ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΔΠΜΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Θεωρία Προσέγγισης σε Χώρους με Νόρμα

Δημήτριος Σταυρουλάκης

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Αναπλ. Καθηγητής Πετράκης Μίνως (Επιβλέπων)

Αναπλ. Καθηγητής Δάρας Τρύφων

Καθηγητής Κανδυλάκης Δημήτριος

Χανιά, Ιανουάριος 2023

Αφιερωμένη στη μνήμη του παππού μου, Δημήτρη.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της Διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που συνέβαλαν με οποιονδήποτε τρόπο κατά την περίοδο συγγραφής της.

Τον επιβλέποντα της εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή της σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Πολυτεχνείου Κρήτης, κ. Μίνω Πετράκη, για την καθοδήγηση, την κατανόηση και τη συνεχή στήριξη όποτε αυτό ήταν απαραίτητο κατά την συγγραφή της εργασίας.

Τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Τρύφωνα Δάρα και τον Καθηγητή κ. Δημήτρη Κανδυλάκη που αποτέλεσαν μέλη της εξεταστικής επιτροπής.

Τον Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης κ. Ιωάννη Δ. Πλατή, για την εμπιστοσύνη και τη βοήθεια του κατά την περίοδο αίτησης μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Πολυτεχνείου Κρήτης.

Την σύντροφό μου Ngan Le, για την υπομονή, τη συμπαράσταση και την βοήθεια της στο σχεδιασμό της εργασίας.

Τέλος, την οικογένειά μου για την άνευ όρων αγάπη και στήριξη που μου παρέχουν από την αρχή της Μαθηματικής μου διαδρομής.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά το πρόβλημα βέλτιστης προσέγγισης σε χώρους με νόρμα. Ειδικότερα:

Στο 1ο Κεφάλαιο δίνουμε αρχικά τις απαραίτητες εισαγωγικές έννοιες και ορισμούς, μελετάμε τις ειδικές περιπτώσεις των χώρων με νόρμα (χώροι Banach, Hilbert) και περιοριζόμαστε στους πεπερασμένης διάστασης χώρους με σκοπό την διατύπωση και απόδειξη του Θεμελιώδους θεωρήματος της θεωρίας προσεγγίσεων για στοιχεία και συναρτήσεις αυτών.

Στο 2ο Κεφάλαιο δίνουμε τον ορισμό της αυστηρής κυρτότητας, αποδεικνύουμε την ύπαρξη το πολύ μιας βέλτιστης προσέγγισης για στοιχεία του χώρου εάν αυτός είναι αυστηρά κυρτός, καθώς και την ύπαρξη άπειρων βέλτιστων προσεγγίσεων για κάποιο στοιχείο του στην αντίθετη περίπτωση. Το υπόλοιπο του κεφαλαίου αφιερώνεται στο πρόβλημα της ομοιόμορφης πολυωνυμικής προσέγγισης συνεχών συναρτήσεων. Η ύπαρξη της εξασφαλίζεται από το 1ο θέωρημα προσέγγισης του Weierstrass για το οποίο δίνονται οι αποδείξεις των Landau & Bernstein. Τέλος, γίνεται μελέτη των συνθηκών κάτω από τις οποίες η ομοιόμορφη πολυωνυμική προσέγγιση γίνεται βέλτιστη και εξασφαλίζεται η μοναδικότητα της.

Στο 3ο Κεφάλαιο μελετάμε την ύπαρξη πλησιέστερων σημείων σε χώρους Banach με την ιδιότητα Radon-Nikodym. Δίνονται αρχικά οι ορισμοί των πλησιέστερων σημείων και της ασθενούς προσεγγισιμότητας, καθώς και ο χαρακτηρισμός των χώρων Banach με την ιδιότητα Radon-Nikodym, μέσω των Bochner ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Στη συνέχεια εξετάζουμε την σχέση της ιδιότητας Radon-Nikodym και εκείνης των dentable συνόλων, καταλήγοντας στο θεώρημα των Borwein & Fitzpatrick, το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη πλησιέστερου σημείου σε ένα μη κενό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του χώρου Banach. Τέλος, διατυπώνουμε το θεώρημα του Edelstein, το οποίο προσδίδει μια επιπλέον ιδιότητα στο σύνολο των σημείων με πλησιέστερο σημείο στο προαναφερθέν υποσύνολο του χώρου.

Abstract

This Master's thesis particularly examines the optimal approximation problem in normed spaces. The paper is structured as follows:

In Chapter 1, we first present the necessary introductory concepts and definitions, investigate the special cases of normed spaces (Banach spaces, Hilbert spaces) and restrict ourselves to finite-dimensional spaces in order to formulate and prove the fundamental theorem of approximation theory for elements and functions of these spaces.

In Chapter 2, we give the definition of strict convexity, prove the existence of at most one optimal approximation for elements of the space if it is strictly convex, and the existence of infinite optimal approximations for some element of the space in the opposite case. The remainder of the chapter is devoted to the problem of uniform polynomial approximation of continuous functions. Its existence is guaranteed by the 1st Weierstrass approximation theorem for which the proofs of Landau & Bernstein are given. Finally, we consider the conditions under which the uniform polynomial approximation becomes optimal and its uniqueness is ensured.

In Chapter 3, we discuss the existence of nearest points in Banach spaces with the Radon-Nikodym property. The definitions of nearest points and weak proximinality are given first, followed by the characterization of Banach spaces having the Radon-Nikodym property via Bochner integrable functions. We then consider the relation between the Radon-Nikodym property and that of dentable sets and conclude with the Borwein & Fitzpatrick theorem, which ensures the existence of a nearest point in a non-empty, closed and bounded subset of Banach space. Finally, we state Edelstein's theorem, which gives an additional property to the set of points with a nearest point to the aforementioned subset of space.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι με νόρμα

1.1 Εισαγωγικά

Μία από τις ανάγκες που παρουσιάζονται συχνά στα μαθηματικά είναι εκείνη της μέτρησης *"μεγεθών"*. Η μέτρηση *"μεγεθών"* όπως είναι οι συναρτήσεις και τα διανύσματα, μπορεί να ερμηνευτεί απλοϊκά ως η ικανότητα εκτίμησης του πόσο *"μικρή"* ή *"μεγάλη"* είναι μία συνάρτηση, πόσο *"μικρό"* ή *"μεγάλο"* (ως προς το μήκος του) είναι ένα διάνυσμα. Ειδικότερα, θα θέλαμε να γνωρίζουμε πότε δύο από τα παραπάνω στοιχεία ενός χώρου (συναρτήσεις ή διανύσματα) βρίσκονται αρκετά *"κοντά"*. Ισοδύναμα, πότε προσεγγίζει το ένα το άλλο, καθώς και κάτω από ποιές συνθήκες η προσέγγιση αυτή γίνεται βέλτιστη. Μία μέθοδος με την οποία μπορούμε να εξετάσουμε το ζήτημα αυτό είναι η μελέτη των λεγόμενων *"νορμών"* και των χώρων με νόρμα. Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό της νόρμας σε έναν γραμμικό χώρο X, δηλαδή, για κάθε στοιχείο $x \in$ X θα ορίσουμε την νόρμα του $\|x\|$ που είναι πραγματικός αριθμός, μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός.

Ορισμός 1.1.1: *Έστω γραμμικός χώρος X. Μια συνάρτηση* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$ *ονομάζεται νόρμα στο χώρο X αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες*:

(i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in X$

(ii) $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\| \quad \forall\ x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Τριγωνική Ανισότητα)

Παρατήρηση:

Η νόρμα σε έναν γραμμικό χώρο είναι ότι και η απόλυτη τιμή στο $\mathbb{R}$. Αν x και y είναι δύο στοιχεία του X, τότε ορίζεται η μετρική με τύπο $d(x,y) = \|x - y\|$ που εκφράζει την απόσταση μεταξύ αυτών των στοιχείων. Λέμε ότι η συγκεκριμένη μετρική «*επάγεται*» από την νόρμα. Οι κυριότερες νόρμες που χρησιμοποιούνται είναι οι νόρμες 1, 2 και ∞ (ή l_1, l_2 και l_∞ αντίστοιχα).

Παραδείγματα:

1) Αν X είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $C[a,b]$, τότε οι αντίστοιχες νόρμες των $f \in C[a,b]$ ορίζονται ως εξής:

$$l_1: \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$$l_2: \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

$$l_\infty: \quad \|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$$

οι οποίες αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της l_p νόρμας που ορίζεται ως:

$$l_p: \quad \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}, p \ge 1$$

Επιπλέον, εύκολα αποδεικνύεται ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2) Αν X $= \mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $x \in$ X οι αντίστοιχες διανυσματικές νόρμες ορίζονται ως εξής:

$$l_1: \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$l_2: \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$l_\infty: \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

οι οποίες επίσης αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της l_p νόρμας που ορίζεται ως:

$$l_p: \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, p \ge 1$$

Ομοίως αποδεικνύεται και εδώ ότι $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Το ότι οι παραπάνω νόρμες ικανοποιούν τις συνθήκες *(i)-(iii)* του Ορισμού 1.1.1. είναι εύκολο να δειχθεί. Ωστόσο, υπάρχει μια δυσκολία ως προς την απόδειξη της ιδιότητας *(iv)* στις νόρμες l_2 και l_∞ . Η απόδειξη αυτών επιτυγχάνεται με τη χρήση των ανισότητων *Minkowski* και *Hölder*, οι οποίες θα δοθούν χωρίς απόδειξη στην περίπτωση που ο γραμμικός χώρος X είναι ο $\mathbb{R}^n$.

● Ανισότητα *Minkowski*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

● Ανισότητα *Hölder*:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i \cdot y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}$$

όπου $p > 1$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$

Σημειώνεται, ότι ειδική περίπτωση της ανισότητας *Hölder* για *p = q = 2* είναι η περίφημη ανισότητα των *Cauchy-Schwarz* :

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i \cdot y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}$$

της οποίας η απόδειξη θα δοθεί αργότερα, όταν μιλήσουμε για χώρους με εσωτερικό γινόμενο και χώρους *Hilbert.*

1.2 Χώροι Banach

Είναι οι χώροι που αποτελούν υποκλάση των χώρων με νόρμα. Αναπτύχθηκαν αρχικά από την μελέτη συναρτησιακών χώρων κατά τον 19ο αιώνα και πήραν το όνομά τους από τον Πολωνό μαθηματικό *Stefan Banach*, έναν εκ' των θεμελιωτών των χώρων με νόρμα.

Ορισμός 1.2.1: *Έστω Χ μετρικός χώρος. Αν κάθε ακολουθία Cauchy του Χ συγκλίνει σε στοιχείο του χώρου, τότε ο Χ ονομάζεται πλήρης.*

Ορισμός 1.2.2: *Έστω Χ χώρος με νόρμα. Αν ο Χ είναι πλήρης ως προς την μετρική που επάγεται από την νόρμα, τότε ονομάζεται χώρος Banach.*

Παρατηρήσεις:

1) Τα κλειστά υποσύνολα πλήρων μετρικών χώρων είναι επίσης πλήρη. Επομένως, κλειστοί υπόχωροι χώρων *Banach* είναι χώροι *Banach*.

2) Κάθε πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα είναι χώρος *Banach*. Έπεται ότι, κάθε χώρος με νόρμα που δεν είναι χώρος *Banach*, θα είναι απειροδιάστατος.

3) Απειροδιάστατοι χώροι με νόρμα που είναι χώροι *Banach* έχουν αναγκαστικά υπεραριθμήσιμη βάση *Hamel*.

Παραδείγματα:

1) Κλασσικό παράδειγμα χώρου *Banach* είναι ο χώρος $(\mathbb{R}\,, \ \|\cdot\| \ )$.

2) Οι $l^1(\mathbb{N}), l^2(\mathbb{N})$ και γενικότερα οι χώροι $l^p(\mathbb{N})$ με την αντίστοιχη p-νόρμα. Οι χώροι ακολουθιών $l^p(\mathbb{N})$ ορίζονται για $1 \leq \mathrm{p} <+ \infty$ ως εξής:

$$l^p(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n), n \in \mathbb{N} \mid x_n \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \ +\infty \right\}$$

και η αντίστοιχη νόρμα τους:

$$\|x_n\|_p = \left(\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

3) Ο χώρος των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών :

$l^\infty(\mathbb{N}) = \{ \, (x_n), n \in \mathbb{N} \mid |x_n| \leq \mathrm{M}, \ \text{για κάποιο } \mathrm{M} > 0 \, \}$ με την νόρμα απείρου :

$$\|x_n\|_\infty \ = \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n|\}$$

4) Ο χώρος των πραγματικών ακολουθιών που τείνουν στο μηδέν:

$$\mathrm{C}_0(\mathbb{N}) = \{(x_n), n \in \mathbb{N} \mid \ x_n \to 0 \, \}$$

εφοδιασμένος με την νόρμα απείρου, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

5) Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $C[0,1]$ με $f \in C[0,1]$ και νόρμα:

$$\|f\|_\infty \ = \ \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

1.3 Χώροι Hilbert

Πήραν το όνομα τους από τον Γερμανό μαθηματικό *David Hilbert* και αποτελούν γενίκευση του Ευκλείδιου χώρου. Είναι εφοδιασμένοι με ένα εσωτερικό γινόμενο από το οποίο επάγεται μία νόρμα, ως προς την οποία οι χώροι αυτοί είναι πλήρεις. Μπορούμε να τους αποκαλέσουμε καταχρηστικά μοναδικούς, αφού όλοι οι χώροι *Hilbert* ίδιας τοπολογικής διάστασης ταυτίζονται. Πριν μιλήσουμε όμως για τους χώρους αυτούς, οι οποίοι βρίσκουν εφαρμογή μεταξύ άλλων στη *θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων*, την *κβαντομηχανική*, την *ανάλυση Fourier* κ.α, θα δώσουμε τον ορισμό, τις ιδιότητες και μερικές προτάσεις του εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 1.3.1: *Έστω γραμμικός χώρος X. Η συνάρτηση* $\langle \cdot\, , \cdot \rangle : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ *ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο στον X αν για κάθε x,y,z* $\in$ *X και λ* $\in \mathbb{R}$ *ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ και $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(iii) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

(iv) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

Ο χώρος $(\mathrm{X}, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ λέγεται γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Από τις ιδιότητες *(ii)-(iv)* εύκολα προκύπτουν και οι ακόλουθες:

(v) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

(vi) $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

(vii) Αν $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle \implies x = y$

Πρόταση 1.3.2 (*Ανισότητα Cauchy-Schwarz*): *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο* $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ *. Τότε για κάθε* $x, y \in X$ *ισχύει:*

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x, y *είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*

Απόδειξη:

● Αν $x = 0$ τότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα αφού $\langle 0, y\rangle = \langle 0,0\rangle = 0$. Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε $0 = 0 \cdot y$ δηλαδή το 0 ως πολλαπλάσιο του y.

● Αν $x \neq 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε:

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, \lambda y\rangle - \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \lambda\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle$$

$$= \lambda^2\langle y, y\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle$$

Επειδή η ανισότητα ισχύει για κάθε λ ∈ $\mathbb{R}$ και θεωρώντας το παραπάνω τριώνυμο ως προς λ, τότε θα πρέπει:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (\, \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \,) \leq 0$$

και τελικά

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

($\Longrightarrow$) Έστω τώρα ότι η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Τότε :

$$\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \Longrightarrow \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle} = \langle y, y\rangle.$$

Θέτουμε $k = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$ και έχουμε:

$$k\,\langle x, y\rangle = \langle y, y\rangle \Longrightarrow$$

$$\langle kx, y\rangle = \langle y, y\rangle \Longrightarrow$$

$$kx = y$$

(Ορισμός 1.3.1, ιδιότητα (*vii*))

Οπότε το y είναι πολλαπλάσιο του x.

($\Longleftarrow$) Αντιστρόφως, αν $y = kx$ τότε για κάποιο $k \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\langle x, y\rangle^2 = \langle x, kx\rangle^2 = k^2\langle x, x\rangle^2$$

$$= \langle x, x\rangle \cdot k^2\langle x, x\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle \cdot \langle kx, kx\rangle$$

$$= \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \qquad \square$$

Ορισμός 1.3.3: *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση* $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ *με τύπο* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ *για κάθε* $x \in X$ *λέμε ότι είναι η νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο.*

Πρόταση 1.3.4: *Η νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο είναι νόρμα στον X.*

Απόδειξη:

Οι ιδιότητες (i)-(iii) της νόρμας είναι εύκολο να δειχθούν. Για την ιδιότητα (iv) (Τριγωνική ανισότητα) θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα *Cauchy-Schwarz.* Για κάθε $x, y \in X$ έχουμε:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

Άρα, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\square$

Παρατηρήσεις:

1) Η νόρμα που χρησιμοποιείται στην μελέτη γραμμικών χώρων με εσωτερικό γινόμενο είναι η νόρμα που ορίζεται από αυτό.

