυτικότερα σε επόμενα κεφάλαια, εξετάζοντας τες παράλληλα ως προς τις ομοιότητες και τις διαφορές σε σχέση με τον τρόπο διατύπωσης του προβλήματος, και την επιτυχία επίτευξης βέλτιστης λύσης.

Εξετάστηκαν πολλές μέθοδοι για προγραμματισμό των παρτίδων παραγωγής μέσα σε έναν κύκλο, δηλαδή η κάθε μέθοδος κλήθηκε να απαντήσει στο ερώτημα σχετικά με τον τρόπο παραγωγής των προϊόντων μέσα σε ένα επαναλαμβανόμενο κύκλο. Για παράδειγμα μπορεί κάποιο προϊόν να χρειαστεί να παραχθεί *n* φορές μέσα στον ίδιο κύκλο. Για το συγκεκριμένο ζήτημα διαπιστώθηκε πάρα πολύ γρήγορα από τη βιβλιογραφία ότι πάρα πολλοί ερευνητές μελέτησαν το συγκεκριμένο πρόβλημα, με αποτέλεσμα να υπάρχουν «άπειροι» τρόποι παραγωγής των προϊόντων μέσα σε ένα κύκλο με διαφορικό συνολικό κόστος (υπολογιστικό, ευκολία χρήσης, υλοποίησης, επίδοσης αποτελεσμάτων κ.τ.λ.). Για την λύση του παραπάνω προβλήματος προτάθηκαν ουσιαστικά δύο βασικές μέθοδοι. Στην πρώτη επιλέγεται μια βασική περίοδος σύμφωνα με την οποία η περίοδος αναπαραγωγής για κάθε προϊόν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου αυτής, ενώ οι παρτίδες του κάθε προϊόντος είναι του ίδιου μεγέθους. Αντίθετα, στην δεύτερη μέθοδο επιλέγεται μία κοινή περίοδος αναπαραγωγής όπου τα προϊόντα μπορούν να παραχθούν μία φορά μέσα στον κύκλο ενώ οι παρτίδες παραγωγής μπορεί να μην είναι σταθερές μέσα στο κύκλο.

Παρατηρήθηκε ότι η προσέγγιση του κοινού κύκλου συχνά δίνει λύσεις μακριά από το κάτω φράγμα. Η προσέγγιση του κοινού κύκλου πιθανόν να είναι η καλύτερη για χρήση στην πράξη για προϊόντα τα οποία οι χρόνοι και τα κόστη προετοιμασίας είναι εξαρτημένα της ακολουθίας. Η προσέγγιση της βασικής περιόδου φαίνεται ότι δίνει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την προσέγγιση του κοινού κύκλου γενικότερα, αλλά δεν εγγυάται εφικτές λύσεις.

Στόχος ήταν η παρουσίαση, η αξιολόγηση και η σύγκριση των μοντέλων ελέγχου αποθεμάτων και προγραμματισμού ως προς τα αποτελέσματα αλλά και την ευκολία εφαρμογής τους (απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, μεθόδων προγραμματισμού κ.τ.λ.). Ειδικότερα, όσον αφορά την πρακτική εφαρμογή των μοντέλων αυτών, τα περισσότερα μοντέλα που παρουσιάστηκαν είναι ευρετικές μέθοδοι οι οποίες δίνουν «καλές» λύσεις χωρίς να είναι ιδιαίτερα δύσκολα στην εφαρμογή, ενώ κάποια άλλα μοντέλα είναι περισσότερο περίπλοκα στην εφαρμογή τους. Το βέλτιστο πρόγραμμα δεν είναι εν γένει περιοδικό αλλά η εύρεση του είναι υπολογιστικά ανέφικτη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arcade, S. H. (1993) Single machine multi-product batch scheduling: testing several solution methods, *Omega*, 21 (6), 709-711.

Axsäter, S. (1987) An extension of the extended basic period approach for economic lot scheduling problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 52 (2), 179-189.

Axsäter, S. (2000) *Inventory Control*, Boston: Kluwer, ISBN 0-7923-7758-3.

Bomberger, E. E. (1966) A dynamic programming approach to a lot size scheduling problem, *Management Science*, 12 (11), 778-784.

Carreno, J. J. (1990) Economic lot scheduling for multiple products on parallel identical processors, *Management Science*, 36 (3), 348-358.

Davis, S. G. (1990) Scheduling economic lot size production runs, *Management Science*, 36 (8), 985-998.

Delporte, C. M. and Thomas, L. J. (1977) Lot sizing and sequencing for N products on one facility, *Management Science*, 23 (10), 1070-1079.

