ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ
Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών

Ε Λ Λ Η Ν Ι Κ Η Δ Η Μ Ο Κ Ρ Α Τ Ι Α

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2016-17

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ & ΑΝΑΛΥΣΗ

(ΠΔ 97 /2015/ΦΕΚ 163Α'/20.08.2014)

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

# ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

## Προβλήματα Ακέραιου Προγραμματισμού και εφαρμογές στο Στράτευμα

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων
για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Υπό:

ΥΠΛΓΟΥ (ΠΒ) ΚΑΦΑΝΕΛΗ ΘΩΜΑ

Α.Μ.: 2018018022

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2022

Η Μεταπτυχιακή Διατριβή του Υπλγου (ΠΒ) Καφανέλη Θωμά εγκρίνεται:

**ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

Καθηγητής ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ (Επιβλέπων) Δάρας Νικόλαος

Καθηγητής ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ Μουζάκης Διονύσιος

Καθηγητής ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ Τσαφαράκης Στυλιανός

Stelios Tsafarakis

Digitally signed by Stelios Tsafarakis
DN: c=GR, l=Chania, o=Technical University of Crete, ou=Class B - Private Key created and stored in software CSP, sn=Tsafarakis, givenName=Stelios, serialNumber=4644645843, cn=Stelios Tsafarakis, email=tsafarakis@dpem.tuc.gr
Date: 2022.11.28 12:50:21 +02'00'

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

Αφιερώσεις

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο Ακέραιος Προγραμματισμός είναι ένας κλάδος του Γραμμικού Μαθηματικού Προγραμματισμού και αποτελεί τμήμα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Μια από τις βασικές υποθέσεις σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι η υπόθεση της διαιρετότητας. Σύμφωνα με αυτήν, όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων καθώς και όλοι οι διαθέσιμοι πόροι μπορούν να λάβουν ρητές τιμές. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού στα οποία οι μεταβλητές λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές, όπως είναι για παράδειγμα προβλήματα χωροθέτησης, αποφάσεις για χρηματοδότηση ενός επενδυτικού έργου, καταμερισμός εργασίας σε μια επιχείρηση, το πρόβλημα της εφάπαξ χρέωσης, το πρόβλημα σχεδιασμού παραγωγής πολλών προϊόντων κ.ά.). Τα παραπάνω προβλήματα είναι κάποια μόνο από τα παραδείγματα που έχουν ευρεία εφαρμογή και απεικονίζουν φυσικές συνθήκες και καταστάσεις. Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες ορισμένες από τις μεταβλητές απαιτείται να είναι ακέραιες, τότε αναφερόμαστε σε προβλήματα μικτού ακέραιου προγραμματισμού. Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή έχει ως σκοπό να παρουσιάσει τη λογική και τις βασικές μεθοδολογίες του γραμμικού προγραμματισμού μέσα από κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα που βρίσκουν εφαρμογή σε στρατιωτικά ζητήματα και επιχειρήσεις.

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Ακέραιος Προγραμματισμός χρησιμοποιείται για να λύσει πολλά προβλήματα σε επιχειρήσεις και γραμμές παραγωγής, όπως είναι ο σχεδιασμός χρονοδιαγραμμάτων, ο σχεδιασμός παραγωγής, η παράλληλη εκτέλεση εργασιών, οι τηλεπικοινωνίες κ.ά. Υπάρχει η παρανόηση ότι επειδή οι μεταβλητές είναι ακέραιες, τα συγκεκριμένα προβλήματα λύνονται εύκολα. Αυτό δεν ισχύει γιατί μπορεί το πλήθος των μεταβλητών μα είναι μεγάλο, όπως και οι ακέραιες τιμές τους (Sierksma, 2015).

Ο Γραμμικός Μαθηματικός Προγραμματισμός είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται στην Επιχειρησιακή Έρευνα η οποία έχει ως αντικείμενο τη διαδικασία λήψης αποφάσεων μέσω διάφορων επιστημονικών μεθόδων και μαθηματικών προτύπων. Η Επιχειρησιακή Έρευνα διεθνώς περιγράφεται με τον όρο Operational Research ή Operations Research (OR), καθώς και με όρους όπως Management Science (MS), Industrial Engineering (IE) και Decision Science (DS) (Κολέτσος & Στογιάννης, 2017).

Οι απαρχές της Επιχειρησιακής Έρευνας τοποθετούνται χρονικά λίγο πριν και κατά την διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Τότε, για πρώτη φορά δημιουργήθηκαν οι πρώτες ομάδες από επιστήμονες διάφορων πεδίων, από τις βρετανικές και αμερικανικές δυνάμεις, με σκοπό την αντιμετώπιση και επίλυση των τακτικών και στρατηγικών προβλημάτων κατά την διάρκεια του πολέμου. Πρακτικά ο όρος που χρησιμοποιείται ευρέως τώρα, Operational Research, γεννήθηκε αυτή την περίοδο, καθώς ουσιαστικά σήμαινε Research in Military Operations . Σημείο αναφοράς αυτής της προσπάθειας είναι οι ομάδες που ασχολήθηκαν με την αποδοτικότερη χρήση ενός νέου συστήματος έγκαιρης επισήμανσης αεροσκαφών, ή απλούστερα ραντάρ, μέσω της αποτελεσματικής διαχείρισης των λειτουργιών του και της βέλτιστης χρήσης του εξοπλισμού, ενώ παράλληλα μελετήθηκε και η συμπεριφορά του ανθρώπινου δυναμικού που το χειρίζεται. Οι συγκεκριμένες μελέτες, θεωρείται ότι διαδραμάτισαν καθοριστικό ρόλο στην έκβαση της Μάχης της Αγγλίας (1940) (Κολέτσος & Στογιάννης, 2017).

Αυτή η μέθοδος, η οποία δοκιμάστηκε για πρώτη φορά σε καιρό πολέμου, φαίνεται να συνέβαλε σε σημαντικό βαθμό στη γενικότερη βιομηχανική (και όχι μόνο) ανάπτυξη που ακολούθησε τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο. Οι διάφοροι οργανισμοί και επιχειρήσεις, ολοένα και συχνότερα, ερχόντουσαν αντιμέτωπες με ολοένα και πιο σύνθετα προβλήματα, με αποτέλεσμα να είναι επιτακτική η εξεύρεση νέων τρόπων αντιμετώπισής τους. Αυτά τα προβλήματα ήταν παρόμοια με αυτά που αντιμετωπίστηκαν επιτυχώς από την Επιχειρησιακή Έρευνα κατά την διάρκεια του πολέμου, απλά σε διαφορετικό πλαίσιο. Αυτό οδήγησε στη δημιουργία επιστημονικών κοινοτήτων κέντρων, καθώς και ακαδημαϊκών προγραμμάτων για την Επιχειρησιακή Έρευνα. Είναι χαρακτηριστικό ότι τα περισσότερα από τα εργαλεία που είναι σε χρήση σήμερα, αναπτύχθηκαν, σε μεγάλο βαθμό, εκείνη την εποχή.

Μεγάλο ρόλο στην εξέλιξη της Επιχειρησιακής Έρευνας, διαδραμάτισαν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές και η εξέλιξή τους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα σύνθετα προβλήματα απαιτούν πολλούς υπολογισμούς, κάτι το οποίο οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές μπορούν να κάνουν πολύ πιο γρήγορα, σε σχέση με τον άνθρωπο. Ιδιαίτερα με την ανάπτυξη των οικιακών ηλεκτρονικών υπολογιστών, από το 1980 και μετά, σε συνδυασμό και με την ανάπτυξη του σχετικού λογισμικού, επέτρεψε στον καθένα να έχει πρόσβαση στη συγκεκριμένη επιστήμη.

Η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει ευρεία εφαρμογή σε προβλήματα που αφορούν την διαχείριση των εργασιών και λειτουργιών (operations) εντός ενός οργανισμού, μιας επιχείρησης ή μια στρατιωτικής μονάδας, που μπορεί να έχει πεδίο δράσης τη βιομηχανία, τις μεταφορές, τις τηλεπικοινωνίες, την παροχή υπηρεσιών Υγείας, καθώς και θέματα οικονομικού σχεδιασμού και διαχείρισης. Ο όρος Έρευνα (Research) καταδεικνύει ότι υιοθετείται μια διαδικασία η οποία είναι επιστημονικά τεκμηριωμένη. Συγκεκριμένα, σε ένα πρόβλημα Επιχειρησιακής Ἐρευνας:

- Μελετάται το πρόβλημα, ενώ συγκεντρώνονται και όλα τα σχετικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, εντοπίζονται όλες οι συνιστώσες του προβλήματος με τον καθορισμό των μεταβλητών και των σχετικών περιορισμών του, ενώ παράλληλα προσδιορίζεται και ο επιθυμητός στόχος (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση).

- Κατασκευάζεται ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποίο ουσιαστικά αναπαριστά το πραγματικό πρόβλημα. Σε αυτό το βήμα, τα στοιχεία που συλλέχθηκαν προηγουμένως μετατρέπονται σε μαθηματικές σχέσεις. Η σωστή μαθηματική αναπαράσταση του προβλήματος, εξασφαλίζει ότι τα αποτελέσματα που θα ληφθούν, θα είναι και οι πραγματικές λύσεις του αρχικού προβλήματος.

- Τέλος, ακολουθεί η επίλυση και επαλήθευση του μοντέλου, μέσω δοκιμών ή/και πειραμάτων, προσαρμόζοντάς το αναλόγως, μέχρις ότου πιστοποιείται σε κάποιο βαθμό αρχική μας υπόθεσή μας.

Ένα χαρακτηριστικό της Επιχειρησιακής Έρευνας, είναι ότι οι λύσεις που παρέχει, προκύπτουν πάντα με το σκεπτικό του οργανισμού ως σύνολο. Μπορεί να λαμβάνονται υπόψη όλες οι πιθανές μεταβλητές, αλλά αυτό γίνεται αποκλειστικά με σκοπό το πώς θα επιτευχθεί η συνολική ωφέλεια. Ακόμα, ο απώτερος στόχος της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι η παροχή της βέλτιστης λύσης, και όχι κάτι λιγότερο. Τέλος, εξαιτίας της πολυπλοκότητας των προβλημάτων της, αυτά συνήθως προσεγγίζονται ομαδικά και όχι ατομικά και για αυτό η ομάδα επίλυσης συνήθως αποτελείται από έμπειρους επιστήμονες διαφόρων ειδικοτήτων (Κολέτσος & Στογιάννης, 2017).

Κάποιες από τις βασικές έννοιες που συναντώνται στην Επιχειρησιακή Έρευνα είναι ο γραμμικός και μη γραμμικός προγραμματισμός, ο ακέραιος προγραμματισμός, ο δυναμικός προγραμματισμός, η πολυκριτηριακή ανάλυση αποφάσεων, η θεωρία ουρών αναμονής, η στοχαστική μοντελοποίηση, η θεωρία παιγνίων κ.ά. Οι κύριες μέθοδοι με τις οποίες ερχόμαστε σε επαφή στην Επιχειρησιακή Έρευνα είναι οι παρακάτω:

- “Μέθοδοι προσομοίωσης (simulation methods)”. Ο στόχος των συγκεκριμένων μεθόδων είναι η δημιουργία προσομοιωτών (simulators), οι οποίες θα παρέχουν στους υπεύθυνους λήψεις αποφάσεων να μελετήσουν τη δυνατότητα βελτιώσεων και στη συνέχεια να ελέγξουν κατά πόσο αυτές οι βελτιώσεις αποδίδουν.

- “Μέθοδοι βελτιστοποίησης (optimization methods)”. Ο στόχος των συγκεκριμένων μεθόδων είναι οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων να έχουν στη διάθεση τους ένα σύνολο λύσεων, με τρόπο αποδοτικό και αποτελεσματικό, σε ένα περιβάλλον όπου πρακτικά το πλήθος των δυνατών λύσεων είναι άπειρο. Απώτερος στόχος, είναι ο εντοπισμός της βέλτιστης δυνατής λύσης, δεδομένων κάποιων συνθηκών.

- “Μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων (data analysis methods)”. Ο στόχος αυτών των μεθόδων είναι η παροχή βοήθειας, στους υπεύθυνους λήψης αποφάσεων, σχετικά με την αναγνώριση πιθανών μοτίβων και συνδέσεων μεταξύ των διαθέσιμων. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε διάφορες εφαρμογές, όπως στον τομέα των προβλέψεων (forecasting) όπου με βάση τις γνώσης που έχουμε για τα δεδομένα του παρελθόντος, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις μελλοντικές τιμές κάποιων μεταβλητών.

Οι σύγχρονες επιχειρήσεις και οργανισμοί έρχονται αντιμέτωποι με ολοένα και πιο σύνθετα προβλήματα, των οποίων η κατάλληλη αντιμετώπιση, είναι σημαντική για την πορεία τους. Η Επιχειρησιακή Έρευνα παρέχει εκείνα τα εργαλεία τα οποία βοηθούν στην λήψη της βέλτιστης απόφασης. Ένα από τα ευρέως χρησιμοποιούμενα εργαλεία είναι ο γραμμικός προγραμματισμός είτε οι ζητούμενες λύσεις είναι ακέραιες είτε όχι. Αυτό απαιτεί αρχικά την κατασκευή του μοντέλου που περιγράφει το πρόβλημα προς επίλυση και στη συνέχεια η εύρεση των βέλτιστων λύσεων. Για να βρεθούν οι κατάλληλες λύσεις απαιτείται η εύρεση κατάλληλων μεθόδων και αλγορίθμων επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή έχει ως σκοπό να παρουσιάσει το πεδίο εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού μέσα από κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα με εφαρμογή σε στρατιωτικά ζητήματα και μη. Θεωρείται πως ο αναγνώστης έχει κάποιο υπόβαθρο στην Επιχειρησιακή έρευνα καθώς θα χρησιμοποιηθούν εργαλεία και μέθοδοι από αυτόν τον κλάδο χωρίς να γίνει αναλυτική παρουσίαση αυτών.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
# Υπόβαθρο και Μέθοδοι Επίλυσης

## §1. Μαθηματικός Προγραμματισμός

Ο μαθηματικός προγραμματισμός προέκυψε κατά την διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, όταν γεννήθηκε η ανάγκη να βελτιστοποιηθεί η κατανομή των στρατιωτικών πόρων για να πετύχουν το βέλτιστο στρατηγικό αποτέλεσμα στο πεδίο των μαχών. Τα ικανοποιητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από την χρήση του μαθηματικού προγραμματισμού στον στρατιωτικό τομέα οδήγησαν στην επέκταση της χρήσης αυτών των μαθηματικών εννοιών και στην βιομηχανία για την λήψη των βέλτιστων οικονομικών κυρίως αποφάσεων. Έτσι, λοιπόν, αναπτύχθηκε ο κλάδος της Επιχειρησιακής Έρευνας, ο οποίος ασχολείται με την βέλτιστη λειτουργία και οργάνωση των διαθέσιμων πόρων μιας επιχείρησης για να πετύχει αυτή κάθε φορά τον αντικειμενικό της στόχο.

Εν γένει ο μαθηματικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται για την διαμόρφωση ενός μαθηματικού μοντέλου που αποσκοπεί στην εύρεση της βέλτιστης λύσης για την ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης υπό την επίδραση διάφορων μαθηματικών ανισοτήτων. Η αντικειμενική συνάρτηση αποτελεί τον στόχο του μοντέλου και συνεπώς και του δημιουργού του, ενώ οι μαθηματικές ανισώσεις αποτελούν τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται το φυσικό σύστημα που εξετάζεται. Τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι μαθηματικές ανισώσεις περιλαμβάνουν διάφορους αγνώστους, τις λεγόμενες μεταβλητές απόφασης (decision variables), για τις οποίες ο αλγόριθμος επίλυσης του μοντέλου αναζητά μεταξύ διάφορων λύσεων την βέλτιστή τους τιμή (Williams, 2013).

# §2. Γραμμικός Προγραμματισμός

Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί υποκατηγορία του μαθηματικού προγραμματισμού. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτού είναι η γραμμική εξάρτηση που έχουν οι μεταβλητές απόφασης τόσο στην αντικειμενική συνάρτηση όσο και στους διάφορους περιορισμούς. Οποιαδήποτε ύψωση μεταβλητής σε δύναμη αντιβαίνει σε αυτό το χαρακτηριστικό και αποτελεί πρόβλημα προς διόρθωση. Επιπρόσθετα όμως, ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού πρέπει να τηρεί μερικές ακόμα προϋποθέσεις.

