ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Εκτίμηση της ζήτησης γαλακτοκομικών προϊόντων από ελλιπείς πληροφορίες και απλές πολιτικές εφοδιασμού

Διπλωματική εργασία:
Άγγελος Α. Οικονομόπουλος

Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλης Κουϊκόγλου

Χανιά, 2003

Με αφορμή την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής, θα ήθελα να ευχαριστήσω πραγματικά όλους όσους με βοήθησαν, αυτούς που στηρίξαμε ο ένας τον άλλο μέσα σε αυτά τα χρόνια, αυτούς που τους πίστεψα και με πίστεψαν, τον πατέρα μου, την οικογένειά μου, τον Νίκο, τον Κώστα, τους άλλους φίλους μου, την Εύα. Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Βασίλη Κουϊκόγλου, για την υποστήριξη και συμπαράσταση του, τις απαραίτητες υποδείξεις αλλά κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθ’ όλη την διάρκεια αυτής της εργασίας. Επίσης, οφείλω να ευχαριστήσω την εταιρία Cretalat Α.Ε. για την συνεργασία και την πολύτιμη βοήθειά της.

"Some of these days,
we're going to change our evil ways…
…Ride on my friend"

Στον αδερφό μου Κωνσταντίνο

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ένας μπάρμαν ρώτησε τον Άντυ Κάπ τι από όλα θα διάλεγε: το χρήμα, τη δύναμη, την ευτυχία ή την ικανότητα να προβλέπει το μέλλον;
«Να προβλέπω το μέλλον», απάντησε ο Άντυ. «Έτσι θα μπορέσω να γίνω πλούσιος. Τα πλούτη θα μου φέρουν δύναμη και τότε θα είμαι ευτυχισμένος!»

Θ. Μόδης

Αυτή η εργασία εξετάζει ένα πρόβλημα πρόβλέψης της ζήτησης που αντιμετωπίζει μια γαλακτοκομική εταιρία.
Η εταιρία παρουσίασε την πρόβλεψη της ζήτησης σαν την λύση στο πρόβλημα των άστοχων παραγγελιών. Στην ουσία αυτό που ζητάει είναι τρόποι να μεγιστοποιήσει το μέσο κέρδος της λαμβάνοντας υπ' όψιν τα κέρδη από πωλήσεις και το κόστος επιστροφών. Η σωστή πρόβλεψη της ζήτησης βοηθά στη μείωση του κόστους των επιστροφών (υπερεκτίμηση της ζήτησης) και του κόστους ελλείμματος (απώλειας των κερδών, λόγω υποεκτίμηση της ζήτησης). Παρ' όλα αυτά, η πρόβλεψη της ζήτησης δεν είναι αρκετή για να λυθεί με ακρίβεια ένα τέτοιο πρόβλημα.

Αναλύοντας τα παραπάνω, καταστρώνουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης των ποσοτήτων που τοποθετούνται στα σημεία πώλησης, ώστε να μεγιστοποιείται το μέσο κέρδος της εταιρίας. Για τον υπολογισμό αυτών των ποσοτήτων χρησιμοποιούνται προβλέψεις της ζήτησης των προϊόντων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 Εισαγωγή

1.1 Προβλήματα λήψης αποφάσεων στην βιομηχανική παραγωγή

Στις αρχές του 20στού αιώνα, το βασικό πρότυπο βιομηχανικής παραγωγής ήταν αυτό της μαζικής. Μαζική λέγεται η παραγωγή προϊόντων ιδίου τύπου χρησιμοποιώντας όλη την δυναμικότητα του εργοστασίου. Σύμφωνα με αυτό το πρότυπο, κάθε τμήμα του εργοστασίου παράγει συνεχώς, εφόσον έχει ικανή τροφοδοσία και επαρκή χώρο αποθήκευσης. Μέχρι τα μέσα του αιώνα, το είδος αυτό της παραγωγής ήταν βολικό, αφού απαιτούσε ελάχιστες προσπάθειες συντονισμού μεταξύ των τμημάτων του εργοστασίου.

Το πρότυπο αυτό, ενώ ταιριάζει σε βιομηχανίες οι οποίες λειτουργούσαν ως μονοπώλια (π.χ. η αυτοκινητοβιομηχανία Ford τότε), σήμερα εφαρμόζεται λιγότερο συχνά. Αιτία γι' αυτό είναι η αύξηση του αριθμού βιομηχανιών που παράγουν ίδια προϊόντα, πράγμα που άλλαξε δραματικά το σκηνικό της αγοράς κατά τις τελευταίες δεκαετίες. Στην εποχή του έντονου και σκληρού ανταγωνισμού, για να επιβιώσει μία βιομηχανία θα πρέπει να μειώσει το κόστος λειτουργίας της στο ελάχιστο, ενώ παράλληλα να είναι σε θέση να ικανοποιήσει την αγορά προσφέροντας ποικιλία παρόμοιων προϊόντων. Για την οικονομικά αποτελεσματική παραγωγή και διάθεση των προϊόντων απαιτείται η λήψη αποφάσεων που, μεταξύ άλλων, σχετίζονται με τον έλεγχο της παραγωγής σε κάθε τμήμα αλλά και τον συντονισμό των τμημάτων ώστε να ελαχιστοποιούνται τα προβλήματα υπερτροφοδοσίας (υψηλά αποθέματα) ή υποτροφοδοσίας (ελλείψεις-ανικανοποίητη ζήτηση) και τέλος, τον προσδιορισμό των ποσοτήτων παραγωγής και διάθεσης των προϊόντων σύμφωνα με την τάση της ζήτησης.

1.2 Αντικείμενο της εργασίας

Στην εργασία αυτή, ασχολούμαστε με το πρόβλημα του προσδιορισμού βέλτιστων ποσοτήτων παραγωγής και διάθεσης προϊόντων.

Εξετάζουμε μία γαλακτοκομική βιομηχανία η οποία τροφοδοτεί την αγορά με φρέσκο γάλα δύο τύπων (πλήρες, ελαφρύ) σε δύο συσκευασίες (0.5lit, 1lit). Μελετούμε δηλαδή τέσσερα διαφορετικά προϊόντα, με την στενή έννοια του όρου. Το πρόβλημα είναι να καθορίσουμε τις ποσότητες που πρέπει να παράγονται και να διατίθενται προς τα σημεία πώλησης ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος της επιχείρησης χωρίς να παραβιάζονται οι περιορισμοί δυναμικότητας του εργοστασίου και οι περιορισμοί πρώτων υλών.

Το κέρδος για κάθε προϊόν εξαρτάται από την ζήτηση και την ποσότητα που διανέμεται προς πώληση. Η ζήτηση όμως είναι μία στοχαστική διαδικασία και δεν μπορεί να θεωρείται δεδομένη. Για αυτό τον λόγο, σαν κριτήριο βελτιστοποίησης θα θεωρούμε το μέσο κέρδος.

1.3 Μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος

Για την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος ακολουθούμε δύο βασικά βήματα:

1) Κάνουμε μία εκτίμηση για την κατανομή της ζήτησης των προϊόντων
2) Προσδιορίζουμε τις κατάλληλες ποσότητες παραγωγής και διάθεσης αυτών, μέσω μεγιστοποίησης του μέσου κέρδους.

1.3.1 Εκτίμηση κατανομής ζήτησης

Για την εκτίμηση της κατανομής ζήτησης, υπάρχουν αρκετές αναφορές και εφαρμογές σε μεθόδους στην βιβλιογραφία των αποθεμάτων.

Μία από τις πιο δημοφιλείς είναι το μοντέλο ARMA (Autoregressive Moving Average) ή αλλιώς μοντέλο αυτοταλαντούμενου κινητού μέσου κατά Box-Jenkins (βλέπε σημειώσεις μαθήματος Συστήματα Παραγωγής, Γιάννη Α. Φίλη). Η μέθοδος αυτή αλλά και συγγενείς της (MA, AR, ARIMA), βασίζεται σε ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο συνδέει την μελλοντική ζήτηση (εξαρτημένη διαδικασία) με την ζήτηση του παρελθόντος.

Συγκεκριμένα, στα μοντέλα ARMA η ζήτηση εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός τιμών του παρελθόντος αλλά και άλλων τυχαίων μεταβλητών που δρουν ως "θόρυβος". Βασική παραδοχή της μεθόδου είναι ότι οι τιμές του θορύβου ακολουθούν κανονική κατανομή. Αυτό συνεπάγεται ότι και η ζήτηση ικανοποιεί κανονική κατανομή, πράγμα που δεν ισχύει αφού τότε θα έπρεπε η ζήτηση να παίρνει και αρνητικές τιμές. Η παραδοχή της κανονικής κατανομής είναι αποδεκτή όταν η ζήτηση έχει μεγάλη μέση τιμή (θετική) σε σχέση με την διασπορά της. Τότε η πιθανότητα "αρνητικής ζήτησης" είναι σχεδόν μηδενική. Σε αντίθετη περίπτωση, η προσέγγιση της κανονικής δεν είναι ακριβής, αφού οι αρνητικές τιμές, που δεν είναι ρεαλιστικές, έχουν σημαντική συνεισφορά στο μοντέλο.

Ένα ακόμη μειονέκτημα των μοντέλων ARMA είναι ότι απαιτούν σχετικά μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων για των υπολογισμό των παραμέτρων τους. Όπως θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο, η φύση των δεδομένων μας είναι τέτοια που δεν μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε μεγάλο αριθμό παρελθοντικών δεδομένων και άρα δεν μας επιτρέπει να προτιμήσουμε μοντέλα αυτής της κατηγορίας.

Στην εργασία αυτή ακολουθούμε μία απλούστερη μέθοδο. Χωρίζουμε τις παρατηρήσεις των πωλήσεων σε 2 κατηγορίες ημερών:

χαμηλής ζήτησης και

υψηλής ζήτησης

Αφού συλλέξουμε δεδομένα γι' αυτές τις κατηγορίες ημερών εκτιμούμε την συνάρτηση κατανομής τους χρησιμοποιώντας δύο εναλλακτικά στατιστικά εργαλεία: τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimation) και τη μέθοδο "Product Limit" που αναπτύχθηκε από τους Kaplan και Meier (1958). Οι δύο αυτές μέθοδοι παρουσιάζονται αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο και διαθέτουν προτερήματα σε σχέση με τα μοντέλα ARMA. Προτιμούνται γιατί δεν προϋποθέτουν κάποια συγκεκριμένη κατανομή η οποία θα πρέπει να προσαρμοσθεί στις παρατηρήσεις και το υπολογιστικό τους μέρος είναι πιο απλό και υπολογιστικά οικονομικό.

1.3.2 Προσδιορισμός βέλτιστων ποσοτήτων παραγωγής και διάθεσης

Το μέσο κέρδος της εταιρίας που εξετάζουμε εξαρτάται από δύο συνιστώσες: Το κέρδος από τις πωλήσεις και το κόστος των επιστροφών λόγω προϊόντων που έμειναν αδιάθετα. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα προϊόντα που επιστρέφονται είναι συνήθως άχρηστα, δεν έχουν δηλαδή κάποια αξία για την εταιρία και επομένως το κόστος είναι αρκετά σημαντικό.

Σε πολλές περιπτώσεις βελτιστοποίησης, αντί να εξετάζεται το κέρδος, από πωλήσεις χρησιμοποιείται το μέσο κόστος λόγω ελλείψεων, όταν οι ποσότητες που διατίθενται προς πώληση είναι μικρότερες της πραγματικής ζήτησης. Αυτή η θεώρηση είναι εντελώς ισοδύναμη με εκείνη του κέρδους με την έννοια ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ίδια. Το συνολικό ημερήσιο κόστος ισούται με το άθροισμα του κόστους λόγω έλλειψης, του κόστους επιστροφών, του κόστους παραγωγής και του κόστους των πρώτων υλών. Έτσι, αντί να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση κέρδους, μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση κόστους.

Ένας από τους παράγοντες που επηρεάζουν το πρόβλημα καθορισμού βέλτιστων ποσοτήτων παραγωγής και διάθεσης είναι η φύση του προϊόντος. Για την εταιρεία που εξετάζουμε, το φρέσκο γάλα έχει μικρό κύκλο ζωής, μόλις 3 ημερών, γεγονός που δεν επιτρέπει την ύπαρξη αποθέματος ούτε ως πρώτη ύλη, αλλά ούτε και ως τελικό προϊόν. Είναι λοιπόν προφανές πως ο σχεδιασμός της παραγωγής πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να εκμεταλλεύεται με τον καλύτερο τρόπο την πρώτη ύλη και να μην έχει υψηλό κόστος επιστροφών. Τέτοιου είδος προϊόντα έχουν την δική τους μεθοδολογία στην θεωρία παραγωγής-διάθεσης. Παρόμοιας φύσης πρόβλημα αποτελεί και εκείνο της διανομής εφημερίδων. Οι εφημερίδες δεν μπορούν να αποθηκευθούν για μελλοντική πώληση, αφού ο κύκλος ζωής τους είναι μόνο μία μέρα. Ο όγκος παραγωγής πρέπει να είναι αρκετά μελετημένος ώστε να καλύπτεται η ζήτηση και οι επιστροφές να περιορίζονται στο ελάχιστο δυνατό. Η εφημερίδα λειτούργησε σαν «πιλότος» για την παραγωγή προϊόντων με μικρό κύκλο ζωής. Ήταν ένα από τα πρώτα αγαθά για το οποίο δημιουργήθηκε η ανάγκη μαζικής παραγωγής και υπήρχε κλίμα ανταγωνισμού. Για αυτό τον λόγο, το πρόβλημα σχεδιασμού παραγωγής-διάθεσης για αγαθά σαν το φρέσκο γάλα, την εφημερίδα κ.α., έχει επικρατήσει να ονομάζεται σαν «το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη» ή «Newsboy problem». Σε επόμενο κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με αυτό το πρόβλημα διεξοδικά και θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή του στην δική μας περίπτωση .

1.4 Γιατί η βέλτιστη εκτίμηση της ζήτησης δεν αποτελεί και την βέλτιστη ποσότητα παράδοσης;

Διαβάζοντας τα παραπάνω, εύλογα δημιουργείται η απορία αν θα αρκούσε η πρόβλεψη της ζήτησης για τον καθορισμό της βέλτιστης ποσότητας παράδοσης. Πρέπει να σημειωθεί ότι η πρόβλεψη της ζήτησης είναι μία εκτίμηση, δεν αποτελεί γεγονός. Είναι ένα καλό εργαλείο για τον υπολογισμό ενός πεδίου τιμών, μέσα στο οποίο είναι πολύ πιθανό να βρεθεί η αυριανή ζήτηση. Η εκτίμηση αυτή αποτελεί ένα βασικό κομμάτι της θεωρίας που θα εφαρμόσουμε για τον καθορισμό των ποσοτήτων παράδοσης, αλλά δεν αποτελεί κατ' ανάγκη και τη βέλτιστη λύση.

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό παράδειγμα για να ισχυροποιήσουμε την θέση μας: Ας υποθέσουμε ότι για ένα προϊόν έχει καθοριστεί η κατανομή της ζήτησης όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\text{Ζήτηση} = Z = \begin{cases} 1 \text{ με πιθανότητα } 0.2 \\ 2 \text{ με πιθανότητα } 0.4 \\ 3 \text{ με πιθανότητα } 0.4 \end{cases}$$

Η αξία μίας μονάδας είναι 10€ (κόστος πρώτων υλών, παραγωγής, συσκευασίας, μεταφοράς) και το κέρδος από την πώλησή της είναι της τάξης του 10% στην αξία του, δηλαδή 1€. Υποθέτουμε πως παράγουμε και προσφέρουμε προς πώληση ποσότητα x, ενώ η ζήτηση είναι Z.

Τότε οι πωλήσεις είναι: min(x,Z)

το κέρδος είναι : $1 \times \min(x,Z)$

Εάν προσφέρουμε περισσότερα από Z, τότε το κόστος επιστροφών (απώλεια) είναι 10€ (τα προϊόντα καταστρέφονται). Η βέλτιστη εκτίμηση y της ζήτησης είναι εκείνη που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (LSE) της πρόβλεψης, δηλαδή:

$$LSE(y)=E[(y - Z)]^2=\min$$

Εφόσον είναι γνωστή η κατανομή της ζήτησης τότε:

$$\begin{aligned} \min LSE(y) &= \min E(y^2 - 2yZ - Z^2) \\ &= \min [E(y^2) + E(-2yZ) + E(Z^2)) \\ &= y^2 - 2yE(Z) + E(Z^2) \end{aligned}$$

Είναι γνωστό πως το ελάχιστο ακρότατο για μία συνάρτηση δευτέρου βαθμού όπως η MSE(y) εν προκειμένω, δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{dLSE(y)}{dy} = 0 \text{ , όταν } \frac{d^2LSE(y)}{dy^2} > 0$$

Αλλά $\frac{dLSE(y)}{dy} = 0 \Rightarrow 2y - 2\,E(Z)=0 \Rightarrow y = E(Z)$

ενώ επαληθεύουμε εύκολα ότι $\frac{d^2LSE(y)}{dy^2} = 2 > 0$

Άρα η βέλτιστη εκτίμηση της ζήτησης Z είναι:

$$y = E(Z) = 0.2\times1 + 0.4\times2 + 0.4\times3 = 2.2$$

Προκύπτει ότι έχουμε δύο εναλλακτικές ποσότητες για προσφορά, ή 2 ή 3. Θα εξετάσουμε και τις δύο περιπτώσεις για να βρούμε το μέσο κέρδος.

Για x=2 το κέρδος είναι: $\begin{cases} \text{αν } Z=1 \Rightarrow 1\times(+1) + 1\times(-10) = -9€ \\ \text{αν } Z=2 \Rightarrow 2\times(+1) = 2€ \\ \text{αν } Z=3 \Rightarrow 2\times(+1) = 2€ \end{cases}$

και το μέσο κέρδος $K(2) = -9 \times 0.2 + 2 \times 0.4 + 2 \times 0.4 = -0.2€$

Για x=3 το κέρδος είναι: $\begin{cases} \text{αν } Z=1 \Rightarrow 1\times(+1) + 2\times(-10) = -19€ \\ \text{αν } Z=2 \Rightarrow 2\times(+1) + 1\times(-10) = -8€ \\ \text{αν } Z=3 \Rightarrow 3\times(+1) = 3€ \end{cases}$

και το μέσο κέρδος $K(3) = -19 \times 0.2 + (-8) \times 0.4 + 3 \times 0.4 = -5.8€$

Αν τώρα εμείς, αντί για μία εκ των δύο επιλογών που προσεγγίζουν καλύτερα την βέλτιστη, επιλέξουμε να προσφέρουμε x=1 τότε έχουμε:

Για x=1 το κέρδος είναι: $\begin{cases} \text{αν } Z=1 \Rightarrow 1\times(+1) = 1€ \\ \text{αν } Z=2 \Rightarrow 1\times(+1) = 1€ \\ \text{αν } Z=3 \Rightarrow 1\times(+1) = 1€ \end{cases}$

και το μέσο κέρδος $K(1) = 1\times 0.2 + 1 \times 0.4 + 1 \times 0.4 = 1€$

Δηλαδή, το μέσο κέρδος εάν επιλέξουμε να τοποθετήσουμε ένα τεμάχιο, είναι μεγαλύτερο από το μέσο κέρδος εάν τοποθετήσουμε μία εκ των δύο βέλτιστων προβλέψεων της ζήτησης. Επομένως προκύπτει πως:

"η βέλτιστη εκτίμηση της ζήτησης, δεν είναι πάντα η βέλτιστη ποσότητα τοποθέτησης για να έχουμε το μέγιστο δυνατό μέσο κέρδος!"

Στα επόμενα κεφάλαια θα παρουσιάσουμε μεθόδους για την εκτίμηση της κατανομής της ζήτησης των προϊόντων που παράγει η εταιρία και μία μέθοδο προσδιορισμού της βέλτιστης πολιτικής διανομής αυτών των προϊόντων. Θα συγκρίνουμε την μέθοδο αυτή με την πολιτική βέλτιστης εκτίμησης της ζήτησης που περιγράψαμε στο προηγούμενο παράδειγμα και θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα.

2 Πρόβλεψη Ζήτησης – Συνάρτηση Κατανομής

2.1 Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της έρευνας, είναι να καθορίσουμε το βέλτιστο ημερήσιο επίπεδο παραγωγής και διανομής ενός προϊόντος με μικρό χρόνο ζωής, προϊόν δηλαδή που δεν μπορεί να αποθεματοποιηθεί. Για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να γνωρίζουμε ένα σημαντικό μέρος της κατανομής της ημερήσιας ζήτησής του. Για την εκτίμηση αυτής της κατανομής θα χρησιμοποιήσουμε στατιστικά εργαλεία και δεδομένα των ημερησίων πωλήσεων του παρελθόντος. Η ιδιαιτερότητα των προϊόντων τέτοιου τύπου έγκειται στις συχνές εξαντλήσεις του. Αυτό σημαίνει ότι είναι σπάνιο όλα τα δεδομένα των πωλήσεων να αντιπροσωπεύουν την ζήτηση. Εφόσον το προϊόν διανέμεται σε καθημερινή βάση και δεν παραμένει απόθεμα στα σημεία πώλησης για τις επόμενες ημέρες, το φαινόμενο να εξαντληθεί από τα ράφια είναι συχνό. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο αριθμός των πωλήσεων είναι σίγουρα μικρότερος ή ίσος της άγνωστης ημερήσιας ζήτησης. Στη στατιστική, τέτοια δεδομένα ονομάζονται συγκαλυμμένα ή αποκομμένα από τα δεξιά (right-censored). Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τρόπους για την συλλογή αλλά και επεξεργασία τέτοιων δεδομένων με σκοπό την εύρεση της συνάρτησης κατανομής για την ημερήσια ζήτηση του φρέσκου γάλακτος.