2) Οι βέλτιστες προσεγγίσεις που θα αναζητήσουμε αργότερα θα είναι ως προς αυτή τη νόρμα.

3) Κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος με νόρμα και κατ' επέκταση, μετρικός χώρος.

Παραδείγματα: Ας δωσουμε τώρα μερικά παραδείγματα χώρων με εσωτερικό γινόμενο.

1) Ο $C[a, b]$ με το εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται $\langle \cdot , \cdot \rangle : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ και με τύπο:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$

2) Αν στο προηγούμενο παράδειγμα ορίσουμε επιπλέον μία θετική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση βάρους $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ τότε ορίζεται εσωτερικό γινόμενο με τύπο:

$$\langle f, g \rangle_w := \int_a^b w(x) f(x) g(x) \; dx$$

3) Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ με εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

όπου $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$

Πρόταση 1.3.5 (*Κανόνας Παραλληλογράμμου*): *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε για κάθε* $x, y \in X$ *ισχύει*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου προκύπτουν οι σχέσεις:

$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ (1)

$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ (2)

Προσθέτωντας τις (1), (2) έπεται το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.3.6: *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν για δύο στοιχεία* $x, y \in X$ *ισχύει* $\langle x, y \rangle = 0$ *, τότε λέμε ότι τα* x, y *είναι κάθετα (ορθογώνια). Συμβολίζουμε* : $x \perp y$.

Πρόταση 1.3.7 (*Πυθαγόρειο Θεώρημα*): *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και δύο στοιχεία* $x, y \in X$ *τέτοια ώστε* $x \perp y$. *Τότε ισχύει*:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) της προηγούμενης πρότασης έχουμε

$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

Όμως $x \perp y \Longrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ και άρα το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.3.8 : *Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν ο H είναι πλήρης, τότε ονομάζεται χώρος Hilbert.*

Ισοδύναμα,

Ένας χώρος Banach λέγεται χώρος Hilbert, αν η νόρμα του προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον H. Δηλαδή,αν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο στον H ώστε για κάθε $x \in H$ να ισχύει:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Παρατηρήσεις:

1) Οι χώροι πεπερασμένης διάστασης είναι χώροι Hilbert με εσωτερικό γινόμενο που παράγει την Ευκλείδεια νόρμα.

2) Κάθε κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert είναι επίσης χώρος Hilbert.

3) Αν X χώρος Banach, H χώρος Hilbert και X ισομετρικός[1] με τον H, τότε και ο X είναι χώρος Hilbert.

Παραδείγματα:

1) Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ με το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο είναι ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος Hilbert.

2) Ο χώρος ακολουθιών $l^2(\mathbb{N})$ με εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

είναι επίσης χώρος Hilbert.

3) Ο $C[0,1]$ με εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\ dx$$

[1] Αν X, H χώροι με εσωτερικό γινόμενο και T : X→ H 1-1 και επί γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε: $\langle T(x), T(w)\rangle = \langle x, w\rangle$ για κάθε $x, w \in$ X τότε ο T λέγεται ισομετρία και ο X ισομετρικός με τον H.

δεν είναι πλήρης και επομένως δεν είναι χώρος Hilbert. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ακολουθία Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία δεν συγκλίνει σε συνάρτηση του χώρου.

1.4 Χώροι πεπερασμένης διάστασης & Βέλτιστες προσεγγίσεις

Το πρόβλημα προσέγγισης μελετάται κυρίως από υπόχωρους γραμμικών χώρων με νόρμα. Όταν ο χώρος, του οποίου τα στοιχεία θέλουμε να προσεγγίσουμε είναι άπειρης διάστασης, τα πράγματα μπορούν να γίνουν πολύπλοκα. Αντιθέτως, στους πεπερασμένης διάστασης γραμμικούς χώρους η κατάσταση είναι απλούστερη. Αυτό συμβαίνει, διότι στην περίπτωση που αλλάξουμε νόρμα δεν επηρεάζεται η σύσταση του χώρου (ανοικτά - κλειστά σύνολα, συνεχείς συναρτήσεις, κλπ), αφού όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες. Αρχικά θα αποδείξουμε το θεώρημα ισοδυναμίας νορμών και στη συνέχεια θα παραθέσουμε μερικά πορίσματα στο δρόμο προς τον ορισμό της βέλτιστης προσέγγισης.

Θεώρημα 1.4.1 (*Ισοδυναμία νορμών*): *Άν X γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, κάθε δύο νόρμες στον X είναι ισοδύναμες. Ειδικότερα, αν* $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ *είναι νόρμες στον X, υπάρχουν θετικές σταθερές* $A, B <+\infty$ *τέτοιες ώστε*:

$$A\,\|x\|_* \leq \|x\| \leq B\,\|x\|_* \quad \textit{για κάθε } x \in \mathrm{X}$$

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι $dim(\mathrm{X}) = n$, $\|\cdot\|$ είναι μία νόρμα στον X και $e_1, \dots e_n$ μία βάση του. Τότε κάθε $x \in \mathrm{X}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως:

$$x = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \text{ για κάποια } a_i \in \mathbb{R}\,,\ i = 1, \ldots, n$$

Ορίζουμε την ποσότητα

$$\|x\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \|a_i\|_1$$

Επειδή τα $e_1, \dots e_n$ αποτελούν βάση του X εύκολα αποδεικνύεται ότι η παραπάνω ποσότητα είναι επίσης νόρμα στον X. Ειδικότερα, η απεικόνιση:

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n)$$

είναι 1-1 και επί, άρα ο X είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$ και η $\|\cdot\|_1$ είναι ουσιαστικά η l_1 νόρμα. Αρκεί να δείξουμε τώρα ότι οι νόρμες $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες και θα έχουμε το ζητούμενο. Από την τριγωνική ανισότητα:

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|a_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \|e_i\| \leq \max_{1\leq i\leq n} \|e_i\| \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Δηλαδή, $\|x\| \leq B\,\|x\|_1$, με $B = \max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|$.

Ορίζουμε τώρα την μοναδιαία σφαίρα ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_1$:

$$\mathrm{S} = \{x \in X : \|x\|_1 = 1\}$$

Το σύνολο S είναι κλειστό και φραγμένο, ο X είναι πεπερασμένης διάστασης και άρα το S είναι συμπαγές. Επιπλέον, η απεικόνιση $x \longmapsto \|x\|$ είναι συνεχής στον $(\mathrm{X}, \|\cdot\|_1)$ αφού για κάθε $x, y \in \mathrm{X}$:

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| \leq B\,\|x - y\|_1$$

επομένως λαμβάνει ελάχιστο στο S. Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in \mathrm{S}$ τέτοιο ώστε:

$$\|x\| \geq \|x_0\| \text{ για κάθε } x \in \mathrm{S}$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathrm{X}$ και $\frac{x}{\|x\|_1} \in \mathrm{S}$ έχουμε:

$$\|x\| = \left\| \|x\|_1 \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \|x\|_1 \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq \|x_0\|\,\|x\|_1$$

Δηλαδή $\|x\| \geq A\,\|x\|_1$, με $A = \|x_0\|$. □

Πόρισμα 1.4.2: *Έστω X γραμμικός χώρος με νόρμα και Y πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Τότε, ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Πόρισμα 1.4.3: *Έστω X πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα. Κάθε κλειστή μπάλα της μορφής*

$$\{x, y \in \mathrm{X} : \|x - y\| \leq \mathrm{M}\,, \mathrm{M} > 0\} \text{ *είναι συμπαγής.*}$$

Απόδειξη:

Επειδή η παράλληλη μεταφορά στο χώρο είναι μια ισομετρία, αρκεί να δείξουμε ότι η κλειστή μπάλα $\{x \in \mathrm{X} : \|x\| \leq \mathrm{M}\,,\ \mathrm{M} > 0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου, και άρα συμπαγής. □

Ορισμός 1.4.4: *Έστω X χώρος με νόρμα, Y γνήσιο υποσύνολο του X και ένα $x \in X$. Η ποσότητα*

$$d(x,Y) := \min_{y \in Y} \|x-y\|$$

λέγεται απόσταση του x *από τον Y.*

Θεώρημα 1.4.5 (*Ύπαρξη βέλτιστης προσέγγισης*): *Έστω X χώρος με νόρμα και Y πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Τότε για κάθε* $x \in$ *X υπάρχει ένα (όχι απαραίτητα μοναδικό)* $y^* \in$ *Y τέτοιο ώστε:*

$$\|x - y^*\| = \min_{y \in Y} \|x-y\| \quad \text{για κάθε } y \in \mathrm{Y}$$

Ισοδύναμα, υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του x *από στοιχεία του* Y.

Απόδειξη:

O Y είναι υπόχωρος του X, άρα είναι προφανές ότι $0 \in Y$. Αν y^* είναι βέλτιστη προσέγγιση τότε θα ισχύει:

$$\|x - y^*\| \le \|x - 0\| = \|x\|$$

Επομένως, αρκεί να αναζητήσουμε την βέλτιστη προσέγγιση ανάμεσα στα $y \in Y$ για τα οποία ισχύει:

$$\|x - y\| \le \|x\| \qquad (1)$$

ή σε ένα ακόμη μεγαλύτερο σύνολο, αφού για κάποιο $y \in Y$ που ικανοποιεί την (1) προκύπτει ότι:

$$\|y\| = \|y - x + x\| \le \|x - y\| + \|x\| \le \|x\| + \|x\| = 2\|x\|$$

Θεωρούμε το σύνολο S$= \{y \in Y : \|y\| \le 2\|x\|\}$. Το S είναι συμπαγές, ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο χώρου πεπερασμένης διάστασης (Πόρισμα 1.4.3). Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(y) := \|x-y\|$ είναι συνεχής. Πράγματι:

$$|\, f(y) - f(z) \,| = |\, \|x-y\| - \|x-z\| \,| \le \|x - y - x + z\| = \|y - z\|$$

Άρα η f λαμβάνει ελάχιστο στο S. Δηλαδή, υπάρχει $y^* \in$ S τέτοιο ώστε:

$$\|x - y^*\| \le \min_{y \in S} \|x-y\|$$

Τέλος, αν $y \in Y \setminus$S τότε $\|y\| \ge 2\|x\|$ και επομένως:

$$\|y - x\| \ge \|y\| - \|x\| > 2\|x\| - \|x\| = \|x\| \ge \|x - y^*\| \text{ αφού } 0 \in \mathrm{S} \qquad \square$$

Παρατηρήσεις:

1) Το παραπάνω θεώρημα ονομάζεται «*θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας προσεγγίσεων»*. Ως συνέπεια του παραθέτουμε το επόμενο πόρισμα, το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη βέλτιστης προσέγγισης μίας συνάρτησης $f \in C[a,b]$ από πολυώνυμα $p_n \in \mathbb{P}_n$.

2) $\mathbb{P}_n$ ορίζεται να είναι ο πεπερασμένης διάστασης χώρος όλων των πολυωνύμων βαθμού το πολύ *n* με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. Φυσικά, ο $\mathbb{P}_n$ είναι υπόχωρος του $C[a,b]$.

Πόρισμα 1.4.6 : *Για κάθε συνάρτηση $f \in C[a,b]$ και για κάθε θετικό ακέραιο n, υπάρχει ένα (όχι απαραίτητα μοναδικό) πολυώνυμο $p_n{}^* \in \mathbb{P}_n$ ώστε :*

$$\|f - p_n{}^*\| = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|$$

Ορισμός 1.4.7: *Ένα υποσύνολο K ενός γραμμικού χώρου X λέγεται κυρτό, αν για κάθε $x, y \in K$ και για κάθε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει*:

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in K$$

Στην ειδική περίπτωση που ο X είναι χώρος Hilbert και η προσέγγιση στοιχείων του πραγματοποιείται από κλειστό και κυρτό υποσύνολό του, τότε η ύπαρξη και η μοναδικότητα βέλτιστης προσέγγισης εξασφαλίζονται ταυτόχρονα από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.4.8: *Έστω K κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H. Τότε για κάθε $x \in H$ υπάρχει μοναδικό $y^* \in K$ τέτοιο ώστε:*

$$\|x - y^*\| = d(x,K) = \inf\{\|x - y\| : y \in K\}$$

Απόδειξη:

Εφαρμόζωντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου για $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$ έχουμε

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

και

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \qquad (1)$$

Αν $l = d(x,K)$ τότε υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο K τέτοια ώστε:

$$\|y_n - x\| \longrightarrow l$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (1) για $y_n,\ y_m$ προκύπτει :

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \right\|^2$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$

Επειδή το K είναι κυρτό και $\frac{y_n+y_m}{2} \in$ K τότε:

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \right\|^2 \geq l^2$$

και επομένως

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4l^2$$

Το δεξιό μέλος της ανισότητας τείνει στο $2l^2 + 2l^2 - 4l^2 = 0$ όταν τα $n, m \to \infty$ και άρα η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy. Επιπλέον, ο H είναι χώρος Hilbert και άρα πλήρης, οπότε υπάρχει ένα $y^* \in H$ τέτοιο ώστε

$$\|y_n - y^*\| \longrightarrow 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty$$

Το K είναι κλειστό, η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκει στο K άρα και το y^* είναι στο K. Τέλος, από την συνέχεια της νόρμας έχουμε ότι:

$$\|y^* - x\| = \left\|\lim_{n\to\infty} y_n - x\right\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = l = d(x, K) \ .$$

Η απόδειξη της μοναδικότητας στηρίζεται επίσης στον κανόνα του παραλληλογράμμου. Έτσι αν $y_1^*, y_2^* \in$ K και επιπλέον

$$\|x - y_1^*\| = \|x - y_2^*\| = l$$

τότε έχουμε:

$$0 \leq \|y_1^* - y_2^*\|^2 = 2\|y_1^* - x\|^2 + 2\|y_2^* - x\|^2 - 4\left\| \frac{y_1^* + y_2^*}{2} - x \right\|^2$$

$$= 2l^2 + 2l^2 - 4\left\| \frac{y_1^* + y_2^*}{2} - x \right\|^2$$

$$\leq 2l^2 + 2l^2 - 4l^2 = 0$$

Άρα $\quad y_1^* = y_2^* \quad \square$

1.5 Ορθοκανονικά συστήματα

Ορισμός 1.5.1: *Έστω* (X, $\langle \cdot , \cdot \rangle$) *χώρος με εσωτερικό γινόμενο, παραγώμενη νόρμα* $\| \cdot \|$ *και ένα σύνολο*:

$$S = \{e_i \in X : i \in I\} \subseteq X$$

Το S ονομάζεται ορθοκανονικό, αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \;\; \forall \;\; i, j \in I$ με $i \neq j$

(ii) $\|e_i\| = 1 \;\; \forall \, i \in I$

Παρατηρήσεις:

1) Ένα ορθογώνιο σύνολο (δηλαδή ένα σύνολο που ικανοποιεί μόνο την πρώτη ιδιότητα) μετατρέπεται εύκολα σε ορθοκανονικό, απλά διαιρώντας κάθε (μη μηδενικό) στοιχείο του συνόλου με το αντίστοιχο μήκος του.

2) Το παραπάνω σύνολο S λέγεται ισοδύναμα ορθοκανονικό σύστημα ή ορθοκανονική ακολουθία, εάν το σύνολο δεικτών I είναι αριθμήσιμο [2].

Πόρισμα 1.5.2: *Κάθε ορθοκανονικό σύστημα του χώρου X είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι αν

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$$

για κάποια $e_i \in$ X και $\lambda_i \in \mathbb{R}$ με $i = 1, \dots, n$ και n πεπερασμένο, τότε αναγκαστικά $\lambda_i = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Πράγματι,

[2] Ένα σύνολο λέγεται αριθμήσιμο αν είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών αριθμών ℕ.

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i\|^2 = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2 \Longrightarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \qquad \square$$

Ορισμός 1.5.3: *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα ορθοκανονικό σύνολο S του X λέγεται ορθοκανονική βάση εάν κάθε* $x \in X$ *γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως :*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$$

για κάθε $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *και* $e_i \in S$.

Ορισμός 1.5.4: *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και ένα ορθοκανονικό σύνολο S του X. Το S ονομάζεται maximal (μεγιστικό) ορθοκανονικό σύνολο αν δεν περιέχεται γνήσια σε άλλο ορθοκανονικό σύνολο.*

Ισοδύναμα, το S ονομάζεται maximal αν δεν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο του X κάθετο στο S.