- Η προϋπόθεση της αναλογικότητας, που σημαίνει ότι η βελτιστοποιημένη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι γραμμικά ανάλογη με την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής απόφασης.
- Η προϋπόθεση της προσθετικότητας, που σημαίνει ότι η βέλτιστη τιμή της μεταβλητής απόφασης, που καθορίζει την βελτιστοποιημένη αντικειμενική συνάρτηση, δεν εξαρτάται από τις τιμές των άλλων μεταβλητών.
- Η προϋπόθεση της διαιρετότητας, που σημαίνει ότι οι μεταβλητές απόφασης μπορεί να παίρνουν κλασματικές τιμές, με τον περιορισμό να είναι μη αρνητικές. Συγκεκριμένα, αυτή η προϋπόθεση ισχύει στον μεικτό ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό.
- Η προϋπόθεση της προσδιοριστικότητας ή αλλιώς βεβαιότητας, που σημαίνει ότι όλες οι παράμετροι είναι γνωστές και αμετάβλητες (σταθερές). Σε μερικές περιπτώσεις, επιλέγεται η επίλυση του μοντέλου με διαφορετικές παραμέτρους κάθε φορά για την διεξαγωγή των κατάλληλων συμπερασμάτων.

Η λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού διακρίνεται σε:

- Εφικτή λύση, που σημαίνει ότι η εν λόγω λύση ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς που έχουν τεθεί.

- Βέλτιστη εφικτή λύση, που σημαίνει ότι η εν λόγω λύση όχι μόνο ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος, αλλά καταφέρνει να βελτιστοποιήσει την αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου.
- Μη εφικτή λύση, που σημαίνει ότι η εν λόγω λύση δεν ικανοποιεί τουλάχιστον έναν περιορισμό του προβλήματος.
- Επαυξημένη λύση, η οποία και αποτελεί λύση ενός προβλήματος που βρίσκεται σε επαυξημένη μορφή, δηλαδή σε μια μορφή που οι περιορισμοί είναι μόνο ισότητες.

## §3. Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός

Η ανάγκη εύρεσης λύσης σε προβλήματα διαχείρισης ανθρώπινου δυναμικού, σε προβλήματα βέλτιστης κατανομής μηχανημάτων οδηγεί στην ύπαρξη του ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (linear integer programming). Αυτό σημαίνει ότι οι μεταβλητές απόφασης υποχρεούνται να είναι ακέραιες. Για παράδειγμα, όταν η μεταβλητή απόφασης είναι ο αριθμός των επιβατών σε ένα αεροπλάνο ή ο αριθμός μηχανημάτων σε ένα εργοστάσιο παραγωγής ενέργειας, αυτή η μεταβλητή απόφασης θα πρέπει να είναι ακέραια. Ο ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός διατηρεί όλες εκείνες τις προϋποθέσεις που αναπτύχθηκαν παραπάνω για τον γραμμικό προγραμματισμό με την διαφορά ότι οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης που θα βρεθούν να είναι ακέραιες. Στην περίπτωση, όμως, που απαιτείται μερικές από τις μεταβλητές απόφασης να είναι μη ακέραιες, τότε προκύπτει ο μεικτός ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός (mixed integer linear programming) (Chen et all, 2010). Ενδεικτικά μερικές εφαρμογές του μεικτού ακέραιου προγραμματισμού είναι:

- Ο προϋπολογισμός επενδύσεων κεφαλαίου (capital budgeting), όπου εξετάζεται εάν μια επένδυση θα γίνει δεκτή ή αν θα απορριφθεί.

- Η αποθήκευση και διανομή αποθεμάτων (warehouse location), όπου επιλέγονται οι αποθήκες για αποθήκευση με το μικρότερο κόστος και αποδοτικότερη θέση για διανομή των αποθεμάτων.
- Η κατανομή εργασίας (scheduling), όπου αναζητάται η καλύτερη δυνατή ανάθεση εργασιών ανάλογα με το διαθέσιμο ανθρώπινο προσωπικό.

# §4. Οι τρεις βασικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστούν πολύ συνοπτικά οι βασικότερες μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού. Συγκεκριμένα αυτές είναι, η μέθοδος Simplex, η μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης (Branch and Bound), καθώς και η μέθοδος Επιπέδων Αποκοπής (Cutting Planes).

## 4.1. Η μέθοδος Simplex

Η μέθοδος Simplex αποτελεί μια επαναληπτική αλγεβρική μέθοδος με τη βοήθεια της οποίας επιλύονται προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού που έχουν περισσότερες από 2 μεταβλητές απόφασης. Ξεκινώντας από μία βασική δυνατή λύση $x_0$, με διαδοχικές επαναλήψεις προσδιορίζεται κάθε φορά και μία βελτιωμένη βασική λύση μέχρι να καταλήξει ο αλγόριθμος στη καλύτερη δυνατή αν υπάρχει. Σε κάθε επανάληψη εξετάζεται αν η λύση βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου και αν τηρούνται οι προϋποθέσεις για εύρεση του τύπου της λύσης που απαιτείται. Έτσι, επαναλαμβάνονται συγκεκριμένες διαδικασίες και έλεγχοι μέχρι να βελτιστοποιηθεί η λύση μετά από ένα σύνολο πεπερασμένων βημάτων.

Η τυπική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, όπως περιεγράφηκε προηγουμένως είναι η παρακάτω:

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$z = \max\{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n\} \tag{1.1}$$

Περιορισμοί:

$$\begin{gathered} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \leq, =, \geq b_1 \\ \vdots \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \leq, =, \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \leq, =, \geq b_m \\ x_i \geq 0 \; \gamma\iota\alpha \; i = 1,2, \ldots n \end{gathered} \tag{1.2}$$

Οι συντελεστές $c_j$, $a_{ij}$, $b_i$ είναι γνωστές παράμετροι και ισχύουν j=1,2,…,n και i=1,2,…,m.

Με την χρήση πινάκων, οι (1.1) – (1.2) μπορούν να μοντελοποιηθούν στην παρακάτω μορφή:

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$z = \max\{C^T x\} \tag{1.3}$$

Περιορισμοί:

$$\begin{gathered} A \cdot x \leq, =, \geq B \\ x \geq 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Το διάνυσμα $x$ περιέχει τις $n$ μεταβλητές απόφασης και είναι:

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας-στήλη $C$ περιέχει τους n συντελεστές $c_i$ και είναι:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $A$ είναι $m \times n$ και είναι της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $B$ είναι $m \times 1$ και είναι της μορφής:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Δεδομένων των παραπάνω πινάκων μπορεί να κατασκευαστεί ο αρχικός πίνακας Simplex, η γενική μορφή του οποίου φαίνεται παρακάτω:

| Βάση | $c_1$ | $c_2$ | $\cdots$ | $c_n$ | 0 | 0 | $\cdots$ | $0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $b_1$ | $b_2$ | $\cdots$ | $b_m$ | Λύση | Πηλίκο |
| $b_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | 1 | $\cdots$ | 0 | $0$ | $x_{B1}$ | $x_{Bi}/a_{ik}$ |
| $b_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | 0 | 1 | 0 | $0$ | $x_{B2}$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $b_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | 0 | 0 | $\cdots$ | $1$ | $x_{Bm}$ | |
| $z_j - c_j$ | | | | | | | | | z | |

Από τον παραπάνω πίνακα ξεκινάει η εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex, από όπου με επαναληπτικές γραμμοπράξεις και ελέγχους αναζητάται ο συνδυασμός των μεταβλητών που οδηγούν στην βέλτιστη λύση του προβλήματος.

## 4.2. Η μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης (Branch and Bound)

Η μέθοδος Branch and Bound βασίζεται στην ιδέα του «διαίρει και βασίλευε». Η λογική είναι να διαιρέσεις μια περιοχή εφικτών λύσεων σε περισσότερες περιοχές εφικτών λύσεων και αν χρειάζεται, να διαιρεθούν και αυτές σε άλλες μικρότερες περιοχές. Αυτή η μέθοδος, όμως, σε μεγάλα προβλήματα δεν χρησιμοποιείται, λόγω της συνεχούς αναζήτησης μεγάλου πλήθους λύσεων (Chen et all, 2010) (Hillier & Lieberman, 2001).

Με την μέθοδο αυτή διαιρούμε το αρχικό πρόβλημα σε υποπροβλήματα με σκοπό την απλούστευσή του και την ικανοποίηση των συνθηκών που απαιτούνται. Η λύση των υποπροβλημάτων θα μας δώσει την τελική βέλτιστη λύση. Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που θα βρεθεί στο αρχικό υποπρόβλημα αποτελεί το άνω φράγμα της, διότι οποιαδήποτε άλλη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που θα αναζητάται στα υπόλοιπα υποπροβλήματα θα είναι κατώτερη της αρχικής. Όσον αφορά τις λύσεις των μεταβλητών απόφασης, εάν αναζητώνται ακέραιες λύσεις για αυτές, τότε αυτό που γίνεται είναι να στρογγυλοποιείται μία ακριβώς δεκαδική λύση τόσο προς τα πάνω όσο και προς τα κάτω και έτσι να προκύπτουν δύο άλλα υποπροβλήματα με έναν επιπλέον περιορισμό το καθένα για την μεταβλητή απόφασης που στρογγυλοποιήθηκε (Chen et all, 2010).

## 4.3. Η μέθοδος Επιπέδων Αποκοπής (Cutting Planes)

Η μέθοδος Cutting Planes τροποποιεί τις λύσεις του γραμμικού προβλήματος μέχρι να βρεθεί μια ακέραια λύση. Η διαφορά αυτής της μεθόδου είναι ότι αντί να αναζητά συνεχώς λύσεις, δημιουργεί συνεχώς νέους περιορισμούς. Αυτοί οι νέοι περιορισμοί καταφέρνουν να μικραίνουν την περιοχή εφικτών λύσεων και έτσι τελικά να βρίσκεται η βέλτιστη λύση. Αποτελεί τον πρώτο αλγόριθμο επίλυσης τέτοιων προβλημάτων, αλλά δεν χρησιμοποιείται ως έχει τα τελευταία χρόνια (Chen et all, 2010).

Η μέθοδος Επιπέδων Αποκοπής (Cutting Planes) αποτελεί την βάση για την εξέλιξη του ακέραιου προγραμματισμού. Μάλιστα, είναι ο πρώτος αλγόριθμος που αποδείχτηκε ότι μπορεί να αποπερατωθεί σε ένα συγκεκριμένο αριθμό υπολογιστικών βημάτων. Λόγω όμως της μικρής αποτελεσματικότητας που έχουν, δεν χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό, αλλά συνέβαλλαν στην δημιουργία άλλων αλγορίθμων επίλυσης προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού. Η συγκεκριμένη μέθοδος αποτελεί εργαλείο επίλυσης προβλημάτων με δύο ή περισσότερες μεταβλητές. Σκοπός του αλγορίθμου είναι να περιορίσει την περιοχή των εφικτών λύσεων χρησιμοποιώντας επίπεδα αποκοπής με αποτέλεσμα να βρεθεί η βέλτιστη ακέραια εφικτή λύση (Chen et all, 2010).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
# Εφαρμογές ακέραιου προγραμματισμού στο στράτευμα

Υπάρχει μια μεγάλη πληθώρα εφαρμογών της Επιχειρησιακής Έρευνας, και συγκεκριμένα του ακέραιου προγραμματισμού, Ένοπλες Δυνάμεις. Από τη Βέλτιστη Κατανομή Περιορισμένων Πόρων, τη Διαχείριση Ανθρώπινου Δυναμικού, το πρόβλημα μεταφοράς υλικών και εφοδίων μέχρι και την σειρά επιλογής πυροδότησης στόχων (Παπαρρίζου Κ. και Σιφαλέρα Α., 2008). Στα παρακάτω παραδείγματα αναγράφεται η κατηγορία προβλημάτων που ανήκουν ενώ παρουσιάζεται η εκδοχή αυτή που βρίσκει εφαρμογή σε στρατιωτικά ζητήματα.

## §1. Το πρόβλημα της εφάπαξ χρέωσης (Fixed charge problem)

Το συγκεκριμένο παράδειγμα ανήκει στον Winston (2004) και εδώ παρουσιάζεται μια παραλλαγή του. Η ΕΑΣ (Ελληνικά Αμυντικά Συστήματα) παράγει τρία είδη πυρομαχικών, τα φυσίγγια διαμετρήματος $7.62 \times 51mm$, τα φυσίγγια διαμετρήματος $5.56 \times 45mm$ και τις οπλοβομβίδες υψηλής ταχύτητας διαμετρήματος $40 \times 53mm$. Για την κατασκευή του κάθε είδους απαιτείται εξοπλισμός, ο οποίος ενοικιάζεται σύμφωνα με τα παρακάτω κόστη ανά εβδομάδα.

| Είδος Πυρομαχικών | Κόστος/Εβδομάδα (x100€) |
|---|---|
| $7.62 \times 51mm$ | 200 |
| $5.56 \times 45mm$ | 150 |
| $40 \times 53mm$ | 100 |

Για την παραγωγή ενός κουτίου του κάθε είδους απαιτούνται κάποιες ώρες εργασίας, όπως και κάποια κιλά χάλυβα, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα.

| Είδος Πυρομαχικών | Ώρες εργασίας ανά κουτί | Χάλυβας σε kg |
|---|---|---|
| 100 τμχ. $7.62 \times 51mm$ | 3 | 4 |
| 100τμχ. $5.56 \times 45mm$ | 2 | 3 |
| 24τμχ. $40 \times 53mm$ | 6 | 4 |

Η παραγωγή έχει τους εξής περιορισμούς. Κάθε εβδομάδα η εταιρεία μπορεί να διαθέσει έως και 150 ώρες εργασίας και το πολύ 160 κιλά χάλυβα. Τέλος, στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα μεταβλητά κόστη ανά κουτί προϊόντος καθώς και οι τιμές πώλησής τους.

| Είδος Πυρομαχικών | Τιμή πώλησης κουτιού (x100€) | Μεταβλητό κόστος ανά κουτί (x100€) |
|---|---|---|
| 100 τμχ. $7.62 \times 51mm$ | 12 | 6 |
| 100τμχ. $5.56 \times 45mm$ | 8 | 4 |
| 24τμχ. $40 \times 53mm$ | 15 | 8 |

Το ζητούμενο είναι ποιες πρέπει να είναι οι ποσότητες που θα παραχθούν κάθε εβδομάδα από το κάθε είδος προκειμένου να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη της . Θεωρείται ότι ένα κιβώτιο περιλαμβάνει 100 φυσίγγια για τα είδη των $7.62 \times 51mm$ και $5.56 \times 45mm$, και 24 φυσίγγια για το διαμέτρημα $40 \times 53mm$.

*Λύση του προβλήματος*

Αρχικά ορίζονται οι μεταβλητές του προβλήματος όπως παρακάτω:

- $x_1$: αριθμός κιβωτίων $7.62 \times 51mm$ που παράγονται ανά εβδομάδα
- $x_2$: αριθμός κιβωτίων $5.56 \times 45mm$ που παράγονται ανά εβδομάδα
- $x_3$: αριθμός κιβωτίων $40 \times 53mm$ που παράγονται ανά εβδομάδα

Προφανώς οι τιμές των παραπάνω μεταβλητών είναι θετικές ακέραιες οπότε έχουμε ένα πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού. Επιπλέον, το κόστος ενοικίασης των μηχανημάτων εξαρτάται αποκλειστικά από το αν κάποιο είδος θα παραχθεί η όχι και δεν εξαρτάται από την παραγόμενη ποσότητα. Οπότε ορίζονται επιπλέον οι παρακάτω μεταβλητές:

- $y_1 = \begin{cases} 1 \; αν \; παραχθούν \; 7.62 \times 51mm \\ 0 \; αν \; δεν \; παραχθούν \; 7.62 \times 51mm \end{cases}$
- $y_2 = \begin{cases} 1 \; αν \; παραχθούν \; 5.56 \times 45mm \\ 0 \; αν \; δεν \; παραχθούν \; 5.56 \times 45mm \end{cases}$
- $y_3 = \begin{cases} 1 \; αν \; παραχθούν \; 40 \times 53mm \\ 0 \; αν \; δεν \; παραχθούν \; 40 \times 53mm \end{cases}$

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

**Κέρδη από τις πωλήσεις**

$$\mathbf{12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3}$$

**Μεταβλητά κόστη**

$$\mathbf{6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3}$$

**Κόστος ενοικίασης μηχανημάτων**

$$\mathbf{200 \cdot y_1 + 150 \cdot y_2 + 100 \cdot y_3}$$

Το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα εφάπαξ χρέωσης (fixed charge), γιατί το κόστος ενοικίασης είναι ανεξάρτητο από την ποσότητα των μονάδων που θα παραχθούν από τα μηχανήματα. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα συνολικά εβδομαδιαία κέρδη της εταιρείας θα προκύπτουν αν από τα κέρδη των πωλήσεων αφαιρεθούν τα μεταβλητά κόστη και το ενοίκιο των μηχανημάτων.