2.2 Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Η συλλογή των δεδομένων για την ανάπτυξη της λύσης δεν ήταν μια απλή διαδικασία. Η γαλακτοκομική εταιρία δεν είχε δεδομένα για τις ημερήσιες πωλήσεις, κατέγραφε καθημερινά τις τοποθετήσεις ανά σημείο πώλησης και τις επιστροφές. Οι επιστροφές δεν ήταν όλες από μια συγκεκριμένη παρτίδα παραγωγής και τοποθέτησης, αντίθετα, πολλές φορές, επιστρέφονταν την ίδια μέρα συσκευασίες γάλακτος οι οποίες είχαν αποσυρθεί από τα ράφια (δηλαδή πλησίαζαν στην ημερομηνία λήξης τους) σε διαφορετικές ημέρες. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούσε κανείς να υπολογίσει τις ακριβείς πωλήσεις μίας ημέρας. Έπρεπε να συλλέξουμε εμείς τα δεδομένα από την αρχή. Προφανώς δεν ήταν δυνατόν να καταγράψουμε τις πωλήσεις σε όλη την πόλη. Για αυτό τον λόγο, διαλέξαμε πιλοτικά ένα σημείο πώλησης με αρκετά μεγάλη απορροφητικότητα. Αναλύοντας τα δεδομένα αυτού μπορούμε να γενικεύσουμε όπως αναφέρεται σε επόμενο κεφάλαιο.

2.2.1 Συλλογή

Η διαδικασία συλλογής δεδομένων ξεκίνησε την Τρίτη 26 Νοεμβρίου του 2002. Ο τρόπος με τον οποίο εργαστήκαμε ήταν ο εξής:

Κάθε πρωί η εταιρία μας έδινε τις τοποθετήσεις για κάθε κωδικό στο συγκεκριμένο super market. Η πρώτη επίσκεψη γινόταν στις 14.30 οπότε καταμετρούνταν οι συσκευασίες που είχαν μείνει στο ψυγείο και καταγραφόταν ο αριθμός των πωλήσεων μέχρι εκείνη την ώρα. Το ίδιο γινόταν στις 17.00 και στις 20.00. Αν κάποια στιγμή το ψυγείο άδειαζε, τότε σημειωνόταν πως τα δεδομένα εκείνης της ημέρας ήταν σίγουρα μικρότερα ή και ίσα της ζήτησης, ανάλογα με την ώρα που σημειωνόταν η εξάντληση. Σε περίπτωση που υπήρχε περίσσευμα, τότε τα δεδομένα καταγράφονταν ως αντιπροσωπευτικά. Τις συσκευασίες που δεν πουλήθηκαν, εφόσον δεν είχαν λήξει, τις προσθέταμε στην τοποθέτηση της επόμενης ημέρας. Η πολιτική της εταιρίας, όσον αφορά τις επισκέψεις στα μεγάλα σημεία πώλησης, ήταν καθημερινή πλην σαββατοκύριακου. Για αυτό τον λόγο, Παρασκευή και Σάββατο θεωρήθηκαν «μία ημέρα» εφόσον η τοποθέτηση της Παρασκευής προοριζόταν για να καλύψει και τη ζήτηση του Σάββατο. Η καταγραφή των πωλήσεων σταμάτησε το Σάββατο 22 Φεβρουαρίου του 2003, όπου συμπληρώθηκαν και κατεγράφησαν 60 ημέρες τοποθετήσεων.

Τα δεδομένα όπως καταγράφηκαν, απεικονίζονται στον Πίνακα Π.2 του παραρτήματος.

2.2.2 Ανάλυση

Έχοντας πλέον συγκεντρώσει έναν ικανοποιητικό αριθμό δεδομένων, έπρεπε να τα ταξινομήσουμε και να τα αναλύσουμε, για την καλύτερη δυνατή εκμετάλλευσή τους. Αρχικά ξεχωρίσαμε τις καθημερινές πωλήσεις σε:

α) ακριβείς παρατηρήσεις της ζήτησης
β) περιπτώσεις όπου η ζήτηση εξάντλησε την ποσότητα που τοποθετήθηκε αλλά δεν ήμασταν σε θέση να προσδιορίσουμε εάν υπήρχε έλλειψη.
γ) περιπτώσεις όπου η ζήτηση εξάντλησε την ποσότητα που τοποθετήθηκε και πληροφορηθήκαμε ότι υπήρξαν ανικανοποίητοι πελάτες

Στον Πίνακα Π.3 του παραρτήματος φαίνεται η παραπάνω ταξινόμηση ανά προϊόν.

Εν συνεχεία, παρουσιάστηκε η ανάγκη να καθοριστεί ο χρονικός ορίζοντας των δεδομένων βάσει του οποίου θα βρίσκουμε την συνάρτηση κατανομής. Από την εταιρία μας προτάθηκε το χρονικό παράθυρο του ενός μήνα. Ο λόγος, όπως μας εξηγήθηκε, ήταν ότι η ζήτηση του γάλακτος διαφέρει αρκετά ανά περιόδους. Παράγοντες όπως ο τουρισμός το καλοκαίρι, η νηστεία την σαρακοστή, οι μέρες του Πάσχα, των Χριστουγέννων αλλά και η έλλειψη σε γάλα από αρχές Σεπτεμβρίου ως μέσα Νοεμβρίου, δεν αφήνουν μεγάλο χρονικό περιθώριο δεδομένων για ασφαλή προσέγγιση της κατανομής.

Συνειδητοποιώντας τα παραπάνω, εύλογη ήταν απορία του πώς θα χωριστούν οι ημέρες. Αν παραδείγματος χάρη θέλαμε να βρούμε μία κατανομή της ζήτησης για τις Δευτέρες, τότε θα είχαμε μόνον τέσσερα δεδομένα. Άρα λοιπόν, έπρεπε τα δεδομένα να ομαδοποιηθούν έτσι ώστε να έχουμε ένα αντιπροσωπευτικότερο δείγμα. Εξορύξαμε από την βάση δεδομένων την ποσότητα γάλακτος σε λίτρα που καταναλώνεται για κάθε ξεχωριστή μέρα της εβδομάδας, και υπολογίσαμε το ποσοστό που καταναλώνεται την κάθε μέρα στο σύνολο των δεδομένων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Λίτρα που πωλούνται ανά ημέρα 26/11/02 - 22/2/03					
	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρ+Σάβ
	52.909	41.154	27.909	29.955	84.231
Συνολικές πωλήσεις γάλακτος				236.157	
ποσοστό	22.40%	17.43%	11.82%	12.68%	35.67%

Πίνακας 1

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται πιο αναλυτικά τα δεδομένα για κάθε κωδικό ξεχωριστά.

Μέσος όρος πωλήσεων ανά προϊόν και πωλήσεις ανά ημέρα ως ποσοστό του συνόλου της εβδομάδας									
Γάλα πλήρες ενός λίτρου: GidP1					Γάλα ελαφρύ ενός λίτρου: GidH1				
Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρ+Σάβ	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρ+Σάβ
31	22	15	16	48	11	9	6	6	16
23.46%	16.64%	11.32%	11.80%	36.78%	22.28%	18.69%	12.76%	12.76%	33.51%
Γάλα πλήρες μισού λίτρου: GidP0.5					Γάλα ελαφρύ μισού λίτρου: GidH0.5				
Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρ+Σάβ	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρ+Σάβ
13	11	7	9	23	10	9	7	8	16
19.82%	17.98%	11.06%	14.07%	37.06%	20.35%	18.45%	13.63%	15.44%	32.13%

Πίνακας 2

Χρησιμοποιώντας και αναλύοντας τα στοιχεία των δύο παραπάνω πινάκων, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τις ημέρες ανάλογα με το επίπεδο των πωλήσεών τους. Παρατηρούμε την ομοιότητα που παρουσιάζουν οι Τετάρτες με τις Πέμπτες. Αυτή είναι μία καλή ομαδοποίηση αφού σε αυτές τις ημέρες καταναλώνεται η ίδια ποσότητα γάλακτος. Εξακολουθεί όμως να υπάρχει μία σημαντική απόκλιση στις υπόλοιπες ημέρες. Με μία πρώτη ματιά θα μπορούσε κανείς να αντιμετωπίσει μαζί, τις Δευτέρες με τις Τρίτες και να αφήσει Παρασκευές/Σάββατα (θεωρούνται μία ημέρα) ξεχωριστά. Μία τέτοια κίνηση θα δημιουργούσε πρόβλημα παρόμοιο με αυτό που μας οδήγησε στην λύση της ομαδοποίησης και αυτό διότι τα δεδομένα μας θα ήταν μόνο τέσσερα για αυτές τις μέρες. Έτσι και αφού δεν μπορούσαμε να αλλάξουμε την πολιτική επισκέψεων της εταιρίας στα σημεία πώλησης, θεωρήσαμε τις Τρίτη–Τετάρτη-Πέμπτη ως ημέρες χαμηλής πώλησης και τις Δευτέρα–Παρασκευή-Σάββατο ως ημέρες υψηλής. Συνέπεια αυτής της ομαδοποίησης θα είναι να επηρεαστούν τα αποτελέσματα. Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε με πιο τρόπο και σε τι βαθμό. Παρ' όλα αυτά, δεν επηρεάζεται η κεντρική ιδέα που προσπαθούμε να δείξουμε σε αυτήν την έρευνα.

2.3 Εκτίμηση παραμέτρων ζήτησης

Συνοψίζοντας, τα δεδομένα μας χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ζήτησης: υψηλή και χαμηλή. Θεωρούμε ότι για μία περίοδο τεσσάρων εβδομάδων τα στατιστικά των ημερών κάθε κατηγορίας είναι σταθερά (στοχαστικά αμετάβλητες διαδικασίες υπό την στενή έννοια). Βάσει των παραπάνω, θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο, για κάθε κατηγορία και για κάθε παράθυρο στοχαστικά αμετάβλητης ζήτησης, κάνουμε εκτίμηση της συνάρτησης κατανομής της και των πιθανοτήτων να πάρει αυτή μία συγκεκριμένη τιμή.

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, μπορούμε με διάφορες μεθόδους να δώσουμε μια εκτίμηση των παραμέτρων. Εδώ θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε δύο: την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood method, ΜΜΠ) και την μέθοδο product limit (PL) κατά Kaplan-Meier(1958).

2.3.1 Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Η ΜΜΠ είναι μία αποτελεσματική μέθοδος για την εκτίμηση των παραμέτρων μίας κατανομής. Κάθε κατανομή εξαρτάται από μία ή και περισσότερες παραμέτρους. Η κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων είναι αυτή που κάνει μία κατανομή αντιπροσωπευτική των δεδομένων. Η μέθοδος συνοψίζεται στα ακόλουθα.

Αν f(x,a,b,…) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σπп) μίας τυχαίας μεταβλητής, και a,b,… άγνωστες παράμετροι, τότε η σπп της κατανομής ενός πλήθους Ν ανεξάρτητων παρατηρήσεων x_1, x_2, …, x_N είναι:

$$L(a,b,...) = f(x_1,a,b,...)\cdot f(x_2,a,b,...)\cdot ...\cdot f(x_N,a,b,...) \quad (1)$$

Οι τιμές των a,b,… που μεγιστοποιούν την L είναι και οι τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης κατανομής που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα. Τα a,b,… που μεγιστοποιούν την ln(L), μεγιστοποιούν και την L. Εφόσον η L είναι κοίλη, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τα a,b,… λύνοντας το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \ln(L)}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}[\ln f(x_1,a,b...)+\ln f(x_2,a,b,...)+...+\ln f(x_N,a,b,...)]=0\\ \frac{\partial \ln(L)}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}[\ln f(x_1,a,b...)+\ln f(x_2,a,b,...)+...+\ln f(x_N,a,b,...)]=0\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

αντίστοιχα για κάθε παράμετρο.(βλέπε σημειώσεις μαθήματος Προσομοίωση, Βασίλη Σ. Κουικόγλου)

2.3.1.1 Εφαρμογή της ΜΠΠ στο πρόβλημά μας

Όπως αναφέρουν οι Lau και Lau (1996), ο Conrad υπέθεσε ότι η ζήτηση ακολουθεί κατανομή Poisson, η παράμετρος λ της οποίας είναι σταθερή αλλά άγνωστη. Παρουσίασε μία μέθοδο για την εύρεση της πλέον πιθανής εκτίμησης της λ βασισμένη στην ΜΜΠ. Στην βιβλιογραφία της στατιστικής, η ΜΜΠ χρησιμοποιείται σε διάφορες θεωρητικές κατανομές πέραν της Poisson π.χ. εκθετική, κανονική, γάμα, Weibull. Επίσης, οι Lau και Lau (1996) αναφέρουν ότι ο Bell και ο Wecker, ανεξάρτητα, υπέθεσαν ότι η ζήτηση ακολουθεί την κανονική κατανομή, ενώ ο Hill κατέληξε σε ένα μοντέλο πρόβλεψης που οδηγεί σε μία σύνθετη κατανομή Poisson. Εν γένει, οι Εξισώσεις (2) επιλύονται αριθμητικά. Η λύση μπορεί να γίνει αρκετά δύσκολη και πολύπλοκη αν η υποτιθέμενη κατανομή εξαρτάται από πολλές παραμέτρους. Το γεγονός ότι δεν υπάρχει κάποια κατανομή τόσο γενική ώστε να μπορεί να περιγράψει την ζήτηση οποιοδήποτε προϊόντος (με κατάλληλο προσδιορισμό κάποιων παραμέτρων), μας οδήγησε στην ΜΜΠ.

Αντί να υποθέτουμε μία συγκεκριμένη σππ για να ταιριάξουμε στα δεδομένα μας, ακολουθήσαμε μία μη παραμετρική μέθοδο, όπως λέγεται στη στατιστική.

Παρατηρούμε αρχικά ότι η ζήτηση X σε μία ημέρα και για ένα ορισμένο προϊόν, είναι τυχαία και παίρνει τιμές x_1, x_2, … . Για παράδειγμα τα x_i μπορεί να είναι $x_1=1$, $x_2=2$, …. Ορίζουμε $p_i = P(x_i = X)$ και $F(x_i)= P(X \geq x_i)=p_1 + p_2 +\ldots+p_i$. Τα p_i ή εναλλακτικά τα $F(x_i)$, προσδιορίζουν την κατανομή της X και είναι οι ζητούμενες ποσότητες. Τώρα για κάθε ποσότητα x_i υποθέτουμε ότι διαθέτουμε τα εξής δεδομένα:

n_i = πλήθος των ημερών που η ζήτηση $X= x_i$
m_i= πλήθος των ημερών που η ζήτηση $X\geq x_i$
l_i= πλήθος των ημερών που η ζήτηση $X> x_i$

(βλέπε Πίνακα Π.3 του παραρτήματος)

Επειδή δεν έχουμε παρατηρήσεις $< x_1$, θα υποθέσουμε ότι $P(X < x_1) = 0$.
Αν x_k είναι η μέγιστη ποσότητα που έχει πουληθεί, τότε η πραγματική ζήτηση μπορεί να είναι μεγαλύτερη του x_k . Ορίζουμε $p_{k+1} = P(X > x_k)$, αφού το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι 1, έχουμε:

$$p_{k+1} = 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_k \qquad (3)$$

Οι παρατηρήσεις μας είναι χωρισμένες σε τρεις κατηγορίες και διατίθενται στον Πίνακα 3

Αρχικά δεδομένα					
Ποσότητα, x_i	x_1	…	x_i	…	x_k
Συχνότητα εμφανίσεως $X = x_i$	n_1	…	n_i	…	n_k
Συχνότητα εμφανίσεως $X \geq x_i$	m_1	…	m_i	…	m_k
Συχνότητα εμφανίσεως $X > x_i$	l_1	…	l_i	…	l_k

Πίνακας 3

Θέλουμε η πιθανότητα L να συμβεί αυτό που έχουμε παρατηρήσει να είναι μέγιστη. Εμείς έχουμε παρατηρήσει n_i φορές ζήτηση $X= x_i$, m_i φορές ζήτηση $X\geq x_i$, l_i φορές ζήτηση $X> x_i$. Η πιθανότητα αυτών των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$[P(x_i = X) \times \ldots \times P(x_i = X)$ (n_i φορές)$] \times [P(X \geq x_i) \times \ldots \times P(X \geq x_i)$ (m_i φορές)$] \times$
$[P(X > x_i) \times \ldots \times P(X > x_i)$ (l_i φορές)$]$
$= p_i^n (p_{i+1} + \ldots + p_k)^{m_i} (p_i + \ldots + p_k)^{l_i}$

Η αντίστοιχη συνάρτηση (1) για το πρόβλημά μας είναι:

$$L(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \prod_{1=1}^{k} p_i^{n_i} \cdot \prod_{i=1}^{k} (p_{i+1} + p_{i+2} + \ldots + p_k)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^{k} (p_i + p_{i+1} + \ldots + p_k)^{l_i} \quad (4)$$

Αυτή την ποσότητα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε. Συγκρίνοντας τις Εξισώσεις (1) και (4) παρατηρούμε ότι η παράμετροι της κατανομής που ψάχνουμε είναι οι ίδιες οι πιθανότητες p_i. Λύνοντας την Εξίσωση (4) με τον τρόπο που υποδείξαμε στο σύστημα (2) καταλήγουμε στους παρακάτω τύπους για τις p_i:

$$p_1 = \frac{n_1}{N_1 + M_2 + L_1} \quad (5)$$

$$p_i = \frac{n_i}{N_i + M_{i+1} + L_i}(1 - p_1 - \ldots - p_{i-1}) \quad (6)$$

$$p_k = \frac{n_{ki}}{n_k + m_k}(1 - p_1 - \ldots - p_{k-1}) \quad (7)$$

όπου για συντομία έχουμε ορίσει

$N_i = n_i + n_{i+1} + \ldots + n_k$
$M_i = m_i + m_{i+1} + \ldots + m_k$
$L_i = l_i + l_{i+1} + \ldots + l_k$ για κάθε $i = 1 \ldots k$.

Το p_{k+1} βρίσκεται από την Εξίσωση (3). Λεπτομερής απόδειξη των Εξισώσεων (5)-(7) παρουσιάζεται στο Παράρτημα Π.1.

2.3.1.2 Εφαρμογή τύπων της ΜΜΠ και αποτελέσματα

Στην παράγραφο αυτή περιγράφουμε πως επεξεργαστήκαμε δεδομένα από ένα σημείο πώλησης (Πίνακας Π.2 του παραρτήματος) με την βοήθεια του προγράμματος Excel. Αρχικά τροποποιούμε τον Πίνακα Π.2 του παραρτήματος, τοποθετώντας μία ακόμη στήλη που δηλώνει την κατηγορία της ημέρας, **X** για τις ημέρες χαμηλής ζήτησης και **Y** για τις μέρες υψηλής. Τοποθετούμε φίλτρα στις στήλες αριθμού, ημέρας, ημερομηνίας και κατηγορίας για να επεξεργαστούμε τα δεδομένα καλύτερα. Θεωρούμε ότι έχουμε παρατηρήσεις για τις τριάντα πιο πρόσφατες ημέρες (από Τρίτη 26 Νοεμβρίου έως Δευτέρα 13 Ιανουαρίου). Η πρώτη πρόβλεψη κατανομής που μπορούμε να κάνουμε είναι για την 31η ημέρα, αφού το χρονικό περιθώριο έχει τοποθετηθεί στις τριάντα ημέρες. Η 31η ημέρα είναι η Τρίτη 14 Ιανουαρίου, ημέρα χαμηλής ζήτησης. Χρησιμοποιούμε τα φίλτρα έτσι ώστε, για τις ημέρες με αριθμό 1 έως 30 να παρουσιάζονται μόνο οι μέρες χαμηλής ζήτησης. Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Δεδομένα πωλήσεων για:				GidP1			GidP0.5			GidH1			GidH0.5		
2	No Μέρ	Ημερομηνία		Κατ. Χι	n	m	l	n	m	l	n	m	l	n	m	l
3	1	τρίτη	26-Νοε	X	21					10			6		10	
4	2	τετάρτη	27-Νοε	X	16					7			4			5
5	3	πέμπτη	28-Νοε	X			18			8			3			6
8	6	τρίτη	3-Δεκ	X	9			10			4			3		
9	7	τετάρτη	4-Δεκ	X	24			6			6			9		
10	8	πέμπτη	5-Δεκ	X			18	10			5			8		
13	11	τρίτη	10-Δεκ	X	34			11			10			17		
14	12	τετάρτη	11-Δεκ	X			12			8		9		7		
15	13	πέμπτη	12-Δεκ	X	17				16			10				10
18	16	τρίτη	17-Δεκ	X	28				16			10		14		
19	17	τετάρτη	18-Δεκ	X	14			6			5			12		
20	18	πέμπτη	19-Δεκ	X	11			6					8	7		
23	21	τρίτη	24-Δεκ	X		28				13		10			14	
26	24	τρίτη	31-Δεκ	X		31			28		16				14	
28	26	τρίτη	7-Ιαν	X	27			13				13		9		
29	27	τετάρτη	8-Ιαν	X	12			5					2	4		
30	28	πέμπτη	9-Ιαν	X			14		6				5			8

Σχήμα 1

Επεξηγήσεις για το Σχήμα 1:

- Οι παρατηρήσεις στη στήλη n συμβολίζουν ότι η ποσότητα που αναγράφεται ήταν και η ακριβής ποσότητα που ζητήθηκε
- Οι παρατηρήσεις στη στήλη m συμβολίζουν τις περιπτώσεις όπου η ζήτηση ήταν μεγαλύτερη ή ίση της ποσότητας που αναγράφεται
- Οι παρατηρήσεις στη στήλη l συμβολίζουν τις περιπτώσεις όπου η ζήτηση ήταν σίγουρα μεγαλύτερη της ποσότητας που αναγράφεται

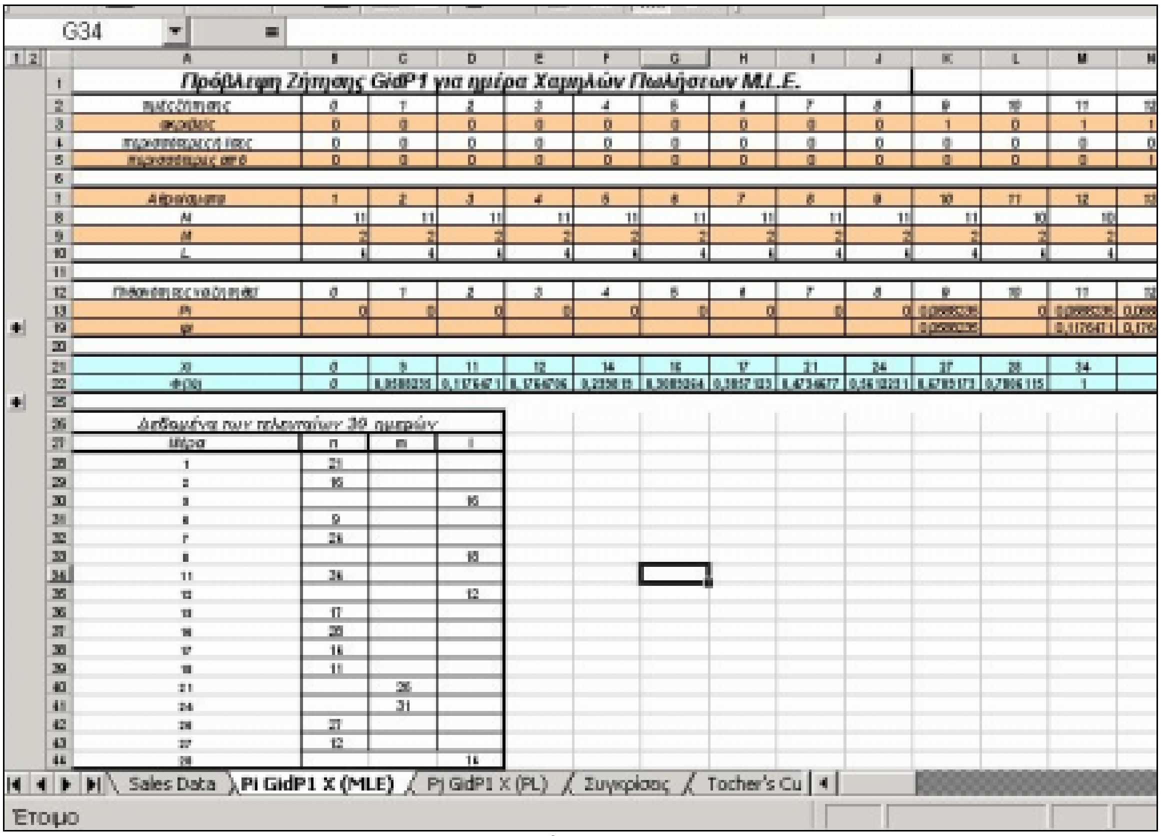
Προϊόντα:

- GidP1: Γάλα πλήρες συσκευασίας ενός λίτρου
- GidP0.5: Γάλα πλήρες συσκευασίας μισού λίτρου
- GidH1: Γάλα ελαφρύ συσκευασίας ενός λίτρου
- GidH0.5: Γάλα ελαφρύ συσκευασίας μισού λίτρου

Για την εφαρμογή των Εξισώσεων (5),(6) και (7), θα δημιουργήσουμε ένα απλό πρόγραμμα στο Excel, το οποίο θα παίρνει τα δεδομένα που χρειάζεται από το αντίστοιχο Σχήμα 1 και θα τα επεξεργάζεται. Ας κάνουμε ένα παράδειγμα για να δούμε την λειτουργία αυτού του αρχείου.