Ορισμός 1.5.5: *Έστω S ορθοκανονικό σύνολο ενός χώρου Hilbert H. Το σύνολο S λέγεται ορθοκανονική βάση του H, αν είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο.*

Πρόταση 1.5.6: *Σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο κάθε ορθοκανονική βάση είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο. Σε χώρο Hilbert, κάθε maximal ορθοκανονικό σύνολο είναι ορθοκανονική βάση.*

Ορισμός 1.5.7: *Ένας χώρος με νόρμα (που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο) λέγεται διαχωρίσιμος αν έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.*

Παρατηρήσεις:

1) Κάθε πεπερασμένης διάστασης χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι διαχωρίσιμος και πλήρης.

2) Κάθε υποσύνολο διαχωρίσιμου χώρου είναι επίσης διαχωρίσιμο.

Θεώρημα 1.5.8: *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση. Επιπλέον, κάθε ορθοκανονικό σύνολο ενός διαχωρίσιμου χώρου Hilbert επεκτείνεται σε ορθοκανονική βάση.*

Απόδειξη:

Θα περιγράψουμε την απόδειξη συνοπτικά. Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Αρχικά σχηματίζουμε μία συλλογή $\mathcal{A}$ με όλα τα ορθοκανονικά υποσύνολα του H. Έπειτα ορίζουμε μια σχέση διάταξης στην $\mathcal{A}$ και παίρνουμε μία οποιαδήποτε μη κενή και ολικά διατεταγμένη υποσυλλογή $\mathcal{B}$ της $\mathcal{A}$. Δείχνοντας οτι η $\mathcal{B}$ είναι άνω φραγμένη έπεται από το Λήμμα του *Zorn* ότι η συλλογή $\mathcal{A}$ έχει *maximal* στοιχείο, το οποίο και θα είναι ορθοκανονική βάση του H (Πρόταση 1.5.6). Για τον δεύτερο ισχυρισμό: Έστω S ένα ορθοκανονικό σύνολο του H. Αν το S δεν είναι *maximal,* δηλαδή περιέχεται γνήσια σε άλλο ορθοκανονικό σύνολο, τότε αρκεί να του προσθέσουμε στοιχεία τόσα ώστε να μην υπάρχει γνήσιο υπερσύνολο του. Δηλαδή το S μετατρέπεται σε *maximal* και άρα από την ίδια πρόταση το αρχικό ορθοκανονικό σύνολο S επεκτείνεται σε ορθοκανονική βάση του H. □

Παρατηρήσεις:

1) Αποδεικνύεται ότι ένας χώρος Hilbert είναι διαχωρίσιμος εάν δέχεται αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.

2) Κάθε διαχωρίσιμος και απειρης διάστασης χώρος Hilbert είναι ισόμορφος με τον χώρο ακολουθιών l^2. Συνεπώς, όλοι οι απειροδιάστατοι χώροι Hilbert ταυτίζονται μεταξύ τους. Αυτός είναι και ο λόγος που στην αρχή της παραγράφου **1.3** τους αποκαλέσαμε "μοναδικούς".

Ορισμός 1.5.9: *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και Y ένα μη κενό υποσύνολο του. Ένα στοιχείο* $x \in X$ *λέμε ότι είναι κάθετο στο Y* ($x \perp Y$) *αν για κάθε* $y \in Y$ *ισχύει* $x \perp y$. *Δηλαδή,* $\langle x, y \rangle = 0$.

Πρόταση 1.5.10: *Έστω K κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H. Τότε για κάθε* $x \in H \setminus K$ *υπάρχει μοναδικό* $y \in K$ *τέτοιο ώστε:*

$$x - y \perp K$$

Απόδειξη:

Από το Θεώρημα 1.4.8 έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό $y^* \in K$ ώστε:

$\|x - y^*\| = d(x, K)$. Άρα αρκεί να δειχθεί ότι $x - y^* \perp K$ και επειδή y^* θα είναι η βέλτιστη προσέγγιση του *x* από το Κ τότε $y = y^*$. □

Πόρισμα 1.5.11: *Από την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης προκύπτει ότι:*

$$x - y = d(x, K) \Leftrightarrow x - y \perp K$$

Θεώρημα 1.5.12: *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο S=* $\{e_i \in X : i = 1, \dots, n\}$ *του X. Αν F είναι ο χώρος που παράγεται από τα στοιχεία του S τότε η βέλτιστη προσέγγιση του x ∈X από στοιχεία του F θα είναι της μορφής:*

$$u = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$$

Απόδειξη:

Από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε ότι για κάθε $x \in$ X και για κάθε $u \in F$ ισχύει:

$$\|x - u\| = d(x, F) \Leftrightarrow x - u \perp F$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $x - u \perp F$. Αυτό ισχύει, αφού ο *F* παράγεται από τα $\{e_1, \dots, e_n\}$ και επιπλέον:

$$\langle x - u, e_i \rangle = 0 \ \forall \ i = 1, \dots, n \qquad \square$$

Θεώρημα 1.5.13 (*Ανισότητα Bessel*): *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και μια ορθοκανονική ακολουθία* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *του X. Τότε για κάθε x ∈ X ισχύει η ανισότητα*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι $u_k = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n$ είναι βέλτιστη προσέγγιση του *x* για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι $x - u_k \perp u_k$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\|x\|^2 = \|(x-u_k)+u_k\|^2 = \|x-u_k\|^2 + \|u_k\|^2 \geq \|u_k\|^2$$

Όμως,

$$\|u_k\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \|\langle x, e_n\rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \|\langle x, e_n\rangle\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle^2$$

Άρα $\forall k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle^2 \leq \|x\|^2$$

και όταν $n \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle^2 \leq \|x\|^2$$

□

Θεώρημα 1.5.14 (*Ταυτότητα Parseval*): *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *του X. Τότε για κάθε* $x \in X$ *ισχύει η ισότητα:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2$$

Απόδειξη:

Ξεκινάμε με την ίδια υπόθεση, όπως και στο προηγούμενο θεώρημα. Έστω ότι $u_k = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n$ είναι βέλτιστη προσέγγιση του *x*, $\forall k \in \mathbb{N}$ και από το Θεώρημα 1.5.12 έχουμε ότι $x - u_k \perp u_k$. Δηλαδή:

$$\langle x-u_k, u_k \rangle = 0 \Longrightarrow \langle x, u_k\rangle - \langle u_k, u_k\rangle = 0$$

και

$$\langle x, u_k\rangle = \langle u_k, u_k\rangle$$

Από την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$x = u_k \quad \forall k$$

Επομένως,

$$\|x\|^2 = \|u_k\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle^2$$

Τέλος, όταν $k \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2$$

□

Κεφάλαιο 2

Βέλτιστες προσεγγίσεις & το Θεώρημα του Weierstrass

2.1 Αυστηρά κυρτοί χώροι

Στόχος του προηγούμενου κεφαλαίου ήταν η θεμελίωση της θεωρίας προσέγγισης σε χώρους με νόρμα. Αφού δώσαμε τους απαραίτητους ορισμούς, εξετάσαμε και δώσαμε παραδείγματα χώρων *Banach*, *Hilbert* και εν τέλη περιορίσαμε την μελέτη μας σε χώρους πεπερασμένης διάστασης όπου η αναζήτηση της βέλτιστης προσέγγισης επιτυγχάνεται από επίσης πεπερασμένης διάστασης υπόχωρους αυτών. Αποδείξαμε την ύπαρξη τουλάχιστον μίας βέλτιστης προσέγγισης (Θεώρημα 1.4.5) και την μοναδικότητα αυτής (Θεώρημα 1.4.8), όταν προσεγγίζουμε στοιχεία ενός χώρου *Hilbert* από ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του. Πριν προχωρήσουμε στις ομοιόμορφες προσεγγίσεις, μένει να δούμε κάτω από ποιές συνθήκες ένας χώρος με νόρμα έχει μία, καμία ή άπειρες βέλτιστες προσεγγίσεις. Στην αναζήτηση αυτή θα συμβαλλει η ιδιότητα της αυστηρής κυρτότητας.

Θεώρημα 2.1.1: *Έστω X χώρος με νόρμα και ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του, Y. Αν $\mathcal{B}$ είναι το σύνολο των βέλτιστων προσεγγίσεων για κάποιο $x \in X$ από τον υπόχωρο Y, τότε το $\mathcal{B}$ είναι κυρτό και φραγμένο.*

Απόδειξη:

● Αν $\mathcal{B} = \emptyset$ τότε προφανώς ισχύει το ζητούμενο.

● Αν $\mathcal{B} \neq \emptyset$, τότε το σύνολο $\mathcal{B} = \left\{ y^* \in Y : \|x - y^*\| = \min_{y \in Y} \|x - y\| \right\}$ είναι υποσύνολο της συμπαγούς σφαίρας $\{ y \in Y : \|x - y\| = d(x, Y)\}$, όπου $d(x, Y) = \min_{y \in Y} \|x - y\|$. Άρα το $\mathcal{B}$ είναι φραγμένο.

Έστω $y_1, y_2 \in \mathcal{B}$ και $\lambda \in [0,1]$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $y^* = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \in \mathcal{B}$. Επειδή τα $y_1, y_2 \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι:

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \min_{y \in Y} \|x - y\|$$

Τότε

$$\|x - y^*\| = \|x - [\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2]\| = \|x - \lambda x + \lambda x - [\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2]\|$$

$$= \|\lambda(x - y_1) + (1-\lambda)(x - y_2)\|$$

$$\leq \lambda \|x - y_1\| + (1-\lambda)\|x - y_2\|$$

$$= \min_{y \in Y} \|x - y\|$$

Επομένως, $\|x - y^*\| = \min_{y \in Y} \|x - y\| \Longrightarrow y^* \in \mathcal{B}$ και $\mathcal{B}$ κυρτό. □

Παρατήρηση: Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση που το $\mathcal{B}$ περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε στην πραγματικότητα περιέχει ολόκληρο ευθύγραμμο τμήμα (δείξαμε οτι το $\mathcal{B}$ είναι κυρτό), δηλαδή άπειρα στοιχεία. Άρα η προσέγγιση από υπόχωρο επιτυγχάνεται είτε από ένα στοιχείο, είτε από άπειρα, είτε δεν επιτυγχάνεται καθόλου. Παρακάτω θα δούμε σε ποιούς χώρους εξασφαλίζεται η μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης.

Ορισμός 2.1.2: *Έστω Χ χώρος με νόρμα. Αν η μοναδιαία σφαίρα που ορίζεται στον Χ είναι αυστηρά κυρτή, τότε ο (Χ , $\|\cdot\|$) ονομάζεται αυστηρά κυρτός χώρος με νόρμα. Δηλαδή αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ ισχύει*:

$$\|x\| = \|y\| = 1 \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$$

Ισοδύναμα, λέμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αυστηρά κυρτή.

Παράδειγμα: Η μοναδιαία σφαίρα στον Χ = $\mathbb{R}^2$.

1) Αν εφοδιάσουμε τον Χ με την $\|\cdot\|_2$ τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in$ Χ με $x \neq y$ έχουμε: $\|x\|_2 = 1 = \|y\|_2$ και:

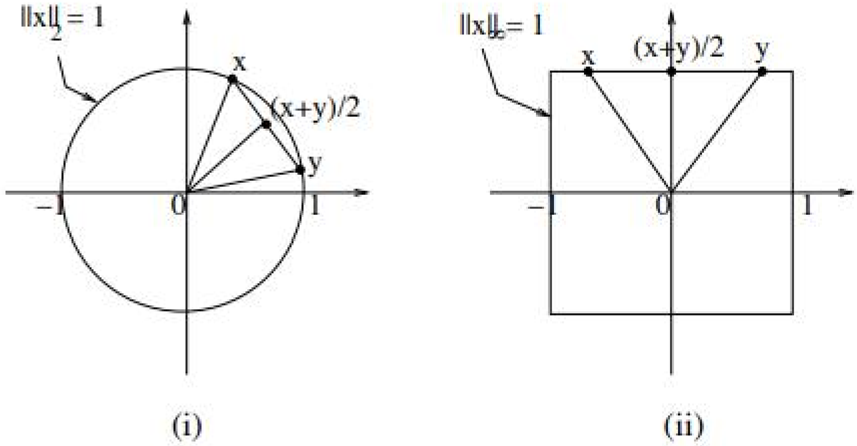
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 < 1$$

Άρα, ο χώρος (Χ ,$\|\cdot\|_2$) είναι αυστηρά κυρτός. (Σχήμα 2.1, (i))

2) Στην περίπτωση όμως που ο Χ είναι εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|_\infty$ τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in$ Χ με $x \neq y$ έχουμε: $\|x\|_\infty = 1 = \|y\|_\infty$ και:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\infty = 1$$

Δηλαδή, ο χώρος (X , $\|\cdot\|_\infty$) δεν είναι αυστηρά κυρτός. (Σχήμα 2.1, (ii))



Πηγή: Γ. Δ. Ακρίβης (1987).

Σχήμα 2.1

Το επόμενο Λήμμα θα μας βοηθήσει να συνδέσουμε την έννοια της αυστηρής κυρτότητας με την γραμμική εξάρτηση δύο στοιχείων ενός χώρου με νόρμα. Δίνεται χωρίς απόδειξη.

Λήμμα 2.1.3: *Έστω X χώρος με νόρμα. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*:

(i) Ο X είναι αυστηρά κυρτός χώρος.

(ii) Αν x,y ∈ X για τα οποία ισχύει: $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, *τότε τα x,y είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*

Ως συνέπεια αυτού προκύπτει ο ακόλουθος διαφορετικός ορισμός για τους αυστηρά κυρτούς χώρους.

Ορισμός 2.1.4: *Έστω X χώρος με νόρμα. Λέμε ότι ο X είναι αυστηρά κυρτός χώρος (ισοδύναμα η νόρμα είναι αυστηρά κυρτή) αν ισχύει η συνεπαγωγή:*

$$\forall\, x,y \in X:\ \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \implies x,\ y \text{ γραμμικώς εξαρτημένα.}$$

Ακολουθεί η διατύπωση και η απόδειξη του θεωρήματος που εξασφαλίζει την μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης σε αυστηρά κυρτούς χώρους.

Θεώρημα 2.1.5: *Έστω Y υπόχωρος ενός αυστηρά κυρτού χώρου με νόρμα X. Τότε για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει το πολύ μία βέλτιστη προσέγγιση του* x *από στοιχεία του Y. Δηλαδή, το σύνολο των βέλτιστων προσεγγίσεων* $\mathcal{B}$ *είτε είναι κενό είτε περιέχει μοναδικό στοιχείο.*

Απόδειξη:

● Αν $x \in$ Y τότε είναι προφανές ότι η μοναδική βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y είναι το ίδιο το x.

● Αν $x \notin$ Y τότε ας υποθέσουμε ότι $y_1, y_2 \in \mathcal{B}$, δηλαδή είναι βέλτιστες προσεγγίσεις του x. Άρα ισχύει:

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \min_{y \in Y} \|x - y\| = d(x, Y)$$

Τότε,

$$\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\| = \left\|\frac{x - y_1}{2} + \frac{x - y_2}{2}\right\| \le \frac{1}{2}(\|x - y_1\| + \|x - y_2\|) = d(x, Y) \Longrightarrow$$

$$\|(x - y_1) + (x - y_2)\| = 2d(x, Y) = \|x - y_1\| + \|x - y_2\|$$

Ο X είναι αυστηρά κυρτός, άρα από το Λήμμα 2.1.3 τα $x - y_1, x - y_2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Επομένως, υπάρχει λ ∈ ℝ ώστε:

$$x - y_1 = \lambda(x - y_2) \Longrightarrow (1 - \lambda)x = y_1 - \lambda y_2$$

Όμως, το $(y_1 - \lambda y_2) \in$ Y, άρα αναγκαστικά $\lambda = 1$ και $y_1 = y_2$ □

Παρατηρήσεις:

1) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι ο υπόχωρος από τον οποίο προσεγγίζουμε είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη προσέγγιση είναι μία ακριβώς.

2) Αν X = $C[a, b]$, τότε αποδεικνύεται ότι όλες οι l_p νόρμες για $p > 1$ είναι αυστηρά κυρτές και επομένως εξασφαλίζεται η μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης.