Dobson, G. (1987) The economic lot-scheduling problem: achieving feasibility using time-varying lot sizes, *Operations Research*, 35 (5), 764-771.

Dobson, G. (1992) The cyclic lot scheduling problem with sequence-dependent setups, *Operations Research*, 40 (4), 736-749.

Doll, C. L. and Whybark, D. C. (1973) An iterative procedure for the singlemachine multi-product lot scheduling problem, *Management Science*, 20 (1), 50-55.

Eilon, S. (1985) Multi-product batch production on a single machine – a problem revisited, *Omega*, 13 (5), 453-468.

Elmaghraby, S. E. (1978) The economic lot scheduling problem (ELSP): Review and extensions, *Management Science*, 24 (6), 587-598

Feng Cheng, Houmin Yan, Jun Yang (1998) Production Scheduling of Continuous Flow Lines: Multiple Products With Setup Times and Costs, *Production and Operations Management,* 7 (4), 387 - 401

Fujita, S. (1978) The application of marginal analysis to the economic lot scheduling problem, *AIIE Transactions*, 10 (4), 354-361.

Gallego, G. (1990) Scheduling the production of several items with random demands in a single facility, *Management Science*, 36 (12), 1579-1592.

Gallego, G. and Roundy, R. (1988) The extended economic lot scheduling problem, Technical report No:769, School of Oper. Res. and Ind. Eng., Cornell University

Gallego, G. and Roundy, R. (1992) The economic lot scheduling problem with finite backorder costs, *Naval Research Logistics*, 39, 729-739.

Gallego, G. and D. Joneja (1994), "Economic Lot Scheduling Problem with Raw Material Considerations," *Operations Research*, 42, 1, 92–101

Gallego, G. and Shaw, D. X. (1997) Complexity of the ELSP with general cyclic schedules, *IIE Transactions*, 29, 109-113

Galvin, T. M. (1987) Economic lot scheduling problem with sequencedependent setup costs, *Production and Inventory Management*, 96-105.

Goyal, S. K. (1973) Scheduling a multi-product single machine system, *Operational Research Quarterly*, 24 (2), 261-269.

Haessler, R. W. (1971) A note on scheduling a multi-product single machine system for an infinite planning period, *Management Science*, 18 (4), B240-B241.

Haessler, R. W. and Hogue, S. L. (1976) A note on the single-machine multiproduct lot scheduling problem, *Management Science*, 22 (8), 909-912.

Hanssmann, F. (1962) *Operations Research in Production and Inventory Control*, New York: John Wiley & Sons.

Harris, F. W. (1913) How many parts to make at once, *Factory, The magazine of management*, 10 (2), 135-136.

Hodgson, T. J. (1970) Addendum to Stankard and Gupta's note on lot size scheduling, *Management Science*, 16, 514-517.

Hsu, W.-L. (1983) On the general feasibility test of scheduling lot sizes for several products on one machine, *Management Science*, 29 (1), 93-105.

Larraneta, J. and Onieva, L. (1988) The economic lot-scheduling problem: A simple approach, *Journal of the Operational Research Society*, 39 (4), 373-379.

Levén, E. and Segerstedt, A. (2005) A scheduling policy for adjusting economic lot quantities to a feasible solution, Working Paper, Industrial Logistics, Luleå University of Technology.

Lopez, M. A. N. and Kingsman, B. G. (1991) The economic lot scheduling problem: theory and practice, *International Journal of Production Economics*, 23, 147-164.

Madigan, J.C. (1968) Scheduling a multi-product single machine system infinite planning period, *Management Science*, 14 (11), 713-719.

Maxwell, W. L. (1964) The scheduling of economic lot sizes, *Naval Research Logistics Quarterly*, 11 (2), 89-124.

Moon, I., G. Gallego, and D. Simchi-Levi (1991), "Controllable Production Rates in a Family Production Context," *International Journal of Production Research*, 29, 2459–2470.

Parsons, J. A., (1966) Multiproduct lot size determination when certain restrictions are active, *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 17, No 7, 360-365

Rogers, J. (1958) A computational approach to the economic lot scheduling problem, *Management Science*, 4 (3), 264-291.

Stankard Jr., M. F. and Gupta, S. K. (1969) A Note on Bomberger's Approach to Lot Size Scheduling: Heuristic Proposed, *Management Science*, 15 (7), 449-452.

Silver, E. A., Pyke, D. F., and Peterson, R. (1998) *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, 3rd ed., New York: Wiley, ISBN 0-471-11947-4.