Θα προσπαθήσουμε να προβλέψουμε τις πιθανότητες και την κατανομή του προϊόντος GidP1 για την Τρίτη 14 Ιανουαρίου. Η μορφή αυτού του προγράμματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.

Στον πίνακα «Δεδομένα των τελευταίων 30 ημερών» που διακρίνεται στο Σχήμα 2, μεταφέρονται τα δεδομένα από το σχήμα 1 που αφορούν το GidP1. Αυτά, με κατάλληλους τύπους τροποποιούνται στα κελιά των γραμμών 3,4 και 5 ώστε να τα χρησιμοποιούμε σύμφωνα με τις Εξισώσεις (5),(6),(7).



Σχήμα 2

Η επεξεργασία αυτή γίνεται στις γραμμές από 7 έως 19 και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στις γραμμές 21 και 22. Στην 21 διακρίνονται οι τιμές x_i που ήταν αντιπροσωπευτικές της ζήτησης και στην 22 οι αντίστοιχες τιμές τις $F(x_i)$. Το πρόγραμμα είναι έτσι σχεδιασμένο ώστε να μπορεί να δεχτεί δεδομένα για ποσότητες πωλήσεων έως και 99 τεμάχια, αριθμός που υπερκαλύπτει τις ανάγκες της εταιρίας για το συγκεκριμένο σημείο πώλησης που εξετάζουμε. Παρατηρήστε ότι, η συνάρτηση κατανομής δίνετε για τα διακριτά σημεία x_i των οποίων ο αριθμός ήταν αντιπροσωπευτικός της ζήτησης. Αυτό δεν είναι παράλογο, αρκεί να ρίξουμε μια ματιά στους τύπους και θα δούμε πώς οι πιθανότητες-παράμετροι παίρνουν μη μηδενικές τιμές μόνο όταν $n_i \neq 0$.

2.3.2 Μέθοδος Product Limit

Οι Lau και Lau (1996) παρουσίασαν μια εφαρμογή της μεθόδου "Product Limit" των Kaplan-Meier (1958), η οποία είναι πρακτική και υπολογιστικά απλή στην λύση της και όπως θα δούμε στην συνέχεια, η απόκλισή της από την Μ.Π.Π. είναι μικρή.

2.3.2.1 Εφαρμογή της PL στο πρόβλημα

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε K αξιολογημένες καθημερινές παρατηρήσεις πωλήσεων εκ των οποίων μόνο οι n φανερώνουν πραγματική ζήτηση, K>n. Τότε ορίζουμε:

$F(x)$ = P(Ζήτηση $\leq x$) η συνάρτηση κατανομής
$W(x) = 1 - F(x)$ = P(Ζήτηση > x)
x_i = ποσότητες που έχουν παρατηρηθεί (π.χ. $x_1=1$, $x_2=2,\ldots$), $i=1, \ldots, k$
n_i = όπως πριν, πλήθος ημερών στις οποίες η ζήτηση ήταν ίση με x_i

$$K_i = \sum_{j=i}^{k} (N_j + M_j + L_j)$$

$G_i = (K_i - n_i)/K_i$ (είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ώστε η ζήτηση $X > x_i$ δοθέντος ότι $X \geq x_i$ δηλαδή G_i = P(ζήτηση > x_i | ζήτηση $\geq x_i$)

Η μέθοδος εφαρμόζει κατά σειρά τα εξής:

$$\left.\begin{array}{l} G_i = (K_i - n_i)/K_i \\ W(x_i) = \prod_{j=1}^{i} G_j \\ F(x_i) = 1 - W(x_i) \end{array}\right\} \quad (8)$$

για $i=1, 2, \ldots, k$ και με $F(x_0)=0$

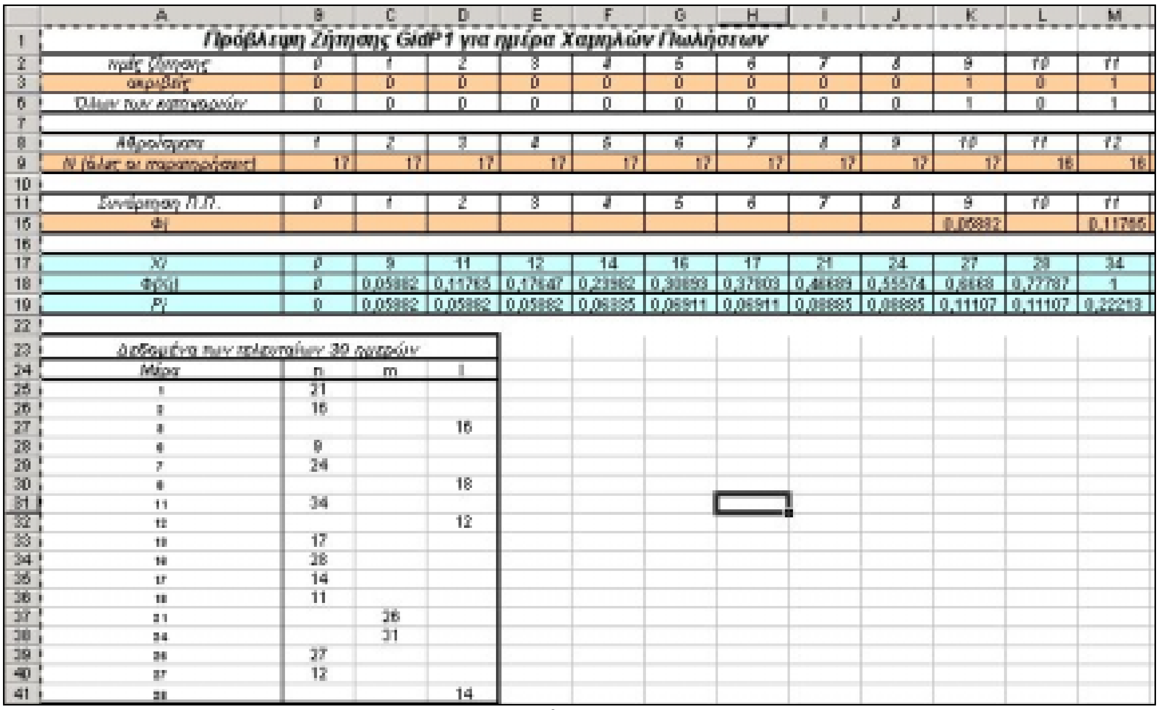
2.3.2.2 Εφαρμογή τύπων της μεθόδου PL και αποτελέσματα

Για την εφαρμογή των Εξισώσεων (8), θα χρησιμοποιήσουμε το Excel. Ας δουλέψουμε το αντίστοιχο παράδειγμα για την κατανομή του προϊόντος GidP1 της Τρίτης 14 Ιανουαρίου.

Η διαφορά αυτής της εφαρμογής με της ΜΠΠ είναι ότι η PL δεν χρησιμοποιεί τα δεδομένα τύπου l, δεν αναγνωρίζει δηλαδή τα δεδομένα που δηλώνουν μέρες με πωλήσεις σίγουρα μικρότερες της ζήτησης, $X \geq x_i$. Τα δεδομένα αυτά μπορούμε εύκολα, να τα τροποποιήσουμε κάνοντας την παρακάτω παρατήρηση:

Αν $X > x_i$ τότε $X \geq x_{i+1}$. Συνεπώς τα δεδομένα l_i προστίθενται στα m_{i+1} της αμέσως επόμενης ποσότητας x_{i+1}.

Με βάση αυτή την παρατήρηση, τροποποιήσαμε τα κελιά του αρχείου έτσι ώστε, τα δεδομένα για το GidP1 του σχήματος 1, να μπορούν αυτόματα να ταξινομηθούν σε μορφή τέτοια ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν οι Εξισώσεις (8). Το αρχείο για την PL παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3

Στην περιοχή «Δεδομένα των τελευταίων 30 ημερών» που διακρίνεται στο Σχήμα 3, μεταφέρονται τα δεδομένα από το Σχήμα 1 που αφορούν το GidP1. Αυτά, με κατάλληλους τύπους τροποποιούνται στα κελιά των γραμμών 2 και 3 ώστε να προκύψουν οι ποσότητες που χρησιμοποιούνται στις Εξισώσεις (8). Η επεξεργασία αυτή, γίνεται στις γραμμές από 8 έως 15 και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στις γραμμές 17,18 και 19. Το πρόγραμμα είναι έτσι σχεδιασμένο ώστε να μπορεί να δεχτεί δεδομένα για ποσότητες πωλήσεων έως και 99 τεμάχια, αριθμός που υπερκαλύπτει τις ανάγκες της εταιρίας για το συγκεκριμένο σημείο πώλησης.

2.3.3 Σύγκριση των αποτελεσμάτων ΜΜΠ και μεθόδου PL

Μία σημαντική παρατήρηση είναι ότι ακόμη δεν έχουμε προσδιορίσει μία αναλυτική έκφραση της συνάρτησης κατανομής της ζήτησης. Αυτό θα γίνει σε επόμενη ενότητα. Στους Πίνακες 4, 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα κάθε μεθόδου (ΜΜΠ, PL) και στον Πίνακα 6 υπολογίζονται οι αποκλίσεις τους. Το $F(x_i)$ δηλώνει την εκτίμηση της τιμής της συνάρτησης κατανομής της ζήτησης στο σημείο (ποσότητα) x_i.

Εκτίμηση F(x) με την ΜΜΠ											
Xi	***0***	***9***	***11***	***12***	***14***	***16***	***17***	***21***	***24***	***27***	***28***	***34***
F(Xi)	***0***	***0.059***	***0.118***	***0.176***	***0.240***	***0.309***	***0.386***	***0.473***	***0.561***	***0.671***	***0.781***	***1***

Πίνακας 4

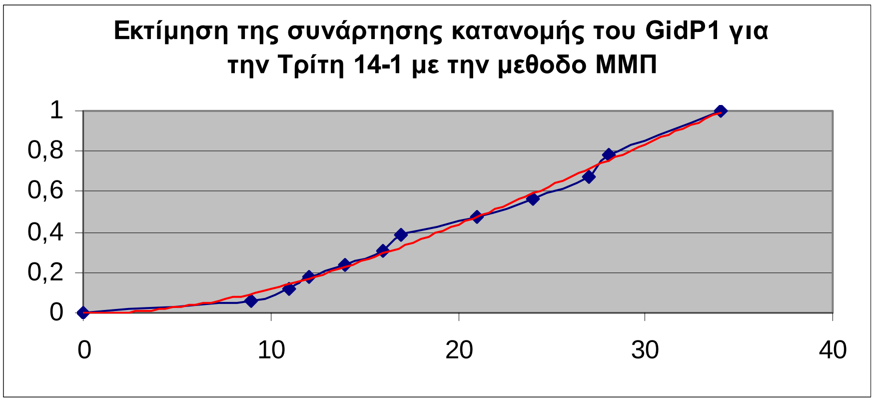
Εκτίμηση F(x) με την PL												
Xi	***0***	***9***	***11***	***12***	***14***	***16***	***17***	***21***	***24***	***27***	***28***	***34***
F(Xi)	***0***	***0.059***	***0.118***	***0.176***	***0.240***	***0.309***	***0.378***	***0.467***	***0.556***	***0.667***	***0.778***	***1***

Πίνακας 5

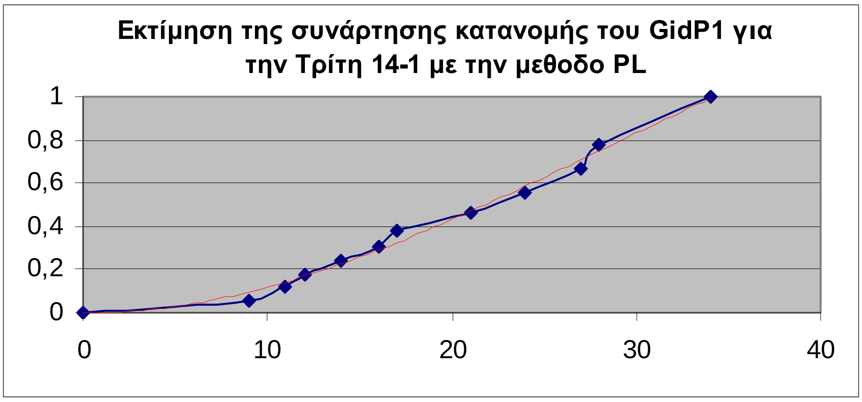
Απόκλιση αποτελεσμάτων μεταξύ ΜΜΠ- PL στην εκτίμηση F(x)											
Xi	9	11	12	14	16	17	21	24	27	28	34
F(Xi)ΜΜΠ - F(Xi)PL	0	0	0	0	0	0.008	0.007	0.005	0.004	0.003	0

Πίνακας 6

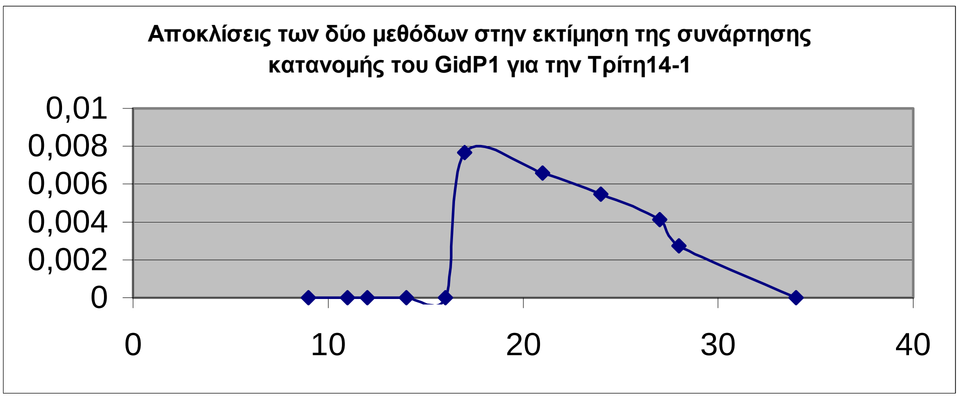
Από τον τελευταίο πίνακα είναι ξεκάθαρο ότι μιλάμε για δύο παρόμοιες μεθόδους με αποκλίσεις της τάξης του 2% στα αριθμητικά τους αποτελέσματα. Για λόγους ευκολίας, θα διαλέξουμε την P.L. για να συνεχίσουμε τους υπολογισμούς μας. Στα Σχήματα 4, 5, και 6, δίνονται οι γραφικές απεικονίσεις των Πινάκων 4, 5, 6 για καλύτερη σύγκριση των αποτελεσμάτων.



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6

2.4 Εκτίμηση της συνάρτησης κατανομής κατά Tocher

Αυτό που απομένει για να κλείσουμε το κεφάλαιο της πρόβλεψης, είναι να βρούμε μια αναλυτική έκφραση για τις συναρτήσεις κατανομής. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η βέλτιστη ποσότητα τροφοδοσίας x για κάθε προϊόν προκύπτει ως λύση της εξίσωσης

$F(x)=\pi \qquad (9)$

όπου π είναι ένας γνωστός αριθμός ο οποίος θα προκύψει από την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης του μέσου κέρδους. Για την επίλυση της Εξίσωσης (9), αντί της αριθμητικής ανάλυσης, ακολουθούμε μία αναλυτική προσέγγιση για λόγους απλότητας και υπολογιστικής ευκολίας. Συγκεκριμένα, αναζητούμε μία συνάρτηση τέτοια ώστε:

$F^{-1}(\pi)=x \qquad (10)$

για οποιοδήποτε ποσοστιαίο σημείο π της κατανομής. Αυτή η συνάρτηση είναι η αντίστροφη της συνάρτησης F(x). Όπως αναφέρουν οι Lau και Lau (1996), ο Tocher δημοσίευσε μία γενική προσέγγιση της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής, όπως παρουσιάζεται παρακάτω

$$F_T^{-1}(\pi) = a + b \times \pi + c \times \pi^2 + d \times (1+\pi)^2 \ln \pi + e \times \pi^2 \times \ln(1-\pi) \qquad (11)$$

όπου δείκτης τ υποδηλώνει ότι η F_T^{-1} είναι η προσέγγιση κατά Tocher.

Παρότι αυτή η καμπύλη κατανομής χρησιμοποιείται σπάνια στην βιβλιογραφία των αποθεμάτων, έχει κάποια σημαντικά προτερήματα που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε στην δική μας περίπτωση:

1. Η συνάρτηση αποτελείται από πέντε παραμέτρους (a, b, c, d, e) και παρέχει αρκετή ευελιξία για να προσεγγίσει μια ευρεία ποικιλία κατανομών, για δεδομένα με αρκετές διακυμάνσεις, όπως τα δικά μας.
2. Η (11) είναι γραμμική συνάρτηση των πέντε παραμέτρων οπότε μπορούμε πολύ εύκολα να τις υπολογίσουμε με το Excel μέσω μεθόδων όπως αυτή των ελαχίστων τετραγώνων.
3. Όπως αναφέρεται στους Lau και Lau (1996), οι Hadley και Whitin έδειξαν ότι η επίλυση ενός προβλήματος τύπου Newsboy με πολλά προϊόντα, απαιτεί μια επαναλαμβανόμενη εκτίμηση της συνάρτησης F(x) για κάθε προϊόν ξεχωριστά και για διάφορες τιμές του π. Η εργασία αυτή, απαιτεί την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος με πολλές μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας την κλειστή μορφή της αντίστροφης

συνάρτησης κατανομής κατά Tocher, μειώνουμε σε ένα μεγάλο βαθμό το υπολογιστικό φόρτο στο τελικό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

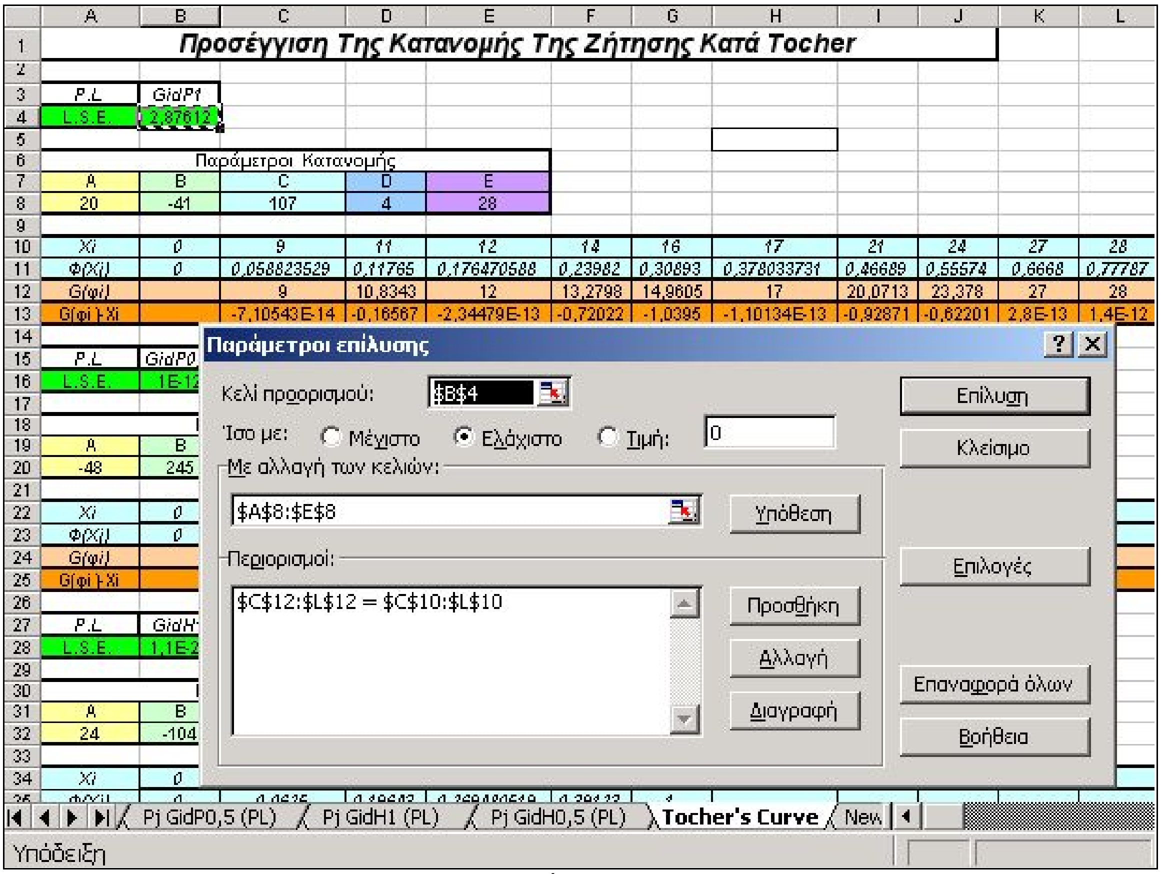
2.4.1 Εφαρμογή της συνάρτησης και αποτελέσματα

Χρησιμοποιώντας την επίλυση για γραμμικά προβλήματα που διαθέτει το Excel, θα προσεγγίσουμε την καμπύλη Tocher για κάθε προϊόν. Η παρουσίαση θα γίνει εκτιμώντας την κατανομή σε ημέρες χαμηλής ζήτησης με βάση τα δεδομένα που διαθέτουμε στο χρονικό διάστημα από Τρίτη 26 Νοεμβρίου μέχρι Δευτέρα 13 Ιανουαρίου. Δηλαδή σαν να βρισκόμαστε χρονικά στην Δευτέρα και να θέλουμε να εκτιμήσουμε την κατανομή της ζήτησης για την Τρίτη 14 Ιανουαρίου. Έχοντας το αντίστοιχο πρόγραμμα που είδαμε στο σχήμα 3 για κάθε προϊόν (GidP1, GidP0.5, GidH1, GidH0.5) θα μεταφέρουμε τις γραμμές 17 και 18 σε ένα ξεχωριστό λογιστικό φίλο και θα εφαρμόσουμε την δυνατότητα επίλυσης γραμμικών προβλημάτων από το Excel για κάθε σειρά δεδομένων. Ως αντικειμενική συνάρτηση θα ορίσουμε ένα κελί που θα υπολογίζει το τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης $F_T^{-1}(\pi_i)$ με την πραγματική ζήτηση x_i:

Τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης = $\sum [F_T^{-1}(\pi_i) - x_i]^2$

Όπου π_i=F(x_i) είναι γνωστοί αριθμοί από τις Εξισώσεις (8).