3) Αντιθέτως, στην περίπτωση που ο ίδιος χώρος είναι εφοδιασμένος με την l_1 ή l_∞ νόρμα, τότε **δεν** εξασφαλίζεται (τουλάχιστον κατ' αυτόν τον τρόπο) η μοναδικότητα. Αυτό συμβαίνει διότι οι παραπάνω νόρμες **δεν** είναι αυστηρά κυρτές. Θα δώσουμε σχετικά παραδείγματα στο τέλος της παραγράφου.

Αφού λοιπόν αποδείξαμε την ύπαρξη τουλάχιστον μίας βέλτιστης προσέγγισης σε αυστηρά κυρτούς χώρους και αναφέραμε την περίπτωση της ακριβώς μίας , μένει να αποδείξουμε το αντίστροφο. Δηλαδή, θα δείξουμε ότι αν ο γραμμικός χώρος που προσεγγίζουμε δεν είναι αυστηρά κυρτός, τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο (και συνεπώς άπειρες) βέλτιστες προσεγγίσεις.

Θεώρημα 2.1.6: *Έστω X χώρος με νόρμα, μη αυστηρά κυρτός. Τότε υπάρχει υπόχωρος Y του X ώστε για κάποιο $x \in X$ να υπάρχουν δύο βέλτιστες προσεγγίσεις του από στοιχεία του Y.*

Απόδειξη:

Ο X δεν είναι αυστηρά κυρτός, άρα έπεται ότι θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in$ X με $x_1 \neq x_2$ και

$$\|x_1\| = \|x_2\| = \left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| = 1$$

Έστω Y $:= span$ [3]$(x_1 - x_2) = \{\lambda\,(x_1 - x_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ορίζουμε: $y_1 := 0, y_2 := x_1 - x_2$ και $y_3 := \frac{x_1 - x_2}{2}$. Θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι τα y_1, y_2 είναι βέλτιστες προσεγγίσεις του $x := -\,x_2$ και επιπλέον:

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \|x - y_3\|$$

Αποδεικνύουμε πρώτα την τελευταία ισότητα:

$$\|x - y_1\| = \|-x_2\| = \|x_2\| = 1$$

$$\|x - y_2\| = \|-x_2 - (x_1 - x_2)\| = \|-x_1\| = \|x_1\| = 1$$

$$\|x - y_3\| = \left\|-\,x_2 - \frac{x_1 - x_2}{2}\right\| = \left\|-\frac{x_1+x_2}{2}\right\| = \left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| = 1$$

Για να αποδείξουμε ότι τα y_1, y_2 είναι βέλτιστες προσεγγίσεις:

Έστω ότι υπάρχει $y^* \in$ Y ώστε $\|x - y^*\| < \|x - y_3\|$. Επειδή $y^* \neq y_k\ \forall k$, τότε υπάρχει λ $\in (0,1)$ ώστε το y_3 να γράφεται στη μορφή: $y_3 = \lambda y_k + (1-\lambda) y^*$ δηλαδή ως κυρτός συνδυασμός των y_1 ή y_2 και του y^*. Επομένως :

[3] Αν S είναι ένα σύνολο διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου X, τότε Span(S) ορίζεται να είναι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος που περιέχει το S.

$$\|x - y_3\| = \|x - [\lambda y_k + (1-\lambda)y^*]\ \| = \|\lambda(x - y_k) + (1-\lambda)(x - y^*)\|$$
$$\leq \lambda\|x - y_k\| + (1-\lambda)\|x - y^*\|$$
$$< \lambda\|x - y_3\| + (1-\lambda)\|x - y_3\| = \|x - y_3\|$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, τα y_1, y_2 είναι βέλτιστες προσεγγίσεις του x. □

Παραδείγματα:

1) Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με οποιαδήποτε l_p νόρμα για $1 < p < \infty$ είναι επίσης αυστηρά κυρτός χώρος.

2) Ο χώρος $(C[a.b], \|\cdot\|_\infty)$ **δεν** είναι αυστηρά κυρτός. Για παράδειγμα, αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ και περιοριστούμε στο διάστημα [0,1] έχουμε:

$\|f(x)\|_\infty = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |x| = 1$, $\|g(x)\|_\infty = \max\limits_{0\leq x\leq 1} \left|x^2\right| = 1$ και

$\|f(x) + g(x)\|_\infty = \max\limits_{0\leq x\leq 1} \left|x + x^2\right| = 2$. Άρα, $\|f + g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Ωστόσο, (σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.4) για να είναι ο χώρος αυστηρά κυρτός θα πρέπει οι f, g να είναι γραμμικά εξαρτημένες. Δηλαδή, να υπάρχουν $c_1, c_2 \neq 0$ ώστε $c_1 x + c_2\, x^2 = 0$ $\forall x \in [0,1]$, πράγμα το οποίο δεν ισχύει.

3) Ο ίδιος χώρος εφοδιασμένος με την l_1 νόρμα. Αυτή τη φορά θα δείξουμε ότι ο χώρος **δεν** είναι αυστηρά κυρτός βασιζόμενοι στον Ορισμό 2.1.2. Έστω $f(x) = 2x$, $g(x) = 2(1-x)$. Τότε έχουμε: $f \neq g$ με $\|f\|_1 = \int_0^1 2x\, dx = 1 = \int_0^1 2\,(1-x)\, dx = \|g\|_1$ και $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_1 = 1$. Άρα ο χώρος δεν είναι αυστηρά κυρτός.

2.2 Ομοιόμορφες προσεγγίσεις συνεχών συναρτήσεων

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με την ομοιόμορφη βέλτιστη προσέγγιση συναρτήσεων $f \in C\,[a, b]$ από στοιχεία του υπόχωρου $\mathbb{P}_n$ (δηλαδή του χώρου των αλγεβρικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ *n*). Η προσέγγιση χαρακτηρίζεται “ομοιόμορφη” καθώς η σύγκλιση ως προς τη νόρμα l_∞ (ή νόρμα *Chebyshev*) που θα χρησιμοποιείται είναι ισοδύναμη με την ομοιόμορφη σύγκλιση στο διάστημα $[a,b]$. Θα εργαστούμε λοιπόν στον χώρο $(C\ [a,b], \|\cdot\|_\infty)$, όπου για δοθείσα συνεχή συνάρτηση f θα αναζήτησουμε πολυώνυμο $p_n{}^* \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε:

$$\|f - p_n{}^*\|_\infty = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty$$

Η ύπαρξη τουλάχιστον ενός τέτοιου πολυωνύμου εξασφαλίζεται από το Θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας προσεγγίσεων (Θεώρημα 1.4.5 & Πόρισμα 1.4.6). Ωστόσο, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε το ίδιο ως προς την εξασφάλιση της μοναδικότητας, αφού η νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι αυστηρά κυρτή. Για λόγους απλότητας, από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε:

$$E_n(f[a,b]) = \|f - p_n{}^*\|_\infty = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty$$

ή απλά $E_n(f)$ όταν το διάστημα στο οποίο αναφερόμαστε είναι προφανές.

Ουσιαστικά, η παραπάνω ποσότητα αντιπροσωπεύει το σφάλμα της βέλτιστης προσέγγισης στην $\|\cdot\|_\infty$. Επειδή $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_{n+1} \forall n$, τότε ισχύει $E_n(f) \geq E_{n+1}(f)\ \forall n$. Διότι, για να έχει νόημα η πολυωνυμική προσέγγιση, πρέπει το σφάλμα να φθίνει όσο αυξάνει ο βαθμός του πολυωνύμου. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[a,b]$ ισχύει $E_n(f[a,b]) \longrightarrow 0$ καθώς $n \longrightarrow \infty$. Αυτό αποδεικνύεται με το πρώτο θεώρημα προσέγγισης του *Weierstrass*.

Θεώρημα 2.2.1 (*Θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass, 1885*): *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a,b]$ με $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολύωνυμο p τέτοιο ώστε*:

$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n ώστε:

$$\|f - p_n\|_\infty \longrightarrow 0$$

όπου

$$\|f\|_\infty = sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

Η διατύπωση αυτή μας οδηγεί στον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Ορισμός 2.2.2: *Έστω ακολουθία συναρτήσεων* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *και μία συνάρτηση* f *ορισμένες στο διάστημα* $[a,b]$. *Λέμε ότι η* (f_n) *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f *στο* $[a,b]$ *αν*:

$$\|f_n - f\,\|_\infty = sup_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Συμβολίζουμε: $f_n \rightrightarrows f$ *στο* $[a,b]$.

Ο λόγος που στο Θεώρημα του Weierstrass περιοριζόμαστε σε συνεχείς συναρτήσεις είναι ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση μίας ακολουθίας συναρτήσεων εξασφαλίζει την συνέχεια στο όριο τους.

Θεώρημα 2.2.3: *Έστω ακολουθία συναρτήσεων* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *και μία συνάρτηση* f *ορισμένες σε ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο X. Αν οι* f_n *είναι συνεχείς και συγκλίνουν ομοιόμορφα στην* f *στο X, τότε και η* f *είναι συνεχής στο X.*

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x, y \in$ X. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή:

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (1)$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(y)) + (f_n(y) - f(y))| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f(y) - f_n(y)| \quad (2) \end{aligned}$$

Επειδή οι f_n συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f, τότε υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\left\|f_{n_0} - f\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

Άρα ισχύουν:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και} \quad |f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0$$

Επιπλέον, η f_{n_0} είναι συνεχής στο x και άρα για το ίδιο n_0 υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Επομένως, η σχέση (2) είναι μικρότερη από $\frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon$, δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή (1)

και άρα η f είναι συνεχής. □

Παρατήρηση: Η υπόθεση ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι κλειστό και φραγμένο είναι απαραίτητη. Διότι, υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους (το οποίο δεν είναι κλειστό και φραγμένο), για τις οποίες δεν υπάρχει πολυώνυμο που να μπορεί να τις προσεγγίσει ομοιόμορφα σε αυτό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά για κάθε πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}_n$ ισχύει:

$$\|f(x) - p(x)\|_\infty \longrightarrow \infty \quad \text{όταν } n \longrightarrow \infty$$

αφού η εκθετική συνάρτηση αυξάνει γρηγορότερα από οποιαδήποτε πολυωνυμική.

Τέλος, δίνουμε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας που θα μας χρειαστεί στην απόδειξη του θεωρήματος 2.2.1.

Ορισμός 2.2.4: *Έστω μια συνάρτηση* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *. Η* f *ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής στο X αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *ώστε*:

$$\text{αν } x, y \in X \text{ με } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Επανερχόμαστε στο θεώρημα του Weierstrass. Γνωρίζουμε ότι για το θεώρημα αυτό υπάρχουν πολλές αποδείξεις (κάποια βιβλία κάνουν λόγο για εκατοντάδες (!)), ωστόσο από τις πιο γνωστές είναι εκείνες των Lebesgue (1898), Landau (1908) και Bernstein (1912). Θα δώσουμε τις δύο τελευταίες. Κοινός παρονομαστής όλων των αποδείξεων είναι ο ισχυρισμός πως αν το θεώρημα ισχύει στον $C\,[a,b]$ τότε ισχύει και στον $C\,[0,1]$ και αντιστρόφως. Πράγματι, υπάρχει γραμμικός και 1-1 μετασχηματισμός του $[a,b]$ στο $[0,1]$. Υποθέτουμε την συνάρτηση $s = (b-a)x + a$ *με* $a \le s \le b$. Τότε το x παίρνει τιμές μεταξύ του 0 και του 1. Άρα αν η $h(s) = h(\,(b-a)x + a)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η $f := h(s)$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για συναρτήσεις ορισμένες στο $[0,1]$.

Η απόδειξη του Landau (1908):

Έστω μία συνάρτηση $f \in C\,[0,1]$. Θέλουμε να την προσεγγίσουμε από κάποιο πολυώνυμο p. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος, δηλαδή ισχύει $f(0) = f(1) = 0$. Αυτό επιτυγχάνεται απλά αφαιρώντας κάποιο πρωτοβάθμιο πολυώνυμο από την f. Ειδικότερα, αν f είναι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση στο [0,1] τότε:

$$f^*(x) = f(x) - h(x) \quad \text{όπου} \quad h(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$$

Άρα η f^* είναι μία συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος και επιπλέον, αν προσεγγίζεται από καποιο πολυώνυμο p έτσι ώστε:

$$\|f^* - p\|_\infty \leq \varepsilon$$

τότε και η f θα προσεγγίζεται από το πολυώνυμο $w(x) = p(x) + h(x)$ αφού:

$$\|f(x) - w(x)\|_\infty = \|(f^*(x) + h(x)) - (p(x) + h(x))\|_\infty \leq \varepsilon$$

Ακόμη, θα επεκτείνουμε την συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με μηδενικές τιμές. Δηλαδή, η f θα μηδενίζεται παντού έξω από το [0,1] και επιπλέον στα άκρα του διαστήματος. Ορίζουμε τώρα την ακολουθία συναρτήσεων που περιέχεται στα πολυώνυμα προσέγγισης του Landau.

Ορισμός 2.2.5: *Μία ακολουθία συναρτήσεων* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ονομάζεται προσέγγιση της μονάδας, αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες*:

(i) Η $K_n(x)$ *είναι κατά τμήματα συνεχής (δεδομένου ότι είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα).*

(ii) $K_n(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)\, dt = 1$

(iv) Για κάθε $\delta > 0$ ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{|t|>\delta} K_n(t)\, dt = 0$

Παρατήρηση: Η τελευταία ιδιότητα μας λέει ότι το όριο του ολοκληρώματος $\int_{|t|>\delta} K_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{-\delta} K_n(t)\, dt + \int_{\delta}^{+\infty} K_n(t)\, dt \to 0$, όταν $n \to \infty$. Δηλαδή, τα ολοκληρώματα των K_n τείνουν στο μηδέν παντού έξω από το διάστημα $(-\delta, \delta)$. Η μη μεταβολή των ολοκληρωμάτων των K_n για τις διάφορες τιμές του *n* έχουν ως αποτέλεσμα τη συσσώρευση της “μάζας” των K_n ολοένα και κοντύτερα στο μηδέν, καθώς το *n* αυξάνει .

Προχωράμε τώρα στον ορισμό των πολυωνύμων προσέγγισης. Έχοντας υποθέσει ότι η f μηδενίζεται εκτός του διαστήματος [0,1] ορίζουμε:

$$L_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\ K_n(t)\ dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\ K_n(t)\, dt \quad (1)$$

όπου

$$K_n(t) = \begin{cases} c_n(1-t^2)^n, & |t| \le 1 \\ 0 & , |t| > 1 \end{cases}$$

Η σταθερά c_n επιλέγεται κατάλληλα ώστε για κάθε n να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)\ dt = 1$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = x + t$ στην (1) έχουμε:

$$\int_0^1 f(y)\,(1-(y-x)^2)^n dy$$

όπου βλέπουμε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ η συνάρτηση $(1-(y-x^2)^n$ είναι πολυώνυμο του x με συντελεστές που εξαρτώνται από το y. Άρα τα $L_n(x)$ είναι πολυώνυμα του x.

Συνεχίζουμε με το θεώρημα, του οποίου η εφαρμογή ολοκληρώνει την απόδειξη της ομοιόμορφης προσέγγισης μιας συνάρτησης $f \in C[0,1]$ από τα πολυώνυμα $L_n(x)$.

Θεώρημα 2.2.6: *Έστω μια συνεχής και φραγμένη συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\ K_n(t)\ dt \xrightarrow{\kappa.\sigma} f(x)$$

Αν επιπλέον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε το ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη:

Από τον Ορισμό 2.2.5 (ιδιότητα (*iii*)) έχουμε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)\ dt$ =1. Άρα μπορούμε να γράψουμε την f στη μορφή:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ K_n(t)\ dt$$

Τότε,

$$|f(x) - L_n(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ K_n(t)\, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\, K_n(t)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+t) - f(x))\ K_n(t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\, K_n(t)\, dt$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|\, K_n(t)\, dt + \int_{|t|>\delta} |f(x+t) - f(x)|\, K_n(t)\, dt = I_1 + I_2$$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι για μεγάλο *n* τα ολοκληρώματα συγκλίνουν.