Thomas L. J., McClain J. O., Mazzola J. B. (1985) *Operations Management production of goods and services*, Prentice Hall ISBN:0-13-637620-7

Yao, M.-J. and Elmaghraby, S. E. (2001) The economic lot scheduling problem under power-of-two policy, *Computers and Mathematics with Applications*, 41, 1379-1393.

Yao, M.-J., Elmaghraby, S. E. and Chen, I.-C. (2003) On the feasibility testing of the economic lot scheduling problem using the extended basic period approach, *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, 20 (5), 435-448.

Zipkin, P. H. (1991) Computing optimal lot sizes in the economic lot scheduling problem, *Operations Research*, 39 (1), 56-63.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΛΗΜΜΑ 4.1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η $\Gamma(y)$ υπάρχει επειδή $\mu(t)+y$ είναι ολοκληρώσιμο. Η $\Gamma(y)$ είναι κυρτή επειδή

$$h\left(\mu(t)+y\right)^{+}+b\left(\mu(t)+y\right)^{-}$$

είναι κυρτή στο y για κάθε t. Εύκολα φαίνεται ότι

$$\left|\Gamma\left(y^{'}\right)-\Gamma(y)\right|\leq(h+b)T\left|y^{'}-y\right|$$

άρα η $\Gamma(y)$ είναι συνεχής και έχει πεπερασμένη παράγωγο σχεδόν παντού. Είναι σαφές ότι $\Gamma_{-}^{'}(y)\leq\Gamma_{+}^{'}(y)$ και ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς και αύξουσες στο διάστημα $\left[-bT,\, hT\right]$. Επειδή το y^{*} ικανοποιεί την (4.1) υπάρχει. Εάν η $\mu(t)$ δεν είναι πουθενά επίπεδη τότε η αριστερή και η δεξιά παράγωγος συμφωνούν παντού, επομένως η $\Gamma^{'}(y)$ υπάρχει. Από την (4.1) $\Gamma^{'}\left(y^{*}\right)=0$, εάν και μόνο εάν

$$\int_{0}^{T}1\left\{t:\left(\mu(t)+y^{*}\succ 0\right)\right\}dt=\frac{bT}{(b+h)}.$$

Επομένως το σημείο $y^{*}=0$ είναι βέλτιστο εάν και μόνο εάν το σύνολο όπου η $\mu(t)$ είναι θετική έχει μέτρο $bT/\left(b+h.\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.2

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η θέση του αποθέματος για το προϊόν i, είναι συνεχής και ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Επιπλέον η κλίση της είναι είτε $p_i-1\succ 0$ είτε-1 επομένως δεν είναι πουθενά επίπεδη. Λόγο του ότι το πρόγραμμα είναι βέλτιστο το κόστος αποθέματος και αναμονής στην ουρά δεν μπορεί να μειωθεί μετακινώντας τα αποθέματα κάθετα. Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι, το προϊόν i πρέπει να είναι σε απόθεμα $b_iT/\left(b_i+h_i\right),\ i=1,...,m.$ χρονικές μονάδες στην διάρκεια του κύκλου.

ΛΗΜΜΑ 4.5.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η i συνιστώσα είναι ανάλογη του $b_i\gamma_i + h_i\delta_i$. Επειδή $\delta_i \geq 0$ και $\gamma_i \leq 0$, το ποσοστό του χρόνου που το προϊόν i είναι σε απόθεμα είναι $\delta_i / \left(\delta_i - \gamma_i\right)$. Από το λήμμα 2,1 το ποσοστό αυτό είναι $b_i / \left(b_i + h_i\right)$ έτσι $b_i\gamma_i + h_i\delta_i = 0$

ΛΗΜΜΑ 4.6.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ . Ο πίνακας (4.9) συγκλίνει στον διαγώνιο πίνακα

$$\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & E - D'C^{-1}D \end{pmatrix},$$

υπό τον μετασχηματισμό

$$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Ο C^{-1} (αντίστοιχα $E - D'C^{-1}D$) είναι στην πραγματικότητα διαγώνιος με θετικά διαγώνια στοιχεία $\left(p_i - 1\right)/ p_i\left(b_i + h_i\right)$ (αντίστοιχα $h_i b_i p_i / \left(b_i + h_i\right)\left(p_i - 1\right)$).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.7