Αυτό είναι λογικό, αφού η συνάρτηση Tocher δίνει μία εκτίμηση των x_i υποθέτοντας γνωστές πιθανότητες π_i. Η βέλτιστη προσαρμογή γίνεται όταν το τετραγωνικό σφάλμα γίνεται ελάχιστο. Με αυτό τον τρόπο πετυχαίνουμε την καλύτερη δυνατή προσέγγιση της Tocher πάνω στα δεδομένα μας. Μεταβλητές ορίζονται οι παράμετροι a, b, c, d, και e. Η εφαρμογή του προγράμματος διακρίνεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7

Αφού πραγματοποιήσουμε την επίλυση για κάθε σειρά δεδομένων, θα έχουμε τέσσερις ομάδες παραμέτρων. Αυτές δίνουν την πρόβλεψη της συνάρτησης κατανομής κάθε προϊόντος για την Τρίτη 14 Ιανουαρίου. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 8. Οι μαθηματικές εκφράσεις των συναρτήσεων κατανομής για κάθε κωδικό είναι οι ακόλουθες:

Για το GidP1

$$F_T^{-1}(\pi) = 20 + (-41) \times \pi + 107 \times \pi^2 + 4 \times (1+\pi)^2 \times \ln \pi + 28 \times \pi^2 \times \ln(1-\pi)$$

Για το GidP0.5

$$F_T^{-1}(\pi) = (-48) + 245 \times \pi + (-335) \times \pi^2 + (-16) \times (1+\pi)^2 \times \ln \pi + (-102) \times \pi^2 \times \ln(1-\pi)$$

Για το GidH1

$$F_T^{-1}(\pi) = 24 + (-104) \times \pi + 215 \times \pi^2 + 6 \times (1+\pi)^2 \times \ln \pi + 49 \times \pi^2 \times \ln(1-\pi)$$

Για το GidH0.5

$$F_T^{-1}(\pi) = 10 + (-9) \times \pi + 28 \times \pi^2 + 2 \times (1+\pi)^2 \times \ln \pi + 4 \times \pi^2 \times \ln(1-\pi)$$

3	P.L	GldP1											
4	L.S.E	2,876116											
5													
6	Παράμετροι Κατανομής												
7	A	B	C	D	E								
8	20	-41	107	4	28								
9													
10	XI	0	9	11	12	14	16	17	21	24	27	28	34
11	Φ(XI)	0	0,058823529	0,117647	0,176470588	0,239819	0,308926	0,378033731	0,466886	0,555738	0,666804	0,777869	1
12	G(φI)		9	10,83433	12	13,27978	14,9605	17	20,07129	23,37799	27	28	
13	G(φI)-XI		-7,10543E-14	-0,16567	-2,34479E-13	-0,72022	-1,0395	-1,10134E-13	-0,92871	-0,62201	2,77E-13	1,44E-12	
14													
15	P.L	GldP0.5											
16	L.S.E	1E-12											
17													
18	Παράμετροι Κατανομής												
19	A	B	C	D	E								
20	-48	246	-336	-18	-102								
21													
22	XI	0	5	6	10	11	13	14					
23	Φ(XI)	0	0,058823529	0,235294	0,405228758	0,490196	0,592157						
24	G(φI)		5	6	10	11	13						
25	G(φI)-XI		0	8,88E-15	0	-1E-06	2,84E-14						
26													
27	P.L	GldH1											
28	L.S.E	1,1E-24											
29													
30	Παράμετροι Κατανομής												
31	A	B	C	D	E								
32	24	-104	216	8	48								
33													
34	XI	0	4	5	6	10	15						
35	Φ(XI)	0	0,0625	0,196429	0,269480519	0,391234	1						
36	G(φI)		4	5	6	10							
37	G(φI)-XI		1,12799E-13	6,12E-13	-8,41105E-13	6,75E-14							
38													
39	P.L	GldH0.5											
40	L.S.E	1,909057											
41													
42	Παράμετροι Κατανομής												
43	A	B	C	D	E								
44	10	-8	28	2	4								
45													
46	XI	0	3	4	7	8	9	12	14	17			
47	Φ(XI)	0	0,058823529	0,117647	0,243697479	0,312452	0,449962	0,559969442	0,669977	1			
48	G(φI)		3	4,821396	7	8	10,11102	12	14				
49	G(φI)-XI		2,57572E-14	0,821396	-7,81597E-14	1,1E-13	1,11102	-1,1724E-12	-2,5E-13				
50													

Σχήμα 8

3 Βέλτιστες ποσότητες διανομής

3.1 Εισαγωγή

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αναπτύξαμε τις μεθόδους για την εκτίμηση της κατανομής ζήτησης των προϊόντων προς τοποθέτηση. Πλέον, αυτό που μένει, είναι να αναπτύξουμε και να δούμε πρακτικά πως θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία για τον καθορισμό των βέλτιστων ποσοτήτων τοποθέτησης των προϊόντων στο σημείο πώλησης που παρακολουθήσαμε.

Για να το πετύχουμε αυτό, θα μελετήσουμε την θεωρία αποθεμάτων για προϊόντα μικρού κύκλου ζωής, όπως το γάλα. Η βιβλιογραφία αναφέρει αυτού του είδους τα προβλήματα διανομής ως το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη ή Newsboy problem. Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε την θεωρία αυτή στα δεδομένα μας και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με εκείνα της μεθόδου που εφαρμόζει η εταιρία.

3.2 Το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη (Newsboy Problem)

Το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη είναι ένα ευρέως γνωστό μοντέλο επιχειρησιακής έρευνας. Οι ποικίλες προεκτάσεις του έχουν εφαρμοστεί για την διαχείριση της δυναμικότητας και την αξιολόγηση αποφάσεων σε βιομηχανίες παραγωγής αλλά και εταιρίες που διαχειρίζονται αποθέματα. Το κλασικό πρόβλημα (προϊόντα μικρού κύκλου ζωής), χρησιμοποιείται για την εύρεση βέλτιστων ποσοτήτων παραγγελίας – παραγωγής - τοποθέτησης για τις οποίες, είτε μεγιστοποιείται το αναμενόμενο κέρδος, είτε ελαχιστοποιείται το αναμενόμενο κόστος που προκύπτει από την υπερεκτίμηση ή υποεκτίμηση της κατανομής ζήτησης.

Το μοντέλο Newsboy, όπως αναφέρουν οι Kogan και Lou (2003) πρωτοπαρουσιάστηκε από τους Arrow et al. και Morse and Kimbal. Από τότε συγκέντρωσε την προσοχή των βιομηχανιών και των ακαδημαϊκών στα θέματα αποθεμάτων ως μία πρωτοποριακή μέθοδος διαχείρισης των πόρων. Εκτενή αναφορά για τις εφαρμογές της μεθόδου και άλλα σχετικά πολυκριτήρια μοντέλα ελέγχου αποθεμάτων όπως αναφέρουν οι Kogan και Lou, έχουν κάνει ο Khouja καθώς και οι Silver et al.

3.2.1 Προσαρμογή του μοντέλου «newsboy» στο πρόβλημα

Μία εφαρμογή του προβλήματος Newsboy βρίσκεται στις σημειώσεις του μαθήματος «Συστήματα Παραγωγής», Γιάννη Α. Φίλη.

Για να προσαρμόσουμε την εφαρμογή στο πρόβλημά μας πρέπει να αναλύσουμε μερικές παραμέτρους της παραγωγικής διαδικασίας. Για το πρόβλημα της διανομής τεσσάρων προϊόντων (συσκευασιών) γάλακτος ορίζουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

B: ο μέγιστος συνολικός όγκος που μπορεί να τοποθετηθεί
x_i: τοποθέτηση προϊόντος i (ποσότητα που διανέμεται) ,i=1,2,3,4
V_i: όγκος του προϊόντος i
C_i: μοναδιαίο κόστος του προϊόντος i
r_i: τιμή πώλησης του προϊόντος i
X_i: πραγματική ζήτηση του προϊόντος i

Σε μερικές περιπτώσεις επιστροφών, το γάλα, αν κριθεί κατάλληλο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή τυριού. Για να υπολογίσουμε το κόστος των επιστροφών λοιπόν, πρέπει να συνυπολογίσουμε και το κέρδος από την εκμετάλλευση αυτής της επιστρεφόμενης ποσότητας. Αυτή η ποσότητα υπολογίζεται με βάση τις ακόλουθες παραμέτρους:

r_i': τιμή πώλησης ισοδύναμου τυριού που παράγεται από την επιστροφή του προϊόντος i
K_i': κόστος μετατροπής του επιστρεφόμενου προϊόντος i σε τυρί
V_i': συντελεστής μετατροπής μίας μονάδας επιστρεφόμενου προϊόντος i σε μία μονάδα τυριού

Ωστόσο από την εταιρία πληροφορηθήκαμε πώς οι τρεις αυτές παράμετροι μπορούν να συμπτυχθούν σε μία, αφού στην εταιρία έχουν καταλήξει σε ένα μέσο κόστος επιστροφής ανά λίτρο γάλακτος. Η παράμετρος αυτή θεωρήθηκε γνωστή και ίση με K_i. Έχουμε λοιπόν:

K_i: κόστος επιστροφής μίας μονάδας προϊόντος i

Σύμφωνα με την θεωρία του μοντέλου, πρέπει να κατασκευάσουμε μία αντικειμενική συνάρτηση, έστω κέρδους.

Το κέρδος εξαρτάται από το μέγεθος των πωλήσεων και των επιστροφών. Έστω φ ο όγκος των πωλήσεων και ξ των επιστροφών. Τότε:

$$\varphi = \min(x_i, X_i) \quad \text{και} \quad \xi = \max(x_i - X_i, 0) \quad (12)$$

Η συνάρτηση του κέρδους για τα τέσσερα προϊόντα παίρνει την μορφή:

$$Z = \sum_{i=1}^{4} (r_i\varphi - K_i\xi - x_iC_i) \qquad (13)$$

Η ζήτηση είναι στοχαστική, για αυτό θα δουλέψουμε μεγιστοποιώντας το μέσο κέρδος. Ο περιορισμός που πρέπει να λάβουμε υπ' όψη μας έγκειται στον μέγιστη ποσότητα γάλακτος (όγκο) που αντιστοιχεί στο σημείο πώλησης που εξετάζουμε. Έτσι η Εξίσωση(13) γίνεται:

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{4} (r_iE(\varphi) - K_iE(\xi) - x_iC_i) \quad (14)$$

ενώ ο περιορισμός δυναμικότητας γράφεται:

$$\sum_{i=1}^{4}(V_i x_i) \leq B \quad (15)$$

Από την θεωρία πιθανοτήτων και στατιστικής βρίσκουμε από την Εξίσωση (12) για τα Ε(φ) και Ε(ξ):

$$E(\varphi) = \int_0^{x_i} \delta_i f_i(\delta_i) d\delta_i + \int_{x_i}^{\infty} x_i f_i(\delta_i) d\delta_i = \int_0^{x_i} \delta_i f_i(\delta_i) d\delta_i + x_i[1 - F_i(x_i)] \quad (16)$$

$$E(\xi) = \int_0^{x_i} (x_i - \delta_i) f_i(\delta_i) d\delta_i \quad (17)$$

Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange για να μεγιστοποιήσουμε την Εξίσωση (14) υπό τον περιορισμό (15) , φτάνουμε στην παρακάτω σχέση προς μεγιστοποίηση:

$$J_a = E(Z) + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{4}(V_i x_i - B) \quad (18)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (14), (16), (17), (18) και μηδενίζοντας τις μερικές παραγώγους ως προς x_i.

$$\frac{\partial J_a}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow r_i - C_i - (r_i + K_i)F_i(x_i) - \lambda V_i = 0 \text{ , για } i = 1, 2, 3, 4$$

έχουμε ένα σύστημα 4 εξισώσεων και την

$\sum_{i=1}^{4}(V_i x_i) = B$ που αντιστοιχεί στην $\frac{\partial J_a}{\partial \lambda} = 0$.

Λύνοντας τα συστήματα προκύπτουν:

$$F_i(x_i^*) = \frac{r_i - C_i - \lambda^* \times V_i}{r_i + K_i} = \pi_i \quad (19)$$

όπου x_i^* είναι η βέλτιστη ποσότητα τοποθέτησης σύμφωνα με το μοντέλο Newsboy και λ^* ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστής Lagrange. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός η Εξίσωση (19) θα πάρει την μορφή:

$$F_i(x_i^*) = \frac{r_i - C_i}{r_i + K_i} = \pi_i \quad (20)$$

Το αριστερό μέρος των Εξισώσεων (19) και (20), ουσιαστικά ισούται με την τιμή της συνάρτησης κατανομής ζήτησης του προϊόντος i, για ζήτηση ίση με την βέλτιστη ποσότητα τοποθέτησης που προτείνει το μοντέλο. Αυτή η παρατήρηση θα μας φανεί πολύτιμη στην συνέχεια.

3.3 Καθορισμός βέλτιστων ποσοτήτων τοποθέτησης με την βοήθεια της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής

Ας θυμηθούμε πάλι την αντίστροφη συνάρτηση κατανομής ζήτησης του Tocher που συναντήσαμε στο 2^o Κεφάλαιο. Αυτή δίνεται από την Εξίσωση (11). Ας ανατρέξουμε επίσης στις Εξισώσεις (9), (10) και (19), (20). Είναι προφανές πως αν $F(x_i^*)=\pi_i$, σχέση παρόμοια με τις Εξισώσεις (19) και (20), τότε από τις Εξισώσεις (9) και (10) του Κεφαλαίου 2 έχουμε ότι:

$$F_T^{-1}(\pi_i)= x_i^* \quad (21)$$

Αν στην Εξίσωση (21) αντικαταστήσουμε τα π_i από την Εξίσωση (19), τότε προκύπτει:

$$x_i^*= a + b\left(\frac{r_i - C_i - \lambda^* V_i}{r_i + K_i}\right) + c\left(\frac{r_i - C_i - \lambda^* V_i}{r_i + K_i}\right)^2 + d\left[1 + \left(\frac{r_i - C_i - \lambda^* V_i}{r_i + K_i}\right)\right]^2 + e\left(\frac{r_i - C_i - \lambda^* V_i}{r_i + K_i}\right)^2 \ln\left[1-\left(\frac{r_i - C_i - \lambda^* V_i}{r_i + K_i}\right)\right] \quad (22)$$

Η Εξίσωση (22) μας δίνει της βέλτιστες ποσότητες τοποθέτησης για κάθε i, δοθέντος του βέλτιστου πολλαπλασιαστή Lagrange που προκύπτει από την ύπαρξη του περιορισμού. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός, θέτουμε λ*=0.

3.3.1 Εφαρμογή του μοντέλου – Αριθμητικά αποτελέσματα

Για να εφαρμόσουμε το μοντέλο του εφημεριδοπώλη και τις Εξισώσεις (19), (20), (22), πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές των παραμέτρων της παραγωγής που ορίζονται στην ενότητα 3.2.1. Αυτές παρουσιάζονται στον Πίνακα 7

Παράμετροι Παραγωγής				
	X1*	***X2****	***X3****	***X4****
Πώληση r	1.35	0.675	1.35	0.675
Κόστος C	0.9	0.45	0.9	0.45
Κόστος K	0.5	0.25	0.5	0.25
Όγκος V	1	0.5	1	0.5

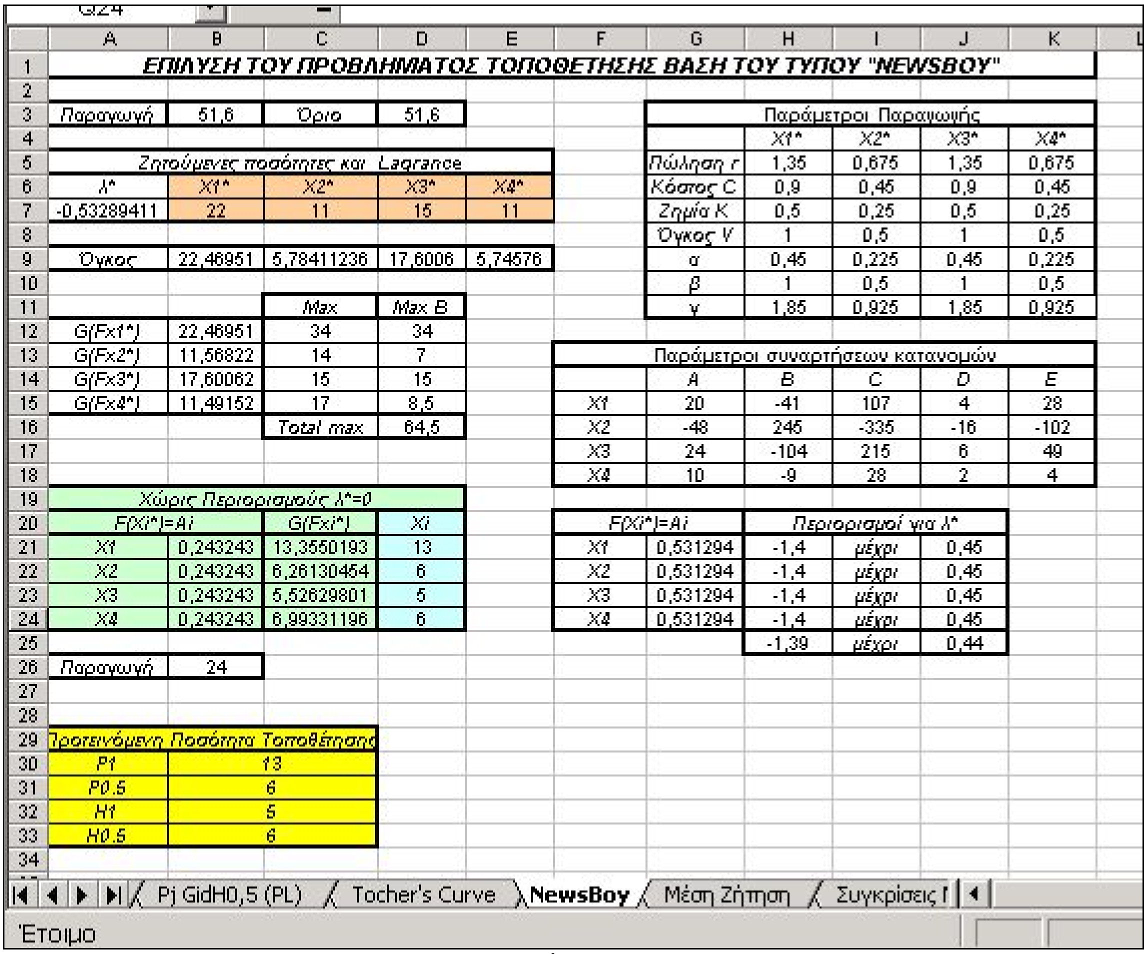
Πίνακας 7

Σαν παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την Τρίτη 14 Ιανουαρίου πάνω στην οποία έχουμε δουλέψει μέχρι αυτό το σημείο. Θα δημιουργήσουμε ένα λογιστικό φύλλο στο Excel στο οποίο:

1. Θα μεταφέρονται οι παράμετροι της παραγωγής του Πίνακα 7 και οι παράμετροι της αντίστροφης κατανομής Tocher που εμφανίζονται στο Σχήμα 8
2. Θα ευρίσκονται οι περιορισμοί για τον πολλαπλασιαστή λ
3. Θα ορίζεται το όριο B για τον περιορισμό του όγκου.