● Για το I_1:

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την συνέχεια της συνάρτησης έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon/2\ ,\ \forall\ |t| \leq \delta$$

Αν η f είναι απλά συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε το δ που επιλέξαμε εξαρτάται και από το ε και από το x. Αν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε εξαρτάται μόνο από το ε. Έπεται ότι:

$$I_1 \leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2}\, K_n(t)\, dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)\ dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

● Για το I_2:

Από την υπόθεση ότι η f είναι φραγμένη και την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$|f(x+t) - f(x)| \leq |f(x+t)| + |f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$$

Άπό την ιδιότητα *(iv)* του Ορισμού 2.2.5:

$$I_2 \leq \int_{|t|>\delta} 2\|f\|_\infty\, K_n(t)\, dt = 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\delta} K_n(t)\ dt \longrightarrow 0$$

Επομένως, για μεγάλο *n* έχουμε $I_2 < \varepsilon/2$. Δηλαδή:

$$I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Αν επιπλέον έχουμε την υπόθεση ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής (το οποίο ισχύει, αφού η f είναι συνεχής σε συμπαγές σύνολο), τότε το δ που επιλέξαμε για να φράξουμε το I_1 θα εξαρτάται μόνο από το ε. Άρα η σύγκλιση θα είναι ομοιόμορφη.

□

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του Landau.

Η απόδειξη του Bernstein (1912)

Το ενδιαφέρον της απόδειξης αυτής, η οποία οφείλεται στον Ρώσο Μαθηματικό *S. N. Bernstein* είναι η σύνδεση της ζητούμενης πολυωνυμικής προσέγγισης με την Θεωρία Πιθανοτήτων. Επιπλέον, απόρροια της απόδειξης αυτής αποτελεί το γενικό και ισχυρό θεώρημα των *Bohman-Korovkin*. Η απόδειξη θα περιοριστεί (όπως και πριν) στον $C[0,1]$.

Δοθείσης μίας φραγμένης συνάρτησης f στο $[0,1]$, ορίζουμε τα πολυώνυμα *Bernstein* της f, ως την ακολουθία πολυωνύμων που δίνεται από τον τύπο:

$$B_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

με $0 \leq x \leq 1$. Παρατηρούμε ότι τα πολυώνυμα $B_n(f)$ είναι βαθμού το πολύ n και επιπλέον ότι $B_n(f)(0) = f(0)$, $B_n(f)(1) = f(1)$. Γενικότερα, η ακολουθία πολυωνύμων $B_n(f)$ εκφράζει την μέση τιμή των αριθμών $f\left(\frac{k}{n}\right)$, $\forall k = 0,1,\dots,n$ διότι: Αν $B_{x,n}$, $x \in [0,1]$ μία διακριτή τυχαία μεταβλητή ενός πειράματος τύχης (π.χ ρίψη νομίσματος) η οποία μετράει τον αριθμό των επιθυμητών αποτελεσμάτων (Κορώνα ή Γράμματα), τότε η τ.μ ακολουθεί την διωνυμική κατανομή. Βρίσκοντας από την ανισότητα του Chebyshev ένα άνω φράγμα της πιθανότητας απόκλισης της τ.μ από την μέση τιμή της, τότε προκύπτει η παρακάτω σχέση μεταξύ των $B_n(f)$, της τ.μ $B_{x,n}$ και της συνάρτησης f:

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E}[f(B_{x,n}/n)]$$

Επιπλέον, λόγω της συνέχειας της f αναμένουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση: $B_n(f)(x) \rightrightarrows f(x)$.

Συνεπώς, στόχος μας είναι να δείξουμε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,1]$ και για κάποιο $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\left\|f - B_{n_0}(f)\right\|_\infty < \varepsilon$$

Αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για τις εξής απλές περιπτώσεις:

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ \ f_2(x) = x^2.$$

Για την απόδειξη του θα χρειαστούμε αρχικά το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.2.7: *Για την ακολουθία πολυωνύμων του Bernstein ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $B_n(f_0) = f_0$ *και* $B_n(f_1) = f_1$.

(ii) $B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1$ *και επομένως* $\|f_2 - B_n(f_2)\|_\infty \longrightarrow 0$.

(iii) $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x\,(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$ *για κάθε* $x \in [0,1]$.

(iv) Αν F είναι το σύνολο των $k \in \{0,1,\dots,n\}$ *για τα οποία ισχύει* $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$ *για κάποιο* $\delta > 0$ *και* $x \in [0,1]$ *τότε ισχύει*:

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

Απόδειξη:

(i) Από τον τύπο του διωνύμου έχουμε:

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1 = f_0(x)$$

Για το $B_n(f_1)$ και για $k \geq 1$:

$$\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \frac{k}{n}\ \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

Επομένως,

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

για $j = k - 1$:

$$= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = x \cdot 1 = x = f_1(x)$$

(ii) Για το $B_n(f_2)$, αρχικά υπολογίζουμε:

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} = \frac{k-1+1}{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= \frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \dfrac{k-1}{n-1} \dbinom{n-1}{k-1} + \dfrac{1}{n} \dbinom{n-1}{k-1}, \alpha\nu\ k \geq 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \dbinom{n-2}{k-2} + \dfrac{1}{n} \dbinom{n-1}{k-1} \qquad , \alpha\nu\ k \geq 2 \end{cases}$$

Επομένως,

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2(x) + \frac{1}{n} f_1(x)$$

Άρα, έχουμε:

$$\|f_2 - B_n(f_2)\|_\infty = \left\| f_2 - \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1 \right] \right\|_\infty = \frac{1}{n} \|f_1 - f_2\|_\infty \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

(iii) Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\left(\frac{k}{n}-x\right)^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2-2x\cdot\frac{k}{n}+x^2$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$+x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Χρησιμοποιώντας τα (i), (ii)

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x-2x\cdot x+x^2$$

$$=\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n}\quad\forall x\in[0,1].$$

(iv) Έχουμε υποθέσει ότι $\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta$, τότε $\left(\frac{k}{n}-x\Big/\delta\right)^2\geq 1\;\;\forall\,k\in F$

και επιπλέον,

$$\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{1}{\delta^2}\sum_{k\in F}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leq\frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

από το (iii) έχουμε τελικά

$$\leq\frac{1}{4n\delta^2}$$

□

***Απόδειξη του Θεωρήματος Weierstrass*:**

Έστω $f \in C[0,1]$ και ένα $\varepsilon > 0$. Το διάστημα $[0,1]$ είναι κλειστό και φραγμένο, άρα συμπαγές. Επειδή η f είναι συνεχής σε συμπαγές σύνολο έπεται ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$. Δηλαδή, υπάρχει ένα $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή:

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ και έχουν άθροισμα ίσο με 1. Χρησιμοποιώντας τώρα το προηγούμενο λήμμα θα εκτιμήσουμε την ποσότητα:

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

Συμβολίζοντας με F το σύνολο των $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ για τα οποία ισχύει $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$, για κάποιο $\delta > 0$ και $x \in [0,1]$ τότε έχουμε:

- Αν $k \in F$, από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει:

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq 2\|f\|_\infty$$

- Αν $k \notin F$, τότε:

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \Longrightarrow \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Άρα, συνολικά:

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \sum_{k\in F}^{n} \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k\notin F}^{n} \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{4n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

η οποία ισχύει $\forall\ n > \|f\|_\infty / \varepsilon\delta^2$ □

Ολοκληρώθηκε η απόδειξη του θεωρήματος του *Weierstrass* δίνοντας τις αποδείξεις των *Landau* και *Bernstein*. Η προσέγγιση του *Bernstein* στην παραπάνω απόδειξη δίνει μία ακόμη πληροφορία. Η απεικόνιση $f \mapsto B_n(f)$ είναι γραμμική και θετική. Με άλλα λόγια, για κάθε $f, g \in C[a,b]$ και $a \in \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

(i) $B_n(f+g) = B_n(f) + B_n(g)$

(ii) $B_n(a \cdot f) = a \cdot B_n(f)$

(iii) $B_n(f) \geq 0$ *,όταν* $f \geq 0$

Απορρέει λοιπόν το γενικότερο συμπέρασμα ότι οποιαδήποτε θετική και γραμμική απεικόνιση από και προς ένα χώρο συνεχών συναρτήσεων είναι αυτομάτως συνεχής. Το αποδεικνύουμε στο παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 2.2.8: *Αν S* : $C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ *είναι μία θετική και γραμμική απεικόνιση, τότε η S είναι συνεχής.*

Απόδειξη:

Επειδή η *S* είναι θετική και γραμμική, συνεπάγεται ότι είναι μονότονη. Δηλαδή, για κάθε $f, g \in C[a,b]$ ισχύει:

$$S(f) \leq S(g)\text{ , όταν } f \leq g$$

Επιπλέον, $\forall f \in C[a,b]$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$-f\,, f \leq |f| \Rightarrow -S(f)\,, S(f) \leq S(|f|)$$

άρα και η ανισότητα $|S(f)| \leq S(|f|)$. Όμως, $|f| \leq \|f\| = \|f\| \cdot \mathbf{1}$, όπου **1** είναι η σταθερή συνάρτηση, άρα έπεται ότι:

$$|S(f)| \leq S(|f|) \leq \|f\| \cdot S(\mathbf{1})$$

Συνεπώς,

$$\|S(f)\| \leq \|f\| \cdot \|S(\mathbf{1})\|, \forall f \in C[a,b]$$

Άρα, δεδομένου ότι η *S* είναι γραμμική έχουμε:

$$\|S(f) - S(g)\| = \|S(f-g)\| \leq \|S(\mathbf{1})\| \; \|f-g\|$$

που σημαίνει ότι η *S* είναι *Lipschitz* συνεχής, και άρα συνεχής. □

Επειδή οι θετικές, γραμμικές (και άρα συνεχείς) απεικονίσεις είναι εύκολο να βρεθούν, μπορούμε πλέον να προσεγγίζουμε ευκολότερα συναρτήσεις του χώρου $C[a,b]$. Η απόδειξη του θεωρήματος του *Weierstrass* από τον *Bernstein* ήταν η αφορμή για το πιο γενικό θεώρημα των *Bohman-Korovkin,* το οποίο αποδείχθηκε περίπου στα μέσα του 19ου αιώνα. Παρατίθεται χωρίς αποδειξη, καθώς είναι παρόμοια ("κατασκευαστική") με εκείνη του *Bernstein* για το θεώρημα 2.2.1.

Θεώρημα 2.2.9 (*Bohman-Korovkin, 1952)*: *Έστω μία ακολουθία θετικών και γραμμικών απεικονίσεων* $S_n : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ *τέτοιες ώστε* $S_n(f) \longrightarrow f$ *ομοιόμορφα για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις*:

$$f_0(x) = 1, \; f_1(x) = x, \; f_2(x) = x^2$$

Τότε, η S_n *συγκλίνει ομοιόμορφα στην f για κάθε* $f \in C[a,b]$.

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι το παραπάνω θεώρημα μπορεί να συμβάλλει στην προσέγγιση συνεχών συναρτήσεων και από άλλου είδους πολυώνυμα πέραν των αλγεβρικών, αρκεί να γίνουν οι κατάλληλες προσαρμογές. Ένα παράδειγμα είναι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα, με τα οποία μπορούμε να προσεγγίσουμε περιοδικές συναρτήσεις του χώρου $C(\mathbb{R})$.

Γενικότερα, το θεώρημα των Bohman-Korovkin καθώς και η απόδειξη του Bernstein, μας δίνουν έναν σχετικά εύκολο τρόπο προσέγγισης μιας συνάρτησης $f \in C\,[a,b]$ κατασκευάζοντας τις αντίστοιχες ακολουθίες πολυωνύμων. Αυτό που δεν γνωρίζουμε, είναι το πόσο "καλές" είναι αυτές οι προσεγγίσεις. Εξασφαλίζεται δηλαδή η ύπαρξη προσέγγισης, ωστόσο σε καμία από τις δύο περιπτώσεις αυτή δεν είναι βέλτιστη. Για παράδειγμα:

Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f_1(x) = x, \; f_2(x) = x^2$, τότε κανείς θα περίμενε ότι η βέλτιστη προσέγγιση της f_2 στον $\mathbb{P}_2$ για κάθε $n \geq 2$ θα είναι η ίδια η συνάρτηση. Όμως:

$$B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1 \neq f_2$$

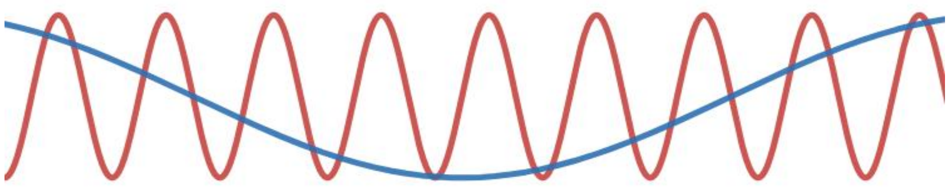
παρ' όλο που $\forall x \in [0,1]$ ισχύει: $\|f - B_n(f)\|_\infty \longrightarrow 0$ καθώς $n \longrightarrow \infty$. Επιπλέον, είχαμε συμβολίσει $E_n(f) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty$, άρα θα ισχύει: $E_n(f) \leq \|f - B_n(f)\|_\infty$.

Η διαπίστωση αυτή μας οδηγεί στην ανάγκη εκτίμησης του σφάλματος των πολυωνύμων Bernstein καθώς και στην εύρεση ενός άνω φράγματος αυτού.

2.3 Μέτρο συνέχειας και εκτίμηση σφάλματος

Οι συναρτήσεις που προσεγγίζονται στο πρόβλημα προσέγγισης έχουν ένα κοινό, είναι όλες συνεχείς σε κάποιο σύνολο. Μέχρι τώρα γνωρίζαμε ότι μία συνάρτηση είτε είναι συνεχής, είτε όχι. Δηλαδή, η δήλωση περί της ιδιότητας της συνέχειας ήταν ποιοτική και όχι ποσοτική. Σε αυτήν την παράγραφο θα πραγματευτούμε την "ποσοστικοποίηση" της συνέχειας μίας συνάρτησης. Η έννοια που θα μας βοηθήσει να αποφανθούμε πότε μία συνάρτηση είναι περισσότερο ή λιγότερο συνεχής από μία άλλη, είναι το *μέτρο συνέχειάς* της. Θα λέμε ότι, μεταξύ δύο συνεχών συναρτήσεων, "πιο συνεχής" είναι εκείνη της οποίας οι τιμές μεταβάλλονται πιο αργά όταν η μεταβλητή της αλλάζει το πολύ κατά δ.

Παράδειγμα: Στο σχήμα 2.2 η μπλε συνάρτηση $\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ είναι "πιο συνεχής" από την κόκκινη συνάρτηση $[\sin(5x)]$.



Σχήμα 2.2

Ορισμός 2.3.1: *Έστω μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση f, ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε ως μέτρο συνέχειας της f στο $[a,b]$ την συνάρτηση*:

$$w_f(\delta) = w_f([a,b];\delta) := sup_{x,y\in[a,b]}\{\, |f(x) - f(y)| : |x-y| \leq \delta \,\}$$

Υπό το πρίσμα της ομοιόμορφης συνέχειας μπορούμε να πούμε ότι το $\varepsilon > 0$ που επιλέγεται κάθε φορά και καθορίζει την αντίστοιχη τιμή του δ ,είναι μία εκτίμηση του μέτρου συνέχειας. Δηλαδή, $\varepsilon = w_f(\delta)$.

Παρατήρηση: Αν για παράδειγμα το γράφημα μίας συνάρτησης παρουσιάζει ένα άλμα ασυνέχειας ίσο με 2 τότε $w_f(\delta) \geq 2$.

Στο ακόλουθο Λήμμα παραθέτουμε μερικές βασικές ιδιότητες του μέτρου συνέχειας. Θα αποδείξουμε μόνο την τελευταία.

Λήμμα 2.3.2: *Για το μέτρο συνέχειας $w_f(\delta)$ ισχύουν οι ιδιότητες*:

(i) Αν $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \Longrightarrow w_f(\delta_1) \leq w_f(\delta_2)$.

(ii) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν $w_f(\delta) \longrightarrow 0$ *καθώς* $\delta \longrightarrow 0^+$.

(iii) Αν f είναι μία φραγμένη συνάρτηση στο $[a,b]$, τότε για κάποιο $\delta > 0$ ισχύει:

$$w_f(n\cdot\delta) \leq n\cdot w_f(\delta),\ \forall n$$

Ως συνέπεια αυτού, για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει:

$$w_f(\lambda\cdot\delta) \leq (1+\lambda)\, w_f(\delta)$$

Απόδειξη του (iii):

Έστω $x,y \in [a,b]$ με $x < y$ και $|x-y| \leq n\delta$. Διαμερίζοντας το διάστημα $[x,y]$ σε n υποδιαστήματα μήκους το πολύ δ και ειδικότερα, αν:

$t_k = x + k\,(y-x)/\,n$ για κάθε $k \in [0,n]$ ώστε για κάθε $k \geq 1$ να ισχύει

$$|t_k - t_{k-1}| \leq \delta$$

Τότε,

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)-f(t_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)-f(t_{k-1})| \leq \; n \cdot w_f(\delta)$$

και άρα $w_f(n \cdot \delta) \leq \; n \cdot w_f(\delta)$.