Έχουμε λοιπόν ότι τα εβδομαδιαία κέρδη δίνονται από τη συνάρτηση

$$\mathbf{z = (12x_1 + 8x_2 + 15x_3) - (6x_1 + 4x_2 + 8x_3) - (200y_1 + 150y_2 + 100y_3)}$$

Αφού η εταιρεία μπορεί να διαθέσει έως και 150 ώρες εργασίας έχουμε τον παρακάτω περιορισμό:

$$\mathbf{3} \cdot \boldsymbol{x_1} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{x_2} + \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{x_3} \leq 150$$

Αφού η εταιρεία μπορεί να διαθέσει έως και 160 κιλά χάλυβα ανά εβδομάδα έχουμε τον παρακάτω περιορισμό:

$$\mathbf{4} \cdot \boldsymbol{x_1} + \mathbf{3} \cdot \boldsymbol{x_2} + \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{x_3} \leq 160$$

Τέλος έχουμε και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας, δηλαδή :

$$\boldsymbol{x_i} \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3$$

ενώ επιπλέον πρέπει να παίρνουν ακέραιες τιμές, καθώς επίσης ότι:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad x_i > 0 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \qquad i = 1,2,3$$

Σε ένα πρόβλημα σταθερού κόστους πρέπει να προσέξουμε με ποιον τρόπο θα εισαχθούν και οι μεταβλητές

$$y_i \quad , \quad i = 1,2,3$$

στους περιορισμούς. Αν δεν γίνει αυτό, τότε κατά την επίλυση του προβλήματος, θα επιλεχθεί η τιμή 0 καθώς δίνει καλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση, αφού το κόστος ενοικίασης μειώνει τα κέρδη. Αυτό όμως δεν είναι εφικτό, καθώς τότε η εταιρεία θα παρήγαγε προϊόντα χωρίς να πληρώνει ενοίκιο για τα μηχανήματα. Αυτό λύνεται προσθέτοντας τους παρακάτω περιορισμούς:

$$x_i \leq M \cdot y_i \quad , \quad i = 1,2,3$$

όπου $M$ είναι ένας τυχαία επιλεγμένος μεγάλος αριθμός. Εδώ θα θεωρήσουμε $M = 200$.

Τότε έχουμε το παρακάτω πρόβλημα

**Αντικειμενική συνάρτηση**

$$\boldsymbol{max\ \ z = (12x_1 + 8x_2 + 15x_3) - (6x_1 + 4x_2 + 8x_3) - (200y_1 + 150y_2 + 100y_3)}$$

**Περιορισμοί**

$$\boldsymbol{3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 150}$$

$$\boldsymbol{4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \leq 160}$$

$$\boldsymbol{x_i \leq 200 \cdot y_i \qquad i = 1, 2, 3}$$

$$\boldsymbol{x_i\ ακέραιος\ , \qquad i = 1, 2, 3}$$

$$\boldsymbol{x_i \geq 0 \quad , \qquad i = 1, 2, 3}$$

$$\boldsymbol{y_i = \begin{cases} 1 & αν\ \ x_i > 0 \\ 0 & αλλιώς \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3}$$

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα με τη μέθοδο Branch and Bound είτε με τη μέθοδο Cutting Planes, βρίσκουμε ότι είναι $z = 75$, $x_3 = 25$ , $y_3 = 1$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η εταιρεία, προκειμένου να έχει μέγιστα εβδομαδιαία κέρδη πρέπει να κατασκευάζει 25 κιβώτια οπλοβομβίδων υψηλής ταχύτητας $40 \times 53mm$ την εβδομάδα, για να έχει 7.500€ κέρδος την εβδομάδα.

## §2. Το πρόβλημα της διαχείρισης κεφαλαίων (capital budgeting problem)

Το συγκεκριμένο παράδειγμα ανήκει στον Winston (2004) και εδώ παρουσιάζεται μια παραλλαγή του. Το ΓΕΕΘΑ θέλει να μελετήσει την απόδοση τεσσάρων επενδύσεων.
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται η Καθαρή Παρούσα Αξία (ΚΠΑ – Net Present Value) και το Αρχικό Κεφάλαιο για την κάθε επένδυση.

| Α/Α | Επένδυση | ΚΠΑ (€) | Αρχικό Κεφάλαιο (€) |
|---|---|---|---|
| 1 | Νέο Αντιαεροπορικο Συστημα | 1.600.000 | 500.000 |
| 2 | Νέο Μη Επανδρωμένο Αερόχημα | 2.200.000 | 700.000 |
| 3 | Νέα Οχήματα Μεταφοράς Προσωπικού | 1.200.000 | 400.000 |
| 4 | Αναβάθμιση Αρμάτων μάχης | 800.000 | 300.000 |

Το διαθέσιμο κεφάλαιο του ΓΕΕΘΑ είναι ίσο με 1.400.000€. Το ζητούμενο είναι το ΓΕΕΘΑ να μεγιστοποιήσει την Καθαρή Παρούσα Αξία των επενδύσεων.

*Λύση του προβλήματος*

Αρχικά ορίζονται οι μεταβλητές του προβλήματος, οι οποίες είναι δυαδικές μεταβλητές ως εξής:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ \ \gamma\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota\ \eta\ \varepsilon\pi\acute{\varepsilon}\nu\delta\upsilon\sigma\eta\ \ i \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \qquad i = 1,2,3\ ,4$$

Οι συγκεκριμένες μεταβλητές είναι δυαδικές ή δυικές γιατί το ΓΕΕΘΑ έχει δύο επιλογές, να επενδύσει ή να μην επενδύσει.

Με βάση τα παραπάνω η συνολική παρούσα ΚΠΑ (σε εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ) είναι ίση με

$$z = 16 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4$$

και το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση της.

Για παράδειγμα αν αποφασίσει να προχωρήσει στις επενδύσεις 1 και 3, δηλαδή είναι

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,0,1,0)$$

τότε η ΚΠΑ είναι ίση με

$$z = 16 \cdot 1 + 22 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 8 \cdot 0 = 28 \text{ ή } 2.800.000\ \varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}$$

Επιπλέον υπάρχει και ο παρακάτω περιορισμός, σε εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ:

$$5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 \leq 14$$

όπου οι συντελεστές των μεταβλητών αντιπροσωπεύουν το απαιτούμενο αρχικό κεφάλαιο σε κάθε επένδυση, ενώ 1.400.000 € είναι το μέγιστο ποσό της επένδυσης.

Τότε έχουμε το παρακάτω πρόβλημα:

**Αντικειμενική συνάρτηση**

$$\boldsymbol{max\ \ z = 16 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4}$$

**Περιορισμοί**

$$\boldsymbol{5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 \leq 14}$$

$$\boldsymbol{x_i = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ \ \gamma\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota\ \eta\ \varepsilon\pi\acute{\varepsilon}\nu\delta\upsilon\sigma\eta\ \ i \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3\ , 4}$$

Θα μπορούσαν να τεθούν και άλλοι περιορισμοί. Για παράδειγμα το ΓΕΕΘΑ θα μπορούσε να προχωρήσει στην επιλογή το πολύ δύο επενδύσεων. Σε μια τέτοια περίπτωση εισάγεται και ο παρακάτω περιορισμός, ο οποίος και αποκλείει την επιλογή περισσοτέρων των δύο επενδύσεων:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

Άλλος περιορισμός θα μπορούσε να είναι ότι αν αποφασίσει να προχωρήσει στην επένδυση 3, τότε θα πρέπει να επιλέξει και την επένδυση 4. Τότε έχουμε τον περιορισμό

$$x_3 \leq x_4 \text{ ή } x_3 - x_4 \leq 0$$

Για παράδειγμα, αν το επιτελείο αποφασίσει να προχωρήσει στην επένδυση 3, τότε είναι $x_3 = 1$ και τότε βάσει του παραπάνω περιορισμού θα είναι $1 \leq x_4$ και αφού οι μόνες τιμές που παίρνει είναι 0 ή 1, θα είναι και $x_4 = 1$ .

Ακόμα ένα παράδειγμα περιορισμού είναι ότι το ΓΕΕΘΑ θα μπορούσε να επιλέξει μόνο μία από τις επενδύσεις 1 και 3, οπότε έχουμε τον παρακάτω περιορισμό:

$$x_1 + x_3 = 1$$

Δεδομένου ότι οι μόνες τιμές που παίρνουν οι δύο μεταβλητές είναι 0 ή 1, τότε αναγκαστικά θα είναι μόνο $x_1 = 1$ ή μόνο $x_3 = 1$.

Τέλος, αν θα μπορούσε να επιλέξει το πολύ μία από τις επενδύσεις 1 και 3, οπότε έχουμε τον παρακάτω περιορισμό:

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι πρέπει να δοθεί μεγάλη προσοχή στην εκφώνηση ώστε να είναι εφικτή η σωστή διατύπωση της αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά και των περιορισμών.

Η αρχική μορφή που παρουσιάστηκε, όπως φυσικά και οι υπόλοιπες παραλλαγές μπορούν να λυθούν με οποιαδήποτε από τις γνωστές μεθόδους, και η ιδανική λύση είναι :

$$x_1 = 0 \text{ και } x_2 = x_3 = x_4 = 1 \text{ με } z = 42$$

Δηλαδή, σύμφωνα με το διαθέσιμο κεφάλαιο μπορούν να πραγματοποιηθούν οι επενδύσεις με α/α 2,3,4 ξοδεύοντας όλο το διαθέσιμο κεφάλαιο αλλά αποφέροντας το μέγιστο δυνατό κέρδος των 42.000.000 €.

## §3. Το πρόβλημα των διαζευτικών περιορισμών (Either-or constraints problem)

Το συγκεκριμένο παράδειγμα ανήκει στον Winston (2004). Η αυτοκινητοβιομηχανία ΕΛΒΟ έχει στα πλάνα της την παραγωγή τριών νέων μοντέλων στρατιωτικών οχημάτων για τις εξής κατηγορίες: 4x4 hummer, φορτηγό, τεθωρακισμένο όχημα μάχης. Στον παρακάτω πίνακα αποτυπώνονται οι απαραίτητοι πόροι, οι ώρες εργασίας αλλά και τα έσοδα από κάθε κατηγορία, ανά τύπο οχήματος.

| | Κατηγορία αυτοκινήτου | | |
|---|---|---|---|
| | Hummer (4x4) | Φορτηγό | Τεθωρακισμένο Όχημα Μάχης |
| Χάλυβας (σε τόνους) | 1,5 | 3 | 5 |
| Ώρες εργασίας | 30 | 25 | 40 |
| Κέρδος (σε χιλ €) | 2 | 3 | 4 |

Επιπλέον, υπάρχουν διαθέσιμοι συνολικά 6.000 τόνοι χάλυβα, ενώ οι ώρες εργασίας δεν μπορούν να ξεπεράσουν τις 60.000 ώρες εργασίας, ενώ ακόμα η ΕΛΒΟ θα παράγει τουλάχιστον 1.000 οχήματα από κάθε κατηγορία, στην περίπτωση που τελικά αποφασιστεί η παραγωγή του. Σκοπός είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους της ΕΛΒΟ.

*Λύση του προβλήματος*

Αρχικά ορίζονται οι μεταβλητές του προβλήματος όπως παρακάτω:

$x_1$: ο αριθμός παραγόμενων οχημάτων κατηγορίας Hummer (4x4)

$x_2$: ο αριθμός παραγόμενων φορτηγών

$x_3$: ο αριθμός παραγόμενων Τεθωρακισμένων Οχημάτων Μάχης

Προφανώς, οι μεταβλητές είναι ακέραιες και μη αρνητικές. Ο σκοπός είναι η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης

$$z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3$$

Για την κάθε μεταβλητή έχουμε τους παρακάτω περιορισμούς

$$x_i = 0 \text{ ή } x_i \geq 1000 \qquad i = 1,2,3$$

Δεδομένου ότι υπάρχουν διαθέσιμοι συνολικά 6.000 τόνοι χάλυβα, έχουμε τον παρακάτω περιορισμό:

$$1{,}5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 6000$$

και ανάλογα αφού έχουμε συνολικά διαθέσιμες 60.000 ώρες εργασίας πρέπει να ισχύει και ο παρακάτω περιορισμός:

$$30 \cdot x_1 + 25 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 \leq 60000$$

Οι περιορισμοί

$$x_i = 0 \text{ ή } x_i \geq 1000 \qquad i = 1,2,3$$

είναι διαζευκτικοί και για αυτό πρέπει να μετασχηματιστούν κατάλληλα. Για αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε ένα μεγάλο αριθμό $M$ και μια δυαδική μεταβλητή για την κάθε περίπτωση. Τότε έχουμε:

$$\boldsymbol{x_i} \leq M \cdot \boldsymbol{y_i} \quad , \quad i = 1,2,3$$

$$1000 - x_i \leq M \cdot (1 - \boldsymbol{y_i}) \quad , \quad i = 1,2,3$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{αν αποφασιστεί η παραγωγή της κατηγορίας } i \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad i = 1,2,3$$

Αν επιλέξουμε $M = 10000$, τότε έχουμε για παράδειγμα

$$x_1 \leq 10000 \cdot y_1$$

$$1000 - x_1 \leq 10000 \cdot (1 - y_1)$$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{αν αποφασιστεί η παραγωγή της κατηγορίας } 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αν είναι $y_1 = 1$ τότε έχουμε

$$\boldsymbol{x_1} \leq 10000$$

και

$$1000 - x_1 \leq 10000 \cdot (1 - 1) \Rightarrow \boldsymbol{x_1} \geq 1000$$

άρα ικανοποιείται ο περιορισμός $x_1 \geq 1000$

Αν είναι $y_1 = 0$ τότε έχουμε

$$x_1 \leq 0$$

και

$$1000 - x_1 \leq 10000 \cdot (1 - 0) \Rightarrow \boldsymbol{x_1} \geq -9000$$

ο οποίος και ικανοποιείται από τον περιορισμό της μη αρνητικότητας.

Τότε διαμορφώνεται το παρακάτω πρόβλημα :

**Αντικειμενική συνάρτηση**

$$\boldsymbol{max\ z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3}$$

**Περιορισμοί**

$$\boldsymbol{1,5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 6000}$$

$$\boldsymbol{30 \cdot x_1 + 25 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 \leq 60000}$$

$$\boldsymbol{x_i \leq M \cdot y_i \quad , \quad i = 1,2,3}$$

$$\boldsymbol{1000 - x_i \leq M \cdot (1 - y_i) \quad , \quad i = 1,2,3}$$

$$\boldsymbol{y_i = \begin{cases} 1 & \text{αν αποφασιστεί η παραγωγή της κατηγορίας } i \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{i = 1,2,3}$$

$$\boldsymbol{x_i \text{ ακέραιος} \ , \quad i = 1,2,3}$$

$$\boldsymbol{x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3}$$

$$\boldsymbol{y_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } x_i > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad i = 1,2,3}$$

Η βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος είναι:

$$z = 6000,\ x_2 = 2000,\ y_2 = 1 \text{ και } x_1 = x_3 = y_1 = y_3 = 0$$

οπότε τα κέρδη μεγιστοποιούνται (6000000 €) στην περίπτωση που η ΕΛΒΟ αποφασίσει να ξεκινήσει την παραγωγή 2000 φορτηγών. Στην περίπτωση που δεν υπήρχε ο περιορισμός των 1000 οχημάτων ανά κατηγορία, εφόσον αποφασιστεί η παραγωγή της συγκεκριμένης κατηγορίας, τότε θα έπρεπε να κατασκευάσει 570 οχήματα τύπου Hummer $(4 \times 4)$ και 1715 φορτηγά και θα είχε το μέγιστο κέρδος των 6285000 €.