Οι περιορισμοί για τον λ, χρησιμοποιούνται έτσι ώστε το κλάσμα $\frac{r_i - C_i - \lambda^* V_i}{r_i + K_i}$, να βρίσκεται μεταξύ 0 και 1, αφού περιγράφει μία τιμή συνάρτησης κατανομής, Τέλος, ο περιορισμός του B εξαρτάται από τα δεδομένα του προηγούμενου μήνα. Ας δούμε ποια θα ήταν τα αποτελέσματα αν το B αντιστοιχεί στο 80% του αθροίσματος των μέγιστων ποσοτήτων σε λίτρα που ζητήθηκαν ανά κωδικό το διάστημα αυτό. Η επιλογή φαίνεται αυθαίρετη, αλλά από την εμπειρία μας φαίνεται ότι είναι ένα πολύ καλό επίπεδο ασφαλείας, όταν εξετάζει κανείς τις συνολικές πωλήσεις γάλακτος παρά ένα σημείο πώλησης.

Το φύλλο εργασίας που χρησιμοποιούμε παρουσιάζεται στο Σχήμα 9



ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ ΒΑΣΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ "NEWSBOY"

Παραγωγή	51,6	Όριο	51,6	
Ζητούμενες ποσότητες και Lagrance				
λ*	X1*	X2*	X3*	X4*
-0,53289411	22	11	15	11
Όγκος	22,46951	5,78411236	17,6006	5,74576
		Max	Max B	
G(Fx1*)	22,46951	34	34	
G(Fx2*)	11,56822	14	7	
G(Fx3*)	17,60062	15	15	
G(Fx4*)	11,49152	17	8,5	
		Total max	64,5	

Χώρις Περιορισμούς λ*=0			
F(Xi*)=Ai		G(Fxi*)	Xi
X1	0,243243	13,3550193	13
X2	0,243243	6,26130454	6
X3	0,243243	5,52629801	5
X4	0,243243	6,99331196	6

Παραγωγή	24

Προτεινόμενη Ποσότητα Τοποθέτησης	
P1	13
P0.5	6
H1	5
H0.5	6

Παράμετροι Παραγωγής				
	X1*	X2*	X3*	X4*
Πώληση r	1,35	0,675	1,35	0,675
Κόστος C	0,9	0,45	0,9	0,45
Ζημία K	0,5	0,25	0,5	0,25
Όγκος V	1	0,5	1	0,5
α	0,45	0,225	0,45	0,225
β	1	0,5	1	0,5
γ	1,85	0,925	1,85	0,925

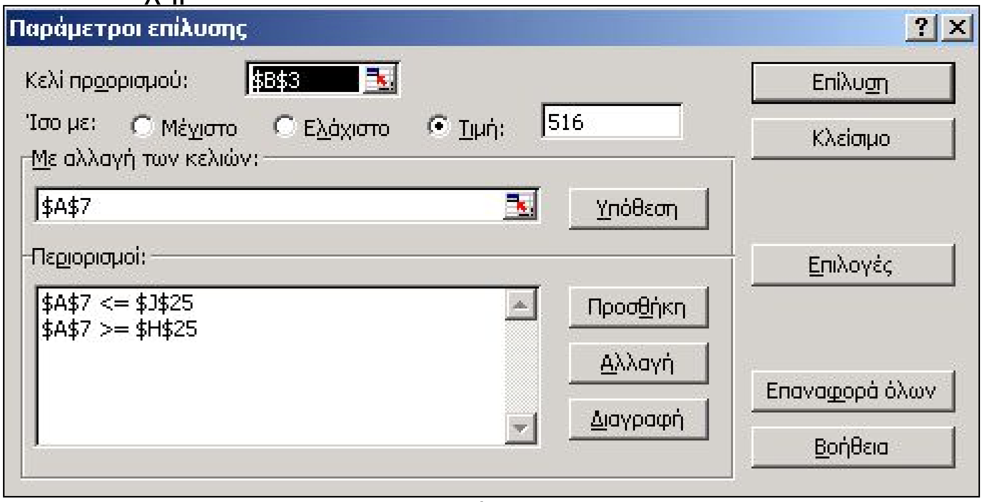
Παράμετροι συναρτήσεων κατανομών					
	A	B	C	D	E
X1	20	-41	107	4	28
X2	-48	245	-335	-16	-102
X3	24	-104	215	6	49
X4	10	-9	28	2	4

F(Xi*)=Ai		Περιορισμοί για λ*		
X1	0,531294	-1,4	μέχρι	0,45
X2	0,531294	-1,4	μέχρι	0,45
X3	0,531294	-1,4	μέχρι	0,45
X4	0,531294	-1,4	μέχρι	0,45
		-1,39	μέχρι	0,44

Σχήμα 9

Η κεντρική ιδέα είναι η εξής: Στα κελιά C12 έως C15, αναζητούνται οι μεγαλύτερες ποσότητες πωλήσεων ανά κωδικό στο διάστημα που καλύπτουν τα δεδομένα του Σχήματος 2. Δίπλα, στα κελιά D12 έως D15, οι ποσότητες αυτές μεταφράζονται σε λίτρα, αθροίζονται και στο κελί D3 υπολογίζεται το όριο B. Στο A7 τοποθετείται μία αρχική τιμή για το λ^*, έστω 0. Στα κελιά B12

έως B15 κατασκευάζεται η Εξίσωση (22) όπου, οι παράμετροι αναζητούν τις τιμές τους από τους πίνακες «Παράμετροι παραγωγής», «Παράμετροι συναρτήσεων κατανομών» που διακρίνονται στο Σχήμα 9 και το κελί A7. Τέλος, στα κελιά B7 έως E7 μεταφέρονται οι αντίστοιχες τιμές των B12-B15 σε λίτρα και στο B3 το άθροισμά τους.
Χρησιμοποιούμε την επίλυση για γραμμικά προβλήματα ,του Excel, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.



Σχήμα 10

Κριτήριο απόφασης είναι το κελί B3 να παίρνει την τιμή 51.6, τιμή ίση με αυτή του κελιού D3 στο οποίο αντιστοιχεί το όριο B. Κελί που θα αλλάζει ορίζεται το A7 (κελί για το λ*) και οι περιορισμοί είναι αυτοί που προκύπτουν από τον πίνακα «περιορισμοί για λ*» του Σχήματος 9. Η τιμή του A7 καθορίζει τα κελιά B12-B15 και αυτά με την σειρά τους το B3. Το Excel βρίσκει την κατάλληλη τιμή για λ* και κατ' επέκταση τις βέλτιστες ποσότητες.

Το μειονέκτημα αυτής της λύσης είναι ότι, ουσιαστικά τον περιορισμό της Εξίσωσης (15) τον χρησιμοποιεί σαν ισότητα. Στην πραγματικότητα όμως δεν είναι αναγκαίο. Για αυτό τον λόγο, στο ίδιο λογιστικό φύλλο, τροποποιήσαμε μερικά κελιά έτσι ώστε να δίνεται και η βέλτιστη λύση τοποθέτησης, χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψη ο περιορισμός. Διακρίνεται στο Σχήμα 9 ένας πίνακας με τίτλο «Χωρίς περιορισμούς λ*=0», μέσα σε αυτόν τον πίνακα αρχικά υπολογίζεται η εξίσωση (20) για κάθε x_i. Στην επόμενη στήλη, υπολογίζεται η αντίστοιχη Εξίσωση (22) με λ=0 (οι τιμές ανασύρονται από τους αντίστοιχους πίνακες) και στην τελευταία δίνονται οι ακέραιες τιμές της που αντιπροσωπεύουν τις βέλτιστες ποσότητες ζήτησης χωρίς περιορισμούς.

Η τελική λύση παρουσιάζεται στον πίνακα «Προτεινόμενη ποσότητα τοποθέτησης» που διακρίνεται στο Σχήμα 9. Μέσα σε αυτόν τον πίνακα εξετάζονται τα εξής εξετάζονται τα εξής:
Στο κελί B26, αθροίζεται η ποσότητα σε λίτρα που προτείνει η λύση χωρίς περιορισμούς, αυτή συγκρίνεται με το κελί D3. Εάν το B26 έχει μεγαλύτερη τιμή από το D3, τότε στον πίνακα παρουσιάζονται οι προτεινόμενες ποσότητες της λύσης με περιορισμό, αντίστοιχες με αυτές των κελιών B7 έως E7. Διαφορετικά παρουσιάζονται οι λύσεις του πίνακα «Χωρίς περιορισμούς λ*=0» που αντιστοιχούν στα κελιά D21 έως D24. Στο παράδειγμά μας, την Τρίτη 14

Ιανουαρίου οι προτεινόμενες ποσότητες σαν βέλτιστες προς τοποθέτηση που προκύπτουν είναι αυτές του πίνακα 8 :

Προτεινόμενη Ποσότητα Τοποθέτησης	
GipP1	13 τμχ
GidP0.5	6 τμχ
GidH1	5 τμχ
GidH0.5	6 τμχ

Πίνακας 8

3.4 Η μέθοδος προσδιορισμού ποσοτήτων τοποθέτησης σύμφωνα με την αντίληψη της γαλακτοκομικής εταιρίας

Η γαλακτοκομική εταιρία μέχρι τώρα χρησιμοποιούσε μία εμπειρική μέθοδο για να προσδιορίζει τις ποσότητες τοποθέτησης στα σημεία πώλησης. Βλέποντας ότι δεν είναι αποτελεσματικός αυτός ο τρόπος, η εταιρία θεώρησε ότι καλύτερη ποσότητα τοποθέτησης είναι και η βέλτιστη εκτίμηση της ζήτησης. Αρχικά άλλωστε αυτό μας ζητήθηκε από την εταιρία, να βρούμε δηλαδή απλά και μόνο μία μέθοδο για την καλύτερη εκτίμηση της ζήτησης.

Στο Κεφάλαιο 2, αναλύσαμε δύο μεθόδους για τον προσδιορισμό των πιο πιθανών ποσοτήτων να ζητηθούν στην επόμενη μέρα αλλά και τις πιθανότητες με τις οποίες μπορεί αυτές οι ποσότητες να εμφανιστούν σαν ζήτηση. Έχοντας αυτήν την πληροφορία, η βέλτιστη εκτίμηση της ζήτησης μπορεί εύκολα να υπολογιστεί. Από την θεωρία της στατιστικής μπορούμε να δούμε πως αυτή η τιμή δίνεται από την μέση ζήτηση. Από αυτό σημείο και μετά, θα αναφέρουμε την μέθοδο τοποθέτησης ποσοτήτων με βάση την βέλτιστη εκτίμηση της ζήτησης, ως μέθοδο μέσης ζήτησης.

3.4.1 Προσδιορισμός ποσοτήτων τοποθέτησης βάση την βέλτιστη εκτίμηση της ζήτησης – Μέση Ζήτηση - Αποτελέσματα

Αν μία τυχαία μεταβλητή, $x \geq 0$ παίρνει τιμή x_i με πιθανότητα p_i , $i=1,..\, n$, τότε η μέση τιμή της $\bar{x}$ ορίζεται:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{x_i=0}^{\infty} [1 - F(x_i)] \quad (23)$$

Έστω x_i, για $i=1$ έως N, ότι είναι οι ποσότητες που παρατηρήσαμε σαν αντιπροσωπευτικές της ζήτησης μίας ημέρας, από ένα σύνολο M παρατηρήσεων (όπως ορίζεται στην Παράγραφο 2.3.2.1). Αντίστοιχα p_i, είναι οι πιθανότητες για την κάθε ποσότητα να αποτελέσει ξανά την πραγματική ζήτηση. Τότε η Εξίσωση (23) δίνει την καλύτερη δυνατή εκτίμηση της ζήτησης

Ας κάνουμε ένα παράδειγμα όπου, ως ποσότητες τοποθέτησης στα σημεία πώλησης θα βάλουμε εμείς αυτές τις ποσότητες που αντιστοιχούν στην βέλτιστη εκτίμηση της ζήτησης. Σαν παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό, της Τρίτης 14 Ιανουαρίου. Οι παρατηρήσεις x_i, οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης κατανομής αλλά και οι πιθανότητες εμφάνισής τους στο μέλλον, για κάθε προϊόν παρουσιάζονται τους παρακάτω Πίνακες 9, 10, 11, 12:

GidP1	*0*	9	11	12	14	16	17	21	24	27	28	34
F(Xi)	*0*	0.059	0.118	0.176	0.24	0.31	0.378	0.467	0.556	0.667	0,779	1
Pi	0	0.059	0.059	0.059	0.063	0.069	0.069	0.089	0.089	0.111	0,111	0,222

Πίνακας 9

GidP0.5	*0*	5	6	10	11	13	14
F(Xi)	*0*	0.059	0.235	0.405	0.490	0.592	
Pi	0	0.059	0.176	0.170	0.085	0.102	0.408

Πίνακας 10

GidH1	*0*	4	5	6	10	15
F(xi)	*0*	0.063	0.196	0.269	0.391	1
Pi	0	0.063	0.134	0.073	0.122	0.609

Πίνακας 11

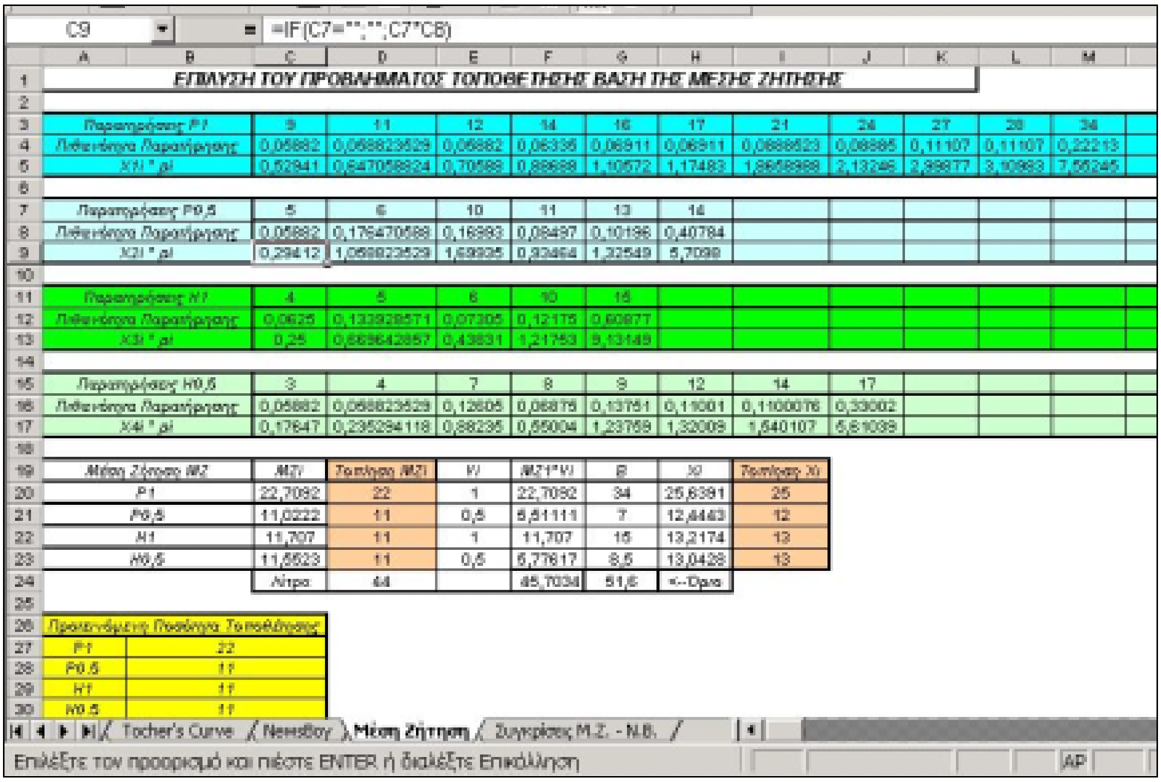
GidH0.5	*0*	3	4	7	8	9	12	14	17
F(Xi)	*0*	0.059	0.118	0.244	0.312	0.450	0.560	0.670	1
Pi	0	0.059	0.059	0.126	0.069	0.138	0.110	0.110	0.330

Πίνακας 12

Στον Πίνακα 10, η τιμή 14 έχει παρατηρηθεί σαν μεγαλύτερη ή ίση της ζήτησης, επομένως η αντίστοιχη τιμή p_i αντιστοιχεί στην πιθανότητα να ζητηθεί ποσότητα μεγαλύτερη του 14.

Χρησιμοποιώντας για άλλη μία φορά το Excel, θα δημιουργήσουμε ένα λογιστικό φύλλο στο οποίο θα υπολογίζεται η μέση ζήτηση για κάθε προϊόν. Στην συνέχεια εξετάζεται αν αυτή η ποσότητα ξεπερνά το όριο B της εξίσωσης (15). Εάν ναι, τότε επιμερίζουμε τις ποσότητες της μέσης ζήτησης ανάλογα, ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός, εάν όχι, οι ποσότητες αυτές αποτελούν και τις προτεινόμενες ποσότητες τοποθέτησης της μεθόδου.

Στο Σχήμα 11 παρουσιάζεται αυτό το λογιστικό φύλλο:



C9 =IF(C7="";"";C7*C8)

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ ΒΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

Παρατηρήσεις P1	9	11	12	14	16	17	21	24	27	28	34
Πιθανότητα Παρατήρησης	0,05882	0,058823529	0,05882	0,06336	0,06911	0,06911	0,0888523	0,08885	0,11107	0,11107	0,22213
X1i * pi	0,52941	0,647058824	0,70588	0,88688	1,10572	1,17483	1,8658988	2,13246	2,99877	3,10993	7,55245
Παρατηρήσεις P0,5	5	6	10	11	13	14					
Πιθανότητα Παρατήρησης	0,05882	0,176470588	0,16993	0,08497	0,10196	0,40784					
X2i * pi	0,29412	1,058823529	1,69935	0,93464	1,32549	5,7098					
Παρατηρήσεις H1	4	5	6	10	15						
Πιθανότητα Παρατήρησης	0,0625	0,133928571	0,07305	0,12175	0,60877						
X3i * pi	0,25	0,669642857	0,43831	1,21753	9,13149						
Παρατηρήσεις H0,5	3	4	7	8	9	12	14	17			
Πιθανότητα Παρατήρησης	0,05882	0,058823529	0,12605	0,06875	0,13751	0,11001	0,1100076	0,33002			
X4i * pi	0,17647	0,235294118	0,88235	0,55004	1,23759	1,32009	1,540107	5,61039			

Μέση Ζήτηση ΜΖ	ΜΖi	Τοποθέτηση ΜΖi	Vi	ΜΖi*Vi	B	Xi	Τοποθέτηση Xi
P1	22,7092	22	1	22,7092	34	25,6391	25
P0,5	11,0222	11	0,5	5,51111	7	12,4443	12
H1	11,707	11	1	11,707	15	13,2174	13
H0,5	11,5523	11	0,5	5,77617	8,5	13,0428	13
	Λίτρα	44		45,7034	51,5	<--Όρια	

Προτεινόμενη Ποσότητα Τοποθέτησης	
P1	22
P0.5	11
H1	11
H0.5	11

Σχήμα 11

Παρατηρούμε ότι στις γραμμές 5, 9, 13 ,17 υπολογίζονται τα $x_i p_i$ για κάθε προϊόν. Ο πίνακας «Μέση Ζήτηση ΜΖ» του Σχήματος 10 αποτελείται από:

- Τις στήλες «MZ_i» και «Τοποθέτηση MZ_i» οι οποίες δίνουν τα αποτελέσματα της Εξίσωσης (23) και τους αντίστοιχους ακέραιους

- Τις στήλες V_i, MZ_iV_i, B στις οποίες γίνεται ο υπολογισμός του όγκου της προτεινόμενης παραγγελίας και η σύγκριση του με το όριο B

- Τις στήλες «x_i» και «τοποθέτηση x_i» όπου γίνεται ο επιμερισμός των ποσοτήτων της μέσης ζήτησης στο όριο B.

Όπως στο Σχήμα 9, έτσι και εδώ, ο πίνακας στον οποίο προκύπτουν τα αποτελέσματα της μεθόδου είναι ο πίνακας «Προτεινόμενη ποσότητα τοποθέτησης». Στα κελιά αυτού, γίνεται η σύγκριση του B με τον συνολικό όγκο των ποσοτήτων Μ.Ζ. και εμφανίζεται η ποσότητα που ικανοποιεί τον περιορισμό της Εξίσωσης (15).