Αν επιπλέον σταθεροποιήσουμε ένα $\lambda > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n-1 < \lambda \leq n$ τέτοιο ώστε:

$$w_f(\lambda \cdot \delta) \leq w_f(n \cdot \delta) \leq \; n \cdot w_f(\delta) \leq \; (1+\lambda)\, w_f(\delta) \qquad \square$$

Το μέτρο συνέχειας παίζει σημαντικό ρόλο στην εύρεση ενός άνω φράγματος για την ποσότητα $E_n(f)$ και ειδικότερα για το σφάλμα προσέγγισης των πολυωνύμων Bernstein. Συγκεκριμένα, όσο ταχύτερα συγκλίνει η συνάρτηση $w_f(\delta)$ στο μηδέν καθώς το δ τείνει στο 0, τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα της πολυωνυμικής προσέγγισης. Θα δώσουμε ξανά την απόδειξη του Bernstein χρησιμοποιώντας το μέτρο συνέχειας και κάνοντας τις απαραίτητες προσαρμογές.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα περιοριστούμε και πάλι στο διάστημα $[0,1]$ προς απλούστευση των υπολογισμών.

Θεώρημα 2.3.3: *Έστω f μία φραγμένη συνάρτηση στο* $[0,1]$ *και $B_n(\,f)$ το n-οστό πολυώνυμο Bernstein της f. Τότε ισχύει*:

$$\|f-B_n(\,f)\|_\infty \leq \frac{3}{2}\, w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Αν επιπλέον η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ *τότε* $E_n(f) \leq \frac{3}{2}\, w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 0$, *όταν* $n \longrightarrow \infty$.

Απόδειξη:

Ξεκινάμε με τον ίδιο τρόπο, προσπαθώντας να φράξουμε την ποσότητα:

$$|f(x)-B_n(\,f(x))| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\left|\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} w_f\left(\left| x - \frac{k}{n} \right| \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε:

$$w_f\left(\left| x - \frac{k}{n} \right| \right) = w_f\left(\sqrt{n} \cdot \left| x - \frac{k}{n} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq (1+\lambda) \cdot w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

όπου $\lambda = \sqrt{n} \cdot \left| x - \frac{k}{n} \right|$ και $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Επομένως,

$$|f(x) - B_n(f(x))| \leq w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sum_{k=0}^{n} (1+\lambda) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)$$

$$= w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)$$

Το μόνο που απομένει είναι να υπολογίσουμε το άθροισμα:

$$\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Ενθυμούμενοι ότι οι όροι $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ είναι μη αρνητικοί και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]^{1/2} \cdot \left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\frac{1}{4n}\right)^2 = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Τελικά,

$$|f(x) - B_n(f(x))| \leq w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{3}{2} w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

● Στην περίπτωση που η f είναι **και** συνεχής στο $[0,1]$ (δηλαδή συνεχής σε κλειστό, φραγμένο και άρα συμπαγές σύνολο), τότε συνεπάγεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα, από το Λήμμα 2.3.2 έπεται ότι $w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 0$ όταν $n \longrightarrow \infty$, και επομένως $E_n(f) \longrightarrow 0$. □

Μία καλύτερη εκτίμηση του σφάλματος προσέγγισης $E_n(f)$ σε σχέση με το προηγούμενο αποτέλεσμα βρέθηκε από τον Αμερικανό μαθηματικό *Dunham Jackson* (1911-1912), ο οποίος κατάφερε να βελτιώσει το αντίστοιχο άνω φράγμα.

Θεώρημα 2.3.4 (*Jackson*): *Έστω f μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$. Τότε ισχύει:*

$$E_n(f) \leq C \cdot w_f\left(\frac{1}{n}\right)$$

όπου C μια απόλυτη σταθερά.

Το παραπάνω θεώρημα αναφέρεται συχνά και ως *"ανισότητα του Jackson",* μία εφαρμογή της οποίας βρίσκεται στην αναζήτηση βέλτιστης ομοιόμορφης προσέγγισης συνεχών, περιοδικών συναρτήσεων από τριγωνομετρικά πολυώνυμα βαθμού το πολύ n.

2.4 Χαρακτηρισμός βέλτιστων ομοιόμορφων προσεγγίσεων

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$ και $p_n{}^*$ μία βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγισή της από τον χώρο $\mathbb{P}_n$. Ορίζουμε την συνάρτηση σφάλματος:

$$e(x) := f(x) - p_n{}^*(x)$$

για την οποία ισχύει:

$$\|e(x)\|_\infty = \|f(x) - p_n{}^*(x)\|_\infty = E_n(f)$$

Ζητούμενο είναι η αναζήτηση των ιδιοτήτων του πολυωνύμου οι οποίες συμβάλλουν στην εξασφάλιση της μοναδικότητας του. Αυτή την φορά, η μοναδικότητα δεν επέρχεται από κάποιο γενικό επιχείρημα όπως η πεπερασμένη διάσταση ή η αυστηρή κυρτότητα της νόρμας (ή του χώρου με νόρμα).

Θεώρημα 2.4.1: *Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$ και $p_n{}^*$ μία βέλτιστη προσέγγισή της, τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία $x_1, x_2 \in [a,b]$ με*

$x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε:

$$|e(x_1)| = |e(x_2)| = E_n(f)$$

και επιπλέον

$$e(x_1) = -e(x_2)$$

Απόδειξη:

Η συνάρτηση $y = e(x)$ είναι μία συνεχής καμπύλη η οποία βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $y = \pm\|e(x)\|_\infty = \pm E_n(f)$ και η γραφική της παράσταση θα πρέπει να εφάπτεται σε μία τουλάχιστον από αυτές. Ειδικότερα, θα αποδείξουμε ότι εφάπτεται και στις δύο. Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι η $y = e(x)$ δεν εφάπτεται στην $E_n(f)$ και μετατοπιστεί προς τα πάνω, τότε θα βρεθεί καλύτερη προσέγγιση της από το $p_n{}^*$ το οποίο είναι άτοπο (αντίστοιχα, αν η $y = e(x)$ δεν εφάπτεται στην $-E_n(f)$ και μετατοπιστεί προς τα κάτω). Ας υποθέσουμε (για άτοπο) ότι εφάπτεται μόνο στην $y = E_n(f)$. Τότε υπάρχει $x_1 \in [a,b]$ ώστε:

$$e(x_1) = E_n(f) \text{ με } e(x) > -E_n(f)\ \forall x \in [a,b].$$

Ορίζουμε διαδοχικά

$$m := \min_{a\le x\le b} e(x) > -E_n(f) \text{ και } q_n := p_n{}^* + c$$

όπου $c = \frac{E_n(f)+m}{2} > 0$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το $q_n \in \mathbb{P}_n$ είναι βέλτιστη προσέγγιση της f . Τότε:

$$f(x) - q_n(x) = e(x) - c$$

Άρα έχουμε:

$$- (E_n(f) - c) = m - \frac{E_n(f) + m}{2} = m - c \leq e(x) - c \leq \ E_n(f) - c$$

Επομένως,

$$- (E_n(f) - c) \leq \ f(x) - q_n(x) \leq \ E_n(f) - c$$

Δηλαδή,

$$\|f(x) - \ \ q_n(x)\|_\infty \leq \ E_n(f) - c \leq \ E_n(f)$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι το $p_n{}^*$ είναι βέλτιστη προσέγγιση της f. Άρα, άτοπο. □

Στον επόμενο ορισμό θα εισαγάγουμε τις έννοιες του θετικού - αρνητικού σημείου και διαστήματος μιας συνάρτησης, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του θεωρήματος χαρακτηρισμού του πολυωνύμου βέλτιστης ομοιόμορφης προσέγγισης.

Ορισμός 2.4.2: *Έστω $h \in C[a, b]$. Τότε* :

(i) Ένα σημείο $x_0 \in [a, b]$ λέμε ότι είναι σημείο $(+)$ της συνάρτησης h (αντίστοιχα σημείο $(-)$ της h) αν:

$$h(x_0) = \| \ h \ \|_\infty \textit{ (αντίστοιχα, αν } h(x_0) = - \ \| \ h \ \|_\infty \textit{)}$$

(ii) Ένα σύνολο σημείων $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ του $[a, b]$ ονομάζεται εναλλασσόμενο για την h αν τα πρόσημα των $h(x_i)$ εναλλάσσονται. Δηλαδή, αν:

$$h(x_i) \cdot \ h(x_{i+1}) < 0, \ \forall i = 0,1, \ldots, n - 1$$

(iii) Ένα διάστημα $[x_i\, , x_{i+1}]$ θα λέγεται διάστημα $(+)$ αν περιέχει ένα σημείο $(+)$ και διάστημα $(-)$ αν περιέχει ένα σημείο $(-)$. Τέλος, ένα διάστημα που δεν περιέχει κάποιο από τα παραπάνω είδη σημείων θα λέγεται ουδέτερο.

Θεώρημα 2.4.3: *Έστω $f \in C[a, b]$ και ένα πολυώνυμο $p_n{}^* \in \mathbb{P}_n$. Το $p_n{}^*$ είναι βέλτιστη προσέγγιση της f στο $[a, b]$ αν και μόνο αν υπάρχει σύνολο εναλλασσόμενων σημείων για την συνάρτηση σφάλματος $e = f - p_n{}^*$ πλήθους τουλάχιστον $n + 2$ σημείων.*

Απόδειξη:

$(\Longrightarrow)$ Έστω ότι το $p_n{}^*$ είναι μια βέλτιστη προσέγγιση της f στο $[a, b]$.

● Αν $f \in \mathbb{P}_n$, τότε $E_n(f) = 0$, οπότε η f είναι βέλτιστη προσέγγιση του εαυτού της και δεν χρειάζεται να αποδείξουμε τιποτα.

● Αν $f \notin \mathbb{P}_n$, τότε $E_n(f) = \|f - p_n{}^*\|_\infty > 0$. Η συνάρτηση σφάλματος $e = f - p_n{}^*$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και άρα ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\delta > 0$, διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε k το πλήθος υποδιαστήματα μήκους το πολύ δ με:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$$

ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |e(x) - e(y)| < \frac{E_n(f)}{2}\,, \quad \forall x, y \in [t_i\,, t_{i+1}],\ i = 0,1,\ldots,k-1$$

Ένα υποδιάστημα $[t_i\,, t_{i+1}]$ μπορεί να περιέχει είτε ένα σημείο $(+)$, είτε ένα σημείο $(-)$. Επομένως η συνάρτηση σφάλματος θα είναι παντού θετική σε αυτό, ή παντού αρνητική αντίστοιχα. Αυτό συμβαίνει διότι η τιμή της $e(x)$ δεν μπορεί να μεταβληθεί περισσότερο από $\frac{E_n(f)}{2}$. Είναι φανερό ότι κάθε δύο διαστήματα $(+)$και $(-)$ διαχωρίζονται από ένα διάστημα που περιέχει μία ρίζα της $e(x)$, δηλαδή από ένα ουδέτερο διάστημα.

Θα αριθμήσουμε τώρα από τα αριστερά προς τα δεξιά τα προσημασμένα διαστήματα, αγνοώντας προς το παρόν τα ουδέτερα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι το πρώτο προσημασμένο διάστημα είναι $(+)$.

$$\begin{array}{ll} I_1, I_2, \ldots, I_{k_1} & \text{τα διαστήματα } (+) \\ I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, \ldots, I_{k_2} & \text{τα διαστήματα } (-) \\ \vdots & \quad\vdots \\ I_{k_{m-1}+1}, I_{k_{m-1}+2}, \ldots, I_{k_m} & \text{τα διαστήματα } (-1)^{m-1} \end{array}$$

όπου I_1 ειναι το πρώτο και I_k το τελευταίο διάστημα $(+)$. Αντίστοιχα για τα διαστήματα $(-)$. Θα συμβολίσουμε με $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^{m} I_{k_j}$ την ένωση όλων των προσημασμένων διαστημάτων και με $\mathcal{N}$ την ένωση όλων των ουδέτερων.

Τα $\mathcal{S}, \mathcal{N}$ είναι συμπαγή σύνολα και φυσικά ισχύει: $\mathcal{S} \cup \mathcal{N} = [a, b]$. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $m \geq n + 2$. Θα το αποδείξουμε με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω λοιπόν ότι $m < n+2$. Επειδή μεταξύ των ετερόσημων, προσημασμένων διαστημάτων παρεμβάλλονται ουδέτερα διαστήματα, τότε θα υπάρχουν $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1} \in \mathcal{N}$ τέτοια ώστε:

$$max\ I_{k_1} < z_1 < min\ I_{k_1+1}$$

$$max\ I_{k_2} < z_2 < min\ I_{k_2+1}$$

$$\vdots$$

$$max\ I_{k_{m-1}} < z_{m-1} < min\ I_{k_{m-1}+1}$$

Ορίζουμε το πολυώνυμο:

$$q(x) := (z_1 - x) \cdot (z_2 - x) \ldots . (z_{m-1} - x)$$

με $q \in \mathbb{P}_n$, αφού είναι βαθμού $m-1 \leq n$ (έχουμε υποθέσει ότι $m < n+2$). Θα δείξουμε ότι για κατάλληλο $\lambda > 0$ το $p_n{}^* + \lambda q \in \mathbb{P}_n$ είναι καλύτερη προσέγγιση της f απ' ότι το $p_n{}^*$. Ισχυριζόμαστε ότι οι συναρτήσεις e, q είναι ομόσημες σε κάθε υποδιάστημα του $\mathcal{S}$. Αυτό συμβαίνει, διότι αφενός το q δεν μηδενίζεται στο $\mathcal{S}$ (άρα διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $I_{k_j}, \forall j$) και αφετέρου, διότι έχει εκ' κατασκευής την ιδιότητα να εναλλάσσει το πρόσημο του κάθε φορά που το x "προσπερνάει" κάποιο z_j (από τα αριστερά προς τα δεξιά).

Έστω τώρα $C := \max_{x \in \mathcal{N}} |e(x)|$. Ισχύει ότι $C < E_n(f)$, αφού σε κάθε ουδέτερο διάστημα έχουμε $|e(x)| < E_n(f), \forall x$. Το ίδιο θα ισχύει και για το sup της e.

Επιλέγουμε $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\lambda \cdot \|q\|_\infty < min\left\{E_n(f) - C, \frac{E_n(f)}{2}\right\}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Αν $x \in \mathcal{N}$:

$$|f(x) - (\,p_n{}^*(x) + \lambda\, q(x))| \leq |f(x) - p_n{}^*(x)| + \lambda\, |q(x)| \leq C + \lambda \|q\|_\infty$$
$$< E_n(f) \text{ (από την προηγούμενη ανισότητα)}$$

- Αν $x \notin \mathcal{N} (\Longrightarrow\ x \in \mathcal{S})$:

Τότε το x ανήκει σε ένα προσημασμένο διάστημα. Γνωρίζουμε ότι:

$$|f(x) - p_n{}^*(x)| > \frac{E_n(f)}{2} > \lambda \cdot \|q\|_\infty$$

και επιπλέον οι $e, \lambda q$ είναι ομόσημες. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα, ότι για κάθε δύο πραγματικούς ομόσημους αριθμούς a, b με $|a| \geq |b|$ ισχύει:

$$|a - b| = |a| - |b|,$$

έχουμε :

$$\begin{aligned} |f(x) - (\, p_n{}^*(x) + \lambda\, q(x))| &\leq |f(x) - p_n{}^*(x)| + \lambda\, |q(x)| \\ &\leq\; E_n(f) - \lambda \min_{x \in \mathcal{S}} |q(x)| \\ &< E_n(f) \end{aligned}$$

αφού $\min_{x \in \mathcal{S}} |q(x)| > 0$.