## §4. Το πρόβλημα της επιλογής κατάλληλης τοποθεσίας (Site selection problem)

Το συγκεκριμένο παράδειγμα παρουσίασαν οι Hillier & Lieberman (2001) και εδώ παρουσιάζεται ελαφρώς παραλλαγμένο. Η ΕΑΣ (Ελληνικά Αμυντικά Συστήματα) πρέπει να αποφασίσει σε ποιες πόλεις θα κατασκευάσει δύο νέες μονάδες παραγωγής των αμυντικών συστημάτων της. Οι επιλογές είναι οι πόλεις της Ξάνθης ή της Λαμίας, χωρίς να αποκλείεται η κατασκευή και στις δύο πόλεις. Παράλληλα, θα κατασκευάσει και μία το πολύ αποθήκη, η οποία θα πρέπει να βρίσκεται αναγκαστικά στην ίδια πόλη με κάποιο από τα νέα εργοστάσιο. Ένα τέτοιο πρόβλημα προϋποθέτει απαντήσεις τύπου «Ναι» ή «Όχι». Για παράδειγμα, η απόφαση αφορά την κατασκευή ή όχι εργοστασίου στη Ξάνθη ή την κατασκευή αποθήκης στη Λαμία κ.ο.κ.. Ανάλογα ορίζονται οι μεταβλητές απόφασης, οι οποίες έχουν δυαδική μορφή όπως θα φανεί στη συνέχεια. Στον παρακάτω πίνακα ορίζονται οι μεταβλητές απόφασης, ενώ παρουσιάζονται τα δεδομένα του προβλήματος (όπου Ξ=Ξάνθη και Λ=Λαμία).

| Αριθμός απόφασης | Απόφαση | Μεταβλητή απόφασης | Καθαρή αξία (σε εκατομ. €) | Απαιτούμενο κεφάλαιο (σε εκατομ. €) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Εργοστάσιο Ξ | $x_1$ | 9 | 6 |
| 2 | Εργοστάσιο Λ | $x_2$ | 5 | 3 |
| 3 | Αποθήκη Ξ | $x_3$ | 6 | 5 |
| 4 | Αποθήκη Λ | $x_4$ | 4 | 2 |

Το συνολικά διαθέσιμο κεφάλαιο είναι ίσο με 10 εκατομ. €

Οι μεταβλητές απόφασης ορίζονται όπως παρακάτω

$$x_i = \begin{cases} 1\ , & \text{απόφαση}\quad i \text{ είναι θετική} \\ 0 & ,\ \text{η απόφαση } i \text{ είναι αρνητική} \end{cases} \qquad i = 1,2,3,4$$

Ο σκοπός είναι να μεγιστοποιηθεί η καθαρή αξία, δηλαδή η συνάρτηση

$$\boldsymbol{z = 9 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3} + 4 \cdot \boldsymbol{x_4}$$

Ο πρώτος περιορισμός αφορά στο συνολικά διαθέσιμο κεφάλαιο για την κατασκευή, οπότε είναι

$$\boldsymbol{6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3} + 2 \cdot \boldsymbol{x_4} \leq 10$$

Οι αποφάσεις 3 και 4 δεν μπορούν να είναι και οι δύο θετικές, αφού έχουμε τον περιορισμό της μιας το πολύ αποθήκης που μπορεί να κατασκευαστεί. Οπότε έχουμε και τον περιορισμό

$$\boldsymbol{x_3 + x_4} \leq 1$$

καθώς οι δύο μεταβλητές είναι αμοιβαία αποκλειόμενες. Επιπλέον, οι ίδιες μεταβλητές είναι εξαρτημένες μεταβλητές από τις $x_1$ και $x_2$, καθώς αν δεν υπάρχει εργοστάσιο σε αυτή την πόλη δεν θα κατασκευαστεί αποθήκη.

Οπότε έχουμε και τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\boldsymbol{x_3 \leq x_1}$$

$$\boldsymbol{x_4 \leq x_2}$$

Λόγω της φύσης των μεταβλητών, αν για παράδειγμα δεν κατασκευαστεί εργοστάσιο στη Ξάνθη, τότε είναι $\boldsymbol{x_1 = 0}$ οπότε από τη σχέση $\boldsymbol{x_3 \leq x_1}$ θα έχουμε $\boldsymbol{x_3 \leq 0}$ ***και*** λόγω της μη αρνητικότητας θα είναι τελικά και $\boldsymbol{x_3 = 0}$. Ανάλογα, αν κατασκευαστεί εργοστάσιο στη Ξάνθη, τότε είναι $\boldsymbol{x_1 = 1}$ οπότε από τη σχέση $\boldsymbol{x_3 \leq x_1}$ θα έχουμε $\boldsymbol{x_3 \leq 1}$ , το οποίο σημαίνει ότι είναι $\boldsymbol{x_3 = 0}$ (δεν κατασκευάζεται αποθήκη στη Ξάνθη) ή $\boldsymbol{x_3 = 1}$ (κατασκευάζεται αποθήκη στη Ξάνθη).

Τότε έχουμε το παρακάτω πρόβλημα που μπορεί να λυθεί με οποιαδήποτε από τις διαθέσιμες μεθόδους.

**Αντικειμενική συνάρτηση**

$$\boldsymbol{max\ z = 9 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4}$$

**Περιορισμοί**

$$\boldsymbol{6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \leq 10}$$

$$\boldsymbol{x_3 + x_4 \leq 1}$$

$$\boldsymbol{x_3 \leq x_1}$$

$$\boldsymbol{x_4 \leq x_2}$$

$$\boldsymbol{x_i = \begin{cases} 1 & ,\eta\ \alpha\pi\acute{o}\varphi\alpha\sigma\eta\ i\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta} \\ 0 & ,\ \eta\ \alpha\pi\acute{o}\varphi\alpha\sigma\eta\ i\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha\rho\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, 4}$$

Η ιδανική λύση για το παρόν πρόβλημα είναι $\boldsymbol{x_1 = x_2 = 1\ \kappa\alpha\iota\ x_3 = x_4 = 0}$ με μέγιστο δυνατό κέρδος z=14, δηλαδή 14.000.000 €. Συνεπώς θα χτιστούν εργοστάσια και στη Ξάνθη και στη Λαμία χωρίς να κατασκευαστεί κάποια αποθήκη.

## §5. Μοντέλο Βελτιστοποίησης Πυροβολικού (Artillery Fire Optimization)

Το Μοντέλο Βελτιστοποίησης πυροβολικού μπορεί να διαιρεθεί σε δύο υποπροβλήματα. Το πρόβλημα Στόχευσης (Targeting Problem) είναι αυτό που αναθέτει τα όπλα στους διαθέσιμους στόχους που υπάρχουν με βάση μιας σειράς κριτηρίων ώστε να υπάρξει ελάχιστο κόστος ή ζημιά.

Αφού κάθε όπλο ανατεθεί στον εκάστοτε στόχο, προκύπτει το πρόβλημα της Αλληλουχίας Πυροδοτήσεων (Fire Sequencing Problem) που επιζητά να βρει την ιδανική σειρά πυροδότησης στόχων ώστε να επιτευχθεί η ελάχιστη χρονική διάρκεια πυροδοτήσεως . Οι Kwon et all (1997) προσεγγίζουν το πρόβλημα με τη δική τους εναλλακτική μέθοδο.

Αναφορικά με το Πρόβλημα Στόχευσης (Targeting Problem), επιτυγχάνεται λύση του προβλήματος σε ψευδοπολυωνυμικό χρόνο. Κάθε όπλο και στόχος αναπαριστάται με έναν κόμβο στον γράφο, ενώ μια ακμή μεταξύ των κόμβων δηλώνει την δυνατότητα πυροδότησης μεταξύ ενός ζεύγους όπλου-στόχου. Όπως είναι αναμενόμενο, ο γράφος αυτός είναι αραιός (sparse graph) στην πυκνότητα του καθώς αρκετά όπλα μπορεί να μην μπορούν να πυροδοτήσουν κάποιον στόχο είτε λόγο εμβέλειας είτε λόγω ικανότητας κατάρριψης του. Τα σύμβολα και η σημασίας τους που χρησιμοποιούνται είναι :

- W: σύνολο οπλικών συστημάτων
- T : σύνολο στόχων
- A : σύνολο ακμών, όπου (i,j) ∈ A αν και μόνο αν το όπλο i μπορεί να πυροδοτήσει κατά του στόχου j
- $x_{ij}$ : μεταβλητή απόφασης που υποδηλώνει τη διάρκεια σε μονάδες χρόνου πυροδότησης του όπλου i κατά του στόχου j
- $c_{ij}$ : κόστος πυροδότησης του όπλου i κατά του στόχου j κατά τη διάρκεια μίας μονάδας χρόνου
- $p_{ij}$ : πιθανότητα καταστροφής του στόχου j σε μία μονάδα χρόνου από το όπλο i, $0 < p_{ij} < 1$
- $d_j$ : η ελάχιστη επιθυμητή πιθανότητα καταστροφής του στόχου j, $0 < d_j < 1$
- $u_{ij}$ : η ανώτατη αποδεκτή χρονική διάρκεια πυροδότησης του στόχου j από το όπλο i

Συνεπώς, το πρόβλημα, μετά από κάποιους προτεινόμενους μετασχηματισμούς για την αποφυγή μη γραμμικών όρων, διαμορφώνεται ως εξής:

**Targeting Problem:** $$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

**Περιορισμοί:** $$\sum_{\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{W}|(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\in\boldsymbol{A}} c_{ij}\boldsymbol{x}_{ij} \geq b_j \text{ }, \forall\, j \in T$$

$$\boldsymbol{x}_{ij} \leq \boldsymbol{u}_{ij} \text{ }, \forall\, (i,j) \in A$$

$$\boldsymbol{x}_{ij} \geq 0 \text{ }, \alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\iota\ \forall\, (i,j) \in A$$

**Όπου:** $$0 < a_{ij} = -\ln(1 - p_{ij}) \text{ και } 0 < b_j = -\ln(1 - d_j)$$

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να διασπαστεί σε μικρότερα υποπροβλήματα που το καθένα αντιστοιχεί σε έναν στόχο. Κάθε ένα από αυτά τα υποπροβλήματα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως το γνωστό πρόβλημα της χωρητικότητας σακιδίου (knapsack problem) με φραγμένη μεταβλητή, και να λυθεί με έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού σε ψευδοπολυωνυμικό χρόνο.

Για το πρόβλημα της Αλληλουχίας Πυροδοτήσεων (Fire Sequencing Problem) χρησιμοποιείται μια ευρετική "άπληστη" (greedy) μέθοδος, καθώς οι Kwon et all (1997) επισημαίνουν πως το συγκεκριμένο πρόβλημα απόφασης είναι ένα NP-πλήρες (NP-complete) πρόβλημα. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, έστω N(s) το σύνολο των στόχων που πρέπει να πυροδοτηθούν κατά μιας δεδομένης χρονικής διάρκειας s. Το σύνολο N(s) περιλαμβάνει ανεξάρτητους στόχους, δηλαδή στόχους που δεν πυροδοτούνται από κοινό όπλο με σκοπό να μπορεί να πραγματοποιηθεί ταυτόχρονη εκτέλεση κατά αυτών. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται υψηλή δραστηριότητα στα διαθέσιμα οπλικά συστήματα.

Έστω ένας γράφος G(s)=(N(s), E(s)), όπου N(s) είναι το σύνολο κόμβων που αντιστοιχούν στο σύνολο των στόχων που πρέπει να πυροδοτηθούν κατά τη χρονική διάρκεια s και E(s) το σύνολο των ακμών που ενώνουν τους κόμβους του γράφου. Δύο κόμβοι(στόχοι) ενώνονται με ακμή μόνο αν έχουν κοινό όπλο που μπορεί να τα πυροδοτήσει, δηλαδή οι δύο στόχοι αυτοί δεν μπορούν να πυροδοτηθούν ταυτόχρονα. Παράλληλα, $n_j$ είναι το βάρος του κόμβου j που υποδηλώνει τον αριθμό των όπλων που πρέπει να πυροδοτήσουν κατά του στόχου j για τη καταστροφή του. Έτσι το πρόβλημα διαμορφώνεται ως πρόβλημα εύρεσης του υποσυνόλου του G(s) με το μέγιστο βάρος. Αρχικά, ταξινομούνται οι κόμβοι με φθίνουσα σειρά βαρών και στη συνέχεια ξεκινώντας από τον κόμβο με το μεγαλύτερο βάρος, προσθέτουμε τον κόμβο σε ένα σύνολο TNPS αρκεί να μην υπάρχει ακμή μεταξύ των κόμβων του συνόλου TNPS και του κόμβου που εξετάζεται. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να εξεταστούν όλοι οι κόμβοι και να εξαχθεί ένα σύνολο κόμβων TNPS-1. Οι κόμβοι που περιλαμβάνει το TNPS-1 αφαιρούνται από τον γράφο G(s) και η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για τον υπόλοιπο γράφο, από την οποία εξάγεται το σύνολο κόμβων TNPS-2. Ο αλγόριθμος αυτός συνεχίζει με τον ίδιο τρόπου μέχρις ότου τα σύνολα TNPS-1, TNPS-2 … κ.ο.κ. περιλαμβάνουν όλους τους διαθέσιμους κόμβους του αρχικού γράφου G(s). Συνεπώς, τα σύνολα TNPS πυροδοτούνται διαδοχικά (πρώτα το σύνολο στόχων TNPS-1, μετά του TNPS-2 κ.ο.κ.) και αυτή η αλληλουχία πυροδοτήσεων αποτελεί την ζητούμενη λύση του προβλήματος. Συνεπώς η απώτερη στρατηγική της μεθόδου είναι να βρεθούν ανεξάρτητα υποσύνολα στόχων ώστε να μπορούν να πυροδοτηθούν εξασφαλίζοντας τη μέγιστη δυνατή απόδοση και χρήση των οπλικών συστήματων.

Ένα ακόμη αξιοσημείωτο μοντέλο βελτιστοποίησης πυροβολικό έχει προταθεί από τον Marin (1989) το οποίο καταφέρνει να αναθέσει τις διαθέσιμες μονάδες πυροβολικού και τα είδη πυρομαχικών με τέτοιον τρόπο ώστε να εκμεταλεύεται τη μέγιστη δυνατή ισχύ των μονάδων πυροβολικού. Το μοντέλο λαμβάνει υπόψιν πολλαπλές παραμέτρους/μεταβλητές όπως τα διαθέσιμα πυρομαχικά τόσο σε είδος όσο και ποσότητα, τον ανεφοδιασμό πυρομαχικών, χαρακτηριστικά των στόχων, εντολές ανωτέρων αξιοματικών, ποσοστό επιθυμητής ζημιάς, καθώς και δυνατότητα πολλαπλών βολών κατά των στόχων. Πρόκειται για ένα σύνθετο μοντέλο που απαιτεί μεγάλη υπολογιστική ισχύ, βρίσκοντας όμως την αποδοτικότερη λύση.

# §6. Το Πρόβλημα Αλληλουχίας Πυροδοτήσεων (Fire Scheduling Problem)

Για το υποπρόβλημα Βελτιστοποίησης Πυροβολικού, το πρόβλημα Αλληλουχίας Πυροδοτήσεων (Fire Sequencing Problem) υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις επίλυσης. Μία από αυτές είναι η προσέγγιση του Kwon (2003). Για την εύρεση λύσης χρησιμοποιείται ένας Γενετικός Αλγόριθμος (Genetic Algorithm - GA) κατάλληλα παραμετροποιημένος για να ανταποκρίνεται στις ανάγκες του προβλήματος. Παρακάτω θα αναλυθεί η βασική αρχή των γενετικών αλγορίθμων και μερικές λεπτομέρειες για την συγκεκριμένη προσέγγιση στο πρόβλημα Βελτιστοποίησης Πυροβολικού.

Οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι αλγόριθμοι αναζήτησης λύσεων, που βασίζονται στους μηχανισμούς της φυσικής επιλογής, της γενετικής και της εξέλιξης (Holland, 1975). Όπως και στους ζωντανούς οργανισμούς, η δομή τους κωδικοποιείται στα χρωμοσώματα (chromosomes), που είναι μια συστοιχία γονιδίων (genes), όπου κατά την φυσική επιλογή επιλέγονται τα χρωμοσώματα με τις πιο κατάλληλες δομές για να αναπαραχθούν στην επόμενη γενιά. Πέρα από την διαδικασία αναπαραγωγής, η μετάλλαξη (mutation) μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα τα χρωμοσώματα να είναι διαφορετικά από αυτά των γονέων. Επίσης, η διαδικασία της διασταύρωσης (crossover) μπορεί να προκαλέσει διαφορετικά χρωμοσώματα στους απογόνους, συνδυάζοντας υλικά από τα χρωμοσώματα των δύο γονιών τους (Μπούταλης και Συρακούλης, 2019). Παρομοίως, Οι γενετικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούν τις παραπάνω διαδικασίες μαζί με την κατάλληλη κωδικοποίηση χρωμοσωμάτων για το εκάστοτε πρόβλημα που προσπαθούν να βρουν μια λύση. Τέλος, σε έναν γενετικό αλγόριθμο χρησιμοποιείται μια συνάρτηση καταλληλότητας (fitness function) η οποία, όπως κατά την φυσική επιλογή, βαθμολογεί ποια χρωμοσώματα από όλο τον πληθυσμό είναι τα ιδανικότερα προς επιβίωση και αναπαραγωγή.

Συνεπώς, ο γενετικός αλγόριθμος ξεκινάει με την επιλογή ενός αρχικού πληθυσμού τυχαίων χρωμοσωμάτων (1η γενιά - generation). Μέσω της συνάρτηση καταλληλότητας, τα χρωμοσώματα αυτά βαθμολογούνται και ταξινομούνται από το καλύτερο προς το χειρότερο.

Στη συνέχεια, πραγματοποιούνται η διαδικασία της διασταύρωσης και της μετάλλαξης για την δημιουργία της επόμενης γενιάς (2η γενιά). Η διαδικασία επαναλαμβάνεται από την αρχή μέχρι να μην υπάρχει καλύτερη νέα λύση-χρωμόσωμα ή μέχρις ότου να ξεπεραστεί το μέγιστο όριο γενιών που έχει οριστεί.

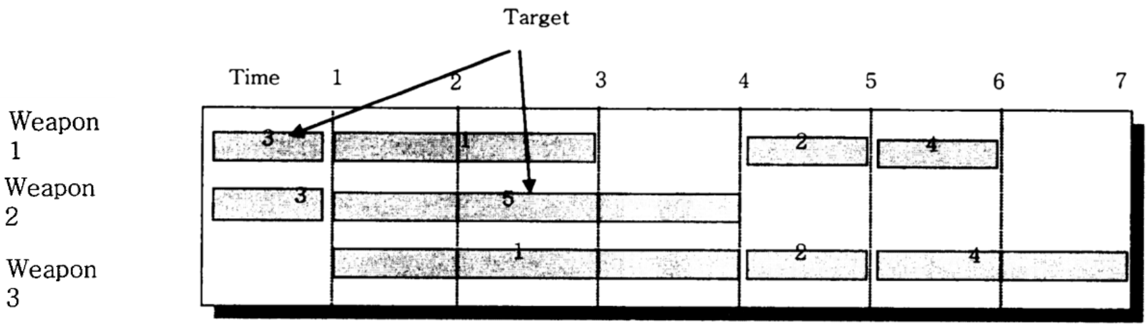
Σημαντικό να σημειωθεί είναι πως ένας γενετικός αλγόριθμος είναι μια γενικής χρήσης στοχαστική μέθοδος βελτιστοποίησης. Πρόκειται για αλγορίθμους που καταφέρνουν να προσφέρουν πολύ ικανοποιητικές λύσεις σε υπολογιστικά δύσκολα προβλήματα, χωρίς όμως να είναι δεδομένο ότι δίνουν την ιδανική (optimal) λύση κάθε φορά.

Για το πρόβλημα Βελτιστοποίησης Πυροβολικού χρησιμοποιείται η παρακάτω κωδικοποίηση όπως φαίνεται σε ένα παράδειγμα με τρία διαθέσιμα όπλα και πέντε στόχους:

$$\begin{array}{rc} & \textbf{Target} \; 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{r} 1 \\ \textbf{Weapon}\,2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad\qquad (3\,1\,2\,4\,5)$$

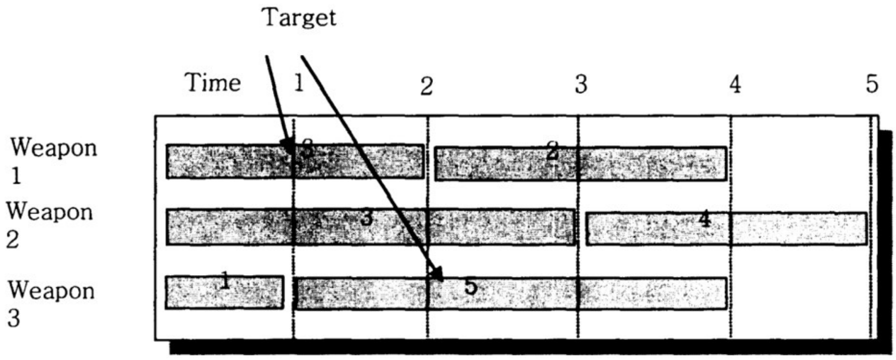
**[Firing time duration matrix]** **[solution instance]**

Ο πίνακας αριστερά παρουσιάζει τις μονάδες χρόνου που απαιτούνται για κάθε όπλο να πυροδοτήσει κάθε έναν από τους πέντε διαθέσιμους στόχους, ενώ ο πίνακας δεξιά που είναι και η λύση που προτείνεται, είναι η σειρά κατάρριψης των στόχων. Για παράδειγμα, στο παρόν παράδειγμα ο 3ος στόχος θα καταρριφθεί πρώτα, στη συνέχεια ο 1ος στόχος, ο 2ος στόχος κ.ο.κ. Επίσης, ένας στόχος πρέπει να πυροδοτείται ταυτόχρονα από τα διαθέσιμα όπλα που έχουν ανατεθεί για αυτόν τον στόχο, ενώ ένα όπλο δεν μπορεί να στραφεί σε επόμενο στόχο εάν δεν έχει πρώτα χρησιμοποιήσει όλα τα πυρομαχικά που ανατέθηκαν για τον στόχο αυτόν. Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 1) παρουσιάζει την πυροδότηση στόχων στο πεδίο του χρόνου σύμφωνα με τους πίνακες που παρουσιάστηκαν προηγουμένως.



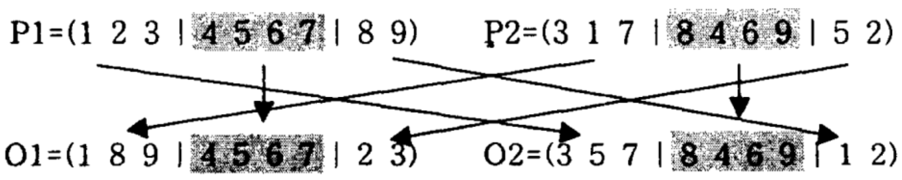

**Σχήμα 1**. Πίνακας πυδορότησης στόχων στο πεδίο του χρόνου

Επιπλέον, χρησιμοποιείται και ένας αλγόριθμος που δεδομένης μια λύσης εξάγει τον συνολικό χρόνο πυροδότησης που καταλαμβάνει αυτή η λύση. Με αυτόν τον τρόπο, βαθμολογούνται οι λύσεις σχετικά με το πόσο αποδοτικές είναι. Για παράδειγμα, η παρακάτω λύση (Σχήμα 2) έχει συνολικό χρόνο πέντε μονάδων συγκριτικά με την προηγούμενη που είχε επτά μονάδες (πρόκειται για παραδείγματα με διαφορετικούς πίνακες διάρκειας πυροδότησης μεταξύ όπλων-στόχων).




**Σχήμα 2.** Πίνακας πυδορότησης στόχων στο πεδίο του χρόνου

Η διαδικασία διασταύρωσης (crossover) των χρωμοσωμάτων δύο γονέων P1 και P2 , που αναπαράγονται και δίνουν δύο απογόνους O1 και O2 φαίνεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα (Σχήμα 3). Συγκεκριμένα, επιλέγονται τυχαία δύο αριθμοί-θέσεις μέσα στο μήκος του χρωμοσώματος (εδώ επιλέγεται η 3η και η 7η θέση στο χρωμόσωμα) και η ενδιάμεση περιοχή του χρωμοσώματος περνάει από τον P1 στον O1 και από τον P2 στον O2, ενώ τα υπόλοιπα γονίδια του O2 αποκτούνται από τον P1, ενώ του O1 από τον P2 αντίστοιχα.

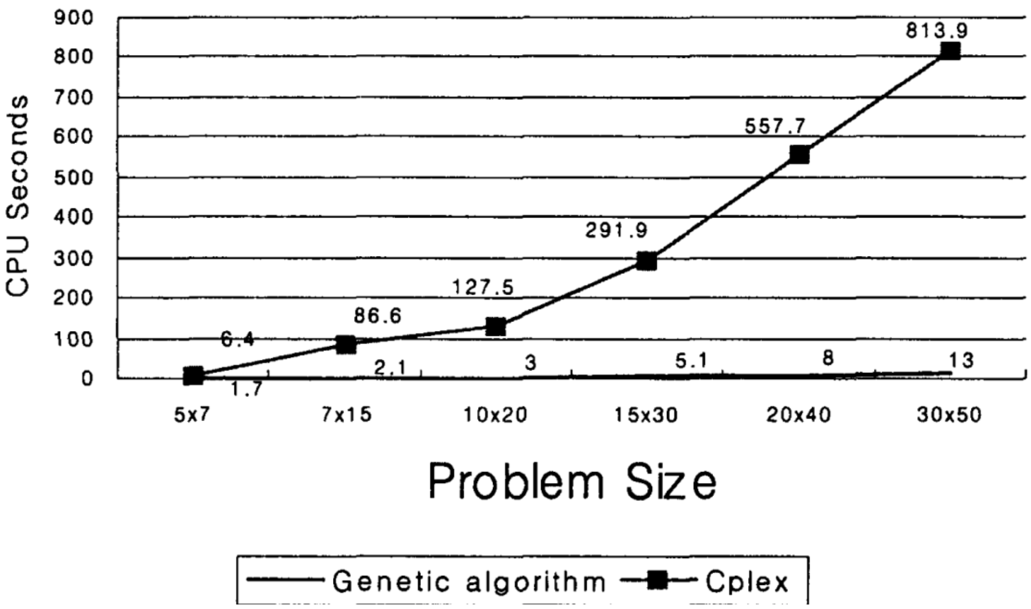



**Σχήμα 3.** Περιγραφή διαδικασίας διαστάυρωσης (crossover) στον γενετικό αλγόριθμο

Για την διαδικασία της μετάλλαξης (mutation) επιλέγονται δύο τυχαίες θέσεις στο χρωμόσωμα και ανταλλάσσονται μεταξύ τους τα δύο γονίδια.

Η διαδικασία της διασταύρωσης επιλέγεται να συμβαίνει στο 25% του πληθυσμού ενώ η μετάλλαξη στο 5%. Τέλος, επιλέχθηκαν ως το μέγιστο όριο γενεών που θα επαναληφθεί ο γενετικός αλγόριθμος οι 100 γενιές (Kwon, 2003).

Ο εν λόγω γενετικός αλγόριθμος καταφέρνει να πετύχει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πολύ σύντομο χρόνο, ακόμη και σε προβλήματα μεγάλου μεγέθους. Σε σύγκριση με τον εμπορικό αλγόριθμο ακέραιου προγραμματισμού CPLEX 4.0 , ο γενετικός αλγόριθμος πετυχαίνει καλύτερα αποτελέσματα ενώ στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 4) φαίνεται η υπεροχή του στον απαιτούμενο χρόνο εύρεσης λύσης.




**Σχήμα 4.** Σύγκριση υπολογιστικού χρόνου του γενετικού αλγορίθμου και του μοντέλου CPLEX 4.0

# §7. Το Πρόβλημα Προγραμματισμού Δρομολογίων (Route Scheduling Problem)

Η κατηγορία αυτών των προβλημάτων αναφέρονται συχνά ως αλληλουχία, προγραμματισμός και δρομολόγηση και είναι εγγενώς ακέραια προγράμματα. Ένα τέτοιο παράδειγμα, είναι ο προγραμματισμός φοιτητών, καθηγητών και αιθουσών με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται ο αριθμός των μαθητών που δεν μπορούν να παρακολουθήσουν κάποιο μάθημα γιατί συμπίπτει με κάποιο άλλο. Υπάρχουν περιορισμοί στον αριθμό και το μέγεθος των διαθέσιμων αιθουσών ανά πάσα στιγμή, στη διαθεσιμότητα των καθηγητών σε συγκεκριμένες ώρες, όπως και οι προτιμήσεις των φοιτητών για συγκεκριμένα ωράρια. Με αυτό τον τρόπο αποφασίζουμε αν ο φοιτητής i θα παρακολουθήσει το μάθημα j κατά τη χρονική ζώνη ή όχι. Ως εκ τούτου, μια τέτοια μεταβλητή είναι δίτιμη αφού παίρνει τιμή 0 ή 1. Άλλα παραδείγματα αυτής της κατηγορίας προβλημάτων περιλαμβάνουν την εξισορρόπηση διαδρομών, τον προγραμματισμό κρίσιμων διαδρομών με περιορισμούς πόρων και τη δρομολόγηση οχημάτων (Sierksma, 2015).

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον προγραμματισμό του προσωπικού στις πτήσεις μεταφοράς στρατιωτικού προσωπικού. Ένα C-130 είναι προγραμματισμένο να πραγματοποιήσει μια σειρά από πτήσεις, όπως για παράδειγμα στις 10 το πρωί από Αθήνα για Κρήτη και στις 6 το απόγευμα από Κρήτη προς Θεσσαλονίκη. Η Αεροπορία Στρατού πρέπει να προγραμματίσει τα πληρώματα προσωπικού της σε δρομολόγια προκειμένου να καλύψει αυτές τις πτήσεις.

Ένα πλήρωμα, για παράδειγμα, μπορεί να είναι έχει προγραμματιστεί να επανδρώσει και τις δύο παραπάνω πτήσεις. Στη συνέχεια, οι μεταβλητές απόφασης καθορίζουν τον προγραμματισμό των πληρωμάτων στις διαδρομές.

Έστω ότι είναι

$$x_j = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \tau o\ \pi\lambda\acute{\eta}\rho\omega\mu\alpha\ \varepsilon\pi\alpha\nu\delta\rho\acute{\omega}\nu\varepsilon\iota\ \tau\eta\nu\ \pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\ j \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \tau o\ \sigma\kappa\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma\ i\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\lambda\alpha\mu\beta\acute{\alpha}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \sigma\tau\eta\ \delta\iota\alpha\delta\rho o\mu\acute{\eta}\ j \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

$c_j$ το κόστος επάνδρωσης της διαδρομής j

Οι συντελεστές $a_{ij}$ καθορίζουν τους αποδεκτούς συνδυασμούς μεταξύ των σκελών και των διαδρομών, λαμβάνοντας υπόψη αυτά τα χαρακτηριστικά ως μια αλληλουχία σκελών (συνδυασμός πτήσεων ουσιαστικά) για σύνδεση μεταξύ πτήσεων καθώς και τη συμπερίληψη του χρόνου στο για τις απαραίτητες συντηρήσεις. Το μοντέλο έχει την παρακάτω μορφή:

$$Minimize\ \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

σύμφωνα με τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = 1\ , i = 1,2, \dots , n$$

$$x_j = 0\ \ \acute{\eta}\ \ 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Ο περιορισμός i απαιτεί ότι ένα πλήρωμα πρέπει να ανατεθεί σε μια διαδρομή για να πετάξει στο σκέλος i. Μια εναλλακτική διατύπωση είναι αυτή που επιτρέπει σε ένα πλήρωμα να είναι επιβάτες σε κάποιο σκέλος και όχι πλήρωμα προκειμένου να φτάσουν στο χώρο αναχώρησης της πτήσης που πρόκειται να επανδρώσει το ίδιο. Τότε ο παραπάνω περιορισμός γίνεται:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq 1\ , i = 1,2, \dots , n$$

Αυτά τα μοντέλα προγραμματισμού αεροπορικών πληρωμάτων αεροπορικών εταιρειών παρουσιάζονται και σε άλλες περιπτώσεις, όπως είναι τα προβλήματα παράδοσης οχημάτων και επεξεργασίας δεδομένων υπολογιστή.