Στο παράδειγμά μας, για την Τρίτη 14 Ιανουαρίου, η εταιρία, υποθέτοντας πως ακολουθούσε την μέθοδο τοποθέτησης βάσει της μέσης ζήτησης, θα τοποθετούσε τις ποσότητες που εμφανίζονται στον Πίνακα 13:

Προτεινόμενη Ποσότητα Τοποθέτησης	
GipP1	***22 τμχ***
GidP0.5	***11 τμχ***
GidH1	***11 τμχ***
GidH0.5	***11 τμχ***

Πίνακας 13

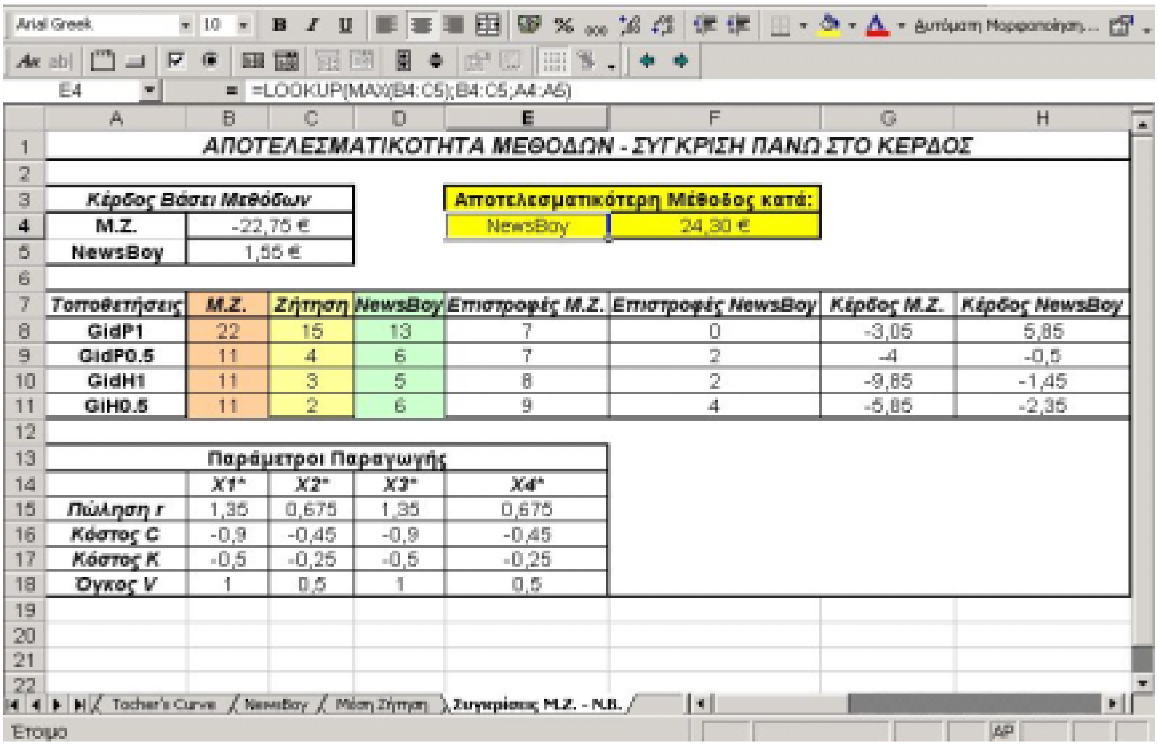
3.5 Σύγκριση Μεθόδων Newsboy και μέσης ζήτησης

Παρατηρώντας τους Πίνακες 8 και 13, βλέπουμε ότι οι δύο μέθοδοι έχουν μεγάλες αποκλίσεις. Η μέθοδος του εφημεριδοπώλη είναι μία συντηρητική μέθοδος, επιφυλακτική όσο αναφορά την εκτίμηση της ζήτησης. Αντίθετα η μέθοδος της μέσης ζήτησης είναι μια αισιόδοξη μέθοδος. Εμείς, ως παρατηρητές, έχουμε την πολυτέλεια να «γνωρίζουμε» τι θα γίνει στο μέλλον, αφού διαθέτουμε παρατηρήσεις για έναν ακόμη μήνα. Ξέρουμε την ποσότητα που ζητήθηκε την Τρίτη 14 Ιανουαρίου και επομένως μπορούμε να κρίνουμε αμέσως ποια μέθοδος είναι η πιο συμφέρουσα.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε πως τα λογιστικά φύλλα που έχουμε δημιουργήσει στο Excel είναι όλα στο ίδιο αρχείο. Είναι όλα συνδεδεμένα και οι μόνες αλλαγές που γίνονται είναι στο αρχικό φύλλο, αυτό που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Από εκεί, μεταφέρονται οι αντίστοιχοι πίνακες των δεδομένων για κάθε προϊόν στα επόμενα φύλλα και οι υπολογισμοί γίνονται αυτόματα. Συνέχεια λοιπόν στο τελευταίο λογιστικό φύλλο, αυτό που θα κρίνει την κατάλληλη μέθοδο εύρεσης των βέλτιστων ποσοτήτων τοποθέτησης.

Το φύλλο αυτό παρουσιάζεται στο Σχήμα 12 και ο τρόπος λειτουργίας του είναι ο εξής:

Μεταφέρονται τα στοιχεία των Πινάκων 8 και 13 στις στήλες «Μ.Ζ.» και «Newsboy», ανάμεσά τους υπάρχει η στήλη «Ζήτηση» με τις πραγματικές ποσότητες που ζητήθηκαν για κάθε κωδικό εκείνη την ημέρα.



=LOOKUP(MAX(B4:C5);B4:C5;A4:A6)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ - ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΚΕΡΔΟΣ

Κέρδος Βάσει Μεθόδων	
Μ.Ζ.	-22,75 €
NewsBoy	1,55 €

Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:	
NewsBoy	24,30 €

Τοποθετήσεις	Μ.Ζ.	Ζήτηση	NewsBoy	Επιστροφές Μ.Ζ.	Επιστροφές NewsBoy	Κέρδος Μ.Ζ.	Κέρδος NewsBoy
GidP1	22	15	13	7	0	-3,05	5,85
GidP0.5	11	4	6	7	2	-4	-0,5
GidH1	11	3	5	8	2	-9,85	-1,45
GiH0.5	11	2	6	9	4	-5,85	-2,35

Παράμετροι Παραγωγής				
	X1*	X2*	X3*	X4*
Πώληση r	1,35	0,675	1,35	0,675
Κόστος C	-0,9	-0,45	-0,9	-0,45
Κόστος K	-0,5	-0,25	-0,5	-0,25
Όγκος V	1	0,5	1	0,5

Σχήμα 12

Στις επόμενες στήλες υπολογίζονται οι επιστροφές σε κάθε περίπτωση και το κέρδος ανά προϊόν που δίνει η κάθε μέθοδος. Τα κέρδη υπολογίζονται με την βοήθεια του πίνακα «Παράμετροι Παραγωγής» του Σχήματος 12 και στην συνέχεια προστίθενται στον πίνακα «Κέρδος Βάση Μεθόδων». Το τελικό αποτέλεσμα δίνεται στον Πίνακα 14 ο οποίος εμφανίζεται και στο Σχήμα 12. Στον πίνακα αυτό αυτόματα συγκρίνονται τα δύο μοντέλα, αποτυπώνεται το όνομα του πιο κερδοφόρου και το ποσοστό κέρδους σε σχέση με το άλλο.

Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:	
Newsboy	24.3€

Πίνακας 14

Τα αποτελέσματα για την Τρίτη 14 Ιανουαρίου, ημέρα χαμηλής ζήτησης, είναι εντυπωσιακό υπέρ της μεθόδου Newsboy. Η βελτίωση πάνω στο κέρδος έναντι της μεθόδου χαμηλής ζήτησης είναι της τάξης των 23.3€. Αριθμητικά ασφαλώς, σαν χρηματικό κέρδος, η εταιρία θα κέρδιζε μόλις 1.55€ από το συγκεκριμένο σημείο πώλησης εφαρμόζοντας την μέθοδο που προτείνουμε, αλλά θα απέφευγε και την ζημία των 22.75€ που φαίνεται να είχε εκείνη την ημέρα.

Εφόσον έχουμε πληροφορίες για την ζήτηση μέχρι το Σάββατο 22 Φεβρουαρίου, θα εφαρμόσουμε το αρχείο του Excel για να μελετήσουμε συνολικά δώδεκα μέρες, έξι χαμηλής ζήτησης και έξι υψηλής. Με αυτό τον τρόπο θα έχουμε μία πιο σφαιρική εικόνα για την απόδοση των μεθόδων.

3.5.1 Σύγκριση μεθόδων για τις ημέρες χαμηλής ζήτησης

Οι ημέρες χαμηλής ζήτησης που θα μελετήσουμε είναι οι:

Τρίτη 14-1-2003(έχει ήδη γίνει), Τετάρτη 15-1-2003, Πέμπτη 16-1-2003
Τρίτη 21-1-2003, Τετάρτη 22-1-2003 και Πέμπτη 23-1-2003

Για κάθε μία από αυτές τις μέρες θα παρουσιάζεται ένας πίνακας με τις τοποθετήσεις, τα κέρδη και το τελικό αποτέλεσμα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΤΕΤΑΡΤΗ 15-1 (ΧΑΜΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	**Μ.Ζ.**	**Ζήτηση**	**Newsboy**	**Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:**	
GidP1	**22**	**14**	**13**	**Newsboy**	**22.21€**
GidP0.5	**10**	**6**	**7**	**Κέρδος Βάσει Μεθόδων**	
GidH1	**11**	**6**	**5**	**Μ.Ζ.**	**-13.03 €**
GiH0.5	**10**	**5**	**6**	**NewsBoy**	**9.18 €**

Πίνακας 15

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΠΕΜΠΤΗ 16-1 (ΧΑΜΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	**Μ.Ζ.**	**Ζήτηση**	**Newsboy**	**Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:**	
GidP1	**22**	**13**	**13**	**Newsboy**	**22€**
GidP0.5	**10**	**8**	**5**	**Κέρδος Βάσει Μεθόδων**	
GidH1	**11**	**5**	**4**	**Μ.Ζ.**	**-12.10 €**
GiH0.5	**10**	**8**	**5**	**NewsBoy**	**9.90 €**

Πίνακας 16

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΤΡΙΤΗ 21-1 (ΧΑΜΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	**Μ.Ζ.**	**Ζήτηση**	**Newsboy**	**Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:**	
GidP1	**21**	**16**	**12**	**Newsboy**	**9.25€**
GidP0.5	**10**	**8**	**5**	**Κέρδος Βάσει Μεθόδων**	
GidH1	**10**	**8**	**5**	**Μ.Ζ.**	**0.65 €**
GiH0.5	**9**	**6**	**5**	**Newsboy**	**9.90 €**

Πίνακας 17

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΤΕΤΑΡΤΗ 22-1 (ΧΑΜΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	**Μ.Ζ.**	**Ζήτηση**	**Newsboy**	**Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:**	
GidP1	**21**	**15**	**11**	**Newsboy**	**12.93€**
GidP0.5	**9**	**8**	**5**	**Κέρδος Βάσει Μεθόδων**	
GidH1	**11**	**7**	**9**	**Μ.Ζ.**	**-6.30 €**
GiH0.5	**10**	**4**	**5**	**Newsboy**	**6.63 €**

Πίνακας 18

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΠΕΜΠΤΗ 23-1 (ΧΑΜΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	**Μ.Ζ.**	**Ζήτηση**	**Newsboy**	**Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:**	
GidP1	**21**	**15**	**13**	**Newsboy**	**13.88€**
GidP0.5	**10**	**10**	**5**	**Κέρδος Βάσει Μεθόδων**	
GidH1	**11**	**5**	**5**	**Μ.Ζ.**	**-3.53 €**
GiH0.5	**9**	**9**	**5**	**Newsboy**	**10.35 €**

Πίνακας 19

Είναι προφανές λοιπόν ότι για τις μέρες χαμηλής ζήτησης, η μέθοδος Newsboy, είναι ανώτερη της μεθόδου τοποθέτησης ποσοτήτων ίδιων με την βέλτιστη εκτίμηση της ζήτησης, την μέθοδο μέσης ζήτησης. Η μέση βελτίωση στο ημερήσιο κέρδος για ημέρες χαμηλής ζήτησης είναι της τάξης των 17.43€ ποσό αρκετά ενθαρρυντικό καθώς είναι μόνο για ένα σημείο πώλησης.

3.5.2 Σύγκριση μεθόδων για τις ημέρες υψηλής Ζήτησης

Οι ημέρες υψηλής ζήτησης που θα μελετήσουμε είναι οι:

Παρασκευή 17-1-2003, Δευτέρα 20-1-2003,
Παρασκευή 24-1-2003, Δευτέρα 27-1-2003,
Παρασκευή 31-1-2003, Δευτέρα 3-2-2003

Για κάθε μία από αυτές τις μέρες θα παρουσιάζεται ένας πίνακας με τις τοποθετήσεις, τα κέρδη και το τελικό αποτέλεσμα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 17-1 (ΥΨΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	**Μ.Ζ.**	**Ζήτηση**	**Newsboy**	**Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:**	
GidP1	**42**	**45**	**25**	**Μ.Ζ.**	**9.82€**
GidP0.5	**17**	**16**	**8**	**Κέρδος Βάσει Μεθόδων**	
GidH1	**14**	**13**	**10**	**Μ.Ζ.**	**28.95 €**
GiH0.5	**12**	**14**	**7**	**Newsboy**	**19.13 €**

Πίνακας 20

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΔΕΥΤΕΡΑ 20-1 (ΥΨΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	**Μ.Ζ.**	**Ζήτηση**	**Newsboy**	**Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:**	
GidP1	**41**	**28**	**25**	**Newsboy**	**17.22€**
GidP0.5	**17**	**15**	**7**	**Κέρδος Βάσει Μεθόδων**	
GidH1	**14**	**12**	**10**	**Μ.Ζ.**	**1.68 €**
GiH0.5	**12**	**15**	**7**	**Newsboy**	**18.90 €**

Πίνακας 21

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 24-1 (ΥΨΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	**Μ.Ζ.**	**Ζήτηση**	**Newsboy**	**Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:**	
GidP1	**41**	**36**	**25**	**Newsboy**	**1.25€**
GidP0.5	**17**	**22**	**11**	**Κέρδος Βάσει Μεθόδων**	
GidH1	**14**	**12**	**10**	**Μ.Ζ.**	**18.33 €**
GiH0.5	**12**	**16**	**6**	**Newsboy**	**19.58 €**

Πίνακας 22

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΔΕΥΤΕΡΑ 27-1 (ΥΨΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	**Μ.Ζ.**	**Ζήτηση**	**Newsboy**	**Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:**	
GidP1	**39**	**30**	**25**	**Newsboy**	**17.41€**
GidP0.5	**18**	**12**	**11**	**Κέρδος Βάσει Μεθόδων**	
GidH1	**13**	**8**	**10**	**Μ.Ζ.**	**-1.53 €**
GiH0.5	**11**	**12**	**6**	**Newsboy**	**15.88 €**

Πίνακας 23

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 31-1 (ΥΨΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	Μ.Ζ.	Ζήτηση	Newsboy	Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:	
GidP1	38	50	25	M.Z.	9.67€
GidP0.5	17	26	10	Κέρδος Βάσει Μεθόδων	
GidH1	13	20	10	M.Z.	29,25 €
GiH0.5	11	22	7	Newsboy	19,58 €

Πίνακας 24

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΔΕΥΤΕΡΑ 3-2 (ΥΨΗΛΗ ΖΗΤΗΣΗ)					
Τοποθετήσεις	Μ.Ζ.	Ζήτηση	Newsboy	Αποτελεσματικότερη Μέθοδος κατά:	
GidP1	39	30	25	Newsboy	25.05€
GidP0.5	18	11	11	Κέρδος Βάσει Μεθόδων	
GidH1	14	10	10	M.Z.	-5,25 €
GiH0.5	13	7	7	NewsBoy	19,80 €

Πίνακας 25

Τα αποτελέσματα όπως φαίνονται στους Πίνακες 20 με 25, είναι αρκετά διαφοροποιημένα. Η μέθοδος Newsboy τις Παρασκευές δεν είναι τόσο αποτελεσματική όσο τις μέρες χαμηλής ζήτησης. Συχνά η μέθοδος της μέσης ζήτησης παρουσιάζεται λίγο καλύτερη. Τις Δευτέρες, η Newsboy, εμφανίζεται πιο βελτιωμένη από τις Παρασκευές. Η μέση βελτίωση του ημερήσιου κέρδους σε σχέση με την μέθοδο μέσης ζήτησης τις Δευτέρες, είναι της τάξης των 19€.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι τα αποτελέσματα είναι εντελώς φυσιολογικά, αν λάβει κανείς υπ' όψη του την φύση της κάθε μεθόδου. Θα μελετήσουμε γιατί αποδυναμώνεται τόσο η μέθοδός μας τις Παρασκευές ενώ τις Δευτέρες εμφανίζει εντυπωσιακά κέρδη.

4 Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή εξετάσαμε το πρόβλημα που αντιμετωπίζει μία γαλακτοκομική εταιρία σχετικά με τις ποσότητες των προϊόντων που πρέπει να διανέμει καθημερινά ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος της.

Για την επίλυση του προβλήματος αυτού εφαρμόσαμε μεθόδους πρόβλεψης της ζήτησης και μεθόδους προσδιορισμού της βέλτιστης πολιτικής διανομών. Από την εφαρμογή των μεθόδων αυτών σε πραγματικά δεδομένα προέκυψαν σημαντικά περιθώρια κέρδους για την εταιρία.

Στις επόμενες παραγράφους συνοψίζονται ορισμένες παρατηρήσεις που αφορούν τις μεθόδους που εφαρμόστηκαν και τα αποτελέσματά τους.

4.1 Γιατί η μέθοδος του εφημεριδοπώλη δεν είναι σταθερά καλύτερη της μέσης ζήτησης

Παρατηρώντας τα τελικά αποτελέσματα του 3^{ου} κεφαλαίου, βλέπουμε ότι οι τοποθετήσεις που προτείνει η μέθοδος Newsboy για τις μέρες χαμηλής ζήτησης, είναι σαφώς πιο συμφέρουσες από αυτές της μέσης ζήτησης, μέθοδος που φαίνεται να ακολουθεί η εταιρία. Αντίθετα, στις μέρες υψηλής ζήτησης παρουσιάζονται αρκετές διαφοροποιήσεις στο κέρδος. Οι αποκλίσεις αυτές διαφέρουν τόσο σε σχέση με τα αποτελέσματα των ημερών χαμηλής ζήτησης, όσο και μεταξύ των ημερών υψηλής. Στις ημέρες χαμηλής ζήτησης υπάρχει μία σταθερή βελτίωση στο μέσο ημερήσιο κέρδος κατά 17.4€. Αντίθετα, στης υψηλής, τα αποτελέσματα του κέρδους είναι ανομοιογενή για τις Δευτέρες και τις Παρασκευές.

Συγκεκριμένα, βλέπουμε στους Πίνακες 20, 22 και 24, ότι τις Παρασκευές 17-1 και 31-1 αποτελεσματικότερη μέθοδος είναι αυτή της μέσης ζήτησης με κέρδος κοντά στα 9€ περισσότερο από την Newsboy. Στις 24-1, πάλι Παρασκευή, η μέση ζήτηση υπολείπεται της «Newsboy» μόνο κατά 1.55€. Αυτό σημαίνει ότι για τις Παρασκευές, αν μπορεί να γίνει μία γενίκευση στο ποια από τις δύο μεθόδους υπερτερεί, αυτή είναι της μέσης ζήτησης. Αντίθετα, όπως φαίνεται στους Πίνακες 21 23 και 25, τις Δευτέρες, η μέθοδος Newsboy εμφανίζεται σταθερά και εντυπωσιακά πιο κερδοφόρα με βελτίωση στο μέσο ημερήσιο κέρδος της τάξης των 19€.

Όλα τα αποτελέσματα αυτά αναφέρονται σε ένα σημείο πώλησης. Κατά συνέπεια, αν αθροίζουμε τα κέρδη από όλα τα σημεία πώλησης θα προκύψει ένα σημαντικό κέρδος για την εταιρία.

Εξετάζοντας την φύση των δύο μεθόδων παρατηρούμε ότι, η μέθοδος του εφημεριδοπώλη, είναι μία συντηρητική μέθοδος, επιφυλακτική στην πρόβλεψη κατανομής της ζήτησης. Στις Εξισώσεις (19) και (20) διακρίνουμε ότι η μέθοδος συνδυάζει την ποσότητα x_i* και την κατανομή με το κόστος της παραγωγικής διαδικασίας. Ουσιαστικά, ορίζει ένα επίπεδο ασφαλείας για το x_i*, ώστε σε περίπτωση «αστοχίας» της πρόβλεψης, η ζημιά να μένει σε χαμηλά επίπεδα. Αντίθετα, η μέθοδος προσδιορισμού των ποσοτήτων βασισμένη στη μέση ζήτηση είναι πιο αισιόδοξη καθώς το μόνο επίπεδο ασφαλείας που ορίζει, είναι αυτό που δεν ξεπερνά τον μέσο όρο των πιο πιθανών ποσοτήτων, χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψη κάποιο ρίσκο αποτυχίας στην πρόβλεψη. Σας παραπέμπουμε στο παράδειγμα της Ενότητας 1.4 το οποίο χρησιμοποιεί μία μέθοδο βασισμένη στην μέση ζήτηση.

Παρατηρώντας τα δεδομένα για τις ημέρες υψηλής ζήτησης στους Πίνακες 1 και 2, διακρίνουμε μία σημαντική διαφορά στο ύψος των πωλήσεων μεταξύ Δευτέρας και Παρασκευής, άρα ανομοιογένεια στα δεδομένα. Τις Παρασκευές, ο καταναλωτής αγοράζει ποσότητα γάλακτος τέτοια που θα ικανοποιήσει τις ανάγκες για τρεις ημέρες. Την Δευτέρα, μη έχοντας ποσότητα γάλακτος στο σπίτι του, αγοράζει για να καλύψει τις ανάγκες της ίδιας ημέρας και πιθανόν της επόμενης. Είναι προφανές ότι οι πωλήσεις κάθε Παρασκευή είναι αισθητά υψηλότερες σε σχέση με αυτές της Δευτέρας. Εμείς αναγκαστήκαμε να ενοποιήσουμε αυτές τις ημέρες.

Το αποτέλεσμα είναι ότι για τις Παρασκευές το μοντέλο μας υποεκτιμά την ποσότητα που θα πωληθεί, αφού συμπεριλαμβάνει και τις ζητήσεις της Δευτέρας. Το φαινόμενο αυτό, σε συνδυασμό με την συντηρητική πολιτική που ορίζει το μοντέλο από την φύση του, οδηγεί σε μία σημαντική έλλειψη κέρδους από τις πωλήσεις αφού η ποσότητα που προτείνεται προς τοποθέτηση συνήθως δεν καλύπτει πάνω από το 60% με 65%. (βλέπε πίνακες 20, 22, 24) Αντίθετα, οι τοποθετήσεις βασισμένες στην μέση ζήτηση είναι πολύ κοντά στην πραγματική ζήτηση της Παρασκευής, καθώς το επίπεδο ασφαλείας που ορίζεται από της ποσότητες που έχουν ζητηθεί στο παρελθόν χαμηλώνει αισθητά λόγω των παρατηρήσεων της Δευτέρας.

Για τις Δευτέρες, το μοντέλο μας παρουσιάζεται πολύ πιο αποτελεσματικό σε σχέση με την μέση ζήτηση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος Μ.Ζ. παρασύρεται στις προβλέψεις από τις υψηλές πωλήσεις της Παρασκευής και σε συνδυασμό με την αισιόδοξη φύση της, προτείνει ποσότητες προς τοποθέτηση μεγαλύτερες της πραγματικής ζήτησης σε ποσοστό που αγγίζει το 35% με 40%.