Δηλαδή, δείξαμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει:

$$\|f - (p_n{}^* + \lambda\, q)\|_\infty < \; E_n(f) \quad \text{το οποίο είναι άτοπο.}$$

($\Leftarrow$) Αντίστροφα τώρα, έστω ένα σύνολο εναλλασσόμενων σημείων $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ της $e = f - p_n{}^*$ πλήθους $n + 2$. Θα δείξουμε ότι το $p_n{}^*$ είναι βέλτιστη προσέγγιση της f στο $[a, b]$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $q_n \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε:

$$\|f - q_n\|_\infty < \|f - p_n{}^*\|_\infty \,. \quad (1)$$

Τότε,

$$\left|f(x_j) - q_n(x_j)\right| \leq \|f - q_n\|_\infty < \|f - p_n{}^*\|_\infty \; = \left|f(x_j) - p_n{}^*(x_j)\right|$$

$\forall j = 0,1, \ldots, n + 1$. Από τον ορισμό του εναλλασσόμενου προσήμου έχουμε:

- Αν $f(x_j) - p_n{}^*(x_j) = \|f - p_n{}^*\|_\infty > 0 \Longrightarrow f(x_j) - p_n{}^*(x_j) > f(x_j) - q_n(x_j)$

και επομένως,

$$q_n(x_j) - p_n{}^*(x_j) > 0$$

- Αν $f(x_j) - p_n{}^*(x_j) = -\,\|f - p_n{}^*\|_\infty < 0 \Longrightarrow f(x_j) - p_n{}^*(x_j) < f(x_j) - q_n(x_j)$

δηλαδή,

$$q_n(x_j) - p_n{}^*(x_j) < 0$$

Οι δύο αυτές περιπτώσεις μας δείχνουν ότι το πολυώνυμο $q_n - p_n{}^*$ εναλλάσσει το πρόσημό του $n+2$ φορές, το οποίο σημαίνει ότι έχει μία ρίζα σε κάθε διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$, $\forall j$ ($n+1$ το πλήθος) και επιπλέον $q_n - p_n{}^* \equiv 0$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της (1). Άρα, το $p_n{}^*$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f στο $[a, b]$ από τον $\mathbb{P}_n$. □

Πόρισμα 2.4.4: *Αν $f \in C[a, b]$ τότε η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_0$ είναι:*

$$p_0{}^* = \frac{1}{2}\left(\max_{a \le x \le b} f(x) + \min_{a \le x \le b} f(x)\right)$$

με

$$E_0(f) = \frac{1}{2}\left(\max_{a \le x \le b} f(x) - \min_{a \le x \le b} f(x)\right)$$

Το $p_0{}^*$ ονομάζεται βέλτιστη προσεγγιστική σταθερά της f.

Απόδειξη:

- Αν $f \in \mathbb{P}_0$ βρισκόμαστε στην τετριμμένη περίπτωση όπου $p_0{}^* = f$.
- Έστω ότι $f \notin \mathbb{P}_0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, έπεται ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε:

$$f(x_1) = \max_{a \le x \le b} f(x) \text{ και } f(x_2) = \min_{a \le x \le b} f(x)$$

Θεωρούμε ως προσέγγιση της f το σταθερό πολυώνυμο:

$$p_0{}^* = \frac{1}{2}\left(\max_{a \le x \le b} f(x) + \min_{a \le x \le b} f(x)\right) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

και τη συνάρτηση σφάλματος:

$$e = f - p_0{}^*$$

Θα δείξουμε ότι η προσέγγιση αυτή είναι βέλτιστη. Προκύπτει ότι:

$$e(x_1) = f(x_1) - p_0{}^* = \frac{1}{2}(f(x_1) - f(x_2))$$

και

$$e(x_2) = f(x_2) - p_0{}^* = -\frac{1}{2}(f(x_1) - f(x_2)) = -(f(x_1) - p_0{}^*) = -e(x_1)$$

Επομένως,

$$|e(x_1)| = |e(x_2)| = \frac{1}{2}(f(x_1) - f(x_2)) = \frac{1}{2}\left(\max_{a \le x \le b} f(x) - \min_{a \le x \le b} f(x)\right)$$

Δηλαδή, τα x_1, x_2 είναι σημεία εναλλαγής προσήμου για την e, άρα από το θεώρημα 2.4.3 έπεται ότι το $p_0{}^*$ είναι βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f στο $[a, b]$ από τον $\mathbb{P}_0$ και επιπλέον:

$$E_0(f) = \tfrac{1}{2}\left(\max_{a \le x \le b} f(x) - \min_{a \le x \le b} f(x)\right). \qquad \square$$

Θεώρημα 2.4.5: *Έστω $f \in C[a, b]$. Αν το $p^* \in \mathbb{P}_n$ είναι βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f στο $[a, b]$, τότε θα είναι μοναδική.*

Απόδειξη:

Η απόδειξη θα γίνει (και πάλι) με απαγωγή σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι η βέλτιστη προσέγγιση δεν είναι μοναδική, άρα υπάρχει ένα $q^* \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε:

$$\|f - p^*\|_\infty = \|f - q^*\|_\infty = E_n(f)$$

Ο υπόχωρος $\mathbb{P}_n$ του $C[a, b]$ από τον οποίο προσεγγίζουμε είναι πεπερασμένης διάστασης ($dim\,[\mathbb{P}_n] = n + 1$), άρα και ο κυρτός συνδυασμός $s = \frac{p^* + q^*}{2} \in \mathbb{P}_n$ θα αποτελεί επίσης βέλτιστη προσέγγιση της f (θεώρημα 2.1.1). Αυτό συνεπάγεται (Θεώρημα 2.4.3), ότι θα υπάρχει σύνολο $n + 2$ εναλλασσόμενων σημείων $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ για την συνάρτηση $f - s$ ώστε για κάθε $j = 0, 1, \ldots, n + 1$ να ισχύει:

$$f(x_j) - s(x_j) = \frac{f(x_j) - p^*(x_j)}{2} + \frac{f(x_j) - q^*(x_j)}{2} = \pm\, E_n(f)$$

Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι

$$|f(x_j) - p^*(x_j)| \le E_n(f) \quad \text{και} \quad |f(x_j) - q^*(x_j)| \le E_n(f)$$

άρα θα έχουμε:

$$f(x_j) - p^*(x_j) = f(x_j) - q^*(x_j) = \pm E_n(f)$$

Δηλαδή, τα πολυώνυμα p^* , q^* ταυτίζονται σε $n+2$ σημεία και επειδή ο βαθμός τους είναι το πολύ n έχουμε ότι:

$$p^*(x_j) = q^*(x_j), \ \ \forall j = 0,1,\dots,n+1$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$ είναι μοναδική.

□

Κεφάλαιο 3

Πλησιέστερα σημεία σε χώρους Banach

3.1 Πλησιέστερα σημεία & ασθενής προσεγγισιμότητα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη πλησιέστερων σημείων σε κλειστά υποσύνολα πραγματικών χώρων Banach. Ειδικότερα, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου ο χώρος Banach έχει την ιδιότητα *Radon-Nikodym* η οποία όπως θα δούμε εξασφαλίζει την ύπαρξη των πλησιέστερων σημείων του χώρου σε κλειστό και φραγμένο υποσύνολό του. Αν επιπλέον, το υποσύνολο του χώρου είναι και κυρτό, τότε το συμπέρασμα στο οποίο θα καταλήξουμε είναι βαθύτερο. Δίνουμε τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 3.1.1: *Έστω X χώρος Banach και $C \neq \emptyset$ ένα κλειστό υποσύνολο του. Αν η απόσταση του C από οποιοδήποτε $x \notin C$ ορίζεται από τον τύπο*

$$d(x,C) := inf\{\|x - z\| : z \in C\}$$

τότε κάθε $z \in C$ με $d(x,C) = \|x - z\|$ λέγεται πλησιέστερο σημείο (nearest point) του x από το C. Αν υπάρχουν $x \notin C$ και το $z \in C$ είναι πλησιέστερο σημείο τους, τότε το z καλείται απλά, πλησιέστερο σημείο.

Ορισμός 3.1.2: *Έστω X χώρος Banach και $C \neq \emptyset$ ένα κλειστό υποσύνολο του. Λέμε ότι το C είναι προσεγγίσιμο (proximinal) αν περιέχει πλησιέστερο σημείο οποιουδήποτε $x \notin C$.*

Ορισμός 3.1.3: *Έστω X χώρος Banach και το $S \subseteq (X \setminus C)$ το σύνολο των x για τα οποία υπάρχει πλησιέστερο σημείο τους στο C. Αν το S είναι πυκνό στον X, τότε το C λέγεται πυκνά προσεγγίσιμο (densely proximinal).*

Ισοδύναμα, αν το C είναι προσεγγίσιμο και το S πυκνό στον X, τότε το C λέγεται πυκνά προσεγγίσιμο.

Πρόταση 3.1.4: *Έστω X χώρος Banach. Αν κάθε κλειστό υποσύνολο του είναι πυκνά προσεγγίσιμο, τότε ο X έχει την ιδιότητα να δέχεται πλησιέστερα σημεία.*

Στην περίπτωση των γραμμικών χώρων με νόρμα, η ιδιότητα της πυκνής προσεγγισιμότητας μπορεί να γίνει ασθενέστερη με αναμενόμενο τρόπο. Αντικαθιστώντας την έννοια της πυκνότητας ενός συνόλου στην συνηθισμένη τοπολογία (εκείνη που επάγει η νόρμα δηλαδή) με εκείνη της ασθενούς πυκνότητας (weak density), δημιουργείται η ιδιότητα της ασθενούς, πυκνής, προσεγγισιμότητας (weak-dense-proximinality). Για λόγους απλότητας, ένα σύνολο με την ιδιότητα αυτή θα το λέμε ασθενώς προσεγγίσιμο (weakly proximinal). Ξεκινάμε με τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 3.1.5: *Έστω X χώρος με νόρμα. Μια ακολουθία* $\{x_n\}$ *του X λέμε ότι συγκλίνει ασθενώς στο* $x \in X$ *αν για κάθε συναρτησοειδές* $f^* \in X^*$ *η ακολουθία* $\{f^*(x_n)\}$ *συγκλίνει στο* $f^*(x)$ *. Δηλαδή*:

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad αν \quad f^*(x_n) \to f^*(x)$$

Παρατηρήσεις:

1) Η *w*-τοπολογία είναι ασθενέστερη από την τοπολογία που επάγει η νόρμα στον X. Επομένως, η ισχυρή σύγκλιση συνεπάγεται ασθενή σύγκλιση.

2) Όμοια, αν ένα σύνολο είναι πυκνό στον X, τότε θα είναι και ασθενώς πυκνό στον X.

Ορισμός 3.1.6: *Έστω X χώρος Banach και C*$\neq \emptyset$ *ένα κλειστό υποσύνολο του. Λέμε ότι το C είναι ασθενώς πυκνό (weakly dense) στον X, αν για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει ακολουθία* $\{c_n\}$ *στο C ώστε:*

$$c_n \xrightarrow{w} x.$$

Ορισμός 3.1.7: *Έστω X χώρος Banach. Αν S είναι το σύνολο των* $x \in X \setminus C$ *με πλησιέστερο σημείο τους στο C, τότε το C ονομάζεται ασθενώς προσεγγίσιμο (weakly proximinal) αν το S παράγει ένα ασθενώς πυκνό σύνολο στον X.*

3.2 Η ιδιότητα Radon-Nikodym σε χώρους Banach

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε κάτω από ποιές συνθήκες ένας (πραγματικός) χώρος Banach έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym, καθώς και τι γνωρίζουμε για τη σχέση αυτής με την ιδιότητα Krein-Milman. Η ιδιότητα αυτή προέρχεται από το θεώρημα των

Radon-Nikodym και αποτελεί ουσιαστικά μια γεωμετρική ιδιότητα των κυρτών συνόλων σε χώρους Banach. Η διαπίστωση αυτή οφείλεται στον Rieffel (1966), ο οποίος εισήγαγε για πρώτη φορά την έννοια των “*dentable*” συνόλων σε χώρους Banach. Για λόγους συντομίας, όταν ένας χώρος Banach έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym, θα λέμε ότι έχει την RNP (Radon-Nikodym property).

Ορισμός 3.2.1: *Έστω X χώρος Banach, και Σ μία σ-άλγεβρα στον X. Αν (Ω, Σ) είναι ένας μετρήσιμος χώρος, τότε ορίζουμε ως X-μέτρο στο Ω την απεικόνιση:*

$$m : \Sigma \longrightarrow X \quad \mu\varepsilon \;\; m(\emptyset) = 0 \in X$$

και

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

για κάθε $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ *ανά δύο ξένα.*

Ορισμός 3.2.2: *Έστω m ένα μέτρο με τιμές στον X. Ορίζουμε ως κύμανση του m:*

$$|m|(A) := sup\left\{ \sum_{i\in I} \|m(A_i)\| \right\}$$

όπου $(A_i)_{i\in I} \in \Sigma$ *μια πεπερασμένη διαμέριση του A.*

Η κύμανση $|m|$ είναι ένα θετικό μέτρο στον (*Ω, Σ*). Θα χρειαστούμε την περίπτωση των *X* μέτρων με πεπερασμένη κύμανση, δηλαδή μέτρα *m* για τα οποία ισχύει: $|m|(\Omega) < \infty$.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις μετρήσιμες διανυσματικές συναρτήσεις (εκείνες δηλαδή που παίρνουν τιμές σε έναν χώρο Banach), ώστε να φτάσουμε στον ορισμό των Bochner ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, ο οποίος είναι απαραίτητος για τον χαρακτηρισμό των χώρων Banach με την ιδιότητα Radon-Nikodym.

Υπενθυμίζουμε, ότι μια συνάρτηση $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ λεγεται *απλή* αν το σύνολο τιμών της $f(\Omega)$ είναι πεπερασμένο.

Ένας χαρακτηρισμός των μετρήσιμων συναρτήσεων είναι ο ακόλουθος :

Ορισμός 3.2.3: *Μία συνάρτηση* $f : \Omega \longrightarrow X$ *λεγεται μετρήσιμη, αν υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων που συγκλίνουν κατά σημείο στην f σχεδόν παντού.*

Ορισμός 3.2.4: *Έστω* $f : \Omega \longrightarrow X$ *μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε:*

(i) Λέμε ότι η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n) *τέτοια ώστε:*

(a) $f_n \longrightarrow f$ *σχεδόν παντού*

(b) Να είναι Cauchy κατά μέσο, δηλαδή:

$$\int_{\Omega} \|f_n - f_m\| \, d\mu \longrightarrow 0 \text{, καθώς } n \longrightarrow \infty$$

(ii) Αν η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη τότε ορίζεται το ολοκλήρωμα Bochner της f:

$$\int_{\Omega} f \; d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \; d\mu$$

Η ύπαρξη του παραπάνω ορίου αποδεικνύεται ανεξάρτητα από την επιλογή των f_n. Ο χαρακτηρισμός των χώρων Banach με την ιδιότητα Radon-Nikodym δόθηκε από τους Davis και Phelps (1973).

Ορισμός 3.2.5 (*Ιδιότητα Radon-Nikodym*): *Έστω X χώρος Banach. Λέμε ότι ο X έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym ως προς τον θετικά πεπερασμένο χώρο μέτρου (Ω,Σ,μ), αν για κάθε μ-συνεχή και πεπερασμένης κύμανσης μέτρο* $m : \Sigma \longrightarrow X$ *υπάρχει μία Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση f : Ω ⟶ X τέτοια ώστε:*

$$m(E) = \int_{E} f \; d\mu$$

για κάθε $E \in \Sigma$.

Αποδεικνύεται ότι αν ο X έχει την RNP, τότε κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του έχει επίσης την RNP.

3.3 RNP & Dentability

Ορισμός 3.3.1: *Έστω X γραμμικός χώρος και C ένα υποσύνολο του. Ονομάζουμε κυρτή θήκη του C το σύνολο:*

$$co(C) = \bigcap \{\, S \subset X \;:\; S \supseteq C,\; S \text{ κυρτό} \}$$

Παρατηρήσεις:

1) Η τομή κυρτών συνόλων είναι επίσης κυρτό σύνολο. Προκύπτει το συμπέρασμα ότι η κυρτή θήκη του C είναι το μικρότερο υποσύνολο του X.

2) Η κυρτή θήκη του C είναι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών του C.

Ορισμός 3.3.2: *Έστω X χώρος Banach. Λέμε ότι :*

(i) Ένα υποσύνολο C του X είναι dentable αν για κάθε $\varepsilon > 0$*, υπάρχει* $x \in C$ *τέτοιο ώστε:*

$$x \notin clco[C \setminus B_\varepsilon(x)]$$

(ii) Ένα $x \in C$ *λέγεται denting point του C αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *:*

$$x \notin clco[C \setminus B_\varepsilon(x)]$$

Το σύνολο των denting points του C συμβολίζεται DE(C).

Από τον παραπάνω ορισμό έπεται ότι ένα υποσύνολο C του X δεν είναι dentable αν για κάθε $x \in$ C υπάρχει ε > 0 ώστε:

$$x \in clco[C \setminus B_\varepsilon(x)]$$

Παρατηρείστε ότι ένα φραγμένο σύνολο είναι dentable αν και μόνο αν η κλειστή κυρτή θήκη του είναι dentable (Rieffel, 1967).