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Δεδομένου ότι π είναι μια πολιτική επαναφοράς $\mathbf{z}^k \to 0$, συνεπώς το άθροισμα

$$\sum_k \left[g\left(\mathbf{w} - \mathbf{z}^k\right) - g\left(\mathbf{w} - \mathbf{z}^{k+1}\right) \right] = g\left(\mathbf{w} - \mathbf{z}\right) - g\left(\mathbf{w}\right).$$

Επίσης από το λήμμα 3.1 $\sum_k \mathbf{v}^k \to Q^{-1}\mathbf{z}$ καθώς το $k \to \infty$. Εν συνεχεία από τις (4.9) και (4.10) έχουμε

$$V^\pi\left(\mathbf{z}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{z}^k \\ \mathbf{v}^k \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} C & D \\ D' & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}^k \\ \mathbf{v}^k \end{pmatrix} + \mathbf{c}'Q^{-1}\mathbf{z} + g(\mathbf{w} - \mathbf{z}) - g(\mathbf{w}).$$

Τα $\inf V^\pi\left(\mathbf{z}\right)$ για όλες τις πολιτικές επαναφοράς $\mathbf{f}$ είναι ίσα με $W^*\left(\mathbf{z}\right) + \mathbf{c}'Q^{-1}\mathbf{z} + g\left(\mathbf{w} - \mathbf{z}\right) - g\left(\mathbf{w}\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.8

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η υπόθεση (4.4) ικανοποιεί το EZSR στο **z** έτσι ώστε $\mathbf{t}+G\mathbf{z}^k \geq 0$ για όλα *τα* k. Ως εκ τούτου το (4.4) είναι εφικτό. Έστω π να είναι οποιαδήποτε πολιτική επαναφοράς **f** που ικανοποιεί το EZSR στο **z.** Το κόστος του δίνεται από το $V^{\pi}(\mathbf{z})$ που από το θεώρημα 3.5 είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλο όσο το κόστος του (4.4)

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.10

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η επαναφορά αρχίζει στο χρόνο $\vartheta \geq 0$ από την κατάσταση $\mathbf{z}+\vartheta\mathbf{e}$. Λαμβάνεται ϑ^* με την ελαχιστοποίηση του κόστους για το διάστημα $[0,\vartheta]$ συν τον άνω όριο του κόστους, δηλαδή ελαχιστοποιώντας $W^*(\mathbf{z}+\vartheta\mathbf{e})+\mathbf{c}'Q^{-1}(\mathbf{z}+\vartheta\mathbf{e})-a\vartheta$ με $\vartheta \geq 0$. Αυτό δίνει την (4.17)

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.11

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή *το* U συγκλίνει $E\mathbf{Z}^{k+1}=UE\mathbf{Z}^k=U^{k+1}E\mathbf{Z}^0 \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Σαφώς,

$$E\mathbf{Z}^{k+1}\left(\mathbf{Z}^{k+1}\right)'=\left(T+\mathbf{e}'GE\mathbf{Z}^k\right)diag(\sigma)^2+UE\mathbf{Z}^k\left(\mathbf{Z}^k\right)'U'.$$

Το αποτέλεσμα ακολουθεί με τη λήψη του ορίου καθώς $k \to \infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.12.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η διαχωρισιμότητα είναι προφανής. Επιπλέον

$$hE(X+y)^+ + bE(X+y)^- = (h+b)E(X+y)^+ - by.$$

Παίρνοντας την παράγωγο της τελευταίας έκφρασης, παίρνουμε

$$(h+b)\Phi((y+\mu)/\sigma\sqrt{t})\text{-}b,$$

όπού Φ είναι η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της κανονικής κατανομής. Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$(h+b)\phi((y+\mu)/\sigma\sqrt{t})/\sigma\sqrt{t}$$

πού ϕ είναι η πυκνότητα κανονικής κατανομής

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.13

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από την πρόταση 4.2 η $\Gamma(\mathbf{y})$ είναι αυστηρά κυρτή, έτσι έχει ένα μοναδικό ελάχιστο ικανοποιώντας τις συνθήκες πρώτης τάξης που είναι ισοδύναμες με

$$E_{\mathbf{Z}} \int_0^{T(\mathbf{Z})} E1\left\{t : X_i(t \mid \mathbf{Z}) + y_i \geq 0\right\} dt = b_i T / (b_i + h_i).$$

Το αποτέλεσμα ικανοποιείται από το y_i^* διαιρώντας με T ,το προσδοκώμενο μήκος κύκλου. Σημειώστε ότι αυτά τα επίπεδα υπηρεσιών είναι ίδια με εκείνα του προγράμματος στόχου! Επομένως, τα αποθέματα ασφάλειας ενισχύουν αυτήν την ιδιότητα.