Συνολικά, η μέθοδος Newsboy, είναι ασφαλώς πιο ορθολογική από αυτή της μεθόδου που θέλει να ακολουθήσει η εταιρία, η οποία βασίζει τις τοποθετήσεις των προϊόντων βάσει της βέλτιστης εκτίμησης της ζήτησης τους. Η πρώτη μέθοδος είναι από τις πιο κατάλληλες μεθόδους για αντίστοιχα προβλήματα με προϊόντα μικρού κύκλου ζωής, πράγμα που επιβεβαιώνεται από τις πολλές και ποικίλες εφαρμογές της στην θεωρία αποθεμάτων παγκοσμίως.

4.2 Προτάσεις προς την εταιρία

4.2.1 Πιο συχνές επισκέψεις στα κεντρικά σημεία πώλησης

Είναι σαφές ότι η γαλακτοκομική εταιρία θα έχει μία σημαντική αύξηση στο μέσο κέρδος εάν εφαρμόσει το μοντέλο που προτείνουμε. Η μέθοδος «Newsboy» θα μπορούσε όμως να έχει ακόμη πιο θεαματικά αποτελέσματα, αν εξασφαλιστεί ομοιογένεια στα δεδομένα των παρελθοντικών πωλήσεων.

Εάν η εταιρία αποφασίσει να επισκέπτεται τα μεγάλα σημεία πώλησης (super market) σε καθημερινή βάση, συμπεριλαμβανομένου του Σαββάτου, τότε θα μπορούσε να επιτευχθεί μία σημαντική εξομάλυνση στα δεδομένα των ημερών υψηλής ζήτησης και οι προβλέψεις θα είναι ακριβέστερες. Η Παρασκευή θα είναι μία μέρα με μικρότερο ποσοστό πωλήσεων στην εβδομάδα. Το Σάββατο θα είναι μία μέρα με υψηλές πωλήσεις, αλλά το μέγεθος αυτών θα είναι συγκρίσιμο με τις αντίστοιχες πωλήσεις των άλλων ημερών υψηλής ζήτησης.

Το κατά πόσο αυτή η κίνηση αποδεικνύεται συνολικά πιο συμφέρουσα, είναι μία μελέτη που μπορεί να εκπονηθεί σε άλλη εργασία. Απαιτούνται γνώσεις για το κόστος μίας επίσκεψης, για το αναμενόμενο κέρδος στις πωλήσεις και άλλων παραγόντων που, σε αυτό το επίπεδο, είναι τελείως θεωρητικά.

4.2.2 Βέλτιστη ποσότητα τοποθέτησης σημαίνει βέλτιστη ποσότητα παραγωγής

Το να καθορίσουμε μία βέλτιστη ποσότητα τοποθέτησης για ένα σημείο πώλησης δεν είναι κάτι που φαίνεται τόσο σημαντικό και εντυπωσιακό. Παρατηρήσαμε όμως το εξής:

Για κάθε ημέρα που εξετάσαμε, είτε χαμηλής ζήτησης είτε υψηλής, με οποιαδήποτε μέθοδο προσδιορισμού βέλτιστων ποσοτήτων (Newsboy ή μέσης ζήτησης) κι αν εργαστήκαμε, ποτέ δεν χρειάστηκε να ενεργοποιήσουμε τον περιορισμό δυναμικότητας της Εξίσωσης (15). Ποτέ η προτεινόμενη ποσότητα τοποθέτησης δεν πλησίασε το όριο B.

Αυτό σημαίνει ότι η εταιρία, κακώς αναζητά τρόπους να εξαντλήσει όλη την πρώτη της ύλη και στα τέσσερα αυτά προϊόντα. Δεν την συμφέρει και μάλιστα πολλές φορές την ζημιώνει.

Τα αποτελέσματα της εργασίας αφορούν ένα σημείο πώλησης. Ωστόσο, η ίδια ακριβώς ανάλυση μπορεί να εφαρμοστεί για το συνολικό πρόβλημα παραγωγής και διανομής στην εταιρία. Η διαδικασία διανομής του γάλακτος στην εταιρία είναι η εξής: Έχει ένα σημείο παραγωγής (εργοστάσιο), από το οποίο τροφοδοτούνται με συσκευασμένο γάλα δύο κέντρα διανομών. Το κάθε κέντρο μοιράζει τις συσκευασίες σε ένα στόλο 5 φορτηγών τα οποία εξυπηρετούν περίπου σαράντα σημεία πώλησης το κάθε ένα. Για να εξετάσει η εταιρία τον βέλτιστο συνολικό όγκο γάλακτος προς παραγωγή και τον καλύτερο επιμερισμό αυτού στους τέσσερις κωδικούς της τότε αρκεί να εφαρμόσει τα ακόλουθα:

1. Να μελετήσει τα σημαντικότερα σημεία πώλησης (αυτά που επισκέπτεται κάθε μέρα και συνήθως απορροφούν το μεγαλύτερο ποσοστό της παραγωγής), ώστε να καθορίσει την ζήτηση κάθε προϊόντος σε αυτά.
2. Να αθροίσει τις συσκευασίες ανά προϊόν που χρειάζεται κάθε φορτηγό και κατ' επέκταση κάθε κέντρο διανομής.
3. Ξέροντας ένα συντριπτικό ποσοστό των απαιτήσεων των κέντρων διανομής σε συσκευασίες ανά προϊόν, ξέρει ένα σημαντικό ποσοστό του όγκου γάλακτος που πρέπει να διαθέσει σε κάθε τύπο και άρα το μεγαλύτερο ποσοστό της πρώτης ύλης που την συμφέρει να χρησιμοποιήσει.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο περαιτέρω έρευνας.

Παράρτημα

Π.1 Εκτίμηση της κατανομής της ζήτησης με την μέθοδο μέγιστης πιθανότητας

Αν x_i είναι οι ποσότητες που παρατηρήσαμε και k είναι ο αριθμός των παρατηρήσεών μας, τότε, για την ζήτηση X, θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες

$$F(x_1) = P(X \geq x_1),\ F(x_2)= P(X \geq x_2),\ \ldots,\ F(x_k)= P(X \geq x_k)$$

Επειδή δεν έχουμε παρατηρήσεις < x_1, θα υποθέσουμε ότι $P(X < x_1) = 0$ ή $P(X \geq x_1)=1$ και αφού το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι 1, έχουμε

$$p_{k+1} = 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_k \qquad (\pi 1)$$

Για τον ίδιο λόγο, αν $l_k = 0$ θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι $p_{k+1} = P(X > x_k) = 0$ και αντί για k άγνωστες πιθανότητες θα είχαμε k–1 και αντί της (1π) θα είχαμε την

$$p_k = 1 - p_1 - \ldots - p_{k-1} \qquad (\pi 2)$$

Οι παρατηρήσεις μας είναι χωρισμένες σε τρεις κατηγορίες και διατίθενται στον πίνακα:

Αρχικά δεδομένα					
Ποσότητα, x_i	x_1	…	x_i	…	x_k
Συχνότητα εμφανίσεως $X = x_i$	n_1	…	n_i	…	n_k
Συχνότητα εμφανίσεως $X \geq x_i$	m_1	…	m_i	…	m_k
Συχνότητα εμφανίσεως $X > x_i$	l_1	…	l_i	…	l_k

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας (ΜΜΠ) για τον υπολογισμό των p_i. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$\begin{aligned} F(p_1,\ldots, p_k) &= [P(X = x_1)]^{n_1}\ldots[P(X = x_1)]^{n_k} \\ &\quad [P(X \geq x_1)]^{m_1} \ldots [P(X \geq x_k)]^{m_k} \\ &\quad [P(X > x_1)]^{l_1}\ldots[P(X > x_k)]^{l_k} \\ &= p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k} \\ &\quad (1)^{m_1} (1 - p_1)^{m_2} \ldots (1 - p_1 - \ldots - p_{k-1})^{m_k} \\ &\quad (1 - p_1)^{l_1} \ldots (1 - p_1 - \ldots - p_{k-1})^{l_{k-1}}(1 - p_1 - \ldots - p_k)^{l_k} \qquad (3\pi) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση F μεγιστοποιείται στο σημείο (p_1, …, p_k) στο οποίο μεγιστοποιείται και ο λογάριθμός της.

Είναι:

$$\ln F(p_1, \ldots, p_k) = n_1 \ln p_1 + \ldots + n_k \ln p_k$$

$$+ m_1 \ln 1 + m_2 \ln(1 - p_1) + \ldots + m_k \ln(1 - p_1 - \ldots - p_{k-1})$$
$$+ l_1 \ln(1 - p_1) + \ldots + l_{k-1} \ln(1 - p_1 - \ldots - p_{k-1})$$
$$+ l_k \ln(1 - p_1 - \ldots - p_k)$$
$$= n_1 \ln p_1 + \ldots + n_k \ln p_k$$

$$+ (m_2 + l_1) \ln(1 - p_1) + \ldots + (m_k + l_{k-1}) \ln(1 - p_1 - \ldots - p_{k-1})$$
$$+ l_k \ln(1 - p_1 - \ldots - p_k)$$

Η συνάρτηση lnF είναι κοίλη (γραμμικός συνδυασμός κοίλων συναρτήσεων: $\ln(1-p_1-\ldots-p_i)$). Συνεπώς υπάρχει ένα ακρότατο σημείο που είναι ολικό μέγιστο. Εξισώνοντας τις μερικές παραγώγους της ανωτέρω με 0 προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{m_2 + l_1}{1 - p_1} - \frac{m_3 + l_2}{1 - p_1 - p_2} - \ldots - \frac{m_k + l_{k-1}}{1 - p_1 \ldots - p_{k-1}} - \frac{l_k}{1 - p_1 \ldots - p_k} = 0 \qquad (A_1)$$

$$\frac{n_2}{p_2} - \frac{m_3 + l_2}{1 - p_1 - p_2} - \ldots - \frac{m_k + l_{k-1}}{1 - p_1 \ldots - p_{k-1}} - \frac{l_k}{1 - p_1 \ldots - p_k} = 0 \qquad (A_2)$$

$$\vdots$$

$$\frac{n_i}{p_i} - \frac{m_{i+1} + l_i}{1 - p_1 \ldots - p_i} - \ldots - \frac{m_k + l_{k-1}}{1 - p_1 \ldots - p_{k-1}} - \frac{l_k}{1 - p_1 \ldots - p_k} = 0 \qquad (A_i)$$

$$\vdots$$

$$\frac{n_{k-1}}{p_{k-1}} - \frac{m_k + l_{k-1}}{1 - p_1 \ldots - p_{k-1}} - \frac{l_k}{1 - p_1 \ldots - p_k} = 0 \qquad (A_{k-1})$$

$$\frac{n_k}{p_k} - \frac{l_k}{1 - p_1 \ldots - p_k} = 0 \qquad (A_k)$$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση (A_k) ως προς p_k προκύπτει:

$$p_k = \frac{n_k}{n_k + l_k}(1 - p_1 \ldots - p_{k-1}) \qquad (B_k)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην προτελευταία (A_{k-1}) και μετά από λίγη άλγεβρα, ευρίσκουμε:

$$p_{k-1} = \frac{n_{k-1}}{(n_{k-1}+n_k)+(m_k)+(l_{k-1}+l_k)}(1-p_1 \ldots - p_{k-2})$$

$$= \frac{n_{k-1}}{N_{k-1}+M_k+L_{k-1}}(1-p_1 \ldots - p_{k-2}) \qquad (B_{k-1})$$

όπου για συντομία έχουμε ορίσει

$N_i = n_i + n_{i+1} + \ldots + n_k$
$M_i = m_i + m_{i+1} + \ldots + m_k$
$L_i = l_i + l_{i+1} + \ldots + l_k$ για κάθε $i = 1 \ldots k$.

Ακολούθως αντικαθιστούμε την Εξ. (B_{k-1}) στην (B_k) και κατόπιν τις δύο αυτές εξισώσεις στην (B_{k-2}). Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στην γενική εξίσωση αντί της (A_i):

$$p_i = \frac{n_i}{N_i+M_{i+1}+L_i}(1-p_1 \ldots - p_{i-1}) \qquad (B_i)$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τα p_i, $i = 2,\ldots, k$ στην Εξ. (A_1) καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για το p_1:

$$p_1 = \frac{n_1}{N_1+M_2+L_1} \qquad (B_1)$$

Τα p_i προκύπτουν ξεκινώντας από την (B_1) και συνεχίζοντας μέχρι την (B_k). Για τους υπολογισμούς των p_k και p_{k+1} θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν είτε την (1π) είτε την (π1).

Γενικά, καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις προσδιορισμού των p_i:

$$p_1 = \frac{n_1}{N_1+M_2+L_1} \qquad (\pi 4)$$

$$p_i = \frac{n_i}{N_i+M_{i+1}+L_i}(1-p_1-\ldots-p_{i-1}) \qquad (\pi 5)$$

$$p_k = \frac{n_{ki}}{n_k+m_k}(1-p_1-\ldots-p_{k-1}) \qquad (\pi 6)$$

Π.2 Πίνακας διακυμάνσεων της ζήτησης για διάφορες ώρες της ημέρας

		κωδικός	τοποθέτηση + ημ/νια λήξης		ποσότητα ψυγείου	πωλήσεις 14.30	πωλήσεις 17.00	πωλήσεις 20.00	πωλήσεις ημέρας
τρίτη	26-Νοε	gidp1	30	29/11	30	13	3	5	21
τρίτη	26-Νοε	gidp0,5	10	29/11	10	9	1		10
τρίτη	26-Νοε	gidh1	6	29/11	6	6			6
τρίτη	26-Νοε	gidh0,5	10	29/11	10	9	1		10
τετάρτη	27-Νοε	gidp1	12	30/11	21	9	4	3	16
τετάρτη	27-Νοε	gidp0,5	7	30/11	7	6	1		7
τετάρτη	27-Νοε	gidh1	4	30/11	4	4			4
τετάρτη	27-Νοε	gidh0,5	5	30/11	5	3	2		5
πέμπτη	28-Νοε	gidp1	12	30/11	16	12	0	4	16
πέμπτη	28-Νοε	gidp0,5	6	30/11	6	5	0	1	6
πέμπτη	28-Νοε	gidh1	3	30/11	3	3			3
πέμπτη	28-Νοε	gidh0,5	6	30/11	6	6			6
παρασκευή	29-Νοε	gidp1	48	2/12	48	17	4	11	48
παρασκευή	29-Νοε	gidp0,5	20	2/12	20	7	1	3	20
παρασκευή	29-Νοε	gidh1	10	2/12	10	10			10
παρασκευή	29-Νοε	gidh0,5	8	2/12	8	4	1	1	8
σάββατο	30-Νοε	gidp1			0	9	7		0
σάββατο		gidp0,5			0	8	1		0
σάββατο		gidh1			0				0
σάββατο		gidh0,5			0	2			0
δευτέρα	2-Δεκ	gidp1	68	5/12	68	22	2	3	27
δευτέρα	2-Δεκ	gidp0,5	28	5/12	28	10	3	0	13
δευτέρα	2-Δεκ	gidh1	12	5/12	12	12			12
δευτέρα	2-Δεκ	gidh0,5	28	5/12	28	12	0	5	17
τρίτη	3-Δεκ	gidp1	0	6/12	41	7	0	2	9
τρίτη	3-Δεκ	gidp0,5	5	6/12	20	6	2	2	10
τρίτη	3-Δεκ	gidh1	12	6/12	12	4			4
τρίτη	3-Δεκ	gidh0,5	5	6/12	16	2	0	1	3
τετάρτη	4-Δεκ	gidp1	32	7/12	32	16	6	2	24
τετάρτη	4-Δεκ	gidp0,5	12	7/12	12	6	0	0	6
τετάρτη	4-Δεκ	gidh1	2	7/12	10	5	1	0	6
τετάρτη	4-Δεκ	gidh0,5	12	7/12	16	3	6	0	9
πέμπτη	5-Δεκ	gidp1	10	7/12	18	11	5	2	18
πέμπτη	5-Δεκ	gidp0,5	6	7/12	12	5	2	3	10
πέμπτη	5-Δεκ	gidh1	5	7/12	6	1	2	2	5
πέμπτη	5-Δεκ	gidh0,5	5	7/12	10	3	5	0	8
παρασκευή	6-Δεκ	gidp1	80	9/12	80	24	11	11	73
παρασκευή	6-Δεκ	gidp0,5	45	9/12	45	5	4	5	28
παρασκευή	6-Δεκ	gidh1	40	9/12	40	5	3	6	24
παρασκευή	6-Δεκ	gidh0,5	30	9/12	30	2	6	7	24
σάββατο	7-Δεκ	gidp1			7	12	15	0	0
σάββατο		gidp0,5			17	6	8	0	0
σάββατο		gidh1			16	7	3	0	0
σάββατο		gidh0,5			6	6	3	0	0

		κωδικός	τοποθέτηση + ημ/νια λήξης		ποσότητα ψυγείου	πωλήσεις 14.30	πωλήσεις 17.00	πωλήσεις 20.00	πωλήσεις ημέρας
δευτέρα	9-Δεκ	gidp1	92	12/12	92	27	10	18	55
δευτέρα	9-Δεκ	gidp0,5	39	12/12	39	13	2	2	17
δευτέρα	9-Δεκ	gidh1	12	12/12	12	8	1	2	11
δευτέρα	9-Δεκ	gidh0,5	28	12/12	28	4	1	3	8
τρίτη	10-Δεκ	gidp1	10	13/12	47	20	6	8	34
τρίτη	10-Δεκ	gidp0,5	0	13/12	22	6	2	3	11
τρίτη	10-Δεκ	gidh1	10	13/12	11	7	1	2	10
τρίτη	10-Δεκ	gidh0,5	0	13/12	20	8	8	1	17
τετάρτη	11-Δεκ	gidp1	12	14/12	12	12			12
τετάρτη	11-Δεκ	gidp0,5	8	14/12	8	8			8
τετάρτη	11-Δεκ	gidh1	8	14/12	9	8	0	1	9
τετάρτη	11-Δεκ	gidh0,5	10	14/12	10	6	0	1	7
πέμπτη	12-Δεκ	gidp1	20	14/12	20	10	2	5	17
πέμπτη	12-Δεκ	gidp0,5	16	14/12	16	7	5	4	16
πέμπτη	12-Δεκ	gidh1	10	14/12	10	7	1	2	10
πέμπτη	12-Δεκ	gidh0,5	16	14/12	19	2	5	3	10
παρασκευή	13-Δεκ	gidp1	40	16/12	40	6	4	8	34
παρασκευή	13-Δεκ	gidp0,5	20	16/12	20	2	3	1	13
παρασκευή	13-Δεκ	gidh1	15	16/12	15	3	2	3	12
παρασκευή	13-Δεκ	gidh0,5	15	16/12	15	3	1	4	12
σάββατο	14-Δεκ	gidp1			6	7	9	0	0
σάββατο		gidp0,5			7	3	4	0	0
σάββατο		gidh1			3	3	1	0	0
σάββατο		gidh0,5			3	3	1	0	0
δευτέρα	16-Δεκ	gidp1	32	19/12	32	18	1	3	22
δευτέρα	16-Δεκ	gidp0,5	20	19/12	20	9	1	2	12
δευτέρα	16-Δεκ	gidh1	10	19/12	10	6	0	2	8
δευτέρα	16-Δεκ	gidh0,5	16	19/12	16	6	0	1	7
τρίτη	17-Δεκ	gidp1	20	20/12	30	11	5	12	28
τρίτη	17-Δεκ	gidp0,5	10	20/12	18	10	2	6	18
τρίτη	17-Δεκ	gidh1	8	20/12	10	5	1	4	10
τρίτη	17-Δεκ	gidh0,5	10	20/12	19	6	1	7	14
τετάρτη	18-Δεκ	gidp1	23	21/12	25	11	2	1	14
τετάρτη	18-Δεκ	gidp0,5	12	21/12	12	5	0	1	6
τετάρτη	18-Δεκ	gidh1	8	21/12	8	4	1	0	5
τετάρτη	18-Δεκ	gidh0,5	8	21/12	13	9	3	0	12
πέμπτη	19-Δεκ	gidp1	5	21/12	16	6	0	5	11
πέμπτη	19-Δεκ	gidp0,5	6	21/12	12	4	2	0	6
πέμπτη	19-Δεκ	gidh1	5	21/12	8	6	2		8
πέμπτη	19-Δεκ	gidh0,5	9	21/12	10	5	1	1	7
παρασκευή	20-Δεκ	gidp1	40	23/12	40	15	7	18	40
παρασκευή	20-Δεκ	gidp0,5	20	23/12	20	2	1	0	20
παρασκευή	20-Δεκ	gidh1	14	23/12	14	4	2	0	14
παρασκευή	20-Δεκ	gidh0,5	10	23/12	10	3	1	2	10
σάββατο	21-Δεκ	gidp1			0				0
σάββατο		gidp0,5			0	11	6		0
σάββατο		gidh1			0	4	4		0