Πρόταση 3.3.3: *Ένα υποσύνολο C ενός χώρου Banach X δεν είναι dentable αν και μόνο αν για κάθε* $x \in C$ *και ένα* $\varepsilon > 0$ *ισχύει:*

$$C \subset clco[C \setminus B_\varepsilon(x)]$$

Αν επιπλέον το C είναι κλειστό και κυρτό τότε: $C = clco[C \setminus B_\varepsilon(x)]$.

Απόδειξη:

($\Longleftarrow$) Η τετριμμένη περίπτωση. Αν υπάρχει ε > 0 ώστε για κάθε $x \in C$ να ισχύει $C \subset clco[C \setminus B_\varepsilon(x)]$ τότε το C δεν είναι dentable.

($\Longrightarrow$) Έστω ότι το C δεν είναι dentable. Τότε, υπάρχει αριθμός $2\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $y \in C$ να ισχύει $y \in clco[\, C \setminus (B_{2\varepsilon}(y)]$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

● Αν $x, y \in C$ ώστε $\|x - y\| > \varepsilon$ τότε $y \in [\, C \setminus (B_\varepsilon(x)] \subset clco[\, C \setminus (B_\varepsilon(x)]$

● Αν $x, y \in C$ ώστε $\|x - y\| \leq \varepsilon$ τότε $B_\varepsilon(x) \subset B_{2\varepsilon}(y)$ και επομένως:

$$[C \setminus (B_{2\varepsilon}(y)] \subset [C \setminus (B_{\varepsilon}(x)]$$

Άρα,

$$y \in clco[\ C \setminus (B_{2\varepsilon}(y)] \subset clco[C \setminus B_{\varepsilon}(x)] \qquad \square$$

Ορισμός 3.3.4: *Ένας χώρος Banach X είναι dentable αν και μόνο αν κάθε φραγμένο υποσύνολο του είναι dentable.*

Από τον ορισμό των dentable συνόλων προέκυψε ο παρακάτω χαρακτηρισμός των χώρων που έχουν την RNP και οφείλεται στους Davis, Phelps & Rieffel. Δίνεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.3.5 (*The Davis-Phelps-Rieffel Theorem, 1974*): *Ένας χώρος Banach X έχει την RNP αν και μόνο αν ο X είναι dentable.*

Το παραπάνω θεώρημα αποδείχθηκε από τον Huff (1974) τροποποιώντας την απόδειξη του θεωρήματος του Maynard (1973). Ως συνέπεια αυτού, αποδεικνύεται ότι ένας χώρος Banach δεν έχει την RNP αν και μόνο αν υπάρχει φραγμένο, μη κενό υποσύνολο του που δεν είναι dentable. Ο επόμενος ορισμός, μας επιτρέπει τον εκ' νέου χαρακτηρισμό των dentable σύνολων όπως δόθηκε από τον Phelps (1974).

Ορισμός 3.3.6: *Έστω X χώρος Banach και C ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του. Αν $f^* \in X^*$ συναρτησοειδές με $\|f^*\| = 1$ και τυχαίο $\alpha > 0$, τότε ορίζουμε ως φέτα (slice) του C το σύνολο:*

$$S(f^*, a, C) = \{x \in C : f^*(x) \geq sup\{f^*(y) : y \in C\} - a\}$$

Από το χαρακτηρισμό του supremum έπεται ότι $S(f^*, a, C) \neq \emptyset$.

Ορισμός 3.3.7: *Έστω X χώρος Banach. Λέμε ότι :*

(i) Ένα υποσύνολο C του X είναι dentable, αν περιέχει φέτες αυθαίρετα μικρής διαμέτρου. Δηλαδή, αν υπάρχουν $f^* \in X^*$, $\alpha > 0$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να ισχύει:

$$diam\,[\,S(f^*, a, C)\,] < \varepsilon$$

(ii) Αντίστοιχα, ένα $x \in C$ λέγεται denting point του C αν ανήκει σε φέτες αυθαίρετα μικρής διαμέτρου. Δηλαδή, αν υπάρχει φέτα $S(f^*, a, C)$ ώστε:

$$x \in S(f^*, a, C) \ \text{και} \ diam\,[\,S(f^*, a, C)\,] < \varepsilon$$

Ορισμός 3.3.8: *Έστω X χώρος Banach και C ένα φραγμένο, κυρτό υποσύνολο του. Τότε:*

(i) Ένα σημείο $x \in C$ *λεγεται ακραίο σημείο (extreme point) του C, αν δεν μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός άλλων στοιχείων του συνόλου. Δηλαδή, αν για* $y, z \in C$ *με* $x = \lambda y + (1 - \lambda)\, z$, $\lambda \in [0,1]$ *έπεται ότι* $y = x$ *ή* $z = x$.

Το σύνολο των ακραίων σημείων του συμβολίζεται Ex(C).

(ii) Ένα σημείο $x \in C$ *λέγεται εκτεθειμένο σημείο (exposed point) του C, αν υπάρχει συναρτησοειδές* $f^* \in X^*$ *τέτοιο ώστε:*

$$f^*(x) > f^*(s) \quad \textit{για κάθε } s \in C \textit{ με } x \neq s.$$

(iii) Ένα σημείο $x \in C$ *λέγεται ισχυρά εκτεθειμένο σημείο (strongly exposed point) του C, αν υπάρχει συναρτησοειδές* $f^* \in X^*$ *τέτοιο ώστε:*

$$f^*(x) > f^*(s) \quad \textit{για κάθε } s \in C \textit{ με } x \neq s$$

και επιπλέον, για κάθε $\{x_n\}$ *στο C να ισχύει η συνεπαγωγή:*

$$f^*(x_n) \longrightarrow f^*(x) \Longrightarrow x_n \longrightarrow x$$

Το σύνολο των ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του C συμβολίζεται SE(C).

Ο Rieffel παρατήρησε ότι κάθε ισχυρά εκτεθειμένο σημείο είναι denting point. Από τους ορισμούς 3.3.2 & 3.3.8 προκύπτει ότι κάθε denting point είναι ακραίο σημείο, και επομένως, κάθε ισχυρά εκτεθειμένο σημείο είναι ακραίο σημείο. Το αντίστροφο γενικά, δεν ισχύει. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι για κάθε φραγμένο, κλειστό και κυρτό υποσύνολο Α ενός χώρου Banach ισχύει:

$$SE(A) \subset DE(A) \subset Ex(A).$$

Από το Θεώρημα 3.3.5 συμπεραίνουμε πλέον ότι οι ιδιότητες RN - Dentability είναι ισοδύναμες. Ο Lindenstrauss το χρησιμοποίησε για να αποδείξει ότι αν ένας χώρος Banach είναι dentable, τότε κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του. Δηλαδή, ότι η RNP συνεπάγεται την ιδιότητα Krein-Milman[4] (KMP). Η διαπίστωση αυτή ήρθε σαν απάντηση (μονόπλευρη), στο ερώτημα του Diestel (1973) για το πότε οι ιδιότητες αυτές είναι ισοδύναμες. Οι Huff

[4] **Υπενθύμιση:** Αν Κ είναι ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X, λέμε ότι το Κ έχει την ιδιότητα Krein-Milman, αν κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο Α του Κ είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του. Συμβολίζουμε : KMP = Krein-Milman property.

& Morris (1974) έδειξαν το αντίστροφο, δηλαδή ότι η KMP συνεπάγεται την RNP σε συζυγής χώρους. Γνωρίζουμε, ότι ένας χώρος έχει και τις δύο ιδιότητες αν είναι αυτοπαθής ή διαχωρίσιμος συζυγής. Γενικότερα όμως, η κατεύθυνση KMP $\Rightarrow$ RNP σε τυχαίους χώρους είναι ανοιχτό πρόβλημα, το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

Αν κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του, είναι επίσης η κλειστή κυρτή θήκη των ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του;

Τέλος, στο επόμενο θεώρημα ο Phelps (1974) έδειξε κάτι ισχυρότερο από το θεώρημα του Lindenstrauss, αντικαθιστώντας τα ακραία σημεία με τα ισχυρά εκτεθειμένα.

Θεώρημα 3.3.9: *Έστω X χώρος Banach. Κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι dentable (δηλαδή έχει την RNP) αν και μόνο αν κάθε κλειστό κυρτό και φραγμένο υποσύνολο C του X είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του. Δηλαδή:*

$$C = clco(SE(C)).$$

3.4 Ύπαρξη πλησιέστερων σημείων σε χώρους Banach

Έχοντας "χτίσει" το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο στις προηγούμενες παραγράφους, το μόνο που απομένει είναι να αναδιατυπώσουμε τον ορισμό των ισχυρά εκτεθειμένων σημείων (Ορισμός 3.3.8) και να δώσουμε ακόμη έναν χαρακτηρισμό των χώρων Banach με την ιδιότητα Radon-Nikodym (Θέωρημα 3.4.2). Το θέωρημα δεν θα αποδειχθεί αλλά θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του κύριου θεωρήματος, εκείνου των Borwein & Fitzpatrick (1989), που εξασφαλίζει το ζητούμενο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου. Δηλαδή, την ύπαρξη πλησιέστερων σημείων στο μη-κενό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του χώρου Banach με την ιδιότητα Radon Nikodym. Τέλος, θα διατυπώσουμε το προγενέστερο θεώρημα του Edelstein (1976) που δίνει ενα βαθύτερο συμπέρασμα για το σύνολο των σημείων που έχουν πλησιέστερο σημείο στο υποσύνολο του χώρου Banach, προϋποθέτοντας επιπλέον ότι το προαναφερθέν υποσύνολο είναι και κυρτό.

Ορισμός 3.4.1: *Έστω X χώρος Banach και C ένα φραγμένο, κυρτό υποσύνολο του. Λέμε ότι το συναρτησοειδές $f^* \in X^*$ εκθέτει ισχυρά το C στο $x \in cl(C)$ αν*

$$sup_{z\in C}\{f^*(z)\} = f^*(x)$$

και επιπλέον:

$$\lim_{a\to 0^+} diam\,\{y \in C : f^*(y) > sup_{z\in C}\{f^*(z)\} - a\} = 0.$$

Δηλαδή, αν το x είναι εκτεθειμένο και $\lim_{a\to 0^+} diam[S(f^*, a, C)] = 0.$

Γενικότερα, ένα συναρτησοειδές $f^* \in X^*$ *εκθέτει ισχυρά* ένα σύνολο C αν εκθέτει ισχυρά κάποια σημεία της κλειστότητας του. Ισοδύναμα, αν:

$$\lim_{a\to 0^+} diam[S(f^*, a, C)] = 0.$$

Θεώρημα 3.4.2: *Έστω X χώρος Banach και C ένα μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του. O X έχει την RNP αν και μόνο αν το σύνολο των συναρτησοειδών που εκθέτουν ισχυρά το C είναι πυκνό στον X^*. Δηλαδή, αν :*

$$cl(SE(C)) = X^*$$

Το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου έρχεται με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.3 (Borwein & Fitzpatrick, 1989): *Έστω X χώρος Banach και $C \neq \emptyset$ ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του. Αν ο X έχει την RNP, τότε το C περιέχεται στην κλειστή κυρτή θήκη των πλησιέστερων σημείων του, από σημεία του $X \setminus C$. Με άλλα λόγια, το C έχει πλησιέστερα σημεία.*

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι το *C* δεν βρίσκεται στην κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου των πλησιέστερων σημείων του. Τότε, για κάποιο $x \in C$ θα υπάρχει συναρτησοειδές $f^* \in X^*$ τέτοιο ώστε:

$$f^*(x) > sup\,\{ f^*(y) : y \text{ πλησιέστερο σημείο του } C \}$$

Θεωρούμε το σύνολο:

$$M := C + B[0,1]$$

Από το θεώρημα 3.4.2 υπάρχει συναρτησοειδές $g^* \in SE(M)$ *με* $\|g^*\| = 1$ ώστε:

$$g^*(x) > sup\,\{ g^*(y) : y \text{ πλησιέστερο σημείο του } C \}$$

Λόγω πληρότητας έχουμε ότι το g^* εκθέτει ισχυρά το C στο $z \in C$ και την B[0,1] στο s με $\|s\| \leq 1$. Τότε ισχύει :

$$g^*(z) = sup_{y \in C} \{g^*(y)\}$$

και

$$g^*(s) = \|g^*\| = 1$$

Επομένως, το στοιχείο $z + s$ έχει πλησιέστερο σημείο $z \in C$. Πράγματι, για $c \in C$ έχουμε :

$$\|(z + s) - c\| \geq g^*(z + s - c) \geq g^*(s) = 1 = \|s\| = \|(z + s) - s\|$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού:

$$g^*(z) \geq g^*(x) > sup \{ g^*(y) : y \text{ πλησιέστερο σημείο του } C \} \qquad \square$$

Αν επιπλέον, το υποσύνολο C του προηγούμενου θεωρήματος είναι και κυρτό, τότε έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

Θεώρημα 3.4.4 (Edelstein, 1976): *Έστω X χώρος Banach και C≠ ∅ ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του. Αν ο X έχει την RNP, τότε το σύνολο των* $x \in (X \setminus C)$ *με πλησιέστερο σημείο στο C είναι ασθενώς πυκνό στο* $X \setminus C$.

Πρόταση 3.4.5: *Αν X ένας χώρος Banach που έχει την RNP και C≠ ∅ ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του, τότε το C είναι ασθενώς προσεγγίσιμο.*

Το θεώρημα 3.4.4 δεν ισχύει κατ’ ανάγκη εάν ο X δεν έχει την RNP. Δημιουργείται συνεπώς το εξής ερώτημα:

Αν X, C ορίζονται όπως στο θεώρημα 3.4.3 (δηλαδή το C δεν είναι κυρτό), είναι τότε το σύνολο των $x \in (X \setminus C)$ με πλησιέστερο σημείο στο C ασθενώς πυκνό στο $X \setminus C$;

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Δ. Ακρίβης, *Θεωρία Προσεγγίσεων* (Σημειώσεις Παραδόσεων), Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο (1987).

[2] Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση* (Τέταρτη έκδοση), Π.Ε.Κ., Ηράκλειο (2015).

[3] Σ. Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης*, (Σημειώσεις Παραδόσεων), Δεύτερη έκδοση, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, (2004).

[4] J. M. Borwein, S. Fitzpatrick, *Existence Of Nearest Points In Banach Spaces,* Can. J. Math. , Vol. XLI, No. 4, (1989), pp. 702-720.

[5] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, (1966).

[6] N. L. Carothers, *A Short Course on Approximation Theory*, (Lecture Notes), Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University.

[7] W. Davis and R. Phelps, *The Radon-Nikodym Property and dentable sets in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 119-12.

[8] M. Edelstein, *Weakly Proximinal Sets,* Journal Of Approximation Theory **18**, (1976), 1 - 8.

[9] R. E. Huff, *Dentability and the Radon-Nikodym property*, Duke Math. J. **41**, **(**1974), 111-114.

[10] R. E. Huff, P. D. Morris, *Dual spaces with the Krein-Milman property have the Radon-Nikodym property*, Proc. Amer. Math. Soc. **49**, (1975), 104-108.

[11] Μ. Κολουντζάκης, *Θεωρία Προσέγγισης Και Εφαρμογές,* (Σημειώσεις Παραδόσεων), Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο, (2014).

[12] H. B. Maynard, *A geometric characterization of Banach spaces having the Radon-Nikodym property*, Trans. Amer. Math. Soc. **185** (1973), 493-500.

[13] Δ. Νούτσος, *Θεωρία Προσέγγισης,* (Σημειώσεις Παραδόσεων), Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα, (2014).

[14] J. M. T. Nthebe, *The Radon-Nikodym and the Krein-Milman properties in Banach spaces,* Master's Thesis, University of Stellenbosch, (2006).

[15] Μ. Παπαδημητράκης, *Συναρτησιακή Ανάλυση,* (Σημειώσεις Παραδόσεων), Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο, (2004).

[16] R. R. Phelps, *Dentability and extreme points in Banach spaces,* J. Funct. Anal. **16** (1974), 78-90.

[17] M. A. Rieffel, *Dentable subsets of Banach spaces, with Application to a Radon-Nikodym Theorem*, Proc. Conf. Fuct. Anal. (1967), 71-77.

[18] M. A. Rieffel, *Dentable subsets of Banach spaces with applications to Radon-Nikodym Theorem*, Proc. Conf. Functional Analysis, Thompson Book Co. , Washington, D.C. (1967), 71-77.

[19] W. Rudin, *Real And Complex Analysis,* (Third edition), McGraw - HiII, (1987).