Συχνά το μοντέλο με το αρχικό περιορισμό ονομάζεται πρόβλημα διαμερισμού συνόλου, αφού το σύνολο των σκελών θα μοιραστεί μεταξύ των διαφόρων πληρωμάτων. Μαζί με τον τελευταίο περιορισμό ονομάζεται πρόβλημα κάλυψης, αφού τα πληρώματα θα καλύψουν το σύνολο των σκελών.

## §8. Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής (Shortest Path Problem)

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (shortest path problem) είναι μια δημοφιλής κατηγορία προβλημάτων που παρουσιάζουν πολλές παραλλαγές και περιορισμούς, με πολλαπλές εφαρμογές σε διάφορους κλάδους συμπεριλαμβανομένου και του στρατού. Για παράδειγμα, το συγκεκριμένο πρόβλημα στον στρατό θα μπορούσε να αφορά την εύρεση της συντομότερης διαδρομής που πρέπει να κάνει ένα φορτηγό για τον ανεφοδιασμό (τροφίμων, πυρομαχικών) φυλακίων που βρίσκονται υπό την ευθύνη μιας μονάδας σε διαφορετικές τοποθεσίες. Στην βασική του μορφή το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:
Σε έναν κατευθυνόμενο γράφο G = (V, E), όπου V είναι το σύνολο των κόμβων και E είναι το σύνολο των ακμών του γράφου, να βρεθεί η συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο s στον κόμβο t εάν $d_{ij}(\geq 0)$ είναι η απόσταση που συνδέει τους κόμβους i και j (δηλαδή το μήκος της ακμής τους) (Taha, 2007). Το πρόβλημα αλγεβρικά διαμορφώνεται και ως εξής:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} d_{ij}x_{ij}$$

σύμφωνα με τους περιορισμούς:

$$\sum_{(i,j)\in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in \delta^-(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \varepsilon\alpha\nu\ i = s \\ -1 & \varepsilon\alpha\nu\ i = t \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}, \forall i \in V$$

$$\sum_{(i,j)\in \delta^+(i)} x_{ij} \leq 1, \forall i \in V$$

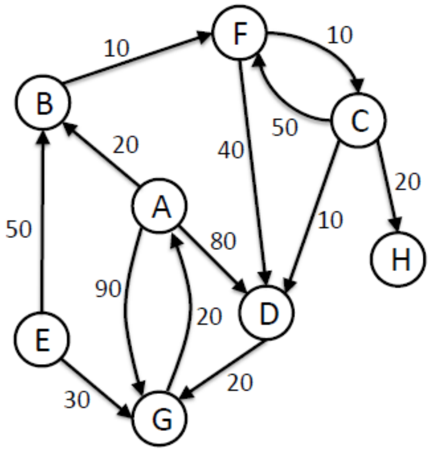
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall i \in E$$

όπου $x_{ij}$ είναι μια δυαδική μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 εάν η ακμή που ενώνει τους κόμβους i και j ανήκει στην ζητούμενη συντομότερη διαδρομή, ενώ $\delta^{+}(i)$ και $\delta^{-}(i)$ είναι το σύνολο των εξερχόμενων και εισερχόμενων ακμών του κόμβου $i$ (Taccari, 2016).

Αν και τέτοιου είδους προβλήματα λύνονται και με τις κοινές μεθόδους ακέραιου προγραμματισμού, υπάρχει και ένας εναλλακτικός αλγόριθμος που είναι πολύ αποδοτικός, ο αλγόριθμος του Dijkstra (Williams, 2013). Πρόκειται για έναν αλγόριθμο που επινόησε ο ολλανδός καθηγητής Πανεπιστημίου του Τέξας Edsger Dijkstra. Ο εν λόγω αλγόριθμος στο χειρότερο σενάριο έχει υπολογιστική πολυπλοκότητα $O(|E| + |V|\log|V|)$ όπου |E| και |V| είναι το πλήθος των ακμών και των κόμβων του γράφου αντίστοιχα, κάτι που τον καθιστά τον γρηγορότερο αλγόριθμο για προβλήματα συντομότερης διαδρομής με μη-αρνητικά βάρη στις ακμές του γράφου (Moura, 2014). Τα βήματα του αλγορίθμου συνοψίζονται ως εξής:

1) Επιλέγω τον κόμβο εκκίνησης Α
2) Αναθέτω την τιμή ∞ στους μη συνδεόμενους κόμβους, και την δοθείσα απόσταση σε αυτούς που συνδέδονται.
3) Έστω Χ ο κόμβος που δεν έχουμε επισκεφθεί προηγουμένως και με την συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο Α. Τότε ο κόμβος Χ αφαιρείται από την λίστα των κόμβων που δεν έχω επισκεφθεί. Εάν η λίστα αυτή είναι κενή τότε ο αλγόριθμος τερματίζεται.
4) Υπολογίζω το αθροιστικό κόστος/απόσταση κάθε συνδεόμενου κόμβου μέσω του κόμβου Χ, αλλιώς θεωρώ ∞.
5) Πηγαίνω πίσω στο βήμα 3.

Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται ενδεικτικά στο παρακάτω παράδειγμα (Moura, 2014). Με τον αλγόριθμο υπολογίζεται η συντομότερη απόσταση του αρχικού κόμβου Α προς κάθε κόμβο του γράφου (Σχήμα 5). Ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 2) συμπληρώνεται κατά τη διαδικασία εφαρμογής του αλγορίθμου γραμμή προς γραμμή. Με κόκκινο χρώμα κυκλώνονται τα δεδομένα ενός κόμβου που δεν είναι χρήσιμα πλέον στα υπόλοιπα βήματα για λόγους απλότητας καθώς μέχρι εκείνο το βήμα αυτός ο κόμβος έχει επιλεχθεί και προστεθεί στην λίστα της συντομότερης διαδρομής του κόμβου Α προς κάθε άλλο κόμβο (1η στήλη του πίνακα).




**Σχήμα 5**. Γράφος παραδείγματος (Moura, 2014)

| A → | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) A | 20 | ∞ | 80 | ∞ | ∞ | 90 | ∞ |
| (2) B | 20 | ∞ | 80 | ∞ | 30 | 90 | ∞ |
| (3) F | 20 | 40 | 70 | ∞ | 30 | 90 | ∞ |
| (4) C | 20 | 40 | 50 | ∞ | 30 | 90 | 60 |
| (5) D | 20 | 40 | 50 | ∞ | 30 | 70 | 60 |
| (6) H | 20 | 40 | 50 | ∞ | 30 | 70 | 60 |
| (7) G | 20 | 40 | 50 | ∞ | 30 | 70 | 60 |
| (8) E | 20 | 40 | 50 | ∞ | 30 | 70 | 60 |

Πίνακας 2. Πίνακας εύρεσης συντομότερης διαδρομής στον γράφο

Συνεπώς η συντομότερη διαδρομή που συνδέει τον κόμβο Α με κάθε διαθέσιμο άλλο κόμβο είναι:

$$A \to B \to F \to C \to D \to H \to G \to E$$

# §9. Το πρόβλημα της Χωρητικότητας Σακιδίου (Knapsack Problem)

Το πρόβλημα της χωρητικότητας σακιδίου (knapsack problem) είναι μία ακόμη δημοφιλής κατηγορία προβλημάτων κατά την οποία, δεδομένου ενός συνόλου αντικειμένων, το καθένα με κάποια χρηματική αξία και βάρος, και ενός σακιδίου που αντέχει ένα συγκεκριμένο βάρος, πρέπει να βρεθεί πόσα αντικείμενα από κάθε είδος μπορούν να χωρέσουν στο σακίδιο ώστε να μην ξεπεραστεί το όριο βάρους του σακιδίου και η συνολική αξία των αντικειμένων που επιλέχθηκαν να είναι η μέγιστη δυνατή.

Η εκδοχή του προβλήματος που θα μελετηθεί παρακάτω είναι αυτή όπου μπορούμε να επιλέξουμε μόνο ένα αντικείμενο από κάθε είδος και όχι κάποια υποδιαίρεση από κάθε αντικείμενο (0/1 knapsack problem), δηλαδή $x_i = 0 \text{ ή } 1$ , όπου $x_i$ είναι η δυαδική μεταβλητή που υποδηλώνει εάν το i αντικείμενο έχει επιλεχθεί για να προστεθεί στο σακίδιο (Winston, 2004). Η μορφή αυτής της κατηγορίας προβλημάτων διατυπώνεται ως εξής:

$$z = \max\{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\}$$
$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n \leq b$$
$$x_i = 0 \text{ ή } 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα που επιλύεται με την μέθοδο Branch and Bound (B&B). Δεδομένου ότι το πρόβλημα της χωρητικότητας είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης συνάρτησης όπως φαίνεται παραπάνω, για τη μέθοδο Branch and Bound θα πολλαπλασιάσουμε τους όρους της συνάρτησης με το -1 για να την μετατρέψουμε σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Δηλαδή:

$$z = -\max\{-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n\} \rightarrow$$
$$z = \min\{-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n\}$$

Με ένα αεροσκάφος τύπου C-130 η Πολεμική Αεροπορία χρειάζεται να μεταφέρει σε μια μονάδα μια σειρά από σημαντικά φορτία. Η λίστα των φορτίων μαζί με το βάρος τους και την αξία τους παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα, ενώ η χωρητικότητα του αεροσκάφους ορίζεται στα W=30.000kg.

| Φορτίο | $x_1$ Στρατιωτικός Εξοπλισμός | $x_2$ Πυρομαχικά | $x_3$ Όπλα | $x_4$ Στρατιωτικά τζιπ |
|---|---|---|---|---|
| Αξία (€) | 20.000 | 20.000 | 24.000 | 36.000 |
| Βάρος (kg) | 4.000 | 8.000 | 12.000 | 18.000 |

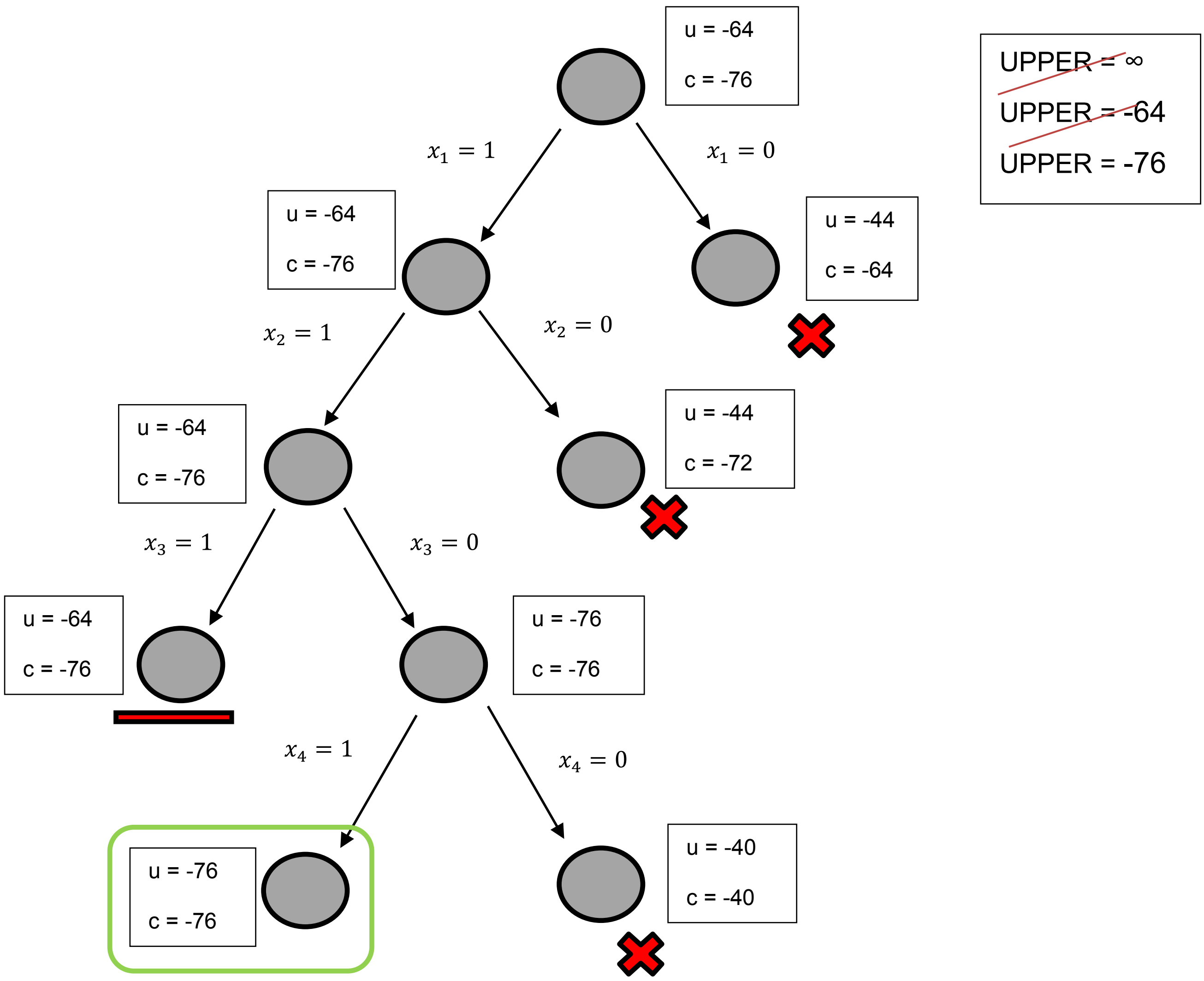
Συνεπώς η διατύπωση του προβλήματος είναι η παρακάτω:

$$z = \max\{20x_1 + 20x_2 + 24x_3 + 36x_4\} \rightarrow$$
$$z = \min\{-20x_1 - 20x_2 - 24x_3 - 36x_4\}$$
$$4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 18x_4 \leq 30$$
$$x_i = 0 \text{ ή } 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Θα ακολουθηθεί η μέθοδος Branch and Bound Ελαχίστου Κόστους (Least Cost- B&B). Αρχικά ορίζουμε μια μεταβλητή $UPPER$ που αναπαριστά το ολικό ανώτατο όριο, και την αρχικοποιούμε με τιμή ∞. Σε κάθε βήμα:

- Υπολογίζουμε για τον υπό εξέταση κόμβο: το κόστος της λύσης ($cost - c$) και το ανώτατο όριο της λύσης($upper - u$)
- Εάν για κάθε κόμβο που εξετάζουμε βρίσκουμε $upper < UPPER$ , τότε η τιμή της μεταβλητής UPPER αντικαθίσταται με την τιμή της $upper$.
- Ελέγχεται εάν το κόστος είναι μεγαλύτερο από το ολικό ανώτατο όριο $UPPER$. Εάν η συνθήκη αυτή ισχύει ($cost > UPPER$) τότε ο κόμβος αυτός δεν θα μελετάται περαιτέρω, ούτε τα παρακλάδια του.
- Για το επόμενο βήμα θα εξετάζεται πάντα ο κόμβος με το μικρότερο κόστος, εκτός εάν αυτός έχει μελετηθεί πλήρως (δηλαδή όλο το παρακλάδι του).

Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 6) φαίνεται η διάταξη των κόμβων, και ο αριθμός των κόμβων υποδηλώνει την σειρά με την οποία μελετήθηκαν. Το κόκκινο ‘’ υποδηλώνει πως αυτός ο κόμβος αγνοείται καθώς το κόστος του είναι μεγαλύτερο από το όριο $UPPER$.