		κωδικός	τοποθέτηση + ημ/νια λήξης		ποσότητα ψυγείου	πωλήσεις 14.30	πωλήσεις 17.00	πωλήσεις 20.00	πωλήσεις ημέρας
σάββατο		gidh0,5			0	3	1		0
δευτέρα	23-Δεκ	gidp1	30	25/12	30	13	5	6	24
δευτέρα	23-Δεκ	gidp0,5	15	25/12	15	6	3	1	10
δευτέρα	23-Δεκ	gidh1	12	25/12	12	5	4	3	12
δευτέρα	23-Δεκ	gidh0,5	12	25/12	12	7	2	1	10
τρίτη	24-Δεκ	gidp1	20	27/12	26	12	5	9	26
τρίτη	24-Δεκ	gidp0,5	8	27/12	13	9	4		13
τρίτη	24-Δεκ	gidh1	10	27/12	10	4	1	5	10
τρίτη	24-Δεκ	gidh0,5	12	27/12	14	5	2	7	14
παρασκευή	27-Δεκ	gidp1	25	30/12	25			5	25
παρασκευή	27-Δεκ	gidp0,5	12	30/12	12			3	12
παρασκευή	27-Δεκ	gidh1	10	30/12	10			4	10
παρασκευή	27-Δεκ	gidh0,5	10	30/12	10			2	10
σάββατο	28-Δεκ	gidp1			0	12	8		0
σάββατο		gidp0,5			0	6	3		0
σάββατο		gidh1			0	4	2		0
σάββατο		gidh0,5			0	5	3		0
δευτέρα	30-Δεκ	gidp1	40	2/1	40			39	39
δευτέρα	30-Δεκ	gidp0,5	20	2/1	20			15	15
δευτέρα	30-Δεκ	gidh1	15	2/1	15			12	12
δευτέρα	30-Δεκ	gidh0,5	15	2/1	15			6	6
τρίτη	31-Δεκ	gidp1	30	3/1	31			31	31
τρίτη	31-Δεκ	gidp0,5	15	3/1	20			20	20
τρίτη	31-Δεκ	gidh1	15	3/1	18			15	15
τρίτη	31-Δεκ	gidh0,5	5	3/1	14			14	14
παρασκευή	3-Ιαν	gidp1	55	6/1	55			50	55
παρασκευή	3-Ιαν	gidp0,5	30	6/1	30			21	30
παρασκευή	3-Ιαν	gidh1	20	6/1	20			16	20
παρασκευή	3-Ιαν	gidh0,5	15	6/1	15			15	15
σάββατο	4-Ιαν	gidp1	0	7/1	0			5	0
σάββατο		gidp0,5	0	7/1	0			9	0
σάββατο		gidh1	0	7/1	0			4	0
σάββατο		gidh0,5	0	7/1	0			0	0
τρίτη	7-Ιαν	gidp1	30	10/1	30			27	27
τρίτη	7-Ιαν	gidp0,5	15	10/1	15			13	13
τρίτη	7-Ιαν	gidh1	12	10/1	12			12	12
τρίτη	7-Ιαν	gidh0,5	10	10/1	10			9	9
τετάρτη	8-Ιαν	gidp1	16	11/1	19			12	12
τετάρτη	8-Ιαν	gidp0,5	6	11/1	8			5	5
τετάρτη	8-Ιαν	gidh1	4	11/1	4			2	2
τετάρτη	8-Ιαν	gidh0,5	8	11/1	9			4	4
πέμπτη	9-Ιαν	gidp1	7	12/1	14			14	14
πέμπτη	9-Ιαν	gidp0,5	3	12/1	6			6	6
πέμπτη	9-Ιαν	gidh1	3	12/1	5			5	5
πέμπτη	9-Ιαν	gidh0,5	3	12/1	8			8	8
παρασκευή	10-Ιαν	gidp1	50	13/1	50			28	50
παρασκευή	10-Ιαν	gidp0,5	28	13/1	28			17	28

		κωδικός	τοποθέτηση + ημ/νια λήξης		ποσότητα ψυγείου	πωλήσεις 14.30	πωλήσεις 17.00	πωλήσεις 20.00	πωλήσεις ημέρας
παρασκευή	10-Ιαν	gidh1	14	13/1	14			9	14
παρασκευή	10-Ιαν	gidh0,5	12	13/1	12			12	12
σάββατο	11-Ιαν	gidp1	0	14/1	0			22	0
σάββατο		gidp0,5	0	14/1	0			11	0
σάββατο		gidh1	0	14/1	0			5	0
σάββατο		gidh0,5	0	14/1	0			0	0
δευτέρα	13-Ιαν	gidp1	32	16/1	32			24	24
δευτέρα	13-Ιαν	gidp0,5	22	16/1	22			8	8
δευτέρα	13-Ιαν	gidh1	8	16/1	8			8	8
δευτέρα	13-Ιαν	gidh0,5	12	16/1	12			7	7
τρίτη	14-Ιαν	gidp1	20	17/1	28			15	15
τρίτη	14-Ιαν	gidp0,5	10	17/1	24			4	4
τρίτη	14-Ιαν	gidh1	8	17/1	8			3	3
τρίτη	14-Ιαν	gidh0,5	6	17/1	11			2	2
τετάρτη	15-Ιαν	gidp1	15	18/1	20			14	14
τετάρτη	15-Ιαν	gidp0,5	5	18/1	13			6	6
τετάρτη	15-Ιαν	gidh1	8	18/1	13			6	6
τετάρτη	15-Ιαν	gidh0,5	8	18/1	13			5	5
πέμπτη	16-Ιαν	gidp1	48	19/1	48			13	13
πέμπτη	16-Ιαν	gidp0,5	8	19/1	8			8	8
πέμπτη	16-Ιαν	gidh1	16	19/1	18			5	5
πέμπτη	16-Ιαν	gidh0,5	12	19/1	17			8	8
παρασκευή	17-Ιαν	gidp1	10	20/1	45			24	45
παρασκευή	17-Ιαν	gidp0,5	16	20/1	16			16	16
παρασκευή	17-Ιαν	gidh1	2	20/1	13			5	13
παρασκευή	17-Ιαν	gidh0,5	6	20/1	14			12	14
σάββατο	18-Ιαν	gidp1	0	21/1	0			21	0
σάββατο		gidp0,5	0	21/1	0			0	0
σάββατο		gidh1	0	21/1	0			8	0
σάββατο		gidh0,5	0	21/1	0			2	0
δευτέρα	20-Ιαν	gidp1	40	23/1	40	24		4	28
δευτέρα	20-Ιαν	gidp0,5	16	23/1	16	12		3	15
δευτέρα	20-Ιαν	gidh1	12	23/1	12	6		6	12
δευτέρα	20-Ιαν	gidh0,5	16	23/1	16	10		5	15
τρίτη	21-Ιαν	gidp1	12	24/1	24		13	3	16
τρίτη	21-Ιαν	gidp0,5	10	24/1	11		7	1	8
τρίτη	21-Ιαν	gidh1	8	24/1	8		8	0	8
τρίτη	21-Ιαν	gidh0,5	8	24/1	9		4	2	6
τετάρτη	22-Ιαν	gidp1	15	25/1	23		14	1	15
τετάρτη	22-Ιαν	gidp0,5	8	25/1	11		6	2	8
τετάρτη	22-Ιαν	gidh1	7	25/1	7		6	1	7
τετάρτη	22-Ιαν	gidh0,5	7	25/1	10		4	0	4
πέμπτη	23-Ιαν	gidp1	15	26/1	15	15		0	15
πέμπτη	23-Ιαν	gidp0,5	10	26/1	10	3		7	10
πέμπτη	23-Ιαν	gidh1	5	26/1	5	4		1	5
πέμπτη	23-Ιαν	gidh0,5	6	26/1	9	5		4	9
παρασκευή	24-Ιαν	gidp1	36	27/1	36			36	36

		κωδικός	τοποθέτηση + ημ/νια λήξης		ποσότητα ψυγείου	πωλήσεις 14.30	πωλήσεις 17.00	πωλήσεις 20.00	πωλήσεις ημέρας
παρασκευή	24-Ιαν	gidp0,5	22	27/1	22			10	22
παρασκευή	24-Ιαν	gidh1	12	27/1	12			12	12
παρασκευή	24-Ιαν	gidh0,5	16	27/1	16			16	16
σάββατο	25-Ιαν	gidp1	0	28/1	0			0	0
σάββατο		gidp0,5	0	28/1	0			12	0
σάββατο		gidh1	0	28/1	0			0	0
σάββατο		gidh0,5	0	28/1	0			0	0
δευτέρα	27-Ιαν	gidp1	30	30/1	30			30	30
δευτέρα	27-Ιαν	gidp0,5	15	30/1	15			12	12
δευτέρα	27-Ιαν	gidh1	12	30/1	12			8	8
δευτέρα	27-Ιαν	gidh0,5	15	30/1	15			12	12
τρίτη	28-Ιαν	gidp1	16	31/1	16			16	16
τρίτη	28-Ιαν	gidp0,5	10	31/1	13			10	10
τρίτη	28-Ιαν	gidh1	8	31/1	12			8	8
τρίτη	28-Ιαν	gidh0,5	8	31/1	11			8	8
τετάρτη	29-Ιαν	gidp1	18	1/2	18			15	15
τετάρτη	29-Ιαν	gidp0,5	10	1/2	13			7	7
τετάρτη	29-Ιαν	gidh1	8	1/2	12			5	5
τετάρτη	29-Ιαν	gidh0,5	8	1/2	11			6	6
πέμπτη	30-Ιαν	gidp1	18	2/2	21			18	18
πέμπτη	30-Ιαν	gidp0,5	12	2/2	18			12	12
πέμπτη	30-Ιαν	gidh1	8	2/2	15			6	6
πέμπτη	30-Ιαν	gidh0,5	8	2/2	13			6	6
παρασκευή	31-Ιαν	gidp1	50	3/2	50			29	50
παρασκευή	31-Ιαν	gidp0,5	25	3/2	26			12	26
παρασκευή	31-Ιαν	gidh1	18	3/2	21			8	20
παρασκευή	31-Ιαν	gidh0,5	20	3/2	22			12	22
σάββατο	1-Φεβ	gidp1	0	4/2	0			21	0
σάββατο		gidp0,5	0	4/2	0			14	0
σάββατο		gidh1	0	4/2	1			12	0
σάββατο		gidh0,5	0	4/2	0			10	0
δευτέρα	3-Φεβ	gidp1	64	6/2	64	27		3	30
δευτέρα	3-Φεβ	gidp0,5	28	6/2	28	10		1	11
δευτέρα	3-Φεβ	gidh1	16	6/2	16	7		3	10
δευτέρα	3-Φεβ	gidh0,5	16	6/2	16	5		2	7
τρίτη	4-Φεβ	gidp1	0	7/2	34			24	24
τρίτη	4-Φεβ	gidp0,5	0	7/2	17			8	8
τρίτη	4-Φεβ	gidh1	6	7/2	12			12	12
τρίτη	4-Φεβ	gidh0,5	5	7/2	14			6	6
τετάρτη	5-Φεβ	gidp1	20	8/2	20	16		4	20
τετάρτη	5-Φεβ	gidp0,5	14	8/2	14	5		4	9
τετάρτη	5-Φεβ	gidh1	10	8/2	10	4		6	10
τετάρτη	5-Φεβ	gidh0,5	10	8/2	10	10		0	10
πέμπτη	6-Φεβ	gidp1	26	9/2	26	0		16	16
πέμπτη	6-Φεβ	gidp0,5	15	9/2	20	0		9	9
πέμπτη	6-Φεβ	gidh1	12	9/2	12	0		6	6
πέμπτη	6-Φεβ	gidh0,5	12	9/2	12	0	0	8	8

		κωδικός	τοποθέτηση + ημ/νια λήξης		ποσότητα ψυγείου	πωλήσεις 14.30	πωλήσεις 17.00	πωλήσεις 20.00	πωλήσεις ημέρας
παρασκευή	7-Φεβ	gidp1	48	10/2	58			33	58
παρασκευή	7-Φεβ	gidp0,5	20	10/2	26			14	26
παρασκευή	7-Φεβ	gidh1	10	10/2	16			11	16
παρασκευή	7-Φεβ	gidh0,5	25	10/2	29			19	29
σάββατο	8-Φεβ	gidp1	0	11/2	0			25	0
σάββατο		gidp0,5	0	11/2	0			12	0
σάββατο		gidh1	0	11/2	0			5	0
σάββατο		gidh0,5	0	11/2	0			10	0
δευτέρα	10-Φεβ	gidp1	32	13/2	32			29	29
δευτέρα	10-Φεβ	gidp0,5	20	13/2	20			11	11
δευτέρα	10-Φεβ	gidh1	15	13/2	15			9	9
δευτέρα	10-Φεβ	gidh0,5	10	13/2	10			10	10
τρίτη	11-Φεβ	gidp1	20	14/2	23			18	18
τρίτη	11-Φεβ	gidp0,5	10	14/2	19			9	9
τρίτη	11-Φεβ	gidh1	8	14/2	14			7	7
τρίτη	11-Φεβ	gidh0,5	8	14/2	8			8	8
τετάρτη	12-Φεβ	gidp1	15	15/2	17			16	16
τετάρτη	12-Φεβ	gidp0,5	15	15/2	16			9	9
τετάρτη	12-Φεβ	gidh1	6	15/2	7			7	7
τετάρτη	12-Φεβ	gidh0,5	6	15/2	6			6	6
πέμπτη	13-Φεβ	gidp1	25	16/2	25			16	16
πέμπτη	13-Φεβ	gidp0,5	15	16/2	21			5	5
πέμπτη	13-Φεβ	gidh1	10	16/2	10			7	7
πέμπτη	13-Φεβ	gidh0,5	10	16/2	10			6	6
παρασκευή	14-Φεβ	gidp1	50	17/2	59			35	59
παρασκευή	14-Φεβ	gidp0,5	25	17/2	35			16	31
παρασκευή	14-Φεβ	gidh1	14	17/2	17			10	17
παρασκευή	14-Φεβ	gidh0,5	20	17/2	24			12	24
σάββατο	15-Φεβ	gidp1	0	18/2	0			24	0
σάββατο		gidp0,5	0	18/2	4			15	0
σάββατο		gidh1	0	18/2	0			7	0
σάββατο		gidh0,5	0	18/2	0			12	0
δευτέρα	17-Φεβ	gidp1	64	20/2	64			32	32
δευτέρα	17-Φεβ	gidp0,5	28	20/2	28			14	14
δευτέρα	17-Φεβ	gidh1	16	20/2	16			15	15
δευτέρα	17-Φεβ	gidh0,5	16	20/2	16			13	13
τρίτη	18-Φεβ	gidp1	8	21/2	40			20	20
τρίτη	18-Φεβ	gidp0,5	0	21/2	14			14	14
τρίτη	18-Φεβ	gidh1	10	21/2	11			11	11
τρίτη	18-Φεβ	gidh0,5	10	21/2	13			9	9
τετάρτη	19-Φεβ	gidp1	6	22/2	6			6	6
τετάρτη	19-Φεβ	gidp0,5	6	22/2	6			6	6
τετάρτη	19-Φεβ	gidh1	6	22/2	6			6	6
τετάρτη	19-Φεβ	gidh0,5	6	22/2	7			7	7
πέμπτη	20-Φεβ	gidp1	32	23/2	32				17
πέμπτη	20-Φεβ	gidp0,5	20	23/2	20				10
πέμπτη	20-Φεβ	gidh1	10	23/2	10				7

		κωδικός	τοποθέτηση + ημ/νια λήξης		ποσότητα ψυγείου	πωλήσεις 14.30	πωλήσεις 17.00	πωλήσεις 20.00	πωλήσεις ημέρας
πέμπτη	20-Φεβ	gidh0,5	10	23/2	10				9
παρασκευή	21-Φεβ	gidp1	48	24/2	63			34	57
παρασκευή	21-Φεβ	gidp0,5	28	24/2	38			15	33
παρασκευή	21-Φεβ	gidh1	28	24/2	31			14	26
παρασκευή	21-Φεβ	gidh0,5	12	24/2	13			12	13
σάββατο	22-Φεβ	gidp1	0	25/2	6			23	0
σάββατο		gidp0,5	0	25/2	5			18	0
σάββατο		gidh1	0	25/2	5			12	0
σάββατο		gidh0,5	0	25/2	0			1	0

Επεξηγήσεις: Οι κωδικοί GipP1,P0.5,H1,H0.5 είναι οι κωδικοί για κάθε προϊόν.

- GidP1: Γάλα πλήρες συσκευασίας ενός λίτρου
- GidP0.5: Γάλα πλήρες συσκευασίας μισού λίτρου
- GidH1: Γάλα ελαφρύ συσκευασίας ενός λίτρου
- GidH0.5: Γάλα ελαφρύ συσκευασίας μισού λίτρου

Π.3 Πίνακας δεδομένων ημερήσιας ζήτησης ανά προϊόν

Δεδομένα πωλήσεων για:				GidP1			GidP0.5			GidH1			GidH0.5		
Νο Μέρας	Ημερομηνία		Χαμηλή/Υψηλή	n	m	l	n	m	l	n	m	l	n	m	l
1	*τρίτη*	26Νοε	X	21					10			6		10	
2	*τετάρτη*	27Νοε	X	16					7			4			5
3	*πέμπτη*	28Νοε	X			16			6			3			6
4	*παρασκευή*	29Νοε	Y			48	20					10	8		
5	*δευτέρα*	2Δεκ	Y	27			13					12	17		
6	*τρίτη*	3Δεκ	X	9			10			4			3		
7	*τετάρτη*	4Δεκ	X	24			6			6			9		
8	*πέμπτη*	5Δεκ	X			18	10			5			8		
9	*παρασκευή*	6Δεκ	Y	73			18			24			24		
10	*δευτέρα*	9Δεκ	Y	55			17			11			8		
11	*τρίτη*	10Δεκ	X	34			11			10			17		
12	*τετάρτη*	11Δεκ	X			12			8		9		7		
13	*πέμπτη*	12Δεκ	X	17				16			10				10
14	*παρασκευή*	13Δεκ	Y	34			13			12			12		
15	*δευτέρα*	16Δεκ	Y	22			12			8			7		
16	*τρίτη*	17Δεκ	X	28				18			10		14		
17	*τετάρτη*	18Δεκ	X	14			6			5			12		
18	*πέμπτη*	19Δεκ	X	11			6					8	7		
19	*παρασκευή*	20Δεκ	Y		40		20			14			10		
20	*δευτέρα*	23Δεκ	Y	24			10				12		10		
21	*τρίτη*	24Δεκ	X		26				13		10			14	
22	*παρασκευή*	27Δεκ	Y	25			12			10			10		
23	*δευτέρα*	30Δεκ	Y	39			15			12			6		
24	*τρίτη*	31Δεκ	X		31			20		15				14	
25	*παρασκευή*	3Ιαν	Y	55			30			20					15
26	*τρίτη*	7Ιαν	X	27			13				12		9		
27	*τετάρτη*	8Ιαν	X	12			5					2	4		
28	*πέμπτη*	9Ιαν	X			14		6				5			8
29	*παρασκευή*	10Ιαν	Y	50			28			14					12
30	*δευτέρα*	13Ιαν	Y	30					8		8		7		
31	*τρίτη*	14Ιαν	X	15			4					3	2		

Δεδομένα πωλήσεων για:				GidP1			GidP0.5			GidH1			GidH0.5		
No Μέρας	**Ημερομηνία**		**Χαμηλή/Υψηλή**	**n**	**m**	**l**	**n**	**m**	**l**	**n**	**m**	**l**	**n**	**m**	**l**
32	*τετάρτη*	**15Ιαν**	**X**	14			6			6			5		
33	*πέμπτη*	**16Ιαν**	**X**	13				8		5			8		
34	*παρασκευή*	**17Ιαν**	**Y**	45					16	13			14		
35	*δευτέρα*	**20Ιαν**	**Y**	28			15				12		15		
36	*τρίτη*	**21Ιαν**	**X**	16			8				8		6		
37	*τετάρτη*	**22Ιαν**	**X**	15			8					7	4		
38	*πέμπτη*	**23Ιαν**	**X**			15		10				5			9
39	*παρασκευή*	**24Ιαν**	**Y**		36		22					12			16
40	*δευτέρα*	**27Ιαν**	**Y**		30		12			8			12		
41	*τρίτη*	**28Ιαν**	**X**			16	10			8			8		
42	*τετάρτη*	**29Ιαν**	**X**	15			7			5			6		
43	*πέμπτη*	**30Ιαν**	**X**	18			12			6			6		
44	*παρασκευή*	**31Ιαν**	**Y**	50			26			20			22		
45	*δευτέρα*	**3Φεβ**	**Y**	30			11			10			7		
46	*τρίτη*	**4Φεβ**	**X**	24			8				12		6		
47	*τετάρτη*	**5Φεβ**	**X**		20		9					10			10
48	*πέμπτη*	**6Φεβ**	**X**	16			9			6			8		
49	*παρασκευή*	**7Φεβ**	**Y**	58			26			16			29		
50	*δευτέρα*	**10Φεβ**	**Y**	29			11			9				10	
51	*τρίτη*	**11Φεβ**	**X**	18			9			7				8	
52	*τετάρτη*	**12Φεβ**	**X**	16			9					7	6		
53	*πέμπτη*	**13Φεβ**	**X**	16			5			7			6		
54	*παρασκευή*	**14Φεβ**	**Y**	59			31			17			24		
55	*δευτέρα*	**17Φεβ**	**Y**	32			14			15			13		
56	*τρίτη*	**18Φεβ**	**X**	20				14			11		9		
57	*τετάρτη*	**19Φεβ**	**X**			6			6			6		7	
58	*πέμπτη*	**20Φεβ**	**X**	17			10			7			9		
59	*παρασκευή*	**21Φεβ**	**Y**	57			33			26			13		

Επεξηγήσεις:

- Οι παρατηρήσεις στην στήλη n συμβολίζουν ότι η ποσότητα που αναγράφεται ήταν και η ακριβής ποσότητα που ζητήθηκε
- Οι παρατηρήσεις στη στήλη m συμβολίζουν τις περιπτώσεις όπου η ζήτηση ήταν μεγαλύτερη ή ίση της ποσότητας που αναγράφεται

- Οι παρατηρήσεις στη στήλη I συμβολίζουν τις περιπτώσεις όπου η ζήτηση ήταν σίγουρα μεγαλύτερη της ποσότητας που αναγράφεται

Βιβλιογραφία

Γ. Φίλης, (2001), *Συστήματα Παραγωγής (Σημειώσεις Μαθήματος)*, Πολυτεχνείο Κρήτης

Kaplan, E., and Meier, P. (1958), "Nonparametric estimation from incomplete observations", *Journal of the American Statistical Association*, 53, 457-481

K. Kogan and S. Lou (2003), "Multi-stage newsboy problem: A dynamic model", *European Journal of Operational Research* 149, 448-458

Β. Κουϊκόγλου, (2001) *Προσομοίωση (Σημειώσεις Μαθήματος)*, Πολυτεχνείο Κρήτης

H.-S Lau and A.H.-L. Lau (1996), "Estimating the demand distribution of single-period items having frequent stockouts", *European Journal of Operational Research* 92, 254-265

I.J. Myung (2003), "Tutorial on maximum likelihood estimation", *Journal of Mathematical Psychology* 47, 90-100

Θ. Μόδης, (1996), *Προβλέψεις, Προσεγγίζοντας Επιστημονικά τα Προμηνύματα του Αύριο*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

A. Papoulis, (1994), *Πιθανότητες, Τυχαίες Μεταβλητές και Στοχαστικές Διαδικασίες*, Α. Τζιόλα Ε.,

Γ. Σίσκος, (1998) *Γραμμικός προγραμματισμός*, Νέων Τεχνολογιών