**Σχήμα 6**. Επίλυση παραδείγματος με τη μέθοδο Least Cost-B&B

Ενδεικτικά θα δειχθεί η διαδικασία για τους πρώτους κόμβους.

**<u>Κόμβος 1</u>**: Στον πρώτο κόμβο προσπαθούμε να προσθέσουμε όσα περισσότερα φορτία μπορούμε στο αεροσκάφος χωρίς να ξεπεράσουμε το όριο χωρητικότητας ($W = 30$Kg), ξεκινώντας από το 1$^o$ φορτίο ($x_1$). Επομένως μπορούμε να χωρέσουμε τα τρία πρώτα φορτία χωρίς να παραβούμε την χωρητικότητα, άρα για αυτόν τον κόμβο το $upper$ είναι

$$u = -20 - 20 - 24 = -64.$$

Με αυτή την επιλογή όμως, τα κιλά που καταλαμβάνονται είναι 24 από τα 30. Για τον υπολογισμό του κόστους τα θεωρήσουμε ότι παίρνουμε ένα κλάσμα

$$\left(\frac{36}{18}\right)$$

από το 4ο αντικείμενο για να καλύψουμε τα υπολειπόμενα 6 κιλά. Δηλαδή

$$c = -20 - 20 - 24 - \frac{36}{18}6 = -76.$$

Τέλος, αφού $u < UPPER$, τότε $UPPER = -64$.

**Κόμβος 2**: Ο δεύτερος κόμβος ανήκει στο παρακλάδι του πρώτου κόμβου όπου $x_1 = 1$, και η περίπτωση αυτή έχει ήδη υπολογιστεί στον 1ο κόμβο. Συνεπώς έχουμε τα ίδια δεδομένα:

$$u = -64 \text{ και } c = -76.$$

**Κόμβος 3**: Ο τρίτος κόμβος ανήκει στο παρακλάδι του πρώτου κόμβου όπου $x_1 = 0$. Συνεπώς εάν το 1ο φορτίο δεν επιλεχθεί τότε μπορούμε να επιλέξουμε μόνο το 2ο και το 3ο , διότι με το 4ο φορτίο ξεπερνάμε το όριο χωρητικότητας. Άρα, $u = -20 - 24 = -44$ και επειδή περισσεύουν 10 κιλά, παίρνουμε ένα κλάσμα

$$\left(\frac{36}{18}\right)$$

από το $x_4$, δηλαδή

$$c = -20 - 24 - \frac{36}{18}10 = -64.$$

Σε αυτό το σημείο ο κόμβος που θα μελετήσουμε περαιτέρω είναι ο κόμβος 2 καθώς έχει το μικρότερο κόστος. Με την ίδια διαδικασία που δείχθηκε, υπολογίζονται τα δεδομένα και για τους υπόλοιπους κόμβους λαμβάνοντας πάντα υπόψιν τα εξής:

- Να ανανεώνουμε την μεταβλητή UPPER σε περίπτωση που βρεθεί τιμή upper-u μικρότερη από αυτή.
- Εάν το κόστος ενός κόμβου είναι μεγαλύτερο του UPPER, τότε αυτός ο κόμβος δεν μελετάται παραπάνω.

- Επιπλέον, η μεθοδολογία που ακολουθείται όπου για να καλυφθούν τα υπολειπόμενα κιλά του αεροσκάφους επιλέγεται ένα κλάσμα από το επόμενο φορτίο, πραγματοποιείται μόνο για τον σκοπό του αλγορίθμου. Στην πραγματικότητα η λύση δεν μπορεί να περιλαμβάνει κλάσμα ενός φορτίου καθώς το πρόβλημα που επιλύεται είναι το 0/1 knapsack problem. Για αυτόν τον λόγο στον κόμβο 6 (κόκκινη γραμμή) δεν μελετούνται τα παρακλάδια του, διότι η επιλογή του $x_4$ ξεπερνάει το όριο χωρητικότητας W του σακιδίου, ενώ η επιλογή $x_4 = 0$ είναι ουσιαστικά πανομοιότυπη με την επιλογή που έγινε στον κόμβο 6.

Η τελική και ιδανική λύση του συγκεκριμένου παραδείγματος δίνεται από τον κόμβο 8, όπου έχουμε το ελάχιστο u πληρώντας όλες τις συνθήκες. Δηλαδή τα φορτία που επιλέγονται είναι:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 1 \text{ και } x_3 = 0,$$

με συνολικό βάρος 30.000 κιλά και συνολική αξία φορτίων

$$Value = -(u) = 76.000€.$$

## §10. Το πρόβλημα Ανάθεσης Πόρων (Resource Allocation Problem)

Το συγκεκριμένο παράδειγμα εφαρμογής προέρχεται από τον Przemieniecki (2000) ενώ η λύση του από τον Δάρα (2007).

Διατάχθηκε η από αέρος άμεση αποστολή βοήθειας σε ημέτερα Στρατεύματα που έχουν εμπλακεί σε πολυήμερη Μάχη. Η βοήθεια θα παρασχεθεί με την διασκόρπιση πολεμοφοδίων και τροφίμων υπεράνω της περιοχής εντός της οποίας βρίσκονται οι θέσεις των ημετέρων Στρατευμάτων. Για την διεκπεραίωση της διαταγής, είναι διαθέσιμα τα εξής Αεροσκάφη:

- Είκοσι (20) Αεροσκάφη τύπου C −141 που μπορούν να μεταφέρουν συνολικά τριάντα (30) τόνους

- Δώδεκα (12) Αεροσκάφη τύπου C − 5A/ B που μπορούν να μεταφέρουν συνολικά εκατόν είκοσι (120) τόνους.

Η πλήρωση ενός Αεροσκάφους τύπου C −141 απαιτεί την αδιάλειπτη απασχόληση τεσσάρων (4) ατόμων- φορτωτών για δύο (2) ώρες. Αντιστοίχως, για να γεμίσει ένα Αεροσκάφος τύπου C − 5A/ B απαιτείται η αδιάλειπτη απασχόληση έξι (6) ατόμων- φορτωτών για δύο (2) ώρες. Εξ άλλου, η όλη διάρκεια των εργασιών φόρτωσης από μέρους όλων των ατόμων- φορτωτών δεν πρέπει αθροιστικά να υπερβεί συνολικά τις διακόσιες σαράντα (240) εργατοώρες. Δεδομένου ότι :

- κάθε Αεροσκάφος μπορεί να πραγματοποιήσει μόνον μία πτήση για την διασκόρπιση των πολεμοφοδίων και των τροφίμων που μεταφέρει
- οι φορτωτικές εργασίες ενός ατόμου- φορτωτή μπορούν να παρασχεθούν για την πλήρωση όχι μόνον ενός από τα παραπάνω διαθέσιμα Αεροσκάφη, αλλά, εφόσον υπάρχει ανάγκη, και για την πλήρωση περισσοτέρων

ζητείται να προσδιορισθεί ο βέλτιστος αριθμός των εκ των διαθεσίμων Αεροσκαφών τύπου C −141 και τύπου C − 5A/ B που πρέπει να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το μέγεθος της βοήθειας που θα παρασχεθεί.

Για την λύση, θα συμβολίσουμε με $X_1$ και $X_2$ τους αριθμούς των εκ των διαθεσίμων Αεροσκαφών τύπου C −141 και τύπου C − 5A/ B που θα χρησιμοποιηθούν για την παροχή βοήθειας, το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά υπό την μορφή ενός απλού Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού ως ακολούθως:

$$z = \max\{30X_1 + 120X_2\}$$

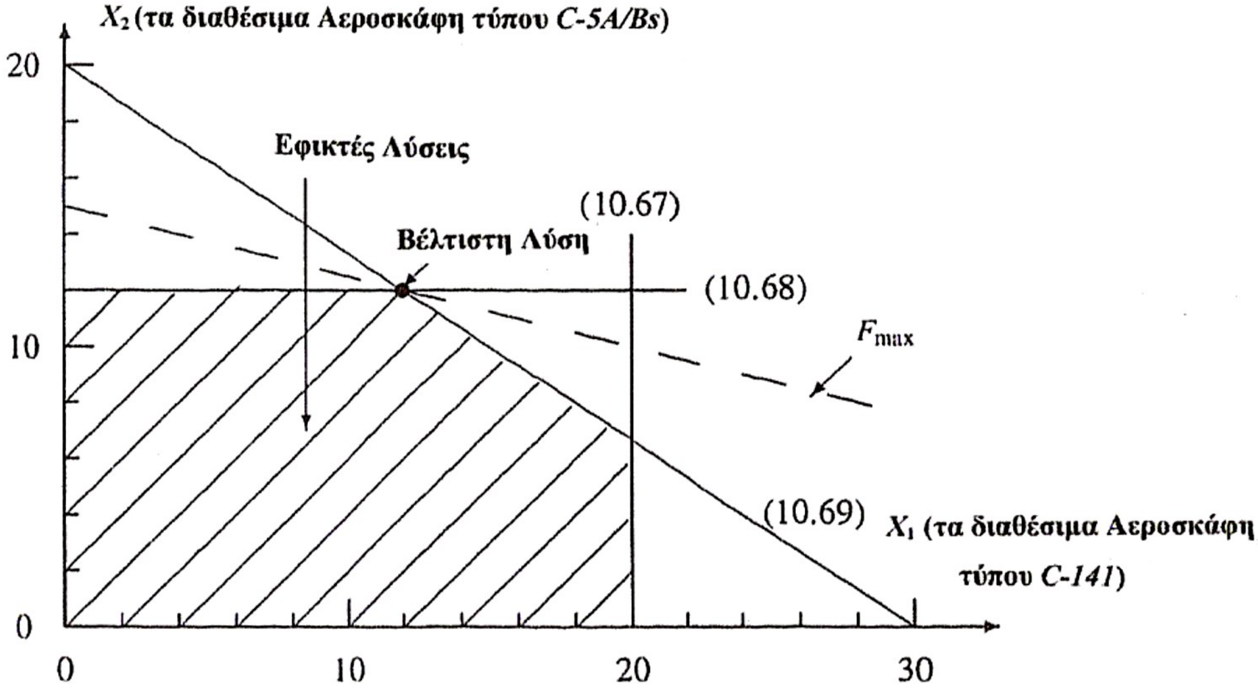
Με τους εξής περιορισμούς:

$$X_1 \leq 20$$

$$X_2 \leq 12$$

$$8X_1 + 12X_2 \leq 240.$$

Εφόσον οι μεταβλητές απόφασης είναι μόνο δύο, το παρόν πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με γραφική λύση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σύμφωνα με αυτή τη λύση (Σχήμα 7), η βέλτιστη λύση είναι η χρήση 12 αεροσκαφών τύπου C-141 ($X_1 = 12$) και 12 αεροσκαφών τύπου C-5A/B ($X_2 = 12$) για την παροχή βοήθειας, με τη συνολική μεταφορά 1800 τόνων ($z_{max} = 1800$) πολεμοφοδίων και τροφίμων.

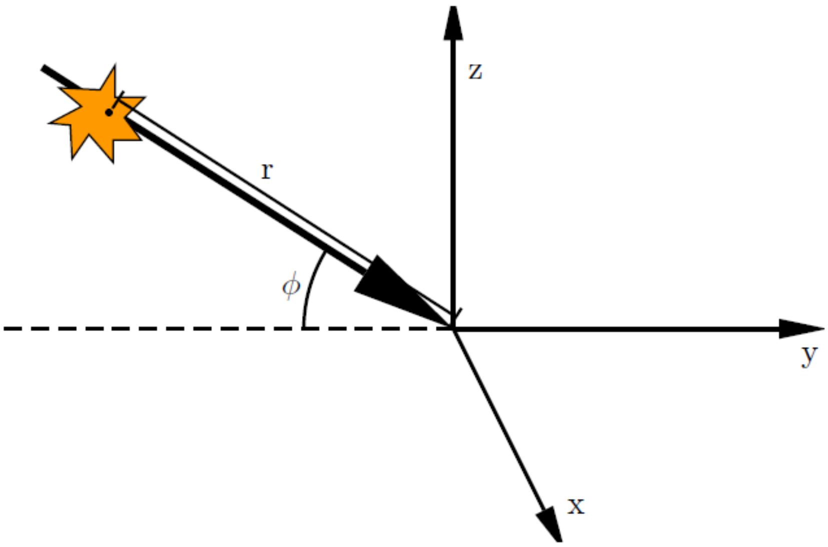



**Σχήμα 7**. Γραφική επίλυση παραδείγματος (Δάρας, 2007)

# §11. Το μοντέλο της Πυροδότησης Έμμεσων Πυρών (Indirect Fire Model)

Το συγκεκριμένο μοντέλο αναπτύχθηκε από τους Lappi et al. (2008) και χρησιμοποιείται από το στρατιωτικό λογισμικό ανάλυσης Sandis. Το πρόβλημα που επιλύει είναι αυτό της εξουδετέρωσης στόχων είτε με άμεσο χτύπημα, είτε από εκτόξευση θραύσματος του βλήματος στον στόχο. Αυτός είναι και ο τρόπος που προσεγγίζεται το πρόβλημα.

Αρχικά, ο υπολογισμός της πιθανότητας εξουδετέρωσης με άμεσο χτύπημα είναι αρκετά ευθύς καθώς ακολουθεί κατανομή δυο μεταβλητών, στοιχεία που είναι γνωστά μέσω πινάκων πυροδότησης ανάλογα του κάθε οπλικού συστήματος και της απόστασης του στόχου. Ο δύσκολος υπολογισμός, και αυτός που διαχωρίζει το συγκεκριμένο μοντέλο από τα υπόλοιπα, είναι αυτός της εξουδετέρωσης στόχου από θραύσμα βλήματος, δηλαδή με έμμεση εξουδετέρωση. Στο Σχήμα 8 αναπαρίσταται η περίπτωση έκρηξης βλήματος στον αέρα. Με το μαύρο βέλος απεικονίζεται η τροχιά του βλήματος , με φ η γωνία πρόσκρουσης και r η απόσταση της έκρηξης από τον στόχο.




**Σχήμα 8**. Περίπτωση έκρηξης του βλήματος στον αέρα πριν την πρόσκρουση στο έδαφος (επίπεδο xy). (Lappi et al., 2008)

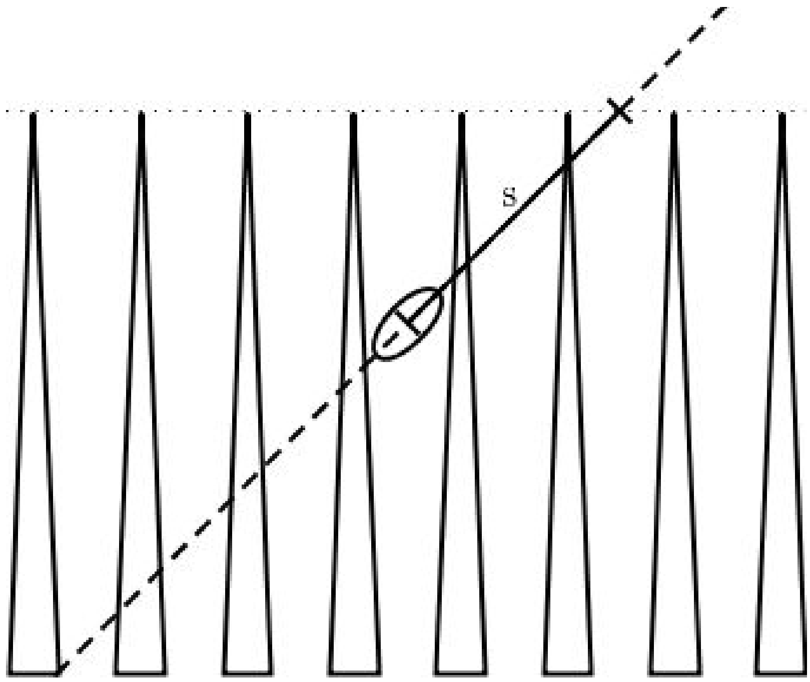
Για αυτή τη προσέγγιση συνδυάζονται διαφορετικές σχέσεις-μοντέλα, όπως το μοντέλο του Rible που υπολογίζει την ικανότητα διάτρησης του στόχου από ένα θραύσμα, την επιβράδυνση των θραυσμάτων, τη διασπορά (διασπορά Mott) και τον αριθμό των θραυσμάτων που μπορούν να προκαλέσουν ζημιά, καταλήγοντας στην παρακάτω σχέση η οποία υπολογίζει την μέγιστη εμβέλεια αποδοτικής ζημιάς από θραύσματα βλήματος, καθώς και τον αριθμό τους:

$$s = c\left(\frac{m_{ref}}{m_{max}}\right)^{\frac{1}{3}} ln\left(\frac{v_0 + v_2}{\frac{g}{qm_{max}^{\frac{1}{3}}} + v_2}\right)$$

Ένα επιπλέον μείζων ζήτημα είναι να βρεθεί το σημείο πρόσκρουσης και έκρηξης του βλήματος κατά την πυροδότηση. Για περιβάλλοντα χωρίς κάποια ιδιαίτερη πολυπλοκότητα είναι εύκολο να υπολογιστεί το σημείο έκρηξης για κάθε τροχιά, για παράδειγμα σε ένα επίπεδο λιβάδι χωρίς εμπόδια (δέντρα, θάμνους, κτίρια κλπ.) γνωρίζουμε πως αν στοχεύσουμε ένα σημείο στο λιβάδι τότε το βλήμα θα εκραγεί κατά την επαφή του με το έδαφος ή με τον στόχο. Αντιθέτως, σε ένα δασικό περιβάλλον η πολυπλοκότητα αυξάνεται σημαντικά καθώς ένα βλήμα μπορεί να εκραγεί είτε κατά την επαφή με τον κορμό ενός δέντρου είτε με μεγάλα κλαδιά δέντρων. Δηλαδή κατά την πυροδότηση ενός στόχου σε δασικό περιβάλλον, υπάρχει το ενδεχόμενο εξουδετέρωσης του από:

- άμεση έκρηξη του βλήματος (εντός εμβέλειας εξουδετέρωσης του βλήματος)
- έμμεση ζημία μέσω θραύσματος του βλήματος από έκρηξη που προκλήθηκε πριν την άφιξη στον στόχο κατά την πρόσκρουση σε κορμό ή κλαδί δέντρου.

Στην εργασία τους οι Lappi et al. (2008) προσομοιώνουν ένα δάσος προσεγγίζοντας το από πολλές πλευρές. Αρχικά, αντιμετωπίζουν τα δέντρα ως απλούς κυλίνδρους μεγάλου ύψους με τυχαία διάταξη ανά μονάδα επιφάνειας και υπολογίζουν την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τη έκρηξη του βλήματος, η οποία ακολουθεί εκθετική κατανομή. Στη συνέχεια, μια πιο ρεαλιστική αντιμετώπιση περιλαμβάνει δέντρα μεταβλητής διαμέτρου ανάλογα με το ύψος, δηλαδή κωνικού σχήματος, όπου όσο μειώνεται το ύψος του βλήματος τόσο αυξάνεται η διάμετρος του κορμού των δέντρων (Σχήμα 9) και άρα αυξάνεται η πιθανότητα έκρηξης. Τέλος, μελετάται το σενάριο που τα δέντρα έχουν κλαδιά σημαντικού μεγέθους που μπορούν να προκαλέσουν την έκρηξη του βλήματος.




**Σχήμα 9.** Περίπτωση προσομοίωσης του δασικού περιβάλλοντος με δέντρα μεταβλητής διαμέτρου - κωνικού σχήματος. (Lappi et al., 2008)

Επειδή είναι δύσκολο να υπολογιστεί ο αριθμός των μεγάλων κλαδιών, γίνεται μια απλούστευση πως όλα τα κλαδιά είναι ίδιου μεγέθους σε διαφορετικές τοποθεσίες πάνω στον κορμό του δέντρου με αποτέλεσμα η πιθανότητα έκρηξης βλήματος από κάποιο κλαδί να ακολουθεί εκθετική κατανομή και να βασίζεται μόνο στην απόσταση που διένυσε το βλήμα κάτω από την κορυφογραμμή των δέντρων. Επιπρόσθετα, γίνεται η υπόθεση ότι η βιομάζα των δέντρων συσχετίζεται με τον αριθμό των κλαδιών που έχει το κάθε δέντρο και έτσι υπολογίζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την έκρηξη βλήματος κατά την επαφή με κάποιο κλαδί δέντρου.

Στην πραγματικότητα είναι πολύ δύσκολο και περίπλοκο να γίνουν υπολογισμοί ακριβείας, καθώς τα δέντρα έχουν διαφορετικά ύψη και κλίσεις, τα κλαδιά είναι ποικίλων μεγεθών και κατευθύνσεων, ενώ τα δάση συνήθως περιλαμβάνουν δέντρα όχι μόνο είδους, αλλά πολλών το καθένα με διαφορετικά χαρακτηριστικά. Συνδυάζοντας όλα τα χαρακτηριστικά που προαναφέρθηκαν και για τους κορμούς αλλά και για τα κλαδιά των δέντρων προκύπτουν οι απλοποιημένες μορφές της συνάρτησης πυκνότητας-πιθανότητας $f_z(r)$ και της συνάρτησης κατανομής $F_h(r)$ (ως συνάρτηση της απόστασης από το έδαφος):

$$f_z(r) = \begin{cases} \frac{\frac{h-z}{\sin(\phi)}}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-(\frac{h-z}{\sin(\phi)})^2}{2\sigma^2} - \lambda_b \frac{h_b}{\sin(\phi)}\right), & \text{if } 0 < z < h - h_b \\ (\frac{\frac{h-z}{\sin(\phi)}}{\sigma^2} + \lambda_b) \exp\left(\frac{-(\frac{h-z}{\sin(\phi)})^2}{2\sigma^2} - \lambda_b (\frac{h-z}{\sin(\phi)})\right), & \text{if } h - h_b \leq z \leq h \\ 0, & \text{if } r > h, \end{cases}$$

$$F_h(z) = \begin{cases} 0, & \text{if } z < 0 \\ \exp\left(\frac{-(\frac{h-z}{\sin(\phi)})^2}{2\sigma^2} - \lambda_b \frac{h_b}{\sin(\phi)}\right), & \text{if } 0 \leq z < h - h_b \\ \exp\left(\frac{-(\frac{h-z}{\sin(\phi)})^2}{2\sigma^2} - \lambda_b \frac{h-z}{\sin(\phi)}\right), & \text{if } h - h_b \leq z \leq h \\ 1, & \text{if } z > h. \end{cases}$$

όπου

$$\sigma = \sqrt{\frac{\tan(\varphi)h}{nw_0}} \text{ και } \lambda_b = c_t m_b \approx \frac{m_b}{1250\pi^2 \rho_t T h_b}.$$

Επιπλέον:

- $h$, το ύψος των δέντρων
- $h_b$, το ύψος της περιοχής των δέντρων (από την κορυφή) που περιλαμβάνει κλαδιά
- $n$, ο αριθμός των δέντρων ανά τετραγωνικό μέτρο
- $\varphi$, η γωνία πρόσκρουσης του βλήματος
- $r$, η απόσταση του βλήματος από τον στόχο/σημείο επιθυμητής πρόσκρουσης

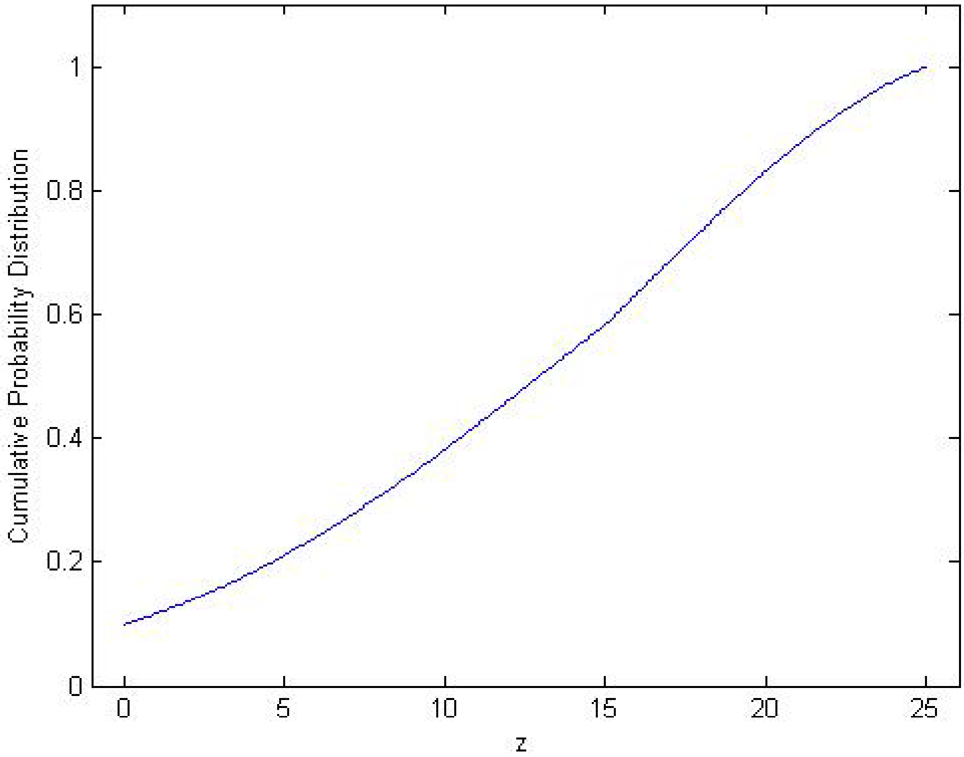
- $z$, το ύψος του βλήματος
- $m_b$, η βιομάζα των κλαδιών ανά εκτάριο
- $\rho_t$, η μέση πυκνότητα των κλαδιών
- $c_t$, μεταβλητή που εξαρτάται από τις φυσικές και μηχανικές ιδιότητες του είδους των δέντρων και του βλήματος.
- $w_0$, η διάμετρος του κορμού του δέντρο στην βάση του
- $\rho_t$, η μέση πυκνότητα των κλαδιών

Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα στοιχεία συνδυαστικά με τη πιθανότητα έκρηξης και διασποράς του βλήματος σε θραύσματα που προκαλούν ζημιά πριν την άφιξη στον στόχο. Πρόκειται για την παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{xyz}(x,y,z)$ κανονικής κατανομής με μέση τιμή $\mu_x$ και διασπορά $\sigma_x$ :

$$f_{xyz}(x,y,z) = f_x(x) f_y(y + \text{cotan}(\phi) z) f_z(z)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x}\right),$$

Η συνάρτηση $f_y(y)$ είναι παρόμοια με την $f_x(x)$, ενώ ως σημείο στόχευσης του οπλικού συστήματος θεωρείται το σημείο $(\mu_x, \mu_y, 0)$. Στο Σχήμα 10 παρουσιάζεται η συνάρτηση κατανομής $F_h(z)$ για γωνία πρόσκρουσης $\varphi = 30°$ , $h = 25$, $h_b = 10$ , $\sigma \approx 42$ και $\lambda = 0.01$. Οι παραπάνω τιμές για τις μεταβλητές σ και λ αναπαριστούν τις συνθήκες ενός πυκνού δάσους πεύκων.




**Σχήμα 10**. Συνάρτηση κατανομής $\mathbf{F_h(z)}$ για γωνία πρόσκρουσης $\boldsymbol{\varphi = 30°}$ , $\mathbf{h = 25}$, $\mathbf{h_b = 10}$ , $\boldsymbol{\sigma \approx 42}$ και $\boldsymbol{\lambda = 0.01}$. Πυκνό δασικό περιβάλλον πεύκων (Lappi et al., 2008)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
# Συμπεράσματα

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι ένας από τους πιο εφαρμοσμένους κλάδους της επιστήμης των Μαθηματικών, με το εύρος των εφαρμογών του στην επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών καθώς και στην Επιχειρησιακή Έρευνα να είναι πολύ ευρύ. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων πόρων ενός συστήματος σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες, σε προβλήματα ενέργειας, σε θέματα διοίκησης προσωπικού, προστασίας του περιβάλλοντος καθώς επίσης και προβλημάτων που αφορούν την ανάθεση πεπερασμένων πόρων σε ανταγωνιστικές απαιτήσεις.

Η παρούσα εργασία εστίασε στις εφαρμογές που χρησιμοποιούνται τέτοια μοντέλα του κλάδου όπου οι μεταβλητές παίρνουν ακέραιες τιμές. Τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν ανέδειξαν το ευρύ πεδίο εφαρμογής του ακέραιου προγραμματισμού σε διάφορες πτυχές στρατιωτικών ζητημάτων, καθώς και τις διάφορες μεθόδους οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν ανάλογα με τη φύση και τους περιορισμούς του κάθε προβλήματος.

Τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν είναι μόνο ένα μικρό δείγμα των δυνατοτήτων του ακέραιου προγραμματισμού, αφού με τη χρήση των υπολογιστών μπορούν να λυθούν προβλήματα με πολλές μεταβλητές και πολλούς περιορισμούς. Σε κάθε περίπτωση πρόκειται για ένα εργαλείο το οποίο διευκολύνει τη διαδικασία λήψης αποφάσεων σε όποιο πεδίο και να εφαρμοστεί.

# Βιβλιογραφία

## Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Chen, DS., Batson, R., & Dang Y. (2010). *Applied integer programming: modeling and solution*. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons

Hillier, J. & Lieberman J.A. (2001*). Introduction to Operations Research*, Volume 1. New York: McGraw-Hill.

Holland H. (1975) Adaption in Natural and Artificial Systems, USA: University of Michigan Press, Ann Arbor

Kwon O. (2003) A Genetic Algorithm Approach to the Fire Sequencing Problem, Journal of the military operations research society of Korea, vol. 19 , 2 , p.61-80.

Kwon, O., Lee, K., & Park, S. (1997). Targeting and scheduling problem for field artillery. *Computers & Industrial Engineering, 33*, 693-69

Lappi E., Pottonen O., Mäki S., Jokinen K., Saira O.-P., Åkesson B., Vulli M. (2008) *Simulating indirect fire: A numerical model and validation through field tests.*, 2nd Nordic Military Analysis Symposium, Stockholm, Sweden

Marin, J.A. (1989). *A model for optimizing field artillery fire*. Calhoun: The NPS Institutional Archive Theses and Dissertations Thesis Collection. Monterey, California. Naval Postgraduate School

Meyer, R.R. (1975). Integer and mixed-integer programming models: general properties. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 16, 191– 206.

Moura S .(2014) CEE Systems Analysis, CE 191, University of California, Berkeley

Przemieniecki, J.S. (2000) "Mathematical Methods in Defense Analyses", Third Edition, *Education Series*, *American Institute of Aeronautics and Astronautics* (*AIAA*), *Inc*., *Reston*, *VA 20191- 4344*, *2000*, *p. 398*

Schrijver, A. (1998). *Theory of Linear and Integer Programming*. New York: John Wiley & Sons.

Sierksma, G. (2015). *Linear and Integer Optimization: Theory and Practice*, Third Edition. London: CRC Press.

Taccari L. (2016) Integer programming formulations for the elementary shortest path problem, European Journal of Operational Research, Volume 252, 1, 122-130

Taha, H.A., (2007). *Operations research: An introduction* (8th edition). New Jersey : Pearson.

Williams, H.P., (2013). *Model Building in Mathematical Programming* (Fifth Edition). UK: John Willey & sons.

Winston, W.L. (2004) *Operations Research* Applications and Algorithms. 4th Edition. Pacific Grove, CA: Duxbury Press

## Ελληνική Βιβλιογραφία

Δάρας Ν. (2007) *Επιχειρησιακή Έρευνα και Στρατιωτικές εφαρμογές αυτής*, Στρατηγική Άμυνα, Τόμος 2ος, Βιβλίο 1ο , Ελληνικό Κέντρο Ελέγχου όπλων.

Κολέτσος, Ι. & Στογιάννης, Δ. (2017). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*. Αθήνα: Καλαμαρά Ελένη.

Μπούταλης Ι. & Συρακούλης Γ. (2019) Υπολογιστική Νοημοσύνη & Εφαρμογές , Ξάνθη

Παπαρρίζου Κ. & Σιφαλέρα Α. (2008) Αλγόριθμοι Επιχειρησιακής Έρευνας και Εφαρμογές τους στις Ένοπλες Δυνάμεις, Διακλαδική Επιθεώρηση, σ.90-99